ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

# TRẮC NGHIỆM VD - VDC

# TÍCH PHÂN

* CÓ ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT
* PHÂN LOẠI CÁC DẠNG TOÁN
* CHIA PHẦN BÀI TẬP VÀ LỜI GIẢI RIÊNG

NEW

ÔN THI THPT QUỐC GIA

# MỤC LỤC

NGUYÊN HÀM ..... 2
PHƯƠNG PHÁP NGUYÊM HÀM ĐỔI BIẾN SỐ ..... 6
PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN ..... 10
NGUYÊN HÀM HÀM ẨN ..... 14
TÍCH PHÂN ..... 18
SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT VÀ TÍCH PHÂN CƠ BẢN ..... 26
PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN SỐ ..... 31
ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 1 ..... 31
ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 2 ..... 38
TÍCH PHÂN HÀM ẨN PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN ..... 38
TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 1 ..... 38
TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 2 ..... 41
TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 3 ..... 43
TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 4 ..... 45
TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 5 ..... 46
TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 6 ..... 47
TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN ..... 49
TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN DẠNG 1: ..... 49
TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN DẠNG 2: ..... 50
TÍCH PHÂN HÀM ẨN PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN ..... 51
TÍCH PHÂN HÀM ẨN ..... 58
GTLN, GTNN, BĐT - TÍCH PHÂN ..... 65
ỨNG DỤNG TÍNH DIỆN TÍCH ..... 70
ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN VỚI HÀM SỐ ..... 83

ỨNG DỤNG THỂ TÍCH ..... Error! Bookmark not defined.
BÀI TOÁN THỰC TẾ VÀ ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH ..... Error! Bookmark not defined.
BÀI TOÁN THỰC TẾ VÀ ỨNG DỤNG THỂ TÍCH ..... Error! Bookmark not defined.
ỨNG DỤNG THỰC TẾ KHÁC ..... Error! Bookmark not defined.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

# NGUYÊN HÀM

## A – KIẾN THỨC CHUNG

### 1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $K$ ($K$ là khoảng, đoạn hay nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $K$ nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi $x\in K$.

Kí hiệu: $\int f(x)dx=F(x)+C$.

***Định lí:***

1) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $K$ thì với mỗi hằng số $C$, hàm số $G(x)=F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $K$.

2) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $K$ thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên $K$ đều có dạng $F(x)+C$, với $C$ là một hằng số.

Do đó $F(x)+C, C\in\mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên $K$.

### 2. Tính chất của nguyên hàm

$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$ và $\int f'(x)dx=f(x)+C$; $d\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)=f(x)\mathrm{d}x$

Nếu F(x) có đạo hàm thì: $\int d\left(F(x)\right)=F(x)+C$

$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ với $k$ là hằng số khác $0$.

$\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

**Công thức đổi biến số:** Cho $y=f(u)$ và $u=g(x)$.

Nếu $\int f(x)dx=F(x)+C$ thì $\int f\left(g(x)\right)g'(x)dx=\int f(u)du=F(u)+C$

### 3. Sự tồn tại của nguyên hàm

***Định lí:***

Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $K$ đều có nguyên hàm trên $K$.

### 4. Bảng nguyên hàm các hàm số thường gặp

| | |
|---|---|
| 1. $\int 0dx=C$ 2. $\int dx=x+C$ | |
| 3. $\int x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq-1)$ | 16. $\int(ax+b)^{\alpha}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c,\alpha\neq-1$ |
| 4. $\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+C$ | 17. $\int xdx=\frac{x^2}{2}+C$ |
| 5. $\int\frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$ | 18. $\int\frac{\mathrm{d}x}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+c$ |
| 6. $\int e^x dx=e^x+C$ | 19. $\int e^{ax+b}dx=\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$ |
| 7. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$ | 20. $\int a^{kx+b}dx=\frac{1}{k}\frac{a^{kx+b}}{\ln a}+C$ |
| 8. $\int\cos x dx=\sin x+C$ | 21. $\int\cos(ax+b)dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$ |

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

| | |
|---|---|
| 9. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ | 22. $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$ |
| 10. $\int \tan x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$ | 23. $\int \tan(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos(ax+b)\rvert + C$ |
| 11. $\int \cot x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$ | 24. $\int \cot(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin(ax+b)\rvert + C$ |
| 12. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$ | 25. $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$ |
| 13. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$ | 26. $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+C$ |
| 14. $\int (1+\tan^2 x)dx = \tan x + C$ | 27. $\int (1+\tan^2(ax+b))dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$ |
| 15. $\int (1+\cot^2 x)dx = -\cot x + C$ | 28. $\int (1+\cot^2(ax+b))dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+C$ |

## 5. Bảng nguyên hàm mở rộng

| | |
|---|---|
| $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$ | $\int \arcsin\frac{x}{a}dx = x\arcsin\frac{x}{a}+\sqrt{a^2-x^2}+C$ |
| $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert+C$ | $\int \arccos\frac{x}{a}dx = x\arccos\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C$ |
| $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$ | $\int \arctan\frac{x}{a}dx = x\arctan\frac{x}{a}-\frac{a}{2}\ln(a^2+x^2)+C$ |
| $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\lvert a\rvert}+C$ | $\int \operatorname{arc\,cot}\frac{x}{a}dx = x\operatorname{arc\,cot}\frac{x}{a}+\frac{a}{2}\ln(a^2+x^2)+C$ |
| $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\left\lvert\frac{x}{a}\right\rvert+C$ | |
| $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left\lvert\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right\rvert+C$ | $\int \frac{dx}{\sin(ax+b)} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert\tan\frac{ax+b}{2}\right\rvert+C$ |
| $\int \ln(ax+b)dx = \left(x+\frac{b}{a}\right)\ln(ax+b)-$ | $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}+C$ |
| $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\arcsin$ | $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C$ |

## B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Tìm giá trị thực của $a$ để $F(x)=\frac{ax+1}{\sqrt{2x+1}}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{4x+3}{\sqrt{(2x+1)^3}}$.

**A.** $a=4$. **B.** $a=5$. **C.** $a=-4$. **D.** $a=-5$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 2.** Cho $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{2x-1}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{10x^2-7x-2}{\sqrt{2x-1}}$ trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. Tính $S=a+b+c$.

**A.** $S=3$. **B.** $S=0$. **C.** $S=-6$. **D.** $S=-2$.

**Câu 3.** Cho $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{2x-3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$ trên khoảng $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. Tính $P=abc$.

**A.** $P=0$. **B.** $P=3$. **C.** $P=4$. **D.** $P=-8$.

**Câu 4.** Biết $\int\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}dx=a\ln|\sin x-\cos x|+C$. Với $a$ là số nguyên. Tìm $a$?

**A.** $a=1$. **B.** $a=2$. **C.** $a=3$. **D.** $a=4$.

**Câu 5.** Tìm một nguyên hàm của: $1+4.\dfrac{\tan^2\dfrac{x}{2}}{\left(\tan^2\dfrac{x}{2}-1\right)^2}$ biết nguyên hàm này bằng 3 khi $x=\dfrac{\pi}{4}$.

**A.** $\dfrac{1}{\cos^2 x}+3$. **B.** $\dfrac{1}{\sin^2 x}+3$. **C.** $\tan x+2$. **D.** $\cot x+2$.

**Câu 6.** Biết $\int\dfrac{1}{(25x^2-20x+4)}dx=-\dfrac{1}{a(5x-2)^5}+C$. Với $a$ là số nguyên. Tìm $a$?

**A.** $a=4$. **B.** $a=100$. **C.** $a=5$. **D.** $a=25$.

**Câu 7.** Biết $\int\dfrac{1+x}{2x^2-5x-7}dx=\dfrac{a}{b}\ln|2x-7|+C$, với $a$, $b$ là cá số nguyên. Tính $S = a + b$?

**A.** $S=4$. **B.** $S=2$. **C.** $S=3$. **D.** $S=5$.

**Câu 8.** Biết $\int\dfrac{1}{1+\sin 2x}dx=\dfrac{a}{b}\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+C$, với $a$, $b$ là cá số nguyên. Tính $S = a + b$?

**A.** $S=4$. **B.** $S=2$. **C.** $S=3$. **D.** $S=5$.

**Câu 9.** Cho $f(x)=8\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)$. Một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa $F(0)=8$ là:

**A.** $4x+2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+9$. **B.** $4x-2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+9$.

**C.** $4x+2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+7$. **D.** $4x-2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+7$.

**Câu 10.** Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $\int\dfrac{5x^2+8x-4}{x^2(1-x)^2}dx$ với $0<x<1$ và $F\left(\dfrac{1}{2}\right)=26$. Giá trị nhỏ nhất của $F(x)$ là:

**A.** 24. **B.** 20. **C.** 25. **D.** 26.

**Câu 11.** Cho $f(x)=1+|x|$. Một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa $F(1)=1$ là:

**A.** $x^2+x+1$

**B.** $\begin{cases}x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2} & \text{khi } x\ge 0\\ x-\dfrac{x^2}{2}+C_2 & \text{khi } x<0\end{cases}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**C.** $\begin{cases} \frac{x^2}{2}-x+C_1 & \text{khi } x\ge 0 \\ x-\frac{x^2}{2}+C_2 & \text{khi } x<0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} -x^2+x+C_1 & \text{khi } x\ge 0 \\ x-\frac{x^2}{2}+C_2 & \text{khi } x<0 \end{cases}$.

**Câu 12.** Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{e^x+3}$ và $F(0)=-\frac{1}{3}\ln 4$. Tập nghiệm $S$ của phương trình $3F(x)+\ln(x^3+3)=2$ là:

**A.** $S=\{2\}$. **B.** $S=\{-2;2\}$. **C.** $S=\{1;2\}$. **D.** $S=\{-2;1\}$.

**Câu 13.** **(NGUYỄN ĐÌNH CHIỂU TIỀN GIANG)** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x-2}$, thỏa mãn $F(3)=1$ và $F(1)=2$, giá trị của $F(0)+F(4)$ bằng

**A.** $2\ln 2+3$. **B.** $2\ln 2+2$. **C.** $2\ln 2+4$. **D.** $2\ln 2$.

**Câu 14.** **(Chuyên Vinh Lần 3)** Biết rằng $xe^x$ là một nguyên hàm của $f(-x)$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)e^x$ thỏa mãn $F(0)=1$, giá trị của $F(-1)$ bằng

**A.** $\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{5-e}{2}$. **C.** $\frac{7-e}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

**Câu 15.** **(Chuyên Quốc Học Huế Lần1)** Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0;\pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

**A.** $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-4$. **B.** $F\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$. **D.** $F\left(\frac{5\pi}{6}\right)=3-\sqrt{3}$.

**Câu 16.** **(Chuyên-Thái-Nguyên-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{x^2}(x^3-4x)$. Hàm số $F(x^2+x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

**A.** 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

**Câu 17.** **(Cụm 8 trường chuyên lần1)** Biết $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2x^2-5x+2)e^{-x}$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị biểu thức $f(F(0))$ bằng:

**A.** $\frac{-1}{e}$. **B.** $3e$. **C.** $20e^2$. **D.** $9e$.

**Câu 18.** **(HKII Kim Liên 2017-2018)** Cho hai hàm số $F(x)=(x^2+ax+b)e^x$, $f(x)=(x^2+3x+4)e^x$. Biết $a,b$ là các số thực để $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Tính $S=a+b$.

**A.** $S=-6$. **B.** $S=12$. **C.** $S=6$. **D.** $S=4$.

**Câu 19.** **(THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $F(1)=\frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $S=F(1)+F(2)+F(3)+\ldots+F(2019)$ bằng

**A.** $\frac{2019}{2020}$. **B.** $\frac{2019.2021}{2020}$. **C.** $2018\frac{1}{2020}$. **D.** $-\frac{2019}{2020}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 20.** **(Chuyên Vinh Lần 3)**Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x-\cos x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y=F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

**A.** Vô số điểm. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

**Câu 21.** **(Chuyên Vinh Lần 3)** Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos x+\dfrac{1}{2}x^2-1$. Hỏi đồ thị của hàm số $y=F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

**A.** Vô số điểm. **B.** 0 . **C.** 1 . **D.** 2 .

## PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM ĐỔI BIẾN SỐ

### A – KIẾN THỨC CHUNG

### 1. Đổi biến dạng 1

Nếu hàm số f(x) liên tục thì đặt $x=\varphi(t)$. Trong đó $\varphi(t)$ cùng với đạo hàm của nó ($\varphi'(t)$ là những hàm số liên tục) thì ta được :

$\int f(x)dx=\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt=\int g(t)dt=G(t)+C$ .

#### 1.1. Phương pháp chung

- *Bước 1:* Chọn t=$\varphi(x)$. Trong đó $\varphi(x)$ là hàm số mà ta chọn thích hợp .
- *Bước 2:* Tính vi phân hai vế : $dt=\varphi'(t)dt$ .
- *Bước 3:* Biểu thị : $f(x)dx=f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt=g(t)dt$ .
- *Bước 4:* Khi đó : $I=\int f(x)dx=\int g(t)dt=G(t)+C$

#### 1.2. Các dấu hiệu đổi biến thường gặp

| **Dấu hiệu** | **Cách chọn** |
|---|---|
| Hàm số mẫu số có | $t$ là mẫu số |
| Hàm số : $f\left(x;\sqrt{\varphi(x)}\right)$ | $t=\sqrt{\varphi(x)}$ |
| Hàm $f(x)=\dfrac{a.\sin x+b.\cos x}{c.\sin x+d.\cos x+e}$ | $t=\tan\dfrac{x}{2};\left(\cos\dfrac{x}{2}\neq 0\right)$ |
| Hàm $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$ | Với : $x+a>0$ và $x+b>0$.<br>Đặt : $t=\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}$<br>Với $x+a<0$ và $x+b<0$.<br>Đặt : $t=\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b}$ |

### 2. Đổi biến dạng 2

Nếu : $\int f(x)dx=F(x)+C$ và với $u=\varphi(t)$ là hàm số có đạo hàm thì : $\int f(u)du=F(\varphi(t))+C$

#### 2.1. Phương pháp chung

- *Bước 1:* Chọn $x=\varphi(t)$, trong đó $\varphi(t)$ là hàm số mà ta chọn thích hợp .
- *Bước 2:* Lấy vi phân hai vế : $dx=\varphi'(t)dt$
- *Bước 3:* Biến đổi : $f(x)dx=f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt=g(t)dt$
- *Bước 4:* Khi đó tính : $\int f(x)dx=\int g(t)dt=G(t)+C$ .

#### 2.2. Các dấu hiệu đổi biến thường gặp

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

| Dấu hiệu | Cách chọn |
|---|---|
| $\sqrt{a^2-x^2}$ | Đặt $x=\|a\|sint$ ; với $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. hoặc $x=\|a\|cost$ ; với $t\in[0;\pi]$. |
| $\sqrt{x^2-a^2}$ | Đặt $x=\frac{\|a\|}{sint}$.; với $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$ hoặc $x=\frac{\|a\|}{cost}$ với $t\in[0;\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. |
| $\sqrt{a^2+x^2}$ | Đặt $x=\|a\|tant$ ; với $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. hoặc $x=\|a\|cott$ với $t\in(0;\pi)$. |
| $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$. hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$. | Đặt $x=acos2t$ |
| $\sqrt{(x-a)(b-x)}$ | Đặt $x=a+(b-a)sin^2t$ |
| $\frac{1}{a^2+x^2}$ | Đặt $x=atant$ ; với $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. |

## B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Cho F(x) là một nguyên hàm của $f(x)=\frac{\tan x}{\cos x\sqrt{1+a\cos^2 x}}$, biết $F(0)=0$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$. Tính $F\left(\frac{\pi}{3}\right)-F\left(\frac{\pi}{4}\right)$?

**A.** $\sqrt{5}-\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{5}-1$. **C.** $\sqrt{3}+\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}-\sqrt{2}$

**Câu 2.** **(Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đăk Lăk)** Cho $\int\frac{(x-1)^{2017}}{(x+1)^{2019}}dx=\frac{1}{a}.\frac{(x-1)^b}{(x+1)^c}+C$ với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên. Giá trị $a+b+c$ bằng

**A.** 4.2018. **B.** 2.2018. **C.** 3.2018. **D.** 5.2018.

**Câu 3.** Giả sử $\int\frac{(2x+3)dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}=-\frac{1}{g(x)}+C$ ($C$ là hằng số).

Tính tổng các nghiệm của phương trình $g(x)=0$.

**A.** $-1$. **B.** 1. **C.** 3. **D.** $-3$.

**Câu 4.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-2;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $(f(x))^2.f'(x)=3x^2+4x+2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ là

**A.** $2\sqrt[3]{16}$. **B.** $\sqrt[3]{18}$. **C.** $\sqrt[3]{16}$. **D.** $2\sqrt[3]{18}$.

**Câu 5.** Hàm số nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

**A.** $F(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$. **B.** $F(x)=\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)+C$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**C.** $F(x)=\sqrt{1+x^2}+C$. **D.** $F(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}+C$

**Câu 6.** **(HSG BẮC NINH NĂM 2018-2019)** Biết $F(x)$ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\sin 2x+\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$ và $F(0)=2$. Tính $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

**A.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}-8}{3}$ **B.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}+8}{3}$ **C.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{4\sqrt{2}-8}{3}$ **D.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{4\sqrt{2}+8}{3}$

**Câu 7.** Biết $\int\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)^5.\sin 4x dx=-\dfrac{\cos^7 2x}{a}+C$. Với $a$ là số nguyên. Tìm $a$?

**A.** $a=6$. **B.** $a=12$. **C.** $a=7$. **D.** $a=14$.

**Câu 8.** Tìm $R=\int\dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}dx$?

**A.** $R=-\dfrac{\tan 2t}{2}+\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1+\sin 2t}{1-\sin 2t}\right|+C$ với $t=\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

**B.** $R=-\dfrac{\tan 2t}{2}-\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1+\sin 2t}{1-\sin 2t}\right|+C$ với $t=\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

**C.** $R=\dfrac{\tan 2t}{2}+\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1+\sin 2t}{1-\sin 2t}\right|+C$ với $t=\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

**D.** $R=\dfrac{\tan 2t}{2}-\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1+\sin 2t}{1-\sin 2t}\right|+C$ với $t=\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

**Câu 9.** $\int\left(x^3+\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)dx$ có dạng $\dfrac{a}{4}x^4-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{b}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3+C$, trong đó $a, b$ là hai số hữu tỉ. Giá trị $b, a$ lần lượt bằng:

**A.** 2; 1. **B.** 1; 1. **C.** $a,b\in\varnothing$ **D.** 1; 2.

**Câu 10.** $\int\left((x+1)e^{x^2-5x+4}\cdot e^{7x-3}+\cos 2x\right)dx$ có dạng $\dfrac{a}{6}e^{(x+1)^2}+\dfrac{b}{2}\sin 2x+C$, trong đó $a, b$ là hai số hữu tỉ. Giá trị $a, b$ lần lượt bằng:

**A.** 3; 1. **B.** 1; 3. **C.** 3; 2. **D.** 6; 1.

**Câu 11.** Tìm $I=\int\dfrac{e^x(3x-2)+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right)}dx$?

**A.** $I=x+\ln\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right)+C$. **B.** $I=x-\ln\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right)+C$.

**C.** $I=\ln\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right)+C$. **D.** $I=\ln\left(e^x.\sqrt{x-1}-1\right)+C$.

**Câu 12.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)^x+2017x}{\ln\left[\left(e.x^2+e\right)^{x^2+1}\right]}$?

**A.** $\ln\left(x^2+1\right)+1008\ln\left[\ln\left(x^2+1\right)+1\right]$.

**B.** $\ln\left(x^2+1\right)+2016\ln\left[\ln\left(x^2+1\right)+1\right]$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**C.** $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+2016\ln\left[\ln\left(x^2+1\right)+1\right]$.

**D.** $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+1008\ln\left[\ln\left(x^2+1\right)+1\right]$.

**Câu 13.** **(Chuyên KHTN)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^3 f(x)dx=8$ và $\int_0^5 f(x)dx=4$. Tính $\int_{-1}^{1} f(|4x-1|)dx$.

**A.** $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{11}{4}$. **C.** 3. **D.** 6.

**Câu 14.** Tìm $G=\int\frac{2x^2+(1+2\ln x).x+\ln^2 x}{\left(x^2+x\ln x\right)^2}dx$?

**A.** $G=\frac{-1}{x}-\frac{1}{x+\ln x}+C$. **B.** $G=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\ln x}+C$.

**C.** $G=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\ln x}+C$. **D.** $G=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\ln x}+C$.

**Câu 15.** Hàm số nào sau đây là nguyên hàm của $h(x)=\frac{1-\ln x}{x^{1-n}.\ln x.\left(x^n+\ln^n x\right)}$?

**A.** $\frac{1}{n}\ln|x|-\frac{1}{n}\ln\left|x^n+\ln^n x\right|+2016$. **B.** $\frac{1}{n}\ln|x|+\frac{1}{n}\ln\left|x^n+\ln^n x\right|+2016$.

**C.** $-\frac{1}{n}\ln|x|+\frac{1}{n}\ln\left|x^n+\ln^n x\right|+2016$. **D.** $-\frac{1}{n}\ln|x|-\frac{1}{n}\ln\left|x^n+\ln^n x\right|-2016$.

**Câu 16.** **(Quỳnh Lưu Lần 1)** Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{e^x+1}$ và $F(0)=-\ln 2e$. Tập nghiệm $S$ của phương trình $F(x)+\ln\left(e^x+1\right)=2$ là:

**A.** $S=\{3\}$. **B.** $S=\{2;3\}$. **C.** $S=\{-2;3\}$. **D.** $S=\{-3;3\}$.

**Câu 17.** Khi tính nguyên hàm $\int\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx$ người ta đặt $t=g(x)$ (một hàm biểu diễn theo biến x) thì nguyên hàm trở thành $\int 2dt$. Biết $g(4)=\frac{3}{\sqrt{5}}$, giá trị của $g(0)+g(1)$ là:

**A.** $\frac{3+\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{1+\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{2+\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{2+3\sqrt{6}}{2}$.

**Câu 18.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-2;1]$ thỏa mãn $f(0)=3$ và $\left(f(x)\right)^2.f'(x)=3x^2+4x+2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ là

**A.** $2\sqrt[3]{42}$. **B.** $2\sqrt[3]{15}$. **C.** $\sqrt[3]{42}$. **D.** $\sqrt[3]{15}$.

**Câu 19.** **(CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2018-2019 LẦN 1)** Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0;\pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-4$ **B.** $F\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$ **D.** $F\left(\frac{5\pi}{6}\right)=3-\sqrt{3}$

**Câu 20.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f(0)=\sqrt{3}$ và $f(x).f'(x)=\cos x.\sqrt{1+f^2(x)}$, $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất $m$ và giá trị lớn nhất $M$ của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$.

**A.** $m=\frac{\sqrt{21}}{2}$, $M=2\sqrt{2}$. **B.** $m=\frac{5}{2}$, $M=3$.

**C.** $m=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $M=\sqrt{3}$. **D.** $m=\sqrt{3}$, $M=2\sqrt{2}$.

## PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

### A – KIẾN THỨC CHUNG

### 1. Phương pháp nguyên hàm từng phần

Nếu u(x) , v(x) là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K:

$$\int u(x).v'(x)dx=u(x).v(x)-\int v(x).u'(x)dx$$

Hay $\int udv=uv-\int vdu$ ( với $du=u'(x)dx, dv=v'(x)dx$ )

### 1.1. Phương pháp chung

- *Bước 1:* Ta biến đổi tích phân ban đầu về dạng : $I=\int f(x)dx=\int f_1(x).f_2(x)dx$
- *Bước 2:* Đặt : $\begin{cases}u=f_1(x)\\dv=f_2(x)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}du=f'_1(x)dx\\v=\int f_2(x)dx\end{cases}$
- *Bước 3:* Khi đó : $\int u.dv=u.v-\int v.du$

### 2. Các dạng thường gặp

### 2.1. Dạng 1

$I=\int P(x)\begin{Bmatrix}\sin x\\\cos x\\e^x\end{Bmatrix}dx$ . Đặt $\begin{cases}u=P(x)\\dv=\begin{Bmatrix}\sin x\\\cos x\\e^x\end{Bmatrix}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u'.du=P'(x)dx\\v=\begin{Bmatrix}-\cos x\\\sin x\\e^x\end{Bmatrix}\end{cases}$

Vậy: $I=P(x)\begin{Bmatrix}-\cos x\\\sin x\\e^x\end{Bmatrix}-\int\begin{Bmatrix}-\cos x\\\sin x\\e^x\end{Bmatrix}.P'(x)dx$

### 2.2. Dạng 2

$I=\int P(x).\ln x dx$ . Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\dv=P(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x}dx\\v=\int P(x)dx=Q(x)\end{cases}$

Vậy $I=\ln x.Q(x)=\int Q(x).\frac{1}{x}dx$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

### 2.3. Dạng 3

$I=\int e^x\begin{Bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{Bmatrix}dx$. Đặt $\begin{cases}u=e^x\\ dv=\begin{Bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{Bmatrix}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=e^x dx\\ v=\begin{Bmatrix}-\cos x\\ \sin x\end{Bmatrix}\end{cases}$

Vậy $I=$ $I=e^x\begin{Bmatrix}-\cos x\\ \sin x\end{Bmatrix}-\int\begin{Bmatrix}-\cos x\\ \sin x\end{Bmatrix}e^x dx$

Bằng phương pháp tương tự ta tính được $\int\begin{Bmatrix}-\cos x\\ \sin x\end{Bmatrix}e^x dx$ sau đó thay vào $I$

## B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1:** **(ĐH Vinh Lần 1)** Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\tan^2 x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ là

**A.** $F(x)=x\tan x+\ln(\cos x)-\frac{x^2}{2}+C.$ **B.** $F(x)=-x\tan x+\ln(\cos x)-\frac{x^2}{2}+C.$

**C.** $F(x)=x\tan x-\ln(\cos x)-\frac{x^2}{2}+C.$ **D.** $F(x)=x\tan x-\ln|\cos x|-\frac{x^2}{2}+C.$

**Câu 2:** Cho $f(x)=\frac{x}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $xf'(x)$ thỏa mãn $F(0)=0$. Biết $a\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\tan a=3$. Tính $F(a)-10a^2+3a$.

**A.** $-\frac{1}{2}\ln 10$. **B.** $-\frac{1}{4}\ln 10$. **C.** $\frac{1}{2}\ln 10$. **D.** $\ln 10$.

**Câu 3:** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}$ và $F(0)=2$. Hãy tính $F(-1)$.

**A.** $6-\frac{15}{\mathrm{e}}$. **B.** $4-\frac{10}{\mathrm{e}}$. **C.** $\frac{15}{\mathrm{e}}-4$. **D.** $\frac{10}{\mathrm{e}}$.

**Câu 4:** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x}\ln x$.

**A.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-2)+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-2)+C$.

**C.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-1)+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-2)+C$.

**Câu 5:** Tìm $H=\int\frac{x^2dx}{(x\sin x+\cos x)^2}$?

**A.** $H=\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\tan x+C$. **B.** $H=\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}-\tan x+C$.

**C.** $H=\frac{-x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\tan x+C$. **D.** $H=\frac{-x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}-\tan x+C$.

**Câu 6:** $\int\left(2x\sqrt{x^2+1}+x\ln x\right)dx$ có dạng $\frac{a}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+\frac{b}{6}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$, trong đó $a$, $b$ là hai số hữu tỉ. Giá trị $a$ bằng:

**A.** 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Không tồn tại.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 7:** Biết $F(x)=a\ln x+\left(b+\dfrac{c}{x}\right)\ln(2x+3)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\ln(2x+3)}{x^2}$. Tính $S=a+b+c$.

**A.** $S=-1$. **B.** $S=\dfrac{1}{3}$. **C.** $S=\dfrac{7}{3}$. **D.** $S=-\dfrac{4}{3}$.

**Câu 8:** **(Trần Đại Nghĩa)** Cho $I=\displaystyle\int_1^2\dfrac{x+\ln x}{(x+1)^2}dx=\dfrac{a}{b}\ln 2-\dfrac{1}{c}$ với $a,b,c$ là các số nguyên dương và các phân số là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $S=\dfrac{a+b}{c}$.

**A.** $S=\dfrac{5}{6}$. **B.** $S=\dfrac{1}{3}$. **C.** $S=\dfrac{2}{3}$. **D.** $S=\dfrac{1}{2}$.

**Câu 9:** **(Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2)** Họ nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{(2x^2+x)\ln x+1}{x}$ là

**A.** $(x^2+x+1)\ln x-\dfrac{x^2}{2}+x+C$. **B.** $(x^2+x-1)\ln x+\dfrac{x^2}{2}-x+C$.

**C.** $(x^2+x+1)\ln x-\dfrac{x^2}{2}-x+C$. **D.** $(x^2+x-1)\ln x-\dfrac{x^2}{2}+x+C$.

**Câu 10:** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3\ln\left(\dfrac{4-x^2}{4+x^2}\right)$?

**A.** $x^4\ln\left(\dfrac{4-x^2}{4+x^2}\right)-2x^2$. **B.** $\left(\dfrac{x^4-16}{4}\right)\ln\left(\dfrac{4-x^2}{4+x^2}\right)-2x^2$.

**C.** $x^4\ln\left(\dfrac{4-x^2}{4+x^2}\right)+2x^2$. **D.** $\left(\dfrac{x^4-16}{4}\right)\ln\left(\dfrac{4-x^2}{4+x^2}\right)+2x^2$.

**Câu 11:** **(LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019)** Biết $\int f(x)\mathrm{d}x=3x\cos(2x-5)+C$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

**A.** $\int f(3x)\mathrm{d}x=3x\cos(6x-5)+C$ **B.** $\int f(3x)\mathrm{d}x=9x\cos(6x-5)+C$

**C.** $\int f(3x)\mathrm{d}x=9x\cos(2x-5)+C$ **D.** $\int f(3x)\mathrm{d}x=3x\cos(2x-5)+C$

**Câu 12:** **(Ngô Quyền Hà Nội)** Cho $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).e^{2x}$. Khi đó $\int f'(x).e^{2x}\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $-x^2+2x+C$. **B.** $-x^2+x+C$. **C.** $2x^2-2x+C$. **D.** $-2x^2+2x+C$.

**Câu 13:** **(Chuyên Quốc Học Huế Lần1)** Gọi $F(x)$ là nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số $f(x)=x^2\mathrm{e}^{ax}\,(a\neq 0)$, sao cho $F\left(\dfrac{1}{a}\right)=F(0)+1$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

**A.** $0<a\le 1$. **B.** $a<-2$. **C.** $a\ge 3$. **D.** $1<a<2$.

**Câu 14:** **(ĐH Vinh Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=\mathrm{e}^{-x},\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)\mathrm{e}^{2x}$ là

**A.** $(x-2)\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x+C$. **B.** $(x+2)\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+C$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**C.** $(x-1)e^x+C$. **D.** $(x+1)e^x+C$.

**Câu 15:** **(ĐH Vinh Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)+2xf(x)=2xe^{-x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=1$. Tất cả các nguyên hàm của $x.f(x)e^{x^2}$ là

**A.** $(x^2+1)^2+C$. **B.** $\frac{1}{2}(x^2+1)^2e^{-x^2}+C$. **C.** $(x^2+1)^2e^{-x^2}+C$. **D.** $\frac{1}{2}(x^2+1)^2+C$.

**Câu 16:** **(Chuyên Thái Bình Lần3)** Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=1$. Tính $f(1)$.

**A.** $\frac{2}{e}$. **B.** $\frac{1}{e}$. **C.** e. **D.** $\frac{e}{2}$.

**Câu 17:** **(PHÂN TÍCH BL_PT ĐỀ ĐH VINHL3 -2019..)** Biết rằng $xe^x$ là một nguyên hàm của $f(-x)$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)e^x$ thỏa mãn $F(0)=1$, giá trị của $F(-1)$ bằng

**A.** $\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{5-e}{2}$. **C.** $\frac{7-e}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

**Câu 18:** **(Sở Lạng Sơn 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$.

Biết hàm số đã cho thỏa mãn hệ thức $\int f(x)\sin x dx=-f(x)\cos x+\int \pi^x\cos x dx$. Hỏi hàm số $y=f(x)$ là hàm số nào trong các hàm số sau?

**A.** $f(x)=-\pi^x\ln\pi$. **B.** $f(x)=\frac{\pi^x}{\ln\pi}$. **C.** $f(x)=\pi^x\ln\pi$. **D.** $f(x)=-\frac{\pi^x}{\ln\pi}$.

**Câu 19:** **(Cầu Giấy Hà Nội 2019 Lần 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)-f(x)=x^2\sqrt{x}\cos x$, $\forall x\in(0;+\infty)$; $f(4\pi)=0$. Giá trị biểu thức $f(9\pi)$ là:

**A.** 0. **B.** $-3\sqrt{\pi}$. **C.** $-\sqrt{\pi}$. **D.** $-2\sqrt{\pi}$.

**Câu 20:** **(Nguyễn Khuyến)** Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\ln(x+3)}{x^2}$ thỏa mãn $F(-2)+F(1)=0$ và $F(-1)+F(2)=a\ln 2+b\ln 5$, với $a$, $b$ là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+6b$ bằng

**A.** –4. **B.** 5. **C.** 0. **D.** –3.

**Câu 21:** **(SỞ GD&ĐT BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn $f(x)+\tan x.f'(x)=\frac{x}{\cos^3 x}$. Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=a\pi\sqrt{3}+b\ln 3$ trong đó $a,b\in\mathbb{Q}$. Giá trị của biểu thức $P=a+b$ bằng

**A.** $\frac{14}{9}$ **B.** $-\frac{2}{9}$ **C.** $\frac{7}{9}$ **D.** $-\frac{4}{9}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

## NGUYÊN HÀM HÀM ẨN

**Câu 1:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$, $f(0)=1$ và $f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

**A.** $4+\ln 5$. **B.** $2+\ln 15$. **C.** $3+\ln 15$. **D.** $\ln 15$.

**Câu 2:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{3}{3x-1}$, $f(0)=1$ và $f\left(\frac{2}{3}\right)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

**A.** $3+5\ln 2$. **B.** $-2+5\ln 2$. **C.** $4+5\ln 2$. **D.** $2+5\ln 2$.

**Câu 3:** **(GIA LỘC TỈNH HẢI DƯƠNG 2019 lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ thoả mãn $f'(x)=\frac{3x-1}{x+2}$, $f(0)=1$ và $f(-4)=2$. Giá trị của biểu thức $f(2)+f(-3)$ bằng

**A.** $12$. **B.** $\ln 2$. **C.** $10+\ln 2$. **D.** $3-20\ln 2$.

**Câu 4:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\frac{4}{x^2-4}$; $f(-3)=0$; $f(0)=1$ và $f(3)=2$. Tính giá trị biểu thức $P=f(-4)+f(-1)+f(4)$.

**A.** $P=3+\ln\frac{3}{25}$. **B.** $P=3+\ln 3$. **C.** $P=2+\ln\frac{5}{3}$. **D.** $P=2-\ln\frac{5}{3}$.

**Câu 5:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2+x-2}$; $f(-3)-f(3)=0$ và $f(0)=\frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4)+f(-1)-f(4)$ bằng

**A.** $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2$. **B.** $1+\ln 80$. **C.** $1+\ln 2+\frac{1}{3}\ln\frac{4}{5}$. **D.** $1+\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}$.

**Câu 6:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2-1}$. Biết $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Giá trị $T=f(-2)+f(0)+f(4)$ bằng:

**A.** $T=2+\frac{1}{2}\ln\frac{5}{9}$. **B.** $T=1+\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$. **C.** $T=3+\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$. **D.** $T=\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$.

**Câu 7:** **(THPT ĐOÀN THƯỢNG - HẢI DƯƠNG - 2018 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x).f(x)=x^4+x^2$. Biết $f(0)=2$. Tính $f^2(2)$.

**A.** $f^2(2)=\frac{313}{15}$. **B.** $f^2(2)=\frac{332}{15}$. **C.** $f^2(2)=\frac{324}{15}$. **D.** $f^2(2)=\frac{323}{15}$.

**Câu 8:** **(Đặng Thành Nam Đề 15)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f'(x)+\frac{f(x)}{x}=x^2$ và $f(1)=-1$. Giá trị của $f\left(\frac{3}{2}\right)$ bằng

**A.** $\frac{1}{96}$. **B.** $\frac{1}{64}$. **C.** $\frac{1}{48}$. **D.** $\frac{1}{24}$.

**Câu 9:** **(ĐỀ THI CÔNG BẰNG KHTN LẦN 02 NĂM 2018-2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2$ với mọi $x>0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

**A.** $5$. **B.** $10$. **C.** $20$. **D.** $15$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 10:** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2 + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $(f(1))^2$ là

**A.** $10$. **B.** $8$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

**Câu 11:** **(Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[-1;0]$, đồng thời thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (3x^2 + 2x)e^{-f(x)}$, $\forall x \in [-1;0]$. Tính $A = f(0) - f(-1)$.

**A.** $A = -1$. **B.** $A = \frac{1}{e}$. **C.** $A = 1$. **D.** $A = 0$.

**Câu 12:** **(THPT LÝ THƯỜNG KIỆT – HÀ NỘI)** Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1, f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1}$ với mọi $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

**A.** $4 < f(5) < 5$. **B.** $1 < f(5) < 2$. **C.** $3 < f(5) < 4$. **D.** $2 < f(5) < 3$.

**Câu 13:** **(Sở Quảng Ninh Lần1)** Biết luôn có hai số $a$ và $b$ để $F(x) = \frac{ax+b}{x+4} (4a - b \neq 0)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $2f^2(x) = (F(x) - 1)f'(x)$. Khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất?

**A.** $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. **B.** $a = 1, b = 4$. **C.** $a = 1, b = -1$. **D.** $a = 1, b \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

**Câu 14:** Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(2) = \frac{1}{15}$ và $f'(x) + (2x+4)f^2(x) = 0$. Tính $f(1) + f(2) + f(3)$.

**A.** $\frac{7}{15}$. **B.** $\frac{11}{15}$. **C.** $\frac{11}{30}$. **D.** $\frac{7}{30}$.

**Câu 15:** Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f^6(x).f'(x) = 12x + 13$ và $f(0) = 2$. Khi đó phương trình $f(x) = 3$ có bao nhiêu nghiệm?

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $7$. **D.** $1$.

**Câu 16:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = \sqrt{e^x + e^{-x} - 2}$, $f(0) = 5$ và $f\left(\ln\frac{1}{4}\right) = 0$. Giá trị của biểu thức $S = f(-\ln 16) + f(\ln 4)$ bằng

**A.** $S = \frac{31}{2}$. **B.** $S = \frac{9}{2}$. **C.** $S = \frac{5}{2}$. **D.** $f(0).f(2) = 1$.

**Câu 17:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = 1$ và $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x$. Tìm các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

**A.** $m > e$. **B.** $0 < m \leq 1$. **C.** $0 < m < e$. **D.** $1 < m < e$.

**Câu 18:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = (2x+1)f^2(x)$ và $f(1) = -0,5$. Biết rằng tổng $f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(2017) = \frac{a}{b}$; $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N})$ với $\frac{a}{b}$ tối giản. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** $a+b=-1$. **B.** $a\in(-2017;2017)$. **C.** $\frac{a}{b}<-1$. **D.** $b-a=4035$.

**Câu 19:** **(SỞ GD&ĐT HÀ NỘI NĂM 2018-2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(x)\neq 0$ với mọi $x$ và thỏa mãn $f(1)=-\frac{1}{2}$, $f'(x)=(2x+1)f^2(x)$ .Biết $f(1)+f(2)+...+f(2019)=\frac{a}{b}-1$ với $a,b\in\mathbb{N},(a,b)=1$ .Khẳng định nào sau đây **sai**?

**A.** $a-b=2019$. **B.** $ab>2019$. **C.** $2a+b=2022$. **D.** $b\leq 2020$.

**Câu 20:** **( Nguyễn Tất Thành Yên Bái)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ , biết $f'(x)+(2x+1)f^2(x)=0$, $\forall x>0$ và $f(2)=\frac{1}{6}$. Tính giá trị của biểu thức $P=f(1)+f(2)+...+f(2019)$.

**A.** $\frac{2021}{2020}$. **B.** $\frac{2020}{2019}$. **C.** $\frac{2019}{2020}$. **D.** $\frac{2018}{2019}$.

**Câu 21:** Cho hàm số $f(x)\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3).f^2(x)$ và $f(0)=\frac{-1}{2}$. Biết tổng $f(1)+f(2)+...+f(2017)+f(2018)=\frac{a}{b}$ với $a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\frac{a}{b}<-1$. **B.** $\frac{a}{b}>1$.

**C.** $a+b=1010$. **D.** $b-a=3029$.

**Câu 22:** Cho hàm số $y=f(x)$, $\forall x\geq 0$, thỏa mãn $\begin{cases} f''(x).f(x)-2\left[f'(x)\right]^2+xf^3(x)=0 \\ f'(0)=0;\ f(0)=1 \end{cases}$. Tính $f(1)$.

**A.** $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{6}{7}$. **D.** $\frac{7}{6}$.

**Câu 23:** Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục, dương trên $\mathbb{R}$; thỏa mãn $f(0)=1$ và $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{x}{x^2+1}$. Khi đó hiệu $T=f\left(2\sqrt{2}\right)-2f(1)$ thuộc khoảng

**A.** $(2;3)$. **B.** $(7;9)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(9;12)$.

**Câu 24:** **(THPT CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 01 NĂM 2018-2019)** Cho hàm số $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=1$ và $f(x)=\sqrt{x+1}.f'(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $f(x)<2$ **B.** $2<f(x)<4$ **C.** $f(x)>6$ **D.** $4<f(x)<6$

**Câu 25:** Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}$, với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $4<f(5)<5$. **B.** $2<f(5)<3$.

**C.** $3<f(5)<4$. **D.** $1<f(5)<2$.

**Câu 26:** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$ . Giá trị của $f^2(1)$ bằng

**A.** $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $10$. **D.** $8$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 27:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int \frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}dx = \frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5}+C$. Nguyên hàm của hàm số $f(2x)$ trên tập $\mathbb{R}^+$ là:

**A.** $\frac{x+3}{2\left(x^2+4\right)}+C$. **B.** $\frac{x+3}{x^2+4}+C$. **C.** $\frac{2x+3}{4\left(x^2+1\right)}+C$. **D.** $\frac{2x+3}{8\left(x^2+1\right)}+C$.

**Câu 28:** **(Sở Ninh Bình 2019 lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=3$ và $x(4-f'(x))=f(x)-1$ với mọi $x>0$. Tính $f(2)$.

**A.** $6$. **B.** $2$. **C.** $5$. **D.** $3$.

**Câu 29:** **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f'(x)-2f(x)=0$. Tính $f(-1)$ biết rằng $f(1)=1$.

**A.** $e^{-4}$. **B.** $e^3$. **C.** $e^4$. **D.** $e^{-2}$.

**Câu 30:** **(SỞ GD&ĐT QUẢNG NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Biết luôn có hai số $a$ và $b$ để $F(x)=\frac{ax+b}{x+4}(4a-b\neq 0)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $2f^2(x)=\left(F(x)-1\right)f'(x)$. Khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất?

**A.** $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$. **B.** $a=1$, $b=4$. **C.** $a=1, b=-1$. **D.** $a=1, b\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$.

**Câu 31:** **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Cho hàm số $f(x)\neq 0$; $f'(x)=(2x+1).f^2(x)$ và $f(1)=-0,5$. Biết tổng $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)=\frac{a}{b}$; $(a\in\mathbb{Z};b\in\mathbb{N})$ với $\frac{a}{b}$ tối giản. Chọn khẳng định đúng.

**A.** $\frac{a}{b}<-1$. **B.** $a-b=1$. **C.** $b-a=4035$. **D.** $a+b=-1$.

**Câu 32:** **(THPT LÝ NHÂN TÔNG LẦN 1 NĂM 2018-2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục không âm trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f(x).f'(x)=\cos x\sqrt{1+f^2(x)}$ với mọi $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ và $f(0)=\sqrt{3}$. Giá trị của $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

**A.** $2$. **B.** $1$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $0$.

**Câu 33:** **(Sở Bắc Ninh)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $R$ thỏa mãn các điều kiện: $f(0)=2\sqrt{2}$, $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(x).f'(x)=(2x+1)\sqrt{1+f^2(x)}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó giá trị $f(1)$ bằng

**A.** $\sqrt{26}$. **B.** $\sqrt{24}$. **C.** $\sqrt{15}$. **D.** $\sqrt{23}$.

**Câu 34:** **(THPT YÊN PHONG 1 NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên tập $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}$ và $f(x)>-1$, $f(0)=0$. Tính $f\left(\sqrt{3}\right)$.

**A.** $\sqrt{3}$. **B.** $9$. **C.** $3$. **D.** $0$.

**Câu 35:** **(KHTN Hà Nội Lần 3)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;4]$ thỏa mãn $f''(x)f(x)+\frac{\left[f(x)\right]^2}{\sqrt{(2x+1)^3}}=\left[f'(x)\right]^2$ và $f(x)>0$ với mọi $x\in[0;4]$. Biết rằng $f'(0)=f(0)=1$, giá trị của $f(4)$ bằng

**A.** $e^2$. **B.** $2e$. **C.** $e^3$. **D.** $e^2+1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 36:** **(THPT NGHĨA HƯNG NĐ- GK2 - 2018 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[xf'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x).f''(x)\right]$ với mọi $x$ dương. Biết $f(1)=f'(1)=1$. Giá trị $f^2(2)$ bằng

**A.** $f^2(2)=\sqrt{2\ln 2+2}$.
**B.** $f^2(2)=2\ln 2+2$.
**C.** $f^2(2)=\ln 2+1$.
**D.** $f^2(2)=\sqrt{\ln 2+1}$.

**Câu 37:** **(Chuyên Thái Nguyên)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left(f'(x)\right)^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Giá trị của $\left(f(1)\right)^2$ là

**A.** $10$.
**B.** $8$.
**C.** $\frac{5}{2}$.
**D.** $\frac{9}{2}$.

## TÍCH PHÂN

### 1. Công thức tính tích phân

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

* *Nhận xét*: Tích phân của hàm số $f$ từ $a$ đến $b$ có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x)dx$ hay $\int_a^b f(t)dt$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào $f$ và các cận $a$, $b$ mà không phụ thuộc vào cách ghi biến số.

### 2. Tính chất của tích phân

Giả sử cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $K, a, b, c$ là ba số bất kỳ thuộc $K$. Khi đó ta có :

1. $\int_a^a f(x)dx=0$
2. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.
3. $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$
4. $\int_a^b\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$.
5. $\int_a^b kf(x)dx=k.\int_a^b f(x)dx$.
6. Nếu f(x) $\geq 0,\forall x\in[a;b]$ thì : $\int_a^b f(x)dx\geq 0\forall x\in[a;b]$
7. Nếu $\forall x\in[a;b]: f(x)\geq g(x)\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$.
8. Nếu $\forall x\in[a;b]$ Nếu $M\leq f(x)\leq N$ thì $M(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq N(b-a)$.

### 3. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

### 1. Phương pháp đổi biến

### 1.1. Phương pháp đổi biến dạng 1

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Định lí**

Nếu hàm số $u = u(x)$ đơn điệu và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ sao cho

$f(x)dx = g\left(u(x)\right)u'(x)dx = g(u)du$ thì: $I = \int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du$.

**1.2. Phương pháp chung**

- *Bước 1:* Đặt $u = u(x) \Rightarrow du = u'(x)dx$
- *Bước 2:* Đổi cận : $\begin{vmatrix} x = b \\ x = a \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} u = u(b) \\ u = u(a) \end{vmatrix}$
- *Bước 3:* Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo $u$

Vậy: $I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b g\left[u(x)\right].u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du$

**2.1. Phương pháp đổi biến số dạng 1**

**Định lí**

Nếu 1) Hàm $x = u(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[\alpha;\ \beta]$

2) Hàm hợp $f(u(t))$ được xác định trên $[\alpha;\ \beta]$,

3) $u(\alpha) = a,\ u(\beta) = b$

Khi đó: $I = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt$.

**2.2. Phương pháp chung**

- *Bước 1:* Đặt $x = u\left(t\right)$
- *Bước 2:* Tính vi phân hai vế : $x = u(t) \Rightarrow dx = u'(t)dt$

Đổi cận: $\begin{vmatrix} x = b \\ x = a \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} t = \beta \\ t = \alpha \end{vmatrix}$

- *Bước 3:* Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo biến t

Vậy: $I = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left[u(t)\right]u'(t)dt = \int_\alpha^\beta g(t)dt = G(t)\Big|_\alpha^\beta = G(\beta) - G(\alpha)$

**2. Phương pháp tích phân từng phần**

**Định lí**

Nếu $u(x)$ và $v(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$ thì:

$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$ Hay $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

**2.1 Phương pháp chung**

- *Bước 1:* Viết $f(x)dx$ dưới dạng $udv = uv'dx$ bằng cách chọn một phần thích hợp của $f(x)$ làm $u(x)$ và phần còn lại $dv = v'(x)dx$
- *Bước 2:* Tính $du = u'dx$ và $v = \int dv = \int v'(x)dx$
- *Bước 3:* Tính $\int_a^b vu'(x)dx$ và $uv\Big|_a^b$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

*** Cách đặt u và dv trong phương pháp tích phân từng phần.**

| Đặt u theo thứ tự ưu tiên: ***Lốc-đa-mũ-lương*** | $\int_a^b P(x)e^x dx$ | $\int_a^b P(x)\ln x dx$ | $\int_a^b P(x)\cos x dx$ | $\int_a^b e^x \cos x dx$ |
|---|---|---|---|---|
| *u* | *P(x)* | *lnx* | *P(x)* | $e^x$ |
| *dv* | $e^x dx$ | *P(x)dx* | *cosxdx* | *cosxdx* |

***Chú ý***: Nên chọn $u$ là phần của $f(x)$ mà khi lấy đạo hàm thì đơn giản, chọn $dv = v'dx$ là phần của $f(x)dx$ là vi phân một hàm số đã biết hoặc có nguyên hàm dễ tìm.

## 3. TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ SƠ CẤP CƠ BẢN

### 3.1. Tích phân hàm hữu tỉ

#### Dạng 1

$$I = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int_\alpha^\beta \frac{adx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b|\Big|_\alpha^\beta. \quad (\text{với } a\neq 0)$$

Chú ý: Nếu $I = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{(ax+b)^k} = \frac{1}{a}\int_\alpha^\beta (ax+b)^{-k}.adx = \frac{1}{a(1-k)}.(ax+b)^{-k+1}\Big|_\alpha^\beta$

#### Dạng 2

$$I = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad (a\neq 0) \quad (ax^2+bx+c\neq 0 \text{ với mọi } x\in[\alpha;\beta])$$

Xét $\Delta = b^2-4ac$.

□ Nếu $\Delta > 0$ thì $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{a(x_1-x_2)}\left(\frac{1}{x-x_1}-\frac{1}{x-x_2}\right) \text{ thì :}$$

$$I = \frac{1}{a(x_1-x_2)}\int_\alpha^\beta\left(\frac{1}{x-x_1}-\frac{1}{x-x_2}\right)dx = \frac{1}{a(x_1-x_2)}\left[\ln|x-x_1|-\ln|x-x_2|\right]\Big|_\alpha^\beta$$

$$= \frac{1}{a(x_1-x_2)}\ln\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right|\Big|_\alpha^\beta$$

□ Nếu $\Delta = 0$ thì $\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x-x_0)^2} \quad \left(x_0 = \frac{-b}{2a}\right)$

thì $I = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int_\alpha^\beta \frac{dx}{(x-x_0)^2} = -\frac{1}{a(x-x_0)}\Big|_\alpha^\beta$

□ Nếu $\Delta < 0$ thì $I = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}\right)^2\right]}$

Đặt $x+\frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}\tan t \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\Delta}{a^2}}\left(1+\tan^2 t\right)dt$

#### Dạng 3

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx,\quad (a\neq 0)$.

(trong đó $f(x)=\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}$ liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$)

- Bằng phương pháp đồng nhất hệ số, ta tìm $A$ và $B$ sao cho:

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}=\frac{A(ax^2+bx+c)'}{ax^2+bx+c}+\frac{B}{ax^2+bx+c}=\frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}+\frac{B}{ax^2+bx+c}$$

- Ta có $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx+\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{B}{ax^2+bx+c}dx$

Tích phân $\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx=A\ln\left|ax^2+bx+c\right|\Big|_{\alpha}^{\beta}$

Tích phân $\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ thuộc dạng 2.

**Dạng 4**

$I=\int\limits_{a}^{b}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ với $P(x)$ và $Q(x)$ là đa thức của $x$.

- Nếu bậc của $P(x)$ lớn hơn hoặc bằng bậc của $Q(x)$ thì dùng phép chia đa thức.
- Nếu bậc của $P(x)$ nhỏ hơn bậc của $Q(x)$ thì có thể xét các trường hợp:
- Khi $Q(x)$ chỉ có nghiệm đơn $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ thì đặt

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{x-\alpha_2}+...+\frac{A_n}{x-\alpha_n}.$$

- Khi $Q(x)$ có nghiệm đơn và vô nghiệm

$Q(x)=(x-\alpha)(x^2+px+q),\Delta=p^2-4q<0$ thì đặt

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{Bx+C}{x^2+px+q}.$$

- Khi $Q(x)$ có nghiệm bội

$Q(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^2$ với $\alpha\neq\beta$ thì đặt

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}+\frac{C}{(x-\beta)^2}.$$

$Q(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^3$ với $\alpha\neq\beta$ thì đặt

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^2(x-\beta)^3}=\frac{A}{(x-\alpha)^2}+\frac{B}{(x-\alpha)}+\frac{C}{(x-\beta)^3}+\frac{D}{(x-\beta)^2}+\frac{E}{x-\beta}$$

**3.2. Tích phân hàm vô tỉ**

$\int\limits_{a}^{b}R(x,f(x))dx$ **Trong đó** $R(x,f(x))$ ***có dạng:***

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

- $R\left(x,\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)$ Đặt $x=a\cos 2t,\ t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
- $R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)$ Đặt $x=|a|\sin t$ hoặc $x=|a|\cos t$
- $R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ Đặt $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$
- $R\left(x,f\left(x\right)\right)=\frac{1}{(ax+b)\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$ Với $\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)'=k\left(ax+b\right)$

  Đặt $t=\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$, hoặc Đặt $t=\frac{1}{ax+b}$
- $R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)$ Đặt $x=|a|\tan t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
- $R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)$ Đặt $x=\frac{|a|}{\cos x}$, $t\in[0;\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
- $R\left(\sqrt[n_1]{x};\sqrt[n_2]{x};...;\sqrt[n_i]{x}\right)$ Gọi $k=BSCNN\left(n_1;n_2;...;n_i\right)$. Đặt $x=t^k$

**Dạng 1**

$$I=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx\quad\left(a\neq 0\right)$$

Từ : $f(x)=ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{b}{2a}=u\\ \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=K\end{cases}\leftrightarrow du=dx$

Khi đó ta có :

- Nếu $\Delta<0,a>0\Rightarrow f(x)=a\left(u^2+k^2\right)\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=\sqrt{a}.\sqrt{u^2+k^2}$ (1)
- $\Delta=0\Rightarrow f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \sqrt{f(x)}=\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\sqrt{a}.|u|\end{cases}$ (2)
- Nếu :
- Nếu : $\Delta>0$.
- Với $a>0$ : $f(x)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=\sqrt{a}.\sqrt{\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}$ (3)
- Với $a<0$ : $f(x)=-a\left(x_1-x\right)\left(x_2-x\right)\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=\sqrt{-a}.\sqrt{\left(x_1-x\right)\left(x_2-x\right)}$ (4)

Căn cứ vào phân tích trên , ta có một số cách giải sau :

- **Phương pháp :**

** Trường hợp :* $\Delta<0,a>0\Rightarrow f(x)=a\left(u^2+k^2\right)\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=\sqrt{a}.\sqrt{u^2+k^2}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Khi đó đặt : $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}.x$

$$\Rightarrow\begin{cases}bx+c=t^2-2\sqrt{a}x\\ x=\alpha\to t=t_0, x=\beta\to t=t_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}};dx=\dfrac{2}{\left(b+2\sqrt{a}\right)}tdt\\ t-\sqrt{a}.x=t-\sqrt{a}\dfrac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}}\end{cases}$$

*Trường hợp :* $\Delta=0\Rightarrow f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \sqrt{f(x)}=\sqrt{a}\left|x+\dfrac{b}{2a}\right|=\sqrt{a}.|u|\end{cases}$

Khi đó : $I=\int\limits_\alpha^\beta\dfrac{1}{\sqrt{a}\left|x+\dfrac{b}{2a}\right|}dx=\dfrac{1}{\sqrt{a}}\int\limits_\alpha^\beta\dfrac{1}{\left|x+\dfrac{b}{2a}\right|}dx=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)\Big|_\alpha^\beta : x+\dfrac{b}{2a}>0\\ -\dfrac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)\Big|_\alpha^\beta : x+\dfrac{b}{2a}<0\end{bmatrix}$

*Trường hợp :* $\Delta>0, a>0$. Đặt : $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=\begin{bmatrix}(x-x_1)t\\ (x-x_2)t\end{bmatrix}$

*Trường hợp :* $\Delta>0, a<0$. Đặt : $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x_1-x)(x_2-x)}=\begin{bmatrix}(x_1-x)t\\ (x_2-x)t\end{bmatrix}$

**Dạng 2**

$$I=\int\limits_\alpha^\beta\dfrac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx\quad(a\neq0)$$

- **Phương pháp :**
- *Bước 1:*

Phân tích $f(x)=\dfrac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\dfrac{A.d\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\dfrac{B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\quad(1)$

- *Bước 2:*

Quy đồng mẫu số , sau đó đồng nhất hệ số hai tử số để suy ra hệ hai ẩn số $A, B$

- *Bước 3:*

Giải hệ tìm $A, B$ thay vào (1)

- *Bước 4 :*

Tính $I=2A\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\Big|_\alpha^\beta+B\int\limits_\alpha^\beta\dfrac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ (2)

Trong đó $\int\limits_\alpha^\beta\dfrac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx\quad(a\neq0)$ đã biết cách tính ở trên

**Dạng 3**

$$I=\int\limits_\alpha^\beta\dfrac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx\quad(a\neq0)$$

- **Phương pháp :**
- *Bước 1:*

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Phân tích : $\frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{m\left(x+\frac{n}{m}\right)\sqrt{ax^2+bx+c}}$. (1)

□ *Bước 2:*

Đặt : $\frac{1}{y} = x + \frac{n}{m} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x+t}\left(t = \frac{n}{m}\right) \to dy = -\frac{1}{x+t}dx \\ x = \frac{1}{y} - t \Rightarrow ax^2+bx+c = a\left(\frac{1}{y}-t\right)^2 + b\left(\frac{1}{y}-t\right)+c \end{cases}$

□ *Bước 3:*

Thay tất cả vào (1) thì I có dạng : $I = \pm\int_{\alpha'}^{\beta'} \frac{dy}{\sqrt{Ly^2+My+N}}$. Tích phân này chúng ta đã biết cách tính .

**Dạng 4**

$I = \int_{\alpha}^{\beta} R(x;y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} R\left(x; \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$

( Trong đó : $R(x;y)$ là hàm số hữu tỷ đối với hai biến số x,y và $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ là các hằng số đã biết )

□ ***Phương pháp :***

□ *Bước 1:*

Đặt : $t = \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$ (1)

□ *Bước 2:*

Tính x theo t : Bằng cách nâng lũy thừa bậc m hai vế của (1) ta có dạng $x = \varphi(t)$

□ *Bước 3:*

Tính vi phân hai vế : $dx = \varphi'(t)dt$ và đổi cận

□ *Bước 4:*

Tính : $\int_{\alpha}^{\beta} R\left(x; \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx = \int_{\alpha'}^{\beta'} R(\varphi(t);t)\varphi'(t)dt$

### 3.3. Tích phân hàm lượng giác

### Một số dạng tích phân lượng giác

□ Nếu gặp $I = \int_a^b f(\sin x).\cos x dx$ ta đặt $t = \sin x$.

□ Nếu gặp dạng $I = \int_a^b f(\cos x).\sin x dx$ ta đặt $t = \cos x$.

□ Nếu gặp dạng $I = \int_a^b f(\tan x)\frac{dx}{\cos^2 x}$ ta đặt $t = \tan x$.

□ Nếu gặp dạng $I = \int_a^b f(\cot x)\frac{dx}{\sin^2 x}$ ta đặt $t = \cot x$.

**Dạng 1**

$I_1 = \int (\sin x)^n dx$ ; $I_2 \int (\cos x)^n dx$

*** Phương pháp**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

- Nếu $n$ chẵn thì sử dụng công thức hạ bậc
- Nếu $n=3$ thì sử dụng công thức hạ bậc hoặc biến đổi
- Nếu $3n$ lẻ $(n=2p+1)$ thì thực hiện biến đổi:

$$I_1=\int(\sin x)^n dx=\int(\sin x)^{2p+1}dx=\int(\sin x)^{2p}\sin x dx=-\int(1-\cos^2 x)^p d(\cos x)$$

$$=-\int\left[C_p^0-C_p^1\cos^2 x+\ldots+(-1)^k C_p^k(\cos^2 x)^k+\ldots+(-1)^p C_p^p(\cos^2 x)^p\right]d(\cos x)$$

$$=-\left[C_p^0\cos x-\frac{1}{3}C_p^1\cos^3 x+\ldots+\frac{(-1)^k}{2k+1}C_p^k(\cos x)^{2k+1}+\ldots+\frac{(-1)^p}{2p+1}C_p^p(\cos x)^{2p+1}\right]+c$$

$$I_2=\int(\cos x)^n dx=\int(\cos x)^{2p+1}dx=\int(\cos x)^{2p}\cos x dx=\int(1-\sin^2 x)^p d(\sin x)$$

$$=\int\left[C_p^0-C_p^1\sin^2 x+\ldots+(-1)^k C_p^k(\sin^2 x)^k+\ldots+(-1)^p C_p^p(\sin^2 x)^p\right]d(\sin x)$$

$$=\left[C_p^0\sin x-\frac{1}{3}C_p^1\sin^3 x+\ldots+\frac{(-1)^k}{2k+1}C_p^k(\sin x)^{2k+1}+\ldots+\frac{(-1)^p}{2p+1}C_p^p(\sin x)^{2p+1}\right]+c$$

## Dạng 2

$$I=\int\sin^m x\cos^n x dx\quad (m,n\in N)$$

*** Phương pháp**

- ***Trường hợp 1:*** *$m,n$ là các số nguyên*

**a.** Nếu $m$ chẵn, $n$ chẵn thì sử dụng công thức hạ bậc, biến đổi tích thành tổng.

**b.** Nếu $m$ chẵn, $n$ lẻ $(n=2p+1)$ thì biến đổi:

$$\mathrm{I}=\int(\sin x)^m(\cos x)^{2p+1}dx=\int(\sin x)^m(\cos x)^{2p}\cos x dx=\int(\sin x)^m(1-\sin^2 x)^p d(\sin x)$$

$$=\int(\sin x)^m\left[C_p^0-C_p^1\sin^2 x+\ldots+(-1)^k C_p^k(\sin^2 x)^k+\ldots+(-1)^p C_p^p(\sin^2 x)^p\right]d(\sin x)=$$

$$\left[C_p^0\frac{(\sin x)^{m+1}}{m+1}-C_p^1\frac{(\sin x)^{m+3}}{m+3}+\ldots+(-1)^k C_p^k\frac{(\sin x)^{2k+1+m}}{2k+1+m}+\ldots+(-1)^p C_p^p\frac{(\sin x)^{2p+1+m}}{2p+1+m}\right]+c$$

**c.** Nếu $m$ lẻ $(m=2p+1)$, $n$ chẵn thì biến đổi:

$$\mathrm{I}=\int(\sin x)^{2p+1}(\cos x)^n dx=\int(\cos x)^n(\sin x)^{2p}\sin x dx=-\int(\cos x)^n(1-\cos^2 x)^p d(\cos x)$$

$$=-\int(\cos x)^n\left[C_p^0-C_p^1\cos^2 x+\ldots+(-1)^k C_p^k(\cos^2 x)^k+\ldots+(-1)^p C_p^p(\cos^2 x)^p\right]d(\cos x)=$$

$$-\left[C_p^0\frac{(\cos x)^{n+1}}{n+1}-C_p^1\frac{(\cos x)^{n+3}}{n+3}+\ldots+(-1)^k C_p^k\frac{(\cos x)^{2k+1+n}}{2k+1+n}+\ldots+(-1)^p C_p^p\frac{(\cos x)^{2p+1+n}}{2p+1+n}\right]+c$$

**d.** Nếu $m$ lẻ, $n$ lẻ thì sử dụng biến đổi 1.2. hoặc 1.3. cho số mũ lẻ bé hơn.

- ***Nếu $m,n$ là các số hữu tỉ thì biến đổi và đặt $u=\sin x$***

$$B=\int\sin^m x\cos^n x dx=\int(\sin x)^m(\cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}}\cos x dx=\int u^m(1-u^2)^{\frac{n-1}{2}}du\quad (*)$$

Tích phân (*) tính được $\Leftrightarrow$ 1 trong 3 số $\frac{m+1}{2}$; $\frac{n-1}{2}$; $\frac{m+k}{2}$ là số nguyên

## Dạng 3

$$I_1=\int(\tan x)^n dx\ ;\ I_2=\int(\cot x)^n dx\ (n\in N).$$

- $$\int(1+\tan^2 x)dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\int d(\tan x)=\tan x+c$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

- $\int(1+\cot^2 x)dx=\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\int d(\cot x)=-\cot x+C$
- $\int\tan x dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C$
- $\int\cot x dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}=\ln|\sin x|+C$

## SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT VÀ TÍCH PHÂN CƠ BẢN

**Câu 1.** **(Thuan-Thanh-Bac-Ninh)** Biết $\int_0^1\frac{3x-1}{x^2+6x+9}\mathrm{d}x=3\ln\frac{a}{b}-\frac{5}{6}$, trong đó $a$, $b$ là hai số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $a^2-b^2$ bằng

**A.** 7. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 5.

**Câu 2.** **(KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG)** Cho tích phân $\int_2^3\frac{1}{x^3+x^2}\mathrm{d}x=a\ln 3+b\ln 2+c$ với $a$, $b$, $c\in\mathbb{Q}$. Tính $S=a+b+c$.

**A.** $S=-\frac{2}{3}$. **B.** $S=-\frac{7}{6}$. **C.** $S=\frac{2}{3}$. **D.** $S=\frac{7}{6}$.

**Câu 3.** **(Sở Phú Thọ)** Cho $\int_3^4\frac{5x-8}{x^2-3x+2}dx=a\ln 3+b\ln 2+c\ln 5$ với $a,b,c$ là các số hữu tỉ. Giá trị của $2^{a-3b+c}$ bằng

**A.** 12. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 64.

**Câu 4.** **(CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3)** Cho $\int_3^5\frac{x^2-2}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x=a+b\ln 2+c\ln 3$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c$.

**A.** 9. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

**Câu 5.** **(Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2)** Cho $\int_0^1\frac{4x^2+15x+11}{2x^2+5x+2}\mathrm{d}x=a+b\ln 2+c\ln 3$ với $a$, $b$, $c$ là các số hữu tỷ. Biểu thức $T=a.c-b$ bằng

**A.** 4. **B.** 6. **C.** $\frac{-1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

**Câu 6.** Biết $\int\frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6}\mathrm{d}x=\ln\left|(x-1)^m(x-2)^n(x-3)^p\right|+C$. Tính $4(m+n+p)$.

**A.** 5. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

**Câu 7.** Biết $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+2}+(x+2)\sqrt{x}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}-c$ với $a,b,c$ là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.

**A.** $P=2$. **B.** $P=8$. **C.** $P=46$. **D.** $P=22$.

**Câu 8.** Biết $I=\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.

**A.** $P=24$. **B.** $P=12$. **C.** $P=18$. **D.** $P=46$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 9.** **(Chuyên Vinh Lần 3)** Cho hàm số $G(x)=\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}dt$. Tính đạo hàm của hàm số $G(x)$.

**A.** $G'(x)=2x\sin|x|$ **B.** $G'(x)=2x\cos x$ **C.** $G'(x)=\cos x$ **D.** $G'(x)=2x\sin x$

**Câu 10.** **(THPT NINH BÌNH – BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019)** Biết rằng $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-4\sin x+7\cos x}{2\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x=a+2\ln\frac{b}{c}$ với $a>0;b,c\in\mathbb{N}^*;\frac{b}{c}$ tối giản. Hãy tính giá trị biểu thức $P=a-b+c$.

**A.** $\pi-1$. **B.** $\frac{\pi}{2}+1$. **C.** $\frac{\pi}{2}-1$. **D.** $1$.

**Câu 48:** **(THPT YÊN PHONG 1 BẮC NINH NĂM HỌC 2018-2019 LẦN 2)** Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cot\left(\frac{5\pi}{12}-x\right)\tan\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}dx=\frac{2+\sqrt{a}}{2}\ln b-\frac{\pi}{c}$ với $a,b,c$ là các số nguyên dương. Tính $a^2+b^2+c^2$

**A.** $48$. **B.** $18$. **C.** $34$. **D.** $36$.

**Câu 4:** Biết $I=\int_1^5\frac{2|x-2|+1}{x}dx=4+a\ln 2+b\ln 5$, với $a,b$ là các số nguyên. Tính $S=a-b$.

**A.** $S=9$. **B.** $S=11$. **C.** $S=5$. **D.** $S=-3$.

**Câu 11.** **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn $f(1)=2\ln 2+1$, $x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x)=x(x+1)$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$. Biết $f(2)=a+b\ln 3$, với $a$, $b$ là hai số hữu tỉ. Tính $T=a^2-b$.

**A.** $T=-\frac{3}{16}$. **B.** $T=\frac{21}{16}$. **C.** $T=\frac{3}{2}$. **D.** $T=0$.

**Câu 12.** **(Chuyên Vinh Lần 3)**Cho biết $f(x)=\int_e^{e^{2x}}t\ln^9 t dt$, tìm điểm cực trị của hàm số đã cho

**A.** $x=2$ **B.** $x=0$ **C.** $x=-1$ **D.** $x=6$

**Câu 13.** **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Cho $\int_1^4\sqrt{\frac{1}{4x}+\frac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}.e^{2x}}}dx=a+e^b-e^c$ với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên. Tính giá trị $a+b+c$.

**A.** $-4$. **B.** $-5$. **C.** $-3$. **D.** $3$.

**Câu 14.** $\Leftrightarrow\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=6$.Gọi $S$ là tập hợp tất cả các số nguyên dương $k$ thỏa mãn $\int_1^2\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x<\frac{2018.\mathrm{e}^k-2018}{k}$. Số phần tử của tập hợp $S$ bằng.

**A.** $7$. **B.** $8$. **C.** Vô số. **D.** $6$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 15.** **(Thị Xã Quảng Trị)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=4$. Tính $\int_{-1}^3 f(|x|)\mathrm{d}x$.

**A.** 6. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 2.

**Câu 16.** **(Chuyên Hạ Long lần 2-2019)** Có bao nhiêu số tự nhiên $m$ để $\int_0^2 |x^2-2m^2|\mathrm{d}x=\left|\int_0^2 (x^2-2m^2)\mathrm{d}x\right|$.

**A.** Vô số. **B.** 0. **C.** Duy nhất. **D.** 2.

**Câu 17.** **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Biết $\int_0^2 [f(x)+x]\mathrm{d}x=6$ và $\int_0^2 [3f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=10$. Tính $I=\int_0^2 [2f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x$.

**A.** $I=12$. **B.** $I=16$. **C.** $I=10$. **D.** $I=14$.

**Câu 18.** **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Biết $\int_0^2 [f(x)+x]\mathrm{d}x=6$ và $\int_0^2 [3f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=10$. Tính $I=\int_0^2 [2f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x$.

**A.** $I=12$. **B.** $I=16$. **C.** $I=10$. **D.** $I=14$.

**Câu 1.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 (f'(x))^2\,dx=\int_0^1 (x+1).e^x.f(x)dx=\frac{e^2-1}{4}$ và $f(1)=0$. Tính $\int_0^1 f(x)dx=?$

**A.** $2+e$ **B.** $2-e$ **C.** $e$ **D.** $1-e$

**Câu 19.** **(Chuyên Vinh Lần 3)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=3$ và $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2,\forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\frac{-4}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{-10}{3}$.

**Câu 20.** Biết rằng hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{7}{2}$, $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=-2$ và $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{13}{2}$ (với $a$, $b$, $c\in\mathbb{R}$). Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c$.

**A.** $P=-\frac{3}{4}$. **B.** $P=-\frac{4}{3}$. **C.** $P=\frac{4}{3}$. **D.** $P=\frac{3}{4}$.

**Câu 21.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^3+x^5}$, $f(1)=a$ và $f(-2)=b$. Tính $f(-1)+f(2)$.

**A.** $f(-1)+f(2)=-a-b$. **B.** $f(-1)+f(2)=a-b$.

**C.** $f(-1)+f(2)=a+b$. **D.** $f(-1)+f(2)=b-a$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 22.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2+x^4}$, $f(1)=a$, $f(-2)=b$. Giá trị của biểu thức $f(-1)-f(2)$ bằng

**A.** $b-a$. **B.** $a+b$. **C.** $a-b$. **D.** $-a-b$.

**Câu 55:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn [1, 2] và thỏa mãn $f(x)>0$ khi $x\in[1,2]$. Biết $\int_1^2 f'(x)dx=10$ và $\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln 2$. Tính $f(2)$.

**A.** $f(2)=-10$. **B.** $f(2)=20$. **C.** $f(2)=10$. **D.** $f(2)=-20$.

**Câu 57:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên **R**, nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$ và thỏa $f(1)=1$, $f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}$. Mệnh đề nào đúng?

**A.** $1<f(5)<2$. **B.** $4<f(5)<5$. **C.** $2<f(5)<3$. **D.** $3<f(5)<4$.

**Câu 23.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[-1;1]$, thỏa mãn $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f'(x)+2f(x)=0$. Biết $f(1)=1$, tính $f(-1)$.

**A.** $f(-1)=e^{-2}$. **B.** $f(-1)=e^{3}$. **C.** $f(-1)=e^{4}$. **D.** $f(-1)=3$.

**Câu 24.** Cho hàm số $f$ liên tục, $f(x)>-1$, $f(0)=0$ và thỏa $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}$. Tính $f(\sqrt{3})$.

**A.** 0. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 9.

**Câu 25.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn [1, 2] và thỏa mãn $f(x)>0$ khi $x\in[1,2]$. Biết $\int_1^2 f'(x)dx=10$ và $\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln 2$. Tính $f(2)$.

**A.** $f(2)=-10$. **B.** $f(2)=20$. **C.** $f(2)=10$. **D.** $f(2)=-20$.

**Câu 26.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $(C)$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=(x.f(x))^2,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ của đồ thị $(C)$ là.

**A.** $y=6x+30$. **B.** $y=-6x+30$. **C.** $y=36x-30$. **D.** $y=-36x+42$.

**Câu 27.** Cho hàm số $y=f(x)>0$ xác định, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn: $g(x)=1+2018\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, $g(x)=f^2(x)$. Tính $\int_0^1\sqrt{g(x)}\mathrm{d}x$.

**A.** $\frac{1011}{2}$. **B.** $\frac{1009}{2}$. **C.** $\frac{2019}{2}$. **D.** 505.

**Câu 28.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn $f'(0)=9$ và $9f''(x)+\left[f'(x)-x\right]^2=9$. Tính $T=f(1)-f(0)$.

**A.** $T=2+9\ln 2$. **B.** $T=9$. **C.** $T=\frac{1}{2}+9\ln 2$. **D.** $T=2-9\ln 2$.

**Câu 29.** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x).f(x)=x^4+x^2$. Biết $f(0)=2$. Tính $f^2(2)$.

**A.** $f^2(2)=\frac{313}{15}$. **B.** $f^2(2)=\frac{332}{15}$. **C.** $f^2(2)=\frac{324}{15}$. **D.** $f^2(2)=\frac{323}{15}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 30.** Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ thỏa mãn $3f(x)+f'(x)=\sqrt{1+3.e^{-2x}}$. Khi đó:

**A.** $e^3 f(1)-f(0)=\dfrac{1}{\sqrt{e^2+3}}-\dfrac{1}{2}$. **B.** $e^3 f(1)-f(0)=\dfrac{1}{2\sqrt{e^2+3}}-\dfrac{1}{4}$.

**C.** $e^3 f(1)-f(0)=\dfrac{(e^2+3)\sqrt{e^2+3}-8}{3}$. **D.** $e^3 f(1)-f(0)=(e^2+3)\sqrt{e^2+3}-8$.

**Câu 114:** Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên R thỏa mãn $[f(x)]^2=\int_0^x\left[(f(t))^2+(f'(t))^2\right]dt+2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $f(1)=2018e$. **B.** $f(1)=\sqrt{2018}$. **C.** $f(1)=2018$. **D.** $f(1)=\sqrt{2018e}$.

**Câu 116:** Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên R thỏa mãn $2[f(x)]^2=\int_0^x\left[4(f(t))^2+(f'(t))^2\right]dt+2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $f(1)=1009e^2$. **B.** $f(1)=\sqrt{1009e}$. **C.** $f(1)=1009e$. **D.** $f(1)=\sqrt{1009e^2}$.

**Câu 31.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, $f(x)$ và $f'(x)$ đều nhận giá trị dương trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=2$, $\int_0^1\left[f'(x).[f(x)]^2+1\right]dx=2\int_0^1\sqrt{f'(x)}.f(x)dx$. Tính $\int_0^1[f(x)]^3dx$.

**A.** $\dfrac{15}{4}$. **B.** $\dfrac{15}{2}$. **C.** $\dfrac{17}{2}$. **D.** $\dfrac{19}{2}$.

**Câu 32.** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1$ với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và $f(1)=-2$. Tính $\int_1^2 f(x)dx$.

**A.** $-\dfrac{1}{2}-\ln 2$. **B.** $-\dfrac{3}{2}-\ln 2$. **C.** $-1-\dfrac{\ln 2}{2}$. **D.** $-\dfrac{3}{2}-\dfrac{\ln 2}{2}$.

**Câu 33.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=0$. Biết $\int_0^1 f^2(x)dx=\dfrac{9}{2}$ và $\int_0^1 f'(x)\cos\dfrac{\pi x}{2}dx=\dfrac{3\pi}{4}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

**A.** $\dfrac{1}{\pi}$. **B.** $\dfrac{4}{\pi}$. **C.** $\dfrac{6}{\pi}$. **D.** $\dfrac{2}{\pi}$.

**Câu 53:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ và thỏa $\int_0^{x^2} f(t)dt=x.\cos\pi x$. Tính $f(4)$.

**A.** $f(4)=123$. **B.** $f(4)=\dfrac{2}{3}$. **C.** $f(4)=\dfrac{3}{4}$. **D.** $f(4)=\dfrac{1}{4}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 34.** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1$ và $\int_0^1[f(x)]^2\mathrm{d}x=4$. Giá trị của tích phân $\int_0^1[f(x)]^3\mathrm{d}x$ bằng

**A.** 1. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 80.

**Câu 35.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[4;8]$ và $f(0)\neq 0$ với $\forall x\in[4;8]$. Biết rằng $\int_4^8\frac{[f'(x)]^2}{[f(x)]^4}dx=1$ và $f(4)=\frac{1}{4}, f(8)=\frac{1}{2}$. Tính $f(6)$.

**A.** $\frac{5}{8}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

**Câu 36.** Suy ra $4\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=8\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2$. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1)=-2\ln 2$ và $x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$. Giá trị $f(2)=a+b\ln 3$, với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $a^2+b^2$.

**A.** $\frac{25}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{13}{4}$.

**Câu 37.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x)\in[-1;1]$ với $\forall x\in(0;2)$. Biết $f(0)=f(2)=1$. Đặt $I=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$, phát biểu nào dưới đây đúng?

**A.** $I\in(-\infty;0]$. **B.** $I\in(0;1]$. **C.** $I\in[1;+\infty)$. **D.** $I\in(0;1)$.

**Câu 38.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $3\int_0^1\left[f'(x)[f(x)]^2+\frac{1}{9}\right]\mathrm{d}x\leq 2\int_0^1\sqrt{f'(x)}f(x)\mathrm{d}x$. Tính tích phân $\int_0^1[f(x)]^3\mathrm{d}x$:

**A.** $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{7}{6}$.

**Câu 39.** Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn hệ thức $\begin{cases}f(1)+g(1)=4\\ g(x)=-x.f'(x);\ f(x)=-x.g'(x)\end{cases}$. Tính $I=\int_1^4[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$.

**A.** $8\ln 2$. **B.** $3\ln 2$. **C.** $6\ln 2$. **D.** $4\ln 2$.

## PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN SỐ

### ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 1

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử hàm số $u=u(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $\alpha\leq u(x)\leq\beta$. Giả sử có thể viết $f(x)=g(u(x))u'(x), x\in[a;b]$, với $g$ liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$. Khi đó, ta có

$$I=\int_a^b f(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du.$$

**Dấu hiệu nhận biết và cách tính tính phân**

| Dấu hiệu | Có thể đặt | Ví dụ |
|---|---|---|

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

| | | |
|---|---|---|
| Có $\sqrt{f(x)}$ | $t=\sqrt{f(x)}$ | $I=\int_0^3 \frac{x^3dx}{\sqrt{x+1}}$. Đặt $t=\sqrt{x+1}$ |
| Có $(ax+b)^n$ | $t=ax+b$ | $I=\int_0^1 x(x+1)^{2016}dx$. Đặt $t=x-1$ |
| Có $a^{f(x)}$ | $t=f(x)$ | $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x+3}}{\cos^2 x}dx$. Đặt $t=\tan x+3$ |
| Có $\frac{dx}{x}$ và $\ln x$ | $t=\ln x$ *hoặc* biểu thức chứa $\ln x$ | $I=\int_1^e \frac{\ln x dx}{x(\ln x+1)}$. Đặt $t=\ln x+1$ |
| Có $e^x dx$ | $t=e^x$ *hoặc* biểu thức chứa $e^x$ | $I=\int_0^{\ln 2} e^{2x}\sqrt{3e^x+1}dx$. Đặt $t=\sqrt{3e^x+1}$ |
| Có $\sin x dx$ | $t=\cos x$ | $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos x dx$. Đặt $t=\sin x$ |
| Có $\cos x dx$ | $t=\sin x dx$ | $I=\int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x}{2\cos x+1}dx$ Đặt $t=2\cos x+1$ |
| Có $\frac{dx}{\cos^2 x}$ | $t=\tan x$ | $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2 x)\frac{1}{\cos^2 x}dx$ Đặt $t=\tan x$ |
| Có $\frac{dx}{\sin^2 x}$ | $t=\cot x$ | $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\cot x}}{1-\cos 2x}dx=\int \frac{e^{\cot x}}{2\sin^2 x}dx$. Đặt $t=\cot x$ |

**Câu 1.** Giá trị của tích phân $\int_0^{100} x(x-1)...(x-100)dx$ bằng

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $100$. **D.** một giá trị khác.

**Câu 2.** **(Hậu Lộc Thanh Hóa)** Cho $n$ là số nguyên dương khác $0$, hãy tính tích phân $I=\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n xdx$ theo $n$.

**A.** $I=\frac{1}{2n+2}$. **B.** $I=\frac{1}{2n}$. **C.** $I=\frac{1}{2n-1}$. **D.** $I=\frac{1}{2n+1}$.

**Câu 3.** **(SỞ BÌNH THUẬN 2019)** Tích phân $I=\int_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1}dx=a\ln b+c$, trong đó $a$; $b$; $c$ là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a+b+c$.

**A.** $2$. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $0$.

**Câu 4.** **(CỤM TRƯỜNG SÓC SƠN MÊ LINH HÀ NỘI)** Biết $\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+4x+7}dx=a\ln\sqrt{12}+b\ln\sqrt{7}$, với $a$, $b$ là các số nguyên, khi đó $a^3+b^3$ bằng

**A.** $-9$. **B.** $0$. **C.** $9$. **D.** $7$.

**Câu 5.** **(THANH CHƯƠNG 1 NGHỆ AN 2019 LẦN 3)** Cho $\int_0^2 \frac{x}{x^2+2x+4}dx=a\ln 3+b\pi$ với $a$, $b$ là các số thực. Giá trị của $a^2+3b^2$ bằng

**A.** $\frac{7}{27}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{5}{18}$. **D.** $\frac{35}{144}$.

**Câu 6.** Tích phân $I=\int_1^2 \frac{x^{2001}}{(1+x^2)^{1002}}dx$ có giá trị là

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** $\frac{1}{2002.2^{1001}}$. **B.** $\frac{1}{2001.2^{1001}}$. **C.** $\frac{1}{2001.2^{1002}}$. **D.** $\frac{1}{2002.2^{1002}}$.

**Câu 7.** **(ĐH Vinh Lần 1)** Biết rằng $\int\limits_{-2}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x+5\sqrt{x+3}+9}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$, với $a,b,c$ là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b+c$ bằng

**A.** $-10$. **B.** $-5$. **C.** $10$. **D.** $5$.

**Câu 8.** **(Đặng Thành Nam Đề 5)** Cho $I=\int\limits_{3}^{8}\frac{1}{x+x\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ với $a,b,c,d$ là các số nguyên dương và $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ tối giản. Giá trị của $abc-d$ bằng

**A.** $-6$. **B.** $18$. **C.** $0$. **D.** $-3$.

**Câu 9.** **(ĐH Vinh Lần 1)** Biết rằng $\int\limits_{0}^{4}\frac{\mathrm{d}x}{4(x+1)+5\sqrt{2x+1}}=a\ln 3+b\ln 5+c\ln 7$, với $a,b,c$ là các số hữu tỉ.
Giá trị của $a+b+c$ bằng

**A.** $0$. **B.** $-\frac{4}{3}$. **C.** $1$. **D.** $\frac{4}{3}$.

**Câu 10.** Biết $\int\limits_{1}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}$ với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.

**A.** $P=44$. **B.** $P=42$. **C.** $P=46$. **D.** $P=48$.

**Câu 11.** Tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}\frac{a^2x^3+ax}{\sqrt{ax^2+1}}dx$, với $a\ge 0$ có giá trị là:

**A.** $I=\frac{a(a-2)}{4}$. **B.** $I=\frac{a(a-2)}{2}$. **C.** $I=\frac{a(a+2)}{4}$. **D.** $I=\frac{a(a+2)}{2}$.

**Câu 12.** Biết rằng $\int\limits_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+3}}=2\ln\left(\frac{2+\sqrt{a}}{1+\sqrt{b}}\right)$ với $a$, $b$ là các số nguyên dương. Giá trị của $a+b$ bằng

**A.** $3$. **B.** $5$. **C.** $9$. **D.** $7$.

**Câu 13.** Biết $\int\limits_{1}^{2}\left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^{11}}}\right)\mathrm{d}x=\frac{a}{b}\sqrt[3]{c}$, với $a,b,c$ nguyên dương, $\frac{a}{b}$ tối giản và $c<a$. Tính $S=a+b+c$

**A.** $S=51$. **B.** $S=67$. **C.** $S=39$. **D.** $S=75$.

**Câu 14.** Cho số thực dương $k>0$ thỏa $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}=\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $k>\frac{3}{2}$. **B.** $0<k\le\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}<k\le 1$. **D.** $1<k\le\frac{3}{2}$.

**Câu 15.** Giả sử $\int\limits_{1}^{2}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{c}\left(a\sqrt{a}-\frac{b}{b+c}\sqrt{b}\right)$ với $a,b,c\in\mathbb{N}$; $1\le a,b,c\le 9$. Tính giá trị của biểu thức $C_{2a+c}^{b-a}$.

**A.** $165$. **B.** $715$. **C.** $5456$. **D.** $35$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 16.** **(THPT NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho $\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}dx=\frac{a}{3}+b\ln 2+c\ln 3$ với $a,b,c$ là các số nguyên. Giá trị $a+b+c$ bằng:

**A.** 9 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 7

**Câu 17.** **(ĐỀ THI THỬ VTED 03 NĂM HỌC 2018 - 2019)** Cho $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{\frac{x}{x^3+1}}\,dx=\frac{1}{a}\ln\left(\frac{b}{c}+\sqrt{d}\right)$, với $a$, $b$, $c$, $d$ là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ tối giản. Giá trị của $a+b+c+d$ bằng

**A.** 12 **B.** 10 **C.** 18 **D.** 15

**Câu 18.** **(CỤM TRẦN KIM HƯNG -HƯNG YÊN NĂM 2019)** Cho tích phân $I=\int_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right).\sqrt{14-x^2-\frac{1}{x^2}}.dx=\frac{a.\pi}{b}+c\sqrt{3}+d$, trong đó $(a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính tổng $S=a+b+c+d$.

**A.** $S=3$. **B.** $S=7$. **C.** $S=2$. **D.** $S=11$.

**Câu 19.** **(THẠCH THÀNH I - THANH HÓA 2019)** Biết $\int_1^2\left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^{11}}}\right)dx=\frac{a}{b}\sqrt[3]{c}$ với $a$, $b$, $c$ nguyên dương, $\frac{a}{b}$ tối giản và $c<a$. Tính $S=a+b-c$.

**A.** $S=51$. **B.** $S=39$. **C.** 67. **D.** 75.

**Câu 20.** **(THTT số 3)** Cho tích phân $\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\frac{a}{b}\pi-\frac{m}{n}$, với $a,b,n,m\in\mathbb{N}^*$, các phân số $\frac{a}{b},\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $a^b+m^n$.

**A.** 3. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 2.

**Câu 21.** **(Đặng Thành Nam Đề 3)** Cho $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{\frac{x}{x^3+1}}dx=\frac{1}{a}\ln\left(\frac{b}{c}+\sqrt{d}\right)$, với $a$, $b$, $c$, $d$ là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ tối giản. Giá trị của $a+b+c+d$ bằng

**A. 12.** **B.** 10. **C.** 18. **D.** 15.

**Câu 22.** Có bao nhiêu giá trị của $a$ trong đoạn $\left[\frac{\pi}{4};2\pi\right]$ thỏa mãn $\int_0^a\frac{\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx=\frac{2}{3}$.

**A.** 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

**Câu 23.** Nếu $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^n x\cos x dx=\frac{1}{64}$ thì $n$ bằng

**A.** 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

**Câu 24.** Cho các tích phân $I=\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+\tan x}dx$ và $J=\int_0^{\alpha}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$ với $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$, khẳng định **sai** là

**A.** $I=\int_0^{\alpha}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$. **B.** $I-J=\ln\left|\sin\alpha+\cos\alpha\right|$.

**C.** $I=\ln\left|1+\tan\alpha\right|$. **D.** $I+J=\alpha$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 25.** Cho biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx = a\pi + b\ln 2$ với $a$ và $b$ là các số hữu tỉ. Khi đó $\frac{a}{b}$ bằng:

**A.** $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

**Câu 26.** Tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x\right)^2}dx$ có gái trị là:

**A.** $I = \frac{\sqrt{3}}{16}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2}\right)+\frac{3}{8}$. **B.** $I = \frac{\sqrt{3}}{8}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2}\right)+\frac{3}{8}$.

**C.** $I = -\frac{\sqrt{3}}{8}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2}\right)+\frac{3}{8}$. **D.** $I = -\frac{\sqrt{3}}{16}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2}\right)+\frac{3}{8}$.

**Câu 27.** **(Chuyên Hạ Long lần 2-2019)** Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin x-\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx = \frac{-11}{3}\ln 2 + b\ln 3 + c\left(b,c\in Q\right)$. Tính $\frac{b}{c}$?

**A.** $\frac{22}{3}$. **B.** $\frac{22\pi}{3}$. **C.** $\frac{22}{3\pi}$. **D.** $\frac{22\pi}{13}$.

**Câu 28.** **(Chuyên Vinh Lần 3)** Biết $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x+\sin x\cos x+1}{\cos^4 x+\sin x\cos^3 x}dx = a+b\ln 2+c\ln\left(1+\sqrt{3}\right)$, với $a,b,c$ là các số hữu tỉ. Giá trị của $abc$ bằng

**A.** $0$. **B.** $-2$. **C.** $-4$. **D.** $-6$.

**Câu 29.** **(THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho $F\left(x\right) = \int \frac{\left(1+\cos^2 x\right)\left(\sin x+\cot x\right)}{\sin^4 x}dx$ và $S$ là tổng tất cả các nghiệm của phương trình $F\left(x\right) = F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ trên khoảng $\left(0;4\pi\right)$. Tổng $S$ thuộc khoảng

**A.** $\left(6\pi;9\pi\right)$. **B.** $\left(2\pi;4\pi\right)$. **C.** $\left(4\pi;6\pi\right)$. **D.** $\left(0;2\pi\right)$.

**Câu 30.** Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x-\sin x}{\left(e^x\cos x+1\right)\cos x}dx$ có giá trị là:

**A.** $I = \ln\left|\frac{e^{\frac{\pi}{3}}\left(e^{\frac{\pi}{3}}+2\right)}{e^{\frac{2\pi}{3}}-2}\right|$. **B.** $I = \ln\left|\frac{e^{\frac{\pi}{3}}\left(e^{\frac{\pi}{3}}-2\right)}{e^{\frac{2\pi}{3}}-2}\right|$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**C.** $I=\ln\left|\dfrac{e^{\frac{\pi}{3}}\left(e^{\frac{\pi}{3}}+2\right)}{e^{\frac{2\pi}{3}}+2}\right|$. **D.** $I=\ln\left|\dfrac{e^{\frac{\pi}{3}}\left(e^{\frac{\pi}{3}}-2\right)}{e^{\frac{2\pi}{3}}+2}\right|$.

**Câu 31.** **(THPT LÊ VĂN HƯU NĂM 2018-2019)** Biết $\int\limits_0^{\pi}\dfrac{x\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi^a}{b}$, trong đó $a$, $b$ là các số nguyên dương. Giá trị của biểu thức $P=2a^2+3b^3$ là

**A.** $P=32$. **B.** $P=194$. **C.** $P=200$. **D.** $P=100$.

**Câu 32.** Xét tích phân $A=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{3\sin^2x-2\cos^2x-2}dx$. Bằng cách đặt $t=\tan x$, tích phân A được biến đổi thành tích phân nào sau đây.

**A.** $\int\limits_0^1\dfrac{1}{t^2-4}dt$. **B.** $\int\limits_0^1\dfrac{1}{t^2+4}dt$. **C.** $\int\limits_0^1\dfrac{1}{t^2-2}dt$. **D.** $\int\limits_0^1\dfrac{1}{t^2+2}dt$.

**Câu 33.** Đặt $t=\tan\dfrac{x}{2}$ thì $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\cos^6\dfrac{x}{2}}dx$ được biến đổi thành $2\int\limits_0^1 f(t)dt$. Hãy xác định $f(t)$:

**A.** $f(t)=1-2t^2+t^4$. **B.** $f(t)=1+2t^2+t^4$. **C.** $f(t)=1+t^2$. **D.** $f(t)=1-t^2$.

**Câu 34.** Biết $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x=a+\dfrac{\pi^2}{b}+\dfrac{\sqrt{3}\pi}{c}$ với $a$, $b$, $c$, $d$ là các số nguyên. Tính $M=a-b+c$.

**A.** $M=35$. **B.** $M=41$. **C.** $M=-37$. **D.** $M=-35$.

**Câu 35.** **(THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho $f(x)$ là hàm số chẵn trên đoạn $[-a;a]$ và $k>0$. Giá trị tích phân $\int\limits_{-a}^{a}\dfrac{f(x)}{1+\mathrm{e}^{kx}}\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\int\limits_0^a f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x$. **C.** $2\int\limits_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $2\int\limits_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

**Câu 36.** **(THPT GIA LỘC HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho $\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{2\ln x+1}{x(\ln x+2)^2}\mathrm{d}x=\ln\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}$ với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên dương, biết $\dfrac{a}{b};\dfrac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính giá trị $a+b+c+d$ ?

**A.** 18. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 17.

**Câu 37.** **(THPT LÝ NHÂN TÔNG LẦN 1 NĂM 2018-2019)** Biết $\int\limits_0^1\dfrac{\pi x^3+2^x+\mathrm{e}x^3 2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{\mathrm{e}\ln n}.\ln\left(p+\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+\pi}\right)$ với $m$, $n$, $p$ là các số nguyên dương. Tính tổng $P=m+n+p$

**A.** $P=5$. **B.** $P=6$. **C.** $P=8$. **D.** $P=7$.

**Câu 38.** $\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{2\ln x+1}{x(\ln x+2)^2}\mathrm{d}x=\ln\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}$ với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên dương, biết $\dfrac{a}{b};\dfrac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính giá trị $a+b+c+d$ ?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** 18. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 17.

**Câu 39.** **(THPT - YÊN ĐỊNH THANH HÓA 2018 2019- LẦN 2)** Cho $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(3x^3-1)\ln x+3x^2-1}{1+x\ln x}\mathrm{d}x = a.\mathrm{e}^3+b+c.\ln(\mathrm{e}+1)$ với $a,b,c$ là các số nguyên và $\ln \mathrm{e}=1$. Tính $P=a^2+b^2+c^2$.

**A.** $P=9$. **B.** $P=14$. **C.** $P=10$. **D.** $P=3$.

**Câu 40.** Biết rằng: $\int_0^{\ln 2}\left(x+\frac{1}{2e^x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln^a 2+b\ln 2+c\ln\frac{5}{3}$. Trong đó $a,b,c$ là những số nguyên. Khi đó $S=a+b-c$ bằng:

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

**Câu 41.** Cho $\int_0^1 \frac{(x^2+x)\mathrm{e}^x}{x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x = a.\mathrm{e}+b\ln(\mathrm{e}+c)$ với $a$, $b$, $c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a+2b-c$.

**A.** $P=1$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=0$. **D.** $P=-2$.

**Câu 42.** Biết $\int_0^1 \frac{(x^2+5x+6)\mathrm{e}^x}{x+2+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x = a\mathrm{e}-b-\ln\frac{a\mathrm{e}+c}{3}$ với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên và e là cơ số của logarit tự nhiên. Tính $S=2a+b+c$.

**A.** $S=10$. **B.** $S=0$. **C.** $S=5$. **D.** $S=9$.

**Câu 43.** $\int_0^1 \frac{\pi x^3+2^x+\mathrm{e}x^3.2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x=\frac{1}{m}+\frac{1}{\mathrm{e}\ln n}\ln\left(p+\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+\pi}\right)$ với $m$, $n$, $p$ là các số nguyên dương. Tính tổng $S=m+n+p$.

**A.** $S=6$. **B.** $S=5$. **C.** $S=7$. **D.** $S=8$.

**Câu 44.** Biết $I=\int_0^1 \frac{\sqrt{\ln^3 x+3x}\left(\ln^2 x+\frac{1}{3}x\right)}{x}dx=\frac{2}{9}\left(\sqrt{1+ae+27e^2+27e^3}-3\sqrt{3}\right)$, $a$ là các số hữu tỉ. Giá trị của $a$ là:

**A.** 9. **B.** $-6$. **C.** $-9$. **D.** 6.

**Câu 45.** Cho tích phân $I=\int_e^{e^2}\frac{(x^2+1)\ln x+1}{x\ln x}dx=\frac{ae^4+be^2}{2}+c+d\ln 2$. Chọn phát biểu **đúng nhất**:

**A.** $a=b=c=d$ **B.** $a=b^2=\sqrt{c}=\frac{1}{d}$ **C.** A và B đúng **D.** A và B sai

**Câu 46.** Trong các số dưới đây, số nào ghi giá trị của $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2^{x-1}.\cos x}{1+2^x}dx=\frac{a}{b}, a,b\in\mathbb{N}$. Khi đó $a.b$ bằng

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1

**Câu 47.** Tính tích phân $I=\int_{-2}^{2}\frac{x^{2016}}{e^x+1}\mathrm{d}x$.

**A.** $I=0$. **B.** $I=\frac{2^{2018}}{2017}$. **C.** $I=\frac{2^{2017}}{2017}$. **D.** $I=\frac{2^{2018}}{2018}$.

**Câu 48.** Biết tích phân $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx=\frac{a.\pi+b}{8}$ trong đó $a,b\in\mathbb{N}$. Tính tổng $a+b$?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -1

**ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 2**

**Câu 49.** Biết rằng $\int_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-5}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}$ trong đó $a$, $b$ là các số nguyên dương và $4<a+\sqrt{b}<5$. Tổng $a+b$ bằng

**A.** 5. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 6.

**Câu 50.** Tích phân $I=\int_0^1 \frac{3+4x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$ có giá trị là:

**A.** $I=\frac{7\pi}{6}-4\sqrt{3}+8$. **B.** $I=\frac{7\pi}{6}-4\sqrt{3}-8$.

**C.** $I=\frac{7\pi}{6}+4\sqrt{3}-8$. **D.** $I=\frac{7\pi}{6}+4\sqrt{3}+8$.

**Câu 51.** Cho $I=\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-2x\sqrt{1-x^2}}dc=a\pi+b$ với $a,b\in R$. Giá trị $a+b$ gần nhất với

**A.** $\frac{1}{10}$ **B.** 1 **C.** $\frac{1}{5}$ **D.** $\sqrt{2}$

**Câu 52.** Tích phân $I=\int_{\frac{5}{2}}^3 \sqrt{(x-1)(3-x)}dx$ có giá trị là:

**A.** $I=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $I=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{8}$. **C.** $I=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$. **D.** $I=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{8}$.

**Câu 53.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(\tan x)=\cos^4 x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $\frac{\pi+2}{8}$. **B.** 1. **C.** $\frac{2+\pi}{4}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

**Câu 54.** Tính tích phân $\int_1^{\sqrt{6+\sqrt{2}}} \frac{-4x^4+x^2-3}{x^4+1}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(a\sqrt{3}+b+c\pi\right)+4$. Với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên. Khi đó biểu thức $a+b^2+c^4$ có giá trị bằng

**A.** 20. **B.** 241. **C.** 196. **D.** 48.

**Câu 55.** **(CỤM TRẦN KIM HƯNG -HƯNG YÊN NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;4]$ và thỏa mãn điều kiện $4xf\left(x^2\right)+6f(2x)=\sqrt{4-x^2}$. Tính tích phân $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\frac{\pi}{5}$. **B.** $I=\frac{\pi}{2}$. **C.** $I=\frac{\pi}{20}$. **D.** $I=\frac{\pi}{10}$.

## TÍCH PHÂN HÀM ẨN PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

**TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 1**

**Câu 1.** Cho $\int_1^2 f\left(x^2+1\right)x\mathrm{d}x=2$. Khi đó $I=\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** 2. **B.** 1. **C.** –1. **D.** 4.

**Câu 2.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1;+\infty)$ và $\int_0^3 f\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}x=8$. Tích phân $I=\int_1^2 xf(x)\mathrm{d}x$ bằng:



ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** $I=16$. **B.** $I=2$. **C.** $I=8$. **D.** $I=4$

**Câu 3.** **(THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4)** Cho $I=\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2$. Giá trị của $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x.f\left(\sqrt{3\cos x+1}\right)}{\sqrt{3\cos x+1}}\mathrm{d}x$ bằng

**A.** 2. **B.** $-\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $-2$.

**Câu 4.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2;\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int\limits_{-1}^1 f\left(|2x-1|\right)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\dfrac{2}{3}$. **B.** $I=4$. **C.** $I=\dfrac{3}{2}$. **D.** $I=6$.

**Câu 5.** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;4]$ và $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=1;\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x=3$. Tính $\int\limits_{-1}^1 f\left(|3x-1|\right)\mathrm{d}x$.

**A.** 4. **B.** 2. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** 1.

**Câu 6.** Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=4$, $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int\limits_{-1}^1 f\left(|2x+1|\right)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=3$. **B.** $I=5$. **C.** $I=6$. **D.** $I=4$.

**Câu 7.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_0^2 f(6x)\mathrm{d}x=14$. Tính $\int\limits_{-2}^2 f\left(5|x|+2\right)\mathrm{d}x$.

**A.** 30. **B.** 32. **C.** 34. **D.** 36.

**Câu 8.** Cho tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f(\sin x)dx=8$. Tính tích phân $K=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.f(\cos x)dx$.

**A.** $K=-8$. **B.** $K=4$. **C.** $K=8$. **D.** $K=16$.

**Câu 9.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2x)=3f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

**A.** $I=5$. **B.** $I=3$. **C.** $I=8$. **D.** $I=2$.

**Câu 10.** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2)=-2;\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=1$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^4 f'\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=-10$. **B.** $I=-5$. **C.** $I=0$. **D.** $I=-18$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 11.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = 6$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x dx = 3$. Tính tích phân $I = \int_0^4 f(x)dx$.

**A.** $I = -2$. **B.** $I = 6$. **C.** $I = 9$. **D.** $I = 2$.

**Câu 12.** Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = 4$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x dx = 2$. Tính $I = \int_0^3 f(x)dx$.

**A.** $I = 10$. **B.** $I = 6$. **C.** $I = 4$. **D.** $I = 2$.

**Câu 13.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn $f(x) = \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}$. Tính tích phân $I = \int_3^4 f(x)dx$.

**A.** $I = 3 + 2\ln^2 2$. **B.** $I = 2\ln^2 2$. **C.** $I = \ln^2 2$. **D.** $I = 2\ln 2$.

**Câu 14.** Cho $\int_0^1 f(2x+1)dx = 12$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x)\sin 2x dx = 3$. Tính $\int_0^3 f(x)dx$.

**A.** 26. **B.** 22. **C.** 27. **D.** 15.

**Câu 15.** Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx = 3$ và $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}dx = 1$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

**A.** 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 1.

**Câu 16.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx = 4$; $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}dx = 2$. Tính $I = \int_0^1 f(x)dx$.

**A.** $I = 6$. **B.** $I = 2$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = 1$.

**Câu 17.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^{2018} f(x)dx = 2$. Khi đó tích phân $\int_0^{\sqrt{e^{2018}-1}} \frac{x}{x^2+1} f\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)dx$ bằng

**A.** 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Câu 18.** Tìm tất cả các giá trị dương của $m$ để $\int_0^3 x(3-x)^m dx = -f''\left(\frac{10}{9}\right)$, với $f(x) = \ln x^{15}$.

**A.** $m = 20$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = 5$. **D.** $m = 3$.

**Câu 19.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x) = f(x)$. Biết $\int_1^3 xf(x)dx = 5$. Tính $I = \int_1^3 f(x)dx$.

**A.** $I = \frac{5}{2}$. **B.** $I = \frac{7}{2}$. **C.** $I = \frac{9}{2}$. **D.** $I = \frac{11}{2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 20.** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$ thỏa mãn $f(4-x)=f(x), \forall x\in[1;3]$ và $\int_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=-2$. Giá trị $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

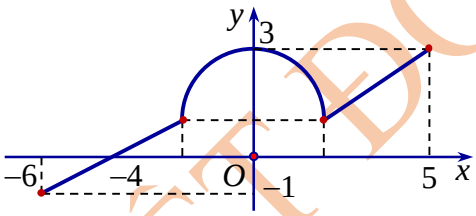
**A.** 2. **B.** $-1$. **C.** $-2$. **D.** 1.

**Câu 21.** **(Chuyên KHTN)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x.f(\cos^2 x)dx=\int_1^8 \frac{f(\sqrt[3]{x})}{x}dx=6$.

Tính tích phân $\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{f(x^2)}{x}dx$

**A.** 4 **B.** **6** **C.** **7** **D.** **10**

**Câu 22.** Cho hàm số $f$ liên tục trên đoạn $[-6;5]$, có đồ thị gồm hai đoạn thẳng và nửa đường tròn như hình vẽ. Tính giá trị $I=\int_{-6}^5 [f(x)+2]\mathrm{d}x$.




**A.** $I=2\pi+35$. **B.** $I=2\pi+34$. **C.** $I=2\pi+33$. **D.** $I=2\pi+32$.

**Câu 23.** **(Đặng Thành Nam Đề 6)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^{e^6} \frac{f(\ln\sqrt{x})}{x}\mathrm{d}x=6$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x)\sin 2x\mathrm{d}x=2$. Tích phân $\int_1^3 (f(x)+2)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** 10. **B.** 16. **C.** 9. **D.** 5.

**Câu 24.** **(Hoàng Hoa Thám Hưng Yên)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f(\cos^2 x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x\ln x}\mathrm{d}x=2$. Tính $\int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x}\mathrm{d}x$.

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 8.

**Câu 25.** **(Đặng Thành Nam Đề 10)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{-2}^2 f\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)\mathrm{d}x=1$, $\int_1^5 \frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x=3$. Tích phân $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $-15$. **B.** $-2$. **C.** $-13$. **D.** 0.

**Câu 26.** **(KINH MÔN II LẦN 3 NĂM 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $\int_0^3 f\left(\sqrt{x^2+16}+x\right)\mathrm{d}x=2019$, $\int_4^8 \frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x=1$. Tính $\int_4^8 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** 2019. **B.** 4022. **C.** 2020. **D.** 4038.

**TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 2**

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn : $A.f(x)+B.u'.f(u)+C.f(a+b-x)=g(x)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

+) Với $\begin{cases} u(a)=a \\ u(b)=b \end{cases}$ thì $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{A+B+C}\int_a^b g(x)dx$.

+) Với $\begin{cases} u(a)=b \\ u(b)=a \end{cases}$ thì $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{A-B+C}\int_a^b g(x)dx$.

Trong đề bài thường sẽ bị khuyết một trong các hệ số $A, B, C$.

□Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì $\int_a^b f(a+b-x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

**Câu 27.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(x)=6x^2 f(x^3)-\frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

**A.** 2. **B.** 4. **C.** −1. **D.** 6.

**Câu 28.** Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $4xf(x^2)+3f(x-1)=\sqrt{1-x^2}$. Tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $I=\frac{\pi}{4}$. **B.** $I=\frac{\pi}{6}$. **C.** $I=\frac{\pi}{20}$. **D.** $I=\frac{\pi}{16}$

**Câu 29.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x)+f(2-x)=2x$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_0^2 f(x)dx$.

**A.** $I=-4$. **B.** $I=\frac{1}{2}$. **C.** $I=\frac{4}{3}$. **D.** $I=2$.

**Câu 30.** Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{2}{15}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

**Câu 31.** Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $2f(x)-3f(1-x)=x\sqrt{1-x}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\frac{1}{25}$. **B.** $I=-\frac{4}{15}$. **C.** $I=-\frac{1}{15}$. **D.** $I=\frac{4}{75}$.

**Câu 32.** Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;2]$ và thỏa mãn $f(x)+2xf(x^2-2)+3f(1-x)=4x^3$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_{-1}^2 f(x)dx$.

**A.** $I=5$. **B.** $I=\frac{5}{2}$. **C.** $I=3$. **D.** $I=15$.

**Câu 33.** Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x)=\sqrt{x+2}+xf(3-x^2)$. Tính giá trị của $I=\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x$

**A.** $I=\frac{14}{3}$. **B.** $I=\frac{28}{3}$. **C.** $I=\frac{4}{3}$. **D.** $I=2$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 34.** Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(x)+xf(1-x^2)+3f(1-x)=\frac{1}{x+1}$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\frac{9}{2}\ln 2$. **B.** $I=\frac{2}{9}\ln 2$. **C.** $I=\frac{4}{3}$. **D.** $I=\frac{3}{2}$.

**Câu 35.** Cho hàm số $y=f(x)$ và thỏa mãn $f(x)-8x^3f(x^4)+\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0$. Tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx=\frac{a-b\sqrt{2}}{c}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{c};\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $a+b+c$

**A.** 6 . **B.** –4. **C.** 4 . **D.** –10.

**Câu 36.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ln 2;\ln 2]$ và thõa mãn $f(x)+f(-x)=\frac{1}{e^x+1}$. Biết $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3$, với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính giá trị của $P=a+b$.

**A.** $P=\frac{1}{2}$. **B.** $P=-2$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=2$.

**Câu 37.** Biết hàm số $y=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ là hàm số chẵn trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ và $f(x)+f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin x+\cos x$. Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

**A.** $I=0$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=-1$.

**Câu 38.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=0$ và $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx$ bằng

**A.** $-\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{\pi}{4}$. **D.** $-\frac{1}{4}$.

**Câu 39.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(1+2x)+f(1-2x)=\frac{x^2}{x^2+1},\forall x\in\mathbb{R}$. tính tích phân $I=\int_{-1}^{3} f(x)dx$.

**A.** $I=2-\frac{\pi}{2}$. **B.** $I=1-\frac{\pi}{4}$. **C.** $I=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$. **D.** $I=\frac{\pi}{4}$.

## TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 3

**Cách giải**: Lần lượt đặt $t=u(x)$ và $t=v(x)$ để giải hệ phương trình hai ẩn (trong đó có ẩn $f(x)$ ) để suy ra hàm số $f(x)$ (nếu $u(x)=x$ thì chỉ cần đặt một lần $t=v(x)$).

Các kết quả đặc biệt:

Cho $Af(ax+b)+B.f(-ax+c)=g(x)$ với $A^2\neq B^2$) khi đó $f(x)=\frac{A.g\left(\frac{x-b}{a}\right)-B.g\left(\frac{x-c}{-a}\right)}{A^2-B^2}$ (*)

+)Hệ quả 1 của (*): $A.f(x)+B.f(-x)=g(x)\Rightarrow f(x)=\frac{A.g(x)-B.g(-x)}{A^2-B^2}$

+)Hệ quả 2 của (*): $A.f(x)+B.f(-x)=g(x)\Rightarrow f(x)=\frac{g(x)}{A+B}$ với $g(x)$ là hàm số chẵn.

**Câu 40.** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$. Tính $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx$.

**A.** $I=\frac{3}{2}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=-1$.

**Câu 41.** **(Nguyễn Du Dak-Lak 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{3};3\right]$ thỏa mãn $f(x)+x.f\left(\frac{1}{x}\right)=x^3-x$. Giá trị tích phân $I=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{f(x)}{x^2+x}\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\frac{8}{9}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{16}{9}$.

**Câu 42.** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ và thỏa mãn $2f(3x)+3f\left(\frac{2}{x}\right)=-\frac{15x}{2}$, $\int\limits_{3}^{9}f(x)\mathrm{d}x=k$. Tính $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ theo $k$.

**A.** $I=-\frac{45+k}{9}$. **B.** $I=\frac{45-k}{9}$. **C.** $I=\frac{45+k}{9}$. **D.** $I=\frac{45-2k}{9}$.

**Câu 43.** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x)+2018f(x)=2x\sin x$. Tính giá trị của $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\frac{2}{2019}$. **B.** $I=\frac{2}{1009}$. **C.** $I=\frac{4}{2019}$. **D.** $I=\frac{1}{1009}$.

**Câu 44.** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x)+2018f(x)=e^x$. Tính giá trị của $I=\int\limits_{-1}^{1}f(x)dx$

**A.** $I=\frac{e^2-1}{2019e}$. **B.** $I=\frac{e^2-1}{2018e}$. **C.** $I=0$. **D.** $I=\frac{e^2-1}{e}$.

**Câu 45.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(2x)+f(1-x)=12x^2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng $1$ là

**A.** $y=2x+2$. **B.** $y=4x-6$. **C.** $y=2x-6$. **D.** $y=4x-2$.

**Câu 46.** Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_{0}^{1}f(x)dx=2018$ và $g(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $g(x)+g(-x)=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$.

**A.** $I=2018$. **B.** $I=\frac{1009}{2}$. **C.** $I=4036$. **D.** $I=1008$.

**Câu 47.** Cho số dương $a$ và hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(-x)=a$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $\int\limits_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$ bằng

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** $2a^2$. **B.** $a$. **C.** $a^2$. **D.** $2a$.

**Câu 48.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa điều kiện $f(x)+f(-x)=2\sin x$. Tính $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$

**A.** $-1$. **B.** $0$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Câu 49.** Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2-2\cos 2x}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=3$. **B.** $I=4$. **C.** $I=6$. **D.** $I=8$.

**Câu 50.** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên **R** và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$. Tính $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

**A.** $I=-1$. **B.** $I=1$. **C.** $I=-2$. **D.** $I=2$.

**Câu 51.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $3f(-x)-2f(x)=\tan^2 x$. Tính $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$

**A.** $1-\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{\pi}{2}-1$. **C.** $1+\frac{\pi}{4}$. **D.** $2-\frac{\pi}{2}$.

**Câu 52.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ln 2;\ln 2]$ và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\frac{1}{e^x+1}$. Biết $\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3$ $(a;b\in\mathbb{Q})$. Tính $P=a+b$.

**A.** $P=\frac{1}{2}$. **B.** $P=-2$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=2$.

**Câu 53.** Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $2f(x)+3f(1-x)=x\sqrt{1-x}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)dx$.

**A.** $I=-\frac{4}{15}$. **B.** $I=\frac{1}{15}$. **C.** $I=\frac{4}{75}$. **D.** $I=\frac{1}{25}$.

## TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 4

**Câu 54.** Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $[-1;1]$ và $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. Biết $\int\limits_0^1 f(x)dx=5$ và $\int\limits_0^1 g(x)dx=7$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

**A.** $\int\limits_{-1}^1 f(x)dx=10$. **B.** $\int\limits_{-1}^1 g(x)dx=14$.

**C.** $\int\limits_{-1}^1 [f(x)+g(x)]dx=10$. **D.** $\int\limits_{-1}^1 [f(x)-g(x)]dx=10$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 56.** Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên $[-4;4]$ biết $\int_{-2}^{0} f(-x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_{1}^{2} f(-2x)\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=-10$. **B.** $I=-6$. **C.** $I=6$. **D.** $I=10$.

**Câu 57.** **(Sở Đà Nẵng 2019)** Cho hàm số chẵn $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^{1}\frac{f(2x)}{1+5^x}\mathrm{d}x=8$. Giá trị của $\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

**A.** 8. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 16.

**Câu 58.** Cho $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trong đoạn $[-1;\ 1]$ và $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=2$. Kết quả $I=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $I=1$. **B.** $I=3$. **C.** $I=2$. **D.** $I=4$.

**Câu 59.** Cho $y=f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=1$. Giá trị của $\int_{-2}^{2}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x$ bằng

**A.** 1. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

**Câu 60.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^3(x)+f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$

**A.** $I=2$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=\frac{5}{4}$.

**Câu 61.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f^3(x)-3f^2(x)+6f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_{0}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\frac{5}{4}$. **B.** $I=\frac{5}{2}$. **C.** $I=\frac{5}{12}$. **D.** $I=\frac{5}{3}$.

**Câu 62.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x+f^3(x)+2f(x)=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\frac{7}{4}$. **B.** $I=\frac{7}{2}$. **C.** $I=\frac{7}{3}$. **D.** $I=\frac{5}{4}$.

## TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 5

Bài toán: " Cho $f(x).f(a+b-x)=k^2$, khi đó $I=\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{k+f(x)}=\frac{b-a}{2k}$

**Chứng minh:**

Đặt $t=a+b-x\Rightarrow\begin{cases}dt=-dx\\ f(x)=\dfrac{k^2}{f(t)}\end{cases}$ và $x=a\Rightarrow t-b;\ x=b\Rightarrow t=a$.

Khi đó $I=\int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}x}{k+f(x)}=\int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}x}{k+\frac{k^2}{f(t)}}=\frac{1}{k}\int\limits_a^b \frac{f(x)\mathrm{d}x}{k+f(x)}$.

$2I=\int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}x}{k+f(x)}+\frac{1}{k}\int\limits_a^b \frac{f(x)\mathrm{d}x}{k+f(x)}=\frac{1}{k}\int\limits_a^b \mathrm{d}x=\frac{1}{k}(b-a)\Rightarrow I=\frac{b-a}{2k}$.

**Câu 63.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0;1]$. Biết $f(x).f(1-x)=1$ với $\forall x\in[0;1]$. Tính giá trí $I=\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$

**A.** $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

**Câu 64.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, ta có $f(x)>0$ và $f(0).f(2018-x)=1$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^{2018} \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$

**A.** $I=2018$. **B.** $I=0$ **C.** $I=1009$ **D.** 4016

**Câu 65.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)>0$ khi $x\in[0;5]$. Biết $f(x).f(5-x)=1$, tính tích phân $I=\int_0^5 \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$.

**A.** $I=\frac{5}{4}$. **B.** $I=\frac{5}{3}$. **C.** $I=\frac{5}{2}$. **D.** $I=10$.

**Câu 66.** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x)=f(x)$. Biết $\int\limits_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=5$. Tính tích phân $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{11}{2}$.

**Câu 67.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên **R** và $f(x)>0$ khi $x\in[0;a]$ $(a>0)$. Biết $f(x).f(a-x)=1$, tính tích phân $I=\int\limits_0^a \frac{dx}{1+f(x)}$.

**A.** $I=\frac{a}{2}$. **B.** $I=2a$. **C.** $I=\frac{a}{3}$. **D.** $I=\frac{a}{4}$.

**Câu 68.** Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $\begin{cases} f(x).f(a-x)=1 \\ f(x)>0,\forall x\in[0;a] \end{cases}$ và $\int\limits_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}=\frac{ba}{c}$, trong đó $b$, $c$ là hai số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó $b+c$ có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

**A.** $(11;22)$. **B.** $(0;9)$. **C.** $(7;21)$. **D.** $(2017;2020)$.

## TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 6

**Câu 69.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;4]$, đồng biến trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn đẳng thức $x+2x.f(x)=[f'(x)]^2$, $\forall x\in[1;4]$. Biết rằng $f(1)=\frac{3}{2}$, tính $I=\int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x$?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** $I=\frac{1186}{45}$. **B.** $I=\frac{1174}{45}$. **C.** $I=\frac{1222}{45}$. **D.** $I=\frac{1201}{45}$.

**Câu 70.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x).e^{f^3(x)-x^2-1}-\frac{2x}{f^2(x)}=0$ và $f(0)=1$. Tích phân $\int_0^{\sqrt{7}} x.f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\frac{2\sqrt{7}}{3}$. **B.** $\frac{15}{4}$. **C.** $\frac{45}{8}$. **D.** $\frac{5\sqrt{7}}{4}$.

**Câu 71.** Cho hàm số $f(x)=x^4+4x^3-3x^2-x+1, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^1 f^2(x).f'(x)\mathrm{d}x$.

**A.** 2. **B.** –2. **C.** $-\frac{7}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

**Câu 72.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;1)$ và $f(x)\neq 0$, $\forall x\in(0;1)$. Biết rằng $f\left(\frac{1}{2}\right)=a$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=b$ và $x+xf'(x)=2f(x)-4$, $\forall x\in(0;1)$. Tính tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x.\cos x+2\sin 2x}{f^2(\sin x)}\mathrm{d}x$ theo $a$ và $b$.

**A.** $I=\frac{3a+b}{4ab}$. **B.** $I=\frac{3b+a}{4ab}$. **C.** $I=\frac{3b-a}{4ab}$. **D.** $I=\frac{3a-b}{4ab}$.

**Câu 73.** Cho hàm số $f$ liên tục, $f(x)>-1$, $f(0)=0$ và thỏa $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}$. Tính $f(\sqrt{3})$.

**A.** 0. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 9.

**Câu 74.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x=4$, $f(5)=3$, $f(2)=2$. Tính $I=\int_1^2 x^3 f'(x^2+1)\mathrm{d}x$

**A.** 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 6.

**Câu 75.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn $f(x)=\frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{x}$. Tính tích phân $I=\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=3+2\ln^2 2$. **B.** $I=2\ln^2 2$. **C.** $I=\ln^2 2$. **D.** $I=2\ln 2$.

**Câu 76.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x.f(\sin^2 x)\mathrm{d}x=\int_1^{16}\frac{f(\sqrt{x})}{x}\mathrm{d}x=1$. Tính tích phân $\int_{\frac{1}{8}}^{1}\frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** $I=3$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\frac{5}{2}$.

**Câu 77.** Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $4x.f\left(x^2\right)+3f\left(1-x\right)=\sqrt{1-x^2}$. Tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

**A.** $I=\frac{\pi}{4}$. **B.** $I=\frac{\pi}{6}$. **C.** $I=\frac{\pi}{20}$. **D.** $I=\frac{\pi}{16}$.

**Câu 78.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{9}{5}$ và $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{5}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\frac{3}{5}$. **B.** $I=\frac{1}{4}$. **C.** $I=\frac{3}{4}$. **D.** $I=\frac{1}{5}$.

## TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

## TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN DẠNG 1:

**Câu 1.** **(Hậu Lộc Thanh Hóa)** Biết $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{a}\pi-\ln b$. Khi đó, giá trị của $a^2+b$ bằng

**A.** 11. **B.** 7. **C.** 13. **D.** 9.

**Câu 2.** Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x=a\pi+b\ln 2$, với $a$, $b$ là các số thực. Tính $16a-8b$

**A.** 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

**Câu 3.** Biết $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x^6}+x^3}\mathrm{d}x=\frac{\pi^3}{a}+\frac{\sqrt{3}\pi^2}{b}+c\pi+d\sqrt{3}$ với $a,b,c,d$ là các số nguyên. Tính $a+b+c+d$.

**A.** $a+b+c+d=28$. **B.** $a+b+c+d=16$. **C.** $a+b+c+d=14$. **D.** $a+b+c+d=22$.

**Câu 4.** **(Chuyên Phan Bội Châu Lần2)** Cho tích phân $I=\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}.\sin\sqrt{x}\mathrm{d}x=a\pi^2+b\ \left(a,\ b\in\mathbb{Z}\right)$, Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\frac{a}{b}<-3$. **B.** $a^2-b=-4$. **C.** $\frac{a}{b}\in(-1;0)$. **D.** $a-b=6$.

**Câu 5.** Cho biết $\int_0^1\frac{x^2e^x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x=\frac{a}{b}.e+c$ với $a$, $c$ là các số nguyên, $b$ là số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a-b+c$.

**A.** 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** $-3$.

**Câu 6.** **(Chuyên Thái Bình Lần 3)** Biết $\int_{\frac{1}{12}}^{12}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx=\frac{a}{b}e^{\frac{c}{d}}$ trong đó $a,b,c,d$ là các số nguyên dương và các phân số $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ là tối giản. Tính $bc-ad$.

**A.** 12. **B.** 1. **C.** 24. **D.** 64.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 7.** **(THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Biết $\int_1^2 (x+1)^2 e^{x-\frac{1}{x}}dx = me^{\frac{p}{q}} - n$, trong đó $m,n,p,q$ là các số nguyên dương và $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản. Tính $T = m+n+p+q$.

**A.** $T=11$. **B.** $T=10$. **C.** $T=7$. **D.** $T=8$.

**Câu 8.** **(THPT SỐ 1 TƯ NGHĨA LẦN 2 NĂM 2019)** Biết rằng $\int e^{2x}\cos 3x dx = e^{2x}(a\cos 3x + b\sin 3x) + c$, trong đó $a$, $b$, $c$ là các hằng số, khi đó tổng $a+b$ có giá trị là

**A.** $-\frac{5}{13}$. **B.** $\frac{1}{13}$. **C.** $\frac{5}{13}$. **D.** $-\frac{1}{13}$.

**Câu 9.** **(Nguyễn Du Dak-Lak 2019)** Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - x\sin x}{\cos^2 x}dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{a} + \frac{1}{b}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + c\ln 2$ (với $a,b,c$ là các số nguyên). Khi đó $a+b+c$ bằng

**A.** $2$. **B.** $4$. **C.** $-1$. **D.** $1$.

**Câu 10.** **(CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 2019 – LẦN 1)** Cho $I = \int_0^1 \left(x + \sqrt{x^2+15}\right)dx = a + b\ln 3 + c\ln 5$ với $a,b,c \in \mathbb{Q}$. Tính tổng $a+b+c$.

**A.** $1$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

## TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN DẠNG 2:

**Câu 11.** Cho biết tích phân $I = \int_1^e x\left(2x^2 + \ln x\right)dx = \frac{a.e^4 + b.e^2 + c}{4}$ với $a,b,c$ là các ước nguyên của 4. Tổng $a+b+c=?$

**A.** 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1

**Câu 12.** **(KINH MÔN HẢI DƯƠNG 2019)** Biết $\int_0^3 x\ln\left(x^2+16\right)dx = a\ln 5 + b\ln 2 + \frac{c}{2}$, trong đó $a$, $b$, $c$ là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T = a+b+c$

**A.** $T=-2$. **B.** $T=16$. **C.** $T=2$. **D.** $T=-16$.

**Câu 13.** **(Sở Thanh Hóa 2019)** Cho $I = \int_0^1 x\ln\left(2+x^2\right)dx = a\ln 3 + b\ln 2 + c$ với $a$, $b$, $c$ là các số hữu tỷ. Giá trị của $a+b+c$ bằng

**A.** $\frac{3}{2}$. **B.** $1$. **C.** $0$. **D.** $2$.

**Câu 14.** Tính tích phân $I = \int_1^2 \left(2019\log_2 x + \frac{1}{\ln 2}\right)x^{2018}dx$.

**A.** $I = 2^{2017}$. **B.** $I = 2^{2019}$. **C.** $I = 2^{2018}$. **D.** $I = 2^{2020}$.

**Câu 15.** **(PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH)** Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{(1+x)^2}dx = \frac{a}{e+1} + b\ln\frac{2}{e+1} + c$ với $a,b,c \in \mathbb{Z}$. Tính $a+b+c$.

**A.** $-1$. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $2$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 16.** **(THPT PHỤ DỰC – THÁI BÌNH)** Nghiệm dương $a$ của phương trình $\int_1^a (2x-1)\ln x\,dx = (a^2-a)\ln a - 9$ thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** $(1;3)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(5;7)$. **D.** $(7;10)$.

**Câu 17.** **( Sở Phú Thọ)** Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x + 2\cos x)}{\cos^2 x}dx = a\ln 3 + b\ln 2 + c.\pi$ (với $a, b, c$ là các số hữu tỉ). Giá trị biểu thức $abc$ bằng.

**A.** $\frac{15}{8}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{5}{4}$. **D.** $\frac{17}{8}$.

**Câu 18.** **(HSG Bắc Ninh)** Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{\cos^2 x}dx = \frac{a}{b}\ln 2 + \frac{\pi}{c}$ với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên. Khi đó, $\frac{bc}{a}$ bằng

**A.** $-6$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** $6$. **D.** $-\frac{8}{3}$.

**Câu 19.** **(THPT LÊ VĂN HƯU NĂM 2018-2019)** Cho tích phân $I = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right)\ln x\,dx = a.e^2 + b$, $a$ và $b$ là các số hữu tỉ. Giá trị của $4a+3b$ là

**A.** $\frac{13}{2}$. **B.** $\frac{13}{4}$. **C.** $-\frac{13}{4}$. **D.** $-\frac{13}{2}$.

**Câu 20.** **(HKII-CHUYÊN-NGUYỄN-HUỆ-HÀ-NỘI)** Khẳng định nào sau đây đúng về kết quả $\int_1^e x^3 \ln x\,dx = \frac{3e^a + 1}{b}$?

**A.** $a.b = 64$. **B.** $a.b = 46$. **C.** $a - b = 12$. **D.** $a - b = 4$.

**Câu 21.** Giả sử tích phân $\int_0^1 x.\ln(2x+1)^{2017}\,dx = a + \frac{b}{c}\ln 3$. Với phân số $\frac{b}{c}$ tối giản. Lúc đó

**A.** $b + c = 6057$. **B.** $b + c = 6059$. **C.** $b + c = 6058$. **D.** $b + c = 6056$.

**Câu 22.** **(ĐỀ HỌC SINH GIỎI TỈNH BẮC NINH NĂM 2018-2019)** Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{\cos^2 x}dx = \frac{a}{b}\ln 2 + \frac{\pi}{c}$ với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên. Khi đó, $\frac{bc}{a}$ bằng

**A.** $-6$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** $6$. **D.** $-\frac{8}{3}$.

## TÍCH PHÂN HÀM ẨN PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN

**Câu 1:** **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $A = \int_0^2 (x-1)f'(x)\,dx = 9$ và $f(2) + f(0) = 3$. Tính $I = \int_0^2 f(x)\,dx$

**A.** $I = 12$. **B.** $I = -12$. **C.** $I = -6$. **D.** $I = 6$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 2:** **(THPT NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 x^2 f(x)dx=\frac{1}{3}$ Tính $\int_0^1 x^3 f'(x)dx$.

**A.** $-1$ **B.** $1$ **C.** $3$ **D.** $-3$

**Câu 3:** **(THPT NGUYỄN KHUYẾN TP.HCM NĂM 2018-2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thoả mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 x dx=10$ và $f(0)=3$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x dx$ bằng

**A.** $-13$ **B.** $13$ **C.** $7$ **D.** $-7$

**Câu 4:** **(Đặng Thành Nam Đề 12)** Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\frac{x}{x+f^2(x)}$. Biết rằng $\int_1^2 g(x)dx=1$ và $2g(2)-g(1)=2$. Tích phân $\int_1^2 \frac{x^2}{x+f^2(x)}dx$ bằng

**A.** $1,5$. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Câu 5:** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(x^3+3x+1)=3x+2, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_1^5 x.f'(x)dx$.

**A.** $\frac{5}{4}$. **B.** $\frac{17}{4}$. **C.** $\frac{33}{4}$. **D.** $-1761$.

**Câu 6:** **(Chuyên Vinh Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(x)+f(1-x)=x^3(1-x), \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Tính $I=\int_0^2 xf'\left(\frac{x}{2}\right)dx$ bằng:

**A.** $-\frac{1}{10}$. **B.** $\frac{1}{20}$. **C.** $\frac{1}{10}$. **D.** $-\frac{1}{20}$.

**Câu 7:** **(CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG QUẢNG NAM LẦN 2 NĂM 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$. Biết $\int_0^1 [x.f'(1-x)-f(x)]dx=\frac{1}{2}$. Tính $f(0)$.

**A.** $f(0)=-1$. **B.** $f(0)=\frac{1}{2}$. **C.** $f(0)=-\frac{1}{2}$. **D.** $f(0)=1$.

**Câu 8:** **(THPT Nghèn Lần1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 x f(x)dx=\frac{1}{5}$ và $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=\frac{9}{5}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$.

**A.** $I=\frac{3}{4}$. **B.** $I=\frac{1}{5}$. **C.** $I=\frac{1}{4}$. **D.** $I=\frac{4}{5}$.

**Câu 9:** **(Chuyên Vinh Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$. Biết $f(0)=1$ và $f(x)f(2-x)=e^{2x^2-4x}$ với mọi $x\in[0;2]$. Tính tích phân $I=\int_0^2 \frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}dx$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** $I=-\frac{14}{3}$. **B.** $I=-\frac{32}{5}$. **C.** $I=-\frac{16}{3}$. **D.** $I=-\frac{16}{5}$.

**Câu 10:** **(THPT Sơn Tây Hà Nội 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^3 x\cdot f'(2x-4)\mathrm{d}x=8$; $f(2)=2$. Tính $I=\int_{-2}^{1} f(2x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=-5$. **B.** $I=-10$. **C.** $I=5$. **D.** $I=10$.

**Câu 11:** **(KÊNH TRUYỀN HÌNH GIÁO DỤC QUỐC GIA VTV7 –2019)** Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $f(2)=0$, $\int_1^2 \left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{45}$ và $\int_1^2 (x-1)f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{30}$. Tính $I=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=-\frac{1}{36}$. **B.** $I=-\frac{1}{15}$. **C.** $I=\frac{1}{12}$. **D.** $I=-\frac{1}{12}$.

**Câu 12:** **(NGUYỄN TRUNG THIÊN HÀ TĨNH)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;2]$, thỏa các điều kiện $f(2)=1$ và $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$. Giá trị của $\int_1^2\frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x$:

**A.** 1. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

**Câu 13:** **(Thuan-Thanh-Bac-Ninh)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$ và $\left(f'(x)\right)^2+4\left(6x^2-1\right).f(x)=40x^6-44x^4+32x^2-4, \forall x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng?

**A.** $\frac{23}{15}$. **B.** $\frac{13}{15}$. **C.** $-\frac{17}{15}$. **D.** $-\frac{7}{15}$.

**Câu 14:** Cho hàm số $f(x)$ thỏa $f(0)=f(1)=1$. Biết $\int_0^1 e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx=ae+b$. Tính biểu thức $Q=a^{2018}+b^{2018}$.

**A.** $Q=8$. **B.** $Q=6$. **C.** $Q=4$. **D.** $Q=2$.

**Câu 15:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)-2018f(x)=2018.x^{2017}.\mathrm{e}^{2018x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2018$. Tính giá trị $f(1)$.

**A.** $f(1)=2019\mathrm{e}^{2018}$. **B.** $f(1)=2018.\mathrm{e}^{-2018}$. **C.** $f(1)=2018.\mathrm{e}^{2018}$. **D.** $f(1)=2017.\mathrm{e}^{2018}$.

**Câu 16:** Cho hàm số $y=f(x)$ với $f(0)=f(1)=1$. Biết rằng: $\int_0^1 \mathrm{e}^x\left[f(x)+f'(x)\right]\mathrm{d}x=a\mathrm{e}+b$ Tính $Q=a^{2017}+b^{2017}$.

**A.** $Q=2^{2017}+1$. **B.** $Q=2$. **C.** $Q=0$. **D.** $Q=2^{2017}-1$.

**Câu 17:** Cho hai hàm số liên tục $f$ và $g$ có nguyên hàm lần lượt là $F$ và $G$ trên đoạn $[1;2]$. Biết rằng $F(1)=1$, $F(2)=4$, $G(1)=\frac{3}{2}$, $G(2)=2$ và $\int_1^2 f(x)G(x)\mathrm{d}x=\frac{67}{12}$. Tính $\int_1^2 F(x)g(x)\mathrm{d}x$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** $\frac{11}{12}$. **B.** $-\frac{145}{12}$. **C.** $-\frac{11}{12}$. **D.** $\frac{145}{12}$.

**Câu 18:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;2]$ và $\int_1^2 (x-1)f'(x)\mathrm{d}x=a$. Tính $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ theo $a$ và $b=f(2)$.

**A.** $b-a$. **B.** $a-b$. **C.** $a+b$. **D.** $-a-b$.

**Câu 19:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4$. Tính tích phân $I=\int_0^1 x.f'(2x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=13$. **B.** $I=12$. **C.** $I=20$. **D.** $I=7$.

**Câu 20:** Cho $y=f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{2};4\right)$ và $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\mathrm{d}t=3$, tính $I=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \sin 2x.f'(\sin x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=10$. **B.** $I=-2$. **C.** $I=1$. **D.** $I=-1$.

**Câu 21:** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.f(x)\mathrm{d}x=f(0)=1$. Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f'(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=1$. **B.** $I=0$. **C.** $I=2$. **D.** $I=-1$.

**Câu 22:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x)+2018f(x)=2x\sin x$. Tính $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$?

**A.** $\frac{2}{2019}$. **B.** $\frac{2}{2018}$. **C.** $\frac{2}{1009}$. **D.** $\frac{4}{2019}$.

**Câu 23:** Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(0).f'(2)\neq 0$ và $g(x)f'(x)=x(x-2)\mathrm{e}^x$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_0^2 f(x).g'(x)\mathrm{d}x$?

**A.** $-4$. **B.** $\mathrm{e}-2$. **C.** $4$. **D.** $2-\mathrm{e}$.

**Câu 24:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{\cos x}\mathrm{d}x=1$ và $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\sin x.\tan x.f(x)\right]\mathrm{d}x=2$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x.f'(x)\mathrm{d}x$ bằng:

**A.** $4$. **B.** $\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{1+3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $6$.

**Câu 25:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$

**A.** $I=12$. **B.** $I=112$. **C.** $I=28$. **D.** $I=144$.

**Câu 26:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thoả mãn $f(1)=f(0)=1$, $f'(0)=2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** $\int_0^1 f''(x)(1-x)\mathrm{d}x=-2018$. **B.** $\int_0^1 f''(x)(1-x)\mathrm{d}x=-1$.

**C.** $\int_0^1 f''(x)(1-x)\mathrm{d}x=2018$. **D.** $\int_0^1 f''(x)(1-x)\mathrm{d}x=1$.

**Câu 27:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$ và $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\, f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$. Tính $f(2018\pi)$.

**A.** $-1$. **B.** $0$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $1$.

**Câu 28:** Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$. Biết $f(0)=1$ và $f(x).f(2-x)=\mathrm{e}^{2x^2-4x}$, với mọi $x\in[0;2]$. Tính tích phân $I=\int_0^2\frac{\left(x^3-3x^2\right)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$.

**A.** $I=-\frac{16}{3}$. **B.** $I=-\frac{16}{5}$. **C.** $I=-\frac{14}{3}$. **D.** $I=-\frac{32}{5}$.

**Câu 29:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$ và $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\int_0^1(x+1)\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=2-\mathrm{e}$. **B.** $I=\mathrm{e}-2$. **C.** $I=\frac{\mathrm{e}}{2}$. **D.** $I=\frac{\mathrm{e}-1}{2}$.

**Câu 30:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\int_1^2(x-1)^2 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}$, $f(2)=0$ và $\int_1^2\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=7$. Tính tích phân $I=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\frac{7}{5}$. **B.** $I=-\frac{7}{5}$. **C.** $I=-\frac{7}{20}$. **D.** $I=\frac{7}{20}$.

**Câu 31:** **(THPT ĐÔ LƯƠNG 3 LẦN 2)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\int_1^2(x-1)^2 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}$, $f(2)=0$, $\int_1^2\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=7$. Tính $I=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\frac{7}{5}$. **B.** $I=-\frac{7}{5}$. **C.** $I=-\frac{7}{20}$. **D.** $I=\frac{7}{20}$.

**Câu 32:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}}f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}$. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{8}}f(2x)\mathrm{d}x$

**A.** $I=1$. **B.** $I=\frac{1}{2}$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\frac{1}{4}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 33:** **(Chuyên Vinh Lần 3)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=0$ Biết $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{9}{2}$ và $\int_0^1 f'(x)\cos\frac{\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{4}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\frac{6}{\pi}$. **B.** $\frac{2}{\pi}$. **C.** $\frac{4}{\pi}$. **D.** $\frac{1}{\pi}$.

**Câu 34:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1)=0$. Biết $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$, $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $\pi$. **B.** $\frac{1}{\pi}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{3\pi}{2}$.

**Câu 35:** **(Thanh Chương Nghệ An Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;\pi]$ thỏa mãn: $\int_0^{\pi}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\cos x.f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. Khi đó tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $0$. **B.** $\frac{\pi}{2}+1$. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** $\frac{\pi}{2}-1$.

**Câu 36:** **(Sở Đà Nẵng 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1;1]$ và thỏa $f(1)=0$, $\left(f'(x)\right)^2+4f(x)=8x^2+16x-8$ với mọi $x$ thuộc $[-1;1]$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $-\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

**Câu 37:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa $f(1)=0$, $\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}$ và $\int_0^1\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $\frac{\pi}{2}$. **B.** $\pi$. **C.** $\frac{1}{\pi}$. **D.** $\frac{2}{\pi}$.

**Câu 38:** Xét hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(1)=1$ và $f(2)=4$. Tính $J=\int_1^2\left(\frac{f'(x)+2}{x}-\frac{f(x)+1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

**A.** $J=1+\ln 4$. **B.** $J=4-\ln 2$. **C.** $J=\ln 2-\frac{1}{2}$. **D.** $J=\frac{1}{2}+\ln 4$.

**Câu 39:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\int_0^1(x+1)\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$ và $f(1)=0$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

**A.** $\frac{\mathrm{e}-1}{2}$. **B.** $\frac{\mathrm{e}^2}{4}$. **C.** $\mathrm{e}-2$. **D.** $\frac{\mathrm{e}}{2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 40:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

**A.** $\frac{7}{5}$. **B.** 1. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** 4.

**Câu 41:** **(CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ HÒA BÌNH LẦN 4 NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ với $f(0)=f(1)=1$. Biết rằng $\int_0^1 e^x [f(x)+f'(x)] dx = ae+b$, $a,b \in \mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $a^{2019}+b^{2019}$ bằng

**A.** $2^{2018}+1$. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $2^{2018}-1$.

**Câu 42:** **(Đoàn Thượng)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1)=0$. Biết $\int_0^1 f^2(x)dx = \frac{1}{2}$, $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)dx = \frac{\pi}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

**A.** $\pi$. **B.** $\frac{3\pi}{2}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{1}{\pi}$

**Câu 43:** **(Chuyên Vinh Lần 3).** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

**A.** $\frac{7}{5}$. **B.** 1. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** 4.

**Câu 44:** **(Chuyên Vinh Lần 3).** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=4$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 36$ và $\int_0^1 x.f(x) dx = \frac{1}{5}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

**A.** $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 4. **D.** $\frac{2}{3}$.

**Câu 45:** **(Chuyên Vinh Lần 3)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $f(2)=3$, $\int_0^2 [f'(x)]^2 dx = 4$ và $\int_0^2 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^2 f(x) dx$ bằng

**A.** $\frac{2}{115}$. **B.** $\frac{297}{115}$. **C.** $\frac{562}{115}$. **D.** $\frac{266}{115}$.

**Câu 46:** **(Chuyên Vinh Lần 3).** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=4$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 5$ và $\int_0^1 x.f(x) dx = -\frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

**A.** $\frac{15}{19}$. **B.** $\frac{17}{4}$. **C.** $\frac{17}{18}$. **D.** $\frac{15}{4}$.

**Câu 47:** **(Chuyên Vinh Lần 3).** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $f(2)=6$ $\int_0^2 [f'(x)]^2 dx = 7$ và $\int_0^2 x.f(x) dx = \frac{17}{2}$. Tích phân $\int_0^2 f(x) dx$ bằng

**A.** 8. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 5.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 48:** **(Chuyên Vinh Lần 3)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;3]$ thỏa mãn $f(3)=6$ $\int_0^3 [f'(x)]^2 dx = 2$ và $\int_0^3 x^2.f(x)dx = \frac{154}{3}$. Tích phân $\int_0^3 f(x)dx$ bằng

**A.** $\frac{53}{5}$. **B.** $\frac{117}{20}$. **C.** $\frac{153}{5}$. **D.** $\frac{13}{5}$.

**Câu 49:** **(Chuyên Vinh Lần 3)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=2$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 8$ và $\int_0^1 x^3.f(x)dx = 10$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

**A.** $-\frac{2}{285}$. **B.** $\frac{194}{95}$. **C.** $\frac{116}{57}$. **D.** $\frac{584}{285}$.

**Câu 50:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9$ và $\int_0^1 x^3 f(x)dx = \frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

**A.** $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** $\frac{6}{5}$.

**Câu 51:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{11}$ và $\int_0^1 x^4 f(x)dx = -\frac{1}{55}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

**A.** $\frac{-1}{7}$ **B.** $\frac{1}{7}$ **C.** $\frac{-1}{55}$ **D.** $\frac{1}{11}$

**Câu 52:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f(1)=\frac{3}{2}$; $\int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{6}$ và $\int_0^1 (x-1)\sqrt{1+\frac{x}{x-2}(f'(x))^2}dx = -\frac{1}{3}$. Tính tích phân $\int_0^1 f^2(x)dx = ?$

**A.** $\frac{7}{3}$ **B.** $\frac{8}{15}$ **C.** $\frac{53}{60}$ **D.** $\frac{203}{60}$

## TÍCH PHÂN HÀM ẨN

**Câu 1:** **(Lý Nhân Tông)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục không âm trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f(x).f'(x)=\cos x\sqrt{1+f^2(x)}$ với mọi $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ và $f(0)=\sqrt{3}$. Giá trị của $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

**A.** $2$. **B.** $1$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $0$.

**Câu 2:** **(Đặng Thành Nam Đề 15)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x).f'(x)=1$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Biết $\int_1^2 f(x)dx = a$ và $f(1)=b$, $f(2)=c$. Tích phân $\int_1^2 \frac{x}{f(x)}dx$ bằng

**A.** $2c-b-a$. **B.** $2a-b-c$. **C.** $2c-b+a$. **D.** $2a-b+c$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 3:** **(KIM LIÊN HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03)** Cho $\int_0^1 (3x+1)f'(x)\mathrm{d}x = 2019,\ 4f(1)-f(0)=2020$. Tính $\int_0^{\frac{1}{3}} f(3x)\mathrm{d}x$.

**A.** $\frac{1}{9}$. **B.** $3$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $1$.

**Câu 4:** **(HSG Bắc Ninh)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ thỏa mãn $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[f^2(x)-2f(x).(3-x)\right]\mathrm{d}x = -\frac{109}{12}$. Tính $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x$.

**A.** $\ln\frac{7}{9}$. **B.** $\ln\frac{2}{9}$. **C.** $\ln\frac{5}{9}$. **D.** $\ln\frac{8}{9}$.

**Câu 5:** **(CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP 2019 LẦN 2)** Cho hàm $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ là hàm liên tục thỏa mãn điều kiện $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(f(x)\right)^2-2f(x)\left(\sin x-\cos x\right)\right]\mathrm{d}x = 1-\frac{\pi}{2}$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=-1$. **B.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=1$. **C.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=2$. **D.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=0$.

**Câu 6:** **(CỤM TRƯỜNG SÓC SƠN MÊ LINH HÀ NỘI)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ và $f(x)>0$, $\forall x\in(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)=-x.f^2(x)$ với mọi $x\in(0;+\infty)$, biết $f(1)=\frac{2}{a+3}$ và $f(2)>\frac{1}{4}$. Tổng tất cả các giá trị nguyên của $a$ thỏa mãn là

**A.** $-14$. **B.** $1$. **C.** $0$. **D.** $-2$.

**Câu 7:** **( Nguyễn Tất Thành Yên Bái)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(3)=21$, $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 9$. Tính tích phân $I=\int_0^1 x.f'(3x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=15$. **B.** $I=12$. **C.** $I=9$. **D.** $I=6$.

**Câu 8:** **(Chuyên Thái Bình Lần3)** Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(2-x)=x.e^{x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_0^2 f(x)dx$.

**A.** $I=\frac{e^4-1}{4}$. **B.** $I=\frac{2e-1}{2}$. **C.** $I=e^4-2$. **D.** $I=e^4-1$.

**Câu 9:** **(THPT LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NGÃI)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $x^2f'(x)+f(x)=0$ và $f(x)\neq 0$, $\forall x\in(0;+\infty)$. Tính $f(2)$ biết $f(1)=\mathrm{e}$.

**A.** $f(2)=\mathrm{e}^2$. **B.** $f(2)=\sqrt[3]{\mathrm{e}}$. **C.** $f(2)=2\mathrm{e}^2$. **D.** $f(2)=\sqrt{\mathrm{e}}$.

**Câu 10:** **(Lý Nhân Tông)** Biết $\int_0^1 \frac{\pi x^3+2^x+\mathrm{e}x^3 2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x = \frac{1}{m}+\frac{1}{\mathrm{e}\ln n}.\ln\left(p+\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+\pi}\right)$ với $m$, $n$, $p$ là các số nguyên dương. Tính tổng $P=m+n+p$

**A.** $P=5$. **B.** $P=6$. **C.** $P=8$. **D.** $P=7$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 11:** **(THPT Sơn Tây Hà Nội 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên đoạn $[1;2]$ đồng thời thỏa mãn $f(2)=0$, $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = \frac{5}{12}+\ln\frac{2}{3}$ và $\int_1^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2}dx = -\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}$. Tính $I=\int_1^2 f(x)dx$.

**A.** $I=\frac{3}{4}+2\ln\frac{2}{3}$. **B.** $I=\ln\frac{2}{3}$. **C.** $I=\frac{3}{4}+2\ln\frac{3}{2}$. **D.** $I=\frac{3}{4}+2\ln\frac{2}{3}$.

**Câu 12:** **(THPT TX QUẢNG TRỊ LẦN 1 NĂM 2019)** Cho hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$ và thỏa mãn $(xf'(x)-2f(x))\ln x = x^3 - f(x)$, $\forall x\in(1;+\infty)$; biết $f\left(\sqrt[3]{e}\right)=3e$. Giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(12;\frac{25}{2}\right)$. **B.** $\left(13;\frac{27}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{23}{2};12\right)$. **D.** $\left(14;\frac{29}{2}\right)$.

**Câu 13:** **(Nguyễn Khuyến)**Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thoả mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 x dx = 10$ và $f(0)=3$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x dx$ bằng

**A.** $-13$ **B.** 13 **C.** 7 **D.** $-7$

**Câu 14:** **(THPT LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NGÃI)** Cho hàm $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(x)+f(1-x)=2x^2-2x+1$

Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$.

**A.** $I=\frac{4}{3}$ **B.** $I=\frac{2}{3}$ **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=\frac{1}{3}$

**Câu 15:** **(THPT-Phúc-Trạch-Hà-Tĩnh-lần-2-2018-2019-thi-tháng-4)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[0;3]$, thỏa mãn $\begin{cases} f(3-x).f(x)=1 \\ f(x)\neq 1 \end{cases}$, $\forall x\in[0;3]$ và $f(0)=\frac{1}{2}$. Tính tích phân $I=\int_0^3 \frac{x.f'(x)}{[1+f(3-x)]^2.f^2(x)}dx$

**A.** $I=\frac{3}{2}$. **B.** $I=\frac{1}{2}$. **C.** $I=1$. **D.** $I=\frac{5}{2}$.

**Câu 16:** **(-Mai-Anh-Tuấn-Thanh-Hóa-lần-1-2018-2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)+2x.f(x)=e^x f(x)$ với $f(x)\neq 0,\forall x$ và $f(0)=1$. Khi đó $|f(1)|$ bằng

**A.** $e+1$. **B.** $e^{e-2}$. **C.** $e-1$. **D.** $e^{e+1}$.

**Câu 17:** **(CổLoa Hà Nội)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $xf'(x).\ln x + f(x) = 2x^2$, $\forall x\in(1;+\infty)$ và $f(e)=e^2$. Tính tích phân $I=\int_e^{e^2}\frac{x}{f(x)}dx$.

**A.** $I=\frac{3}{2}$. **B.** $I=\frac{1}{2}$. **C.** $I=\frac{5}{3}$. **D.** $I=2$.

**Câu 18:** **(THPT NÔNG CỐNG 2 LẦN 4 NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x)+x.f'(x)\geq x^{2018}$ $\forall x\in[0;1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int_0^1 f(x)dx$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** $\frac{1}{2018.2020}$. **B.** $\frac{1}{2019.2020}$. **C.** $\frac{1}{2020.2021}$. **D.** $\frac{1}{2019.2021}$.

**Câu 19:** **(Quỳnh Lưu Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện $f(1)=2$, $f(x)\neq 0, \forall x>0$ và $(x^2+1)^2 f'(x)=\left[f(x)\right]^2(x^2-1)$ với mọi $x>0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

**A.** $\frac{2}{5}$. **B.** $-\frac{2}{5}$. **C.** $-\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

**Câu 20:** **(Lương Thế Vinh Lần 3)** Cho đa thức bậc bốn $y=f(x)$ đạt cực trị tại $x=1$ và $x=2$. Biết $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+f'(x)}{2x}=2$. Tích phân $\int\limits_0^1 f'(x)dx$ bằng

**A.** $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $1$.

**Câu 21:** **(HKII-CHUYÊN-NGUYỄN-HUỆ-HÀ-NỘI)** Cho $f(x)+4xf(x^2)=3x$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=-2$. **B.** $I=-\frac{1}{2}$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\frac{1}{2}$.

**Câu 22:** **(CHUYÊN NGUYỄN DU ĐĂK LĂK LẦN X NĂM 2019)** Cho $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $3f'(x).e^{f^3(x)-x^2-1}-\frac{2x}{f^2(x)}=0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=1$, tính tích phân $I=\int\limits_0^{\sqrt{7}} x.f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\frac{9}{2}$. **B.** $I=\frac{45}{8}$. **C.** $I=\frac{11}{2}$. **D.** $I=\frac{15}{4}$.

**Câu 23:** **(Chuyên Vinh Lần 2)** Giả sử hàm số $f$ có đạo hàm cấp $n$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1-x)+x^2f''(x)=2x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 xf'(x)dx$.

**A.** $I=-1$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\frac{1}{3}$. **D.** $I=-\frac{1}{3}$.

**Câu 24:** **(Nguyễn Trãi Hải Dương Lần1)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=0$, $f'(0)\neq 0$ và thỏa mãn hệ thức $f(x).f'(x)+18x^2=(3x^2+x)f'(x)+(6x+1)f(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

Biết $\int\limits_0^1 (x+1)e^{f(x)}\mathrm{d}x=a.e^2+b$, với $a;b\in\mathbb{Q}$. Giá trị của $a-b$ bằng.

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $0$. **D.** $\frac{2}{3}$.

**Câu 25:** **(GIA LỘC TỈNH HẢI DƯƠNG 2019 lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$, $f(x)\neq 0$ với mọi $x\in[1;3]$, đồng thời $f'(x)(1+f(x))^2=\left[(f(x))^2(x-1)\right]^2$ và $f(1)=-1$.

Biết rằng $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=a\ln 3+b$, $a,b\in\mathbb{Z}$, tính tổng $S=a+b^2$.

**A.** $S=0$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=2$. **D.** $S=4$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 26:** **(Sở Nam Định)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng các tiếp tuyến với đồ thị $y=f(x)$ tại các điểm có hoành độ $x=-1$, $x=0$, $x=1$ lần lượt tạo với chiều dương của trục $Ox$ các góc $30°$, $45°$, $60°$.

Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^{0} f'(x).f''(x)\mathrm{d}x+4\int\limits_{0}^{1}\left[f'(x)\right]^3.f''(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\dfrac{25}{3}$. **B.** $I=0$. **C.** $I=\dfrac{1}{3}$. **D.** $I=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+1$.

**Câu 27:** **(THTT số 3)** Cho hàm số $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn

$\mathrm{f}\left(\mathrm{x}^3+\mathrm{x}-1\right)+\mathrm{f}\left(-\mathrm{x}^3-\mathrm{x}-1\right)$

$=-6\mathrm{x}^6-12\mathrm{x}^4-6\mathrm{x}^2-2, \forall \mathrm{x}\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $\int\limits_{-3}^{1}\mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx}$.

**A.** 32. **B.** 4. **C.** $-36$. **D.** $-20$.

**Câu 28:** **(Chuyên Bắc Giang)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$f'(x)-f(x)=\left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{\frac{x^2+2x-1}{2}}, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=\mathrm{e}$. Giá trị của $f(5)$ bằng

**A.** $3\mathrm{e}^{12}-1$. **B.** $5\mathrm{e}^{17}$. **C.** $5\mathrm{e}^{17}-1$. **D.** $3\mathrm{e}^{12}$.

**Câu 29:** **(Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đăk Lăk)** Cho $\int\limits_{0}^{6} f^2(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{6} x.f(x)\mathrm{d}x=72$. Giá trị của $\int\limits_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

**Câu 30:** **(Ba Đình Lần2)** Hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$f^2(1-x)=\left(x^2+3\right)f(x+1)$. Biết rằng $f(x)\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}$, tính $I=\int\limits_{0}^{2}(2x-1)f''(x)dx$.

**A.** 8. **B.** 0. **C.** $-4$. **D.** 4.

**Câu 31:** **(Sở Lạng Sơn 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=4x^3+2x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

**A.** $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $\dfrac{16}{15}$. **D.** $\dfrac{8}{15}$.

**Câu 32:** **(Phan Đình Tùng Hà Tĩnh)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, biết $x.f(x)\neq -1, \forall x\neq 0$; $f(1)=-2$ và $\left(x.f(x)+1\right)^2-x.f'(x)-f(x)=0$ với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Tính $\int\limits_{1}^{e} f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $\dfrac{1}{e}-2$. **B.** $2-\dfrac{1}{e}$. **C.** $-\dfrac{1}{e}$. **D.** $\dfrac{1}{e}-1$.

**Câu 33:** **(PHÂN TÍCH BL_PT ĐỀ ĐH VINHL3 -2019..)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=3$ và $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2, \forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int\limits_{0}^{2} xf'(x)\mathrm{d}x$ bằng

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** $\frac{-4}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{-10}{3}$

**Câu 34:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $R$ và thỏa mãn $f(x)=4xf(x^2)+2x+1$ với $\forall x\in R$. Tính tích phân $I=\int_0^1 xf'(x)dx$

**A.** $-2$. **B.** $-1$. **C.** $2$. **D.** $1$.

**Câu 35:** **(SỞ GDĐT KIÊN GIANG 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $5f(x)-7f(1-x)=3(x^2-2x),\forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng tích phân $I=\int_0^1 x.f'(x)dx=-\frac{a}{b}$ ( với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $T=8a-3b$.

**A.** $T=1$. **B.** $T=0$. **C.** $T=16$. **D.** $T=-16$.

**Câu 36:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{2}{3};1\right]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(\frac{2}{3x})=5x$ với $\forall x\in\left[\frac{2}{3};1\right]$. Tính tích phân $\int_{\frac{2}{3}}^1 \ln x.f'(x)dx$

**A.** $\frac{5}{3}\ln\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{5}{3}\ln\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$. **C.** $-\frac{5}{3}\ln\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{5}{3}\ln\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$

**Câu 37:** **(Chuyên Hạ Long lần 2-2019)** Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $3f(-x)+2f(x)=x^{10},\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^1 f(x)dx$.

**A.** $I=55$. **B.** $I=\frac{1}{11}$. **C.** $I=11$. **D.** $I=\frac{1}{55}$.

**Câu 38:** **(THPT PHỤ DỰC – THÁI BÌNH)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $(-1;+\infty)$. Biết đẳng thức $2f(x)+(x^2-1)f'(x)=\frac{x(x+1)^2}{\sqrt{x^2+3}}$ được thỏa mãn $\forall x\in(-1;+\infty)$. Tính giá trị $f(0)$.

**A.** $3-\sqrt{3}$. **B.** $2-\sqrt{3}$.

**C.** $-\sqrt{3}$. **D.** Chưa đủ dữ kiện tính $f(0)$.

**Câu 39:** **(Đặng Thành Nam Đề 14)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $2f(x)+3f(1-x)=x\sqrt{1-x}$, với mọi $x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^2 xf'\left(\frac{x}{2}\right)dx$ bằng

**A.** $-\frac{4}{75}$. **B.** $-\frac{4}{25}$. **C.** $-\frac{16}{75}$. **D.** $-\frac{16}{25}$.

**Câu 40:** **(Sở Quảng NamT)** Cho hàm số $f(x)$ không âm, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $\left[2f(x)+1-x^2\right]f'(x)=2x\left[1+f(x)\right],\forall x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

**Câu 41:** **(SGD-Nam-Định-2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng các tiếp tuyến với đồ thị $y=f(x)$ tại các điểm có hoành độ $x=-1$, $x=0$, $x=1$ lần lượt tạo với chiều dương của trục $Ox$ các góc $30°$, $45°$, $60°$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Tính tích phân $I=\int_{-1}^{0} f'(x).f''(x)\mathrm{d}x+4\int_{0}^{1}\left[f'(x)\right]^3.f''(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\frac{25}{3}$. **B.** $I=0$. **C.** $I=\frac{1}{3}$. **D.** $I=\frac{\sqrt{3}}{3}+1$.

**Câu 42:** **(Nam Tiền Hải Thái Bình Lần1)** Cho hàm số $f(x)>0$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$, đồng thời thỏa mãn $f'(0)=0$; $f(0)=1$ và $f''(x).f(x)+\left[\frac{f(x)}{\cos x}\right]^2=\left[f'(x)\right]^2$.Tính $T=f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

**A.** $T=\frac{3}{4}$. **B.** $T=\frac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $T=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $T=\frac{1}{2}$.

**Câu 43:** **( Chuyên Lam Sơn Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0,\pi]$. Biết $f(0)=2e$ và $f(x)$ luôn thỏa mãn đẳng thức $f'(x)+\sin x.f(x)=\cos x.e^{\cos x},\forall x\in[0,\pi]$. Tính $I=\int_{0}^{\pi} f(x).dx$ (làm tròn đến phần trăm).

**A.** $I\approx 6,55$. **B.** $I\approx 17,30$. **C.** $I\approx 10,31$. **D.** $I\approx 16,91$.

**Câu 44:** **(GIỮA-HKII-2019-NGHĨA-HƯNG-NAM-ĐỊNH)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[xf'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x).f''(x)\right]$ với mọi $x$ dương. Biết $f(1)=f'(1)=1$. Giá trị $f^2(2)$ bằng

**A.** $f^2(2)=\sqrt{2\ln 2+2}$. **B.** $f^2(2)=2\ln 2+2$.

**C.** $f^2(2)=\ln 2+1$. **D.** $f^2(2)=\sqrt{\ln 2+1}$.

**Câu 45:** **(Đặng Thành Nam Đề 9)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)>0,\ \forall x\in[1;2]$ thỏa mãn $f(1)=1,\ f(2)=\frac{22}{15}$ và $\int_{1}^{2}\frac{\left(f'(x)\right)^3}{x^4}dx=\frac{7}{375}$. Tích phân $\int_{1}^{2} f(x)dx$ bằng

**A.** $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{7}{5}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

**Câu 46:** **(SỞ GDĐT KIÊN GIANG 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f^2(x).f'(x)-4xe^{-f^3(x)+2x^2+x+1}=1=f(0)$. Biết rằng $I=\int_{0}^{\frac{-1+\sqrt{4089}}{4}}(4x+1)f(x)\mathrm{d}x=\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T=a-3b$

**A.** $T=6123$. **B.** $T=12279$. **C.** $T=6125$. **D.** $T=12273$.

**Câu 47:** **(THPT-Toàn-Thắng-Hải-Phòng)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_{0}^{1}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{3}{2}-2\ln 2$ và $\int_{0}^{1}\frac{f(x)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=2\ln 2-\frac{3}{2}$. Tích phân $\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\frac{1-2\ln 2}{2}$. **B.** $\frac{3-2\ln 2}{2}$. **C.** $\frac{3-4\ln 2}{2}$. **D.** $\frac{1-\ln 2}{2}$.

**Câu 48:** **(Đặng Thành Nam Đề 3)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn [0;1]. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\int_{0}^{1}(2f(x)+3x)f(x)\mathrm{d}x-\int_{0}^{1}(4f(x)+x)\sqrt{xf(x)}\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $-\frac{1}{24}$. **B.** $-\frac{1}{8}$. **C.** $-\frac{1}{12}$. **D.** $-\frac{1}{6}$.

**Câu 49:** **(Đặng Thành Nam Đề 10)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1;e]$ thỏa mãn $f(1)=\frac{1}{2}$ và $x.f'(x)=xf^2(x)-3f(x)+\frac{1}{x}$, $\forall x\in[1;e]$. Giá trị của $f(e)$ bằng

**A.** $\frac{3}{2e}$. **B.** $\frac{4}{3e}$. **C.** $\frac{3}{4e}$. **D.** $\frac{2}{3e}$.

**Câu 50:** **(Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đăk Lăk)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn hai điều kiện $\left[f(x)\right]^2+3x^2+2x-1\le 4x.f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^{3}f(x)dx=12$. Giá trị $\int_{0}^{2}f(x)dx$ bằng

**A.** $6$. **B.** $7$. **C.** $8$. **D.** $5$.

## GTLN, GTNN, BĐT - TÍCH PHÂN

**Câu 1:** Tìm giá trị lớn nhất của $G(x)=\int_{1}^{x}\left(t^2+t\right)dt$ trên đoạn $[-1;1]$.

**A.** $\frac{1}{6}$. **B.** $2$. **C.** $-\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

**Câu 2:** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{x^2}\left(x^3-4x\right)$. Hàm số $F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $1$. **D.** $4$.

**Câu 3:** Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số $f(x)=\frac{2017x}{\left(x^2+1\right)^{2018}}$ thỏa mãn $F(1)=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất $m$ của $F(x)$.

**A.** $m=-\frac{1}{2}$. **B.** $m=\frac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$. **C.** $m=\frac{1+2^{2017}}{2^{2018}}$. **D.** $m=\frac{1}{2}$.

**Câu 4:** Tìm giá trị lớn nhất $M$ của hàm số $f(t)=\int_{0}^{t}\left(2\sqrt{3}\cos 2x+2\sin 2x\right)dx$ trong khoảng $(0;+\infty)$.

**A.** $M=3\sqrt{3}$. **B.** $M=3$. **C.** $M=2\sqrt{3}$. **D.** $M=2$.

**Câu 5:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn $f'(x)\ge x+\frac{1}{x}$, $\forall x\in\mathbb{R}^+$ và $f(1)=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(2)$.

**A.** $3$. **B.** $2$. **C.** $\frac{5}{2}+\ln 2$. **D.** $4$.

**Câu 6:** Gọi $x_1$, $x_2$ lần lượt là điểm cực đại và điểm cực tiểu của hàm số $f(x)=\int_{e^x}^{e^{2x}}t\ln t dt$. Tính $S=x_1+x_2$.

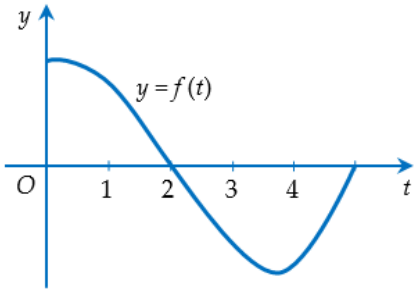
**A.** $\ln 2e$. **B.** $\ln 2$. **C.** $-\ln 2$. **D.** $0$.

**Câu 7:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $[1;+\infty)$ thỏa mãn $f(1)=1$ và $f'(x)\ge 3x^2+2x-5$ trên $[1;+\infty)$. Tìm số nguyên dương lớn nhất $m$ sao cho $\min\limits_{x\in[3;10]}f(x)\ge m$ với mọi hàm số $y=f(x)$ thỏa điều kiện đề bài.

**A.** $m=15$. **B.** $m=20$. **C.** $m=25$. **D.** $m=30$.

**Câu 8:** Xét hàm số $F(x)=\int_{2}^{x}f(t)dt$ trong đó hàm số $y=f(t)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Trong các giá trị dưới đây, giá trị nào là lớn nhất?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG




**A.** $F(1)$. **B.** $F(2)$. **C.** $F(3)$. **D.** $F(0)$.

**Câu 9:** Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=\int_0^1 \left|x^2-ax\right|dx$ với $a\in[0,1]$

**A.** $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$. **C.** $\frac{2-\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}-1}{6}$

**Câu 10:** Cho $a+b=ab+4$ và $a<b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $I=\int_a^b \left|x^2-(a+b)x+ab\right|dx$

**A.** $4\sqrt{3}$. **B.** $12$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $48$

**Câu 11:** Tìm giá trị nhỏ nhất của $I=\int_a^b \left|x^2+(2-m)x-2\right|dx$ trong đó $a<b$ là hai nghiệm của phương trình $x^2+(2-m)x-2=0$

**A.** $\frac{128}{9}$. **B.** $\frac{8\sqrt{2}}{3}$. **C.** $8$. **D.** $2\sqrt{2}$

**Câu 12:** Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=\int_0^1 \left|x^3-ax\right|dx$ với $a\in[0,1]$

**A.** $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{2-\sqrt{2}}{8}$

**Câu 13:** Cho $a+b=ab+4$ và $a<b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $I=\int_a^b \left|(x-a)^2(x-b)\right|dx$

**A.** 12. **B.** 0. **C.** $\frac{64}{3}$. **D.** $\frac{49}{3}$

**Câu 14:** Cho $(a-b)^2+(a^2-b^2)^2=4$ và $a<b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $I=\int_a^b \left|x^2-(a+b)x+ab\right|dx$

**A.** $\frac{16}{9}$. **B.** $\frac{9}{16}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$

**Câu 15:** Gọi a,b lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $S=\int_m^{2m} \left|x^3-4mx^2+5m^2x-2m^3\right|dx$ với $m\in[1;3]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

**A.** $a+b=\frac{41}{6}$. **B.** $a+b=1$. **C.** $a+b=\frac{21}{4}$. **D.** $a+b=2$

**Câu 16:** m là tham số thuộc đoạn $[1;3]$. Gọi $a,b$ lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P=\int_m^{2m}(x-m)^2(x-2m)^2dx$. Tính $a+b=$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** 31. **B.** 36. **C.** $\frac{122}{15}$. **D.** $\frac{121}{4}$

**Câu 17:** Giá trị nhỏ nhất của $P=\int\limits_{m}^{2m^2+2}\left|x^2-2\left(m^2+m+1\right)x+4\left(m^3+m\right)\right|dx$ là $S=\frac{a}{b};a,b$ nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $T=a+b$

**A.** 7. **B.** 337. **C.** 25. **D.** 91

**Câu 18:** $A$ là tập các hàm số $f$ liên tục trên đoạn $[0;1]$. Tìm $m=\underbrace{\min}_{f\in A}\left\{\int\limits_0^1 x.f^2(x)dx-\int\limits_0^1 x^{2018}.f(x)dx\right\}$

**A.** $\frac{-1}{2019}$. **B.** $\frac{-1}{16144}$. **C.** $\frac{-2017}{2018}$. **D.** $\frac{-1}{16140}$

**Câu 19:** $A$ là tập các hàm số $f$ liên tục trên đoạn $[0;1]$. Tìm $M=\underbrace{\min}_{f\in A}\left\{-\int\limits_0^1 x.f^2(x)dx+\int\limits_0^1 x^{2013}.f(x)dx\right\}$

**A.** $\frac{1}{2014}$. **B.** $\frac{503}{2014}$. **C.** $\frac{2012}{2013}$. **D.** $\frac{1}{8.2013}$

**Câu 20:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)\le 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Tìm giá trị lớn nhất của $f(1)$

**A.** $\frac{2e-1}{e}$. **B.** $\frac{e-1}{e}$. **C.** $e-1$. **D.** $2e-1$.

**Câu 21:** $A$ là tập các hàm số $f$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và nhận giá trị không âm trên đoạn $[0;1]$. Tìm m nhỏ nhất sao cho $\int\limits_0^1 f\left(\sqrt[2018]{x}\right)dx\le m.\int\limits_0^1 f(x)dx\ \ \forall f\in A$

**A.** 2018. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2018}$. **D.** $\sqrt{2018}$

**Câu 22:** Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=2018.f(0)$. Tìm giá trị nhỏ nhất biểu thức $M=\int\limits_0^1\frac{1}{\left[f(x)\right]^2}dx+\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2dx$

**A.** $\ln 2018$. **B.** $2\ln 2018$. **C.** $2e$. **D.** $2018e$

**Câu 23:** Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1)=e.f(0)=e;\int\limits_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2dx\le 1$. Tìm mệnh đề đung

**A.** $f\left(\frac{1}{2}\right)=e^2$. **B.** $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}$. **C.** $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}$. **D.** $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2e}$

**Câu 24:** Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=e.f(0)$. Biểu thức $\int\limits_0^1\frac{1}{\left[f(x)\right]^2}dx+\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2dx\le 2$. Mệnh đề nào đúng

**A.** $f(1)=\sqrt{\frac{2e}{e-1}}$. **B.** $f(1)=\sqrt{\frac{2e^2}{e^2-1}}$. **C.** $f(1)=\sqrt{\frac{2(e-2)}{e-1}}$. **D.** $f(1)=\frac{2(e-2)}{e^2-1}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 25:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1;1]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f^2(x)\le 1$ với mọi $x\in[-1;1]$ và $\int_{-1}^{1} f(x)dx=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx$?

**A.** $-\frac{1}{2}$ **B.** $-\frac{1}{4}$ **C.** $-\frac{2}{3}$ **D.** $-1$

**Câu 26:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn $f(x)\in[-8;8]$ với mọi $x\in[0;1]$ và $\int_{0}^{1} xf(x)dx=3$. Tìm giá trị lớn nhất của $\int_{0}^{1} x^3 f(x)dx$?

**A.** $2$ **B.** $\frac{31}{16}$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** $\frac{17}{8}$

**Câu 27:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện sau: $\max_{[0;1]}|f(x)|=6$ và $\int_{0}^{1} x^2 f(x)dx=0$. Giá trị lớn nhất của tích phân $\int_{0}^{1} x^3 f(x)dx$ bằng bao nhiêu?

**A.** $\frac{1}{8}$ **B.** $\frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}$ **C.** $\frac{2-\sqrt[3]{4}}{16}$ **D.** $\frac{1}{24}$

**Câu 28:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x)+xf'(x)\ge x^{2018}$ với mọi $x\in[0;1]$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_{0}^{1} f(x)dx$ bằng:

**A.** $\frac{1}{2021\times 2022}$ **B.** $\frac{1}{2018\times 2021}$ **C.** $\frac{1}{2018\times 2019}$ **D.** $\frac{1}{2019\times 2021}$

**Câu 29:** Cho hàm số $y=f(x)$ dương và liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn $\max_{[1;3]} f(x)=2;\min_{[1;3]} f(x)=\frac{1}{2}$ và biểu thức $S=\int_{1}^{3} f(x)dx\int_{1}^{3}\frac{1}{f(x)}dx$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó tính $\int_{1}^{3} f(x)dx$?

**A.** $\frac{7}{2}$ **B.** $\frac{5}{2}$ **C.** $\frac{7}{5}$ **D.** $\frac{3}{5}$

**Câu 30:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)\ge x^4+\frac{2}{x^2}-2x\ \forall x>0$ và $f(1)=-1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** Phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm trên $(0;1)$.

**B.** Phương trình $f(x)=0$ có đúng 3 nghiệm trên $(0;+\infty)$.

**C.** Phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm trên $(1;2)$.

**C.** Phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm trên $(2;5)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$f'(x)\ge x^4+\frac{2}{x^2}-2x=\frac{x^6-2x^3+2}{x^2}=\frac{(x^3-1)^2+1}{x^2}>0,\ \forall x>0.$

$\Rightarrow y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

$\Rightarrow f(x)=0$ có nhiều nhất 1 nghiệm trên khoảng $(0;+\infty)$ $(1)$.

Mặt khác ta có:

$f'(x) \ge x^4 + \frac{2}{x^2} - 2x > 0,\ \forall x > 0 \Rightarrow \int_1^2 f'(x)\,dx \ge \int_1^2 \left( x^4 + \frac{2}{x^2} - 2x \right) dx = \frac{21}{5}$

$\Rightarrow f(2) - f(1) \ge \frac{21}{5} \Rightarrow f(2) \ge \frac{17}{5}$.

Kết hợp giả thiết ta có $y = f(x)$ liên tục trên $[1;2]$ và $f(2).f(1) < 0$ $(2)$.

Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra phương trình $f(x) = 0$ có đúng 1 nghiệm trên khoảng $(1;2)$.

**Câu 31:** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) > 0,\ \forall x \in [1;2]$ và $\int_1^2 \frac{[f'(x)]^3}{x^4} dx = \frac{7}{375}$. Biết $f(1) = 1$, $f(2) = \frac{22}{15}$, tính $I = \int_1^2 f(x)\,dx$.

**A.** $P = \frac{71}{60}$. **B.** $P = \frac{6}{5}$. **C.** $P = \frac{73}{60}$. **D.** $P = \frac{37}{30}$.

**Câu 32:** Cho hàm số $y = f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời ta đặt $g(x) = 1 + \int_0^x f(t)\,dt$. Biết $g(x) \le \sqrt{f(x)}$ với mọi $x \in [0;1]$. Tích phân $\int_0^1 \frac{1}{g(x)} dx$ có giá trị lớn nhất bằng:

**A.** $\frac{1}{3}$ **B.** 1 **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{1}{2}$

**Câu 33:** Cho hàm số $y = f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời ta đặt $g(x) = 1 + 3\int_0^x f(t)\,dt$. Biết $g(x) \ge f^2(x)$ với mọi $x \in [0;1]$. Tích phân $\int_0^1 \sqrt{g(x)} dx$ có giá trị lớn nhất bằng:

**A.** $\frac{5}{2}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** $\frac{7}{4}$ **D.** $\frac{9}{5}$

**Câu 34:** Cho hàm số $y = f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời ta đặt $g(x) = 1 + \int_0^{x^2} f(t)\,dt$. Biết $g(x) \ge 2xf(x^2)$ với mọi $x \in [0;1]$. Tích phân $\int_0^1 g(x) dx$ có giá trị lớn nhất bằng:

**A.** 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 1

**Câu 35:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0) = 1$ và $3\int_0^1 \left[ f'(x)[f(x)]^2 + \frac{1}{9} \right] dx \le 2\int_0^1 \sqrt{f'(x)}\, f(x)\,dx$. Tính tích phân $\int_0^1 [f(x)]^3 dx$:

**A.** $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{7}{6}$.

**Câu 36:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x).f'(x) = 2x\sqrt{(f(x))^2 + 1}$ và $f(0) = 0$. Giá trị lớn nhất $M$ và giá trị nhỏ nhất $m$ của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ lần lượt là

**A.** $M = 20;\ m = 2$. **B.** $M = 4\sqrt{11};\ m = \sqrt{3}$.

**C.** $M = 20;\ m = \sqrt{2}$. **D.** $M = 3\sqrt{11};\ m = \sqrt{3}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 37:** Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời ta đặt $g(x)=1+2\int_0^x f(t)\,dt$. Biết $g(x)\ge[f(x)]^3$ với mọi $x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1 \sqrt[3]{[g(x)]^2}\,dx$ có giá trị lớn nhất bằng:

**A.** $\frac{5}{3}$ **B.** $4$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** $5$

**Câu 38:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 xf(x)\,dx=0$ và $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=1$. Tích phân $I=\int_0^1 e^x f(x)\,dx$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

**A.** $\left(-\infty;-\frac{5}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};e-1\right)$. **C.** $\left(-\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right)$. **D.** $(e-1;+\infty)$.

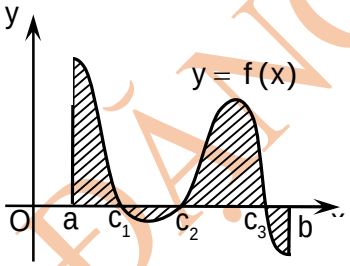
**Câu 39:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thoả mãn $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx=0$ và $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=6$. Giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 x^3 f(x)\,dx$ bằng

**A.** $\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}$. **C.** $\frac{2-\sqrt[3]{4}}{16}$. **D.** $\frac{1}{24}$.

## ỨNG DỤNG TÍNH DIỆN TÍCH

### A – KIẾN THỨC CHUNG

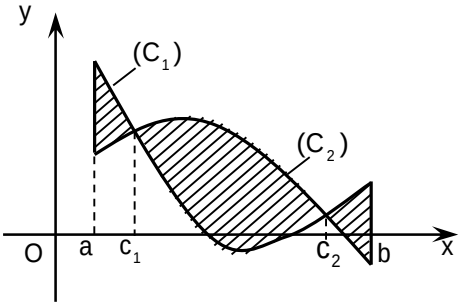
a - Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được xác định: $S=\int_a^b|f(x)|dx$




$$(H)\begin{cases} y=f(x)\\ y=0\\ x=a\\ x=b \end{cases}$$

$$\boxed{S=\int_a^b|f(x)|dx}$$

b - Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được xác định: $S=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$




$$(H)\begin{cases} (C_1):y=f_1(x)\\ (C_2):y=f_2(x)\\ x=a\\ x=b \end{cases}$$

$$\boxed{S=\int_a^b|f_1(x)-f_2(x)|dx}$$

**Chú ý:**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

- Nếu trên đoạn $[a;b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì: $\int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$

- Nắm vững cách tính tích phân của hàm số có chứa giá trị tuyệt đối

- Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, $x = h(y)$ và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ được xác định: $S = \int_c^d |g(y) - h(y)|dy$

## DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG ĐƯỢC GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐỒ THỊ

**PHƯƠNG PHÁP:**

***Trường hợp 1.*** Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$.

**Phương pháp giải toán**

+) Giải phương trình $f(x) = g(x)$ (1)

+) Nếu (1) vô nghiệm thì $S = \left|\int_a^b (f(x) - g(x))dx\right|$.

+) Nếu (1) có nghiệm thuộc $[a;b]$. giả sử $\alpha$ thì $S = \left|\int_a^\alpha (f(x) - g(x))dx\right| + \left|\int_\alpha^b (f(x) - g(x))dx\right|$

**Chú ý**: Có thể lập bảng xét dấu hàm số $f(x) - g(x)$ trên đoạn $[a; b]$ rồi dựa vào bảng xét dấu để tính tích phân.

***Trường hợp 2.*** Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ là $S = \int_\alpha^\beta |f(x) - g(x)|dx$. Trong đó $\alpha$, $\beta$ là nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình $f(x) = g(x)$ $(a \le \alpha < \beta \le b)$.

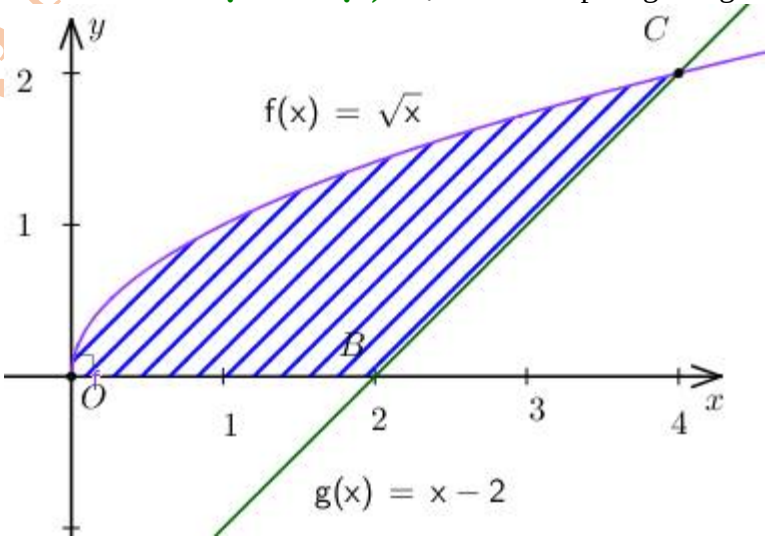
*Phương pháp giải toán*

*Bước 1.* Giải phương trình $f(x) = g(x)$ tìm các giá trị $\alpha, \beta$.

*Bước 2.* Tính $S = \int_\alpha^\beta |f(x) - g(x)|dx$ như trường hợp 1.

## B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1:** **(HKII-CHUYÊN-NGUYỄN-HUỆ-HÀ-NỘI)** Diện tích hình phẳng trong hình vẽ sau là.



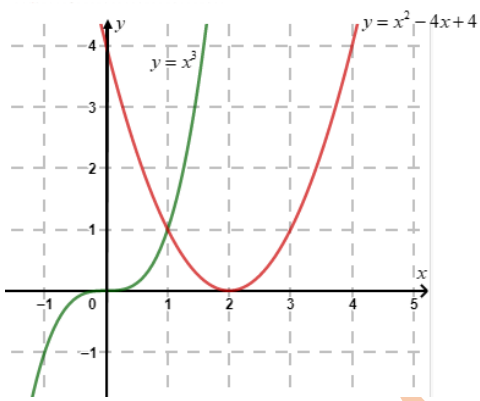

**A.** $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{11}{3}$. **C.** $\frac{7}{3}$. **D.** $\frac{10}{3}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 2:** **(Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đăk Lăk)**Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$, $x=4$ bằng

**A.** $\frac{51}{4}$. **B.** $\frac{53}{4}$. **C.** $\frac{49}{4}$. **D.** $\frac{55}{4}$.

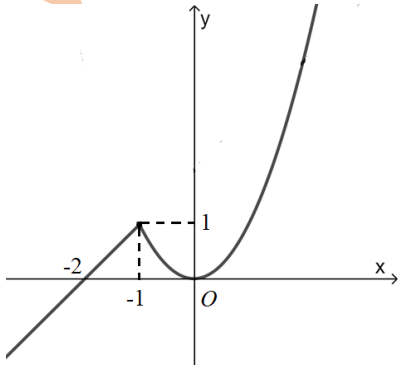
**Câu 3:** **(Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=x^3$, $y=x^2-4x+4$ và trục $Ox$ (tham khảo hình vẽ) được tính theo công thức nào dưới đây?




**A.** $\int_0^2 \left|x^3-\left(x^2-4x+4\right)\right|\mathrm{d}x$. **B.** $-\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^2\left(x^2-4x+4\right)\mathrm{d}x$.

**C.** $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x-\int_1^2\left(x^2-4x+4\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^2\left(x^2-4x+4\right)\mathrm{d}x$.

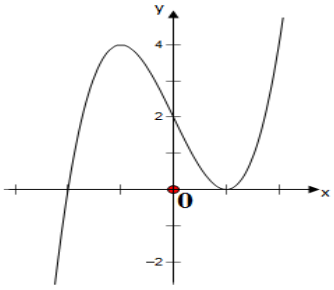
**Câu 4:** **(CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ HÒA BÌNH LẦN 4 NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị gồm một phần đường thẳng và một phần đường parabol có đỉnh là gốc tọa độ $O$ như hình vẽ. Giá trị của $\int_{-3}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng:




**A.** $\frac{26}{3}$. **B.** $\frac{38}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{28}{3}$.

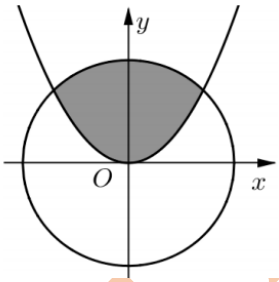
**Câu 5:** **(CổLoa Hà Nội)** Cho hàm số đa thức bậc ba $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và trục hoành.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG




**A.** 6 . **B.** $\frac{19}{4}$. **C.** $\frac{27}{4}$. **D.** 8.

**Câu 6:** **(THPT LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NGÃI)** Trong mặt phẳng cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 2$ (xem hình vẽ bên). Tính diện tích phần tô đậm (làm tròn đến chữ số hàng phần trăm).




**A.** 1,19 **B.** 1,90. **C.** 1,81. **D.** 1,80.

**Câu 7:** **(Sở Quảng NamT)** Cho $(H)$ là hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$, tiếp tuyến với $(P)$ tại điểm $M(2;4)$ và trục hoành. Diện tích của hình phẳng $(H)$ bằng

**A.** $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

**Câu 8:** Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x; y = 0; x = 0$ và $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k, (0 < k < \ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích $S_1$ và $S_2$ như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.

**A.** $k = \frac{2}{3}\ln 4$. **B.** $k = \ln 2$. **C.** $k = \ln\frac{8}{3}$. **D.** $k = \ln 3$.

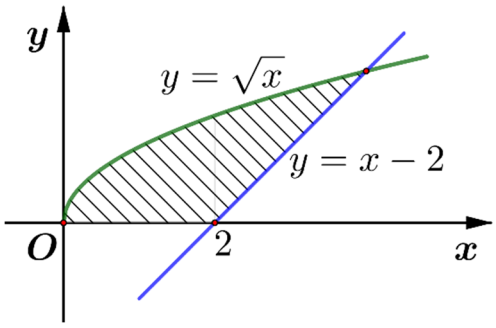
**Câu 9:** Parabol $y = \frac{x^2}{2}$ chia hình tròn có tâm là gốc tọa độ, bán kính bằng $2\sqrt{2}$ thành hai phần có diện tích là $S_1$ và $S_2$, trong đó $S_1 < S_2$. Tìm tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

**A.** $\frac{3\pi+2}{21\pi-2}$. **B.** $\frac{3\pi+2}{9\pi-2}$. **C.** $\frac{3\pi+2}{12\pi}$. **D.** $\frac{9\pi-2}{3\pi+2}$.

**Câu 10:** **(KSCL-Lần-2-2019-THPT-Nguyễn-Đức-Cảnh-Thái-Bình)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm $y = x^2$ và $y = \frac{2x}{x-1}$ là $S = a + b\ln 2$ với $a$, $b$ là những số hữu tỷ. Tính $a + b$ ?

**A.** $\frac{-1}{3}$. **B.** 2 . **C.** $\frac{-2}{3}$. **D.** 1.

**Câu 11:** **(THPT-Gia-Lộc-Hải-Dương-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)**Tính diện tích của phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ sau:




**A.** $\frac{10}{3}$. **B.** $4$. **C.** $\frac{13}{3}$. **D.** $\frac{11}{3}$.

**Câu 12:** **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Tính diện tích $S$ của hình phẳng giới hạn các đường $y=x\sqrt{x^2+1}$; $y=0$ $x=1$.

**A.** $S=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$. **B.** $S=\frac{3-\sqrt{2}}{3}$. **C.** $S=\frac{3-2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $S=\frac{3\sqrt{2}-1}{3}$.

**Câu 13:** **(Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đăk Lăk)** Cho $(H)$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x+4}$, trục hoành và trục tung. Biết đường thẳng $d:ax+by-16=0$ đi qua $A(0;2)$ và chia $(H)$ thành hai phần có diện tích bằng nhau. Giá trị $a+b$ bằng

**A.** 5. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 4.

**Câu 14:** **(Ngô Quyền Hà Nội)** Diện tích miền hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2^x$, $y=-x+3$, $y=1$ bằng

**A.** $\frac{1}{\ln 2}+3$. **B.** $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{\ln 2}+1$. **D.** $\frac{1}{\ln 2}+2$.

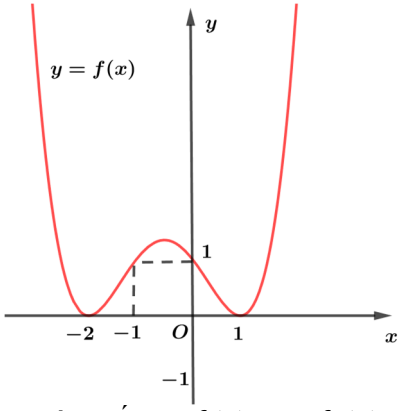
**Câu 15:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số $y=x^2\sqrt{x^2+1}$, trục $Ox$ và đường thẳng $x=1$ bằng $\frac{a\sqrt{b}-\ln\left(1+\sqrt{b}\right)}{c}$ với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên dương. Khi đó giá trị của $a+b+c$ là

**A.** 11. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 14.

**Câu 16:** **(Quỳnh Lưu Nghệ An)** Cho parabol $(P):y=x^2$ và hai điểm $A,B$ thuộc $(P)$ sao cho $AB=2$. Diện tích lớn nhất của hình phẳng giới hạn bởi $(P)$ và đường thẳng $AB$ là

**A.** $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

**Câu 17:** **(HSG Bắc Ninh)** Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ.

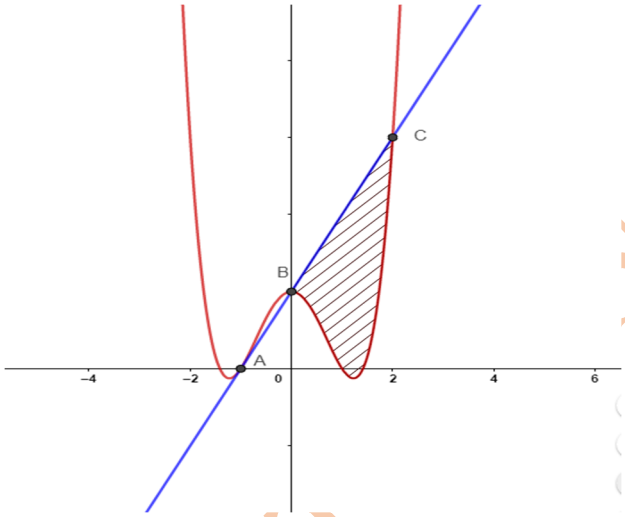



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x);y=f'(x)$ có diện tích bằng

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** $\frac{127}{40}$. **B.** $\frac{127}{10}$. **C.** $\frac{107}{5}$. **D.** $\frac{13}{5}$.

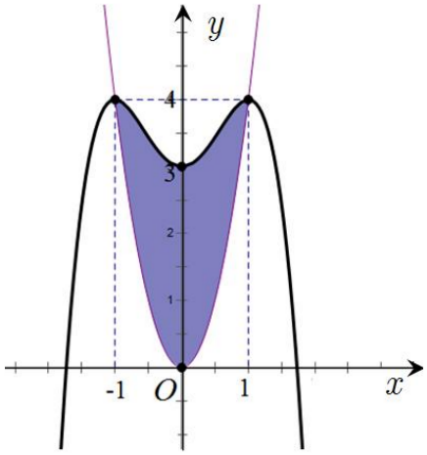
**Câu 18:** **(Nguyễn Du Dak-Lak 2019)** Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị $(C)$, biết rằng $(C)$ đi qua điểm $A(-1;0)$. Tiếp tuyến $\Delta$ tại $A$ của đồ thị $(C)$ cắt $(C)$ tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\Delta$, đồ thị $(C)$ và hai đường thẳng $x=0$; $x=2$ có diện tích bằng $\frac{56}{5}$ (phần gạch chéo trong hình vẽ).




Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\Delta$, đồ thị $(C)$ và hai đường thẳng $x=-1$; $x=0$.

**A.** $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{2}{9}$. **C.** $\frac{1}{9}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

**Câu 19:** **(Thị Xã Quảng Trị)** Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ và hàm số $y=mx^2+nx+p$ có đồ thị là các đường cong như hình vẽ bên (đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y=ax^4+bx^2+c$). Diện tích của hình phẳng được tô đậm bằng




**A.** $\frac{32}{15}$. **B.** $\frac{64}{15}$. **C.** $\frac{104}{15}$. **D.** $\frac{52}{15}$.

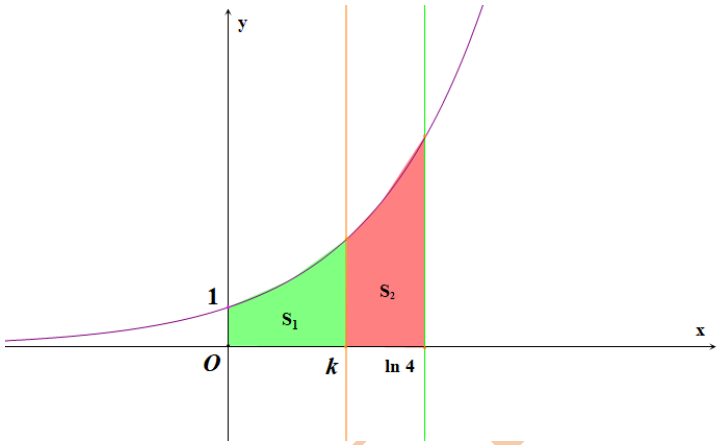
**Câu 20:** **(CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP 2019 LẦN 2)** Cho đồ thị $(C): y=\sqrt{x}$. Gọi $M$ là điểm thuộc $(C)$, $A(9;0)$. Gọi $(S_1)$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(C)$, đường thẳng $x=9$ và trục hoành. $(S_2)$ là diện tích tam giác $OMA$. Tọa độ điểm $M$ để $S_1=2S_2$ là

**A.** $M\left(3;\sqrt{3}\right)$. **B.** $M(4;2)$. **C.** $M\left(6;\sqrt{6}\right)$. **D.** $M(9;3)$.

**Câu 21:** **(CHUYÊN NGUYỄN DU ĐĂK LĂK LẦN X NĂM 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{x-m}{x+1}$ ( với $m>0$ ) có đồ thị là $(C)$. Gọi $S$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C)$ và hai trục tọa độ. Biết $S=1$, giá trị thực của $m$ gần nhất với số nào sau đây:

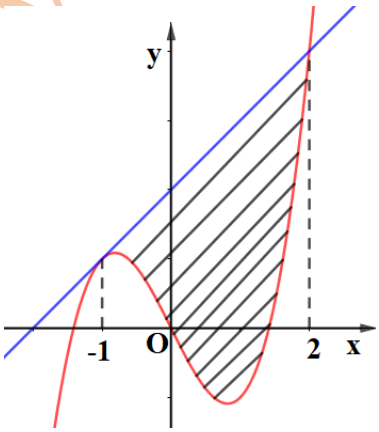
**A.** $0,56$. **B.** $0,45$. **C.** $4,4$. **D.** $1,7$.

**Câu 22:** **(Cẩm Giàng)** Cho hình thang cong $(H)$ giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k$ $(0<k<\ln 4)$ chia $(H)$ thành hai phần có diện tích là $S_1$ và $S_2$ như hình vẽ bên. Tìm $k$ để $S_1=2S_2$.



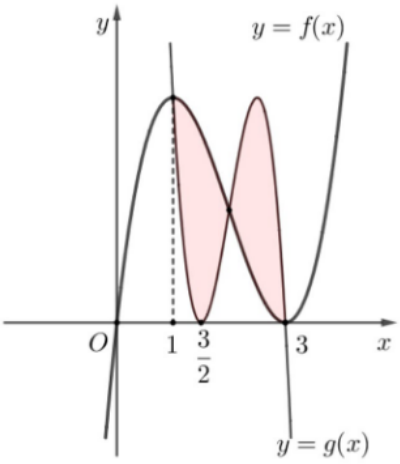

**A.** $k=\dfrac{4}{3}\ln 2$. **B.** $k=\ln\dfrac{8}{3}$. **C.** $k=\ln 2$. **D.** $k=\ln 3$.

**Câu 23:** **(KHTN Hà Nội Lần 3)** Cho hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ có đồ thị $(C)$. Biết rằng tiếp tuyến $d$ của $(C)$ tại điểm $A$ có hoành độ bằng $-1$ cắt $(C)$ tại điểm $B$ có hoành độ bằng $2$ (xem hình vẽ). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $d$ và $(C)$ (phần gạch chéo trong hình) bằng



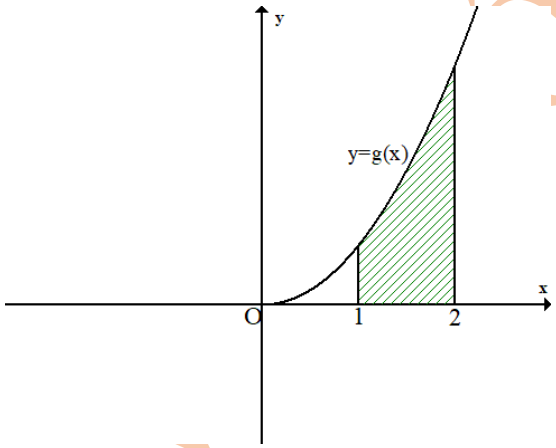

**A.** $\dfrac{27}{4}$. **B.** $\dfrac{11}{2}$. **C.** $\dfrac{25}{4}$. **D.** $\dfrac{13}{2}$.

**Câu 24:** **(Đặng Thành Nam Đề 5)** Cho $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ và $g(x)=f(dx+e)$ với $a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y=f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y=f(x)$ và $y=g(x)$ gần nhất với kết quả nào dưới đây?




**A.** $4,5$. **B.** $4,25$. **C.** $3,63$. **D.** $3,67$.

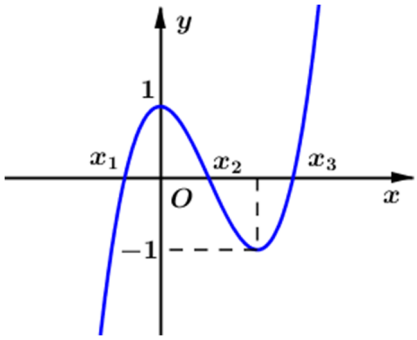
**Câu 25:** **(CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP 2019 LẦN 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=g(x)=x.f\left(x^2\right)$ có đồ thị trên đoạn $[0;2]$ như hình vẽ.




Biết diện tích miền tô màu là $S=\dfrac{5}{2}$, tính tích phân $I=\int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x$.

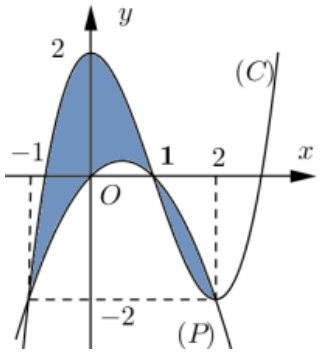
**A.** $I=5$. **B.** $I=\dfrac{5}{2}$. **C.** $I=\dfrac{5}{4}$. **D.** $I=10$.

**Câu 26:** **(THTT lần5)** Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $(C)$ như hình vẽ. Biết đồ thị hàm số đã cho cắt trục $Ox$ tại 3 điểm có hoành độ $x_1$, $x_2$, $x_3$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và $x_3-x_1=2\sqrt{3}$. Gọi diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(C)$ và trục Ox là $S$. Diện tích $S_1$ của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f\left(x\right)+1$, $y=-f\left(x\right)-1$, $x=x_1$ và $x=x_3$ bằng



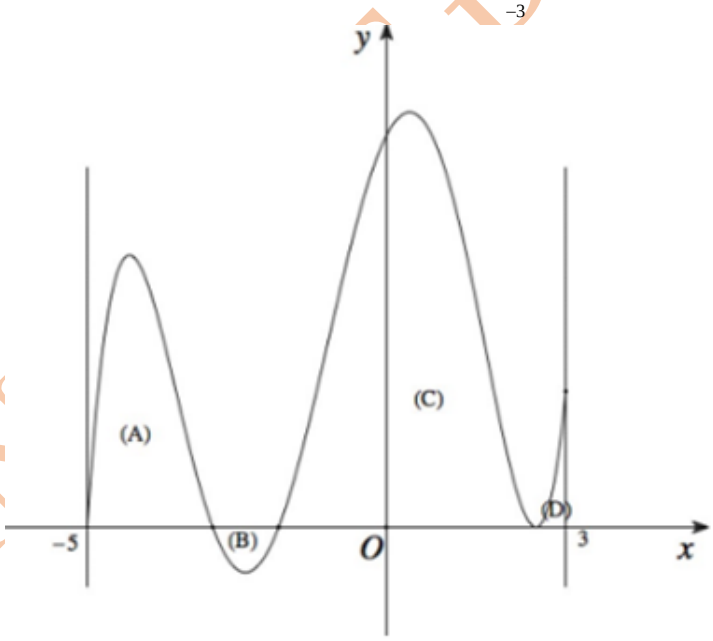

**A.** $S+2\sqrt{3}$. **B.** $R=S+4\sqrt{3}$. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** $8\sqrt{3}$.

**Câu 27:** **(Nguyễn Trãi Hải Dương Lần1)** Hình phẳng $(H)$ được giới hạn bởi đồ thị $(C)$ của hàm đa thức bậc ba và parabol $(P)$ có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** của hình vẽ có diện tích bằng



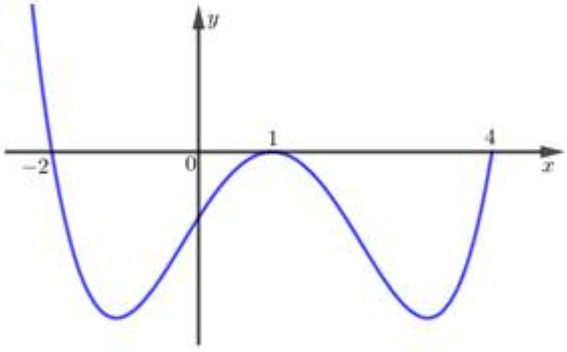

**A.** $\frac{37}{12}$. **B.** $\frac{7}{12}$. **C.** $\frac{11}{12}$. **D.** $\frac{5}{12}$.

**Câu 28:** **(Đặng Thành Nam Đề 2)** Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5;3]$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Biết diện tích các hình phẳng $(A),(B),(C),(D)$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và trục hoành lần lượt bằng $6;3;12;2$. Tích phân $\int_{-3}^{1}\left[2f(2x+1)+1\right]dx$ bằng




**A.** $27$. **B.** $25$. **C.** $17$. **D.** $21$.

**Câu 29:** **(TTHT Lần 4)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Biết rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục $Ox$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ và $[1;4]$ lần lượt bằng 9 và 12. Cho $f(1)=3$. Giá trị của biểu thức $f(-2)+f(4)$ bằng

**A.** 21. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 3.

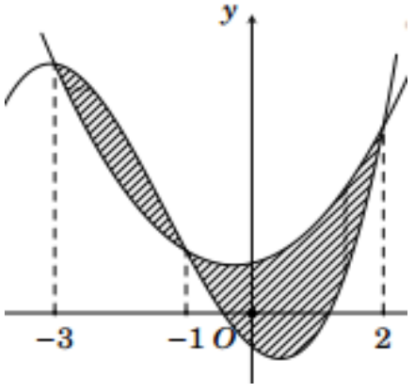
**Câu 30:** **(Hậu Lộc Thanh Hóa)** Tìm số thực $a$ để hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm $y=\dfrac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^6}$ và $y=\dfrac{a^2-ax}{1+a^6}$ có diện tích lớn nhất.

**A.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\sqrt[3]{3}$.

**Câu 31:** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$ cho $(E)$ có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,(a,b>0)$ và đường tròn $(C):x^2+y^2=7$. Để diện tích elip $(E)$ gấp 7 lần diện tích hình tròn $(C)$ khi đó

**A.** $ab=7$. **B.** $ab=7\sqrt{7}$. **C.** $ab=\sqrt{7}$. **D.** $ab=49$.

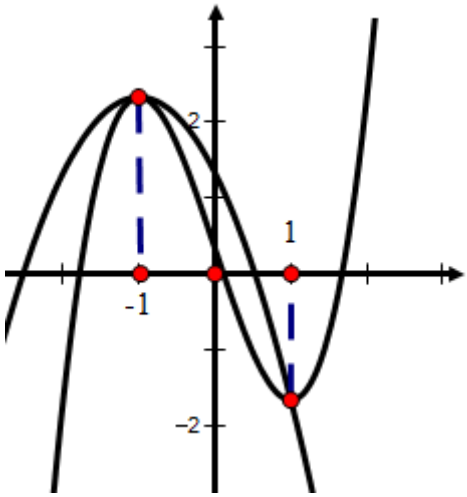
**Câu 32:** **(NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG LẦN IV NĂM 2019)** Người ta dự định trồng hoa Lan Ý để trang trí vào phần tô đậm (như hình vẽ). Biết rằng phần tô đậm là diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx-\dfrac{1}{2}$ và $y=g(x)=dx^2+ex+1$ trong đó $a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$. Biết rằng hai đồ thị đó cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt bằng $-3;-1;2$, chi phí trồng hoa là 800000 đồng/$1m^2$ và đơn vị trên các trục được tính là 1 mét. Số tiền trồng hoa gần nhất với số nào sau đây? (làm tròn đến đơn vị nghìn đồng).




**A.** 4217000 đồng. **B.** 2083000 đồng. **C.** 422000 đồng. **D.** 4220000 đồng.

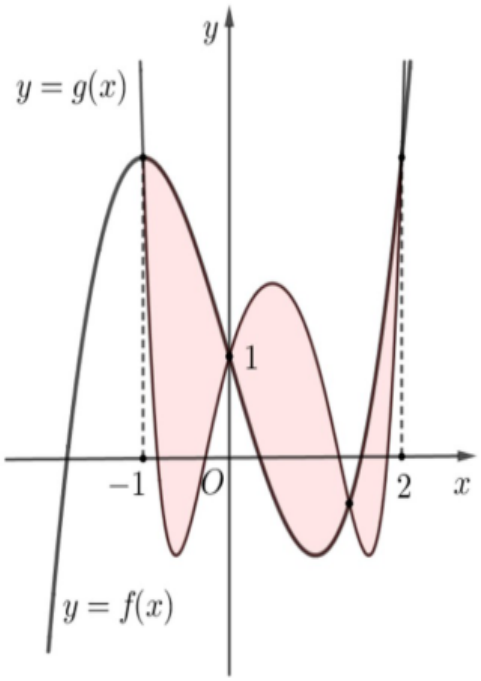
**Câu 33:** **(Chuyên Thái Nguyên)** Cho hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c\ (a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị $(C)$ và $y=mx^2+nx+p\ (m,n,p\in\mathbb{R})$ có đồ thị $(P)$ như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(C)$ và $(P)$ có giá trị nằm trong khoảng nào sau đây?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



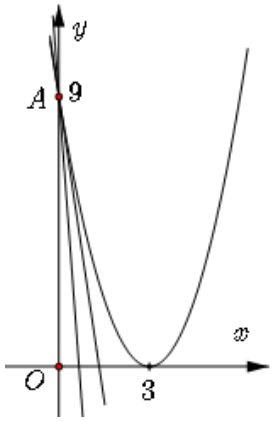

**A.** $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

**Câu 34:** **(Đặng Thành Nam Đề 9)** Cho hàm số $f(x)=x^3+ax+b$ và $g(x)=f(cx^2+dx)$ với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong đậm hơn là của hàm số $y=f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y=f(x)$ và $y=g(x)$ gần nhất với kết quả nào dưới đây?




**A.** $7,66$. **B.** $4,24$. **C.** $3,63$. **D.** $5,14$.

**Câu 35:** **(Đặng Thành Nam Đề 15)** Gọi $(H)$ là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=(x-3)^2$, trục hoành và trục tung. Gọi $k_1,k_2(k_1>k_2)$ lần lượt là hệ số góc của các đường thẳng đi qua điểm $A(0;9)$ và chia $(H)$ thành ba phần có diện tích bằng nhau (*tham khảo hình vẽ bên*).



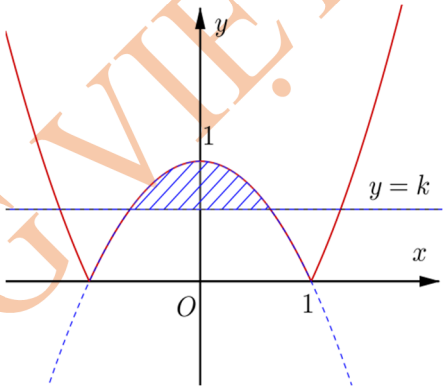

Giá trị của $k_1 - k_2$ bằng

**A.** $\frac{13}{2}$. **B.** $7$. **C.** $\frac{25}{4}$. **D.** $\frac{27}{4}$.

**Câu 36:** **(KSCL-Lần-2-2019-THPT-Nguyễn-Đức-Cảnh-Thái-Bình)** Cho đồ thị $(C)$ của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Gọi $(d)$ là tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm $A$ có hoành độ $x_A = a$. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(d)$ và $(C)$ bằng $\frac{27}{4}$, các giá trị của $a$ thỏa mãn đẳng thức nào?

**A.** $2a^2 - a - 1 = 0$. **B.** $a^2 - 2a = 0$. **C.** $a^2 - a - 2 = 0$. **D.** $a^2 + 2a - 3 = 0$.

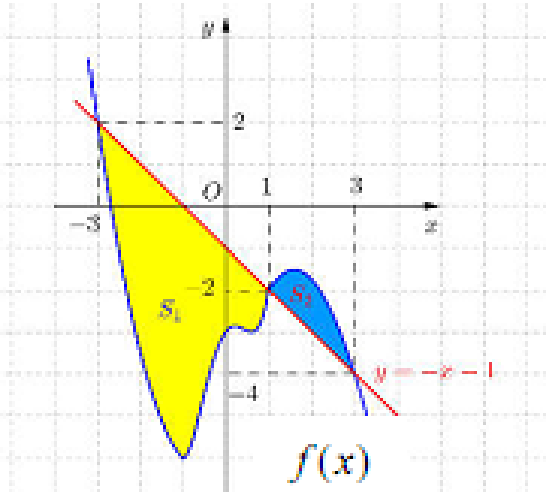
**Câu 37:** Cho hình phẳng $(H)$ giới hạn bởi các đường $y = |x^2 - 1|$ và $y = k, 0 < k < 1$. Tìm $k$ để diện tích của hình phẳng $(H)$ gấp hai lần diện tích hình phẳng được kẻ sọc trong hình vẽ bên.




**A.** $k = \sqrt[3]{4}$. **B.** $k = \sqrt[3]{2} - 1$. **C.** $k = \frac{1}{2}$. **D.** $k = \sqrt[3]{4} - 1$.

**Câu 38:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-3;3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng $S_1$, $S_2$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -x - 1$ lần lượt là $M$, $m$. Tính tích phân $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$ bằng

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG




**A.** $6+m-M$. **B.** $6-m-M$. **C.** $M-m+6$. **D.** $m-M-6$.

**Câu 39:** **(Đặng Thành Nam Đề 6)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, có đồ thị $(C)$ và $M$ là một điểm bất kì thuộc $(C)$ sao cho tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ cắt $(C)$ tại điểm thứ hai $N$; tiếp tuyến của $(C)$ tại $N$ cắt $(C)$ tại điểm thứ hai $P$. Gọi $S_1, S_2$ lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $MN$ và $(C)$; đường thẳng $NP$ và $(C)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

**A.** $S_1=8S_2$. **B.** $S_2=8S_1$. **C.** $S_2=16S_1$. **D.** $S_1=16S_2$.

**Câu 40:** **(CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG QUẢNG NAM LẦN 2 NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $(C)$ nằm trên trục hoành. Hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn các điều kiện $(y')^2+y''.y=-4$ và $f(0)=1;\ f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(C)$ và trục hoành gần nhất với số nào dưới đây?

**A.** 0,95. **B.** 0,96. **C.** 0,98. **D.** 0,97.

**Câu 41:** **(THẠCH THÀNH I - THANH HÓA 2019)** Xác định $a>0$ sao cho diện tích giới hạn bởi hai parabol: $y=\frac{4a^2-2ax-x^2}{1+a^4}$, $y=\frac{x^2}{1+a^4}$ có giá trị lớn nhất.

**A.** $a=\sqrt[4]{3}$. **B.** $a=\sqrt[3]{3}$. **C.** $a=\sqrt[3]{4}$. **D.** $a=\sqrt[4]{5}$.

**Câu 42:** Cho khối trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O;R)$ và $(O';R)$, $OO'=4R$. Trên đường tròn $(O;R)$ lấy hai điểm $A$, $B$ sao cho $AB=a\sqrt{3}$. Mặt phẳng $(P)$ đi qua $A$, $B$ cắt đoạn $OO'$ và tạo với đáy một góc $60°$, $(P)$ cắt khối trụ theo thiết diện là một phần của elip. Diện tích thiết diện đó bằng

**A.** $\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$. **B.** $\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$. **C.** $\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$. **D.** $\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

**Câu 43:** **(CHUYÊN NGUYỄN DU ĐĂK LĂK LẦN X NĂM 2019)** Ta vẽ hai nửa đường tròn như hình bên, trong đó đường kính của nửa đường tròn lớn gấp đôi đường kính của nửa đường tròn nhỏ. Biết rằng nửa đường tròn đường kính AB có bán kính bằng 4 và $\overset{\frown}{BAC}=30^0$. Diện tích hình (H) (phần tô đậm) bằng:

**A.** $2\pi+2\sqrt{3}$ **B.** $2\pi+3\sqrt{3}$

**C.** $\frac{10\pi}{3}+2\sqrt{3}$ **D.** $\frac{7\pi}{3}+3\sqrt{3}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 44:** **(SỞ NAM ĐỊNH 2018-2019)** Biết rằng parabol $y=\frac{1}{24}x^2$ chia hình phẳng giới hạn bởi elip có phương trình $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{1}=1$ thành hai phần có diện tích lần lượt là $S_1, S_2$ với $S_1<S_2$. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

**A.** $\frac{4\pi+\sqrt{3}}{8\pi-\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{4\pi-\sqrt{2}}{8\pi+\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{4\pi+\sqrt{3}}{12\pi}$. **D.** $\frac{8\pi-\sqrt{3}}{12\pi}$.

**Câu 45:** Cho parabol $(P): y=x^2$ và một đường thẳng $d$ thay đổi cắt $(P)$ tại hai điểm $A$, $B$ sao cho $AB=2018$. Gọi $S$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P)$ và đường thẳng $d$. Tìm giá trị lớn nhất $S_{max}$ của $S$.

**A.** $S_{max}=\frac{2018^3+1}{6}$. **B.** $S_{max}=\frac{2018^3}{3}$. **C.** $S_{max}=\frac{2018^3-1}{6}$. **D.** $S_{max}=\frac{2018^3}{6}$.

**Câu 46:** Cho hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=2$, $y=x$ có diện tích là $S=a+b.\pi$. Chọn kết quả đúng:

**A.** $a>1,\ b>1$. **B.** $a+b<1$. **C.** $a+2b=3$. **D.** $a^2+4b^2\geq 5$.

**Câu 47:** Tìm giá trị của tham số m sao cho: $y=x^3-3x+2$ và $y=m(x+2)$ giới hạn bởi hai hình phẳng có cùng diện tích

**A.** $0<m<1$. **B.** $m=1$. **C.** $1<m<9$. **D.** $m=9$

**Câu 48:** **Cho hàm số** $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2-2x-2m-\frac{1}{3}$ có đồ thị $(C)$. Tìm $m\in\left(0;\frac{5}{6}\right)$ sao cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C)$ và các đường thẳng $x=0$, $x=2$, $y=0$ và có diện tích bằng 4.

**A.** $m=\frac{1}{4}$. **B.** $m=\frac{1}{3}$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m=1$

**Câu 49:** Cho hàm số $y=\frac{x^4}{2}-2m^2x^2+2$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực $m$ sao cho đồ thị của hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu, đồng thời đường thẳng cùng phương với trục hoành qua điểm cực đại tạo với đồ thị một hình phẳng có diện tích bằng $\frac{64}{15}$ là

**A.** $\varnothing$. **B.** $\{\pm 1\}$. **C.** $\left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2};\pm 1\right\}$. **D.** $\left\{\pm\frac{1}{2};\pm 1\right\}$.

**Câu 50:** Cho hàm số $y=x^4-4x^2+m$ có đồ thị là (C). Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) với y<0 và trục hoành, S' là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) với y>0 và trục hoành. Với giá trị nào của m thì $S=S'$ ?

**A.** $m=2$ **B.** $m=\frac{2}{9}$ **C.** $m=\frac{20}{9}$ **D.** $m=1$

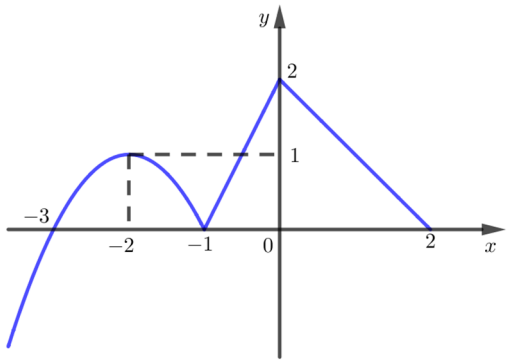
**Câu 51:** Cho parabol $(P): y=x^2+1$ và đường thẳng $d: y=mx+2$. Biết rằng tồn tại $m$ để diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P)$ và $d$ đạt giá trị nhỏ nhất, tính diện tích nhỏ nhất đó.

**A.** $S=0$. **B.** $S=\frac{4}{3}$. **C.** $S=\frac{2}{3}$. **D.** $S=4$.

## ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN VỚI HÀM SỐ

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

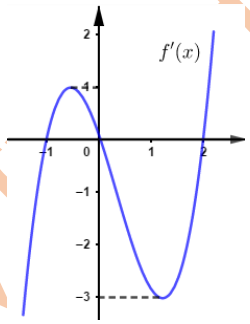
**Câu 1:** **(Sở Phú Thọ)** Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên $[-3;2]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y=ax^2+bx+c$).




Biết $f(-3)=0$, giá trị của $f(-1)+f(1)$ bằng

**A.** $\frac{23}{6}$. **B.** $\frac{31}{6}$. **C.** $\frac{35}{3}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

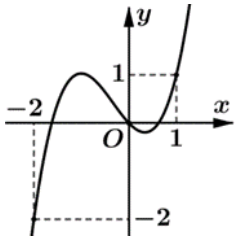
**Câu 2:** **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào trong các phương án $A,B,C,D$ dưới đây là đúng?




**A.** $f(2)>f(-1)>f(0)$. **B.** $f(0)>f(-1)>f(2)$.

**C.** $f(0)>f(2)>f(-1)$. **D.** $f(-1)>f(0)>f(2)$.

**Câu 3:** **(Hùng Vương Bình Phước)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[-2;1]$. Hình bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Đặt $g(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}$.



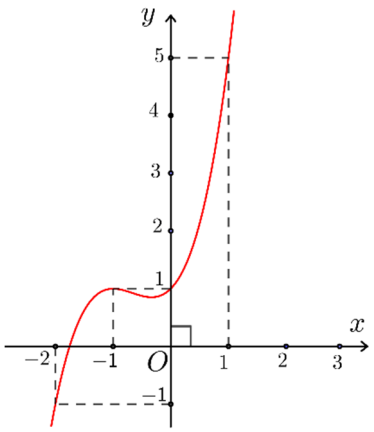

Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $g(1)<g(-2)<g(0)$. **B.** $g(0)<g(1)<g(-2)$.

**C.** $g(-2)<g(1)<g(0)$. **D.** $g(0)<g(-2)<g(1)$.

**Câu 4:** **(Sở Lạng Sơn 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị hàm số như hình dưới đây.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

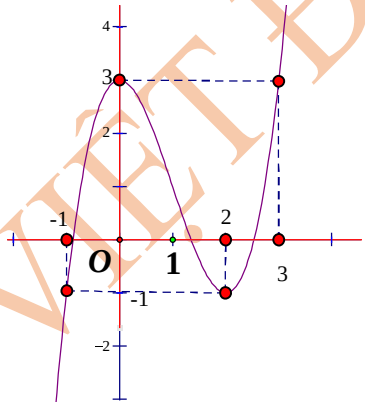



Lập hàm số $g(x)=f(x)-x^2-3x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $g(-1)>g(1)$. **B.** $g(-1)=g(1)$.

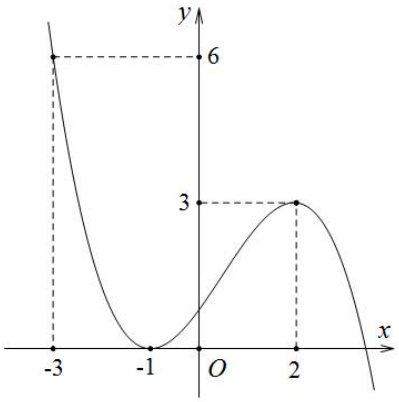
**C.** $g(-1)<g(-2)$. **D.** $g(-1)=g(-2)$.

**Câu 5:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hình bên. Tính tích phân $I=\int_1^2 f'(2x-1)\mathrm{d}x$.




**A.** $I=-2$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=1$. **D.** $I=2$.

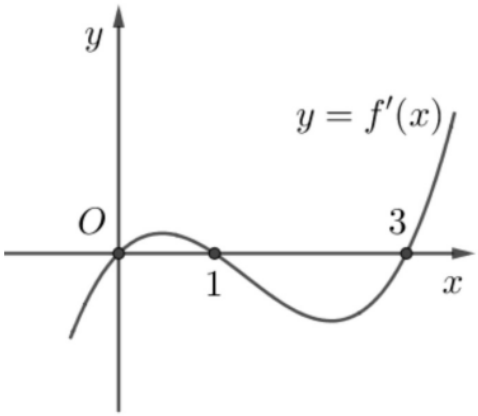
**Câu 6:** **(CổLoa Hà Nội)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $(-\infty;+\infty)$ và có đồ thị như hình vẽ. Tích phân $I=\int_0^1 \left|f'(5x-3)\right|\mathrm{d}x$ bằng




**A.** $\frac{9}{5}$. **B.** $9$. **C.** $3$. **D.** $2$.

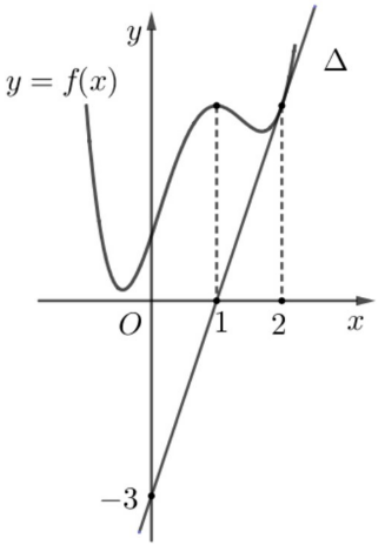
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 7:** **(Đặng Thành Nam Đề 9)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên R và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ, Biết $\int_0^3 (x+1)f'(x)dx = a$ và $\int_0^1 |f'(x)|dx = b$, $\int_1^3 |f'(x)|dx = c$, $f(1) = d$. Tích phân $\int_0^3 f(x)dx$ bằng



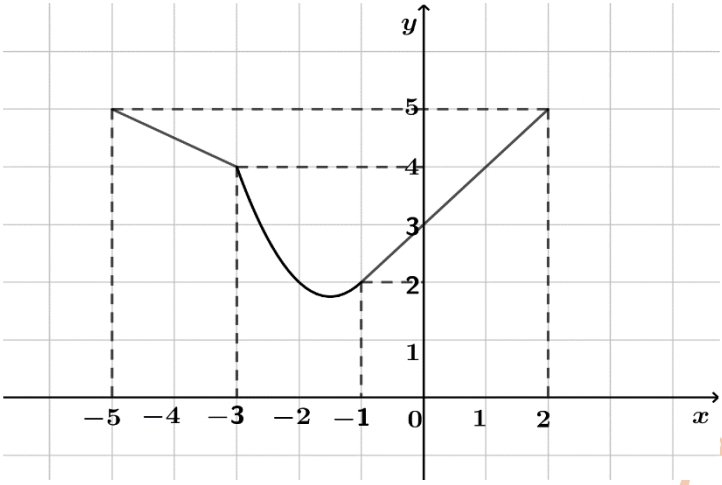

**A.** $-a+b+4c-5d$. **B.** $-a+b-3c+2d$. **C.** $-a+b-4c+3d$. **D.** $-a-b-4c+5d$.

**Câu 8:** **(Đặng Thành Nam Đề 2)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f(x)$ như hình vẽ bên. Biết rằng hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=1$; đường thẳng $\Delta$ trong hình vẽ bên là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$. Tích phân $\int_0^{\ln 3} e^x f''\left(\frac{e^x+1}{2}\right)dx$ bằng




**A.** 8. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

**Câu 9:** **(CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP 2019 LẦN 2)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục có đồ thị như hình bên dưới



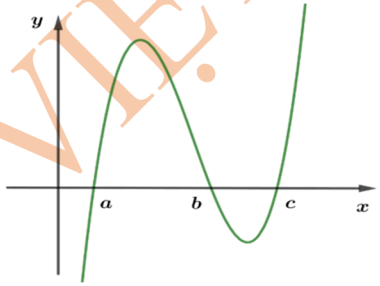

Biết $F'(x)=f(x),\ \forall x\in[-5;2]$ và $\int\limits_{-3}^{-1} f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{14}{3}$. Tính $F(2)-F(-5)$.

**A.** $-\dfrac{145}{6}$. **B.** $-\dfrac{89}{6}$. **C.** $\dfrac{145}{6}$. **D.** $\dfrac{89}{6}$.

**Câu 10:** **(CHUYÊN HUỲNH MẪN ĐẠT 2019 lần 1)** Cho $P=\int\limits_{a}^{b}\left(-x^4+5x^2-4\right)\mathrm{d}x$ có giá trị lớn nhất với ($a<b;a,b\in\mathbb{R}$). Khi đó tính $S=a^2+b^2$

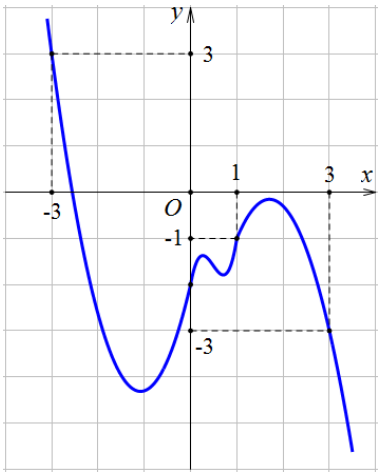
**A.** $S=5$. **B.** $S=8$. **C.** $S=4$. **D.** $S=7$.

**Câu 11:** **(Kim Liên)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Biết $f(a)>0$, tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với trục hoành.




**A.** 3. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 2.

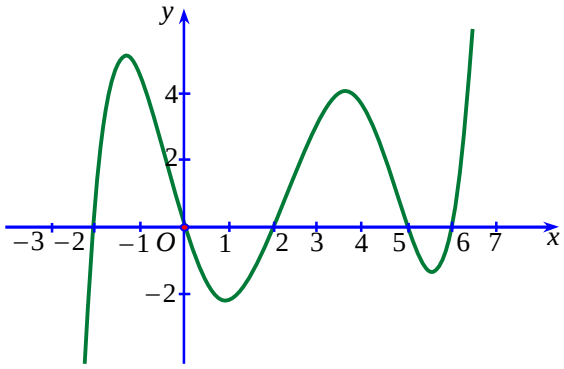
**Câu 12:** **(CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG QUẢNG NAM LẦN 2 NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-3;3]$ và đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x)=2f(x)+x^2+4$. Biết $f(1)=-24$. Hỏi $g(x)=0$ có bao nhiêu nghiệm thực?




**A.** 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 13:** **(GIỮA-HKII-2019-NGHĨA-HƯNG-NAM-ĐỊNH)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



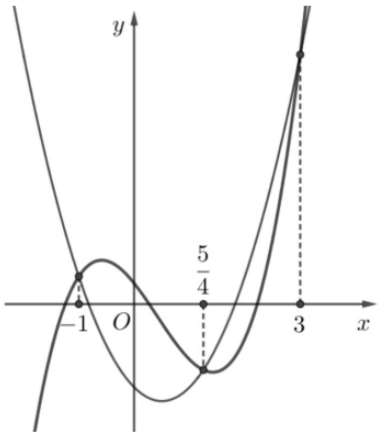

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-2;6\right]$ của phương trình $f\left(x\right)=f\left(0\right)$ là

**A.** 5 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

**Câu 14:** **(Đặng Thành Nam Đề 2)** Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị $\left(C\right)$. Gọi $\left(\Delta\right):y=dx+e$ là tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại điểm $A$ có hoành độ $x=-1$. Biết $\Delta$ cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt $M,N$ $(M,N\neq A)$ có hoành độ lần lượt là $x=0;x=2$. Cho biết $\int\limits_0^2\left(dx+e-f\left(x\right)\right)dx=\dfrac{28}{5}$. Tích phân $\int\limits_{-1}^0\left(f\left(x\right)-dx-e\right)dx$ bằng:

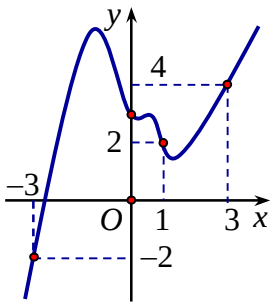
**A.** $\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{2}{9}$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

**Câu 15:** **(Đặng Thành Nam Đề 14)** Cho hai hàm số $f\left(x\right)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ và $g\left(x\right)=mx^3+nx^2+px+1$ với $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $m$, $n$, $p$, $q$ là các số thực. Đồ thị của hai hàm số $y=f'\left(x\right)$, $y=g'\left(x\right)$ như hình vẽ bên. Tổng các nghiệm của phương trình $f\left(x\right)+q=g\left(x\right)+e$ bằng




**A.** $\dfrac{13}{3}$. **B.** $-\dfrac{13}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $-\dfrac{4}{3}$.

**Câu 16:** **(THPT Chuyên Thái Bình-lần 4 năm 2017-2018)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[-3;3\right]$ và đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên. Biết $f\left(1\right)=6$ và $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\dfrac{\left(x+1\right)^2}{2}$. Kết luận nào sau đây là đúng?




**A.** Phương trình $g(x)=0$ có đúng hai nghiệm thuộc $[-3;3]$.

**B.** Phương trình $g(x)=0$ không có nghiệm thuộc $[-3;3]$.

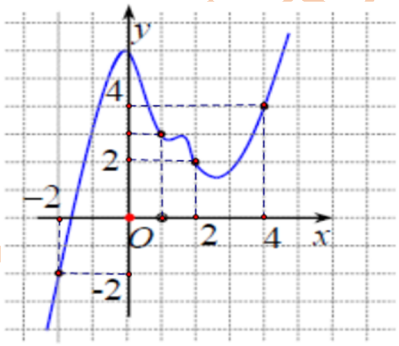
**C.** Phương trình $g(x)=0$ có đúng một nghiệm thuộc $[-3;3]$.

**D.** Phương trình $g(x)=0$ có đúng ba nghiệm thuộc $[-3;3]$.

**Câu 17:** Chọn ngẫu nhiên hai số thực $a,b\in[0;1]$. Tính xác suất để phương trình $2x^3-3ax^2+b=0$ có tối đa hai nghiệm.

**A.** $P=\frac{1}{4}$. **B.** $P=\frac{1}{2}$. **C.** $P=\frac{2}{3}$. **D.** $P=\frac{3}{4}$.

**Câu 18:** **(Sở Hưng Yên Lần1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



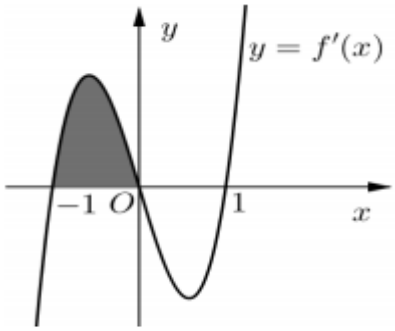

Giá trị của biểu thức $I=\int_0^4 f'(x-2)\,dx+\int_0^2 f'(x+2)\,dx$ bằng

**A.** $-2$. **B.** $2$. **C.** $6$. **D.** $10$.

**Câu 19:** **(CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=1$ và $\frac{f'(x)}{f(x)}=2-2x$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

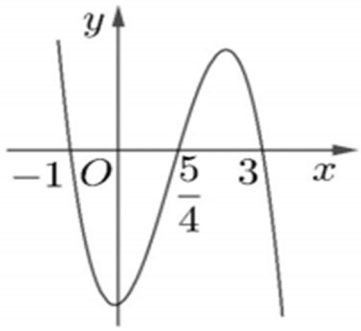
**A.** $0<m\le 1$. **B.** $m>\mathrm{e}$. **C.** $0<m<\mathrm{e}$. **D.** $1<m<\mathrm{e}$.

**Câu 20:** **(THPT LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NGÃI)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2$ $(a,b\in\mathbb{R})$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng diện tích phần tô đậm bằng $\frac{1}{8}$. Phương trình $8f(x)+1=0$ có bao nhiêu nghiệm?




**A.** 0. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

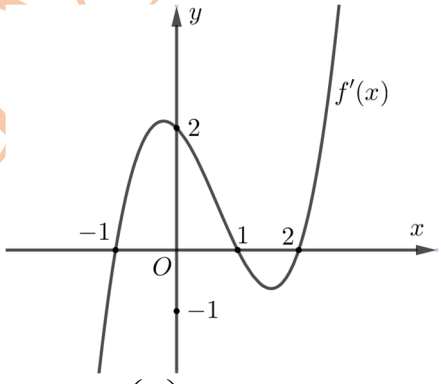
**Câu 21:** **(Triệu Thái Vĩnh Phúc Lần 3)** Cho hàm số $f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$ $(m,n,p,q,r\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới




Tập nghiệm của phương trình $f(x)=r$ có số phần tử là

**A.** 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

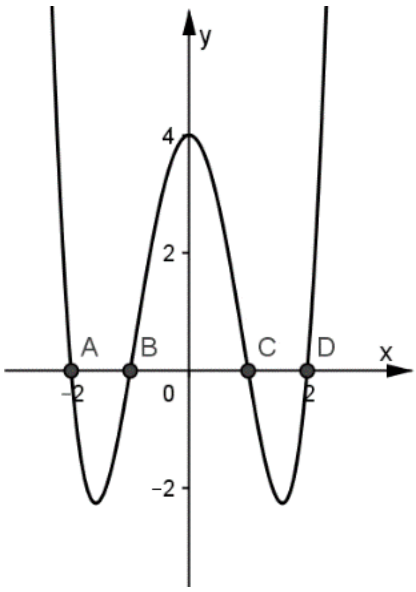
**Câu 22:** **(Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+m$, (với $a,b,c,d,m\in\mathbb{R}$). Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.




Tập nghiệm của phương trình $f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)$ có số phần tử là

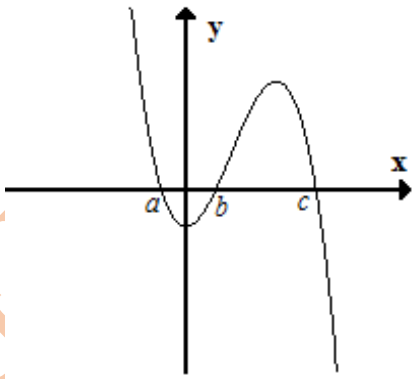
**A.** 5. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

**Câu 23:** **(THPT NÔNG CỐNG 2 LẦN 4 NĂM 2019)** Cho hàm số $f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+r$ $(a,b,c,d,e,r\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên (cắt $Ox$ tại $A(-2;0)$, $B(-1;0)$, $C(1;0)$, $D(2;0)$). Phương trình $f(x)=r$ có bao nhiêu nghiệm?



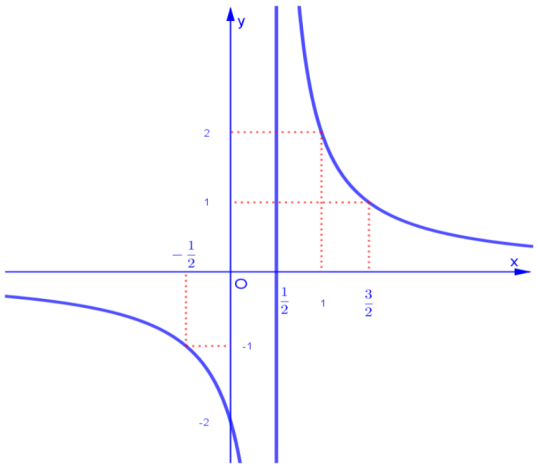

**A.** 2. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 4.

**Câu 24:** **(THPT SỐ 1 TƯ NGHĨA LẦN 2 NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm có hoành độ $a<b<c$ như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $f(x-a)=f(c)$ là



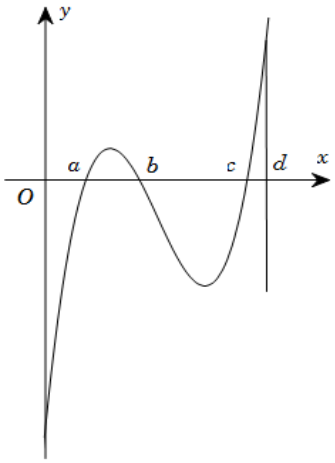

**A.** 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

**Câu 25:** **(THPT-Yên-Mô-A-Ninh-Bình-2018-2019-Thi-tháng-4)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ, biết $f(0)=1$, $f(1)=2$. Giá trị của $P=f(-1)+f(3)$ bằng




**A.** $4+\ln 15$. **B.** $2+\ln 15$. **C.** $3+\ln 15$. **D.** $\ln 15$.

**Câu 26:** Cho các số thực $a, b, c, d$ thỏa mãn $0<a<b<c<d$ và hàm số $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi $M$ và $m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[0;d]$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?




**A.** $M+m=f(0)+f(c)$.
**C.** $M+m=f(b)+f(a)$.
**B.** $M+m=f(d)+f(c)$.
**D.** $M+m=f(0)+f(a)$.

**Lời giải**

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta có nhận xét:

- Hàm số $y=f'(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi qua $x=a$.
- Hàm số $y=f'(x)$ đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi qua $x=b$.
- Hàm số $y=f'(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi qua $x=c$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[0;d]$ như sau:

| $x$ | $0$ | | $a$ | | $b$ | | $c$ | | $d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $f(0)$ | ↘ | $f(a)$ | ↗ | $f(b)$ | ↘ | $f(c)$ | ↗ | $f(d)$ |

Sử dụng bảng biến thiên ta tìm được: $\begin{cases}\max\limits_{[0;d]}\left[f(x)\right]=\max\left\{f(0),f(b),f(d)\right\}\\ \min\limits_{[0;d]}\left[f(x)\right]=\min\left\{f(a),f(c)\right\}\end{cases}$.

Quan sát đồ thị, dùng phương pháp tích phân để tính diện tích, ta có

$\int\limits_a^b f'(x)dx<\int\limits_b^c\left[0-f'(x)\right]dx\longrightarrow f(c)<f(a)\longrightarrow\min\limits_{[0;d]}\left[f(x)\right]=f(c).$

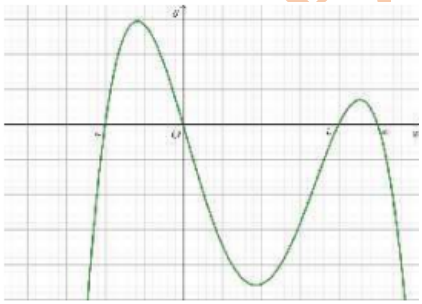
Tương tự, ta có

$\begin{cases}\int\limits_0^a\left[0-f'(x)\right]dx>\int\limits_a^b f'(x)dx\to f(0)>f(b)\\ \int\limits_b^c\left[0-f'(x)\right]dx>\int\limits_c^d f'(x)dx\to f(b)>f(d)\end{cases}\to f(0)>f(b)>f(d)\longrightarrow\max\limits_{[0;d]}\left[f(x)\right]=f(0).$

Vậy $\max\limits_{[0;d]}\left[f(x)\right]=f(0);\ \min\limits_{[0;d]}\left[f(x)\right]=f(c).$

**Chọn A**

**Câu 27:** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết phương trình $f'(x)=0$ có bốn nghiệm phân biệt $a$, $0$, $b$, $c$ với $a<0<b<c$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng

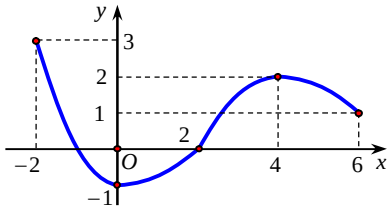
**A.** $f(a)>f(c)>f(b)$.

**B.** $f(a)>f(b)>f(c)$.

**C.** $f(c)>f(a)>f(b)$.

**D.** $f(b)>f(a)>f(c)$.

**Câu 28:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình vẽ bên. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.



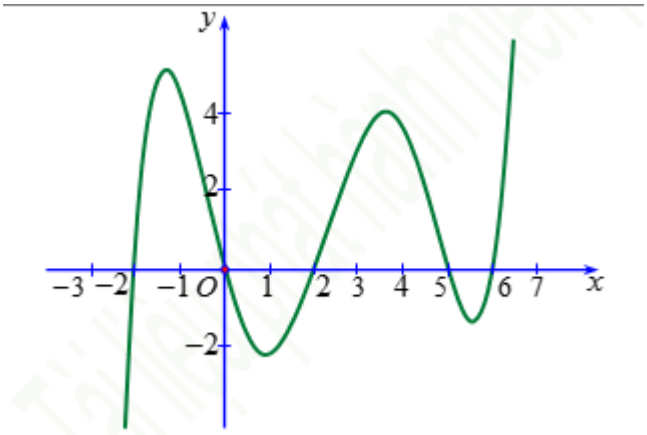

**A.** $\max\limits_{x\in[-2;6]}f(x)=f(-2)$.

**B.** $\max\limits_{x\in[-2;6]}f(x)=f(2)$.

**C.** $\max\limits_{x\in[-2;6]}f(x)=f(6)$.

**D.** $\max\limits_{x\in[-2;6]}f(x)=f(-1)$.

**Câu 29:** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $M=\max\limits_{[-2;6]}f(x)$, $m=\min\limits_{[-2;6]}f(x)$, $T=M+m$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

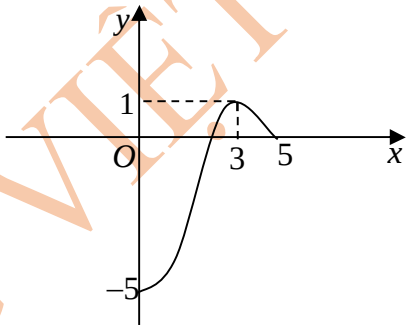



**A.** $T=f(5)+f(-2)$. **B.** $T=f(5)+f(6)$. **C.** $T=f(0)+f(2)$. **D.** $T=f(0)+f(-2)$.

**Câu 30:** **(HKII Kim Liên 2017-2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=1$ và $f'(x)=(6x-3x^2).f(x)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $f(x)=m$ có nghiệm duy nhất.

**A.** $\left[\begin{array}{l} m>\mathrm{e}^4 \\ 0<m<1 \end{array}\right.$. **B.** $1<m<\mathrm{e}^4$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m>\mathrm{e}^4 \\ m<1 \end{array}\right.$. **D.** $1\le m\le \mathrm{e}^4$.

**Câu 31:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;5]$ được cho như hình bên.

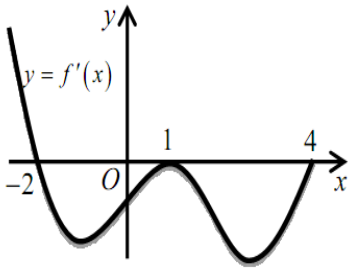



Tìm mệnh đề đúng

**A.** $f(0)=f(5)<f(3)$. **B.** $f(3)<f(0)=f(5)$.

**C.** $f(3)<f(0)<f(5)$. **D.** $f(3)<f(5)<f(0)$.

**Câu 32:** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây




Biết rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục $Ox$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ và $[1;4]$ lần lượt bằng $9$ và $12$. Cho $f(1)=3$. Giá trị biểu thức $f(-2)+f(4)$ bằng

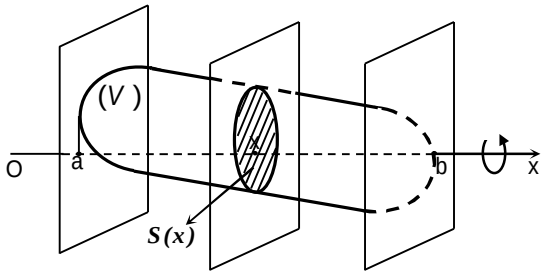
**A.** 21 **B.** 9. **C.** 3. **D.** 2.

# ỨNG DỤNG THỂ TÍCH

## A – KIẾN THỨC CHUNG

### 1 - Thể tích vật thể

Gọi $B$ là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục $Ox$ tại các điểm $a$ và $b$; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục $Ox$ tại điểm $x$, $(a \le x \le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$.

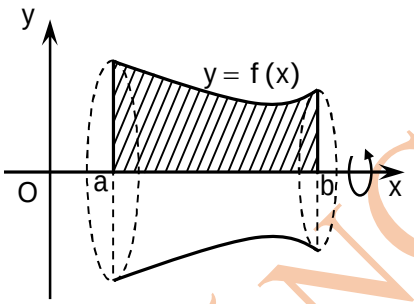



$$V = \int_a^b S(x)dx$$

Khi đó, thể tích của vật thể $B$ được xác định: $V = \int_a^b S(x)dx$

### 2 - Thể tích khối tròn xoay

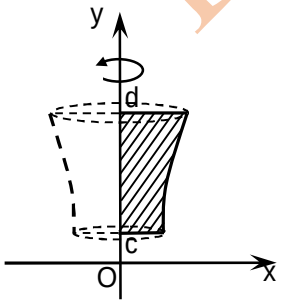
Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục $Ox$:




$$\begin{cases} (C): y = f(x) \\ (Ox): y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

**Chú ý:**

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục $Oy$:




$$\begin{cases} (C): x = g(y) \\ (Oy): x = 0 \\ y = c \\ y = d \end{cases} \qquad V_y = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$$

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục $Ox$:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$V=\pi\int\limits_a^b\left|f^2(x)-g^2(x)\right|dx$

## THỂ TÍCH GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐỒ THỊ (TRÒN XOAY)

**PHƯƠNG PHÁP:**

**. Tính thể tích khối tròn xoay:**

**Trường hợp 1.** Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$ và $x=b$ $(a<b)$ ***quay quanh trục Ox*** là $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$.

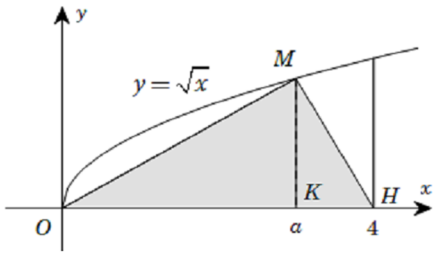
**Trường hợp 2.** Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$ và $x=b$ $(a<b)$ ***quay quanh trục Ox*** là $V=\pi\int\limits_a^b\left|f^2(x)-g^2(x)\right|dx$.

## B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1:** **(KÊNH TRUYỀN HÌNH GIÁO DỤC QUỐC GIA VTV7 –2019)** Cho hình phẳng $D$ giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{\dfrac{3+(x-2)e^x}{xe^x+1}}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay $D$ quanh trục hoành có thể tích $V=\pi\left[a+b\ln\left(1+\dfrac{1}{e}\right)\right]$, trong đó $a$, $b$ là các số hữu tỷ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $a-2b=5$. **B.** $a+b=3$. **C.** $a-2b=7$. **D.** $a+b=5$.

**Câu 2:** **(Gang Thép Thái Nguyên)** Gọi $V$ là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $y=0$ và $x=4$ quanh trục $Ox$. Đường thẳng $x=a\,(0<a<4)$ cắt đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ tại $M$ (hình vẽ). Gọi $V_1$ là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác $OMH$ quanh trục $Ox$. Biết rằng $V=2V_1$. Khi đó




**A.** $a=2$. **B.** $a=2\sqrt{2}$. **C.** $a=\dfrac{5}{2}$. **D.** $a=3$.

**Câu 3:** **(Lương Thế Vinh Lần 3)** Cho hình vuông $OABC$ có cạnh bằng $4$ được chia thành hai phần bởi parabol $(P)$ có đỉnh tại $O$. Gọi $S$ là hình phẳng không bị gạch (như hình vẽ). Tính thể tích $V$ của khối tròn xoay khi cho phần $S$ quay quanh trục $Ox$.

**A.** $V=\dfrac{128\pi}{5}$. **B.** $V=\dfrac{128\pi}{3}$. **C.** $V=\dfrac{64\pi}{5}$. **D.** $V=\dfrac{256\pi}{5}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 4:** **(Sở Bắc Ninh 2019)** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hình $(H_1)$ giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{2x}, y=-\sqrt{2x}, x=4$; hình $(H_2)$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x;y)$ thỏa mãn các điều kiện $x^2+y^2\le 16; (x-2)^2+y^2\ge 4$ ; $(x+2)^2+y^2\ge 4$. Khi quay $(H_1);(H_2)$ quanh $Ox$ ta được các khối tròn xoay có thể tích lần lượt là $V_1, V_2$ .Khi đó, mệnh đề nào sau đây là đúng?

**A.** $V_2=2V_1$ . **B.** $V_1=V_2$ . **C.** $V_1+V_2=48\pi$ . **D.** $V_2=4V_1$ .

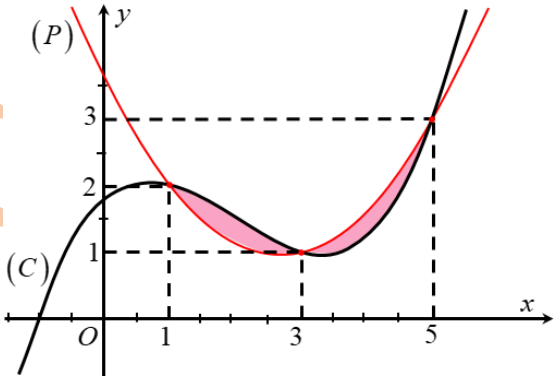
**Câu 5:** **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai)** Gọi $D$ là miền được giới hạn bởi các đường $y=-3x+10$, $y=1$, $y=x^2$ và $D$ nằm ngoài parabol $y=x^2$. Khi cho $D$ quay xung quanh trục $Ox$, ta nhận được vật thể tròn xoay có thể tích là:

**A.** $\frac{56}{5}\pi$ . **B.** $12\pi$ . **C.** $11\pi$ . **D.** $\frac{25}{3}\pi$ .

**Câu 6:** **(CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ HÒA BÌNH LẦN 4 NĂM 2019)** Trong mặt phẳng cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2\sqrt{2}$, phía ngoài hình vuông vẽ thêm bốn đường tròn nhận các cạnh của hình vuông làm đường kính (hình vẽ). Thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình trên khi quay quanh đường thẳng $AC$ bằng

**A.** $\frac{32\pi}{3}+4\pi^2$. **B.** $\frac{16\pi}{3}+2\pi^2$. **C.** $\frac{8\pi}{3}+\pi^2$. **D.** $\frac{64\pi}{3}+8\pi^2$.

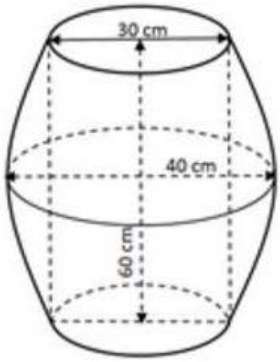
**Câu 7:** **(Thị Xã Quảng Trị)** Cho đồ thị $(C): y=ax^3+bx^2+cx+d$ và Parabol $(P): y=mx^2+nx+p$ có đồ thị như hình vẽ (đồ thị $(C)$ là đường cong đậm hơn). Biết phần hình phẳng được giới hạn bởi $(C)$ và $(P)$ (phần tô đậm) có diện tích bằng 1. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay phần hình phẳng đó quanh trục hoành bằng




**A.** $3\pi$ . **B.** $\frac{237}{35}\pi$ . **C.** $5\pi$ . **D.** $\frac{159}{35}\pi$ .

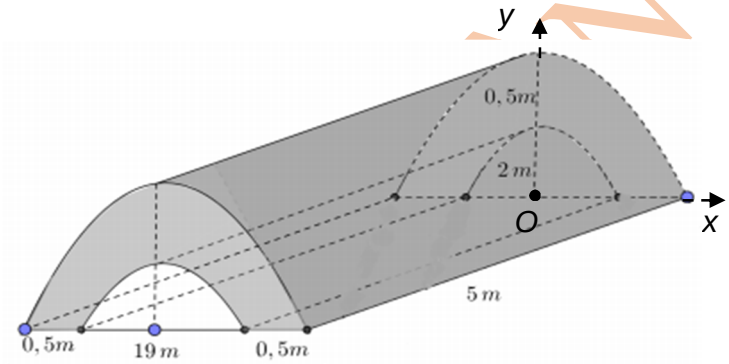
**Câu 8:** Một thùng đựng Bia hơi (có dạng như hình vẽ) có đường kính đáy là 30cm, đường kính lớn nhất của thân thùng là 40cm, chiều cao thùng là 60 cm, cạnh bên hông của thùng có hình dạng của một parabol. Thể tích của thùng Bia hơi gần nhất với số nào sau đây? (với giả thiết độ dày thùng Bia không đáng kể).

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



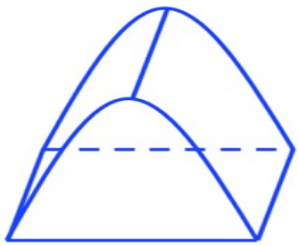

**A.** 70 (lít). **B.** 62 (lít). **C.** 60 (lít). **D.** 64 (lít).

**Câu 9:** **(Cẩm Giàng)**Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã Y có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol).



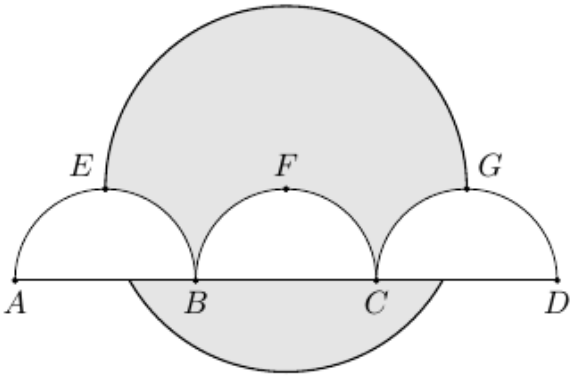

**A.** $19\,\text{m}^3$. **B.** $21\text{m}^3$. **C.** $18\,\text{m}^3$. **D.** $40\,\text{m}^3$.

**Câu 10:** **(Chuyên Hưng Yên Lần 3)** Để chuẩn bị cho hội trại do Đoàn trường tổ chức, lớp 12A dự định dựng một cái lều trại có hình parabol như hình vẽ. Nền của lều trại là một hình chữ nhật có kích thước bề ngang 3 mét, chiều dài 6 mét, đỉnh trại cách nền 3 mét. Tính thể tích phần không gian bên trong trại.



**A.** $72\ \text{m}^3$. **B.** $36\ \text{m}^3$. **C.** $72\pi\ \text{m}^3$. **D.** $36\pi\ \text{m}^3$.

**Câu 11:** **(THPT Sơn Tây Hà Nội 2019)** Trong hình vẽ dưới đây, đoạn $AD$ được chia làm 3 bởi các điểm $B$ và $C$ sao cho $AB=BC=CD=2$. Ba nửa đường tròn có bán kính 1 là $\overset{\frown}{AEB}$, $\overset{\frown}{BFC}$ và $\overset{\frown}{CGD}$ có đường kính tương ứng là $AB$, $BC$ và $CD$. Các điểm $E$, $F$, $G$ lần lượt là tiếp điểm của tiếp tuyến chung $EG$ với 3 nửa đường tròn. Một đường tròn tâm $F$, bán kính bằng 2. Diện tích miền bên trong đường tròn tâm $F$ và bên ngoài 3 nửa đường tròn (miền tô đậm) có thể biểu diễn dưới dạng $\frac{a}{b}\pi-\sqrt{c}+d$, trong đó $a$, $b$, $c$, $d$ là các số nguyên dương và $a$, $b$ nguyên tố cùng nhau. Tính giá trị của $a+b+c+d$?

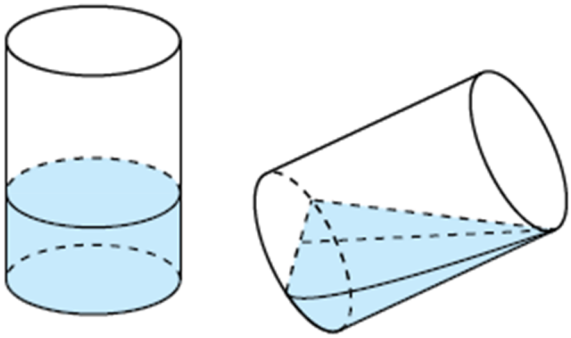



**A.** $14$. **B.** $15$. **C.** $16$. **D.** $17$.

**Câu 12:** **(Nguyễn Trãi Hải Dương Lần1)** Cho hình phẳng $(D)$ giới hạn bởi các đường $y=x-\pi$, $y=\sin x$ và $x=0$. Gọi $V$ là thể tích khối tròn xoay tạo thành do $(D)$ quay quanh trục hoành và $V=p\pi^4, (p\in\mathbb{Q})$. Giá trị của $24p$ bằng

**A.** $8$. **B.** $4$. **C.** $24$. **D.** $12$.

**Câu 13:** **(Sở Hưng Yên Lần1)** Có một cốc thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là $4cm$, chiều cao trong lòng cốc là $12cm$ đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết rằng khi nghiêng cốc nước vừa lúc chạm miệng cốc thì ở đáy cốc, mực nước trùng với đường kính đáy.



**A.** $128\pi\,cm^3$. **B.** $256\,cm^3$. **C.** $256\pi\,cm^3$. **D.** $128\,cm^3$.

**Câu 14:** **(CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 2019 – LẦN 1)** Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=-1$ và $x=1$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục $Ox$ tại điểm có hoành độ $x(-1\le x\le 1)$ là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $\sqrt{1-x^4}$.

**A.** $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $4$. **D.** $\frac{1}{4}$.

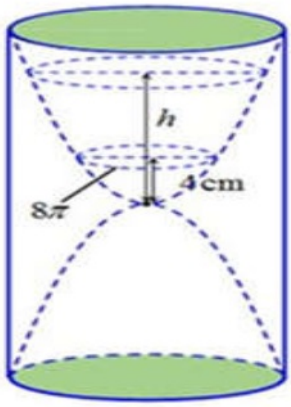
**Câu 15:** **(THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4)** Cho vật thể $(T)$ giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$; $x=2$. Cắt vật thể $(T)$ bởi mặt phẳng vuông góc với trục $Ox$ tại $x\,(0\le x\le 2)$ ta thu được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $(x+1)e^x$. Thể tích vật thể $(T)$ bằng

**A.** $\frac{(13e^4-1)\pi}{4}$. **B.** $\frac{13e^4-1}{4}$. **C.** $2e^2$. **D.** $2\pi e^2$.

**Câu 16:** **(THĂNG LONG HN LẦN 2 NĂM 2019)** Tính thể tích vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$, $x=\pi$. Biết rằng thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với $Ox$ tại điểm có hoành độ $x$ $(0\le x\le\pi)$ là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $\sin x+2$.

**A.** $\frac{7\pi}{6}+1$. **B.** $\frac{9\pi}{8}+1$. **C.** $\frac{7\pi}{6}+2$. **D.** $\frac{9\pi}{8}+2$.

**Câu 17:** **(KINH MÔN HẢI DƯƠNG 2019)** Một chiếc đồng hồ cát như hình vẽ, gồm hai phần đối xứng nhau qua mặt nằm ngang và đặt trong một hình trụ. Thiết diện thẳng đứng qua trục của nó là hai parabol chung đỉnh và đối xứng nhau qua mặt nằm ngang. Ban đầu lượng cát dồn hết ở phần trên của đồng hồ thì chiều cao $h$ của mực cát bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao của bên đó (xem hình).




Cát chảy từ trên xuống dưới với lưu lượng không đổi $12,72\text{cm}^3$/phút. Khi chiều cao của cát còn $4\text{cm}$ thì bề mặt trên cùng của cát tạo thành một đường tròn có chu vi $8\pi$ cm (xem hình). Biết sau 10 phút thì cát chảy hết xuống phần bên dưới của đồng hồ. Hỏi chiều cao của khối trụ bên ngoài là bao nhiêu cm ?

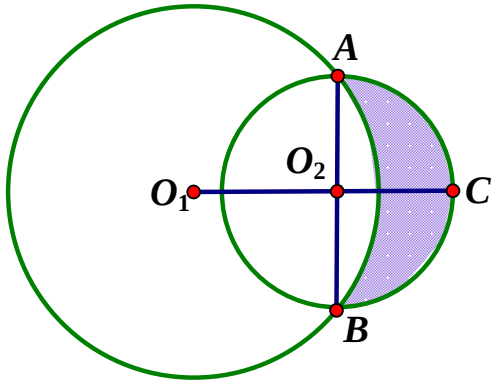
**A.** $10\text{cm}$. **B.** $9\text{cm}$. **C.** $8\text{cm}$. **D.** $12\text{cm}$.

**Câu 18:** Cho D là miền phẳng giới hạn bởi các đường : $y=f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ; $y=g(x)=\frac{x^2}{2}$.Tính thể tích khối tròn xoay thu được tạo thành khi quay D quanh trục Ox ? Thể tích được viết dưới dạng $T=m\pi^2+n\pi$ ;m,n$\in$ R thì tổng giá trị $m+n$ là ?

**A.** $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{13}{20}$ **C.** $\frac{2}{5}$ **D.** $\frac{3}{5}$

**Câu 19:** Cho hai đường tròn $(O_1;10)$ và $(O_2;8)$ cắt nhau tại hai điểm $A,B$ sao cho $AB$ là một đường kính của đường tròn $(O_2)$. Gọi $(H)$ là hình phẳng giới hạn bởi hai đường tròn ( phần được tô màu như hình vẽ). Quay $(H)$ quanh trục $O_1O_2$ ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích $V$ của khối tròn xoay tạo thành.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG




**A.** $\frac{824\pi}{3}$. **B.** $\frac{608}{3}\pi$. **C.** $\frac{97}{3}\pi$. **D.** $\frac{145}{3}\pi$

## BÀI TOÁN THỰC TẾ VÀ ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH

**Câu 1:** Một mảnh vườn hình tròn tâm $O$ bán kính $6m$. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng $6m$ nhận $O$ làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là $70000$ đồng$/m^2$ Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)

**A.** 8412322 đồng. **B.** 8142232 đồng. **C.** 4821232 đồng. **D.** 4821322 đồng

**Câu 2:** Sân trường có một bồn hoa hình tròn tâm $O$. Một nhóm học sinh lớp 12 được giao thiết kế bồn hoa, nhóm này định chia bồn hoa thành bốn phần, bởi hai đường parabol có cùng đỉnh $O$ và đối xứng nhau qua $O$. Hai đường parabol này cắt đường tròn tại bốn điểm $A$, $B$, $C$, $D$ tạo thành một hình vuông có cạnh bằng $4m$ (như hình vẽ). Phần diện tích $S_1$, $S_2$ dùng để trồng hoa, phần diện tích $S_3$, $S_4$ dùng để trồng cỏ (Diện tích làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai). Biết kinh phí trồng hoa là 150.000 đồng /1m$^2$, kinh phí để trồng cỏ là 100.000 đồng/1m$^2$. Hỏi nhà trường cần bao nhiêu tiền để trồng bồn hoa đó? (Số tiền làm tròn đến hàng chục nghìn)

**A.** 6.060.000 đồng. **B.** 5.790.000 đồng. **C.** 3.270.000 đồng. **D.** 3.000.000 đồng.

**Câu 3:** **(Sở Hà Nam)** Một khu vườn có dạng hợp của hai hình tròn giao nhau. Bán kính của hai đường tròn là $20m$ và $15m$, khoảng cách giữa hai tâm của hai hình tròn là $30m$. Phần giao của hai hình tròn được trồng hoa với chi phí $300000$đồng$/m^2$. Phần còn lại được trồng cỏ với chi phí $100000$ đồng$/m^2$. Hỏi chi phí để trồng hoa và cỏ của khu vườn gần nhất với số tiền nào dưới đây?

**A.** 202 triệu đồng. **B.** 208 triệu đồng.

**C.** 192 triệu đồng. **D.** 218 triệu đồng.

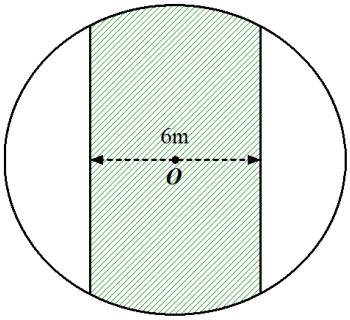
**Câu 4:** **(THANH CHƯƠNG 1 NGHỆ AN 2019 LẦN 3)** Lô gô gắn tại Shoroom của một hãng ô tô là một hình tròn như hình vẽ bên. Phần tô đậm nằm giữa Parabol đỉnh $I$ và đường gấp khúc $AJB$ được giát bạc với chi phí 10 triệu đồng $/m^2$ phần còn lại phủ sơn với chi phí 2 triệu đồng$/m^2$. Biết $AB=2m$, $IA=IB=\sqrt{5}m$ và $JA=JB=\frac{\sqrt{13}}{2}m$. Hỏi tổng số tiền giát bạc và phủ sơn của lô gô nói trên gần với số nào nhất trong các số sau:

**A.** 19 250 000đồng. **B.** 19 050 000 đồng.

**C.** 19 150 000đồng. **D.** 19 500 000đồng.

**Câu 5:** **(Lý Nhân Tông)** Một mảnh vườn hình tròn tâm $O$ bán kính 6m. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng $6m$ nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là $70000$ đồng$/m^2$. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó ?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

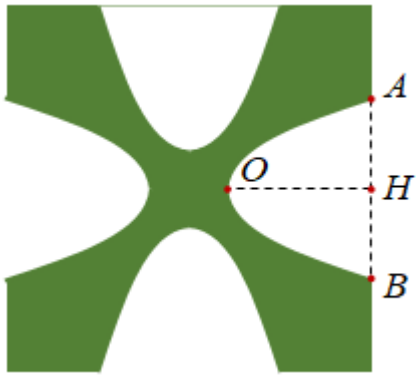



**A.** 8 412 322 đồng. **B.** 4 821 322 đồng. **C.** 3 142 232 đồng. **D.** 4 821 232 đồng.

**Câu 6:** **(THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4)** Cho hàm số $y=x^4-6x^2+m$ có đồ thị $(C_m)$. Giả sử $(C_m)$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi $(C_m)$ và trục hoành có phần phía trên trục hoành và phần phía dưới trục hoành có diện tích bằng nhau. Khi đó $m=\frac{a}{b}$ (với $a,b$ là các số nguyên, $b>0$; $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của biểu thức $S=a+b$ là

**A.** 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

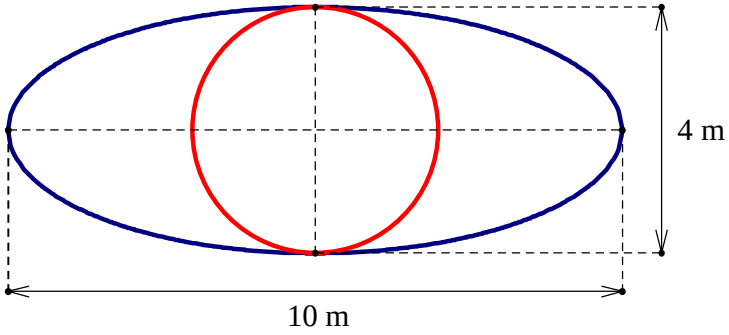
**Câu 7:** **(Hàm Rồng)** Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB=5$ cm, $OH=4$ cm. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.




**A.** $\frac{140}{3}\text{cm}^2$. **B.** $\frac{160}{3}\text{cm}^2$. **C.** $\frac{14}{3}\text{cm}^2$. **D.** $50\text{ cm}^2$.

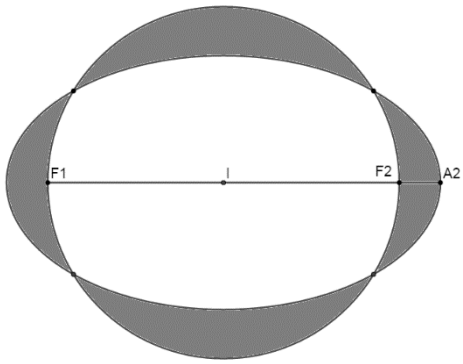
**Câu 8:** **(CổLoa Hà Nội)** Để trang trí cho một lễ hội đầu xuân, từ một mảnh vườn hình elip có chiều dài trục lớn là 10 m, chiều dài trục nhỏ là 4 m, Ban tổ chức vẽ một đường tròn có đường kính bằng độ dài trục nhỏ và có tâm trùng với tâm của elip như hình vẽ. Trên hình tròn người ta trồng hoa với giá 100.000 đồng/m$^2$, phần còn lại của mảnh vườn người ta trồng cỏ với giá 60.000 đồng/m$^2$ (biết giá trồng hoa và trồng cỏ bao gồm cả công và cây). Hỏi ban tổ chức cần bao nhiêu tiền để trồng hoa và cỏ? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG




**A.** 2387000 đồng. **B.** 2638000 đồng. **C.** 2639000 đồng. **D.** 2388000 đồng.

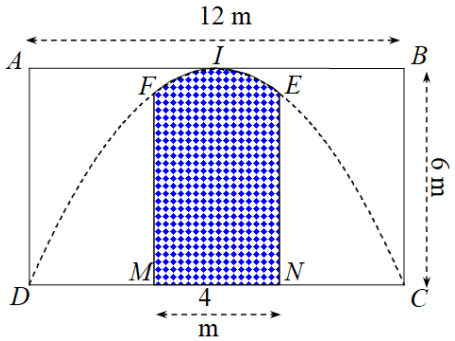
**Câu 9:** **(Chuyên Sơn La Lần 3 năm 2018-2019)** Gia đình anh A có 1 bồn hoa được thiết kế như hình dưới đây:




Ở đây $I$ là tâm của hình tròn và cũng là trung điểm của $F_1F_2$, $F_1, F_2$ là hai tiêu điểm của hình elip, $A_2$ là một đỉnh của elip, $IF_2 = 3$, $F_2A_2 = 1$. Anh A dự định trồng cỏ Nhật toàn bộ phần diện tích tô đậm. Hỏi số tiền anh A cần phải trả để mua cỏ gần nhất với số nào sau đây biết rằng giá cỏ Nhật là 65.000đ/m$^2$?

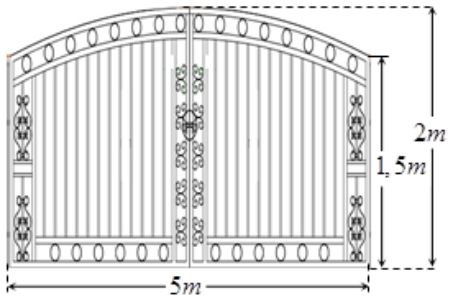
**A.** 563.000 đ. **B.** 560.000 đ. **C.** 577.000 đ. **D.** 559.000 đ.

**Câu 10:** **(THẠCH THÀNH I - THANH HÓA 2019)** Một công ty quảng cáo $X$ muốn làm một bức tranh trang trí hình $MNEIF$ ở chính giữa của một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có chiều cao $BC = 6\ m$, chiều dài $CD = 12\ m$ (*hình vẽ bên*). Cho biết $MNEF$ là hình chữ nhật có $MN = 4\ m$; cung $EIF$ có hình dạng là một phần của cung parabol có đỉnh $I$ là trung điểm của cạnh $AB$ và đi qua hai điểm $C$, $D$. Kinh phí làm bức tranh là 900.000 đồng/$m^2$. Hỏi công ty $X$ cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh đó?




**A.** 20.400.000 đồng. **B.** 20.600.000 đồng. **C.** 20.800.000 đồng. **D.** 21.200.000 đồng.

**Câu 11:** **(THPT-Nguyễn-Công-Trứ-Hà-Tĩnh-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)**Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá $1m^2$ của rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng nghìn).

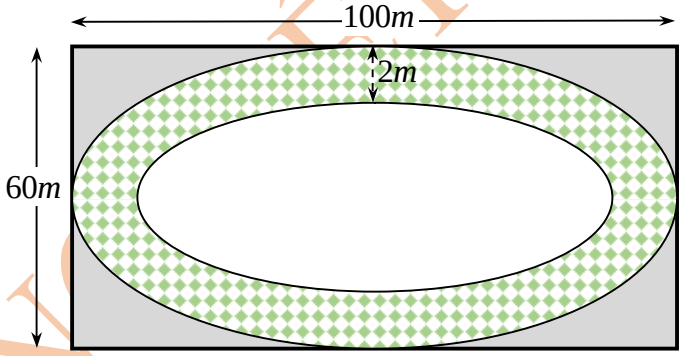



**A.** 6.620.000 đồng. **B.** 6.320.000 đồng. **C.** 6.520.000 đồng. **D.** 6.417.000 đồng.

**Câu 12:** **(GIỮA-HKII-2019-NGHĨA-HƯNG-NAM-ĐỊNH)** Một mặt bàn hình elip có chiều dài là 120cm, chiều rộng là 60cm. Anh Hải muốn gắn đá hoa cương cho mặt bàn theo hình (phần đá hoa cương màu trắng và phần đá hoa cương màu vàng), biết rằng phần đá hoa cương màu vàng cũng là elip có chiều dài 100 cm và chiều rộng là 40 cm. Biết rằng đá hoa cương màu trắng có giá $600.000 vnd/m^2$ và đá hoa cương màu vàng có giá $650.000 vnd/m^2$. Hỏi số tiền để gắn đá hoa cương theo cách trên gần với số tiền nào dưới đây?

**A.** 355.000 đồng. **B.** 339.000 đồng. **C.** 368.000 đồng. **D.** 353.000 đồng.

**Câu 13:** Một sân chơi cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài 100 và chiều rộng là $60m$ người ta làm một con đường nằm trong sân (như hình vẽ). Biết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường elip, Elip của đường viền ngoài có trục lớn và trục bé lần lượt song song với các cạnh hình chữ nhật và chiều rộng của mặt đường là $2m$. Kinh phí cho mỗi $m^2$ làm đường 600.000 đồng. Tính tổng số tiền làm con đường đó. (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



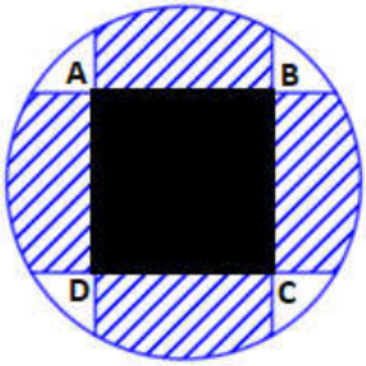

**A.** 293904000. **B.** 283904000. **C.** 293804000. **D.** 283604000.

**Câu 14:** **(THPT-Ngô-Quyền-Hải-Phòng-Lần-2-2018-2019-Thi-24-3-2019)** Một thùng đựng dầu có thiết diện ngang (mặt trong của thùng) là một đường elip có độ dài trục lớn bằng 2m, độ dài trục bé bằng 1m, chiều dài (mặt trong của thùng) bằng 3,5m. Thùng được đặt sao cho trục bé nằm theo phương thẳng đứng (như hình bên). Biết chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ điểm thấp nhất của đáy thùng đến mặt dầu) là 0,75m. Tính thể tích $V$ của dầu có trong thùng (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



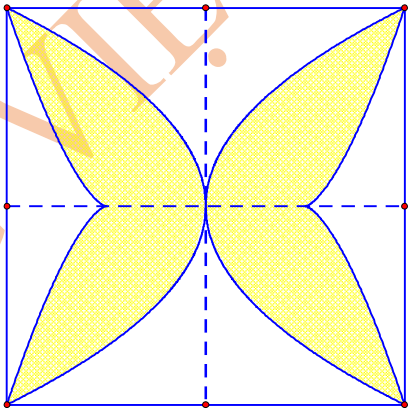
**A.** $V=4,42\text{m}^3$. **B.** $V=3,23\text{m}^3$. **C.** $V=1,26\text{m}^3$. **D.** $V=7,08\text{m}^3$.

**Câu 15:** **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Bồn hoa của một trường X có dạng hình tròn bán kính bằng $8m$. Người ta chia bồn hoa thành các phần như hình vẽ dưới đây và có ý định trồng hoa như sau: Phần diện tích bên trong hình vuông $ABCD$ để trồng hoa (phần tô đen). Phần diện tích kéo dài từ 4 cạnh của hình vuông đến đường tròn dùng để trồng cỏ (phần gạch chéo). Ở 4 góc còn lại mỗi góc trồng một cây cọ. Biết $AB=4m$, giá trồng hoa là $200.000\,\text{đ/m}^2$, giá trồng cỏ là $100.000\,\text{đ/m}^2$, mỗi cây cọ giá $150.000\,\text{đ}$. hỏi cần bao nhiêu tiền để thực hiện việc trang trí bồn hoa đó (làm tròn đến hàng nghìn).




**A.** 13.265.000 đồng. **B.** 12.218.000 đồng. **C.** 14.465.000 đồng. **D.** 14.865.000 đồng.

**Câu 16:** **(PHÂN TÍCH BL_PT ĐỀ ĐH VINHL3 -2019..)**Sàn của một viện bảo tàng mỹ thuật được lát bằng những viên gạch hình vuông cạnh $40\ (cm)$ như hình bên. Biết rằng người thiết kế đã sử dụng các đường cong có phương trình $4x^2=y^4$ và $4(|x|-1)^3=y^2$ để tạo hoa văn cho viên gạch. Diện tích phần được tô đậm gần nhất với giá trị nào dưới đây?



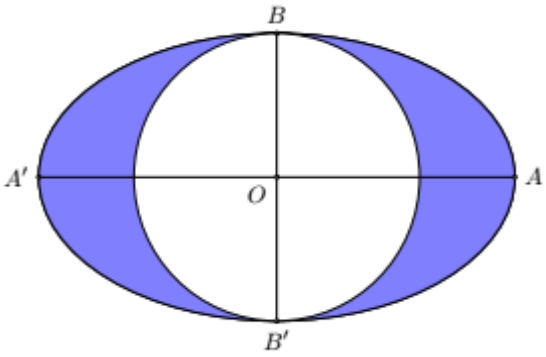
**A.** $506\left(cm^2\right)$. **B.** $747\ \left(cm^2\right)$. **C.** $507\ \left(cm^2\right)$. **D.** $746\ \left(cm^2\right)$.

**Câu 17:** **(Triệu Thái Vĩnh Phúc Lần 3)** Mảnh vườn nhà ông An có dạng hình elip với bốn đỉnh $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$ như hình vẽ bên. Ông dùng 2 đường Parabol có đỉnh là tâm đối xứng của elip cắt elip tại 4 điểm $\text{M},\text{N},\text{P},\text{Q}$ như hình vẽ sao cho tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MN=4$ để chia vườn. Phần tô đậm dùng để trồng hoa và phần còn lại để trồng rau. Biết chi phí trồng hoa là $600.000$ đồng/$\text{m}^2$ và trồng rau là $50.000$ đồng/$\text{m}^2$. Hỏi số tiền phải chi gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2=8\,\text{m}$, $B_1B_2=4\,\text{m}$?

**A.** 4.899.000 đồng **B.** 5.675.000 đồng **C.** 3.526.000 đồng **D.** 7.120.000 đồng

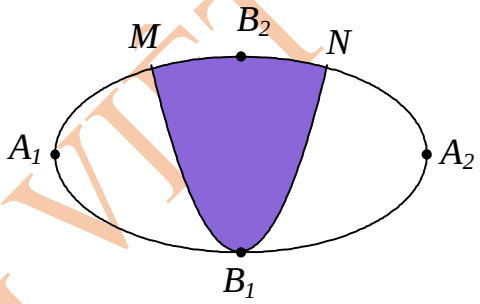
**Câu 18:** **(THPT-Yên-Mô-A-Ninh-Bình-2018-2019-Thi-tháng-4)** Trong mặt phẳng, cho đường elip $(E)$ có độ dài trục lớn là $AA'=10$, độ dài trục nhỏ là $BB'=6$, đường tròn tâm $O$ có đường kính là $BB'$ (như hình vẽ bên dưới). Tính thể tích $V$ của khối tròn xoay có được bằng cách cho miền

hình hình phẳng giới hạn bởi đường elip và được tròn (được tô đậm trên hình vẽ) quay xung quanh trục $AA'$.



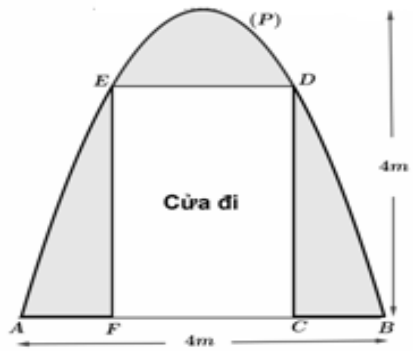

**A.** $V=36\pi$. **B.** $V=60\pi$. **C.** $V=24\pi$. **D.** $V=\dfrac{20\pi}{3}$.

**Câu 19:** **(Chuyên Vinh Lần 2)** Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh $A_1,A_2,B_1,B_2$ như hình vẽ bên. Người ta chia elip bởi parabol có đỉnh $B_1$, trục đối xứng $B_1B_2$ và đi qua các điểm $M,N$. Sau đó sơn phần tô đậm với giá 200.000 đồng/$\text{m}^2$ và trang trí đèn led phần còn lại với giá 500.000 đồng/$\text{m}^2$. Hỏi kinh phí sử dụng gần nhất với giá trị nào dưới đây? Biết rằng $A_1A_2=4m, B_1B_2=2m, MN=2m$.




**A.** 2.341.000 đồng. **B.** 2.057.000 đồng. **C.** 2.760.000 đồng. **D.** 1.664.000 đồng.

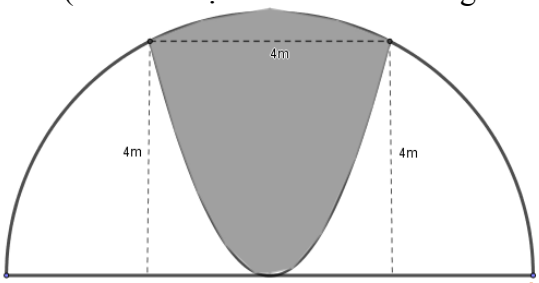
**Câu 20:** **(SỞ QUẢNG BÌNH NĂM 2019)** Một chiếc cổng có hình dạng là một Parabol $(P)$ có kích thước như hình vẽ, biết chiều cao cổng bằng 4 $m$, $AB=4$ $m$. Người ta thiết kế cửa đi là một hình chữ nhật $CDEF$ (với $C,F\in AB$; $D,E\in(P)$), phần còn lại (*phần tô đậm*) dùng để trang trí. Biết chi phí để trang trí phần tô đậm là 1.000.000 đồng/$m^2$. Hỏi số tiền ít nhất dùng để trang trí phần tô đậm gần với số tiền nào dưới đây?




**A.** 4.450.000 đồng. **B.** 4.605.000 đồng. **C.** 4.505.000 đồng. **D.** 4.509.000 đồng.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 21:** **(Sở Thanh Hóa 2019)** Một khuôn viên dạng nửa hình tròn, trên đó người ta thiết kế phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm và có trục đối xứng vuông góc với đường kính của nửa hình tròn, hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa hình tròn (phần tô đậm) và cách nhau một khoảng 4 (m). Phần còn lại của khuôn viên (phần không tô đậm) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước như hình vẽ, chi phí để trồng hoa và cỏ Nhật Bản tương ứng là 150.000 đồng/m2 và 100.000 đồng/m2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng hoa và cỏ Nhật Bản trong khuôn viên đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)




**A.** 3.926.990 (đồng). **B.** 4.115.408 (đồng)**C.** 1.948.000 (đồng). **D.** 3.738.574 (đồng).

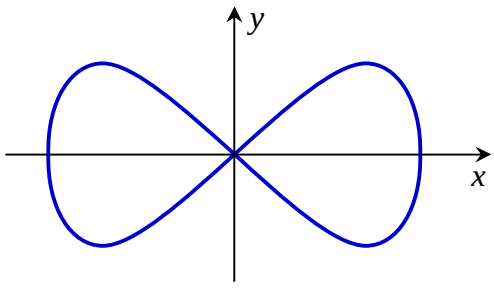
**Câu 22:** **(Chuyên Phan Bội Châu Lần2)** Người ta xây một sân khấu với mặt sân có dạng hợp của hai hình tròn giao nhau. Bán kính của hai của hai hình tròn là 20 mét và 15 mét. Khoảng cách giữa hai tâm của hai hình tròn là 30 mét. Chi phí làm mỗi mét vuông phần giao nhau của hai hình tròn là 300 ngàn đồng và chi phí làm mỗi mét vuông phần còn lại là 100 ngàn đồng. Hỏi số tiền làm mặt sân của sân khấu gần với số nào trong các số dưới đây?

**A.** 202 triệu đồng. **B.** 208 triệu đồng. **C.** 218 triệu đồng. **D.** 200 triệu đồng.

**Câu 23:** Trên cánh đồng cỏ có 2 con bò được cột vào 2 cây cọc khác nhau. Biết khoảng cách giữa 2 cọc là 4 mét còn 2 sợi dây cột 2 con bò dài 3 mét và 2 mét. Tính phần diện tích mặt cỏ lớn nhất mà 2 con bò có thể ăn chung (lấy giá trị gần đúng nhất).

**A.** $1,034\,\text{m}^2$ **B.** $1,574\,\text{m}^2$ **C.** $1,989\,\text{m}^2$ **D.** $2,824\,\text{m}^2$

**Câu 24:** Trong Công viên Toán học có những mảnh đất mang hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng một loài hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học. Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemmiscate có phương trình trong hệ tọa độ $Oxy$ là $16y^2 = x^2\left(25 - x^2\right)$ như hình vẽ bên.

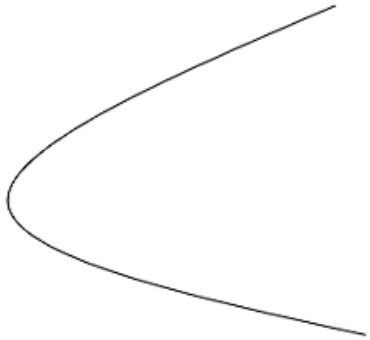



Tính diện tích $S$ của mảnh đất Bernoulli biết rằng mỗi đơn vị trong hệ tọa độ $Oxy$ tương ứng với chiều dài 1 mét.

**A.** $S = \dfrac{125}{6}\left(m^2\right)$ **B.** $S = \dfrac{125}{4}\left(m^2\right)$ **C.** $S = \dfrac{250}{3}\left(m^2\right)$ **D.** $S = \dfrac{125}{3}\left(m^2\right)$

# BÀI TOÁN THỰC TẾ VÀ ỨNG DỤNG THỂ TÍCH

**Câu 1:** Một cái chuông có dạng như hình vẽ. Giả sử khi cắt chuông bởi mặt phẳng qua trục của chuông, được thiết diện có đường viền là một phần parabol ( hình vẽ ). Biết chuông cao 4m, và bán kính của miệng chuông là $2\sqrt{2}$ . Tính thể tích chuông?



**A.** $6\pi$ **B.** $12\pi$ **C.** $2\pi^3$ **D.** $16\pi$

**Câu 2:** Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5m, có bán kính đáy 1m, với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với 0,5m của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn (theo đơn vị $m^3$)

**A.** $11,781\,m^3$. **B.** $12,637\,m^3$. **C.** $114,923\ m^3$. **D.** $8,307\ m^3$.

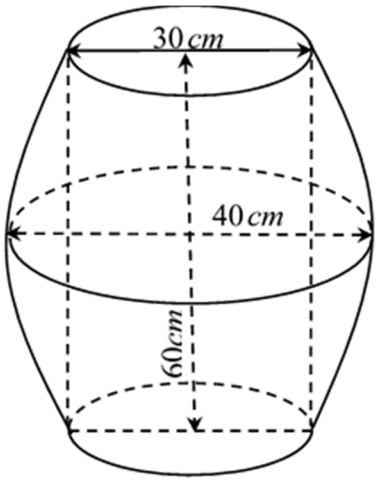
**Câu 3:** Một thùng rượu có bán kính các đáy là $30cm$, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có bán kính là $40cm$, chiều cao thùng rượu là $1m$ (hình vẽ). Biết rằng mặt phẳng chứa trục và cắt mặt xung quanh thùng rượu là các đường parabol, hỏi thể tích của thùng rượu ( đơn vị lít) là bao nhiêu?



**A.** $425,2\ lit.$ **B.** $425162\ lit.$ **C.** $212581\,lit.$ **D.** $212,6\,lit.$

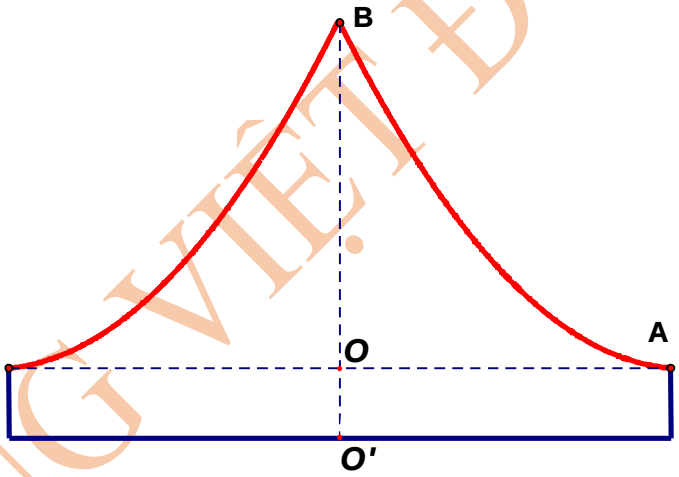
**Câu 4:** **(Đặng Thành Nam Đề 17)** Một thùng đựng bia hơi (có dạng khối tròn xoay như hình vẽ) có đường kính đáy là $30\,\text{cm}$, đường kính lớn nhất của thân thùng là $60\,\text{cm}$, các cạnh bên hông của thùng có hình dạng của một parabol. Thể tích của thùng bia hơi gần nhất với kết quả nào dưới đây? (giả sử độ dày của thùng bia không đáng kể)

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG




**A.** 70 (lít). **B.** 62 (lít). **C.** 60 (lít). **D.** 64 (lít).

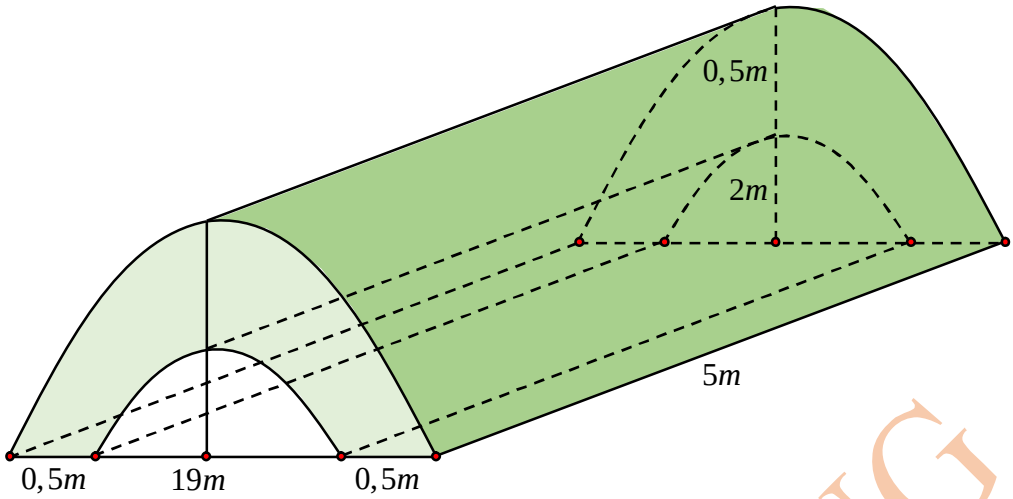
**Câu 5:** **(ĐH Vinh Lần 1)** Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho Ông già Noel có hình dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên. Biết rằng $OO' = 5\text{cm}, OA = 10\text{cm}, OB = 20\text{cm}$, đường cong $AB$ là một phần của một parabol có đỉnh là điểm $A$. Thể tích của chiếc mũ bằng




**A.** $\frac{2750\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $\frac{2500\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$. **C.** $\frac{2050\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $\frac{2250\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$.

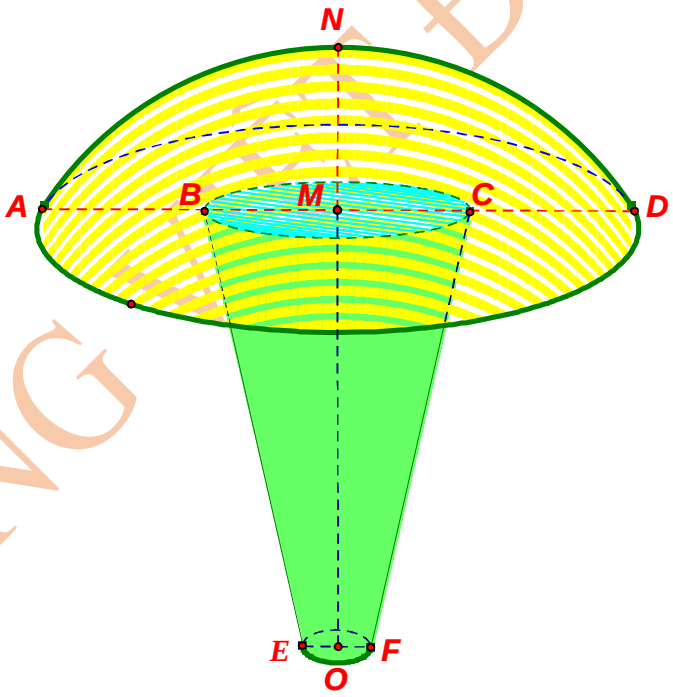
**Câu 6:** Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã X có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol).

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG




**A.** $19m^3$. **B.** $21m^3$. **C.** $18m^3$.. **D.** $40m^3$.

**Câu 7:** **(ĐH Vinh Lần 1)** Cây dù ở khu vui chơi "công viên nước" của trẻ em có phần trên là một chỏm cầu, phần thân là một khối nón cụt như hình vẽ. Biết $ON = OD = 2m$; $MN = 40cm$; $BC = 40cm$; $EF = 20cm$. Tính thể tích của cây dù

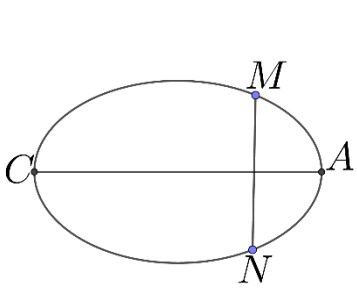



**A.** $336000\pi\left(cm^3\right)\ \dfrac{2750\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $\dfrac{896000\pi}{3}\left(cm^3\right)$.

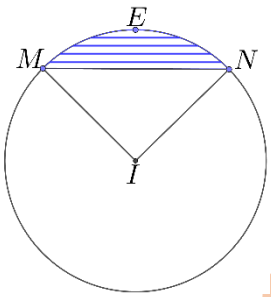
**C.** $112000\pi\left(cm^3\right)\ \dfrac{2050\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $896000\pi\left(cm^3\right)\ \dfrac{2250\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$.

**Câu 8:** **(THPT NINH BÌNH – BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019)** Sân vận động Sports Hub (Singapore) là nơi diễn ra lễ khai mạc đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức ở Singapore năm 2015. Nền sân là một Elip $(E)$ có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$. Nếu cắt sân vận động theo mặt phẳng vuông góc với trục lớn của $(E)$ và cắt $(E)$ tại $M$ và $N$ (hình a) thì ta được thiết diện

luôn là một phần của hình tròn có tâm $I$ ( phần tô đậm trong hình b) với $MN$ là dây cung và $\widehat{MIN}=90^0$. Để lắp máy điều hòa không khí cho sân vận động thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và vật liệu làm mái che không đáng kể. Hỏi thể tích đó xấp xỉ bao nhiêu?



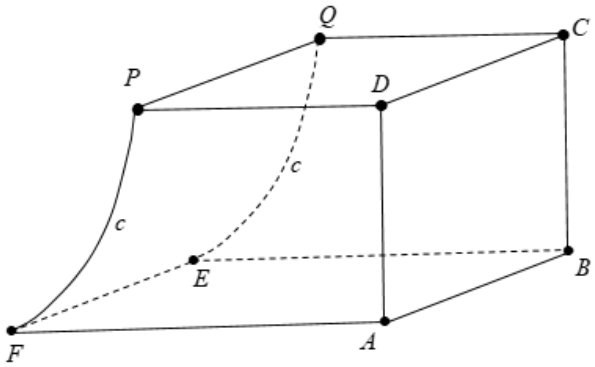

**Hình a**




**Hình b**

**A.** $57793m^3$. **B.** $115586m^3$. **C.** $32162m^3$. **D.** $101793m^3$.

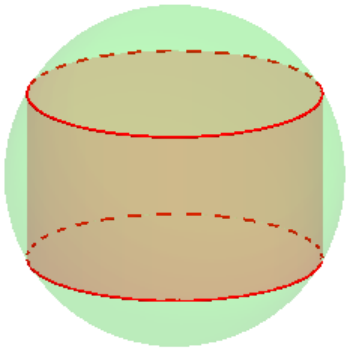
**Câu 9:** **(Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2)** Một chi tiết máy được thiết kế như hình vẽ bên.




Các tứ giác $ABCD, CDPQ$ là các hình vuông cạnh $2,5cm$. Tứ giác $ABEF$ là hình chữ nhật có $BE=3,5cm$. Mặt bên $PQEF$ được mài nhẵn theo đường parabol $(P)$ có đỉnh parabol nằm trên cạnh $EF$. Thể tích của chi tiết máy bằng

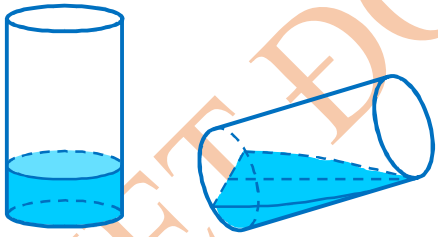
**A.** $\frac{395}{24}cm^3$. **B.** $\frac{50}{3}cm^3$. **C.** $\frac{125}{8}cm^3$. **D.** $\frac{425}{24}cm^3$.

**Câu 10:** Một khối cầu có bán kính là $5(dm)$, người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng $3(dm)$ để làm một chiếc lu đựng nước (như hình vẽ). Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.



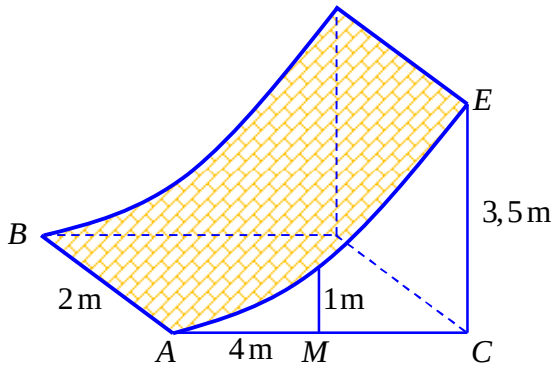
**A.** $\frac{100}{3}\pi\left(dm^3\right)$ **B.** $\frac{43}{3}\pi\left(dm^3\right)$ **C.** $41\pi\left(dm^3\right)$ **D.** $132\pi\left(dm^3\right)$

**Câu 11:** Có một cốc thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là $6\text{cm}$, chiều cao trong lòng cốc là $10\text{cm}$ đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy mực nước trùng với đường kính đáy.



**A.** $240\,\text{cm}^3$. **B.** $240\pi\,\text{cm}^3$. **C.** $120\,\text{cm}^3$. **D.** $120\pi\,\text{cm}^3$.

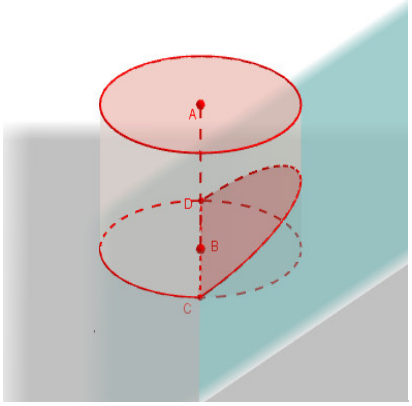
**Câu 12:** Chướng ngại vật "tường cong" trong một sân thi đấu X-Game là một khối bê tông có chiều cao từ mặt đất lên là $3,5\,\text{m}$. Giao của mặt tường cong và mặt đất là đoạn thẳng $AB=2\,\text{m}$. Thiết diện của khối tường cong cắt bởi mặt phẳng vuông góc với $AB$ tại $A$ là một hình tam giác vuông cong $ACE$ với $AC=4\,\text{m}$, $CE=3,5\,\text{m}$ và cạnh cong $AE$ nằm trên một đường parabol có trục đối xứng vuông góc với mặt đất. Tại vị trí $M$ là trung điểm của $AC$ thì tường cong có độ cao $1\text{m}$ (xem hình minh họa bên). Tính thể tích bê tông cần sử dụng để tạo nên khối tường cong đó.

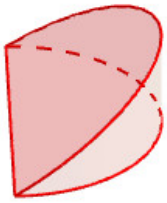



**A.** $9,75\,\text{m}^3$. **B.** $10,5\,\text{m}^3$. **C.** $10\,\text{m}^3$. **D.** $10,25\,\text{m}^3$.

**Câu 13:** **Từ một khúc** gỗ hình trụ có đường kính 30cm, người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua đường kính đáy và nghiêng với đáy một góc $45^0$ để lấy một hình nêm (xem hình minh họa dưới đây)

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



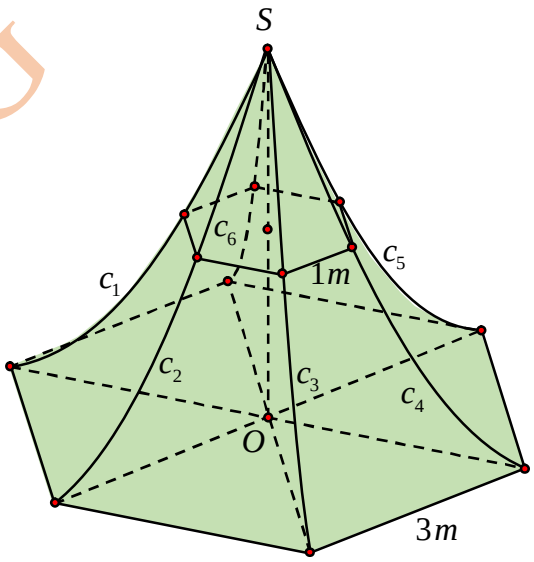



**Hình 1** **Hình 2**

Kí hiệu $V$ là thể tích của hình nêm (Hình 2). Tính $V$.

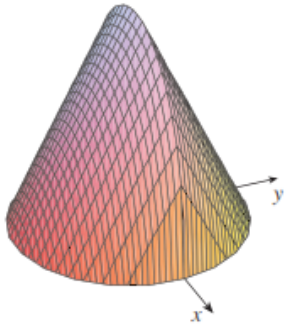
**A.** $V = 2250\left(cm^3\right)$. **B.** $V = \frac{225\pi}{4}\left(cm^3\right)$. **C.** $V = 1250\left(cm^3\right)$. **D.** $V = 1350\left(cm^3\right)$

**Câu 14:** Người ta dựng một cái lều vải $(H)$ có dạng hình "chóp lục giác cong đều" như hình vẽ bên. Đáy của $(H)$ là một hình lục giác đều cạnh $3\ m$. Chiều cao $SO = 6\ m$ ($SO$ vuông góc với mặt phẳng đáy). Các cạnh bên của $(H)$ là các sợi dây $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$, $c_5$, $c_6$ nằm trên các đường parabol có trục đối xứng song song với $SO$. Giả sử giao tuyến (nếu có) của $(H)$ với mặt phẳng $(P)$ vuông góc với $SO$ là một lục giác đều và khi $(P)$ qua trung điểm của $SO$ thì lục giác đều có cạnh $1\ m$. Tính thể tích phần không gian nằm bên trong cái lều $(H)$ đó.



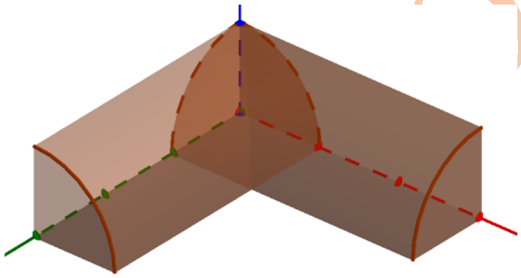

**A.** $\frac{135\sqrt{3}}{5}\left(m^3\right)$. **B.** $\frac{96\sqrt{3}}{5}\left(m^3\right)$. **C.** $\frac{135\sqrt{3}}{4}\left(m^3\right)$. **D.** $\frac{135\sqrt{3}}{8}\left(m^3\right)$.

**Câu 15:** Một vật có kích thước và hình dáng như hình vẽ dưới đây. Đáy là hình tròn bán kính 4 cắt vật bởi các mặt phẳng vuông góc với trục $Ox$ ta được thiết diện là tam giác đều. Thể tích của vật thể là:




**A.** $V=\dfrac{256}{3}$. **B.** $V=\dfrac{64}{3}$. **C.** $V=\dfrac{256\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\dfrac{32\sqrt{3}}{3}$.

**Câu 16:** Gọi $(H)$ là phần giao của hai khối $\dfrac{1}{4}$ hình trụ có bán kính $a$, hai trục hình trụ vuông góc với nhau. Xem hình vẽ bên. Tính thể tích của $(H)$.



**A.** $V_{(H)}=\dfrac{2a^3}{3}$. **B.** $V_{(H)}=\dfrac{3a^3}{4}$. **C.** $V_{(H)}=\dfrac{a^3}{2}$. **D.** $V_{(H)}=\dfrac{\pi a^3}{4}$.

**Câu 17:** Cho một vật thể bằng gỗ có dạng khối trụ với bán kính đáy bằng R. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng có giao tuyến với đáy là một đường kính của đáy và tạo với đáy góc $45^0$. Thể tích của khối gỗ bé là:

**A.** $V=\dfrac{2R^3}{3}$. **B.** $V=\dfrac{\pi R^3}{6}$. **C.** $V=\dfrac{R^3}{3}$. **D.** $V=\dfrac{\pi R^3}{3}$.

## ỨNG DỤNG THỰC TẾ KHÁC

**Câu 1:** Một hạt proton di chuyển trong điện trường có biểu thức gia tốc ( theo $cm^2/s$ ) là $a(t)=\dfrac{-20}{(1+2t)^2}$ (với $t$ tính bằng giây). Tìm hàm vận tốc $v$ theo $t$, biết rằng khi $t=0$ thì $v=30\ (cm/s)$.

**A.** $\dfrac{10}{1+2t}$ **B.** $\dfrac{10}{1+2t}+20$ **C.** $(1+2t)^{-3}+30$ **D.** $\dfrac{-20}{(1+2t)^2}+30$

**Câu 2:** **(SỞ BÌNH THUẬN 2019)** Một ôtô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t)=6t\,(m/s)$. Đi được 10 s, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ôtô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-60\,(m/s^2)$. Tính quãng đường $S$ đi được của ôtô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

**A.** $300\,(m)$. **B.** $330\,(m)$. **C.** $350\,(m)$. **D.** $400\,(m)$.

**Câu 3:** Một người lái xe ô tô đang chạy với vận tốc $20\ m/s$ thì người lái xe phát hiện có hàng rào ngăn đường ở phía trước cách $45m$ (tính từ vị trí đầu xe đến hàng rào) vì vậy, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+20\,(m/s)$, trong đó $t$ là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, xe ô tô còn cách hàng rào ngăn cách bao nhiêu mét (tính từ vị trí đầu xe đến hàng rào)?

**A.** $5\,m$. **B.** $4\,m$. **C.** $6\,m$. **D.** $3\,m$.

**Câu 4:** Một vật chuyển động với vận tốc $10\ m/s$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=3t+t^2$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

**A.** $\frac{4300}{3}\ m$. **B.** $4300\ m$. **C.** $430\ m$. **D.** $\frac{430}{3}\ m$.

**Câu 5:** Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t)=7t$ (m/s). Đi được $5$ (s), người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-70$ (m/s$^2$ ). Tính quãng đường $S$ (m) đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

**A.** $S=95,70$ (m). **B.** $S=87,50$ (m). **C.** $S=94,00$ (m). **D.** $S=96,25$ (m).

**Câu 6:** Một ôtô đang chạy đều với vận tốc 15 m/s thì phía trước xuất hiện chướng ngại vật nên người lái đạp phanh gấp. Kể từ thời điểm đó, ôtô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $-a\ \ m/s^2$. Biết ôtô chuyển động thêm được $20m$ thì dừng hẳn. Hỏi $a$ thuộc khoảng nào dưới đây.

**A.** $(3;4)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(5;6)$. **D.** $(6;7)$.

**Câu 7:** Một ôtô đang chạy với vận tốc $18\ m/s$ thì người lái hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ôtô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-36t+18$ $(m/s)$ trong đó $t$ là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Quãng đường ôtô di chuyển được kể từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn là bao nhiêu mét?

**A.** $5,5\ m$. **B.** $3,5\ m$. **C.** $6,5\ m$. **D.** $4,5\ m$.

**Câu 8:** Một lực 50 N cần thiết để kéo căng một chiếc lò xo có độ dài tự nhiên 5 cm đến 10 cm. Hãy tìm công sinh ra khi kéo lò xo từ độ dài từ 10 cm đến 13 cm?

**A.** 1,95J. **B.** 1,59 J. **C.** 1000 J. **D.** 10000 J

**Câu 9:** Một ôtô đang chạy đều với vận tốc 15 m/s thì phía trước xuất hiện chướng ngại vật nên người lái đạp phanh gấp. Kể từ thời điểm đó, ôtô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $-a\ \ m/s^2$. Biết ôtô chuyển động thêm được $20m$ thì dừng hẳn. Hỏi $a$ thuộc khoảng nào dưới đây.

**A.** $(3;4)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(5;6)$. **D.** $(6;7)$.

**Câu 10:** Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162 (mét) so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t)=10t-t^2$, trong đó $t$ (phút) là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $v(t)$ được tính theo đơn vị mét/phút ($m/p$). Nếu như vậy thì khi bắt đầu tiếp đất vận tốc $v$ của khí cầu là

**A.** $v=5(m/p)$. **B.** $v=7(m/p)$. **C.** $v=9(m/p)$. **D.** $v=3(m/p)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 11:** Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì người lái đạp phân, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+10(m/s)$, trong đó $t$ là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

**A.** $0,2m$. **B.** $2m$. **C.** $10m$. **D.** $20m$.

**Câu 12:** Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi h(t) là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=3at^2+bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$. Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là bao nhiêu.

**A.** $8400m^3$. **B.** $2200m^3$. **C.** $6000m^3$. **D.** $4200m^3$

**Câu 13:** Gọi $h(t)\ (cm)$ là mức nước trong bồn chứa sau khi bơm được $t$ giây. Biết rằng $h'(t)=\frac{1}{5}\sqrt[3]{t+8}$ và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây (chính xác đến $0,01\ cm$)

**A.** $2,67\ cm$. **B.** $2,66\ cm$. **C.** $2,65\ cm$. **D.** $2,68\ cm$.

**Câu 14:** Một đám vi trùng tại ngày thứ $t$ có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t)=\frac{4000}{1+0,5t}$ và lúc đầu đám vi trùng có $250000$ con. Hỏi sau 10 ngày số lượng vi trùng gần với số nào sau đây nhất?

**A.** $251000$ con. **B.** $264334$ con. **C.** $261000$ con. **D.** $274334$ con.

**Câu 15:** Một đám vi trùng tại ngày thứ $t$ có số lượng $N(t)$, biết rằng $N'(t)=\frac{7000}{t+2}$ và lúc đầu đám vi trùng có $300000$ con. Sau 10 ngày, đám vi trùng có khoảng bao nhiêu con?

**A.** $302542$ con. **B.** $322542$ con. **C.** $312542$ con. **D.** $332542$ con.

**Câu 16:** Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn trong hồ bơi được mô hình bởi hàm số $B'(t)=\frac{1000}{(1+0,3t)^2}, t\ge 0$, trong đó $B(t)$ là số lượng vi khuẩn trên mỗi $ml$ nước tại ngày thứ $t$. Số lượng vi khuẩn ban đầu là $500$ con trên một $ml$ nước. Biết rằng mức độ an toàn cho người sử dụng hồ bơi là số vi khuẩn phải dưới $3000$ con trên mỗi $ml$ nước. Hỏi vào ngày thứ bao nhiêu thì nước trong hồ không còn an toàn nữa?

**A.** $9$ **B.** $10$. **C.** $11$. **D.** $12$.

**Câu 17:** **(KHTN Hà Nội Lần 3)** Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $V(t)$ là thể tích nước bơm được sau $t$ giây. Biết rằng $V'(t)=at^2+bt$ và ban đầu bể không có nước, sau $5$ giây thể tích nước trong bể là $15m^3$, sau $10$ giây thì thể tích nước trong bể là $110m^3$. Thể tích nước bơm được sau $20$ giây bằng

**A.** $60m^3$. **B.** $220m^3$. **C.** $840m^3$. **D.** $420m^3$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 18:** Hạt electron có điện tích âm là $1,6.10^{-19}C$. Nếu tách hai hạt eletron từ $1pm$ đếm $4pm$ thì công $W$ sinh ra là

**A.** $W=3,194.10^{-28}\ J$. **B.** $W=1,728.10^{-16}\ J$.

**C.** $W=1,728.10^{-28}\ J$. **D.** $W=3,194.10^{-16}\ J$.

**Câu 19:** Trong mạch máy tính, cường độ dòng điện (đơn vị $mA$) là một hàm số theo thời gian $t$, với $I(t)=0,3-0,2t$. Hỏi tổng điện tích đi qua một điểm trong mạch trong 0,05 giây là bao nhiêu?

**A.** $0,29975\ mC$. **B.** $0,29\ mC$. **C.** $0,01525\ mC$. **D.** $0,01475\ mC$.

**Câu 20:** Dòng điện xoay chiều hình sin chạy qua một đoạn mạch LC có có biểu thức cường độ là $i(t)=I_0\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$. Biết $i=q'$ với $q$ là điện tích tức thời ở tụ điện. Tính từ lúc $t=0$, điện lượng chuyển qua tiết diện thẳng của dây dẫn của đoạn mạch đó trong thời gian bằng $\frac{\pi}{\omega}$ là

**A.** $\frac{\pi\sqrt{2}I_0}{\omega}$. **B.** 0. **C.** $\frac{2I_0}{\omega}$. **D.** $\frac{\pi I_0}{\omega\sqrt{2}}$.

**Câu 21:** Khi một chiếc lò xo bị kéo căng thêm $x(m)$ so với độ dài tự nhiên là $0,15(m)$ của lò xo thì chiếc lò xo trì lại (chống lại) với một lực $f(x)=800x$. Hãy tìm công $W$ sinh ra khi kéo lò xo từ độ dài từ $0,15(m)$ đến $0,18(m)$.

**A.** $W=36.10^{-2}J$. **B.** $W=72.10^{-2}J$. **C.** $W=36J$. **D.** $W=72J$.

**Câu 22:** Một dòng điện xoay chiều $i=I_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$ chạy qua một mạch điện có điện trở thuần R.Hãy tính nhiệt lượng Q tỏa ra trên đoạn mạch đó trong thời gian một chu kì T.

**A.** $\frac{RI_0^2}{2}T$. **B.** $\frac{RI_0^2}{3}T$. **C.** $\frac{RI_0^2}{4}T$. **D.** $\frac{RI_0^2}{5}T$

**Câu 23:** Đặt vào một đoạn mạch hiệu điện thế xoay chiều $u=U_0\sin\frac{2\pi}{T}t$. Khi đó trong mạch có dòng diện xoay chiều $i=I_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$ với $\varphi$ là độ lệch pha giữa dòng diện và hiệu điện thế.Hãy Tính công của dòng diện xoay chiều thực hiện trên đoạn mạnh đó trong thời gian một chu kì.

**A.** $\frac{U_0I_0}{2}\cos\varphi$. **B.** $\frac{U_0I_0}{2}T\sin\varphi$. **C.** $\frac{U_0I_0}{2}T\cos(\varphi+\pi)$. **D.** $\frac{U_0I_0}{2}T\cos\varphi$

**Câu 24:** Để kéo căng một lò xo có độ dài tự nhiên từ $10cm$ đến $15cm$ cần lực $40N$. Tính công $(A)$ sinh ra khi kéo lò xo có độ dài từ $15cm$ đến $18cm$.

**A.** $A=1,56\ (J)$. **B.** $A=1\ (J)$. **C.** $A=2,5\ (J)$. **D.** $A=2\ (J)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 25:** Một thanh AB có chiều dài là 2a ban đầu người ta giữ thanh ở góc nghiêng $\alpha = \alpha_o$, một đầu thanh tựa không ma sát với bức tường thẳng đứng. Khi buông thanh, nó sẽ trượt xuống dưới tác dụng của trọng lực. Hãy biểu diễn góc $\alpha$ theo thời gian t (Tính bằng công thức tính phân)

**A.** $t = -\int\limits_{\alpha_o}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3}{2a}(\sin\alpha_o - \sin\alpha)}}$.

**B.** $t = -\int\limits_{\alpha_o}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3g}{2a}(\sin\alpha_o + \sin\alpha)}}$.

**C.** $t = -\int\limits_{\alpha_o}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3g}{a}(\sin\alpha_o - \sin\alpha)}}$.

**D.** $t = -\int\limits_{\alpha_o}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3g}{2a}(\sin\alpha_o - \sin\alpha)}}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

# NGUYÊN HÀM

## A – KIẾN THỨC CHUNG

### 1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $K$ ($K$ là khoảng, đoạn hay nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $K$ nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi $x\in K$.

Kí hiệu: $\int f(x)dx=F(x)+C$.

***Định lí:***

1) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $K$ thì với mỗi hằng số $C$, hàm số $G(x)=F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $K$.

2) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $K$ thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên $K$ đều có dạng $F(x)+C$, với $C$ là một hằng số.

Do đó $F(x)+C, C\in\mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên $K$.

### 2. Tính chất của nguyên hàm

- $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$ và $\int f'(x)dx=f(x)+C$; $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$
- Nếu F(x) có đạo hàm thì: $\int d(F(x))=F(x)+C$
- $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ với $k$ là hằng số khác $0$.
- $\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$
- **Công thức đổi biến số:** Cho $y=f(u)$ và $u=g(x)$.

  Nếu $\int f(x)dx=F(x)+C$ thì $\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du=F(u)+C$

### 3. Sự tồn tại của nguyên hàm

***Định lí:***

Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $K$ đều có nguyên hàm trên $K$.

### 4. Bảng nguyên hàm các hàm số thường gặp

| | |
|---|---|
| 1. $\int 0dx=C$ 2. $\int dx=x+C$ | |
| 3. $\int x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq-1)$ | 16. $\int(ax+b)^\alpha dx=\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c,\alpha\neq-1$ |
| 4. $\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+C$ | 17. $\int xdx=\frac{x^2}{2}+C$ |
| 5. $\int\frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$ | 18. $\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+c$ |
| 6. $\int e^x dx=e^x+C$ | 19. $\int e^{ax+b}dx=\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$ |
| 7. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$ | 20. $\int a^{kx+b}dx=\frac{1}{k}\frac{a^{kx+b}}{\ln a}+C$ |

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

| | |
|---|---|
| 8. $\int \cos x dx = \sin x + C$ | 21. $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$ |
| 9. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ | 22. $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$ |
| 10. $\int \tan x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$ | 23. $\int \tan(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos(ax+b)\rvert + C$ |
| 11. $\int \cot x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$ | 24. $\int \cot(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin(ax+b)\rvert + C$ |
| 12. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$ | 25. $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$ |
| 13. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$ | 26. $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+C$ |
| 14. $\int (1+\tan^2 x)dx = \tan x + C$ | 27. $\int (1+\tan^2(ax+b))dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$ |
| 15. $\int (1+\cot^2 x)dx = -\cot x + C$ | 28. $\int (1+\cot^2(ax+b))dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+C$ |

**5. Bảng nguyên hàm mở rộng**

| | |
|---|---|
| $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$ | $\int \arcsin\frac{x}{a}dx = x\arcsin\frac{x}{a}+\sqrt{a^2-x^2}+C$ |
| $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert+C$ | $\int \arccos\frac{x}{a}dx = x\arccos\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C$ |
| $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$ | $\int \arctan\frac{x}{a}dx = x\arctan\frac{x}{a}-\frac{a}{2}\ln(a^2+x^2)+C$ |
| $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\lvert a\rvert}+C$ | $\int \operatorname{arc\,cot}\frac{x}{a}dx = x\operatorname{arc\,cot}\frac{x}{a}+\frac{a}{2}\ln(a^2+x^2)+C$ |
| $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\left\lvert\frac{x}{a}\right\rvert+C$ | |
| $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left\lvert\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right\rvert+C$ | $\int \frac{dx}{\sin(ax+b)} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert\tan\frac{ax+b}{2}\right\rvert+C$ |
| $\int \ln(ax+b)\,dx = \left(x+\frac{b}{a}\right)\ln(ax+b)-$ | $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}+C$ |
| $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\arcsin$ | $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C$ |

## B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 1.** Tìm giá trị thực của $a$ để $F(x)=\dfrac{ax+1}{\sqrt{2x+1}}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{4x+3}{\sqrt{(2x+1)^3}}$.

**A.** $a=4$. **B.** $a=5$. **C.** $a=-4$. **D.** $a=-5$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $F'(x)=\dfrac{a\sqrt{2x+1}-\dfrac{ax+1}{\sqrt{2x+1}}}{2x+1}=\dfrac{ax+a-1}{\sqrt{(2x+1)^3}}$

$F'(x)=f(x)\Leftrightarrow\dfrac{ax+a-1}{\sqrt{(2x+1)^3}}=\dfrac{4x+3}{\sqrt{(2x+1)^3}}\Leftrightarrow ax+a-1=4x+3\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\a-1=3\end{cases}\Leftrightarrow a=4.$

**Câu 2.** Cho $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{2x-1}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{10x^2-7x-2}{\sqrt{2x-1}}$ trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. Tính $S=a+b+c$.

**A.** $S=3$. **B.** $S=0$. **C.** $S=-6$. **D.** $S=-2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$F'(x)=f(x)\Leftrightarrow(2ax+b)\sqrt{2x-1}+(ax^2+bx+c)\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}=\dfrac{10x^2-7x-2}{\sqrt{2x-1}}$

$\Leftrightarrow\dfrac{(2ax+b)(2x-1)+ax^2+bx+c}{\sqrt{2x-1}}=\dfrac{10x^2-7x-2}{\sqrt{2x-1}}$

$\Leftrightarrow 5ax^2+(3b-2a)x+c-b=10x^2-7x-2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}5a=10\\3a-2b=-7\\c-b=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-1\\c=-3\end{cases}\Rightarrow S=-2.$

**Câu 3.** Cho $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{2x-3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$ trên khoảng $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. Tính $P=abc$.

**A.** $P=0$. **B.** $P=3$. **C.** $P=4$. **D.** $P=-8$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $F'(x)=(2ax+b)\sqrt{2x-3}+(ax^2+bx+c).\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}=\dfrac{5ax^2+(3b-6a)x+c-3b}{\sqrt{2x-3}}$

$F'(x)=f(x)\Leftrightarrow 5ax^2+(3b-6a)x+c-3b=20x^2-30x+7$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a = 20 \\ 3b - 6a = -30 \\ c - 3b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \Rightarrow S = -8. \\ c = 1 \end{cases}$$

**Câu 4.** Biết $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} dx = a \ln|\sin x - \cos x| + C$. Với $a$ là số nguyên. Tìm $a$?

**A.** $a = 1.$ **B.** $a = 2.$ **C.** $a = 3.$ **D.** $a = 4.$

**Lời giải**

Vì $\int a\left[\ln|\sin x - \cos x| + C\right]' = \frac{(\sin x - \cos x)'}{\sin x - \cos x} = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ nên

Nguyên hàm của: $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ là: $\ln|\sin x - \cos x| + C$.

**Chọn A**

**Câu 5.** Tìm một nguyên hàm của: $1 + 4.\frac{\tan^2 \frac{x}{2}}{\left(\tan^2 \frac{x}{2} - 1\right)^2}$ biết nguyên hàm này bằng 3 khi $x = \frac{\pi}{4}$.

**A.** $\frac{1}{\cos^2 x} + 3.$ **B.** $\frac{1}{\sin^2 x} + 3.$ **C.** $\tan x + 2.$ **D.** $\cot x + 2.$

**Lời giải**

$$f(x) = 1 + 4.\frac{\tan^2 \frac{x}{2}}{\left(\tan^2 \frac{x}{2} - 1\right)^2} = 1 + \left(\frac{2\tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}\right)^2 = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos_2 x}$$

Nguyên hàm của $F(x) = \tan x + C$

Ta có: $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \Rightarrow \tan\frac{\pi}{4} + C = 3 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow F(x) = \tan x + 2$

**Chọn C**

**Câu 6.** Biết $\int \frac{1}{\left(25x^2 - 20x + 4\right)} dx = -\frac{1}{a(5x-2)^5} + C$. Với $a$ là số nguyên. Tìm $a$?

**A.** $a = 4.$ **B.** $a = 100.$ **C.** $a = 5.$ **D.** $a = 25.$

**Lời giải**

**Chú ý** nếu chúng ta biến đổi:

$$\int \frac{1}{\left(25x^2 - 20x + 4\right)^3} dx = \int \left(25x^2 - 20x + 4\right)^{-3} dx = \frac{\left(25x^2 - 20x + 4\right)^{-4}}{-4} + C \text{ . Là sai}$$

Điều sau đây mới đúng: $\int \left(25x^2 - 20x + 4\right)^{-3} d\left(25x^2 - 20x + 4\right) = \frac{\left(25x^2 - 20x + 4\right)^{-4}}{-4} + C$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Trở lại bài, ta sẽ biến đổi biểu thức $\left(25x^2-20x+4\right)^3$ về dạng $\left(ax+b\right)^n$ như sau:

$$\int\frac{1}{\left(25x^2-20x+4\right)^3}dx=\int\frac{1}{\left(5x-2\right)^6}dx=\int\left(5x-2\right)^{-6}dx$$

$$=\frac{1}{5}\frac{\left(5x-2\right)^{-5}}{-5}+C=-\frac{1}{25\left(5x-2\right)^5}+C$$

**Chọn D**

**Câu 7.** Biết $\int\frac{1+x}{2x^2-5x-7}dx=\frac{a}{b}\ln\left|2x-7\right|+C$, với $a$, $b$ là cá số nguyên. Tính $S = a + b$?

**A.** $S=4.$ **B.** $S=2.$ **C.** $S=3.$ **D.** $S=5.$

**Lời giải**

Ta quan sát mẫu cso thể phân tích được thành nhân tử, sử dụng MTCT bấm giải phương trình bậc 2:

$2x^2-5x-7=0$ thấy có hai nghiệm là: $x=-1,x=\frac{7}{2}$.

Áp dụng công thức $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$ với $x_1,x_2$ là hai nghiệm ta có:

$$2x^2-5x-7=\left(x+1\right)\left(2x-7\right)$$

Do đó:

$$\int\frac{1+x}{2x^2-5x-7}dx=\int\frac{x+1}{\left(x+1\right)\left(2x-7\right)}dx=\int\frac{1}{2x+7}dx=\frac{1}{2}\ln\left|2x-7\right|+C$$

**Chọn C**

**Câu 8.** Biết $\int\frac{1}{1+\sin 2x}dx=\frac{a}{b}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+C$, với $a$, $b$ là cá số nguyên. Tính $S = a + b$?

**A.** $S=4.$ **B.** $S=2.$ **C.** $S=3.$ **D.** $S=5.$

**Lời giải**

$$\int\frac{1}{1+\sin 2x}dx=\int\frac{1}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}dx=\int\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+C=\frac{1}{2}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+C$$

Ta thấy a=1,b=2 suy ra S=3

**Chọn C**

**Câu 9.** Cho $f\left(x\right)=8\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$. Một nguyên hàm $F\left(x\right)$ của $f\left(x\right)$ thỏa $F\left(0\right)=8$ là:

**A.** $4x+2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+9.$ **B.** $4x-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+9.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**C.** $4x+2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+7$. **D.** $4x-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+7$.

**Lời giải**

Ta cần phải tính $\int f(x)dx=\int 8\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)dx$. Đầu tiên sử dụng công thức hạ bậc để đổi $f(x)$ như sau:

$$f(x)=8\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=8\left(\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}{2}\right)$$

$$f(x)=4-4\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow F(x)=4x-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+C$$

$$f(0)=8\Leftrightarrow -2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+C=8\Leftrightarrow C=9$$

**Chọn B**

**Câu 10.** Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $\int\frac{5x^2+8x-4}{x^2(1-x)^2}dx$ với $0<x<1$ và $F\left(\frac{1}{2}\right)=26$. Giá trị nhỏ nhất của $F(x)$ là:

**A.** 24. **B.** 20. **C.** 25. **D.** 26.

**Lời giải**

Ta có:

$$F(x)=\int\frac{5x^2+8x-4}{x^2(1-x)^2}dx=\int\frac{9x^2-4(x^2-2x+1)}{x^2(1-x^2)}dx$$

$$=\int\left[\frac{9}{(1-x^2)}-\frac{4}{x^2}\right]dx=\frac{4}{x}+\frac{9}{(1-x)}+C$$

Vì $F\left(\frac{1}{2}\right)=26$ nên $\frac{4}{\frac{1}{2}}+\frac{9}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}+C=26\Leftrightarrow C=0$

Lúc này $F(x)=\frac{4}{x}+\frac{9}{(1-x)}$ với $0<x<1$. Sử dụng MTCT bấm Mode 7 chọn start 0 end 1 Step 0.1:

Quan sát bảng giá trị ta thấy giá trị nhỏ nhất của F(x) là 25 xảy ra khi x =0,4

**Chọn C**

**Câu 11.** Cho $f(x)=1+|x|$. Một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa $F(1)=1$ là:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** $x^2+x+1$ **B.** $\begin{cases} x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2} \text{ khi } x\ge 0 \\ x-\dfrac{x^2}{2}+C_2 \text{ khi } x<0 \end{cases}$.

**C.** $\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}-x+C_1 \text{ khi } x\ge 0 \\ x-\dfrac{x^2}{2}+C_2 \text{ khi } x<0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} -x^2+x+C_1 \text{ khi } x\ge 0 \\ x-\dfrac{x^2}{2}+C_2 \text{ khi } x<0 \end{cases}$.

**Lời giải**

Ta có: $f(x)=\begin{cases} 1+x \text{ khi } x\ge 0 \\ 1-x \text{ khi } x<0 \end{cases} \Rightarrow F(x)=\begin{cases} x+\dfrac{x^2}{2}+C_1 \text{ khi } x\ge 0 \\ x-\dfrac{x^2}{2}+C_2 \text{ khi } x<0 \end{cases}$.

Theo đề $F(1)=1\Rightarrow C_1=-\dfrac{1}{2}$ do đó: $\begin{cases} x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2} \text{ khi } x\ge 0 \\ x-\dfrac{x^2}{2}+C_2 \text{ khi } x<0 \end{cases}$.

**Chọn B**

**Câu 12.** Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{e^x+3}$ và $F(0)=-\dfrac{1}{3}\ln 4$. Tập nghiệm $S$ của phương trình $3F(x)+\ln\left(x^3+3\right)=2$ là:

**A.** $S=\{2\}$. **B.** $S=\{-2;2\}$. **C.** $S=\{1;2\}$. **D.** $S=\{-2;1\}$.

**Lời giải**

Ta có: $F(x)=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{e^x+3}=\dfrac{1}{3}\int\left(1-\dfrac{e^x}{e^x+3}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\left(x-\ln\left(e^x+3\right)\right)+C$.

Do $F(0)=-\dfrac{1}{3}\ln 4$ nên $C=0$. Vậy $F(x)=\dfrac{1}{3}\left(x-\ln\left(e^x+3\right)\right)$.

Do đó: $3F(x)+\ln\left(e^x+3\right)=2\Leftrightarrow x=2$

**Chọn A**

**Câu 13.** **(NGUYỄN ĐÌNH CHIỂU TIỀN GIANG)** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$, thỏa mãn $F(3)=1$ và $F(1)=2$, giá trị của $F(0)+F(4)$ bằng

**A.** $2\ln 2+3$. **B.** $2\ln 2+2$. **C.** $2\ln 2+4$. **D.** $2\ln 2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Ta có: $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{x-2}\mathrm{d}x=\begin{cases} \ln(x-2)+C_1 \text{ khi } x>2 \\ \ln(2-x)+C_2 \text{ khi } x<2 \end{cases}$.

Do $\begin{cases} F(3)=1 \\ F(1)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=2 \end{cases}$. Khi đó $F(x)=\begin{cases} \ln(x-2)+1 & \text{khi } x>2 \\ \ln(2-x)+2 & \text{khi } x<2 \end{cases}$.

Vậy $F(0)+F(4)=(\ln 2+2)+(\ln 2+1)=2\ln 2+3$.

**Câu 14.** **(Chuyên Vinh Lần 3)** Biết rằng $xe^x$ là một nguyên hàm của $f(-x)$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)e^x$ thỏa mãn $F(0)=1$, giá trị của $F(-1)$ bằng

**A.** $\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{5-e}{2}$. **C.** $\frac{7-e}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $f(-x)=\left(xe^x\right)'=e^x+xe^x,\ \forall x\in(-\infty;+\infty)$.

Do đó $f(-x)=e^{-(-x)}-(-x)e^{-(-x)},\ \forall x\in(-\infty;+\infty)$.

Suy ra $f(x)=e^{-x}(1-x),\ \forall x\in(-\infty;+\infty)$.

Nên $f'(x)=\left[e^{-x}(1-x)\right]'=e^{-x}(x-2)\Rightarrow f'(x)e^x=e^{-x}(x-2).e^x=x-2$.

Bởi vậy $F(x)=\int(x-2)\,dx=\frac{1}{2}(x-2)^2+C$.

Từ đó $F(0)=\frac{1}{2}(0-2)^2+C=C+2;\ F(0)=1\Rightarrow C=-1$.

Vậy $F(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2-1\Rightarrow F(-1)=\frac{1}{2}(-1-2)^2-1=\frac{7}{2}$.

**Câu 15.** **(Chuyên Quốc Học Huế Lần1)** Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0;\pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

**A.** $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-4$. **B.** $F\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$. **D.** $F\left(\frac{5\pi}{6}\right)=3-\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:

$$\int f(x)dx=\int\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}dx=2\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx-\int\frac{1}{\sin^2 x}dx$$

$$=2\int\frac{d(\sin x)}{\sin^2 x}-\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\frac{2}{\sin x}+\cot x+C$$

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$ nên hàm số $F(x)$ có công thức dạng $F(x)=-\frac{2}{\sin x}+\cot x+C$ với mọi $x\in(0;\pi)$.

Xét hàm số $F(x)=-\frac{2}{\sin x}+\cot x+C$ xác định và liên tục trên $(0;\pi)$.

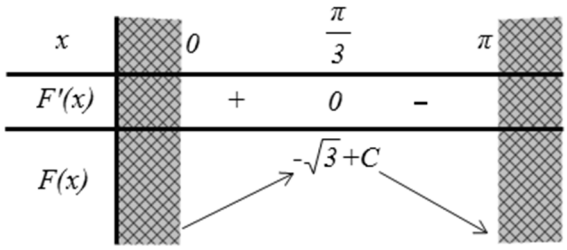
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$F'(x)=f(x)=\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$

Xét $F'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}=0\Leftrightarrow\cos x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Trên khoảng $(0;\pi)$, phương trình $F'(x)=0$ có một nghiệm $x=\dfrac{\pi}{3}$

Bảng biến thiên:




$\max\limits_{(0;\pi)}F(x)=F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}+C$

Theo đề bài ta có, $-\sqrt{3}+C=\sqrt{3}\Leftrightarrow C=2\sqrt{3}$.

Do đó, $F(x)=-\dfrac{2}{\sin x}+\cot x+2\sqrt{3}$.

Khi đó, $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-4$.

**Câu 16.** **(Chuyên-Thái-Nguyên-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{x^2}\left(x^3-4x\right)$. Hàm số $F\left(x^2+x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

**A.** 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn B**

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{x^2}\left(x^3-4x\right)\Rightarrow F'(x)=f(x)=e^{x^2}\left(x^3-4x\right)$.

$$F'(x)=0\Leftrightarrow e^{x^2}\left(x^3-4x\right)=0\Leftrightarrow x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\\x=2\end{array}\right.$$

$F'\left(x^2+x\right)=(2x+1).F'\left(x^2+x\right)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$(2x+1).F'\left(x^2+x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2} \\ x^2+x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ x^2+x=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right. \\ x^2+x=-2\ (ptvn) \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình $F'\left(x^2+x\right)=0$ có 5 nghiệm phân biệt. Do đó, hàm số $F\left(x^2+x\right)$ có 5 điểm cực trị.

**Câu 17.** **(Cụm 8 trường chuyên lần1)** Biết $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\mathrm{e}^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left(2x^2-5x+2\right)\mathrm{e}^{-x}$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị biểu thức $f\left(F(0)\right)$ bằng:

**A.** $\dfrac{-1}{\mathrm{e}}$. **B.** $3\mathrm{e}$. **C.** $20\mathrm{e}^2$. **D.** $9\mathrm{e}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

+ Tính $\left(F(x)\right)'=\left(\left(ax^2+bx+c\right)\mathrm{e}^{-x}\right)'=\left[-ax^2+(2a-b)x+b-c\right]\mathrm{e}^{-x}=\left(2x^2-5x+2\right)\mathrm{e}^{-x}$.

Suy ra $\left\{\begin{array}{l} a=-2 \\ 2a-b=-5 \\ b-c=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-2 \\ b=1 \\ c=-1 \end{array}\right.$ nên $F(x)=\left(-2x^2+x-1\right)\mathrm{e}^{-x}$.

+ Tính $F(0)=-1$ suy ra $f\left(F(0)\right)=f(-1)=9\mathrm{e}$.

**Câu 18.** **(HKII Kim Liên 2017-2018)** Cho hai hàm số $F(x)=\left(x^2+ax+b\right)\mathrm{e}^{x}$, $f(x)=\left(x^2+3x+4\right)\mathrm{e}^{x}$. Biết $a,b$ là các số thực để $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Tính $S=a+b$.

**A.** $S=-6$. **B.** $S=12$. **C.** $S=6$. **D.** $S=4$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Nhận xét: Bài này sẽ chặt chẽ hơn nếu thêm điều kiện $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Từ giả thiết ta có $F'(x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \left(2x+a\right)\mathrm{e}^{x}+\left(x^2+ax+b\right)\mathrm{e}^{x}=\left(x^2+3x+4\right)\mathrm{e}^{x},\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2+(2+a)x+a+b=x^2+3x+4,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Đồng nhất hai vế ta có $\left\{\begin{array}{l} a+2=3 \\ a+b=4 \end{array}\right.$.

Suy ra $S=a+b=4$.

**Câu 19.** **(THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $F(1)=\dfrac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $S=F(1)+F(2)+F(3)+\ ...\ +F(2019)$ bằng

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** $\frac{2019}{2020}$. **B.** $\frac{2019.2021}{2020}$. **C.** $2018\frac{1}{2020}$. **D.** $-\frac{2019}{2020}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $F(x)=\int\frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x$.

Suy ra: $F(x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+c$ mà $F(1)=\frac{1}{2}$ nên $c=1$. Hay $F(x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+1$.

Ta có: $S=F(1)+F(2)+F(3)+\ ...\ +F(2019)$

$S=\left(-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+1\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+1\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+1\right)+\ ...\ +\left(-\frac{1}{2019}+\frac{1}{2020}+1\right)$

$S=-1+\frac{1}{2020}+2019.1=2018+\frac{1}{2020}=2018\frac{1}{2020}$.

**Câu 20.** **(Chuyên Vinh Lần 3)**Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x-\cos x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y=F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

**A.** Vô số điểm. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn C**

Vì $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x-\cos x}{x^2}$ nên suy ra: $F'(x)=f(x)=\frac{x-\cos x}{x^2}$.

Ta có: $F'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x-\cos x}{x^2}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x-\cos x=0\\x\in[-1;1]\setminus\{0\}\end{cases}(1)$.

Xét hàm số $g(x)=x-\cos x$ trên $[-1;1]$, ta có: $g'(x)=1+\sin x\geq 0,\forall x\in[-1;1]$. Suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[-1;1]$. Vậy phương trình $g(x)=x-\cos x=0$ có nhiều nhất một nghiệm trên $[-1;1]$ $(2)$.

Mặt khác ta có: hàm số $g(x)=x-\cos x$ liên tục trên $(0;1)$ và $g(0)=0-\cos(0)=-1<0$, $g(1)=1-\cos(1)>0$ nên $g(0).g(1)<0$. Suy ra $\exists x_0\in(0;1)$ sao cho $g(x_0)=0$ $(3)$.

Từ $(1)$, $(2)$, $(3)$ suy ra: phương trình $F'(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x_0\neq 0$. Đồng thời vì $x_0$ là nghiệm bội lẻ nên $F'(x)$ đổi qua $x=x_0$.

Vậy đồ thị hàm số $y=F(x)$ có 1 điểm cực trị.

**Câu 21.** **(Chuyên Vinh Lần 3)** Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}x^2-1$. Hỏi đồ thị của hàm số $y=F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

**A.** Vô số điểm. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn D**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có $F'(x)=f(x)=\cos x+\frac{1}{2}x^2-1$.

$f'(x)=-\sin x+x$ ; $f''(x)=-\cos x+1\geq 0\ \ \forall x\in R$.

Suy ra hàm số $f'(x)$ đồng biến trên $R$, từ đó dẫn đến phương trình $f'(x)=0$ có nhiều nhất một nghiệm.

Mặt khác $f'(0)=0$ suy ra $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f'(x)=0$.

Do hàm số $f'(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;0);(0;+\infty)$ và vô nghiệm trên mỗi khoảng này nên dấu của $f'(x)$ không đổi trên mỗi khoảng trên.

Mà $f'(-1)<0;\ f'(1)>0$ suy ra $f'(x)<0\ \forall x\in(-\infty;0)$ và $f'(x)>0\ \forall x\in(0;+\infty)$.

Vậy hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Mà $f(0)=0$ nên phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=0$ hay phương trình $F'(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=0$.

Vậy đồ thị của hàm số $y=F(x)$ có duy nhất một điểm cực trị.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

# PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM ĐỔI BIẾN SỐ

## A – KIẾN THỨC CHUNG

### 1. Đổi biến dạng 1

Nếu hàm số f(x) liên tục thì đặt $x=\varphi(t)$. Trong đó $\varphi(t)$ cùng với đạo hàm của nó ($\varphi'(t)$ là những hàm số liên tục) thì ta được :

$\int f(x)dx=\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt=\int g(t)dt=G(t)+C$ .

### 1.1. Phương pháp chung

- *Bước 1:* Chọn t=$\varphi(x)$. Trong đó $\varphi(x)$ là hàm số mà ta chọn thích hợp .
- *Bước 2:* Tính vi phân hai vế : $dt=\varphi'(t)dt$ .
- *Bước 3:* Biểu thị : $f(x)dx=f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt=g(t)dt$ .
- *Bước 4:* Khi đó : $I=\int f(x)dx=\int g(t)dt=G(t)+C$

### 1.2. Các dấu hiệu đổi biến thường gặp

| Dấu hiệu | Cách chọn |
|---|---|
| Hàm số mẫu số có | $t$ là mẫu số |
| Hàm số : $f\left(x;\sqrt{\varphi(x)}\right)$ | $t=\sqrt{\varphi(x)}$ |
| Hàm $f(x)=\dfrac{a.\sin x+b.\cos x}{c.\sin x+d.\cos x+e}$ | $t=\tan\dfrac{x}{2};\left(\cos\dfrac{x}{2}\neq 0\right)$ |
| Hàm $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$ | Với : $x+a>0$ và $x+b>0$.<br>Đặt : $t=\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}$<br>Với $x+a<0$ và $x+b<0$.<br>Đặt : $t=\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b}$ |

### 2. Đổi biến dạng 2

Nếu : $\int f(x)dx=F(x)+C$ và với $u=\varphi(t)$ là hàm số có đạo hàm thì : $\int f(u)du=F(\varphi(t))+C$

### 2.1. Phương pháp chung

- *Bước 1:* Chọn $x=\varphi(t)$, trong đó $\varphi(t)$ là hàm số mà ta chọn thích hợp .
- *Bước 2:* Lấy vi phân hai vế : $dx=\varphi'(t)dt$
- *Bước 3:* Biến đổi : $f(x)dx=f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt=g(t)dt$
- *Bước 4:* Khi đó tính : $\int f(x)dx=\int g(t)dt=G(t)+C$ .

### 2.2. Các dấu hiệu đổi biến thường gặp

| Dấu hiệu | Cách chọn |
|---|---|
| $\sqrt{a^2-x^2}$ | Đặt $x=\lvert a\rvert\sin t$ ; với $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$. hoặc $x=\lvert a\rvert\cos t$ ; với $t\in[0;\pi]$. |
| $\sqrt{x^2-a^2}$ | Đặt $x=\dfrac{\lvert a\rvert}{\sin t}$.; với $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$ hoặc $x=\dfrac{\lvert a\rvert}{\cos t}$ |

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

| | |
|---|---|
| | với $t \in \left[0;\pi\right] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. |
| $\sqrt{a^2+x^2}$ | Đặt $x = \left|a\right| tant$ ; với $t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. hoặc $x = \left|a\right| \cot t$ với $t \in \left(0;\pi\right)$. |
| $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$. hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$. | Đặt $x = acos2t$ |
| $\sqrt{\left(x-a\right)\left(b-x\right)}$ | Đặt $x = a + (b-a)sin^2 t$ |
| $\frac{1}{a^2+x^2}$ | Đặt $x = atant$ ; với $t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. |

## B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Cho F(x) là một nguyên hàm của $f\left(x\right)=\frac{\tan x}{\cos x\sqrt{1+a\cos^2 x}}$, biết $F\left(0\right)=0$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$. Tính $F\left(\frac{\pi}{3}\right)-F\left(\frac{\pi}{4}\right)$?

**A.** $\sqrt{5}-\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{5}-1$. **C.** $\sqrt{3}+\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}-\sqrt{2}$

**Lời giải**

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{\cos x\sqrt{1+a\cos^2 x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{\cos^2 x\sqrt{\tan^2 x+1+a}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2\sqrt{\tan^2 x+1+a}}d\sqrt{\tan^2 x+1+a}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\tan^2\frac{\pi}{4}+1+a}-\sqrt{\tan^2 0+1+a}=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow \sqrt{a+2}=\sqrt{a+1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a+2=a+1+2\sqrt{a+1}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+5-2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \frac{3-\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{a+1}\Rightarrow a=1$$

Do đó $F\left(\frac{\pi}{3}\right)-F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x}{\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}}dx=\sqrt{\tan^2\frac{\pi}{3}+2}-\sqrt{\tan^2\frac{\pi}{4}+2}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

**Chọn A**

**Câu 2.** **(Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đăk Lăk)** Cho $\int\frac{\left(x-1\right)^{2017}}{\left(x+1\right)^{2019}}dx=\frac{1}{a}.\frac{\left(x-1\right)^b}{\left(x+1\right)^c}+C$ với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên. Giá trị $a+b+c$ bằng

**A.** 4.2018. **B.** 2.2018. **C.** 3.2018. **D.** 5.2018.

**Lời giải**

**Chọn A**

$I=\int\frac{(x-1)^{2017}}{(x+1)^{2019}}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2017}.\frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\frac{x-1}{x+1}\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{2}{(x+1)^2}\mathrm{d}x.$

Khi đó $I=\int t^{2017}\frac{\mathrm{d}t}{2}=\frac{1}{2}.\frac{t^{2018}}{2018}+C=\frac{1}{2.2018}.\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2018}+C=\frac{1}{2.2018}.\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2018}+C$

$=\frac{1}{2.2018}.\frac{(x-1)^{2018}}{(x+1)^{2018}}+C.$

Suy ra $a=2.2018$, $b=2018$, $c=2018$ nên $a+b+c=4.2018$.

**Câu 3.** Giả sử $\int\frac{(2x+3)\mathrm{d}x}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}=-\frac{1}{g(x)}+C$ ($C$ là hằng số).

Tính tổng các nghiệm của phương trình $g(x)=0$.

**A.** $-1$. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $-3$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1=\left[(x^2+3x)+1\right]^2.$

Đặt $t=x^2+3x$, khi đó $\mathrm{d}t=(2x+3)\mathrm{d}x.$

Tích phân ban đầu trở thành $\int\frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2}=-\frac{1}{t+1}+C.$

Trở lại biến $x$, ta có $\int\frac{(2x+3)\mathrm{d}x}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}=-\frac{1}{x^2+3x+1}+C.$

Vậy $g(x)=x^2+3x+1.$

$g(x)=0\Leftrightarrow x^2+3x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}.$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình bằng $-3$.

**Câu 4.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-2;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $(f(x))^2.f'(x)=3x^2+4x+2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ là

**A.** $2\sqrt[3]{16}$. **B.** $\sqrt[3]{18}$. **C.** $\sqrt[3]{16}$. **D.** $2\sqrt[3]{18}$.

**Lời giải**

thì ta tìm được $(f(x))^3=3\left(x^3+2x^2+2x+\frac{1}{3}\right)\Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{3\left(x^3+2x^2+2x+\frac{1}{3}\right)}=\sqrt[3]{g(x)}.$

$g(-2).g(1)=-11.16<0\Rightarrow$ Phương trình $g(x)=0$ có nghiệm trên $(-2;1)\Rightarrow$ Hàm số $f(x)=\sqrt[3]{g(x)}$ không có đạo hàm trên $[-2;1]$. Trái với giả thiết.

Do vậy mình đã sửa lại giả thiết của đề $f(0)=3$ để hợp lí hơn.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 5.** Hàm số nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

**A.** $F(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$. **B.** $F(x)=\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)+C$.

**C.** $F(x)=\sqrt{1+x^2}+C$. **D.** $F(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}+C$

**Lời giải**

Ta có bài toán gốc sau:

***Bài toán gốc:*** Chứng minh $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+c\left(a\in\mathbb{R}\right)$

Đặt $t=x+\sqrt{x^2+a}\Rightarrow dt=\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+a}}\right)dx\Leftrightarrow dt=\dfrac{x+\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}}dx\Leftrightarrow dt=\dfrac{tdx}{\sqrt{x^2+a}}$

$\Leftrightarrow\dfrac{dt}{t}=\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$

Vậy khi đó $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\dfrac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+c$ ( điều phải chứng minh).

Khi đó áp dụng công thức vừa chứng minh ta có

$F(x)=\int\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+c=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+c$.

**Chọn A**

**Câu 6.** **(HSG BẮC NINH NĂM 2018-2019)** Biết $F(x)$ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\sin 2x+\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$ và $F(0)=2$. Tính $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

**A.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}-8}{3}$ **B.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}+8}{3}$ **C.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{4\sqrt{2}-8}{3}$ **D.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{4\sqrt{2}+8}{3}$

**Lời giải**

Ta có:

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x+\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx=F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-F(0)$

Đặt $t=\sqrt{1+\sin x}\Rightarrow 2tdt=\cos xdx$

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x+\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\sin x+1}{\sqrt{1+\sin x}}\cos xdx$

$=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\dfrac{2(t^2-1)+1}{t}2tdt=2\int\limits_1^{\sqrt{2}}\left(2t^2-1\right)dt=2\left(\dfrac{2t^3}{3}-t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{3}$

$F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{3}+F(0)=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{3}+2=\dfrac{8+2\sqrt{2}}{3}$.

**Câu 7.** Biết $\int\left(\cos^2x-\sin^2x\right)^5.\sin 4xdx=-\dfrac{\cos^7 2x}{a}+C$. Với $a$ là số nguyên. Tìm $a$?

**A.** $a=6$. **B.** $a=12$. **C.** $a=7$. **D.** $a=14$.

**Lời giải**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Đặt $f(x)=\int\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)^5.\sin 4xdx$, Ta có:

$f(x)=\int\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)^5.\sin 4xdx=\int(\cos 2x)^5.2\sin 2x.\cos 2x$

$=2\int\cos^6 2x.\sin 2xdx$

Đặt $t=\cos 2x\Rightarrow dt=-2\sin 2xdx$

Vậy $F(x)=-\int t^6dt=\frac{-t^7}{7}+C=-\frac{\cos^7 2x}{7}+C$

**Chọn C**

**Câu 8.** Tìm $R=\int\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}dx$ ?

**A.** $R=-\frac{\tan 2t}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin 2t}{1-\sin 2t}\right|+C$ với $t=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$.

**B.** $R=-\frac{\tan 2t}{2}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin 2t}{1-\sin 2t}\right|+C$ với $t=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$.

**C.** $R=\frac{\tan 2t}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin 2t}{1-\sin 2t}\right|+C$ với $t=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$.

**D.** $R=\frac{\tan 2t}{2}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin 2t}{1-\sin 2t}\right|+C$ với $t=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$.

**Lời giải**

Đặt $x=2\cos 2t$ với $t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Ta có: $\begin{cases}dx=-4\sin 2t.dt\\ \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}=\sqrt{\frac{2-2\sin 2t}{2+2\cos 2t}}=\sqrt{\frac{4\sin^2 t}{4\cos^2 t}}=\frac{\sin t}{\cos t}\end{cases}$

$\Rightarrow R=-\int\frac{1}{4\cos^2 2t}.\frac{\sin t}{\cos t}.4\sin 2t.dt=-\int\frac{2\sin^2 t}{\cos^2 2t}dt=-\int\frac{1-\cos 2t}{\cos^2 2t}dt$

$\Leftrightarrow R=-\int\frac{1}{\cos^2 2t}dt+\int\frac{1}{\cos 2t}dt=-\frac{\tan 2t}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin 2t}{1-\sin 2t}\right|+C$

**Chọn A**

**Câu 9.** $\int\left(x^3+\sqrt{x+1}+\frac{1}{x^2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)dx$ có dạng $\frac{a}{4}x^4-\frac{1}{x}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}x+\frac{b}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3+C$, trong đó $a, b$ là hai số hữu tỉ. Giá trị $b, a$ lần lượt bằng:

**A.** 2; 1. **B.** 1; 1. **C.** $a,b\in\varnothing$ **D.** 1; 2.

**Lời giải**

**Cách 1:**

Theo đề, ta cần tìm $\int\left(x^3+\sqrt{x+1}+\frac{1}{x^2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)dx$. Sau đó, ta xác định giá trị của $a$.

Ta có:

$\int\left(x^3+\sqrt{x+1}+\frac{1}{x^2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)dx=\int\left(x^3+\frac{1}{x^2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)dx+\int\sqrt{x+1}dx.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Để tìm $\int\left(2x\sqrt{x^2+1}+x\ln x\right)dx$ ta đặt $I_1=\int\left(x^3+\frac{1}{x^2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)dx$ và $I_2=\int\sqrt{x+1}\,dx$ và tìm $I_1, I_2$.

*Tìm $I_1=\int\left(x^3+\frac{1}{x^2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)dx$.

$I_1=\int\left(x^3+\frac{1}{x^2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)dx=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{x}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}x+C_1$, trong đó $C_1$ là 1 hằng số.

*Tìm $I_2=\int\sqrt{x+1}\,dx$.

Dùng phương pháp đổi biến.

Đặt $t=\sqrt{x+1}, t\geq 0$ ta được $t^2=x+1,\ 2tdt=dx$.

Suy ra $I_2=\int\sqrt{x+1}\,dx=\int 2t^2dt=\frac{2}{3}t^3+C_2=\frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3+C_2$.

$$\int\left(x^3+\sqrt{x+1}+\frac{1}{x^2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)dx=I_1+I_2=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{x}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}x+C_1+\frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3+C_2=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{x}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}x$$

Suy ra để $\int\left(x^3+\sqrt{x+1}+\frac{1}{x^2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)dx$ có dạng $\frac{a}{4}x^4-\frac{1}{x}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}x+\frac{b}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3+C$ thì $a=1\in\mathbb{Q}, b=2\in\mathbb{Q}$.

Vậy đáp án chính xác là đáp án **D**

**Cách 2:** Dùng phương pháp loại trừ.

Ta thay giá trị của $a, b$ ở các đáp án vào $\frac{a}{4}x^4-\frac{1}{x}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}x+\frac{b}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3+C$. Sau đó, với mỗi $a, b$ ở các đáp án A, B, D ta lấy đạo hàm của $\frac{a}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+\frac{b}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$.

**Sai lầm thường gặp:**

**A.** Đáp án A sai.

Một số học sinh không chú ý đến thứ tự $b, a$ nên học sinh khoanh đáp án A và đã sai lầm.

**B.** Đáp án B sai.

Một số học sinh chỉ sai lầm như sau:

*Tìm $I_2=\int\sqrt{x+1}\,dx$.

Dùng phương pháp đổi biến.

Đặt $t=\sqrt{x+1}, t\geq 0$ ta được $t^2=x+1,\ tdt=dx$.

Suy ra $I_2=\int\sqrt{x+1}\,dx=\int t^2dt=\frac{1}{3}t^3+C_2=\frac{1}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3+C_2$.

$$\int\left(x^3+\sqrt{x+1}+\frac{1}{x^2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)dx=I_1+I_2=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{x}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}x+C_1+\frac{1}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3+C_2=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{x}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}x$$

Suy ra để $\int\left(x^3+\sqrt{x+1}+\frac{1}{x^2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)dx$ có dạng $\frac{a}{4}x^4-\frac{1}{x}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}x+\frac{b}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3+C$ thì $a=1\in\mathbb{Q}, b=1\in\mathbb{Q}$.

Thế là, học sinh khoanh đáp án B và đã sai lầm.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**C.** Đáp án C sai.

Một số học sinh chỉ sai lầm như sau:

*Tìm $I_2=\int\sqrt{x+1}\,dx$.

$I_2=\int\sqrt{x+1}\,dx=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+C_2$.

Suy ra $\int\left(x^3+\sqrt{x+1}+\frac{1}{x^2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)dx$ không thể có dạng $\frac{a}{4}x^4-\frac{1}{x}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}x+\frac{b}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3+C$, với $a,\ b\in\mathbb{Q}$.

Nên không tồn tại $a,b$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 10.** $\int\left((x+1)e^{x^2-5x+4}\cdot e^{7x-3}+\cos 2x\right)dx$ có dạng $\frac{a}{6}e^{(x+1)^2}+\frac{b}{2}\sin 2x+C$, trong đó $a,\ b$ là hai số hữu tỉ. Giá trị $a,\ b$ lần lượt bằng:

**A.** 3; 1. **B.** 1; 3. **C.** 3; 2. **D.** 6; 1.

**Lời giải**

**Cách 1:**

Theo đề, ta cần tìm $\int\left((x+1)e^{2(x+1)}+\cos 2x\right)dx$. Sau đó, ta xác định giá trị của $a$.

Ta có:

$\int\left((x+1)e^{x^2-5x+4}\cdot e^{7x-3}+\cos 2x\right)dx=\int\left((x+1)e^{(x^2-5x+4)+(7x-3)}+\cos 2x\right)dx$

$=\int(x+1)e^{(x+1)^2}dx+\int\cos 2x\,dx$

Để tìm $\int\left((x+1)e^{(x^2-5x+4)}\cdot e^{7x-3}+\cos 2x\right)dx$ ta đặt $I_1=\int(x+1)e^{(x+1)^2}dx$ và $I_2=\int\cos 2x\,dx$ và tìm $I_1,I_2$.

*Tìm $I_1=\int(x+1)e^{(x+1)^2}dx$.

Đặt $t=(x+1)^2;dt=2(x+1)(x+1)'dx=2(x+1)dx$.

$I_1=\int(x+1)e^{(x+1)^2}dx=\int\frac{1}{2}e^t dt=\frac{1}{2}e^t+C_1=\frac{1}{2}e^{(x+1)^2}+C_1$, trong đó $C_1$ là 1 hằng số.

*Tìm $I_2=\int\cos 2x\,dx$.

$I_2=\int\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x+C_2$.

$\int\left((x+1)e^{x^2-5x+4}\cdot e^{7x-3}+\cos 2x\right)dx=I_1+I_2=\frac{1}{2}e^{(x+1)^2}+C_1+\frac{1}{2}\sin 2x+C_2=\frac{1}{2}e^{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\sin 2x+C.$

Suy ra để $\int\left((x+1)e^{x^2-5x+4}\cdot e^{7x-3}+\cos 2x\right)dx$ có dạng $\frac{a}{6}e^{(x+1)^2}+\frac{b}{2}\sin 2x+C$ thì $a=3\in\mathbb{Q},\ b=1\in\mathbb{Q}$.

**Chọn A**

**Cách 2:**

Sử dụng phương pháp loại trừ bằng cách thay lần lượt các giá trị $a,\ b$ ở các đáp án vào $\frac{a}{6}e^{(x+1)^2}+\frac{b}{2}\sin 2x+C$ và lấy đạo hàm của chúng.

**Sai lầm thường gặp**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**B.** Đáp án B sai.
Một số học sinh sai lầm ở chỗ không để ý đến thứ tự sắp xếp $b, a$ nên khoanh đáp án B và đã sai lầm.
**C.** Đáp án C sai.
Một số học sinh chỉ sai lầm ở chỗ:
Tìm $I_2 = \int \cos 2x\,dx$.

$I_2 = \int \cos 2x\,dx = \sin 2x + C_2$.

$\int \left( (x+1)e^{x^2-5x+4} \cdot e^{7x-3} + \cos 2x \right) dx = I_1 + I_2 = \frac{1}{2}e^{(x+1)^2} + C_1 + \sin 2x + C_2 = \frac{1}{2}e^{(x+1)^2} + \sin 2x + C.$

Suy ra để $\int \left( (x+1)e^{x^2-5x+4} \cdot e^{7x-3} + \cos 2x \right) dx$ có dạng $\frac{a}{6}e^{(x+1)^2} + \frac{b}{2}\sin 2x + C$ thì $a = 3 \in \mathbb{Q}, b = 2 \in \mathbb{Q}$.

**D.** Đáp án D sai.
Một số học sinh chỉ sai lầm ở chỗ:
Tìm $I_1 = \int (x+1)e^{(x+1)^2}\,dx$.

Đặt $t = (x+1)^2; dt = (x+1)(x+1)'\,dx = (x+1)\,dx$.

$I_1 = \int (x+1)e^{(x+1)^2}\,dx = \int e^t dt = e^t + C_1 = e^{(x+1)^2} + C_1$, trong đó $C_1$ là 1 hằng số.

Học sinh tìm đúng $I_2 = \frac{1}{2}\sin 2x + C_2$ nên ta được:

$\int \left( (x+1)e^{x^2-5x+4} \cdot e^{7x-3} + \cos 2x \right) dx = I_1 + I_2 = e^{(x+1)^2} + C_1 + \frac{1}{2}\sin 2x + C_2 = e^{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\sin 2x + C.$

Suy ra để $\int \left( (x+1)e^{x^2-5x+4} \cdot e^{7x-3} + \cos 2x \right) dx$ có dạng $\frac{a}{6}e^{(x+1)^2} + \frac{b}{2}\sin 2x + C$ thì $a = 6 \in \mathbb{Q}, b = 1 \in \mathbb{Q}$.

**Câu 11.** Tìm $I = \int \frac{e^x(3x-2) + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right)} dx$ ?

**A.** $I = x + \ln\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right) + C$.
**B.** $I = x - \ln\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right) + C$.
**C.** $I = \ln\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right) + C$.
**D.** $I = \ln\left(e^x.\sqrt{x-1}-1\right) + C$.

**Lời giải**

$I = \int \frac{e^x(3x-2) + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right)} dx = \int \frac{\sqrt{x-1}\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right) + e^x(2x-1)}{\sqrt{x-1}\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right)} dx = \int dx + \int \frac{e^x(2x-1)}{\sqrt{x-1}\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right)} dx$

Đặt: $t = e^x.\sqrt{x-1}+1 \Rightarrow dt = \left( \frac{e^x}{2\sqrt{x-1}} + e^x\sqrt{x-1} \right) dx = \frac{e^x(2x-1)}{2\sqrt{x-1}} dx$

Vậy $\Rightarrow I = \int dx + \int \frac{e^x(2x-1)}{\sqrt{x-1}\left(e^x\sqrt{x-1}+1\right)} dx = x + \int \frac{1}{t} dt = x + \ln|t| + C = x + \ln\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right) + C$

**Chọn A**

**Câu 12.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)^x+2017x}{\ln\left[\left(e.x^2+e\right)^{x^2+1}\right]}$?

**A.** $\ln\left(x^2+1\right)+1008\ln\left[\ln\left(x^2+1\right)+1\right]$.

**B.** $\ln\left(x^2+1\right)+2016\ln\left[\ln\left(x^2+1\right)+1\right]$.

**C.** $\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+2016\ln\left[\ln\left(x^2+1\right)+1\right]$.

**D.** $\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+1008\ln\left[\ln\left(x^2+1\right)+1\right]$.

**Lời giải**

Đặt $I=\int\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)^x+2017x}{\ln\left[\left(e.x^2+e\right)^{x^2+1}\right]}dx$

+Ta có:

$$I=\int\frac{\ln\left(1+x^2\right)^x+2017x}{\ln\left[\left(e.x^2+e\right)^{x^2+1}\right]}dx=\int\frac{x\ln\left(1+x^2\right)+2017x}{\left(x^2+1\right)\left[\ln\left(1+x^2\right)+\ln e\right]}dx=\int\frac{x\left[\ln\left(1+x^2\right)+2017\right]}{\left(x^2+1\right)\left[\ln\left(1+x^2\right)+1\right]}dx$$

+ Đặt: $t=\ln\left(1+x^2\right)+1\Rightarrow dt=\dfrac{2x}{1+x^2}dx$

$$\Rightarrow I=\int\frac{t+2016}{2t}dt=\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{2016}{t}\right)dt=\frac{1}{2}t+1008\ln t+\mathrm{C}$$

$$\Leftrightarrow I=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2}+1008\ln\left[\ln\left(x^2+1\right)+1\right]+C=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+1008\ln\left[\ln\left(x^2+1\right)+1\right]+C$$

**Chọn D**

**Câu 13.** **(Chuyên KHTN)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^3 f(x)dx=8$ và $\int\limits_0^5 f(x)dx=4$. Tính $\int\limits_{-1}^{1} f(|4x-1|)dx$.

**A.** $\dfrac{9}{4}$. **B.** $\dfrac{11}{4}$. **C.** 3. **D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\int\limits_{-1}^{1} f(|4x-1|)dx=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{4}} f(|4x-1|)dx+\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} f(|4x-1|)dx$

$=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{4}} f(1-4x)dx+\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} f(4x-1)dx=I+J.$

+) Xét $I=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{4}} f(1-4x)dx.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Đặt $t=1-4x\Rightarrow dt=-4dx;$

Với $x=-1\Rightarrow t=5; x=\frac{1}{4}\Rightarrow t=0.$

$$I=\int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(1-4x)dx=\int_{5}^{0} f(t)(-\frac{1}{4}dt)=\frac{1}{4}\int_{0}^{5} f(t)dt=\frac{1}{4}\int_{0}^{5} f(x)dx=1.$$

+) Xét $J=\int_{\frac{1}{4}}^{1} f(4x-1)dx.$

Đặt $t=4x-1\Rightarrow dt=4dx;$

Với $x=1\Rightarrow t=3; x=\frac{1}{4}\Rightarrow t=0.$

$$J=\int_{\frac{1}{4}}^{1} f(4x-1)dx=\int_{0}^{3} f(t)(\frac{1}{4}dt)=\frac{1}{4}\int_{0}^{3} f(t)dt=\frac{1}{4}\int_{0}^{3} f(x)dx=2.$$

Vậy $\int_{-1}^{1} f(|4x-1|)dx=3.$

$$G=\int\frac{2x^2+(1+2\ln x).x+\ln^2 x}{\left(x^2+x\ln x\right)^2}dx$$

**Câu 14.** Tìm ?

**A.** $G=\frac{-1}{x}-\frac{1}{x+\ln x}+C.$ **B.** $G=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\ln x}+C.$

**C.** $G=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\ln x}+C.$ **D.** $G=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\ln x}+C.$

**Lời giải**

Ta có:

$$G=\int\frac{2x^2+(1+2\ln x).x+\ln^2 x}{\left(x^2+x\ln x\right)^2}dx=\int\frac{\left[x^2+2x\ln x+\ln^2 x\right]+x+x^2}{x^2\left(x+\ln x\right)^2}dx=\int\frac{\left(x+\ln x\right)^2+x(x+1)}{x^2\left(x+\ln x\right)^2}dx$$

$$\Leftrightarrow G=\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{x+1}{x\left(x+\ln x\right)^2}\right)dx=-\frac{1}{x}+\int\frac{x+1}{x\left(x+\ln x\right)^2}dx=\frac{-1}{x}+J\qquad\left(J=\int\frac{x+1}{x\left(x+\ln x\right)^2}dx\right)$$

Xét nguyên hàm: $J=\int\frac{x+1}{x\left(x+\ln x\right)^2}dx$

+ Đặt: $t=x+\ln x\Rightarrow dt=1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}$

$$\Rightarrow J=\int\frac{1}{t^2}dt=\frac{-1}{t}+C=\frac{-1}{x+\ln x}+C$$

Do đó: $G=\frac{-1}{x}+J=\frac{-1}{x}-\frac{1}{x+\ln x}+C$

**Chọn A**

**Câu 15.** Hàm số nào sau đây là nguyên hàm của $h(x)=\frac{1-\ln x}{x^{1-n}.\ln x.\left(x^n+\ln^n x\right)}$?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** $\frac{1}{n}\ln|x|-\frac{1}{n}\ln|x^n+\ln^n x|+2016$. **B.** $\frac{1}{n}\ln|x|+\frac{1}{n}\ln|x^n+\ln^n x|+2016$.

**C.** $-\frac{1}{n}\ln|x|+\frac{1}{n}\ln|x^n+\ln^n x|+2016$. **D.** $-\frac{1}{n}\ln|x|-\frac{1}{n}\ln|x^n+\ln^n x|-2016$.

**Lời giải**

Ta có:

$$L=\int\frac{1-\ln x}{x^{1-n}.\ln x.\left(x^n+\ln^n x\right)}dx=\int\frac{1-\ln x}{x^2}.\frac{1}{x^{-n-1}.\ln x.\left(x^n+\ln^n x\right)}dx=\int\frac{1-\ln x}{x^2}.\frac{1}{\frac{\ln x}{x}\left(1+\frac{\ln^n x}{x^n}\right)}dx$$

Đặt: $t=\frac{\ln x}{x}\Rightarrow dt=\frac{1-\ln x}{x^2}dx\Rightarrow L=\int\frac{dt}{t\left(t^n+1\right)}=\int\frac{t^{n-1}dt}{t^n\left(t^n+1\right)}$

+ Đặt $u=t^n+1\Rightarrow du=n.t^{n-1}dt$

$$\Rightarrow L=\frac{1}{n}\int\frac{du}{u(u-1)}=\frac{1}{n}\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u}\right)du=\frac{1}{n}.\left[\ln|u-1|-\ln|u|\right]+C=\frac{1}{n}.\ln\left|\frac{u-1}{u}\right|+C$$

$$\Leftrightarrow L=\frac{1}{n}.\ln\left|\frac{t^n}{t^n+1}\right|+C=\frac{1}{n}.\ln\left|\frac{\frac{\ln^n x}{x^n}}{\frac{\ln^n x}{x^n}+1}\right|+C=\frac{1}{n}.\ln\left|\frac{\ln^n x}{\ln^n x+x^n}\right|+C$$

**Chọn A**

**Câu 16.** **(Quỳnh Lưu Lần 1)** Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{e^x+1}$ và $F(0)=-\ln 2e$.

Tập nghiệm $S$ của phương trình $F(x)+\ln\left(e^x+1\right)=2$ là:

**A.** $S=\{3\}$. **B.** $S=\{2;3\}$. **C.** $S=\{-2;3\}$. **D.** $S=\{-3;3\}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $I=\int f(x)dx=\int\frac{1}{e^x+1}dx=\int\frac{e^x}{e^x(e^x+1)}dx$.

Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^x dx$. $I=\int\frac{dt}{t(t+1)}=\int(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1})dt=\ln t-\ln(t+1)+C=\ln e^x-\ln(e^x+1)+C.$

Khi đó: $F(x)=\ln e^x-\ln(e^x+1)+C$, $F(0)=-\ln 2e\Leftrightarrow-\ln 2+C=-\ln 2-1\Leftrightarrow C=-1$

Do đó: $F(x)=\ln e^x-\ln(e^x+1)-1$.

$F(x)+\ln\left(e^x+1\right)=2\Leftrightarrow\ln e^x-\ln(e^x+1)-1+\ln\left(e^x+1\right)=2\Leftrightarrow\ln e^x=3\Leftrightarrow x=3.$

**Câu 17.** Khi tính nguyên hàm $\int\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx$ người ta đặt $t=g(x)$ (một hàm biểu diễn theo biến x) thì nguyên hàm trở thành $\int 2dt$. Biết $g(4)=\frac{3}{\sqrt{5}}$, giá trị của $g(0)+g(1)$ là:

**A.** $\frac{3+\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{1+\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{2+\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{2+3\sqrt{6}}{2}$.

**Lời giải**

Đối với bài này HS cần pahir nắm được kĩ thuật biến đổi khi tính nguyên hàm. Hs cần phải dự đoán phép đặt ẩn phụ, đầu tiên ta thấy nguyên hàm có thể biến đổi thành:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$\int \frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}}dx$$

Do đó ta đặt:

$$t = \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}} \Rightarrow dt = \frac{dx}{2(x+1)^2\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}} \Leftrightarrow 2dt = \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}}$$

Vì vậy suy ra $\int \frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx = \int 2dt$

Tuy nhiên đây là **Lời giải** sai, ta có thể thấy khi đặt

$$t = \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}} + C \Rightarrow dt = \frac{dx}{2(x+1)^2\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}} \Leftrightarrow 2dt = \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}}$$

Với C là hằng số, kết quả không thay đổi. Vì vậy chính xác ở đây là:

$t = \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}} + C = g(x)$. Theo đề $g(4) = \frac{3}{\sqrt{5}}$ n33n suy ra C=0.

Cuối cùng ta được $g(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}$ vì vậy $g(0) + g(1) = \frac{2+\sqrt{6}}{2}$

**Chọn C**

Chú ý: Bài toán này hoàn toàn có thể dùng MTCT để chọn kết quả, Ta có:

$$\int 2dt = \int \frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx \Rightarrow t = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx$$

Do đó $g(x)$ là nguyên hàm của $\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}$. Suy ra:

$$g(0) - g(4) = \int_4^0 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx \Rightarrow g(0) = \int_4^0 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx + g(4)$$

Và:

$$g(1) - g(4) = \int_4^1 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx \Rightarrow g(1) = \int_4^1 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx + g(4)$$

Sử dụng MTCT bấm:

$$\int_4^0 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx + g(4) + \int_4^1 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx + g(4)$$

**Câu 18.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-2;1]$ thỏa mãn $f(0) = 3$ và $(f(x))^2 . f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ là

**A.** $2\sqrt[3]{42}$. **B.** $2\sqrt[3]{15}$. **C.** $\sqrt[3]{42}$. **D.** $\sqrt[3]{15}$.

**Lời giải**

Ta có: $(f(x))^2 . f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$ (*)

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Lấy nguyên hàm 2 vế của phương trình trên ta được

$\int \left(f(x)\right)^2 . f'(x)dx = \int \left(3x^2+4x+2\right)dx \Leftrightarrow \int \left(f(x)\right)^2 d\left(f(x)\right) = x^3+2x^2+2x+C$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(f(x)\right)^3}{3} = x^3+2x^2+2x+C \Leftrightarrow \left(f(x)\right)^3 = 3\left(x^3+2x^2+2x+C\right)$ (1)

Theo đề bài $f(0)=3$ nên từ (1) ta có $\left(f(0)\right)^3 = 3\left(0^3+2.0^2+2.0+C\right) \Leftrightarrow 27 = 3C \Leftrightarrow C = 9$

$\Rightarrow \left(f(x)\right)^3 = 3\left(x^3+2x^2+2x+9\right) \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{3\left(x^3+2x^2+2x+9\right)}.$

Tiếp theo chúng ta tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$.

**CÁCH 1:**

Vì $x^3+2x^2+2x+9 = x^2(x+2)+2(x+2)+5 > 0, \forall x \in [-2;1]$ nên $f(x)$ có đạo hàm trên $[-2;1]$

và $f'(x) = \dfrac{3\left(3x^2+4x+2\right)}{3\sqrt[3]{\left[3\left(x^3+2x^2+2x+9\right)\right]^2}} = \dfrac{3x^2+4x+2}{\sqrt[3]{\left[3\left(x^3+2x^2+2x+9\right)\right]^2}} > 0, \ \forall x \in [-2;1].$

$\Rightarrow$ Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $[-2;1] \Rightarrow \max\limits_{[-2;1]} f(x) = f(1) = \sqrt[3]{42}.$

Vậy $\max\limits_{[-2;1]} f(x) = f(1) = \sqrt[3]{42}$.

**CÁCH 2:**

$f(x) = \sqrt[3]{3\left(x^3+2x^2+2x+9\right)} = \sqrt[3]{3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^3 + 2\left(x+\dfrac{2}{3}\right) + \dfrac{223}{9}}.$

Vì các hàm số $y = 3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^3$, $y = 2\left(x+\dfrac{2}{3}\right)+\dfrac{223}{9}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số

$y = \sqrt[3]{3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^3 + 2\left(x+\dfrac{2}{3}\right) + \dfrac{223}{9}}$ cũng đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó, hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $[-2;1]$.

Vậy $\max\limits_{[-2;1]} f(x) = f(1) = \sqrt[3]{42}$.

**Câu 19.** **(CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2018-2019 LẦN 1)** Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0;\pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

**A.** $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}-4$ **B.** $F\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ **D.** $F\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = 3-\sqrt{3}$

**Lời giải**

Ta có:

$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \dfrac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = 2\int \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x - \int \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$

$= 2\int \dfrac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin^2 x} - \int \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\dfrac{2}{\sin x} + \cot x + C$

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$ nên hàm số $F(x)$ có công thức dạng $F(x)=-\dfrac{2}{\sin x}+\cot x+C$ với mọi $x\in(0;\pi)$.

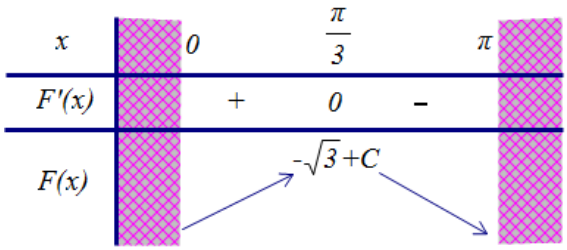
Xét hàm số $F(x)=-\dfrac{2}{\sin x}+\cot x+C$ xác định và liên tục trên $(0;\pi)$.

$F'(x)=f(x)=\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$

Xét $F'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}=0\Leftrightarrow\cos x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Trên khoảng $(0;\pi)$, phương trình $F'(x)=0$ có một nghiệm $x=\dfrac{\pi}{3}$

Bảng biến thiên:




$\max\limits_{(0;\pi)}F(x)=F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}+C$

Theo đề bài ta có, $-\sqrt{3}+C=\sqrt{3}\Leftrightarrow C=2\sqrt{3}$.

Do đó, $F(x)=-\dfrac{2}{\sin x}+\cot x+2\sqrt{3}$.

**Câu 20.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f(0)=\sqrt{3}$ và $f(x).f'(x)=\cos x.\sqrt{1+f^2(x)}$, $\forall x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất $m$ và giá trị lớn nhất $M$ của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

**A.** $m=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$, $M=2\sqrt{2}$. **B.** $m=\dfrac{5}{2}$, $M=3$.

**C.** $m=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $M=\sqrt{3}$. **D.** $m=\sqrt{3}$, $M=2\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Từ giả thiết $f(x).f'(x)=\cos x.\sqrt{1+f^2(x)}$

$\Rightarrow\dfrac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\cos x\Rightarrow\int\dfrac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}\mathrm{d}x=\sin x+C$

Đặt $t=\sqrt{1+f^2(x)}\Rightarrow t^2=1+f^2(x)\Rightarrow t\mathrm{d}t=f(x)f'(x)\mathrm{d}x$.

Thay vào ta được $\int\mathrm{d}t=\sin x+C\Rightarrow t=\sin x+C\Rightarrow\sqrt{1+f^2(x)}=\sin x+C$.

Do $f(0)=\sqrt{3}\Rightarrow C=2$.

Vậy $\sqrt{1+f^2(x)}=\sin x+2\Rightarrow f^2(x)=\sin^2 x+4\sin x+3$

$\Rightarrow f(x)=\sqrt{\sin^2 x+4\sin x+3}$, vì hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}\le\sin x\le 1$, xét hàm số $g(t)=t^2+4t+3$ có hoành độ đỉnh $t=-2$ loại.

Suy ra $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]}g(t)=g(1)=8$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]}g(t)=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{21}{4}$.

Suy ra $\max\limits_{\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]}f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sqrt{2}$, $\min\limits_{\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]}f(x)=g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

# PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

## A – KIẾN THỨC CHUNG

### 1. Phương pháp nguyên hàm từng phần

Nếu u(x) , v(x) là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K:

$$\int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int v(x).u'(x)dx$$

Hay $\int udv = uv - \int vdu$ ( với $du = u'(x)dx, dv = v'(x)dx$ )

### 1.1. Phương pháp chung

- *Bước 1:* Ta biến đổi tích phân ban đầu về dạng : $I = \int f(x)dx = \int f_1(x).f_2(x)dx$
- *Bước 2:* Đặt : $\begin{cases} u = f_1(x) \\ dv = f_2(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = f'_1(x)dx \\ v = \int f_2(x)dx \end{cases}$
- *Bước 3:* Khi đó : $\int u.dv = u.v - \int v.du$

### 2. Các dạng thường gặp

### 2.1. Dạng 1

$$I = \int P(x)\begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \\ e^x \end{Bmatrix}.dx \text{ . Đặt } \begin{cases} u = P(x) \\ dv = \begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \\ e^x \end{Bmatrix}.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'.du = P'(x)dx \\ v = \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \\ e^x \end{Bmatrix} \end{cases}$$

Vậy: $I = P(x)\begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \\ e^x \end{Bmatrix} - \int \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \\ e^x \end{Bmatrix}.P'(x)dx$

### 2.2. Dạng 2

$$I = \int P(x).\ln x dx \text{ . Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = P(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \int P(x)dx = Q(x) \end{cases}$$

Vậy $I = \ln x.Q(x) = \int Q(x).\frac{1}{x}dx$

### 2.3. Dạng 3

$$I = \int e^x \begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix} dx \text{ . Đặt } \begin{cases} u = e^x \\ dv = \begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix}.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{Bmatrix} \end{cases}$$

Vậy $I =$ $I = e^x \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{Bmatrix} - \int \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{Bmatrix} e^x dx$

Bằng phương pháp tương tự ta tính được $\int \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{Bmatrix} e^x dx$ sau đó thay vào $I$

## B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1:** **(ĐH Vinh Lần 1)** Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\tan^2 x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ là

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** $F(x)=x\tan x+\ln(\cos x)-\frac{x^2}{2}+C.$ **B.** $F(x)=-x\tan x+\ln(\cos x)-\frac{x^2}{2}+C.$

**C.** $F(x)=x\tan x-\ln(\cos x)-\frac{x^2}{2}+C.$ **D.** $F(x)=x\tan x-\ln|\cos x|-\frac{x^2}{2}+C.$

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi

$F(x)=\int x\tan^2 x\,dx=\int x(\tan^2 x+1-1)\,dx=\int x(\tan^2 x+1)\,dx-\int x\,dx=\int\frac{x}{\cos^2 x}dx-\int x\,dx.$

Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=\frac{1}{\cos^2 x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=\tan x\end{cases}$

Khi đó: $F(x)=\int\frac{x}{\cos^2 x}dx-\int x\,dx=x\tan x-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx-\frac{x^2}{2}$

$=x\tan x+\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}-\frac{x^2}{2}=x\tan x+\ln|\cos x|-\frac{x^2}{2}+C.$

Vì $x\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ nên $\cos x>0$, suy ra $\ln|\cos x|=\ln(\cos x)$.

Vậy: $F(x)=x\tan x+\ln(\cos x)-\frac{x^2}{2}+C.$

**Câu 2:** Cho $f(x)=\frac{x}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $xf'(x)$ thỏa mãn $F(0)=0$. Biết $a\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\tan a=3$. Tính $F(a)-10a^2+3a$.

**A.** $-\frac{1}{2}\ln 10$. **B.** $-\frac{1}{4}\ln 10$. **C.** $\frac{1}{2}\ln 10$. **D.** $\ln 10$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $F(x)=\int xf'(x)dx=\int x\,df(x)=xf(x)-\int f(x)dx$

Ta lại có: $\int f(x)dx=\int\frac{x}{\cos^2 x}dx=\int x\,d(\tan x)=x\tan x-\int\tan x\,dx=x\tan x-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx$

$=x\tan x+\int\frac{1}{\cos x}d(\cos x)=x\tan x+\ln|\cos x|+C\Rightarrow F(x)=xf(x)-x\tan x-\ln|\cos x|+C$

Lại có: $F(0)=0\Rightarrow C=0$, do đó: $F(x)=xf(x)-x\tan x-\ln|\cos x|$.

$\Rightarrow F(a)=af(a)-a\tan a-\ln|\cos a|$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Khi đó $f(a)=\dfrac{a}{\cos^2 a}=a\left(1+\tan^2 a\right)=10a$ và $\dfrac{1}{\cos^2 a}=1+\tan^2 a=10\Leftrightarrow\cos^2 a=\dfrac{1}{10}$

$\Leftrightarrow|\cos a|=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Vậy $F(a)-10a^2+3a=10a^2-3a-\ln\left|\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right|-10a^2+3a=\dfrac{1}{2}\ln 10$.

**Câu 3:** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}$ và $F(0)=2$. Hãy tính $F(-1)$.

**A.** $6-\dfrac{15}{\mathrm{e}}$. **B.** $4-\dfrac{10}{\mathrm{e}}$. **C.** $\dfrac{15}{\mathrm{e}}-4$. **D.** $\dfrac{10}{\mathrm{e}}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $I=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$.

Đặt $\sqrt[3]{x}=t\Rightarrow x=t^3\Rightarrow\mathrm{d}x=3t^2\mathrm{d}t$ khi đó $I=\int\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x=3\int\mathrm{e}^t t^2\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases}t^2=u\\ \mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\mathrm{d}v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}u\\ \mathrm{e}^t=v\end{cases}\Rightarrow I=3\left(\mathrm{e}^t t^2-2\int\mathrm{e}^t t\mathrm{d}t\right)=3\mathrm{e}^t t^2-6\int\mathrm{e}^t t\mathrm{d}t$.

Tính $\int\mathrm{e}^t t\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases}t=u\\ \mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\mathrm{d}v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}t=\mathrm{d}u\\ \mathrm{e}^t=v\end{cases}\Rightarrow\int\mathrm{e}^t t\mathrm{d}t=t\mathrm{e}^t-\int\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=t\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^t$.

Vậy $\Rightarrow I=3\mathrm{e}^t t^2-6\left(\mathrm{e}^t t-\mathrm{e}^t\right)+C\Rightarrow F(x)=3\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{x^2}-6\left(\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{x}-\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\right)+C$.

Theo giả thiết ta có $F(0)=2\Rightarrow C=-4\Rightarrow F(x)=3\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{x^2}-6\left(\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{x}-\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\right)-4$

$\Rightarrow F(-1)=\dfrac{15}{\mathrm{e}}-4$.

**Câu 4:** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x}\ln x$.

**A.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-2)+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-2)+C$.

**C.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-1)+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-2)+C$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$I=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\sqrt{x}\ln x.\mathrm{d}x$.

Đặt: $t=\sqrt{x}\Rightarrow\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow I=2\int t^2\ln t^2.\mathrm{d}t=4\int t^2\ln t.\mathrm{d}t$.

Đặt: $\begin{cases} u = \ln t \\ \mathrm{d}v = t^2 \mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{t}\mathrm{d}t \\ v = \dfrac{t^3}{3} \end{cases}$.

$\Rightarrow I = 2\left(\frac{1}{3}t^3 \ln t - \frac{1}{3}\int t^2 \mathrm{d}t\right) = 2\left(\frac{1}{3}t^3 \ln t - \frac{1}{9}t^3 + C\right) = \frac{2}{9}t^3(3\ln t - 1) + C$

$= \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}\left(3\ln\sqrt{x} - 1\right) + C$

$= \frac{1}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2) + C$.

**Câu 5:** Tìm $H = \int \frac{x^2 dx}{(x\sin x + \cos x)^2}$ ?

**A.** $H = \frac{x}{\cos x(x\sin x + \cos x)} + \tan x + C$.

**B.** $H = \frac{x}{\cos x(x\sin x + \cos x)} - \tan x + C$.

**C.** $H = \frac{-x}{\cos x(x\sin x + \cos x)} + \tan x + C$.

**D.** $H = \frac{-x}{\cos x(x\sin x + \cos x)} - \tan x + C$.

**Lời giải**

Ta có: $H = \int \frac{x^2}{(x\sin x + \cos x)^2} dx = \int \frac{x\cos x}{(x\sin x + \cos x)^2} \cdot \frac{x}{\cos x} dx$

Đặt $\begin{cases} u = \dfrac{x}{\cos x} \\ dv = \dfrac{x\cos x}{(x\sin x + \cos x)^2} dx = \dfrac{d(x\sin x + \cos x)}{(x\sin x + \cos x)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{x\sin x + \cos x}{\cos^2 x} dx \\ v = -\dfrac{1}{x\sin x + \cos x} \end{cases}$

$\Rightarrow H = -\frac{x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x\sin x + \cos x} + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{-x}{\cos x(x\sin x + \cos x)} + \tan x + C$

**Chọn C**

**Câu 6:** $\int \left(2x\sqrt{x^2+1} + x\ln x\right) dx$ có dạng $\frac{a}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 + \frac{b}{6}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$, trong đó $a, b$ là hai số hữu tỉ. Giá trị $a$ bằng:

**A.** 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Không tồn tại.

**Lời giải**

**Cách 1:**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Theo đề, ta cần tìm $\int\left(2x\sqrt{x^2+1}+x\ln x\right)dx$. Sau đó, ta xác định giá trị của $a$.

Ta có:

$\int\left(2x\sqrt{x^2+1}+x\ln x\right)dx=\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx+\int x\ln x\,dx$.

Để tìm $\int\left(2x\sqrt{x^2+1}+x\ln x\right)dx$ ta đặt $I_1=\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$ và $I_2=\int x\ln x\,dx$ và tìm $I_1,I_2$.

* $I_1=\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$.

Dùng phương pháp đổi biến.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1},\ t\ge 1$ ta được $t^2=x^2+1,\ xdx=tdt$.

Suy ra:

$I_1=\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int 2t^2dt=\frac{2}{3}t^3+C_1=\frac{2}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+C_1$, trong đó $C_1$ là 1 hằng số.

* $I_2=\int x\ln x\,dx$.

Dùng phương pháp nguyên hàm từng phần.

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x}dx\\ v=\frac{1}{2}x^2\end{cases}$, ta được:

$I_2=\int x\ln x\,dx=\int udv=uv-\int vdu$

$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C_2$.

$\int\left(2x\sqrt{x^2+1}+x\ln x\right)dx=I_1+I_2=\frac{2}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+C_1+\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C_2$

$=\frac{2}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$.

Suy ra để $\int\left(2x\sqrt{x^2+1}+x\ln x\right)dx$ có dạng $\frac{a}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+\frac{b}{6}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$ thì $a=2\in\mathbb{Q},\ b=3\in\mathbb{Q}$.

**Chọn B**

**Câu 7:** Biết $F(x)=a\ln x+\left(b+\frac{c}{x}\right)\ln(2x+3)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\ln(2x+3)}{x^2}$. Tính $S=a+b+c$.

**A.** $S=-1$. **B.** $S=\frac{1}{3}$. **C.** $S=\frac{7}{3}$. **D.** $S=-\frac{4}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\ln(2x+3)}{x^2}$ là:

$$\int f(x)dx=\int\frac{\ln(2x+3)}{x^2}dx=-\frac{1}{x}.\ln(2x+3)-\int\frac{-1}{x}\frac{2}{2x+3}dx=-\frac{1}{x}.\ln(2x+3)-\int\frac{-1}{x}\frac{2}{2x+3}dx$$

$$=-\frac{\ln(2x+3)}{x}+\frac{2}{3}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{2x+3}\right)dx=-\frac{\ln(2x+3)}{x}+\frac{2}{3}\ln x-\frac{2}{3}\ln(2x+3)+C$$

$$=\frac{2}{3}\ln x+\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{x}\right)\ln(2x+3)+C$$

$\Rightarrow F(x)=a\ln x+\left(b+\dfrac{c}{x}\right)\ln(2x+3)=-\dfrac{\ln(2x+3)}{x}+\dfrac{2}{3}\ln x-\dfrac{2}{3}\ln(2x+3)+C$, với $C=0$,

$$\Rightarrow a+b+c=\frac{2}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)+(-1)=-1$$

**Câu 8:** **(Trần Đại Nghĩa)** Cho $I=\int_1^2\dfrac{x+\ln x}{(x+1)^2}dx=\dfrac{a}{b}\ln 2-\dfrac{1}{c}$ với $a,b,c$ là các số nguyên dương và các phân số là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $S=\dfrac{a+b}{c}$.

**A.** $S=\dfrac{5}{6}$. **B.** $S=\dfrac{1}{3}$. **C.** $S=\dfrac{2}{3}$. **D.** $S=\dfrac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $I=\int_1^2\dfrac{x+\ln x}{(x+1)^2}dx=\int_1^2\dfrac{x}{(x+1)^2}dx+\int_1^2\dfrac{\ln x}{(x+1)^2}dx$.

Xét $I_1=\int_1^2\dfrac{x}{(x+1)^2}dx$.

Đặt $t=x+1\Rightarrow dt=dx$.

$$I_1=\int_2^3\frac{t-1}{t^2}dt=\int_2^3\frac{1}{t}dt-\int_2^3\frac{1}{t^2}dt=\ln|t|\Big|_2^3+\frac{1}{t}\Big|_2^3=\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{6}.$$

Xét $I_2=\int_1^2\dfrac{\ln x}{(x+1)^2}dx=-\dfrac{1}{x+1}\ln x\Big|_1^2+\int_1^2\dfrac{1}{x(x+1)}dx=-\dfrac{1}{3}\ln 2+\int_1^2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)dx$.

$$I_2=-\frac{1}{3}\ln 2+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Big|_1^2=-\frac{1}{3}\ln 2+\ln\frac{4}{3}.$$

Do đó $I=\ln\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{3}\ln 2+\ln\dfrac{4}{3}=\dfrac{2}{3}\ln 2-\dfrac{1}{6}$.

$$\Rightarrow S=\frac{a+b}{c}=\frac{2+3}{6}=\frac{5}{6}.$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 9:** **(Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2)** Họ nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{\left(2x^2+x\right)\ln x+1}{x}$ là

**A.** $\left(x^2+x+1\right)\ln x-\dfrac{x^2}{2}+x+C$.

**B.** $\left(x^2+x-1\right)\ln x+\dfrac{x^2}{2}-x+C$.

**C.** $\left(x^2+x+1\right)\ln x-\dfrac{x^2}{2}-x+C$.

**D.** $\left(x^2+x-1\right)\ln x-\dfrac{x^2}{2}+x+C$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $\int\dfrac{\left(2x^2+x\right)\ln x+1}{x}\mathrm{d}x=\int\left(2x+1\right)\ln x\,\mathrm{d}x+\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=I_1+I_2$.

$I_1=\int\left(2x+1\right)\ln x\,\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=\left(2x+1\right)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ v=x^2+x\end{cases}$.

$I_1=\left(x^2+x\right)\ln x-\int\left(x^2+x\right)\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\left(x^2+x\right)\ln x-\int\left(x+1\right)\mathrm{d}x$

$=\left(x^2+x\right)\ln x-\dfrac{x^2}{2}-x+C_1$.

$I_2=\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x+C_2$.

$\int\dfrac{\left(2x^2+x\right)\ln x+1}{x}\mathrm{d}x=I_1+I_2$

$=\left(x^2+x\right)\ln x-\dfrac{x^2}{2}-x+C_1+\ln x+C_2=\left(x^2+x+1\right)\ln x-\dfrac{x^2}{2}-x+C$.

**Câu 10:** Tìm nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=x^3\ln\left(\dfrac{4-x^2}{4+x^2}\right)$?

**A.** $x^4\ln\left(\dfrac{4-x^2}{4+x^2}\right)-2x^2$.

**B.** $\left(\dfrac{x^4-16}{4}\right)\ln\left(\dfrac{4-x^2}{4+x^2}\right)-2x^2$.

**C.** $x^4\ln\left(\dfrac{4-x^2}{4+x^2}\right)+2x^2$.

**D.** $\left(\dfrac{x^4-16}{4}\right)\ln\left(\dfrac{4-x^2}{4+x^2}\right)+2x^2$.

**Lời giải**

Đặt: $\begin{cases}u=\ln\left(\dfrac{4-x^2}{4+x^2}\right)\\ dv=x^3dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{16x}{x^4-16}\\ v=\dfrac{x^4}{4}-4=\dfrac{x^4-16}{4}\end{cases}$

$\Rightarrow\int x^4\ln\left(\dfrac{4-x^2}{4+x^2}\right)dx=\left(\dfrac{x^4-16}{4}\right)\ln\left(\dfrac{4-x^2}{4+x^2}\right)-\int 4xdx=\left(\dfrac{x^4-16}{4}\right)\ln\left(\dfrac{4-x^2}{4+x^2}\right)-2x^2+C$

**Chọn B**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Cách 2:**Dùng phương pháp loại trừ.

Ta thay giá trị của $a$ ở các đáp án vào $\frac{a}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+\frac{b}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$. Sau đó, với mỗi $a$ của các đáp án ta lấy đạo hàm của $\frac{a}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+\frac{b}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$.

Không khuyến khích cách này vì việc tìm đạo hàm của hàm hợp phức tạp và có 4 đáp án nên việc tìm đạo hàm trở nên khó khăn.

**Sai lầm thường gặp:**

**A.** Đáp án A sai.

Một số học sinh không đọc kĩ đề nên chỉ tìm giá trị của $b$. Học sinh khoanh đáp án A và đã sai lầm.

**C.** Đáp án C sai.

Một số học sinh chỉ sai lầm như sau:

$*\ I_1=\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$.

Dùng phương pháp đổi biến.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1},\ t\ge 1$ ta được $t^2=x^2+1,\ tdt=2xdx$.

Suy ra:

$I_1=\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int t^2dt=\frac{1}{3}t^3+C_1=\frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+C_1$, trong đó $C_1$ là 1 hằng số.

Học sinh tìm đúng $I_2=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C_2$ theo phân tích ở trên.

$$\int\left(2x\sqrt{x^2+1}+x\ln x\right)dx=I_1+I_2=\frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+C_1+\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C_2$$

$$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$$

Suy ra để $\int\left(2x\sqrt{x^2+1}+x\ln x\right)dx$ có dạng $\frac{a}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+\frac{b}{6}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$ thì $a=1,\ b=3$.

Thế là, học sinh khoanh đáp án C và đã sai lầm.

**D.** Đáp án D sai.

Một số học sinh chỉ sai lầm như sau:

$*\ I_1=\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$.

Dùng phương pháp đổi biến.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1},\ t\ge 1$ ta được $t^2=x^2+1,\ tdt=2xdx$.

Suy ra:

$I_1=\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int t^2dt=\frac{1}{3}t^3+C_1=\frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+C_1$, trong đó $C_1$ là 1 hằng số.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Học sinh tìm đúng $I_2=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C_2$ theo phân tích ở trên.

$\int\left(2x\sqrt{x^2+1}+x\ln x\right)dx=I_1+I_2=\frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+C_1+\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C_2$

$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$.

Suy ra để $\int\left(2x\sqrt{x^2+1}+x\ln x\right)dx$ có dạng $\frac{a}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+\frac{b}{6}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$ thì $a=1\in\mathbb{Q}$, $b=\frac{1}{3}\notin\mathbb{Q}$.

Thế là, học sinh khoanh đáp án D và đã sai lầm do tính sai giá trị của $b$.

**Câu 11:** **(LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019)** Biết $\int f(x)\mathrm{d}x=3x\cos(2x-5)+C$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

**A.** $\int f(3x)\mathrm{d}x=3x\cos(6x-5)+C$ **B.** $\int f(3x)\mathrm{d}x=9x\cos(6x-5)+C$

**C.** $\int f(3x)\mathrm{d}x=9x\cos(2x-5)+C$ **D.** $\int f(3x)\mathrm{d}x=3x\cos(2x-5)+C$

**Lời giải**

**Cách 1 :**

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=3x\cos(2x-5)+C$

$\Rightarrow\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=\left(3x\cos(2x-5)+C\right)'$

$\Rightarrow f(x)=3\cos(2x-5)-6x\sin(2x-5)$

$\Rightarrow f(3x)=3\cos(6x-5)-18x\sin(6x-5)$

Xét $\int f(3x)\mathrm{d}x=\int\left(3\cos(6x-5)-18x\sin(6x-5)\right)\mathrm{d}x$

$=\int 3\cos(6x-5)\mathrm{d}x-\int 18x\sin(6x-5)\mathrm{d}x\ (1)$.

Xét $I=\int 18x\sin(6x-5)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}3x=u\\6\sin(6x-5)\mathrm{d}x=\mathrm{d}v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3\mathrm{d}x=\mathrm{d}u\\-\cos(6x-5)=v\end{cases}$.

$I=-3x\cos(6x-5)+3\int\cos(6x-5)\mathrm{d}x$, thay vào $(1)$ ta được $\int f(3x)\mathrm{d}x=3x\cos(6x-5)+C$.

**Cách 2:**

Đặt $x=3t\Rightarrow\mathrm{d}x=3\mathrm{d}t$.

Khi đó: $\int f(x)\mathrm{d}x=3x\cos(2x-5)+C\Leftrightarrow 3\int f(3t)\mathrm{d}t=3.(3t)\cos(2.3t-5)+C$

$\Leftrightarrow\int f(3t)\mathrm{d}t=3t\cos(6t-5)+C\Leftrightarrow\int f(3x)\mathrm{d}x=3x\cos(6x-5)+C$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 12:** **(Ngô Quyền Hà Nội)** Cho $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).e^{2x}$. Khi đó $\int f'(x).e^{2x}\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $-x^2+2x+C$. **B.** $-x^2+x+C$. **C.** $2x^2-2x+C$. **D.** $-2x^2+2x+C$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Do $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).e^{2x}$ nên $f(x).e^{2x}=F'(x)=2x$.

Xét $\int f'(x).e^{2x}\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=e^{2x}\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2e^{2x}\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$ ta có:

$\int f'(x).e^{2x}\mathrm{d}x=f(x).e^{2x}-2\int f(x).e^{2x}\mathrm{d}x=-2x^2+2x+C$.

**Câu 13:** **(Chuyên Quốc Học Huế Lần1)** Gọi $F(x)$ là nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số $f(x)=x^2\mathrm{e}^{ax}\,(a\neq 0)$, sao cho $F\left(\frac{1}{a}\right)=F(0)+1$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

**A.** $0<a\le 1$. **B.** $a<-2$. **C.** $a\ge 3$. **D.** $1<a<2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$F(x)=\int x^2\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=x^2\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\end{cases}$.

$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{a}x^2\mathrm{e}^{ax}-\frac{2}{a}\int x\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}x^2e^{ax}-\frac{2}{a}.A\ (1)$

Xét $A=\int x\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=e^{ax}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{a}e^{ax}\end{cases}$.

$\Rightarrow A=\frac{1}{a}xe^{ax}-\frac{1}{a}\int e^{ax}\mathrm{d}x\ (2)$

Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra $F(x)=\frac{1}{a}x^2\mathrm{e}^{ax}-\frac{2}{a^2}xe^{ax}+\frac{2}{a^2}\int\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}x^2\mathrm{e}^{ax}-\frac{2}{a^2}x\mathrm{e}^{ax}+\frac{2}{a^3}\mathrm{e}^{ax}+C$.

Mà $F\left(\frac{1}{a}\right)=F(0)+1\Rightarrow\ \frac{1}{a^3}\mathrm{e}-\frac{2}{a^3}\mathrm{e}+\frac{2}{a^3}\mathrm{e}+C=\frac{2}{a^3}+1+C$

$\Rightarrow a^3=\mathrm{e}-2\Rightarrow a=\sqrt[3]{\mathrm{e}-2}\Rightarrow 0<a\le 1.$

**Câu 14:** **(ĐH Vinh Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=\mathrm{e}^{-x},\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)\mathrm{e}^{2x}$ là

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** $(x-2)e^x+e^x+C$. **B.** $(x+2)e^{2x}+e^x+C$.

**C.** $(x-1)e^x+C$. **D.** $(x+1)e^x+C$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $f(x)+f'(x)=e^{-x} \Leftrightarrow f(x)e^x+f'(x)e^x=1 \Leftrightarrow \left(f(x)e^x\right)'=1 \Leftrightarrow f(x)e^x=x+C$.

Vì $f(0)=2 \Leftrightarrow 2.e^0=C \Leftrightarrow C=2 \Rightarrow f(x)e^{2x}=(x+2)e^x$.

Vậy $\int f(x)e^{2x}dx=\int(x+2)e^xdx=\int(x+2)d(e^x)=(x+2)e^x-\int e^xd(x+2)$

$=(x+2)e^x-\int e^xdx=(x+2)e^x-e^x+C=(x+1)e^x+C$.

**Phân tích:** Bài toán cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn điều kiện chứa tổng của $f(x)$ và $f'(x)$ đưa ta tới công thức đạo hàm của tích $(u.v)'=u'.v+u.v'$ với $u=f(x)$. Từ đó ta cần chọn hàm $v$ cho phù hợp

***Tổng quát:*** Cho hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên $K$, thỏa mãn $f'(x)+g(x)f(x)=k(x)$ (Chọn $v=e^{G(x)}$).

Ta có $f'(x)+g(x)f(x)=k(x) \Leftrightarrow e^{G(x)}f'(x)+g(x)e^{G(x)}f(x)=k(x)e^{G(x)}$.

$\Leftrightarrow \left(e^{G(x)}f(x)\right)'=k(x)e^{G(x)} \Rightarrow e^{G(x)}f(x)=\int k(x)e^{G(x)}dx \Leftrightarrow f(x)=e^{-G(x)}\int k(x)e^{G(x)}dx$.

Với $G(x)$ là một nguyên hàm của $g(x)$.

**Admin tổ 4 – Strong team :** Bản chất của bài toán là cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn điều kiện chứa tổng của $f(x)$ và $f'(x)$ liên quan tới công thức đạo hàm của tích $(u.v)'=u'.v+u.v'$ với $u=f(x)$. Khi đó ta cần chọn hàm $v$ thích hợp. Cụ thể, với bài toán tổng quát :

Cho hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$, $y=k(x)$ liên tục trên $K$, $g(x)\neq 0$ với $\forall x\in K$ và thỏa mãn $g(x).f'(x)+h(x).f(x)=k(x)$

Ta sẽ đi tìm $v$ như sau : $\frac{v'}{v}=\frac{h(x)}{g(x)} \Rightarrow \int\frac{v'}{v}dx=\int\frac{h(x)}{g(x)}dx$

Khi đó : $\ln|v|=\int\frac{h(x)}{g(x)}dx \Leftrightarrow |v|=e^{\int\frac{h(x)}{g(x)}dx}$

**Câu 15:** **(ĐH Vinh Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)+2xf(x)=2xe^{-x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=1$. Tất cả các nguyên hàm của $x.f(x)e^{x^2}$ là

**A.** $(x^2+1)^2+C$. **B.** $\frac{1}{2}(x^2+1)^2e^{-x^2}+C$. **C.** $(x^2+1)^2e^{-x^2}+C$. **D.** $\frac{1}{2}(x^2+1)^2+C$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $f'(x)+2xf(x)=2xe^{-x^2} \Leftrightarrow e^{x^2}\left(f'(x)+2xf(x)\right)=e^{x^2}.2xe^{-x^2} \Leftrightarrow \left(e^{x^2}f(x)\right)'=2x$

$\Rightarrow e^{x^2}f(x)=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C$.

Vì $f(0)=1 \Leftrightarrow C=1 \Rightarrow f(x)=\left(x^2+1\right)e^{-x^2}$.

Vậy $\int xf(x)e^{x^2}\mathrm{d}x=\int x\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(x^2+1\right)\mathrm{d}\left(x^2+1\right)=\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^2+C$.

**Câu 16:** **(Chuyên Thái Bình Lần3)** Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=1$. Tính $f(1)$.

**A.** $\frac{2}{\mathrm{e}}$. **B.** $\frac{1}{\mathrm{e}}$. **C.** $\mathrm{e}$. **D.** $\frac{\mathrm{e}}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$f(x)+f'(x)=x \quad (1)$.

Nhân 2 vế của (1) với $e^x$ ta được $\mathrm{e}^x.f(x)+\mathrm{e}^x.f'(x)=x.\mathrm{e}^x$.

Hay $\left[\mathrm{e}^x.f(x)\right]'=x.\mathrm{e}^x \Rightarrow \mathrm{e}^x.f(x)=\int x.\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Xét $I=\int x.\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u=x \Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}v \Rightarrow v=\mathrm{e}^x \end{cases}$.

$I=\int x.\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x.\mathrm{e}^x-\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x.\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C$. Suy ra $\mathrm{e}^x f(x)=x.\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C$.

Theo giả thiết $f(0)=1$ nên $C=2 \Rightarrow f(x)=\frac{x.\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+2}{\mathrm{e}^x} \Rightarrow f(1)=\frac{2}{\mathrm{e}}$.

**Câu 17:** **(PHÂN TÍCH BL_PT ĐỀ ĐH VINHL3 -2019..)** Biết rằng $x\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của $f(-x)$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)\mathrm{e}^x$ thỏa mãn $F(0)=1$, giá trị của $F(-1)$ bằng

**A.** $\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{5-\mathrm{e}}{2}$. **C.** $\frac{7-\mathrm{e}}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Vì $x\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của $f(-x)$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

$\Rightarrow f(-x)=\left(x\mathrm{e}^x\right)'=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x, \ \forall x\in(-\infty;+\infty)$.

Do đó $f(-x)=\mathrm{e}^{-(-x)}-(-x)\mathrm{e}^{-(-x)}, \ \forall x\in(-\infty;+\infty) \Rightarrow f(x)=\mathrm{e}^{-x}(1-x), \ \forall x\in(-\infty;+\infty)$.

Nên $f'(x)=\left[\mathrm{e}^{-x}(1-x)\right]'=\mathrm{e}^{-x}(x-2) \Rightarrow f'(x)\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{-x}(x-2).\mathrm{e}^x=x-2$.

Bởi vậy $F(x)=\int(x-2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x-2)^2+C$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Từ đó $F(0)=\frac{1}{2}(0-2)^2+C=C+2$; $F(0)=1\Rightarrow C=-1$.

Vậy $F(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2-1\Rightarrow F(-1)=\frac{1}{2}(-1-2)^2-1=\frac{7}{2}$.

**Câu 18:** **(Sở Lạng Sơn 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$.

Biết hàm số đã cho thỏa mãn hệ thức $\int f(x)\sin x dx=-f(x)\cos x+\int \pi^x \cos x dx$. Hỏi hàm số $y=f(x)$ là hàm số nào trong các hàm số sau?

**A.** $f(x)=-\pi^x \ln\pi$. **B.** $f(x)=\frac{\pi^x}{\ln\pi}$. **C.** $f(x)=\pi^x \ln\pi$. **D.** $f(x)=-\frac{\pi^x}{\ln\pi}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Hệ thức $\int f(x)\sin x dx=-f(x)\cos x+\int \pi^x \cos x dx$ (1).

Xét $\int f(x)\sin x dx$.

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\Rightarrow du=f'(x)\\ dv=\sin x dx\Rightarrow v=-\cos x\end{cases}$. Ta được $\int f(x)\sin x dx=-f(x)\cos x+\int f'(x)\cos x dx$.

Theo hệ thức (1), suy ra $f'(x)=\pi^x$.

Dựa vào đáp án, ta nhận thấy có một hàm số thỏa mãn là $f(x)=\frac{\pi^x}{\ln\pi}$.

**Câu 19:** **(Cầu Giấy Hà Nội 2019 Lần 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)-f(x)=x^2\sqrt{x}\cos x,\ \forall x\in(0;+\infty)$; $f(4\pi)=0$. Giá trị biểu thức $f(9\pi)$ là:

**A.** $0$. **B.** $-3\sqrt{\pi}$. **C.** $-\sqrt{\pi}$. **D.** $-2\sqrt{\pi}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Với mọi $x\in(0;+\infty)$, ta có

$2xf'(x)-f(x)=x^2\sqrt{x}\cos x$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}f'(x)-\frac{1}{2\sqrt{x}}f(x)}{x}=\frac{x\cos x}{2}$.

$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{x\cos x}{2}\Leftrightarrow \frac{f(x)}{\sqrt{x}}=\frac{x\sin x}{2}+\frac{\cos x}{2}+C$

Mà $f(4\pi)=0$ suy ra $C=\frac{-1}{2}$. Vậy $f(x)=\left(\frac{x\sin x}{2}+\frac{\cos x}{2}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{x}$.

Suy ra $f(9\pi)=-3\sqrt{\pi}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 20:** **(Nguyễn Khuyến)**Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\ln(x+3)}{x^2}$ thỏa mãn $F(-2)+F(1)=0$ và $F(-1)+F(2)=a\ln 2+b\ln 5$, với $a$, $b$ là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+6b$ bằng

**A.** $-4$. **B.** $5$. **C.** $0$. **D.** $-3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Xét $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{\ln(x+3)}{x^2}\mathrm{d}x$

Đặt $u=\ln(x+3)$ và $\mathrm{d}v=\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$, ta có $\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x+3}\mathrm{d}x$ và chọn $v=-\dfrac{1}{x}$. Khi đó

$\int f(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{x}\ln(x+3)+\int\dfrac{1}{x(x+3)}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{x}\ln(x+3)+\dfrac{1}{3}\int\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x$

$=-\dfrac{1}{x}\ln(x+3)+\dfrac{1}{3}\ln|x|-\dfrac{1}{3}\ln(x+3)+C=-\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}\right)\ln(x+3)+\dfrac{1}{3}\ln|x|+C.$

+) Xét trên $(-3;0)$ ta được $F(x)=-\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}\right)\ln(x+3)+\dfrac{1}{3}\ln(-x)+C_1$

Tính $F(-2)=\dfrac{1}{6}\ln 1+\dfrac{1}{3}\ln 2+C_1=\dfrac{1}{3}\ln 2+C_1$; $F(-1)=\dfrac{2}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}\ln 1+C_1=\dfrac{2}{3}\ln 2+C_1$

+) Xét trên $(0;+\infty)$ ta được $F(x)=-\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}\right)\ln(x+3)+\dfrac{1}{3}\ln x+C_2$.

Tính $F(1)=-\dfrac{4}{3}\ln 4+\dfrac{1}{3}\ln 1+C_2=-\dfrac{8}{3}\ln 2+C_2$; $F(2)=-\dfrac{5}{6}\ln 5+\dfrac{1}{3}\ln 2+C_2$.

Ta có $F(-2)+F(1)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}\ln 2+C_1-\dfrac{8}{3}\ln 2+C_2=0\Leftrightarrow C_1+C_2=\dfrac{7}{3}\ln 2$.

Từ đó $F(-1)+F(2)=\dfrac{2}{3}\ln 2+C_1-\dfrac{5}{6}\ln 5+\dfrac{1}{3}\ln 2+C_2=\ln 2-\dfrac{5}{6}\ln 5+C_1+C_2$.

$=\ln 2-\dfrac{5}{6}\ln 5+\dfrac{7}{3}\ln 2=\dfrac{10}{3}\ln 2-\dfrac{5}{6}\ln 5=a\ln 2+b\ln 5$ ta được $a=\dfrac{10}{3}$; $b=-\dfrac{5}{6}\Rightarrow 3a+6b=5$.

**Câu 21:** **(SỞ GD&ĐT BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn $f(x)+\tan x.f'(x)=\dfrac{x}{\cos^3 x}$. Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=a\pi\sqrt{3}+b\ln 3$ trong đó $a,b\in\mathbb{Q}$. Giá trị của biểu thức $P=a+b$ bằng

**A.** $\dfrac{14}{9}$ **B.** $-\dfrac{2}{9}$ **C.** $\dfrac{7}{9}$ **D.** $-\dfrac{4}{9}$

**Lời giải**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Chọn D**

$f(x)+\tan x.f'(x)=\dfrac{x}{\cos^3 x} \Leftrightarrow \cos x.f(x)+\sin x.f'(x)=\dfrac{x}{\cos^2 x}$.

$\Leftrightarrow \left[\sin x.f(x)\right]'=\dfrac{x}{\cos^2 x}$.

Do đó $\int\left[\sin x.f(x)\right]'\mathrm{d}x=\int\dfrac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \Rightarrow \sin x.f(x)=\int\dfrac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

Tính $I=\int\dfrac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\tan x\end{cases}$. Khi đó

$I=\int\dfrac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=x\tan x-\int\tan x\mathrm{d}x=x\tan x+\int\dfrac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x}\mathrm{d}x=x\tan x+\ln\left|\cos x\right|$.

Suy ra $f(x)=\dfrac{x.\tan x+\ln\left|\cos x\right|}{\sin x}=\dfrac{x}{\cos x}+\dfrac{\ln\left|\cos x\right|}{\sin x}$.

$a\pi\sqrt{3}+b\ln 3=\sqrt{3}f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{2\ln 2}{\sqrt{3}}\right)-\left(\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}+2\ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\dfrac{5\pi\sqrt{3}}{9}-\ln 3$. Suy ra $\begin{cases}a=\dfrac{5}{9}\\ b=-1\end{cases}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

# NGUYÊN HÀM HÀM ẨN

**Câu 1:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$, $f(0)=1$ và $f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

**A.** $4+\ln 5$. **B.** $2+\ln 15$. **C.** $3+\ln 15$. **D.** $\ln 15$.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Cách 1:** • Trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$: $f(x)=\int\frac{2}{2x-1}dx=\ln(2x-1)+C_1$.

Lại có $f(1)=2\Rightarrow C_1=2$.

• Trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$: $f(x)=\int\frac{2}{2x-1}dx=\ln(1-2x)+C_2$.

Lại có $f(0)=1\Rightarrow C_2=1$.

Vậy $f(x)=\begin{cases}\ln(2x-1)+2 \text{ khi } x>\frac{1}{2}\\ \ln(1-2x)+1 \text{ khi } x<\frac{1}{2}\end{cases}$.

Suy ra $f(-1)+f(3)=3+\ln 15$.

**Cách 2:**

Ta có: $\begin{cases}f(0)-f(-1)=\int\limits_{-1}^{0}f'(x)dx=\int\limits_{-1}^{0}\frac{2dx}{2x-1}=\ln|2x-1|\Big|_{-1}^{0}=\ln\frac{1}{3} \quad (1)\\ f(3)-f(1)=\int\limits_{1}^{3}f'(x)dx=\int\limits_{1}^{3}\frac{2dx}{2x-1}=\ln|2x-1|\Big|_{1}^{3}=\ln 5 \quad (2)\end{cases}$

Lấy (2)-(1), ta được $f(3)-f(1)-f(0)+f(-1)=\ln 15\Rightarrow f(-1)+f(3)=3+\ln 15$.

**Câu 2:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{3}{3x-1}$, $f(0)=1$ và $f\left(\frac{2}{3}\right)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

**A.** $3+5\ln 2$. **B.** $-2+5\ln 2$. **C.** $4+5\ln 2$. **D.** $2+5\ln 2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Cách 1: Từ $f'(x)=\frac{3}{3x-1}\Rightarrow f(x)=\int\frac{3}{3x-1}dx=\begin{cases}\ln|3x-1|+C_1 \text{ khi } x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\\ \ln|3x-1|+C_1 \text{ khi } x\in\left(\frac{1}{3};+\infty\right)\end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases}f(0)=1\\ f\left(\frac{2}{3}\right)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0+C_1=1\\ 0+C_2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=1\\ C_2=2\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\ln|3x-1|+1 \text{ khi } x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\\ \ln|3x-1|+2 \text{ khi } x\in\left(\frac{1}{3};+\infty\right)\end{cases}$.

Khi đó: $f(-1)+f(3)=\ln 4+1+\ln 8+2=3+\ln 32=3+5\ln 2$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Cách 2: Ta có $\begin{cases} f(0)-f(-1)=f(x)\big|_{-1}^{0}=\int\limits_{-1}^{0}f'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}\dfrac{3}{3x-1}\mathrm{d}x=\ln\left|3x-1\right|\Big|_{-1}^{0}=\ln\dfrac{1}{4} \quad (1) \\ f(3)-f\left(\dfrac{2}{3}\right)=f(x)\big|_{\frac{2}{3}}^{3}=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{3}f'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{3}\dfrac{3}{3x-1}\mathrm{d}x=\ln\left|3x-1\right|\Big|_{\frac{2}{3}}^{3}=\ln 8 \quad (2) \end{cases}$

Lấy $(2)-(1)$, ta được: $f(3)+f(-1)-f(0)-f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\ln 32 \Rightarrow f(-1)+f(3)=3+5\ln 2$.

**Câu 3:** **(GIA LỘC TỈNH HẢI DƯƠNG 2019 lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ thoả mãn $f'(x)=\dfrac{3x-1}{x+2}$, $f(0)=1$ và $f(-4)=2$. Giá trị của biểu thức $f(2)+f(-3)$ bằng

**A.** $12$. **B.** $\ln 2$. **C.** $10+\ln 2$. **D.** $3-20\ln 2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{3x-1}{x+2}\mathrm{d}x=\int\left(3-\dfrac{7}{x+2}\right)\mathrm{d}x=3x-7\ln\left|x+2\right|+C,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

+ Xét trên khoảng $(-2;+\infty)$ ta có: $f(0)=1\Leftrightarrow -7\ln 2+C=1\Rightarrow C=1+7\ln 2$.

Do đó, $f(x)=3x-7\ln\left|x+2\right|+1+7\ln 2$, với mọi $x\in(-2;+\infty)$.

Suy ra $f(2)=7-7\ln 4+7\ln 2=7-7\ln 2$.

+ Xét trên khoảng $(-\infty;-2)$ ta có: $f(-4)=2\Leftrightarrow -12-7\ln 2+C=2\Rightarrow C=14+7\ln 2$.

Do đó, $f(x)=3x-7\ln\left|x+2\right|+14+7\ln 2$, với mọi $x\in(-\infty;-2)$.

Suy ra $f(-3)=5+7\ln 2$.

**Câu 4:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{4}{x^2-4}$; $f(-3)=0$; $f(0)=1$ và $f(3)=2$. Tính giá trị biểu thức $P=f(-4)+f(-1)+f(4)$.

**A.** $P=3+\ln\dfrac{3}{25}$. **B.** $P=3+\ln 3$. **C.** $P=2+\ln\dfrac{5}{3}$. **D.** $P=2-\ln\dfrac{5}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Từ $f'(x)=\dfrac{4}{x^2-4}\Rightarrow f(x)=\int\dfrac{4dx}{x^2-4}=\int\dfrac{4dx}{(x-2)(x+2)}=\begin{cases}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|+C_1 \ khi\ x\in(-\infty;-2)\\ \ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|+C_2 \ khi\ x\in(-2;2)\\ \ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|+C_3 \ khi\ x\in(2;+\infty)\end{cases}$

Ta có $\begin{cases} f(-3)=0 \\ f(0)=1 \\ f(2)=2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \ln 5+C_1=0 \\ 0+C_2=1 \\ \ln\dfrac{1}{5}+C_3=2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} C_1=-\ln 5 \\ C_2=1 \\ C_3=2+\ln 5 \end{cases}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|-\ln 5 & khi\ x\in(-\infty;-2)\\ \ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|+1 & khi\ x\in(-2;2)\\ \ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|+2+\ln 5 & khi\ x\in(2;+\infty)\end{cases}.$$

Khi đó $P=f(-4)+f(-1)+f(4)=\ln 3-\ln 5+\ln 3+1+\ln\dfrac{1}{3}+2+\ln 5=3+\ln 3.$

**Câu 5:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$; $f(-3)-f(3)=0$ và $f(0)=\dfrac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4)+f(-1)-f(4)$ bằng

**A.** $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\ln 2$. **B.** $1+\ln 80$. **C.** $1+\ln 2+\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{4}{5}$. **D.** $1+\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{8}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+x-2}$$

$$\Rightarrow f(x)=\int\frac{dx}{x^2+x-2}=\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)}=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C_1 & khi\quad x\in(-\infty;-2)\\ \dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C_2 & khi\quad x\in(-2;1)\\ \dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C_3 & khi\quad x\in(1;+\infty)\end{cases}$$

Do đó $f(-3)-f(3)=0\Rightarrow\dfrac{1}{3}\ln 4+C_1-\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{2}{5}-C_3\Rightarrow C_3=C_1+\dfrac{1}{3}\ln 10.$

Và $f(0)=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{2}+C_2=\dfrac{1}{3}\Rightarrow C_2=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\ln 2.$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C_1 & khi\quad x\in(-\infty;-2)\\ \dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\ln 2 & khi\quad x\in(-2;1)\\ \dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C_1+\dfrac{1}{3}\ln 10 & khi\quad x\in(1;+\infty)\end{cases}.$$

Khi đó:

$$f(-4)+f(-1)-f(4)=\left(\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}+C_1\right)+\left(\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2\right)-\left(\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}+C_1+\frac{1}{3}\ln 10\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2.$$

**Câu 6:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$. Biết $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$. Giá trị $T=f(-2)+f(0)+f(4)$ bằng:

**A.** $T=2+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{9}$. **B.** $T=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$. **C.** $T=3+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$. **D.** $T=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$.

**Lời giải**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Chọn B**

Ta có $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$.

Do đó $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}+C_1 \text{ khi } x<-1, x>1\\ \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{x+1}+C_2 \text{ khi } -1<x<1\end{cases}$.

Do $f(-3)+f(3)=0$ nên $C_1=0$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$ nên $C_2=1$.

Nên $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1} & \text{khi } x<-1, x>1\\ \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{x+1}+1 & \text{khi } -1<x<1\end{cases}$. $T=f(-2)+f(0)+f(4)=1+\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$.

Vậy $f(2)+f(-3)=7+7\ln 2+5-7\ln 2=12$.

**Câu 7:** **(THPT ĐOÀN THƯỢNG - HẢI DƯƠNG - 2018 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x).f(x)=x^4+x^2$. Biết $f(0)=2$. Tính $f^2(2)$.

**A.** $f^2(2)=\frac{313}{15}$. **B.** $f^2(2)=\frac{332}{15}$. **C.** $f^2(2)=\frac{324}{15}$. **D.** $f^2(2)=\frac{323}{15}$.

**Lời giải**

Ta có $\int f'(x).f(x)\mathrm{d}x=\int\left(x^4+x^2\right)\mathrm{d}x+C\Rightarrow\frac{f^2(x)}{2}=\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+C$.

Do $f(0)=2$ nên suy ra $C=2$.

Vậy $f^2(2)=2\left(\frac{32}{5}+\frac{8}{3}+2\right)=\frac{332}{15}$.

**Câu 8:** **(Đặng Thành Nam Đề 15)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f'(x)+\frac{f(x)}{x}=x^2$ và $f(1)=-1$. Giá trị của $f\left(\frac{3}{2}\right)$ bằng

**A.** $\frac{1}{96}$. **B.** $\frac{1}{64}$. **C.** $\frac{1}{48}$. **D.** $\frac{1}{24}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $f'(x)+\frac{f(x)}{x}=x^2\Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=x^3\Leftrightarrow\left[xf(x)\right]'=x^3\Rightarrow xf(x)=\int x^3dx=\frac{x^4}{4}+C$.

$f(1)=-1\Rightarrow C=-\frac{5}{4}$. Khi đó $f(x)=\frac{x^4-5}{4x}\Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{96}$.

**Câu 9:** **(ĐỀ THI CÔNG BẰNG KHTN LẦN 02 NĂM 2018-2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2$ với mọi $x>0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

**A.** 5. **B.** 10. **C.** 20. **D.** 15.

**Lời giải**

$f(x)-xf'(x)=-2x^3-3x^2\Leftrightarrow\frac{1.f(x)-x.f'(x)}{x^2}=\frac{-2x^3-3x^2}{x^2}\Leftrightarrow\left[\frac{f(x)}{x}\right]'=2x+3$

Suy ra, $\frac{f(x)}{x}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)=2x+3$.

Ta có $\int(2x+3)dx = x^2+3x+C,\ C\in\mathbb{R}$.

Do đó, $\frac{f(x)}{x} = x^2+3x+C_1$, (1) với $C_1\in\mathbb{R}$ nào đó.

Vì $f(1)=4$ theo giả thiết, nên thay $x=1$ vào hai vế của (1) ta thu được $C_1=0$, từ đó $f(x)=x^3+3x^2$. Vậy $f(2)=20$.

**Câu 10:** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2 + f(x).f''(x) = 15x^4+12x, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Giá trị của $(f(1))^2$ là

**A.** 10. **B.** 8. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

**Lời giải**

Ta có $(f(x).f'(x))' = (f'(x))^2 + f(x).f''(x) = 15x^4+12x, \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(x).f'(x) = 3x^5+6x^2+C, \forall x\in\mathbb{R}$.

Lại có $f(0)=f'(0)=1$ nên $C=1$ do đó $f(x).f'(x) = 3x^5+6x^2+1, \forall x\in\mathbb{R}$.

$\left((f(x))^2\right)' = 2f(x).f'(x) = 6x^5+12x^2+2, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow (f(x))^2 = x^6+4x^3+2x+C_1, \forall x\in\mathbb{R}$.

Mà $f(0)=1$ nên $C_1=1$. Vậy $(f(1))^2 = 1^6+4.1^3+2.1+1=8$.

**Câu 11:** **(Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[-1;0]$, đồng thời thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (3x^2+2x)e^{-f(x)}$, $\forall x\in[-1;0]$. Tính $A = f(0)-f(-1)$.

**A.** $A=-1$. **B.** $A=\frac{1}{e}$. **C.** $A=1$. **D.** $A=0$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $f'(x) = (3x^2+2x)e^{-f(x)}$, $\forall x\in[-1;0] \Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)} = 3x^2+2x$, $\forall x\in[-1;0]$ $(*)$

Lấy nguyên hàm hai vế của $(*)$ ta được $\int e^{f(x)}\mathrm{d}(f(x)) = x^3+x^2+C$

$\Rightarrow e^{f(x)} = x^3+x+C_1 \Rightarrow f(x) = \ln|x^3+x+C_1|$

Do đó $\begin{cases} f(0)=\ln|C_1| \\ f(-1)=\ln|C_1| \end{cases} \Rightarrow f(0)-f(-1)=0$. Vậy $A=0$.

**Câu 12:** **(THPT LÝ THƯỜNG KIỆT – HÀ NỘI)** Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1, f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1}$ với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

**A.** $4<f(5)<5$. **B.** $1<f(5)<2$. **C.** $3<f(5)<4$. **D.** $2<f(5)<3$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$f(x) = f'(x).\sqrt{3x+1}$

Ta có $\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Leftrightarrow \ln f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C.$

Vì $f(1)=1\Rightarrow C+\frac{4}{3}=0\Leftrightarrow C=-\frac{4}{3}.$

$\Rightarrow \ln f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{4}{3}\Leftrightarrow f(x)=e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{4}{3}}\Rightarrow f(5)=e^{\frac{4}{3}}\approx 3,8.$

Vậy $3<f(5)<4.$

**Câu 13:** **(Sở Quảng Ninh Lần1)** Biết luôn có hai số $a$ và $b$ để $F(x)=\frac{ax+b}{x+4}(4a-b\neq 0)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $2f^2(x)=(F(x)-1)f'(x)$. Khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất?

**A.** $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$. **B.** $a=1, b=4$. **C.** $a=1, b=-1$. **D.** $a=1, b\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Do $4a-b\neq 0$ nên $F(x)\neq C\ \forall x\in\mathbb{R}$. Vì luôn có hai số $a$ và $b$ để $F(x)=\frac{ax+b}{x+4}(4a-b\neq 0)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $f(x)$ không phải là hàm hằng.

Từ giả thiết $2f^2(x)=(F(x)-1)f'(x)\Leftrightarrow \frac{2f(x)}{F(x)-1}=\frac{f'(x)}{f(x)}$

Lấy nguyên hàm hai vế với vi phân d$x$ ta được: $\int\frac{2f(x)}{F(x)-1}\mathrm{d}x=\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x\Leftrightarrow 2\ln|F(x)-1|=\ln|f(x)|+C$ với $C$ là hằng số.

$$2\ln|F(x)-1|+\ln e^C=\ln|f(x)|\Leftrightarrow|f(x)|=e^C.(F(x)-1)^2=e^C.\left(\frac{(a-1)x+b-4}{x+4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=e^C.\left(\frac{(a-1)x+b-4}{x+4}\right)^2 \\ f(x)=-e^C.\left(\frac{(a-1)x+b-4}{x+4}\right)^2 \end{array}\right.$$

**Trường hợp 1.** $f(x)=e^C.\left(\frac{(a-1)x+b-4}{x+4}\right)^2$

Ta có $F'(x)=f(x)\Rightarrow f(x)=\frac{4a-b}{(x+4)^2}.$

Đồng nhất hệ số ta có:

$$e^C.((a-1)x+b-4)^2=4a-b\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} a=1 \\ e^C.(b-4)^2=4-b \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} a=1 \\ \left[\begin{array}{l} b=4 \\ b=\frac{4e^C-1}{e^C} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Loại $b=4$ do điều kiện $4a-b\neq 0$. Do đó $(a;b)=\left(1;\frac{4e^C-1}{e^C}\right).$

**Trường hợp 2.** $f(x)=-e^C.\left(\frac{(a-1)x+b-4}{x+4}\right)^2$

Ta có $F'(x)=f(x)\Rightarrow f(x)=\dfrac{4a-b}{(x+4)^2}$.

Đồng nhất hệ số ta có:

$$-e^C.\left((a-1)x+b-4\right)^2=4a-b\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\-e^C.(b-4)^2=4-b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\\left[\begin{array}{l}b=4\\b=\dfrac{4e^C+1}{e^C}\end{array}\right.\end{cases}$$

Loại $b=4$ do điều kiện $4a-b\neq 0$. Do đó $(a;b)=\left(1;\dfrac{4e^C+1}{e^C}\right)$.

Tổng hợp cả hai trường hợp ta chọn đáp án **D.**

**Câu 14:** Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(2)=\dfrac{1}{15}$ và $f'(x)+(2x+4)f^2(x)=0$. Tính $f(1)+f(2)+f(3)$.

**A.** $\dfrac{7}{15}$. **B.** $\dfrac{11}{15}$. **C.** $\dfrac{11}{30}$. **D.** $\dfrac{7}{30}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Vì $f'(x)+(2x+4)f^2(x)=0$ và $f(x)>0$, với mọi $x\in(0;+\infty)$ nên ta có $-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+4$.

Suy ra $\dfrac{1}{f(x)}=x^2+4x+C$. Mặt khác $f(2)=\dfrac{1}{15}$ nên $C=3$ hay $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$.

Do đó $f(1)+f(2)+f(3)=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{24}=\dfrac{7}{30}$.

**Câu 15:** Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f^6(x).f'(x)=12x+13$ và $f(0)=2$. Khi đó phương trình $f(x)=3$ có bao nhiêu nghiệm?

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn A**

Từ $f^6(x).f'(x)=12x+13\Rightarrow\int f^6(x).f'(x)dx=\int(12x+13)dx$

$\Leftrightarrow\int f^6(x)df(x)=6x^2+13x+C\Leftrightarrow\dfrac{f^7(x)}{7}=6x^2+13x+C\xrightarrow{f(0)=2}C=\dfrac{2}{7}$.

Suy ra: $f^7(x)=42x^2+91x+2$.

Từ $f(x)=3\Leftrightarrow f^7(x)=2187\Rightarrow 42x^2+91x+2=2187\Leftrightarrow 42x^2+91x-2185=0(*)$.

Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm trái dấu do $ac<0$.

**Câu 16:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)=\sqrt{e^x+e^{-x}-2}$, $f(0)=5$ và $f\left(\ln\dfrac{1}{4}\right)=0$. Giá trị của biểu thức $S=f(-\ln 16)+f(\ln 4)$ bằng

**A.** $S=\dfrac{31}{2}$. **B.** $S=\dfrac{9}{2}$. **C.** $S=\dfrac{5}{2}$. **D.** $f(0).f(2)=1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có $f'(x)=\sqrt{e^x+e^{-x}-2}=\frac{|e^x-1|}{\sqrt{e^x}}=\begin{cases}e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}} & \text{khi } x\ge 0\\ e^{-\frac{x}{2}}-e^{\frac{x}{2}} & \text{khi } x<0\end{cases}$.

Do đó $f(x)=\begin{cases}2e^{\frac{x}{2}}+2e^{-\frac{x}{2}}+C_1 & \text{khi } x\ge 0\\ -2e^{-\frac{x}{2}}-2e^{\frac{x}{2}}+C_2 & \text{khi } x<0\end{cases}$.

Theo đề bài ta có $f(0)=5$ nên $2e^0+2e^0+C_1=5\Leftrightarrow C_1=1$.

$\Rightarrow f(\ln 4)=2e^{\frac{\ln 4}{2}}+2e^{-\frac{\ln 4}{2}}+1=6$

Tương tự $f\left(\ln\frac{1}{4}\right)=0$ nên $-2e^{-\frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{2}}-2e^{\frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{2}}+C_2=0\Leftrightarrow C_2=5$.

$\Rightarrow f(-\ln 16)=-2e^{-\frac{(-\ln 16)}{2}}-2e^{\frac{(-\ln 16)}{2}}+5=-\frac{7}{2}$.

Vậy $S=f(-\ln 16)+f(\ln 4)=\frac{5}{2}$.

**Câu 17:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=1$ và $\frac{f'(x)}{f(x)}=2-2x$. Tìm các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

**A.** $m>e$. **B.** $0<m\le 1$. **C.** $0<m<e$. **D.** $1<m<e$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\frac{f'(x)}{f(x)}=2-2x\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int(2-2x)dx$.

$\Leftrightarrow \ln f(x)=2x-x^2+C\Leftrightarrow f(x)=Ae^{2x-x^2}$. Mà $f(0)=1$ suy ra $f(x)=e^{2x-x^2}$.

Ta có $2x-x^2=1-(x^2-2x+1)=1-(x-1)^2\le 1$. Suy ra $0<e^{2x-x^2}\le e$ và ứng với một giá trị thực $t<1$ thì phương trình $2x-x^2=t$ sẽ có hai nghiệm phân biệt.

Vậy để phương trình $f(x)=m$ có 2 nghiệm phân biệt khi $0<m<e^1=e$.

**Câu 18:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)\ne 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. $f'(x)=(2x+1)f^2(x)$ và $f(1)=-0,5$. Biết rằng tổng $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)=\frac{a}{b}$; $(a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N})$ với $\frac{a}{b}$ tối giản. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $a+b=-1$. **B.** $a\in(-2017;2017)$. **C.** $\frac{a}{b}<-1$. **D.** $b-a=4035$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $f'(x)=(2x+1)f^2(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=(2x+1)\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int(2x+1)dx$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}=x^2+x+C$

Mà $f(1)=-\frac{1}{2}$ nên $C=0\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x^2+x}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Mặt khác

$$f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)=\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{2018}-\frac{1}{2017}\right)$$

$$\Leftrightarrow f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)=-1+\frac{1}{2018}=\frac{-2017}{2018}\Rightarrow a=-2017;\ b=2018.$$

Khi đó $b-a=4035$.

**Câu 19:** **(SỞ GD&ĐT HÀ NỘI NĂM 2018-2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(x)\neq 0$ với mọi $x$ và thỏa mãn $f(1)=-\frac{1}{2}$, $f'(x)=(2x+1)f^2(x)$. Biết $f(1)+f(2)+...+f(2019)=\frac{a}{b}-1$ với $a,b\in\mathbb{N},(a,b)=1$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

**A.** $a-b=2019$. **B.** $ab>2019$. **C.** $2a+b=2022$. **D.** $b\leq 2020$.

**Lời giải**

$$f'(x)=(2x+1)f^2(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+1\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int(2x+1)dx$$

$$\Rightarrow\int\frac{d(f(x))}{f^2(x)}=\int(2x+1)dx$$

$$\Rightarrow-\frac{1}{f(x)}=x^2+x+C\ \ (1)\ \text{(Với } C \text{ là hằng số thực).}$$

Thay $x=1$ vào $(1)$ được $2+C=-\frac{1}{-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow C=0$. Vậy $f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$.

$$T=f(1)+f(2)+...+f(2019)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+...+\left(\frac{1}{2020}-\frac{1}{2019}\right)=-1+\frac{1}{2020}.$$

Suy ra: $\begin{cases}a=1\\b=2020\end{cases}\Rightarrow a-b=-2019$

**Câu 20:** **( Nguyễn Tất Thành Yên Bái)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$, biết $f'(x)+(2x+1)f^2(x)=0$, $\forall x>0$ và $f(2)=\frac{1}{6}$. Tính giá trị của biểu thức $P=f(1)+f(2)+...+f(2019)$.

**A.** $\frac{2021}{2020}$. **B.** $\frac{2020}{2019}$. **C.** $\frac{2019}{2020}$. **D.** $\frac{2018}{2019}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

TH1: $f(x)=0\Rightarrow f'(x)=0$ trái giả thiết.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

TH2: $f(x)\neq 0 \Rightarrow f'(x)=-(2x+1).f^2(x) \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=-(2x+1).$

$\Rightarrow \int \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}dx=-\int(2x+1)dx \Rightarrow \dfrac{-1}{f(x)}=-(x^2+x+C).$

Ta có: $f(2)=\dfrac{1}{6} \Rightarrow C=0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}.$

$\Rightarrow P=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+.....-\dfrac{1}{2020}=\dfrac{2019}{2020}.$

**Câu 21:** Cho hàm số $f(x)\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3).f^2(x)$ và $f(0)=\dfrac{-1}{2}$. Biết tổng $f(1)+f(2)+...+f(2017)+f(2018)=\dfrac{a}{b}$ với $a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}^*$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\dfrac{a}{b}<-1.$ **B.** $\dfrac{a}{b}>1.$

**C.** $a+b=1010.$ **D.** $b-a=3029.$

**Lời giải**

**Chọn D**

Biến đổi $f'(x)=(2x+3).f^2(x) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+3 \Leftrightarrow \int\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int(2x+3)dx$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{f(x)}=x^2+3x+C \Rightarrow f(x)=-\dfrac{1}{x^2+3x+C}$. Mà $f(0)=\dfrac{-1}{2}$ nên $=2.$

Do đó $f(x)=-\dfrac{1}{x^2+3x+2}=-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}.$

Khi đó $\dfrac{a}{b}=f(1)+f(2)+...+f(2017)+f(2018)$

$=-\left(\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+.....+\dfrac{1}{2018.2019}+\dfrac{1}{2019.2020}\right)=-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+.....+\dfrac{1}{2018}-\dfrac{1}{2019}-\dfrac{1}{2020}\right)$

$=-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2020}\right)=\dfrac{-1009}{2020}.$

Với điều kiện $a,b$ thỏa mãn bài toán, suy ra: $\begin{cases}a=-1009\\ b=2020\end{cases} \Rightarrow b-a=3029.$

**Câu 22:** Cho hàm số $y=f(x)$, $\forall x\geq 0$, thỏa mãn $\begin{cases}f''(x).f(x)-2\left[f'(x)\right]^2+xf^3(x)=0\\ f'(0)=0;\ f(0)=1\end{cases}$. Tính $f(1).$

**A.** $\dfrac{2}{3}.$ **B.** $\dfrac{3}{2}.$ **C.** $\dfrac{6}{7}.$ **D.** $\dfrac{7}{6}.$

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $f''(x).f(x)-2\left[f'(x)\right]^2+xf^3(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{f''(x).f(x)-2\left[f'(x)\right]^2}{f^3(x)}=-x$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Rightarrow\left[\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\right]'=-x\Rightarrow\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=-\dfrac{x^2}{2}+C\Rightarrow\dfrac{f'(0)}{f^2(0)}=-\dfrac{0^2}{2}+C\Rightarrow C=0.$

Do đó $\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=-\dfrac{x^2}{2}$

$\Rightarrow\int_0^1\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=-\int_0^1\dfrac{x^2}{2}\mathrm{d}x\Rightarrow-\dfrac{1}{f(x)}\Big|_0^1=\left(-\dfrac{x^3}{6}\right)\Big|_0^1\Rightarrow-\dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(0)}=-\dfrac{1}{6}\Rightarrow f(1)=\dfrac{6}{7}.$

**Câu 23:** Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục, dương trên $\mathbb{R}$; thỏa mãn $f(0)=1$ và $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{x}{x^2+1}$. Khi đó hiệu $T=f\left(2\sqrt{2}\right)-2f(1)$ thuộc khoảng

**A.** $(2;3)$. **B.** $(7;9)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(9;12)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\dfrac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\dfrac{\mathrm{d}\left(f(x)\right)}{f(x)}=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{\mathrm{d}\left(x^2+1\right)}{x^2+1}.$

Vậy $\ln\left(f(x)\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$, mà $f(0)=1\Leftrightarrow C=0$. Do đó $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

Nên $f\left(2\sqrt{2}\right)=3;\ 2f(1)=2\sqrt{2}\Rightarrow f\left(2\sqrt{2}\right)-2f(1)=3-2\sqrt{2}\in(0;1).$

**Câu 24:** **(THPT CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 01 NĂM 2018-2019)** Cho hàm số $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=1$ và $f(x)=\sqrt{x+1}.f'(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $f(x)<2$ **B.** $2<f(x)<4$ **C.** $f(x)>6$ **D.** $4<f(x)<6$

**Lời giải**

Ta có: $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\Rightarrow\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\ln\left(f(x)\right)=2\sqrt{x+1}+C$

Mà $f(0)=1$ nên $C=-2\Rightarrow f(x)=e^{2\sqrt{x+1}-2}\Rightarrow f(3)=e^2>6$

**Câu 25:** Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}$, với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $4<f(5)<5$. **B.** $2<f(5)<3$.

**C.** $3<f(5)<4$. **D.** $1<f(5)<2$.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Cách 1:**

Với điều kiện bài toán ta có

$f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}\Leftrightarrow\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int\dfrac{\mathrm{d}\left(f'(x)\right)}{f(x)}=\dfrac{1}{3}\int(3x+1)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(3x+1)\Leftrightarrow\ln f(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C\Leftrightarrow f(x)=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C}.$

Khi đó $f(1)=1\Leftrightarrow\mathrm{e}^{\frac{4}{3}+C}=1\Leftrightarrow C=-\dfrac{4}{3}\Rightarrow f(x)=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{4}{3}}\Rightarrow f(5)=\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}\approx3,79\in(3;4).$

Vậy $3<f(5)<4$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

***Chú ý*:** Các bạn có thể tính $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}}$ bằng cách đặt $t=\sqrt{3x+1}$.

**Cách 2:**

Với điều kiện bài toán ta có

$$f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow \int_1^5 \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_1^5 \frac{\mathrm{d}\left(f(x)\right)}{f(x)}=\frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \ln f(x)\Big|_1^5=\frac{4}{3} \Leftrightarrow \ln\frac{f(5)}{f(1)}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow f(5)=f(1).\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}\approx 3,79\in(3;4).$$

**Câu 26:** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

**A.** $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $10$. **D.** $8$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $\left(f'(x)\right)^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow\left[f'(x).f(x)\right]'=15x^4+12x,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x).f(x)=3x^5+6x^2+C_1$

Do $f(0)=f'(0)=1$ nên ta có $C_1=1$. Do đó: $f'(x).f(x)=3x^5+6x^2+1$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}f^2(x)\right)'=3x^5+6x^2+1 \Leftrightarrow f^2(x)=x^6+4x^3+2x+C_2.$$

Mà $f(0)=1$ nên ta có $C_2=1$. Do đó $f^2(x)=x^6+4x^3+2x+1$.

Vậy $f^2(1)=8$.

**Câu 27:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int \frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5}+C$. Nguyên hàm của hàm số $f(2x)$ trên tập $\mathbb{R}^+$ là:

**A.** $\frac{x+3}{2\left(x^2+4\right)}+C$. **B.** $\frac{x+3}{x^2+4}+C$. **C.** $\frac{2x+3}{4\left(x^2+1\right)}+C$. **D.** $\frac{2x+3}{8\left(x^2+1\right)}+C$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Theo đề ra ta có:

$$\int \frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5}+C \Leftrightarrow 2\int f\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{x+1}\right)=\frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2+4}+C.$$

Hay $2\int f(t)\mathrm{d}t=\frac{2(t+3)}{t^2+4}+C \Rightarrow \int f(t)\mathrm{d}t=\frac{t+3}{t^2+4}+C'$.

Suy ra $\int f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int f(2x)\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}\left(\frac{2x+3}{(2x)^2+4}+C_1\right)=\frac{2x+3}{8x^2+8}+C$

**Câu 28:** **(Sở Ninh Bình 2019 lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=3$ và $x(4-f'(x))=f(x)-1$ với mọi $x>0$. Tính $f(2)$.

**A.** $6$. **B.** $2$. **C.** $5$. **D.** $3$.

**Chọn C**

Ta có

$x(4-f'(x))=f(x)-1\Leftrightarrow f(x)+xf'(x)=4x+1\Leftrightarrow (xf(x))'=4x+1$

$\Rightarrow xf(x)=\int (xf(x))'\mathrm{d}x=\int (4x+1)\mathrm{d}x=2x^2+x+C$.

Với $x=1$ thì $1f(1)=3+C\Leftrightarrow 3=3+C\Leftrightarrow C=0$.

Do đó $xf(x)=2x^2+x$. Vậy $2f(2)=2.2^2+2$ hay $f(2)=5$.

**Câu 29:** **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f'(x)-2f(x)=0$. Tính $f(-1)$ biết rằng $f(1)=1$.

**A.** $e^{-4}$. **B.** $e^3$. **C.** $e^4$. **D.** $e^{-2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Vì $f(x)>0$, nên ta có:

$f'(x)-2f(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=2\Rightarrow \int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int 2\mathrm{d}x$.

$\Leftrightarrow \exists C\in\mathbb{R}:\ln|f(x)|=2x+C\Rightarrow \ln f(x)=2x+C$.

Cho $x=1\Rightarrow \ln f(1)=2+C\Leftrightarrow \ln 1=2+C\Leftrightarrow C=-2$

Do đó: $\ln f(x)=2x-2\Leftrightarrow f(x)=e^{2x-2}\Rightarrow f(-1)=e^{-4}$.

$S=a+b+c=-\dfrac{9}{2}$.

**Câu 30:** **(SỞ GD&ĐT QUẢNG NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Biết luôn có hai số $a$ và $b$ để $F(x)=\dfrac{ax+b}{x+4}(4a-b\neq 0)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $2f^2(x)=(F(x)-1)f'(x)$. Khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất?

**A.** $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$. **B.** $a=1$, $b=4$. **C.** $a=1, b=-1$. **D.** $a=1, b\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$.

**Lời giải**

Do $4a-b\neq 0$ nên $F(x)\neq C\ \ \forall x\in\mathbb{R}$. Vì luôn có hai số $a$ và $b$ để $F(x)=\dfrac{ax+b}{x+4}(4a-b\neq 0)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $f(x)$ không phải là hàm hằng.

Từ giả thiết $2f^2(x)=(F(x)-1)f'(x)\Leftrightarrow \dfrac{2f(x)}{F(x)-1}=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

Lấy nguyên hàm hai vế với vi phân $\mathrm{d}x$ ta được: $\int\dfrac{2f(x)}{F(x)-1}\mathrm{d}x=\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x\Leftrightarrow 2\ln|F(x)-1|=\ln|f(x)|+C$ với $C$ là hằng số.

$2\ln|F(x)-1|+\ln e^C=\ln|f(x)|\Leftrightarrow |f(x)|=e^C.(F(x)-1)^2=e^C.\left(\dfrac{(a-1)x+b-4}{x+4}\right)^2$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=e^C.\left(\dfrac{(a-1)x+b-4}{x+4}\right)^2 \\ f(x)=-e^C.\left(\dfrac{(a-1)x+b-4}{x+4}\right)^2 \end{array}\right.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Trường hợp 1.** $f(x)=e^C.\left(\dfrac{(a-1)x+b-4}{x+4}\right)^2$

Ta có $F'(x)=f(x)\Rightarrow f(x)=\dfrac{4a-b}{(x+4)^2}$.

Đồng nhất hệ số ta có:

$$e^C.\left((a-1)x+b-4\right)^2=4a-b\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\e^C.(b-4)^2=4-b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\\left[\begin{array}{l}b=4\\b=\dfrac{4e^C-1}{e^C}\end{array}\right.\end{cases}$$

Loại $b=4$ do điều kiện $4a-b\neq 0$. Do đó $(a;b)=\left(1;\dfrac{4e^C-1}{e^C}\right)$.

**Trường hợp 2.** $f(x)=-e^C.\left(\dfrac{(a-1)x+b-4}{x+4}\right)^2$

Ta có $F'(x)=f(x)\Rightarrow f(x)=\dfrac{4a-b}{(x+4)^2}$.

Đồng nhất hệ số ta có:

$$-e^C.\left((a-1)x+b-4\right)^2=4a-b\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\-e^C.(b-4)^2=4-b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\\left[\begin{array}{l}b=4\\b=\dfrac{4e^C+1}{e^C}\end{array}\right.\end{cases}$$

Loại $b=4$ do điều kiện $4a-b\neq 0$. Do đó $(a;b)=\left(1;\dfrac{4e^C+1}{e^C}\right)$.

**Câu 31:** **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Cho hàm số $f(x)\neq 0$; $f'(x)=(2x+1).f^2(x)$ và $f(1)=-0,5$. Biết tổng $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)=\dfrac{a}{b};\ (a\in\mathbb{Z};b\in\mathbb{N})$ với $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Chọn khẳng định đúng.

**A.** $\dfrac{a}{b}<-1$. **B.** $a-b=1$. **C.** $b-a=4035$. **D.** $a+b=-1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $f'(x)=(2x+1).f^2(x)\Rightarrow\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+1\ (do\ f(x)\neq 0)$

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được:

$$\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int(2x+1)\mathrm{d}x\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}=x^2+x+C\Leftrightarrow f(x)=\frac{-1}{x^2+x+C}$$

Mà $f(1)=-0,5\Rightarrow C=0$, do đó $f(x)=\dfrac{-1}{x^2+x}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}$

Nên

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$f(2017)+f(2016)+...+f(1)=\frac{1}{2018}-\frac{1}{2017}+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2016}+...+\frac{1}{2}-1$$
$$=\frac{1}{2018}-1=-\frac{2017}{2018}$$

Suy ra $a=-2017;b=2018$ nên $b-a=4035$.

**Câu 32:** **(THPT LÝ NHÂN TÔNG LẦN 1 NĂM 2018-2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục không âm trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f(x).f'(x)=\cos x\sqrt{1+f^2(x)}$ với mọi $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ và $f(0)=\sqrt{3}$. Giá trị của $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

**A.** $2$. **B.** $1$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $0$.

**Lời giải**

Với $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ta có $f(x).f'(x)=\cos x\sqrt{1+f^2(x)}\Rightarrow\frac{2f(x).f'(x)}{2\sqrt{1+f^2(x)}}=\cos x\ (*)$.

Suy ra $\sqrt{1+f^2(x)}=\sin x+C$.

Ta có $f(0)=\sqrt{3}\Rightarrow C=2$.

Dẫn đến $f(x)=\sqrt{(\sin x+2)^2-1}$.

Vậy $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sqrt{2}$.

**Câu 33:** **(Sở Bắc Ninh)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $R$ thỏa mãn các điều kiện: $f(0)=2\sqrt{2}$, $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(x).f'(x)=(2x+1)\sqrt{1+f^2(x)}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó giá trị $f(1)$ bằng

**A.** $\sqrt{26}$. **B.** $\sqrt{24}$. **C.** $\sqrt{15}$. **D.** $\sqrt{23}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $f(x).f'(x)=(2x+1)\sqrt{1+f^2(x)}\Leftrightarrow\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=(2x+1)$.

Suy ra $\int\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}dx=\int(2x+1)dx\Leftrightarrow\int\frac{d\left(1+f^2(x)\right)}{2\sqrt{1+f^2(x)}}=\int(2x+1)dx$

$\Leftrightarrow\sqrt{1+f^2(x)}=x^2+x+C$.

Theo giả thiết $f(0)=2\sqrt{2}$, suy ra $\sqrt{1+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=C\Leftrightarrow C=3$.

Với $C=3$ thì $\sqrt{1+f^2(x)}=x^2+x+3\Rightarrow f(x)=\sqrt{\left(x^2+x+3\right)^2-1}$. Vậy $f(1)=\sqrt{24}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 34:** **(THPT YÊN PHONG 1 NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên tập $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}$ và $f(x)>-1$, $f(0)=0$. Tính $f\left(\sqrt{3}\right)$.

**A.** $\sqrt{3}$. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 0.

**Lời giải**

**Cách 1.**

Với điều kiện bài toán

Ta có $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Suy ra $\int\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)+1}}\mathrm{d}x=\int\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\sqrt{f(x)+1}=\sqrt{x^2+1}+C$.

Với $f(0)=0$ ta có $1=1+C\Leftrightarrow C=0$.

Khi đó $\sqrt{f(x)+1}=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow f(x)=x^2$

Vậy $f\left(\sqrt{3}\right)=3$.

**Cách 2.**

Từ giả thiết ta suy ra được $\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}(*)$.

Ta có $\int\limits_0^{\sqrt{3}}\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)+1}}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\sqrt{f(x)+1}\Big|_0^{\sqrt{3}}=\sqrt{x^2+1}\Big|_0^{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow\sqrt{f\left(\sqrt{3}\right)+1}-\sqrt{f(0)+1}=1\Leftrightarrow\sqrt{f\left(\sqrt{3}\right)+1}=2\Leftrightarrow f\left(\sqrt{3}\right)=3$.

**Câu 35:** **(KHTN Hà Nội Lần 3)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;4]$ thỏa mãn $f''(x)f(x)+\dfrac{\left[f(x)\right]^2}{\sqrt{(2x+1)^3}}=\left[f'(x)\right]^2$ và $f(x)>0$ với mọi $x\in[0;4]$. Biết rằng $f'(0)=f(0)=1$, giá trị của $f(4)$ bằng

**A.** $e^2$. **B.** $2e$. **C.** $e^3$. **D.** $e^2+1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $f''(x)f(x)+\dfrac{\left[f(x)\right]^2}{\sqrt{(2x+1)^3}}=\left[f'(x)\right]^2\Leftrightarrow f''(x)f(x)-\left[f'(x)\right]^2=-\dfrac{\left[f(x)\right]^2}{\sqrt{(2x+1)^3}}$

$\Leftrightarrow\dfrac{f''(x)f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^2}=-\dfrac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}\Leftrightarrow\left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)'=-\dfrac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\int \frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}dx \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\int (2x+1)^{-\frac{3}{2}}dx \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} + C_1.$

Thay $x=0$ ta được: $C_1 = 0$.

$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \Leftrightarrow \ln\left[f(x)\right] = \sqrt{2x+1} + C_2$

Thay $x=0$ ta được $C_2 = -1$.

$\Rightarrow \ln\left[f(x)\right] = \sqrt{2x+1} - 1$

Thay $x=4$ ta được $\ln\left[f(4)\right] = 2 \Rightarrow f(4) = e^2$.

**Câu 36:** **(THPT NGHĨA HƯNG NĐ- GK2 - 2018 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[xf'(x)\right]^2 + 1 = x^2\left[1 - f(x).f''(x)\right]$ với mọi $x$ dương. Biết $f(1) = f'(1) = 1$. Giá trị $f^2(2)$ bằng

**A.** $f^2(2) = \sqrt{2\ln 2 + 2}$.

**B.** $f^2(2) = 2\ln 2 + 2$.

**C.** $f^2(2) = \ln 2 + 1$.

**D.** $f^2(2) = \sqrt{\ln 2 + 1}$.

**Lời giải**

Ta có: $\left[xf'(x)\right]^2 + 1 = x^2\left[1 - f(x).f''(x)\right]; x > 0$

$\Leftrightarrow x^2.\left[f'(x)\right]^2 + 1 = x^2\left[1 - f(x).f''(x)\right]$

$\Leftrightarrow \left[f'(x)\right]^2 + \frac{1}{x^2} = 1 - f(x).f''(x)$

$\Leftrightarrow \left[f'(x)\right]^2 + f(x).f''(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

$\Leftrightarrow \left[f(x).f'(x)\right]' = 1 - \frac{1}{x^2}$

Do đó: $\int \left[f(x).f'(x)\right]'.dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right).dx \Rightarrow f(x).f'(x) = x + \frac{1}{x} + c_1.$

Vì $f(1) = f'(1) = 1 \Rightarrow 1 = 2 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -1.$

Nên $\int f(x).f'(x).dx = \int \left(x + \frac{1}{x} - 1\right).dx \Leftrightarrow \int f(x).d\left(f(x)\right) = \int \left(x + \frac{1}{x} - 1\right).dx$

$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln x - x + c_2$. Vì $f(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 1.$

Vậy $\frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln x - x + 1 \Rightarrow f^2(2) = 2\ln 2 + 2$.

**Câu 37:** **(Chuyên Thái Nguyên)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left(f'(x)\right)^2 + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $\left(f(1)\right)^2$ là

**A.** 10.

**B.** 8.

**C.** $\frac{5}{2}$.

**D.** $\frac{9}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\left(f(x).f'(x)\right)' = \left(f'(x)\right)^2 + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x, \forall x \in \mathbb{R}.$

$\Rightarrow f(x).f'(x) = 3x^5 + 6x^2 + C, \forall x \in \mathbb{R}.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Lại có $f(0)=f'(0)=1$ nên $C=1$ do đó $f(x).f'(x)=3x^5+6x^2+1,\forall x\in\mathbb{R}.$

$\left(\left(f(x)\right)^2\right)'=2f(x).f'(x)=6x^5+12x^2+2,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\left(f(x)\right)^2=x^6+4x^3+2x+C_1,\forall x\in\mathbb{R}.$

Mà $f(0)=1$ nên $C_1=1$. Vậy $\left(f(1)\right)^2=1^6+4.1^3+2.1+1=8.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

# TÍCH PHÂN

## 1. Công thức tính tích phân

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

* *Nhận xét*: Tích phân của hàm số $f$ từ $a$ đến $b$ có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x)dx$ hay $\int_a^b f(t)dt$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào $f$ và các cận $a$, $b$ mà không phụ thuộc vào cách ghi biến số.

## 2. Tính chất của tích phân

Giả sử cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $K, a, b, c$ là ba số bất kỳ thuộc $K$. Khi đó ta có :

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
4. $\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.
5. $\int_a^b kf(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$.
6. Nếu f(x) $\geq 0, \forall x \in [a;b]$ thì : $\int_a^b f(x)dx \geq 0 \forall x \in [a;b]$
7. Nếu $\forall x \in [a;b]: f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.
8. Nếu $\forall x \in [a;b]$ Nếu $M \leq f(x) \leq N$ thì $M(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq N(b-a)$.

## 3. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

### 1. Phương pháp đổi biến

### 1.1. Phương pháp đổi biến dạng 1

**Định lí**

Nếu hàm số $u = u(x)$ đơn điệu và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ sao cho

$f(x)dx = g\left(u(x)\right)u'(x)dx = g(u)du$ thì: $I = \int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du$.

### 1.2. Phương pháp chung

- *Bước 1:* Đặt $u = u(x) \Rightarrow du = u'(x)dx$
- *Bước 2:* Đổi cận : $\begin{vmatrix} x = b \\ x = a \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} u = u(b) \\ u = u(a) \end{vmatrix}$
- *Bước 3:* Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo $u$

Vậy: $I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b g\left[u(x)\right].u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

### 2.1. Phương pháp đổi biến số dạng 1

**Định lí**

Nếu 1) Hàm $x = u(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[\alpha; \beta]$

2) Hàm hợp $f(u(t))$ được xác định trên $[\alpha; \beta]$,

3) $u(\alpha) = a, u(\beta) = b$

Khi đó: $I = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt$ .

### 2.2. Phương pháp chung

- *Bước 1*: Đặt $x = u(t)$
- *Bước 2:* Tính vi phân hai vế : $x = u(t) \Rightarrow dx = u'(t)dt$

  Đổi cận: $\begin{vmatrix} x = b \\ x = a \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} t = \beta \\ t = \alpha \end{vmatrix}$
- *Bước 3:* Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo biến t

Vậy: $I = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[u(t)]u'(t)dt = \int_\alpha^\beta g(t)dt = G(t)\Big|_\alpha^\beta = G(\beta) - G(\alpha)$

### 2. Phương pháp tích phân từng phần

**Định lí**

Nếu $u(x)$ và $v(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$ thì:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \big(u(x)v(x)\big)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx \quad \text{Hay} \quad \int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

### 2.1 Phương pháp chung

- *Bước 1:* Viết $f(x)dx$ dưới dạng $udv = uv'dx$ bằng cách chọn một phần thích hợp của $f(x)$ làm $u(x)$ và phần còn lại $dv = v'(x)dx$
- *Bước 2:* Tính $du = u'dx$ và $v = \int dv = \int v'(x)dx$
- *Bước 3:* Tính $\int_a^b vu'(x)dx$ và $uv\Big|_a^b$

*** Cách đặt u và dv trong phương pháp tích phân từng phần.**

| Đặt u theo thứ tự ưu tiên: ***Lốc-đa-mũ-lượng*** | $\int_a^b P(x)e^x dx$ | $\int_a^b P(x)\ln x dx$ | $\int_a^b P(x)\cos x dx$ | $\int_a^b e^x \cos x dx$ |
|---|---|---|---|---|
| $u$ | $P(x)$ | $\ln x$ | $P(x)$ | $e^x$ |
| $dv$ | $e^x dx$ | $P(x)dx$ | $\cos x dx$ | $\cos x dx$ |

***Chú ý***: Nên chọn $u$ là phần của $f(x)$ mà khi lấy đạo hàm thì đơn giản, chọn $dv = v'dx$ là phần của $f(x)dx$ là vi phân một hàm số đã biết hoặc có nguyên hàm dễ tìm.

## 3. TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ SƠ CẤP CƠ BẢN

3.1. Tích phân hàm hữu tỉ

### 3.1.1. Dạng 1

$$I = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int_\alpha^\beta \frac{adx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b|\Big|_\alpha^\beta . \quad (\text{với } a \neq 0)$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Chú ý: Nếu $I = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{(ax+b)^k} = \frac{1}{a}\int_\alpha^\beta (ax+b)^{-k}.adx = \frac{1}{a(1-k)}.(ax+b)^{-k+1}\Big|_\alpha^\beta$

### 3.1.2. Dạng 2

$I = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad (a \neq 0) \quad (ax^2+bx+c \neq 0 \text{ với mọi } x \in [\alpha;\beta])$

Xét $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Nếu $\Delta > 0$ thì $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{a(x_1-x_2)}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right)$ thì :

$I = \frac{1}{a(x_1-x_2)}\int_\alpha^\beta \left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right)dx = \frac{1}{a(x_1-x_2)}\left[\ln|x-x_1| - \ln|x-x_2|\right]\Big|_\alpha^\beta$

$= \frac{1}{a(x_1-x_2)} \ln\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right|\Big|_\alpha^\beta$

- Nếu $\Delta = 0$ thì $\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x-x_0)^2} \quad \left(x_0 = \frac{-b}{2a}\right)$

thì $I = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int_\alpha^\beta \frac{dx}{(x-x_0)^2} = -\frac{1}{a(x-x_0)}\Big|_\alpha^\beta$

- Nếu $\Delta < 0$ thì $I = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}\right)^2\right]}$

Đặt $x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}\tan t \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\Delta}{a^2}}\left(1+\tan^2 t\right)dt$

### 3.1.3. Dạng 3

$I = \int_\alpha^\beta \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx, \quad (a \neq 0)$.

(trong đó $f(x) = \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}$ liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$)

- Bằng phương pháp đồng nhất hệ số, ta tìm $A$ và $B$ sao cho:

$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \frac{A(ax^2+bx+c)'}{ax^2+bx+c} + \frac{B}{ax^2+bx+c} = \frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c} + \frac{B}{ax^2+bx+c}$

- Ta có $I = \int_\alpha^\beta \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx = \int_\alpha^\beta \frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx + \int_\alpha^\beta \frac{B}{ax^2+bx+c}dx$

Tích phân $\int_\alpha^\beta \frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx = A\ln\left|ax^2+bx+c\right|\Big|_\alpha^\beta$

Tích phân $\int_\alpha^\beta \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ thuộc dạng 2.

### 3.1.4. Dạng 4

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$I = \int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ với $P(x)$ và $Q(x)$ là đa thức của $x$.

- Nếu bậc của $P(x)$ lớn hơn hoặc bằng bậc của $Q(x)$ thì dùng phép chia đa thức.
- Nếu bậc của $P(x)$ nhỏ hơn bậc của $Q(x)$ thì có thể xét các trường hợp:
- Khi $Q(x)$ chỉ có nghiệm đơn $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ thì đặt

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + ... + \frac{A_n}{x-\alpha_n}.$$

- Khi $Q(x)$ có nghiệm đơn và vô nghiệm

$Q(x) = (x-\alpha)(x^2+px+q), \Delta = p^2 - 4q < 0$ thì đặt

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{Bx+C}{x^2+px+q}.$$

- Khi $Q(x)$ có nghiệm bội

$Q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)^2$ với $\alpha \neq \beta$ thì đặt

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{(x-\beta)^2}.$$

$Q(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)^3$ với $\alpha \neq \beta$ thì đặt

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^2(x-\beta)^3} = \frac{A}{(x-\alpha)^2} + \frac{B}{(x-\alpha)} + \frac{C}{(x-\beta)^3} + \frac{D}{(x-\beta)^2} + \frac{E}{x-\beta}$$

### 3.2. Tích phân hàm vô tỉ

$\int_a^b R(x, f(x))dx$ **Trong đó** $R(x, f(x))$ ***có dạng:***

- $R\left(x, \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)$ Đặt $x = a\cos 2t,\ t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
- $R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)$ Đặt $x = |a|\sin t$ hoặc $x = |a|\cos t$
- $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ Đặt $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$
- $R(x, f(x)) = \frac{1}{(ax+b)\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$ Với $(\alpha x^2+\beta x+\gamma)' = k(ax+b)$

  Đặt $t = \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$, hoặc Đặt $t = \frac{1}{ax+b}$
- $R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)$ Đặt $x = |a|\tan t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

- $R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)$ Đặt $x=\dfrac{|a|}{\cos x},\ t\in[0;\pi]\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$
- $R\left(\sqrt[n_1]{x};\sqrt[n_2]{x};...;\sqrt[n_i]{x}\right)$ *Gọi* $k=BSCNN\left(n_1;n_2;...;n_i\right)$ . *Đặt* $x=t^k$

### 3.2.1. Dạng 1

$$I=\int_\alpha^\beta\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx\quad(a\neq0)$$

Từ : $f(x)=ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]\Rightarrow\begin{cases}x+\dfrac{b}{2a}=u\\ \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}=K\end{cases}\leftrightarrow du=dx$

Khi đó ta có :

- Nếu $\Delta<0,a>0\Rightarrow f(x)=a\left(u^2+k^2\right)\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=\sqrt{a}.\sqrt{u^2+k^2}$ (1)
- Nếu : $\Delta=0\Rightarrow f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \sqrt{f(x)}=\sqrt{a}\left|x+\dfrac{b}{2a}\right|=\sqrt{a}.|u|\end{cases}$ (2)
- Nếu : $\Delta>0$.
  - Với $a>0$ : $f(x)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=\sqrt{a}.\sqrt{\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}$ (3)
  - Với $a<0$ : $f(x)=-a\left(x_1-x\right)\left(x_2-x\right)\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=\sqrt{-a}.\sqrt{\left(x_1-x\right)\left(x_2-x\right)}$ (4)

Căn cứ vào phân tích trên , ta có một số cách giải sau :

✍ **Phương pháp :**

** Trường hợp :* $\Delta<0,a>0\Rightarrow f(x)=a\left(u^2+k^2\right)\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=\sqrt{a}.\sqrt{u^2+k^2}$

Khi đó đặt : $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$

$$\Rightarrow\begin{cases}bx+c=t^2-2\sqrt{a}x\\ x=\alpha\to t=t_0,x=\beta\to t=t_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}};dx=\dfrac{2}{\left(b+2\sqrt{a}\right)}tdt\\ t-\sqrt{a}x=t-\sqrt{a}\dfrac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}}\end{cases}$$

** Trường hợp :* $\Delta=0\Rightarrow f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \sqrt{f(x)}=\sqrt{a}\left|x+\dfrac{b}{2a}\right|=\sqrt{a}.|u|\end{cases}$

Khi đó : $I=\int_\alpha^\beta\frac{1}{\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|}dx=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_\alpha^\beta\frac{1}{\left|x+\frac{b}{2a}\right|}dx=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)\Big|_\alpha^\beta:x+\dfrac{b}{2a}>0\\ -\dfrac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)\Big|_\alpha^\beta:x+\dfrac{b}{2a}<0\end{bmatrix}$

** Trường hợp :* $\Delta>0,a>0$ . Đặt : $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}=\begin{bmatrix}\left(x-x_1\right)t\\ \left(x-x_2\right)t\end{bmatrix}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

*Trường hợp :* $\Delta > 0, a < 0$. Đặt : $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x_1-x)(x_2-x)} = \begin{bmatrix}(x_1-x)t\\(x_2-x)t\end{bmatrix}$

### 3.2.2. Dạng 2

$$I = \int_\alpha^\beta \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \quad (a \neq 0)$$

✍ **Phương pháp :**

- *Bước 1:*

Phân tích $f(x) = \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{A.d\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (1)$

- *Bước 2:*

Quy đồng mẫu số , sau đó đồng nhất hệ số hai tử số để suy ra hệ hai ẩn số $A, B$

- *Bước 3:*

Giải hệ tìm $A, B$ thay vào (1)

- *Bước 4 :*

Tính $I = 2A\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\Big|_\alpha^\beta + B\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ (2)

Trong đó $\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \quad (a \neq 0)$ đã biết cách tính ở trên

### 3.2.3. Dạng 3

$$I = \int_\alpha^\beta \frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \quad (a \neq 0)$$

✍ **Phương pháp :**

- *Bước 1:*

Phân tích : $\frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{m\left(x+\frac{n}{m}\right)\sqrt{ax^2+bx+c}}$. (1)

- *Bước 2:*

Đặt : $\frac{1}{y} = x + \frac{n}{m} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x+t}\left(t = \frac{n}{m}\right) \to dy = -\frac{1}{x+t}dx \\ x = \frac{1}{y} - t \Rightarrow ax^2+bx+c = a\left(\frac{1}{y}-t\right)^2 + b\left(\frac{1}{y}-t\right)+c \end{cases}$

- *Bước 3:*

Thay tất cả vào (1) thì I có dạng : $I = \pm\int_{\alpha'}^{\beta'} \frac{dy}{\sqrt{Ly^2+My+N}}$. Tích phân này chúng ta đã biết cách tính .

### 3.2.4. Dạng 4

$$I = \int_\alpha^\beta R(x;y)dx = \int_\alpha^\beta R\left(x; \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$$

( Trong đó : $R(x;y)$ là hàm số hữu tỷ đối với hai biến số x,y và $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ là các hằng số đã biết )

✍ ***Phương pháp :***

- *Bước 1:*

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Đặt : $t = \sqrt[m]{\dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$ (1)

- *Bước 2:*

Tính x theo t : Bằng cách nâng lũy thừa bậc m hai vế của (1) ta có dạng $x = \varphi(t)$

- *Bước 3:*

Tính vi phân hai vế : $dx = \varphi'(t)dt$ và đổi cận

- *Bước 4:*

Tính : $\int\limits_{\alpha}^{\beta} R\left(x; \sqrt[m]{\dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right)dx = \int\limits_{\alpha'}^{\beta'} R\left(\varphi(t); t\right)\varphi'(t)dt$

### 3.3. Tích phân hàm lượng giác

### 3.3.1. Một số công thức lượng giác

#### 3.3.1.1. Công thức cộng

$\cos(a \pm b) = \cos a.\cos b \mp \sin a.\sin b$

$\sin(a \pm b) = \sin a.\cos b \pm \sin b.\cos a$

$\tan(a \pm b) = \dfrac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a.\tan b}$

#### 3.3.1.2. Công thức nhân đôi

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a = \dfrac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$

$\sin 2a = 2\sin a.\cos a = \dfrac{2\tan a}{1 + \tan^2 a}$ ; $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$ ; $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$

#### 3.3.1.3. Công thức hạ bậc

$\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$ ; $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$ ; $\tan^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$

$\sin^3 \alpha = \dfrac{3\sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$ ; $\cos^3 \alpha = \dfrac{\cos 3\alpha + 3\cos \alpha}{4}$

#### 3.3.1.4. Công thức tính theo t

Với $t = \tan\dfrac{a}{2}$ Thì $\sin a = \dfrac{2t}{1 + t^2}$ ; $\cos a = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$ ; $\tan a = \dfrac{2t}{1 - t^2}$

#### 3.3.1.5. Công thức biến đổi tích thành tổng

$\cos \alpha.\cos \beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right]$

$\sin \alpha.\sin \beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right]$

$\sin \alpha.\cos \beta = \dfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\right]$

#### 3.3.1.6. Công thức biến đổi tổng thành tích

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$
$$\tan\alpha-\tan\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

**Công thức thường dùng:**

$$\cos^4\alpha+\sin^4\alpha=\frac{3+\cos4\alpha}{4}$$
$$\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=\frac{5+3\cos4\alpha}{8}$$

**Hệ quả:**

$$\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$$

### 3.3.2. Một số dạng tích phân lượng giác

- Nếu gặp $I=\int_a^b f(\sin x).\cos x dx$ ta đặt $t=\sin x$.
- Nếu gặp dạng $I=\int_a^b f(\cos x).\sin x dx$ ta đặt $t=\cos x$.
- Nếu gặp dạng $I=\int_a^b f(\tan x)\frac{dx}{\cos^2 x}$ ta đặt $t=\tan x$.
- Nếu gặp dạng $I=\int_a^b f(\cot x)\frac{dx}{\sin^2 x}$ ta đặt $t=\cot x$.

#### 3.3.2.1. Dạng 1

$I_1=\int(\sin x)^n dx$ ; $I_2\int(\cos x)^n dx$

*** Phương pháp**

- Nếu $n$ chẵn thì sử dụng công thức hạ bậc
- Nếu $n=3$ thì sử dụng công thức hạ bậc hoặc biến đổi
- Nếu $3n$ lẻ $(n=2p+1)$ thì thực hiện biến đổi:

$$I_1=\int(\sin x)^n dx=\int(\sin x)^{2p+1}dx=\int(\sin x)^{2p}\sin x dx=-\int(1-\cos^2 x)^p d(\cos x)$$
$$=-\int\left[C_p^0-C_p^1\cos^2 x+\ldots+(-1)^k C_p^k(\cos^2 x)^k+\ldots+(-1)^p C_p^p(\cos^2 x)^p\right]d(\cos x)$$
$$=-\left[C_p^0\cos x-\frac{1}{3}C_p^1\cos^3 x+\ldots+\frac{(-1)^k}{2k+1}C_p^k(\cos x)^{2k+1}+\ldots+\frac{(-1)^p}{2p+1}C_p^p(\cos x)^{2p+1}\right]+c$$

$$I_2=\int(\cos x)^n dx=\int(\cos x)^{2p+1}dx=\int(\cos x)^{2p}\cos x dx=\int(1-\sin^2 x)^p d(\sin x)$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$= \int \left[ C_p^0 - C_p^1 \sin^2 x + ... + (-1)^k C_p^k (\sin^2 x)^k + ... + (-1)^p C_p^p (\sin^2 x)^p \right] d(\sin x)$$

$$= \left[ C_p^0 \sin x - \frac{1}{3} C_p^1 \sin^3 x + ... + \frac{(-1)^k}{2k+1} C_p^k (\sin x)^{2k+1} + ... + \frac{(-1)^p}{2p+1} C_p^p (\sin x)^{2p+1} \right] + c$$

### 3.3.2.2. Dạng 2

$I = \int \sin^m x \cos^n x dx \quad (m, n \in N)$

*** Phương pháp**

- ***Trường hợp 1:*** $m, n$ ***là các số nguyên***

**a.** Nếu $m$ chẵn, $n$ chẵn thì sử dụng công thức hạ bậc, biến đổi tích thành tổng.

**b.** Nếu $m$ chẵn, $n$ lẻ $(n = 2p+1)$ thì biến đổi:

$$I = \int (\sin x)^m (\cos x)^{2p+1} dx = \int (\sin x)^m (\cos x)^{2p} \cos x dx = \int (\sin x)^m (1 - \sin^2 x)^p d(\sin x)$$

$$= \int (\sin x)^m \left[ C_p^0 - C_p^1 \sin^2 x + ... + (-1)^k C_p^k (\sin^2 x)^k + ... + (-1)^p C_p^p (\sin^2 x)^p \right] d(\sin x) =$$

$$\left[ C_p^0 \frac{(\sin x)^{m+1}}{m+1} - C_p^1 \frac{(\sin x)^{m+3}}{m+3} + ... + (-1)^k C_p^k \frac{(\sin x)^{2k+1+m}}{2k+1+m} + ... + (-1)^p C_p^p \frac{(\sin x)^{2p+1+m}}{2p+1+m} \right] + c$$

**c.** Nếu $m$ lẻ $(m = 2p+1)$, $n$ chẵn thì biến đổi:

$$I = \int (\sin x)^{2p+1} (\cos x)^n dx = \int (\cos x)^n (\sin x)^{2p} \sin x dx = -\int (\cos x)^n (1 - \cos^2 x)^p d(\cos x)$$

$$= -\int (\cos x)^n \left[ C_p^0 - C_p^1 \cos^2 x + ... + (-1)^k C_p^k (\cos^2 x)^k + ... + (-1)^p C_p^p (\cos^2 x)^p \right] d(\cos x) =$$

$$-\left[ C_p^0 \frac{(\cos x)^{n+1}}{n+1} - C_p^1 \frac{(\cos x)^{n+3}}{n+3} + ... + (-1)^k C_p^k \frac{(\cos x)^{2k+1+n}}{2k+1+n} + ... + (-1)^p C_p^p \frac{(\cos x)^{2p+1+n}}{2p+1+n} \right] + c$$

**d.** Nếu $m$ lẻ, $n$ lẻ thì sử dụng biến đổi 1.2. hoặc 1.3. cho số mũ lẻ bé hơn.

- ***Nếu*** $m, n$ ***là các số hữu tỉ thì biến đổi và đặt*** $u = \sin x$

$$B = \int \sin^m x \cos^n x dx = \int (\sin x)^m (\cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cos x dx = \int u^m (1 - u^2)^{\frac{n-1}{2}} du \quad (*)$$

Tích phân (*) tính được $\Leftrightarrow$ 1 trong 3 số $\frac{m+1}{2}$ ; $\frac{n-1}{2}$ ; $\frac{m+k}{2}$ là số nguyên

### 3.3.2.3. Dạng 3

$I_1 = \int (\tan x)^n dx$ ; $I_2 = \int (\cot x)^n dx$ $(n \in N)$.

- $\int (1 + \tan^2 x) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int d(\tan x) = \tan x + c$
- $\int (1 + \cot^2 x) dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int d(\cot x) = -\cot x + C$
- $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$
- $\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

## SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT VÀ TÍCH PHÂN CƠ BẢN

**Câu 1.** **(Thuan-Thanh-Bac-Ninh)** Biết $\int_0^1 \frac{3x-1}{x^2+6x+9}\mathrm{d}x = 3\ln\frac{a}{b} - \frac{5}{6}$, trong đó $a$, $b$ là hai số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $a^2-b^2$ bằng

**A.** 7. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 5.

**Lời giải**

**Chọn A**

Giả sử: $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+6x+9} = \frac{3x-1}{(x+3)^2} = \frac{A}{(x+3)^2} + \frac{B}{x+3} = \frac{Bx+A+3B}{(x+3)^2}$.

Sử dụng phương pháp đồng nhất thức, suy ra $B=3$ và $A=-10$.

Do đó $f(x) = \frac{-10}{(x+3)^2} + \frac{3}{x+3}$.

Vậy $\int_0^1 \frac{3x-1}{x^2+6x+9}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{-10}{(x+3)^2} + \frac{3}{x+3}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{-10}{(x+3)^2}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{3}{x+3}\mathrm{d}x = A+B$.

$A = \int_0^1 \frac{-10}{(x+3)^2}\mathrm{d}x = \frac{10}{x+3}\Big|_0^1 = -\frac{5}{6}$.

$B = \int_0^1 \frac{3}{x+3}\mathrm{d}x = 3\ln|x+3|\Big|_0^1 = 3\ln\frac{4}{3}$.

Suy ra $a=4$, $b=3$.

Kết luận: $a^2-b^2 = 4^2-3^2 = 7$.

**Câu 2.** **(KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG)** Cho tích phân $\int_2^3 \frac{1}{x^3+x^2}\mathrm{d}x = a\ln 3 + b\ln 2 + c$ với $a$, $b$, $c \in \mathbb{Q}$. Tính $S = a+b+c$.

**A.** $S = -\frac{2}{3}$. **B.** $S = -\frac{7}{6}$. **C.** $S = \frac{2}{3}$. **D.** $S = \frac{7}{6}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $\frac{1}{x^3+x^2} = \frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{(A+C)x^2 + (A+B)x + B}{x^2(x+1)}$

$\Rightarrow \begin{cases} B=1 \\ A+B=0 \\ A+C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \\ C=1 \end{cases}$.

Khi đó: $\int_2^3 \frac{1}{x^3+x^2}\mathrm{d}x = \int_2^3 \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \left(\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x}\right)\Big|_2^3 = -2\ln 3 + 3\ln 2 + \frac{1}{6} \Rightarrow a=-2$,

$b=3$, $c=\frac{1}{6} \Rightarrow S = -2+3+\frac{1}{6} = \frac{7}{6}$.

**Câu 3.** **(Sở Phú Thọ)** Cho $\int_3^4 \frac{5x-8}{x^2-3x+2}dx = a\ln 3 + b\ln 2 + c\ln 5$ với $a,b,c$ là các số hữu tỉ. Giá trị của $2^{a-3b+c}$ bằng

**A.** 12. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 64.

**Lời giải**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Chọn D**

Ta có:

$$\int_3^4 \frac{5x-8}{x^2-3x+2}dx=\int_3^4 \frac{5x-8}{(x-1)(x-2)}dx=\int_3^4 \frac{3(x-2)+2(x-1)}{(x-1)(x-2)}dx=\int_3^4\left(\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x-2}\right)dx$$

$$=\left(3\ln|x-1|+2\ln|x-2|\right)\Big|_3^4=3\ln 3+2\ln 2-3\ln 2=3\ln 3-\ln 2.$$

Suy ra $a=3,b=-1,c=0\Rightarrow 2^{a-3b+c}=2^6=64$.

**Câu 4.** **(CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3)** Cho $\int_3^5 \frac{x^2-2}{x^2-3x+2}dx=a+b\ln 2+c\ln 3$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$.

Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c$.

**A.** 9. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\int_3^5 \frac{x^2-2}{x^2-3x+2}dx=\int_3^5\left(1+\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}\right)dx=\left(x+2\ln|x-2|+\ln|x-1|\right)\Big|_3^5=2+\ln 2+2\ln 3$.

Vậy $a=2,b=1,c=2\Rightarrow a+b+c=5$.

**Câu 5.** **(Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2)** Cho $\int_0^1 \frac{4x^2+15x+11}{2x^2+5x+2}dx=a+b\ln 2+c\ln 3$ với $a$, $b$, $c$ là các số hữu tỷ. Biểu thức $T=a.c-b$ bằng

**A.** 4. **B.** 6. **C.** $\frac{-1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có

$$\int_0^1 \frac{4x^2+15x+11}{2x^2+5x+2}dx=\int_0^1 \frac{(4x^2+10x+4)+(5x+7)}{2x^2+5x+2}dx=\int_0^1\left(2+\frac{5x+7}{2x^2+5x+2}\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(2+\frac{1}{x+2}+\frac{3}{2x+1}\right)dx=\left(2x+\ln|x+2|+\frac{3}{2}\ln|2x+1|\right)\Big|_0^1=2-\ln 2+\frac{5}{2}\ln 3$$

Vậy $a=2$, $b=-1$, $c=\frac{5}{2}$ nên $T=6$.

**Câu 6.** Biết $\int \frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6}dx=\ln\left|(x-1)^m(x-2)^n(x-3)^p\right|+C$. Tính $4(m+n+p)$.

**A.** 5. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $\frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6}=\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow x^2+1=A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B+C=1\\-5A-4B-3C=0\\6A+3B+2C=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\B=-5\\C=5\end{cases}.$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Suy ra $\int \frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x - 5\int \frac{1}{x-2}\mathrm{d}x + 5\int \frac{1}{x-3}\mathrm{d}x$

$= \ln\left|(x-1)(x-2)^{-5}(x-3)^5\right| + C$.

Vậy $4(m+n+p) = 4$.

**Câu 7.** Biết $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+2}+(x+2)\sqrt{x}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}-c$ với $a,b,c$ là các số nguyên dương. Tính $P = a+b+c$.

**A.** $P=2$. **B.** $P=8$. **C.** $P=46$. **D.** $P=22$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+2}+(x+2)\sqrt{x}} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)} = \int_1^2 \frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}\sqrt{x+2}}\mathrm{d}x$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x+2}}\right)\mathrm{d}x = \left(\sqrt{x}-\sqrt{x+2}\right)\Big|_1^2 = \sqrt{2}+\sqrt{3}-3.$$

Vậy $a=2; b=3; c=3$ nên $P = a+b+c = 8$.

**Câu 8.** Biết $I = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên dương. Tính $P = a+b+c$.

**A.** $P=24$. **B.** $P=12$. **C.** $P=18$. **D.** $P=46$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $\sqrt{x+1}-\sqrt{x} \neq 0$, $\forall x \in [1;2]$ nên:

$$I = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}$$

$$= \int_1^2 \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)} = \int_1^2 \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}}$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x = \left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}\right)\Big|_1^2 = 4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2 = \sqrt{32}-\sqrt{12}-2.$$

Mà $I = \sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ nên $\begin{cases} a=32 \\ b=12 \\ c=2 \end{cases}$. Suy ra: $P = a+b+c = 32+12+2 = 46$.

**Câu 9.** **(Chuyên Vinh Lần 3)** Cho hàm số $G(x) = \int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\,dt$. Tính đạo hàm của hàm số $G(x)$.

**A.** $G'(x) = 2x\sin|x|$ **B.** $G'(x) = 2x\cos x$ **C.** $G'(x) = \cos x$ **D.** $G'(x) = 2x\sin x$

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$. Theo định nghĩa: $G(x) = F(x^2) - F(0)$

$\Rightarrow G'(x) = F'(x^2).2x - F'(0) = 2x.\sin\sqrt{x^2} = 2x.\sin|x|$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 10.** **(THPT NINH BÌNH – BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019)** Biết rằng $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-4\sin x+7\cos x}{2\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x=a+2\ln\frac{b}{c}$ với $a>0;b,c\in\mathbb{N}^*;\frac{b}{c}$ tối giản. Hãy tính giá trị biểu thức $P=a-b+c$.

**A.** $\pi-1$. **B.** $\frac{\pi}{2}+1$. **C.** $\frac{\pi}{2}-1$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Xét đồng nhất thức: $-4\sin x+7\cos x=A(2\sin x+3\cos x)+B(2\cos x-3\sin x)$

$=(2A-3B)\sin x+(3A+2B)\cos x\Leftrightarrow\begin{cases}2A-3B=-4\\3A+2B=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\B=2\end{cases}$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-4\sin x+7\cos x}{2\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{2(2\sin x+3\cos x)'}{2\sin x+3\cos x}\right)\mathrm{d}x=\left(x+2\ln\left|2\sin x+3\cos x\right|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{\pi}{2}+2\ln\frac{2}{3}.\Rightarrow a=\frac{\pi}{2},b=2,c=3.$

Vậy $P=a-b+c=\frac{\pi}{2}-2+3=\frac{\pi}{2}+1.$

**Câu 48:** **(THPT YÊN PHONG 1 BẮC NINH NĂM HỌC 2018-2019 LẦN 2)** Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cot\left(\frac{5\pi}{12}-x\right)\tan\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}dx=\frac{2+\sqrt{a}}{2}\ln b-\frac{\pi}{c}$ với $a,b,c$ là các số nguyên dương. Tính $a^2+b^2+c^2$

**A.** $48$. **B.** $18$. **C.** $34$. **D.** $36$.

**Lời giải**

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cot\left(\frac{5\pi}{12}-x\right)\tan\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{12}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{12}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\frac{7\pi}{12}+\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)}{\sin\frac{7\pi}{12}-\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(-1+\frac{2\sin\frac{7\pi}{12}}{\sin\frac{7\pi}{12}-\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)}\right)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(-1+\frac{\tan\frac{7\pi}{12}\cos\left(\frac{5\pi}{12}-x+\frac{\pi}{6}+x\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{12}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(-1+\tan\frac{7\pi}{12}\left(\cot\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-\tan\left(\frac{5\pi}{12}-x\right)\right)\right)dx$

$=\left(-x+\tan\frac{7\pi}{12}\left(\ln\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-\ln\cos\left(\frac{5\pi}{12}-x\right)\right)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{\pi}{4}+\frac{2+\sqrt{3}}{2}\ln 3$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Do đó $a=3;b=3;c=4$. Vậy $a^2+b^2+c^2=34$.

**Câu 4:** Biết $I=\int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x}dx=4+a\ln 2+b\ln 5$, với $a,b$ là các số nguyên. Tính $S=a-b$.

**A.** $S=9$. **B.** $S=11$. **C.** $S=5$. **D.** $S=-3$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Ta có: $I=\int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x}dx=\int_1^2 \frac{2|x-2|+1}{x}dx+\int_2^5 \frac{2|x-2|+1}{x}dx$

$=\int_1^2 \frac{2(2-x)+1}{x}dx+\int_2^5 \frac{2(x-2)+1}{x}dx=\int_1^2 \frac{5-2x}{x}dx+\int_2^5 \frac{2x-3}{x}dx$

$=\int_1^2\left(\frac{5}{x}-x\right)dx+\int_2^5\left(2-\frac{3}{x}\right)dx=\left(5\ln|x|-x\right)\Big|_1^2+\left(2x-3\ln|x|\right)\Big|_2^5$

$=8\ln 2-3\ln 5+4\Rightarrow\begin{cases}a=8\\b=-3\end{cases}\Rightarrow a-b=11.$

**Câu 11.** **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn $f(1)=2\ln 2+1$, $x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x)=x(x+1)$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$. Biết $f(2)=a+b\ln 3$, với $a$, $b$ là hai số hữu tỉ. Tính $T=a^2-b$.

**A.** $T=-\frac{3}{16}$. **B.** $T=\frac{21}{16}$. **C.** $T=\frac{3}{2}$. **D.** $T=0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x)=x(x+1)\Rightarrow f'(x)+\frac{x+2}{x(x+1)}f(x)=1$

$\Rightarrow\frac{x^2}{x+1}f'(x)+\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}f(x)=\frac{x^2}{x+1}\Rightarrow\left[\frac{x^2}{x+1}f(x)\right]'=\frac{x^2}{x+1}\Rightarrow\int_1^2\left[\frac{x^2}{x+1}f(x)\right]'dx=\int_1^2\frac{x^2}{x+1}dx$

$\Rightarrow\int_1^2\left[\frac{x^2}{x+1}f(x)\right]'dx=\int_1^2\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx\Rightarrow\left[\frac{x^2}{x+1}f(x)\right]\Big|_1^2=\left(\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|\right)\Big|_1^2$

$\Rightarrow\frac{4}{3}f(2)-\frac{1}{2}f(1)=\ln 3-\ln 2+\frac{1}{2}\Rightarrow f(2)=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\ln 3\Rightarrow a=b=\frac{3}{4}\Rightarrow T=-\frac{3}{16}.$

**Câu 12.** **(Chuyên Vinh Lần 3)**Cho biết $f(x)=\int_e^{e^{2x}} t\ln^9 t\,dt$, tìm điểm cực trị của hàm số đã cho

**A.** $x=2$ **B.** $x=0$ **C.** $x=-1$ **D.** $x=6$

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)=x\ln^9 x$. Theo định nghĩa: $f(x)=G(e^{2x})-G(e)$

$\Rightarrow f'(x)=G'(e^{2x}).e^{2x}.2-G'(e)=2.e^{4x}(2x)^9$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$. Suy ra chọn đáp án **B.**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 13.** **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Cho $\int_1^4 \sqrt{\frac{1}{4x}+\frac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}.e^{2x}}}dx = a+e^b-e^c$ với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên. Tính giá trị $a+b+c$.

**A.** $-4$. **B.** $-5$. **C.** $-3$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $\sqrt{\frac{1}{4x}+\frac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}.e^{2x}}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2+2.\frac{1}{2\sqrt{x}.e^x}+\left(\frac{1}{e^x}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{e^x}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{e^x}$

$\Rightarrow \int_1^4 \sqrt{\frac{1}{4x}+\frac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}.e^{2x}}}dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{e^x}\right)dx = \left(\sqrt{x}-e^{-x}\right)\Big|_1^4 = 1-e^{-4}+e^{-1} = a+e^b-e^c$

$\Rightarrow a=1; b=-1; c=-4.$

Vậy $a+b+c=1+(-1)+(-4)=-4.$

**Câu 14.** $\Leftrightarrow \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = 6$. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các số nguyên dương $k$ thỏa mãn $\int_1^2 \mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x < \frac{2018.\mathrm{e}^k-2018}{k}$. Số phần tử của tập hợp $S$ bằng.

**A.** $7$. **B.** $8$. **C.** Vô số. **D.** $6$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $\int_1^2 \mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}\right)\Big|_1^2 = \frac{\mathrm{e}^{2k}-\mathrm{e}^k}{k}$.

$\int_1^2 \mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x < \frac{2018.\mathrm{e}^k-2018}{k} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^{2k}-\mathrm{e}^k}{k} < \frac{2018.\mathrm{e}^k-2018}{k}$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^k\left(\mathrm{e}^k-1\right) < 2018\left(\mathrm{e}^k-1\right)$ (do $k$ nguyên dương).

$\Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^k-1\right)\left(\mathrm{e}^k-2018\right) < 0 \Leftrightarrow 1 < \mathrm{e}^k < 2018 \Leftrightarrow 0 < k < \ln 2018 \approx 7.6$.

Do $k$ nguyên dương nên ta chọn được $k \in S$ (với $S=\{1;2;3;4;5;6;7\}$).

Suy ra số phần tử của $S$ là $7$.

**Câu 15.** **(Thị Xã Quảng Trị)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 4$. Tính $\int_{-1}^3 f(|x|)\mathrm{d}x$.

**A.** $6$. **B.** $4$. **C.** $8$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Vì $f(|x|)$ là hàm chẵn nên $\int_{-1}^1 f(|x|)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(|x|)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 4$.

Ta có: $\int_{-1}^3 f(|x|)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 f(|x|)\mathrm{d}x + \int_1^3 f(|x|)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 4+4=8$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 16.** **(Chuyên Hạ Long lần 2-2019)** Có bao nhiêu số tự nhiên $m$ để $\int_0^2 \left|x^2-2m^2\right|\mathrm{d}x=\left|\int_0^2 \left(x^2-2m^2\right)\mathrm{d}x\right|$.

**A.** Vô số. **B.** $0$. **C.** Duy nhất. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\int_0^2 \left|x^2-2m^2\right|\mathrm{d}x=\left|\int_0^2 \left(x^2-2m^2\right)\mathrm{d}x\right|$ $(*)$

Ta có: $x^2-2m^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-m\sqrt{2}\\x=m\sqrt{2}\end{array}\right.$.

**TH1.** Nếu $m=0$ thì $(*)$ luôn đúng.

**TH2.** Nếu $m\neq 0$ thi $(*)$ đúng $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2m^2>0\ (1)\\x^2-2m^2<0\ (2)\end{array}\right.$ với mọi $x\in[0;2]$.

+) $m>0$.

$(1)$ đúng $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-m\sqrt{2}<m\sqrt{2}\le 0\\2\le -m\sqrt{2}<m\sqrt{2}\end{array}\right.$ (vô nghiệm).

$(2)$ đúng $\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-m\sqrt{2}\le 0\\m\sqrt{2}\ge 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\ge 0\\m\ge\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow m\ge\sqrt{2}$.

+) $m<0$.

$(1)$ đúng $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\sqrt{2}<-m\sqrt{2}\le 0\\2\le m\sqrt{2}<-m\sqrt{2}\end{array}\right.$ (vô nghiệm).

$(2)$ đúng $\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\sqrt{2}\le 0\\-m\sqrt{2}\ge 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\le 0\\m\le-\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow m\le-\sqrt{2}$.

Suy ra $m\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)\cup\{0\}$ là giá trị cần tìm.

**Câu 17.** **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Biết $\int_0^2\left[f(x)+x\right]\mathrm{d}x=6$ và $\int_0^2\left[3f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=10$. Tính $I=\int_0^2\left[2f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x$.

**A.** $I=12$. **B.** $I=16$. **C.** $I=10$. **D.** $I=14$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\int_0^2\left[f(x)+x\right]\mathrm{d}x=6\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2=6\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4$.

$\int_0^2\left[3f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=10\Leftrightarrow\int_0^2 3f(x)\mathrm{d}x-\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x=10\Rightarrow\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 3f(x)\mathrm{d}x-10=2$.

$I=\int_0^2\left[2f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=2.4+3.2=14$.

Vậy $I=14$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 18.** **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Biết $\int_0^2 \left[ f(x)+x \right] dx = 6$ và $\int_0^2 \left[ 3f(x)-g(x) \right] dx = 10$. Tính $I = \int_0^2 \left[ 2f(x)+3g(x) \right] dx$.

**A.** $I = 12$. **B.** $I = 16$. **C.** $I = 10$. **D.** $I = 14$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\int_0^2 \left[ f(x)+x \right] dx = 6 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx + \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^2 = 6 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 4$.

$\int_0^2 \left[ 3f(x)-g(x) \right] dx = 10 \Leftrightarrow \int_0^2 3f(x) dx - \int_0^2 g(x) dx = 10 \Rightarrow \int_0^2 g(x) dx = \int_0^2 3f(x) dx - 10 = 2$.

$I = \int_0^2 \left[ 2f(x)+3g(x) \right] dx = 2.4 + 3.2 = 14$.

Vậy $I = 14$.

**Câu 1.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 \left( f'(x) \right)^2 dx = \int_0^1 (x+1).e^x.f(x) dx = \frac{e^2-1}{4}$ và $f(1) = 0$. Tính $\int_0^1 f(x) dx = ?$

**A.** $2+e$ **B.** $2-e$ **C.** $e$ **D.** $1-e$

**Lời giải:**

Ta có: $\frac{e^2-1}{4} = \int_0^1 (x+1).e^x.f(x) dx = \int_0^1 f(x) d\left( x.e^x \right) = -\int_0^1 x.e^x.f'(x) dx$

$\Rightarrow \int_0^1 \left( f'(x) \right)^2 dx = -\int_0^1 x.e^x.f'(x) dx = \frac{e^2-1}{4} = \int_0^1 x^2.e^{2x} dx$

$\Rightarrow \int_0^1 \left( f'(x) \right)^2 dx + \int_0^1 x^2.e^{2x} dx + 2\int_0^1 x.e^x.f'(x) dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 \left( f'(x) + x.e^x \right)^2 dx = 0$

$\Rightarrow f'(x) = -x.e^x \Rightarrow f(x) = e^x(x-1) \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 2-e$.

**Chọn B**

**Câu 19.** **(Chuyên Vinh Lần 3)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0) = 3$ và $f(x) + f(2-x) = x^2 - 2x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^2 xf'(x) dx$ bằng

**A.** $\frac{-4}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{-10}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Thay $x = 0$ ta được $f(0) + f(2) = 2 \Rightarrow f(2) = 2 - f(0) = 2 - 3 = -1$

Ta có: $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 f(2-x) dx$

Từ hệ thức đề ra: $\int_0^2 \left( f(x) + f(2-x) \right) dx = \int_0^2 \left( x^2 - 2x + 2 \right) dx = \frac{8}{3} \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = \frac{4}{3}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta lại có:

$\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x = xf(x)\big|_0^2 - \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 2.(-1) - \frac{4}{3} = -\frac{10}{3}$.

**Câu 20.** Biết rằng hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = -\frac{7}{2}$, $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = -2$ và $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = \frac{13}{2}$ (với $a$, $b$, $c\in\mathbb{R}$). Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c$.

**A.** $P=-\frac{3}{4}$. **B.** $P=-\frac{4}{3}$. **C.** $P=\frac{4}{3}$. **D.** $P=\frac{3}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\int_0^d f(x)\mathrm{d}x = \left(\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right)\Big|_0^d = \frac{a}{3}d^3+\frac{b}{2}d^2+cd$.

Do đó: $\begin{cases}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = -\frac{7}{2}\\ \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = -2\\ \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = \frac{13}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=-\frac{7}{2}\\ \frac{8}{3}a+2b+2c=-2\\ 9a+\frac{9}{2}b+3c=\frac{13}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b=3\\ c=-\frac{16}{3}\end{cases}$. Vậy $P=a+b+c=-\frac{4}{3}$

**Câu 21.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^3+x^5}$, $f(1)=a$ và $f(-2)=b$. Tính $f(-1)+f(2)$.

**A.** $f(-1)+f(2)=-a-b$. **B.** $f(-1)+f(2)=a-b$.

**C.** $f(-1)+f(2)=a+b$. **D.** $f(-1)+f(2)=b-a$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $f'(-x)=\frac{1}{(-x)^3+(-x)^5}=-\frac{1}{x^3+x^5}=-f'(x)$ nên $f'(x)$ là hàm lẻ.

Do đó $\int_{-2}^2 f'(x)\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \int_{-2}^{-1} f'(x)\mathrm{d}x = -\int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $f(-1)-f(-2)=-f(2)+f(1) \Rightarrow f(-1)+f(2)=f(-2)+f(1)=a+b$.

**Câu 22.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2+x^4}$, $f(1)=a$, $f(-2)=b$. Giá trị của biểu thức $f(-1)-f(2)$ bằng

**A.** $b-a$. **B.** $a+b$. **C.** $a-b$. **D.** $-a-b$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $f'(-x)=\frac{1}{(-x)^2+(-x)^4}=\frac{1}{x^2+x^4}=f'(x)$ nên $f'(x)$ là hàm chẵn.

Do đó $\int_{-2}^{-1} f'(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Suy ra $f(-1)-f(2)=f(-1)-f(-2)+f(-2)-f(1)+f(1)-f(2)$

$=\int_{-2}^{-1} f'(x)\mathrm{d}x+b-a-\int_{1}^{2} f'(x)\mathrm{d}x=b-a$.

**Câu 55:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn [1, 2] và thỏa mãn $f(x)>0$ khi $x\in[1,2]$. Biết $\int_1^2 f'(x)dx=10$ và $\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln 2$. Tính $f(2)$.

**A.** $f(2)=-10$. **B.** $f(2)=20$. **C.** $f(2)=10$. **D.** $f(2)=-20$.

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $\int_1^2 f'(x)dx=f(x)\Big|_1^2=f(2)-f(1)=10$ (gt)

$\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln\left[f(x)\right]\Big|_1^2=\ln\left[f(2)\right]-\ln\left[f(1)\right]=\ln\frac{f(2)}{f(1)}=\ln 2$ (gt)

Vậy ta có hệ: $\begin{cases} f(2)-f(1)=10 \\ \frac{f(2)}{f(1)}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(2)=20 \\ f(1)=10 \end{cases}$

**Chọn B**

**Câu 57:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên **R**, nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$ và thỏa $f(1)=1$, $f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}$. Mệnh đề nào đúng?

**A.** $1<f(5)<2$. **B.** $4<f(5)<5$. **C.** $2<f(5)<3$. **D.** $3<f(5)<4$.

**Hướng dẫn giải**

Từ gt: $f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{3x+1}}=\frac{f'(x)}{f(x)}$

$\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{1}{\sqrt{3x+1}}dx\Rightarrow\ln\left[f(x)\right]=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C\Rightarrow f(x)=e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C}$

**Vì** $f(1)=1\Leftrightarrow e^{\frac{2}{3}.2+C}=1=e^0\Rightarrow C=-\frac{4}{3}\Rightarrow f(x)=e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{4}{3}}\Rightarrow f(5)=e^{\frac{4}{3}}\approx 3,79$

**Chọn D**

**Câu 23.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[-1;1]$, thỏa mãn $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f'(x)+2f(x)=0$. Biết $f(1)=1$, tính $f(-1)$.

**A.** $f(-1)=e^{-2}$. **B.** $f(-1)=e^3$. **C.** $f(-1)=e^4$. **D.** $f(-1)=3$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Biến đổi:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$f'(x)+2f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=-2 \Leftrightarrow \int\limits_{-1}^{1}\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\limits_{-1}^{1}-2dx \Leftrightarrow \int\limits_{-1}^{1}\dfrac{df(x)}{f(x)}=-4 \Leftrightarrow \ln f(x)\Big|_{-1}^{1}=-4$

$\ln\dfrac{f(1)}{f(-1)}=-4 \Leftrightarrow \dfrac{f(1)}{f(-1)}=e^{-4} \Leftrightarrow f(-1)=f(1).e^{4}=e^{4}.$

**Câu 24.** Cho hàm số $f$ liên tục, $f(x)>-1$, $f(0)=0$ và thỏa $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}$. Tính $f\left(\sqrt{3}\right)$.

**A.** $0$. **B.** $3$. **C.** $7$. **D.** $9$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1} \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Leftrightarrow \int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \sqrt{f(x)+1}\Big|_{0}^{\sqrt{3}}=\sqrt{x^2+1}\Big|_{0}^{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{f(x)+1}\Big|_{0}^{\sqrt{3}}=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{f\left(\sqrt{3}\right)+1}-\sqrt{f(0)+1}=1 \Leftrightarrow \sqrt{f\left(\sqrt{3}\right)+1}=2 \Leftrightarrow f\left(\sqrt{3}\right)=3.$

**Câu 25.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1, 2]$ và thỏa mãn $f(x)>0$ khi $x\in[1,2]$. Biết $\int\limits_{1}^{2}f'(x)dx=10$ và $\int\limits_{1}^{2}\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln 2$. Tính $f(2)$.

**A.** $f(2)=-10$. **B.** $f(2)=20$. **C.** $f(2)=10$. **D.** $f(2)=-20$.

**Lời giải:**

Ta có: $\int\limits_{1}^{2}f'(x)dx=f(x)\Big|_{1}^{2}=f(2)-f(1)=10$ (gt)

$\int\limits_{1}^{2}\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln\left[f(x)\right]\Big|_{1}^{2}=\ln\left[f(2)\right]-\ln\left[f(1)\right]=\ln\dfrac{f(2)}{f(1)}=\ln 2$ (gt)

Vậy ta có hệ: $\begin{cases}f(2)-f(1)=10\\ \dfrac{f(2)}{f(1)}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}f(2)=20\\ f(1)=10\end{cases}$

**Chọn B**

**Câu 26.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $(C)$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\left(x.f(x)\right)^2, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ của đồ thị $(C)$ là.

**A.** $y=6x+30$. **B.** $y=-6x+30$. **C.** $y=36x-30$. **D.** $y=-36x+42$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$f'(x)=\left(x.f(x)\right)^2 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=x^2 \Leftrightarrow \int\limits_{0}^{1}\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}x^2\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_{0}^{1}\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{f^2(x)}=\dfrac{x^3}{3}\Big|_{0}^{1} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{f(x)}\Big|_{0}^{1}=\dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{f(1)}-\dfrac{1}{f(0)}=-\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(1)}=\dfrac{1}{6} \Leftrightarrow f(1)=6.$

$f'(1)=\left(1.f(1)\right)^2=36.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vậy phương trình tiếp tuyến cần lập là $y=36x-30$.

**Câu 27.** Cho hàm số $y=f(x)>0$ xác định, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn: $g(x)=1+2018\int_0^x f(t)\mathrm{dt}$, $g(x)=f^2(x)$. Tính $\int_0^1\sqrt{g(x)}\mathrm{d}x$.

**A.** $\frac{1011}{2}$. **B.** $\frac{1009}{2}$. **C.** $\frac{2019}{2}$. **D.** $505$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $g(x)=1+2018\int_0^x f(t)\mathrm{dt}\Rightarrow g'(x)=2018f(x)=2018\sqrt{g(x)}$

$\Rightarrow\frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}=2018\Rightarrow\int_0^t\frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}\mathrm{d}x=2018\int_0^t\mathrm{d}x\Rightarrow 2\left(\sqrt{g(x)}\right)\Big|_0^t=2018x\Big|_0^t$

$\Rightarrow 2\left(\sqrt{g(t)}-1\right)=2018t$ (do $g(0)=1$)

$\Rightarrow\sqrt{g(t)}=1009t+1$

$\Rightarrow\int_0^1\sqrt{g(t)}\mathrm{dt}=\left(\frac{1009}{2}t^2+t\right)\Big|_0^1=\frac{1011}{2}$.

**Câu 28.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn $f'(0)=9$ và $9f''(x)+\left[f'(x)-x\right]^2=9$. Tính $T=f(1)-f(0)$.

**A.** $T=2+9\ln 2$. **B.** $T=9$. **C.** $T=\frac{1}{2}+9\ln 2$. **D.** $T=2-9\ln 2$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $9f''(x)+\left[f'(x)-x\right]^2=9\Rightarrow 9\left(f''(x)-1\right)=-\left[f'(x)-x\right]^2\Rightarrow-\frac{f''(x)-1}{\left[f'(x)-x\right]^2}=\frac{1}{9}$.

Lấy nguyên hàm hai vế $-\int\frac{f''(x)-1}{\left[f'(x)-x\right]^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{9}\mathrm{d}x\Rightarrow\frac{1}{f'(x)-x}=\frac{x}{9}+C$.

Do $f'(0)=9$ nên $C=\frac{1}{9}$ suy ra $f'(x)-x=\frac{9}{x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{9}{x+1}+x$

Vậy $T=f(1)-f(0)=\int_0^1\left(\frac{9}{x+1}+x\right)\mathrm{d}x=\left(9\ln|x+1|+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=9\ln 2+\frac{1}{2}$.

**Câu 29.** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x).f(x)=x^4+x^2$. Biết $f(0)=2$. Tính $f^2(2)$.

**A.** $f^2(2)=\frac{313}{15}$. **B.** $f^2(2)=\frac{332}{15}$. **C.** $f^2(2)=\frac{324}{15}$. **D.** $f^2(2)=\frac{323}{15}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có

$f'(x).f(x)=x^4+x^2\Rightarrow\int_0^2 f'(x).f(x)dx=\int_0^2\left(x^4+x^2\right)dx\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)df(x)=\frac{136}{15}\Leftrightarrow\frac{f^2(x)}{2}\Big|_0^2=\frac{136}{15}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\frac{f^2(2)-4}{2}=\frac{136}{15}\Leftrightarrow f^2(2)=\frac{332}{15}$.

**Câu 30.** Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ thỏa mãn $3f(x)+f'(x)=\sqrt{1+3.e^{-2x}}$. Khi đó:

**A.** $e^3f(1)-f(0)=\frac{1}{\sqrt{e^2+3}}-\frac{1}{2}$.

**B.** $e^3f(1)-f(0)=\frac{1}{2\sqrt{e^2+3}}-\frac{1}{4}$.

**C.** $e^3f(1)-f(0)=\frac{(e^2+3)\sqrt{e^2+3}-8}{3}$.

**D.** $e^3f(1)-f(0)=(e^2+3)\sqrt{e^2+3}-8$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $3f(x)+f'(x)=\sqrt{1+3.e^{-2x}}=\frac{\sqrt{e^{2x}+3}}{e^x}\Rightarrow 3e^{3x}f(x)+e^{3x}f'(x)=e^{2x}\sqrt{e^{2x}+3}$.

$\Leftrightarrow\left[e^{3x}f(x)\right]'=e^{2x}\sqrt{e^{2x}+3}$.

Lấy tích phân từ 0 đến 1 hai vế ta được $\int_0^1\left[e^{3x}f(x)\right]'dx=\int_0^1 e^{2x}\sqrt{e^{2x}+3}\,dx$

$\Leftrightarrow\left[e^{3x}f(x)\right]\Big|_0^1=\frac{1}{3}\left(\sqrt{e^{2x}+3}\right)^3\Big|_0^1\Leftrightarrow e^3f(1)-f(0)=\frac{(e^2+3)\sqrt{e^2+3}-8}{3}$.

**Câu 114:** Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên R thỏa mãn $[f(x)]^2=\int_0^x\left[(f(t))^2+(f'(t))^2\right]dt+2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $f(1)=2018e$. **B.** $f(1)=\sqrt{2018}$. **C.** $f(1)=2018$. **D.** $f(1)=\sqrt{2018}e$.

**Hướng dẫn giải:**

**Chọn D**

$2f(x).f'(x)=(f(x))^2+(f'(x))^2\Leftrightarrow(f'(x)-f(x))^2=0\Leftrightarrow f'(x)=f(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=1$

$\Leftrightarrow\ln f(x)=x+C\Leftrightarrow f(x)=e^{x+C}$

Thử vào đẳng thức đã cho suy ra

$e^{2C}e^{2x}=\int_0^x 2e^{2C}e^{2t}dt+2018\Leftrightarrow e^{2C}e^{2x}=e^{2C}.e^{2t}\Big|_0^x+2018\Leftrightarrow e^{2C}=2018\Leftrightarrow e^C=\sqrt{2018}$

Vậy $f(x)=e^{x+C}=e^x.e^C=\sqrt{2018}e^x$. Suy ra $f(1)=\sqrt{2018}e$.

**Câu 116:** Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên R thỏa mãn $2[f(x)]^2=\int_0^x\left[4(f(t))^2+(f'(t))^2\right]dt+2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $f(1)=1009e^2$. **B.** $f(1)=\sqrt{1009}e$. **C.** $f(1)=1009e$. **D.** $f(1)=\sqrt{1009}e^2$.

**Hướng dẫn giải:**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Chọn D**

Đạo hàm hai vế ta được: $4f(x).f'(x)=\left(2f(x)\right)^2+\left(f'(x)\right)^2 \Leftrightarrow \left(f'(x)-2f(x)\right)^2=0$

$\Leftrightarrow f'(x)=2f(x) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=2 \Leftrightarrow \ln f(x)=2x+C \Leftrightarrow f(x)=k.e^{2x}\ k>0$

Thử vào đẳng thức đã cho suy ra

$2k^2e^{4x}=\int\limits_0^x 8k^2e^{4t}dt+2018 \Leftrightarrow 2k^2e^{4x}=2k^2.e^{4t}\Big|_0^x+2018 \Leftrightarrow 2k^2=2018 \Leftrightarrow k=\sqrt{1009}$

Vậy $f(x)=\sqrt{1009}e^{2x} \Rightarrow f(1)=\sqrt{1009}e^2$

**Câu 31.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, $f(x)$ và $f'(x)$ đều nhận giá trị dương trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=2$, $\int\limits_0^1\left[f'(x).\left[f(x)\right]^2+1\right]dx=2\int\limits_0^1\sqrt{f'(x)}.f(x)dx$. Tính $\int\limits_0^1\left[f(x)\right]^3dx$.

**A.** $\dfrac{15}{4}$. **B.** $\dfrac{15}{2}$. **C.** $\dfrac{17}{2}$. **D.** $\dfrac{19}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Theo giả thiết, ta có $\int\limits_0^1\left[f'(x).\left[f(x)\right]^2+1\right]dx=2\int\limits_0^1\sqrt{f'(x)}.f(x)dx$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^1\left[f'(x).\left[f(x)\right]^2+1\right]dx-2\int\limits_0^1\sqrt{f'(x)}.f(x)dx=0$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^1\left[f'(x).\left[f(x)\right]^2-2\sqrt{f'(x)}.f(x)+1\right]dx=0 \Leftrightarrow \int\limits_0^1\left[\sqrt{f'(x)}.f(x)-1\right]^2dx=0$

$\Rightarrow \sqrt{f'(x)}.f(x)-1=0 \Rightarrow f^2(x).f'(x)=1 \Rightarrow \dfrac{f^3(x)}{3}=x+C$. Mà $f(0)=2 \Rightarrow C=\dfrac{8}{3}$.

Vậy $f^3(x)=3x+8$.

Vậy $\int\limits_0^1\left[f(x)\right]^3dx=\int\limits_0^1(3x+8)dx=\left(\dfrac{3x^2}{2}+8x\right)\Big|_0^1=\dfrac{19}{2}$.

**Câu 32.** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1$ với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và $f(1)=-2$. Tính $\int\limits_1^2 f(x)dx$.

**A.** $-\dfrac{1}{2}-\ln 2$. **B.** $-\dfrac{3}{2}-\ln 2$. **C.** $-1-\dfrac{\ln 2}{2}$. **D.** $-\dfrac{3}{2}-\dfrac{\ln 2}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1 \Leftrightarrow \left(xf(x)+1\right)^2=f(x)+xf'(x)(*)$

Đặt $h(x)=f(x)+xf'(x) \Rightarrow h'(x)=f(x)+xf'(x)$, khi đó $(*)$ có dạng

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$h^2(x)=h'(x) \Rightarrow \dfrac{h'(x)}{h^2(x)}=1 \Rightarrow \int \dfrac{h'(x)}{h^2(x)}dx=\int 1dx \Rightarrow \int \dfrac{dh(x)}{h^2(x)}=x+C \Leftrightarrow -\dfrac{1}{h(x)}=x+C$

$\Rightarrow h(x)=-\dfrac{1}{x+C} \Rightarrow xf(x)+1=-\dfrac{1}{x+C}$

Vì $f(1)=-2$ nên $-2+1=-\dfrac{1}{1+C} \Rightarrow C=0$

Khi đó $xf(x)+1=-\dfrac{1}{x} \Rightarrow f(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}$

Suy ra: $\int\limits_1^2 f(x)dx=\int\limits_1^2\left(-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)dx=\left(\dfrac{1}{x}-\ln x\right)\Big|_1^2=-\dfrac{1}{2}-\ln 2$

**Câu 33.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=0$. Biết $\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\dfrac{9}{2}$ và $\int\limits_0^1 f'(x)\cos\dfrac{\pi x}{2}\mathrm{d}x=\dfrac{3\pi}{4}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\dfrac{1}{\pi}$. **B.** $\dfrac{4}{\pi}$. **C.** $\dfrac{6}{\pi}$. **D.** $\dfrac{2}{\pi}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\int\limits_0^1 f'(x)\cos\dfrac{\pi x}{2}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \cos\dfrac{\pi x}{2}\mathrm{d}(f(x))=\cos\dfrac{\pi x}{2}.f(x)\Big|_0^1+\int\limits_0^1\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi x}{2}.f(x)\mathrm{d}x$

$=\dfrac{\pi}{2}\int\limits_0^1 \sin\dfrac{\pi x}{2}.f(x)\mathrm{d}x.$

Suy ra $\int\limits_0^1 \sin\dfrac{\pi x}{2}.f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}$

Mặt khác $\int\limits_0^1\left(\sin\dfrac{\pi x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1(1-\cos\pi x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}.$

Do đó $\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-2\int\limits_0^1 3\sin\dfrac{\pi x}{2}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1\left[3\sin\dfrac{\pi x}{2}\right]^2\mathrm{d}x=0.$

hay $\int\limits_0^1\left[f(x)-3\sin\dfrac{\pi x}{2}\right]^2\mathrm{d}x=0$ suy ra $f(x)=3\sin\dfrac{\pi x}{2}.$

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 3\sin\dfrac{\pi x}{2}\mathrm{d}x=-\dfrac{6}{\pi}\cos\dfrac{\pi x}{2}\Big|_0^1=\dfrac{6}{\pi}.$

**Câu 53:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ và thỏa $\int\limits_0^{x^2} f(t)dt=x.\cos\pi x$. Tính $f(4)$.

**A.** $f(4)=123.$ **B.** $f(4)=\dfrac{2}{3}.$ **C.** $f(4)=\dfrac{3}{4}.$ **D.** $f(4)=\dfrac{1}{4}.$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $F(t)=\int f(t)dt \Rightarrow F'(t)=f(t)$

Đặt $G(x)=\int\limits_0^{x^2} f(t)dt=F(x^2)-F(0)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Rightarrow G'(x)=\left[F\left(x^2\right)\right]'=2x.f\left(x^2\right)$ (Tính chất đạo hàm hợp: $f'\left[u(x)\right]=f'(u).u'(x)$)

Mặt khác, từ gt: $G(x)=\int_0^{x^2} f(t)dt=x.\cos\pi x$

$\Rightarrow G'(x)=(x.\cos\pi x)'=-x\pi\sin\pi x+\cos\pi x$

$\Rightarrow 2x.f\left(x^2\right)=-x\pi\sin\pi x+\cos\pi x$ (1)

Tính $f(4)\Rightarrow$ ứng với $x=2$

Thay $x=2$ vào (1) $\Rightarrow 4.f(4)=-2\pi\sin 2\pi+\cos 2\pi=1\Rightarrow f(4)=\frac{1}{4}$

**Chọn D**

**Câu 34.** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1$ và $\int_0^1\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x=4$. Giá trị của tích phân $\int_0^1\left[f(x)\right]^3\mathrm{d}x$ bằng

**A.** 1. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 80.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét $\int_0^1\left[f(x)+(ax+b)\right]^2\mathrm{d}x=\int_0^1\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x+2\int_0^1\left[f(x).(ax+b)\right]\mathrm{d}x+\int_0^1(ax+b)^2\mathrm{d}x$

$=4+2a\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x+2b\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{3a}(ax+b)^3\Big|_0^1=4+2(a+b)+\frac{a^2}{3}+ab+b^2$.

Cần xác định $a, b$ để $\frac{a^2}{3}+(2+b)a+b^2+2b+4=0$

Ta có: $\Delta=b^2+4b+4-\frac{4}{3}\left(b^2+2b+4\right)=\frac{-(b-2)^2}{3}\le 0\Rightarrow b=2\Rightarrow a=-6$.

Khi đó: $\int_0^1\left[f(x)+(-6x+2)\right]^2\mathrm{d}x=0\Rightarrow f(x)=6x-2$

Suy ra $\int_0^1\left[f(x)\right]^3\mathrm{d}x=\int_0^1(6x-2)^3\mathrm{d}x=\frac{1}{24}(6x-2)^4\Big|_0^1=10$.

**Câu 35.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[4;8]$ và $f(0)\neq 0$ với $\forall x\in[4;8]$. Biết rằng $\int_4^8\frac{\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^4}dx=1$ và $f(4)=\frac{1}{4}, f(8)=\frac{1}{2}$. Tính $f(6)$.

**A.** $\frac{5}{8}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

+) Xét $\int_4^8 \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = \int_4^8 \frac{df(x)}{f^2(x)} = -\frac{1}{f(x)}\Big|_4^8 = -\left(\frac{1}{f(8)} - \frac{1}{f(4)}\right) = -(2-4) = 2$.

+) Gọi $k$ là một hằng số thực, ta sẽ tìm $k$ để $\int_4^8 \left(\frac{f'(x)}{f^2(x)} + k\right)^2 dx = 0$.

Ta có: $\int_4^8 \left(\frac{f'(x)}{f^2(x)} + k\right)^2 dx = \int_4^8 \frac{\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^4}dx + 2k\int_4^8 \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx + k^2\int_4^8 dx = 1 + 4k + 4k^2 = (2k+1)^2$.

Suy ra: $k = -\frac{1}{2}$ thì $\int_4^8 \left(\frac{f'(x)}{f^2(x)} - \frac{1}{2}\right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_4^6 \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = \frac{1}{2}\int_4^6 dx$

$\Leftrightarrow \int_4^6 \frac{df(x)}{f^2(x)} = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}\Big|_4^6 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(4)} - \frac{1}{f(6)} = 1 \Leftrightarrow 4 - \frac{1}{f(6)} = 1 \Leftrightarrow f(6) = \frac{1}{3}$.

Chú ý: $\int_a^b f(x)dx = 0$ không được phép suy ra $f(x) = 0$, nhưng $\int_a^b f^{2k}(x)dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$.

**Câu 36.** Suy ra $4\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 8 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = -2\ln 2$ và $x(x+1).f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Giá trị $f(2) = a + b\ln 3$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $a^2 + b^2$.

**A.** $\frac{25}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{13}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Từ giả thiết, ta có $x(x+1).f'(x) + f(x) = x^2 + x \Leftrightarrow \frac{x}{x+1}.f'(x) + \frac{1}{(x+1)^2}f(x) = \frac{x}{x+1}$

$\Leftrightarrow \left[\frac{x}{x+1}.f(x)\right]' = \frac{x}{x+1}$, với $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$.

Suy ra $\frac{x}{x+1}.f(x) = \int \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x$ hay $\frac{x}{x+1}.f(x) = x - \ln|x+1| + C$.

Mặt khác, ta có $f(1) = -2\ln 2$ nên $C = -1$. Do đó $\frac{x}{x+1}.f(x) = x - \ln|x+1| - 1$.

Với $x = 2$ thì $\frac{2}{3}.f(2) = 1 - \ln 3 \Leftrightarrow f(2) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\ln 3$. Suy ra $a = \frac{3}{2}$ và $b = -\frac{3}{2}$.

Vậy $a^2 + b^2 = \frac{9}{2}$.

**Câu 37.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x) \in [-1;1]$ với $\forall x \in (0;2)$. Biết $f(0) = f(2) = 1$. Đặt $I = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$, phát biểu nào dưới đây đúng?

**A.** $I \in (-\infty;0]$. **B.** $I \in (0;1]$. **C.** $I \in [1;+\infty)$. **D.** $I \in (0;1)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $I = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

$\square \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = (x-1)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (x-1)f'(x)\mathrm{d}x = 1 + \int_0^1 (1-x)f'(x)\mathrm{d}x \ge 1 - \int_0^1 (1-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ (1).

$\square \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = (x-1)f(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 (x-1)f'(x)\mathrm{d}x = 1 - \int_1^2 (x-1)f'(x)\mathrm{d}x \ge 1 - \int_1^2 (1-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $I \ge \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

**Câu 38.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $3\int_0^1 \left[ f'(x)\left[f(x)\right]^2 + \frac{1}{9}\right]\mathrm{d}x \le 2\int_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)\mathrm{d}x$. Tính tích phân $\int_0^1 \left[f(x)\right]^3 \mathrm{d}x$:

**A.** $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{7}{6}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Từ giả thiết suy ra:

$\int_0^1 \left[\left(3\sqrt{f'(x)}f(x)\right)^2 - 2.3\sqrt{f'(x)}f(x) + 1\right]\mathrm{d}x \le 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[3\sqrt{f'(x)}f(x) - 1\right]^2 \mathrm{d}x \le 0$.

Suy ra $3\sqrt{f'(x)}f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{f'(x)}f(x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow f'(x).f^2(x) = \frac{1}{9}$.

Vì $\left[f^3(x)\right]' = 3.f^2(x)f'(x)$ nên suy ra $\left[f^3(x)\right]' = \frac{1}{3} \Rightarrow f^3(x) = \frac{1}{3}x + C$.

Vì $f(0)=1$ nên $f^3(0)=1 \Rightarrow C=1$.

Vậy $\Rightarrow f^3(x) = \frac{1}{3}x + 1$.

Suy ra $\int_0^1 \left[f(x)\right]^3 \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x + 1\right)\mathrm{d}x = \frac{7}{6}$.

**Câu 39.** Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn hệ thức $\begin{cases} f(1)+g(1)=4 \\ g(x) = -x.f'(x);\quad f(x) = -x.g'(x) \end{cases}$. Tính $I = \int_1^4 \left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$.

**A.** $8\ln 2$. **B.** $3\ln 2$. **C.** $6\ln 2$. **D.** $4\ln 2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Cách 1:** Ta có $f(x)+g(x) = -x\left[f'(x)+g'(x)\right] \Leftrightarrow \frac{f(x)+g(x)}{f'(x)+g'(x)} = -\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \int \frac{f(x)+g(x)}{f'(x)+g'(x)}\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x \Rightarrow \ln\left|f(x)+g(x)\right| = -\ln|x| + C$

Theo giả thiết ta có $C - \ln|1| = \ln\left|f(1)+g(1)\right| \Rightarrow C = \ln 4$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l} f(x)+g(x) = \frac{4}{x} \\ f(x)+g(x) = -\frac{4}{x} \end{array}\right.$, vì $f(1)+g(1)=4$ nên $f(x)+g(x) = \frac{4}{x}$

$\Rightarrow I = \int_1^4 \left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x = 8\ln 2$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Cách 2:** Ta có $f(x)+g(x)=-x\left[f'(x)+g'(x)\right]$

$\Rightarrow \int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=-\int x\left[f'(x)+g'(x)\right]\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow \int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=-x\left[f(x)+g(x)\right]+\int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow -x\left[f(x)+g(x)\right]=C\Rightarrow f(x)+g(x)=-\dfrac{C}{x}$. Vì $f(1)+g(1)=-C\Rightarrow C=-4$

Do đó $f(x)+g(x)=\dfrac{4}{x}$. Vậy $I=\int_1^4\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=8\ln 2$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

# PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN SỐ

## ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 1

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử hàm số $u=u(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $\alpha \le u(x) \le \beta$. Giả sử có thể viết $f(x)=g(u(x))u'(x), x\in[a;b]$, với $g$ liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$. Khi đó, ta có

$$I=\int_a^b f(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du.$$

**Dấu hiệu nhận biết và cách tính tính phân**

| Dấu hiệu | Có thể đặt | Ví dụ |
|---|---|---|
| Có $\sqrt{f(x)}$ | $t=\sqrt{f(x)}$ | $I=\int_0^3 \frac{x^3dx}{\sqrt{x+1}}$. Đặt $t=\sqrt{x+1}$ |
| Có $(ax+b)^n$ | $t=ax+b$ | $I=\int_0^1 x(x+1)^{2016}dx$. Đặt $t=x-1$ |
| Có $a^{f(x)}$ | $t=f(x)$ | $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x+3}}{\cos^2 x}dx$. Đặt $t=\tan x+3$ |
| Có $\frac{dx}{x}$ và $\ln x$ | $t=\ln x$ *hoặc* biểu thức chứa $\ln x$ | $I=\int_1^e \frac{\ln x dx}{x(\ln x+1)}$. Đặt $t=\ln x+1$ |
| Có $e^x dx$ | $t=e^x$ *hoặc* biểu thức chứa $e^x$ | $I=\int_0^{\ln 2} e^{2x}\sqrt{3e^x+1}dx$. Đặt $t=\sqrt{3e^x+1}$ |
| Có $\sin x dx$ | $t=\cos x$ | $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos x dx$. Đặt $t=\sin x$ |
| Có $\cos x dx$ | $t=\sin x dx$ | $I=\int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x}{2\cos x+1}dx$ Đặt $t=2\cos x+1$ |
| Có $\frac{dx}{\cos^2 x}$ | $t=\tan x$ | $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2 x)\frac{1}{\cos^2 x}dx$ Đặt $t=\tan x$ |
| Có $\frac{dx}{\sin^2 x}$ | $t=\cot x$ | $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\cot x}}{1-\cos 2x}dx=\int \frac{e^{\cot x}}{2\sin^2 x}dx$. Đặt $t=\cot x$ |

## HÀM ĐA THỨC, PHÂN THỨC

**Câu 1.** Giá trị của tích phân $\int_0^{100} x(x-1)...(x-100)dx$ bằng

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 100. **D.** một giá trị khác.

**Lời giải**

**Chọn A**

Tính $I=\int_0^{100} x(x-1)...(x-100)dx$.

Đặt $t=100-x \Rightarrow dx=-dt$.

Đổi cận: Khi $x=0$ thì $t=100$; khi $x=100$ thì $t=0$.

Do $x(x-1)...(x-100)=(100-t)(99-t)...(1-t)(-t)=-t(t-1)...(t-99)(t-100)$ nên

$$I=\int_0^{100} x(x-1)...(x-100)dx=-\int_0^{100} t(t-1)...(t-100)dt=-I \Leftrightarrow 2I=0 \Leftrightarrow I=0.$$

**Câu 2.** **(Hậu Lộc Thanh Hóa)** Cho $n$ là số nguyên dương khác 0, hãy tính tích phân $I=\int_0^1 (1-x^2)^n dx$ theo $n$.

**A.** $I=\dfrac{1}{2n+2}$. **B.** $I=\dfrac{1}{2n}$. **C.** $I=\dfrac{1}{2n-1}$. **D.** $I=\dfrac{1}{2n+1}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Với $n\in\mathbb{N}^*$, khi đó:

Đặt $t=1-x^2\Rightarrow \mathrm{d}t=-2x\mathrm{d}x\Rightarrow x\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$

Đổi cận: $x=0\to t=1; x=1\to t=0$

Khi đó $I=-\dfrac{1}{2}\int\limits_1^0 t^n\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 t^n\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}.\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\dfrac{1}{2n+2}$

***Cách 2:*** Ta có $\mathrm{d}\left(1-x^2\right)=-2x\mathrm{d}x\to -\dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(1-x^2\right)=x\mathrm{d}x$

$I=\int\limits_0^1\left(1-x^2\right)^n x\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1\left(1-x^2\right)^n\mathrm{d}\left(1-x^2\right)=-\dfrac{1}{2}.\dfrac{\left(1-x^2\right)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\dfrac{1}{2n+2}$

**Câu 3.** **(SỞ BÌNH THUẬN 2019)** Tích phân $I=\int\limits_0^1\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}\mathrm{d}x=a\ln b+c$, trong đó $a$; $b$; $c$ là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a+b+c$.

**A.** 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn A**

$I=\int\limits_0^1\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\dfrac{x^2+1-2x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(1-\dfrac{2x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\mathrm{d}x-\int\limits_0^1\dfrac{1}{x^2+1}\mathrm{d}\left(x^2+1\right)$

$=1-\ln\left|x^2+1\right|\Big|_0^1=1-\ln 2$.

$a=-1$, $b=2$, $c=1$ nên $a+b+c=2$.

**Câu 4.** **(CỤM TRƯỜNG SÓC SƠN MÊ LINH HÀ NỘI)** Biết $\int\limits_0^1\dfrac{x+2}{x^2+4x+7}\mathrm{d}x=a\ln\sqrt{12}+b\ln\sqrt{7}$, với $a$, $b$ là các số nguyên, khi đó $a^3+b^3$ bằng

**A.** $-9$. **B.** 0. **C.** 9. **D.** 7.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $t=x^2+4x+7\Rightarrow \mathrm{d}t=\left(2x+4\right)\mathrm{d}x\Rightarrow\left(x+2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=7$; $x=1\Rightarrow t=12$.

$\int\limits_0^1\dfrac{x+2}{x^2+4x+7}\mathrm{d}x=\int\limits_7^{12}\dfrac{1}{2t}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\ln|t|\Big|_7^{12}=\dfrac{1}{2}\ln 12-\dfrac{1}{2}\ln 7=\ln\sqrt{12}-\ln\sqrt{7}\Rightarrow a=1;\ b=-1$.

Vậy $a^3+b^3=0$.

**Câu 5.** **(THANH CHƯƠNG 1 NGHỆ AN 2019 LẦN 3)** Cho $\int\limits_0^2\dfrac{x}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x=a\ln 3+b\pi$ với $a$, $b$ là các số thực. Giá trị của $a^2+3b^2$ bằng

**A.** $\dfrac{7}{27}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{18}$. **D.** $\dfrac{35}{144}$.

**Lời giải**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Chọn C**

Ta có: $\int_0^2 \frac{x}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x = \int_0^2 \left(\frac{x+1}{x^2+2x+4} - \frac{1}{x^2+2x+4}\right)\mathrm{d}x$

$= \int_0^2 \frac{x+1}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x - \int_0^2 \frac{1}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x$.

Tính $I_1 = \int_0^2 \frac{x+1}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+4\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\left(\ln 12 - \ln 4\right) = \frac{1}{2}\ln 3$.

Tính $I_2 = \int_0^2 \frac{1}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{1}{(x+1)^2+3}\mathrm{d}x$.

Đặt $x+1 = \sqrt{3}\tan u \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 u}\mathrm{d}u$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{6}$ và $x=2 \Rightarrow u = \frac{\pi}{3}$.

Suy ra $I_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 u}\cdot\frac{1}{3\left(1+\tan^2 u\right)}\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

Vậy $\int_0^2 \frac{x}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x = I_1 - I_2 = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

Suy ra $a^2+3b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3.\left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{5}{18}$.

**Câu 6.** Tích phân $I = \int_1^2 \frac{x^{2001}}{(1+x^2)^{1002}}dx$ có giá trị là

**A.** $\frac{1}{2002.2^{1001}}$. **B.** $\frac{1}{2001.2^{1001}}$. **C.** $\frac{1}{2001.2^{1002}}$. **D.** $\frac{1}{2002.2^{1002}}$.

**Lời giải**

$I = \int_1^2 \frac{x^{2004}}{x^3(1+x^2)^{1002}}.dx = \int_1^2 \frac{1}{x^3\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^{1002}}.dx$. Đặt $t = \frac{1}{x^2}+1 \Rightarrow dt = -\frac{2}{x^3}dx$.

## HÀM VÔ TỈ

**Câu 7.** **(ĐH Vinh Lần 1)** Biết rằng $\int_{-2}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x+5\sqrt{x+3}+9} = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$, với $a,b,c$ là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b+c$ bằng

**A.** $-10$. **B.** $-5$. **C.** $10$. **D.** $5$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $t = \sqrt{x+3} \Rightarrow t^2 = x+3 \Rightarrow 2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$

Đổi cận: $x=-2 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=2$.

Ta có: $\int_{-2}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x+5\sqrt{x+3}+9} = \int_{-2}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x+3+5\sqrt{3x+1}+6} = 2\int_1^2 \frac{t\mathrm{d}t}{t^2+5t+6} = 2\int_1^2 \left(\frac{3}{t+3}-\frac{2}{t+2}\right)\mathrm{d}t$

$= 2\left(3\ln|t+3|_1^2 - 2\ln|t+2|_1^2\right) = 2\left(-5\ln 4 + 2\ln 3 + 3\ln 5\right) = = -20\ln 2 + 4\ln 3 + 6\ln 5$

Suy ra: $a=-20$, $b=4$, $c=6$. Vậy $a+b+c=-10$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 8.** **(Đặng Thành Nam Đề 5)** Cho $I=\int_3^8 \frac{1}{x+x\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ với $a,b,c,d$ là các số nguyên dương và $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ tối giản. Giá trị của $abc-d$ bằng

**A.** $-6$. **B.** $18$. **C.** $0$. **D.** $-3$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Khi $x=3\Rightarrow t=2$; Khi $x=8\Rightarrow t=3$.

Khi đó $I=\int_2^3 \frac{1}{t^2-1+\left(t^2-1\right)t}.2t\mathrm{d}t=\int_2^3 \frac{2t}{\left(t^2-1\right)(t+1)}\mathrm{d}t=\int_2^3 \frac{2t}{(t-1)(t+1)^2}\mathrm{d}t$

$=\int_2^3 \frac{(t+1)+(t-1)}{(t-1)(t+1)^2}\mathrm{d}t=\int_2^3\left(\frac{(t+1)}{(t-1)(t+1)^2}+\frac{(t-1)}{(t-1)(t+1)^2}\right)\mathrm{d}t$

$=\int_2^3\left(\frac{1}{(t-1)(t+1)}+\frac{1}{(t+1)^2}\right)\mathrm{d}t=\int_2^3\left(\frac{1}{2}.\frac{(t+1)-(t-1)}{(t-1)(t+1)}+\frac{1}{(t+1)^2}\right)\mathrm{d}t$

$=\int_2^3\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)+\frac{1}{(t+1)^2}\right]\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{2}\left(\ln|t-1|-\ln|t+1|\right)-\frac{1}{t+1}\right]\Big|_2^3$

$=\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{t+1}\right]\Big|_2^3=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)$

$=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{12}\Rightarrow a=3,\ b=2,\ c=1,\ d=12$.

Vậy $abc-d=3.2.1-12=-6$.

**Câu 9.** **(ĐH Vinh Lần 1)** Biết rằng $\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{4(x+1)+5\sqrt{2x+1}}=a\ln 3+b\ln 5+c\ln 7$, với $a,b,c$ là các số hữu tỉ.

Giá trị của $a+b+c$ bằng

**A.** $0$. **B.** $-\frac{4}{3}$. **C.** $1$. **D.** $\frac{4}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $t=\sqrt{2x+1}\Rightarrow t^2=2x+1\Rightarrow t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1;\ x=4\Rightarrow t=3$.

Ta có: $\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{4(x+1)+5\sqrt{2x+1}}=\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{4x+2+5\sqrt{2x+1}+2}=\int_1^3 \frac{t\mathrm{d}t}{2t^2+5t+2}=\frac{1}{3}\int_1^3 \frac{2(2t+1)-(t+2)}{(2t+1)(t+2)}\mathrm{d}t$

$=\frac{1}{3}\int_1^3\left(\frac{2}{t+2}-\frac{1}{2t+1}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\left(2\ln|t+2|-\frac{1}{2}\ln|2t+1|\right)\Big|_1^3=\frac{1}{3}\left(2\ln 5-2\ln 3-\frac{1}{2}\ln 7+\frac{1}{2}\ln 3\right)$

$=-\frac{1}{2}\ln 3+\frac{2}{3}\ln 5-\frac{1}{6}\ln 7$

Suy ra: $a=-\frac{1}{2},b=\frac{2}{3},c=-\frac{1}{6}\Rightarrow a+b+c=0$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 10.** Biết $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}$ với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.

**A.** $P=44$. **B.** $P=42$. **C.** $P=46$. **D.** $P=48$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $I=\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x}} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}$.

Đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{x+1} \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2\sqrt{x(x+1)}}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}} = 2\frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Khi $x=1$ thì $t=\sqrt{2}+1$, khi $x=2$ thì $t=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

$$I=\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)} = 2\int_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -2\frac{1}{t}\Big|_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = -2\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right) = 4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2$$

$$=\sqrt{32}-\sqrt{12}-\sqrt{4} \Rightarrow a=32,\ b=12,\ c=4$$

Vậy $P=a+b+c=48$

**Câu 11.** Tích phân $I=\int_0^1 \frac{a^2x^3+ax}{\sqrt{ax^2+1}}dx$, với $a\geq 0$ có giá trị là:

**A.** $I=\frac{a(a-2)}{4}$. **B.** $I=\frac{a(a-2)}{2}$. **C.** $I=\frac{a(a+2)}{4}$. **D.** $I=\frac{a(a+2)}{2}$.

**Lời giải**

Tích phân $I=\int_0^1 \frac{a^2x^3+ax}{\sqrt{ax^2+1}}dx$, với $a\geq 0$ có giá trị là:

Ta biến đổi: $I=\int_0^1 \frac{a^2x^3+ax}{\sqrt{ax^2+1}}dx = \int_0^1 \frac{ax\left(ax^2+1\right)}{\sqrt{ax^2+1}}dx = \int_0^1 \left(ax\sqrt{ax^2+1}\right)dx$.

Ta nhận thấy: $\left(ax^2+1\right)'=2ax$. Ta dùng đổi biến số.

Đặt $t=ax^2+1 \Rightarrow dt=2axdx$.

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=a+1 \end{cases}$.

$$I=\int_1^{a+1}\frac{1}{2}tdt=\left(\frac{1}{4}t^2\right)\Big|_1^{a+1}=\frac{1}{4}a(a+2).$$

**Chọn C**

**Câu 12.** Biết rằng $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+3}} = 2\ln\left(\frac{2+\sqrt{a}}{1+\sqrt{b}}\right)$ với $a$, $b$ là các số nguyên dương. Giá trị của $a+b$ bằng

**A.** 3. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 7.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+3}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}$

Đặt $t=\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}\right)$

$\Leftrightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{2\mathrm{d}t}{t}=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}.$

Khi $x=0$ thì $t=1+\sqrt{3}$ ; khi $x=1$ thì $t=2+\sqrt{2}$.

$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+3}}=2\int_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t}=2\ln|t|\Big|_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}}=2\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow a+b=5.$

**Câu 13.** Biết $\int_1^2 \left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^{11}}}\right)\mathrm{d}x=\frac{a}{b}\sqrt[3]{c}$, với $a,b,c$ nguyên dương, $\frac{a}{b}$ tối giản và $c<a$. Tính $S=a+b+c$

**A.** $S=51$. **B.** $S=67$. **C.** $S=39$. **D.** $S=75$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\int_1^2 \left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^{11}}}\right)\mathrm{d}x=\int_1^2 \sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}\left(1+\frac{2}{x^3}\right)\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}} \Rightarrow t^3=x-\frac{1}{x^2} \Rightarrow 3t^2\mathrm{d}t=\left(1+\frac{2}{x^3}\right)\mathrm{d}x.$

Khi đó: $\int_1^2 \left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^{11}}}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\sqrt[3]{\frac{7}{4}}} 3t^3\mathrm{d}t=\frac{3}{4}t^4\Big|_0^{\sqrt[3]{\frac{7}{4}}}=\frac{21}{32}\sqrt[3]{14}.$

Vậy $S=67$.

**Câu 14.** Cho số thực dương $k>0$ thỏa $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}=\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $k>\frac{3}{2}$. **B.** $0<k\le\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}<k\le 1$. **D.** $1<k\le\frac{3}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $t=\ln\left(x+\sqrt{x^2+k}\right) \Rightarrow dt=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+k}}}{x+\sqrt{x^2+k}}dx \Leftrightarrow dt=\frac{1}{\sqrt{x^2+k}}dx$

Ta có $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}=\int_0^2 dt=\mathrm{t}\Big|_0^2 \Leftrightarrow \ln\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)\Big|_0^2=\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$

$\Leftrightarrow \ln\left(2+\sqrt{4+k}\right)-\ln\sqrt{k}=\ln\left(2+\sqrt{5}\right) \Leftrightarrow \ln\frac{2+\sqrt{4+k}}{\sqrt{k}}=\ln\left(2+\sqrt{5}\right) \Leftrightarrow \frac{2+\sqrt{4+k}}{\sqrt{k}}=2+\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow 2+\sqrt{4+k}=\left(2+\sqrt{5}\right)\sqrt{k} \Leftrightarrow 4+4+k+4\sqrt{4+k}=\left(2+\sqrt{5}\right)^2 k \Leftrightarrow \sqrt{4+k}=\left(2+\sqrt{5}\right)k-2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k>\frac{2}{2+\sqrt{5}} \\ 4+k=\left(2+\sqrt{5}\right)^2 k^2+4-4\left(2+\sqrt{5}\right)k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k>\frac{2}{2+\sqrt{5}} \\ \left(2+\sqrt{5}\right)^2 k^2-\left(9+4\sqrt{5}\right)k=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k>\frac{2}{2+\sqrt{5}} \\ \left[\begin{array}{l} k=0 \\ k=1 \end{array}\right. \end{cases}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 15.** Giả sử $\int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\mathrm{d}x = \frac{1}{c}\left(a\sqrt{a} - \frac{b}{b+c}\sqrt{b}\right)$ với $a,b,c \in \mathbb{N}$; $1 \le a,b,c \le 9$. Tính giá trị của biểu thức $C_{2a+c}^{b-a}$.

**A.** 165. **B.** 715. **C.** 5456. **D.** 35.

**Lời giải**

**Chọn D**

$I = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x^3}\mathrm{d}x$

Đặt $t^2 = 1+\frac{1}{x^2} \Rightarrow 2t\mathrm{d}t = -\frac{2}{x^3}\mathrm{d}x \Rightarrow -t\mathrm{d}t = \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$

Ta được $I = -\int_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\sqrt{2}} t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^3\Big|_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - \frac{5}{5+3}\sqrt{5}\right)$.

Vậy $a=2$, $b=5$, $c=3$, suy ra $C_{2a+c}^{b-a} = C_7^3 = 35$.

**Câu 16.** **(THPT NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho $\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}dx = \frac{a}{3} + b\ln 2 + c\ln 3$ với $a,b,c$ là các số nguyên. Giá trị $a+b+c$ bằng:

**A.** 9 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 7

**Lời giải**

**Chọn C**

$\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}dx =$

$t = 4+2\sqrt{x+1} \Rightarrow (t-4)^2 = 4(x+1)$

$\Rightarrow 2(t-4)dt = 4dx$

$x = 0 \Rightarrow t = 6$

$x = 3 \Rightarrow t = 8$

$I = \int_6^8 \frac{t^2-8t+16-4}{8t}.(t-4)dt = \int_6^8 \frac{t^3-12t^2+44t-48}{8t}dt = \int_6^8 \frac{t^2}{8} - \frac{3t}{2} + \frac{11}{2} - \frac{6}{t}dt$

$= \left(\frac{t^3}{24} - \frac{3t^2}{4} + \frac{11}{2}t - 6\ln|t|\right)\Big|_6^8 = \frac{7}{3} - 12\ln 2 + 6\ln 3$

$\Rightarrow a+b+c = 1$

**Câu 17.** **(ĐỀ THI THỬ VTED 03 NĂM HỌC 2018 - 2019)** Cho $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x}{x^3+1}}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{b}{c}+\sqrt{d}\right)$, với $a$, $b$, $c$, $d$ là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ tối giản. Giá trị của $a+b+c+d$ bằng

**A.** 12 **B.** 10 **C.** 18 **D.** 15

**Lời giải**

**Chọn B**

$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x}{x^3+1}}\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}}\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x.\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^3}}\mathrm{d}x$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

• Đặt $t=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{t}\Rightarrow dx=\frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t$

Đổi cận: $x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=2$; $x=1\Rightarrow t=1$

Khi đó: $I=\int\limits_2^1\frac{t}{\sqrt{1+t^3}}\left(\frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t\right)=\int\limits_1^2\frac{t^2\mathrm{d}t}{t^3.\sqrt{1+t^3}}$

• Đặt $u=\sqrt{1+t^3}\Rightarrow u^2=1+t^3\Rightarrow t^3=u^2-1\Rightarrow 3t^2\mathrm{d}t=2u\,\mathrm{d}u\Rightarrow t^2\mathrm{d}t=\frac{2u\,\mathrm{d}u}{3}$

Đổi cận: $t=1\Rightarrow u=\sqrt{2}$; $t=2\Rightarrow u=3$

Ta có: $I=\int\limits_{\sqrt{2}}^3\frac{\frac{2u\,\mathrm{d}u}{3}}{\left(u^2-1\right).u}=\frac{2}{3}\int\limits_{\sqrt{2}}^3\frac{\mathrm{d}u}{u^2-1}=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\Big|_{\sqrt{2}}^3=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$

Suy ra $a=3,\ b=3,\ c=2,\ d=2$. Vậy $a+b+c+d=10$.

**Câu 18.** **(CỤM TRẦN KIM HƯNG -HƯNG YÊN NĂM 2019)** Cho tích phân $I=\int\limits_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right).\sqrt{14-x^2-\frac{1}{x^2}}.\mathrm{d}x=\frac{a.\pi}{b}+c\sqrt{3}+d$, trong đó $(a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính tổng $S=a+b+c+d$.

**A.** $S=3$. **B.** $S=7$. **C.** $S=2$. **D.** $S=11$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $I=\int\limits_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right).\sqrt{14-x^2-\frac{1}{x^2}}.\mathrm{d}x=\int\limits_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right).\sqrt{16-\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}.\mathrm{d}x$

Đặt $x+\frac{1}{x}=4\sin t\Rightarrow\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=4\cos t\mathrm{d}t$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Đổi cận: Với $x=1+\sqrt{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$; với $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}\Rightarrow t=\frac{\pi}{3}$.

$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}4\cos t.\sqrt{16-\left(4\sin t\right)^2}\,\mathrm{d}t=16\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\mathrm{d}t=8\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}t=\left(8x+4\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3}+2\sqrt{3}-4$$

Mà $I=\int\limits_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right).\sqrt{14-x^2-\frac{1}{x^2}}.\mathrm{d}x=\frac{a.\pi}{b}+c\sqrt{3}+d\Rightarrow a=2,b=3,c=2,d=-4$.

Vậy $S=a+b+c+d=3$.

**Câu 19.** **(THẠCH THÀNH I - THANH HÓA 2019)** Biết $\int\limits_1^2\left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^{11}}}\right)dx=\frac{a}{b}\sqrt[3]{c}$ với $a$, $b$, $c$ nguyên dương, $\frac{a}{b}$ tối giản và $c<a$. Tính $S=a+b-c$.

**A.** $S=51$. **B.** $S=39$. **C.** 67. **D.** 75.

**Lời giải**

**Chọn B**

Xét $I=\int_1^2\left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^{11}}}\right)dx=\int_1^2\left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^9}\left(x-\frac{1}{x^2}\right)}\right)dx$

$=\int_1^2\left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2.\frac{1}{x^3}\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}\right)dx=\int_1^2\left[\left(1+\frac{2}{x^3}\right)\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}\right]dx.$

Đặt $t=\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}\Rightarrow t^3=x-\frac{1}{x^2}\Rightarrow 3t^2dt=\left(1+\frac{2}{x^3}\right)dx.$

Đổi cận $x=1\Rightarrow t=0;\ x=2\Rightarrow t=\sqrt[3]{\frac{7}{4}}.$

Vậy $I=\int_0^{\sqrt[3]{\frac{7}{4}}}t.3t^2dt=3\int_0^{\sqrt[3]{\frac{7}{4}}}t^3dt=\frac{3}{4}t^4\Big|_0^{\sqrt[3]{\frac{7}{4}}}=\frac{21}{16}\sqrt[3]{\frac{7}{4}}=\frac{21}{32}\sqrt[3]{14}.$

Từ đó ta suy ra $a=21;\ b=32;\ c=14\Rightarrow S=a+b-c=39.$

**Câu 20.** **(THTT số 3)** Cho tích phân $\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\frac{a}{b}\pi-\frac{m}{n}$, với $a,b,n,m\in\mathbb{N}^*$, các phân số $\frac{a}{b},\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $a^b+m^n$.

**A.** 3. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $x=\cos 2t$. Ta có $dx=-2\sin 2t\ dt$, $0=\cos\left(2.\frac{\pi}{4}\right)$ và $1=\cos 0$.

Ta có $\frac{1-\cos 2t}{1+\cos 2t}=\frac{1-1+2\sin^2 t}{1+2\cos^2 t-1}=\tan^2 t.$

Vậy $\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^0\sqrt{\tan^2 t}\left(-2\sin 2t\right)dt$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}|\tan t|\sin 2t\ dt=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 t\ dt$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2t)\ dt=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2t\ dt$

$=2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}-1$

$\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{1}{2},\frac{m}{n}=\frac{1}{1}$. Vì các phân số $\frac{a}{b},\frac{m}{n}$ tối giản nên ta suy ra $a=1,b=2,m=1,n=1$.

Do đó $a^b+m^n=1^2+1^1=2$.

**Câu 21.** **(Đặng Thành Nam Đề 3)** Cho $\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{\frac{x}{x^3+1}}dx=\frac{1}{a}\ln\left(\frac{b}{c}+\sqrt{d}\right)$, với $a$, $b$, $c$, $d$ là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ tối giản. Giá trị của $a+b+c+d$ bằng

**A.** 12. **B.** 10. **C.** 18. **D.** 15.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Cách 1:** Ta có

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{\frac{x}{x^3+1}}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{x^3(x^3+1)}}\mathrm{d}x$. Đặt $t=\sqrt{x^3+1}\Rightarrow t^2=x^3+1\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=3x^2\mathrm{d}x$

Đổi cận $x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{3}{2\sqrt{2}}$; $x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}$. Khi đó $I=\int\limits_{\frac{3}{2\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}\frac{\frac{2}{3}t\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}=\frac{2}{3}\int\limits_{\frac{3}{2\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-1}}$

Đặt $y=\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}\Rightarrow \mathrm{d}y=\frac{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}}{2\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t\Rightarrow\frac{2\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-1}}$

Đổi cận $t=\frac{3}{2\sqrt{2}}\Rightarrow y=\sqrt{\frac{3}{2\sqrt{2}}+1}+\sqrt{\frac{3}{2\sqrt{2}}-1}=\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}+\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}}}=\sqrt[4]{8}$;

$t=\sqrt{2}\Rightarrow y=\sqrt{\sqrt{2}-1}+\sqrt{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}=\sqrt{2\sqrt{2}+2}$

$I=\frac{2}{3}\int\limits_{\sqrt[4]{8}}^{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}\frac{2\mathrm{d}y}{y}=\frac{4}{3}\ln|y|\Big|_{\sqrt[4]{8}}^{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}=\frac{4}{3}\ln\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{\sqrt[4]{8}}=\frac{1}{3}\ln\frac{(2\sqrt{2}+2)^2}{8}=\frac{1}{3}\ln(\frac{3}{2}+\sqrt{2})$

Do đó $a+b+c+d=10$

**Cách 2:** Ta có $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{\frac{x}{x^3+1}}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{x^3\left(x^3+1\right)}}\mathrm{d}x.$

Đặt $t=x^3\Rightarrow \mathrm{d}t=3x^2\mathrm{d}x$. Đổi cận $x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{1}{8}; x=1\Rightarrow t=1.$

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{1}{8}}^{1}\frac{\frac{1}{3}\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t+1)}}=\frac{1}{3}\int\limits_{\frac{1}{8}}^{1}\frac{\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}=\frac{1}{3}\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|\Big|_{\frac{1}{8}}^{1}=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right).$

Vậy $a+b+c+d=3+3+2+2=10.$

## HÀM LƯỢNG GIÁC, MŨ LÔ GARIT

**Câu 22.** Có bao nhiêu giá trị của $a$ trong đoạn $\left[\frac{\pi}{4};2\pi\right]$ thỏa mãn $\int\limits_{0}^{a}\frac{\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$.

**A.** 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $t=\sqrt{1+3\cos x}\Rightarrow t^2=1+3\cos x\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=-3\sin x\mathrm{d}x.$

Đổi cận: + Với $x=0\Rightarrow t=2$

+ Với $x=a\Rightarrow t=\sqrt{1+3\cos a}=A.$

Khi đó $\int\limits_{0}^{a}\frac{\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}\mathrm{d}x=\int\limits_{A}^{2}\frac{2}{3}\mathrm{d}t=\frac{2}{3}t\Big|_{A}^{2}=\frac{2}{3}(2-A)=\frac{2}{3}\Leftrightarrow A=1\Rightarrow\sqrt{1+3\cos a}=1\Rightarrow\cos a=0$

$\Rightarrow a=\frac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$. Do $a\in\left[\frac{\pi}{4};2\pi\right]\Rightarrow\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+k\pi\le 2\pi\Leftrightarrow-\frac{1}{4}\le k\le\frac{3}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k=0\\k=1\end{array}\right.$.

**Bình luận:** Khi cho $a=\frac{\pi}{2}+\pi$ thì tích phân không xác định vì mẫu thức không xác định (trong căn bị âm). Vậy đáp án phải là B, nghĩa là chỉ chấp nhận $a=\frac{\pi}{2}$.

**Câu 23.** Nếu $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^n x\cos x dx=\frac{1}{64}$ thì $n$ bằng

**A.** 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$. Đổi cận: khi $x=0\Rightarrow t=0; x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=\frac{1}{2}$

Khi đó: $I=\int_0^{\frac{1}{2}}t^n\mathrm{d}t=\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{n+1}.\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{1}{64}$.

Suy ra $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{n+1}{64}$ có nghiệm duy nhất $n=3$ (tính đơn điệu).

**Câu 24.** Cho các tích phân $I=\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+\tan x}dx$ và $J=\int_0^{\alpha}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$ với $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$, khẳng định **sai** là

**A.** $I=\int_0^{\alpha}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$. **B.** $I-J=\ln\left|\sin\alpha+\cos\alpha\right|$.

**C.** $I=\ln\left|1+\tan\alpha\right|$. **D.** $I+J=\alpha$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\frac{1}{1+\tan\alpha}=\frac{1}{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$ nên A đúng.

$I-J=\int_0^{\alpha}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx=\int_0^{\alpha}\frac{d\left(\cos x+\sin x\right)}{\cos x+\sin x}=\ln\left|\cos x+\sin x\right|\Big|_0^{\alpha}=\ln\left|\cos\alpha+\sin\alpha\right|$ B đúng

$I+J=\int_0^{\alpha}dx=x\Big|_0^{\alpha}=\alpha$ D đúng.

**Câu 25.** Cho biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=a\pi+b\ln 2$ với $a$ và $b$ là các số hữu tỉ. Khi đó $\frac{a}{b}$ bằng:

**A.** $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$; $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

$\Rightarrow I_1+I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=\frac{\pi}{4}$ ; $I_1-I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=\ln(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\ln 2$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Rightarrow I_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2 \Rightarrow a = \frac{1}{8}; b = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$.

*Cách giải khác*:Đặt $x = \frac{\pi}{4} - t$

**Câu 26.** Tích phân $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\left(\cos x + \sqrt{3}\sin x\right)^2} dx$ có gái trị là:

**A.** $I = \frac{\sqrt{3}}{16}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2}\right) + \frac{3}{8}$.

**B.** $I = \frac{\sqrt{3}}{8}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2}\right) + \frac{3}{8}$.

**C.** $I = -\frac{\sqrt{3}}{8}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2}\right) + \frac{3}{8}$.

**D.** $I = -\frac{\sqrt{3}}{16}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2}\right) + \frac{3}{8}$.

**Lời giải**

Tích phân $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\left(\cos x + \sqrt{3}\sin x\right)^2} dx$ có gái trị là:

Ta có:

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\left(\cos x + \sqrt{3}\sin x\right)^2} dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{4\left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^2} dxI = \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{4\left[\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right]^2} dx.$$

Đặt $u = x + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = u - \frac{\pi}{6} \Rightarrow dx = du$.

Đổi cận $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow u = -\frac{\pi}{6} \\ x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(u - \frac{\pi}{6}\right)}{4\sin^2 u} du = \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u.\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\cos u}{4\sin^2 u} du = \frac{1}{8}\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{3}.\sin u - \cos u}{\sin^2 u} du$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{3}\sin u}{1-\cos^2 u} du - \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\sin^2 u} du\right)$$

Xét $I_1 = \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{3}\sin u}{1-\cos^2 u} du$.

Đặt $t = \cos u, u \in [0;\pi] \Rightarrow dt = -\sin u du$.

Đổi cận $\begin{cases} u = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ u = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0 \end{cases}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Rightarrow I_1=\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0}\frac{\sqrt{3}dt}{1-t^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(l\,\mathrm{n}\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\right)\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2}\right).$

Xét $I_2=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u}{\sin^2 u}du$.

Đặt $t=\sin u, u\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dt=\cos u du$.

Đổi cận $\begin{cases}u=-\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=-\frac{1}{2}\\ u=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1\end{cases}$.

$I_2=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{t^2}du=\left(-\frac{1}{t}\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{1}=-3.\Rightarrow I=\frac{1}{8}(I_1-I_2)=-\frac{\sqrt{3}}{16}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2}\right)+\frac{3}{8}.$

**Chọn D**

**Câu 27.** **(Chuyên Hạ Long lần 2-2019)** Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin x-\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx=\frac{-11}{3}\ln 2+b\ln 3+c\,(b,c\in Q)$. Tính $\frac{b}{c}$?

**A.** $\frac{22}{3}$. **B.** $\frac{22\pi}{3}$. **C.** $\frac{22}{3\pi}$. **D.** $\frac{22\pi}{13}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt: $\frac{3\sin x-\cos x}{2\sin x+3\cos x}=\frac{m(2\sin x+3\cos x)+n(2\cos x-3\sin x)}{2\sin x+3\cos x}$

$=\frac{(2m-3n)\sin x+(3m+2n)\cos x}{2\sin x+3\cos x}$

Đồng nhất hệ số ta có: $\begin{cases}2m-3n=3\\ 3m+2n=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\frac{3}{13}\\ n=-\frac{11}{13}\end{cases}$.

Nên: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin x-\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{3}{13}(2\sin x+3\cos x)-\frac{11}{13}(2\cos x-3\sin x)}{2\sin x+3\cos x}dx$

$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{3}{13}-\frac{11}{13}.\frac{2\cos x-3\sin x}{2\sin x+3\cos x}\right]dx=\frac{3}{13}(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{11}{13}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x-3\sin x}{2\sin x+3\cos x}dx$

$=\frac{3\pi}{26}-\frac{11}{13}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(2\sin x+3\cos x)}{2\sin x+3\cos x}dx=\frac{3\pi}{26}-\frac{11}{13}\ln|2\sin x+3\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$= \frac{3\pi}{26} - \frac{11}{13}\ln 2 + \frac{11}{13}\ln 3$. Do đó: $\begin{cases} b = \frac{11}{13} \\ c = \frac{3\pi}{26} \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{11}{13}.\frac{26}{3\pi} = \frac{22}{3\pi}$.

**Câu 28.** **(Chuyên Vinh Lần 3)** Biết $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x + \sin x\cos x + 1}{\cos^4 x + \sin x\cos^3 x}\mathrm{d}x = a + b\ln 2 + c\ln\left(1+\sqrt{3}\right)$, với $a,b,c$ là các số hữu tỉ. Giá trị của $abc$ bằng

**A.** $0$. **B.** $-2$. **C.** $-4$. **D.** $-6$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x + \sin x\cos x + 1}{\cos^4 x + \sin x\cos^3 x}\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\tan x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^4 x}}{1+\tan x}\mathrm{d}x$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\left(1+\tan^2 x\right) + \tan x\left(1+\tan^2 x\right) + \left(1+\tan^2 x\right)^2}{1+\tan x}\mathrm{d}x$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\tan x + \left(1+\tan^2 x\right)}{1+\tan x}\left(1+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(1 + \frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x}\right)\left(1+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x.$

Đặt $t = 1+\tan x$ ta được $\mathrm{d}t = \left(1+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x$, đổi cận $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 2$, $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = 1+\sqrt{3}$

Ta được

Vì $f(x)$ là hàm số chẵn nên $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = \int_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 8$

$\int_{1}^{3} f(-2x)\mathrm{d}x = \int_{1}^{3} f(2x)\mathrm{d}x = 3$

Xét tích phân $K = \int_{1}^{3} f(2x)\mathrm{d}x = 3$

Đặt $u = 2x \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2}$

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow u = 2$; $x = 3 \Rightarrow u = 6$.

$K = \frac{1}{2}\int_{2}^{6} f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_{2}^{6} f(x)\mathrm{d}x = 3 \Rightarrow \int_{2}^{6} f(x)\mathrm{d}x = 6$

Vậy $I = \int_{-1}^{6} f(x)\mathrm{d}x = \int_{1}^{6} f(x)\mathrm{d}x = \int_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{2}^{6} f(x)\mathrm{d}x = 8 + 6 = 14.$

**Câu 29.** **(THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho $F(x) = \int \frac{\left(1+\cos^2 x\right)\left(\sin x + \cot x\right)}{\sin^4 x}dx$ và $S$ là tổng tất cả các nghiệm của phương trình $F(x) = F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ trên khoảng $(0;4\pi)$. Tổng $S$ thuộc khoảng

**A.** $(6\pi;9\pi)$. **B.** $(2\pi;4\pi)$. **C.** $(4\pi;6\pi)$. **D.** $(0;2\pi)$.

**Lời giải**

**Chọn**

Ta có: $F(x)=\int\frac{(1+\cos^2 x)(\sin x+\cot x)}{\sin^4 x}dx=\int\frac{(1+\cos^2 x)\sin x}{\sin^4 x}dx+\int\frac{(1+\cos^2 x)\cot x}{\sin^4 x}dx$

Gọi $A=\int\frac{(1+\cos^2 x)\cot x}{\sin^4 x}dx$ và $B=\int\frac{(1+\cos^2 x)\sin x}{\sin^4 x}dx$

Ta có:

$$A=\int\frac{(1+\cos^2 x)\cot x}{\sin^4 x}dx=\int\frac{(1+2\cot^2 x)\cot x}{\sin^2 x}dx=-\int(\cot x+2\cot^3 x).d(\cot x)$$

$$=-\left(\frac{\cot^2 x}{2}+\frac{\cot^4 x}{2}\right)+C_1.$$

$$B=\int\frac{(1+\cos^2 x)\sin x}{\sin^4 x}dx=\int\frac{(1+\cos^2 x)\sin x}{(1-\cos^2 x)^2}dx$$

Đặt $t=\cos x$, suy ra $dt=-\sin x.dx$. Khi đó:

$$B=-\int\frac{1+t^2}{(t^2-1)^2}dt=-\int\frac{1+t^2}{(t-1)^2.(t+1)^2}dt=-\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{(t-1)^2}+\frac{1}{(t+1)^2}\right]dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}\right)+C_2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos x-1}+\frac{1}{\cos x+1}\right)+C_2$$

Do đó:

$$F(x)=A+B=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos x-1}+\frac{1}{\cos x+1}\right)-\left(\frac{\cot^2 x}{2}+\frac{\cot^4 x}{2}\right)+C$$

Suy ra:

$$F(x)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos x-1}+\frac{1}{\cos x+1}\right)-\left(\frac{\cot^2 x}{2}+\frac{\cot^4 x}{2}\right)+C=C$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\cos x-1}+\frac{1}{\cos x+1}-\cot^2 x-\cot^4 x=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\cos x}{\sin^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+\frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}=0$$

Với điều kiện $\sin x\neq 0$,

$$(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\2+\cos x+\dfrac{\cos^3 x}{\sin^2 x}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\2(1-\cos^2 x)+\cos x(1-\cos^2 x)+\cos^3 x=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\-2\cos^2 x+\cos x+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\\cos x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}\end{array}\right.$$

Theo giả thiết $x\in(0;4\pi)$ nên $x=\frac{\pi}{2};x=\frac{3\pi}{2};x=\frac{\pi}{2}+2\pi;x=\frac{3\pi}{2}+2\pi$;

$x=\alpha;x=\alpha+2\pi$ ;

$x=\beta;x=\beta+2\pi$.

Khi đó tổng các nghiệm này sẽ lớn hơn $9\pi$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 30.** Tích phân $I=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{\left(e^x\cos x+1\right)\cos x}dx$ có giá trị là:

**A.** $I=\ln\left|\frac{e^{\frac{\pi}{3}}\left(e^{\frac{\pi}{3}}+2\right)}{e^{\frac{2\pi}{3}}-2}\right|$. **B.** $I=\ln\left|\frac{e^{\frac{\pi}{3}}\left(e^{\frac{\pi}{3}}-2\right)}{e^{\frac{2\pi}{3}}-2}\right|$.

**C.** $I=\ln\left|\frac{e^{\frac{\pi}{3}}\left(e^{\frac{\pi}{3}}+2\right)}{e^{\frac{2\pi}{3}}+2}\right|$. **D.** $I=\ln\left|\frac{e^{\frac{\pi}{3}}\left(e^{\frac{\pi}{3}}-2\right)}{e^{\frac{2\pi}{3}}+2}\right|$.

**Lời giải**

Tích phân $I=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\cos x-\sin x}{\left(e^x\cos x+1\right)\cos x}dx$ có giá trị là:

Ta biến đổi: $I=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x.\left(\cos x-\sin x\right)}{\left(e^x\cos x+1\right)e^x\cos x}dx$.

Đặt $t=e^x\cos x\Rightarrow dt=e^x\left(\cos x-\sin x\right)dx$.

Đổi cận $\begin{cases}x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{3}}\\ x=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow t=-\frac{1}{2}e^{\frac{2\pi}{3}}\end{cases}$.

$$I=\int\limits_{\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{3}}}^{-\frac{1}{2}e^{\frac{2\pi}{3}}}\frac{1}{t\left(t+1\right)}dt=\left(\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{3}}}^{-\frac{1}{2}e^{\frac{2\pi}{3}}}=\ln\left|\frac{e^{\frac{2\pi}{3}}}{e^{\frac{2\pi}{3}}-2}\right|-\ln\left|\frac{e^{\frac{\pi}{3}}}{e^{\frac{\pi}{3}}+2}\right|=\ln\left|\frac{e^{\frac{\pi}{3}}\left(e^{\frac{\pi}{3}}+2\right)}{e^{\frac{2\pi}{3}}-2}\right|.$$

**Chọn A**

**Câu 31.** **(THPT LÊ VĂN HƯU NĂM 2018-2019)** Biết $\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^a}{b}$, trong đó $a$, $b$ là các số nguyên dương. Giá trị của biểu thức $P=2a^2+3b^3$ là

**A.** $P=32$. **B.** $P=194$. **C.** $P=200$. **D.** $P=100$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $I=\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x$. Đổi biến $t=\pi-x$, ta có

$$I=\int\limits_0^{\pi}\frac{\left(\pi-t\right)\sin^{2018}\left(\pi-t\right)}{\sin^{2018}\left(\pi-t\right)+\cos^{2018}\left(\pi-t\right)}\mathrm{d}t=\pi\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin^{2018}t}{\sin^{2018}t+\cos^{2018}t}\mathrm{d}t-\underbrace{\int\limits_0^{\pi}\frac{t\sin^{2018}t}{\sin^{2018}t+\cos^{2018}t}\mathrm{d}t}_{I}.$$

Suy ra

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$I=\dfrac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}\dfrac{\sin^{2018}t}{\sin^{2018}t+\cos^{2018}t}\mathrm{d}t \quad (1).$

Đặt $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^{2018}t}{\sin^{2018}t+\cos^{2018}t}\mathrm{d}t$ . Đổi biến $u=t+\dfrac{\pi}{2}$, ta có

$J=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\dfrac{\cos^{2018}v}{\sin^{2018}v+\cos^{2018}v}\mathrm{d}v=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(1-\dfrac{\sin^{2018}v}{\sin^{2018}v+\cos^{2018}v}\right)\mathrm{d}v=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}1\mathrm{d}v-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\dfrac{\sin^{2018}t}{\sin^{2018}t+\cos^{2018}t}\mathrm{d}t.$

Suy ra

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^{2018}t}{\sin^{2018}t+\cos^{2018}t}\mathrm{d}t+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\dfrac{\sin^{2018}t}{\sin^{2018}t+\cos^{2018}t}\mathrm{d}t=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\int\limits_0^{\pi}\dfrac{\sin^{2018}t}{\sin^{2018}t+\cos^{2018}t}\mathrm{d}t=\dfrac{\pi}{2}\ (2).$

Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra

$I=\dfrac{\pi^2}{4}.$

Vậy $P=2a^2+3b^3=2.2^2+3.4^3=200$.

**Câu 32.** Xét tích phân $A=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{3\sin^2x-2\cos^2x-2}dx$. Bằng cách đặt $t=\tan x,$ tích phân A được biến đổi thành tích phân nào sau đây.

**A.** $\int\limits_0^1\dfrac{1}{t^2-4}dt.$ **B.** $\int\limits_0^1\dfrac{1}{t^2+4}dt.$ **C.** $\int\limits_0^1\dfrac{1}{t^2-2}dt.$ **D.** $\int\limits_0^1\dfrac{1}{t^2+2}dt.$

**Lời giải:**

Ta có: $3\sin^2x-2\cos^2x-2=\cos^2x\left(3\tan^2x-2-\dfrac{2}{\cos^2x}\right)$

$=\cos^2x\left[3\tan^2x-2-2\left(1+\tan^2x\right)\right]=\cos^2x\left(\tan^2x-4\right)$

Vậy: $A=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{\cos^2x\left(\tan^2x-4\right)}dx$, lúc này đặt $t=\tan x$ và đổi cận ta đc:

$A=\int\limits_0^1\dfrac{dt}{t^2-4}dx.$

**Chọn A**

**Câu 33.** Đặt $t=\tan\dfrac{x}{2}$ thì $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\cos^6\dfrac{x}{2}}dx$ được biến đổi thành $2\int\limits_0^1f(t)dt$. Hãy xác định $f(t)$:

**A.** $f(t)=1-2t^2+t^4.$ **B.** $f(t)=1+2t^2+t^4.$ **C.** $f(t)=1+t^2.$ **D.** $f(t)=1-t^2.$

**Lời giải:**

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}\right)^2.\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\tan^2\dfrac{x}{2}\right).\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}dx$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Đặt $t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow\begin{cases}dt=\frac{1}{2}.\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx\\ x=0\Rightarrow t=0;x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1\end{cases}$

Vậy: $I=\int_0^1\left(1+t^2\right)^2.2dt=2\int_0^1\left(1+2t^2+t^4\right)dt\Rightarrow f\left(t\right)=1+2t^2+t^4$

**Chọn B**

**Câu 34.** Biết $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x=a+\frac{\pi^2}{b}+\frac{\sqrt{3}\pi}{c}$ với $a$, $b$, $c$, $d$ là các số nguyên. Tính $M=a-b+c$.

**A.** $M=35$. **B.** $M=41$. **C.** $M=-37$. **D.** $M=-35$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x=I+J$

Xét $I=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x$. Đặt $t=-x\ \left(C_m\right)$; Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$; $x=-\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$.

Suy ra $I=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{-t\cos(-t)}{\sqrt{1+(-t)^2}-t}(-\mathrm{d}t)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{-t\cos t}{\sqrt{1+t^2}-t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{-x\cos x}{\sqrt{1+x^2}-x}\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{-x\cos x}{\sqrt{1+x^2}-x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x$

$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}x\cos x\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}-2x^2\cos x\,\mathrm{d}x$.

$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x=\left(-2x^2\sin x-4x\cos x+4\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=2+\frac{\pi^2}{-36}+\frac{\pi\sqrt{3}}{-3}$.

Khi đó $a=2$; $b=-36$; $c=-3$.

Vậy $M=a-b+c=35$.

**Câu 35.** **(THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho $f\left(x\right)$ là hàm số chẵn trên đoạn $\left[-a;a\right]$ và $k>0$. Giá trị tích phân $\int_{-a}^{a}\frac{f\left(x\right)}{1+\mathrm{e}^{kx}}\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\int_0^a f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int_{-a}^{a}f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **C.** $2\int_{-a}^{a}f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **D.** $2\int_0^a f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

**Lời giải**

Ta có $\int_{-a}^{a}\frac{f\left(x\right)}{1+\mathrm{e}^{kx}}\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0}\frac{f\left(x\right)}{1+\mathrm{e}^{kx}}\mathrm{d}x+\int_0^a\frac{f\left(x\right)}{1+\mathrm{e}^{kx}}\mathrm{d}x$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Xét tích phân $\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx$.

Đặt $t=-x\Leftrightarrow x=-t$

$\Rightarrow dt=-dx\Leftrightarrow -dt=dx$

Đổi cận:

$x=-a\Rightarrow t=a$

$x=0\Rightarrow t=0$

Khi đó,

$\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx=\int_{a}^{0}\frac{f(-t)}{1+e^{k(-t)}}(-dt)=\int_{0}^{a}\frac{f(t)}{1+e^{-kt}}dt$

$=\int_{0}^{a}\frac{e^{kt}.f(t)}{1+e^{kt}}dx=\int_{0}^{a}\frac{e^{kx}.f(x)}{1+e^{kx}}dx$

Do đó, $\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx=\int_{0}^{a}\frac{e^{kx}.f(x)}{1+e^{kx}}dx+\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx=\int_{0}^{a}\frac{(e^{kx}+1)f(x)}{1+e^{kx}}dx=\int_{0}^{a}f(x)dx$

**Câu 36.** **(THPT GIA LỘC HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho $\int_{1}^{e}\frac{2\ln x+1}{x(\ln x+2)^2}dx=\ln\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên dương, biết $\frac{a}{b};\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính giá trị $a+b+c+d$ ?

**A.** 18. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 17.

**Lời giải**

Đặt $t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{dx}{x}$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=0$; $x=e\Rightarrow t=1$. Khi đó:

$I=\int_{1}^{e}\frac{2\ln x+1}{x(\ln x+2)^2}dx=\int_{0}^{1}\frac{2t+1}{(t+2)^2}dt=\int_{0}^{1}\left(\frac{-3}{(t+2)^2}+\frac{2}{t+2}\right)dt=\left(\frac{3}{t+2}+2\ln|t+2|\right)\Big|_{0}^{1}=\ln\frac{9}{4}-\frac{1}{2}$.

Vậy $a+b+c+d=9+4+1+2=16$.

**Câu 37.** **(THPT LÝ NHÂN TÔNG LẦN 1 NĂM 2018-2019)** Biết $\int_{0}^{1}\frac{\pi x^3+2^x+ex^3 2^x}{\pi+e.2^x}dx=\frac{1}{m}+\frac{1}{e\ln n}.\ln\left(p+\frac{e}{e+\pi}\right)$ với $m$, $n$, $p$ là các số nguyên dương. Tính tổng $P=m+n+p$

**A.** $P=5$. **B.** $P=6$. **C.** $P=8$. **D.** $P=7$.

**Lời giải**

$\int_{0}^{1}\frac{\pi x^3+2^x+ex^3 2^x}{\pi+e.2^x}dx=\int_{0}^{1}\frac{x^3(\pi+e.2^x)+2^x}{\pi+e.2^x}dx=\int_{0}^{1}\left(x^3+\frac{2^x}{\pi+e.2^x}\right)dx$

$=\frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{1}+\frac{1}{e\ln 2}.\ln|\pi+e.2^x|\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{e.\ln 2}.\ln\left|1+\frac{e}{\pi+e}\right|$.

Vậy $m=4$, $n=2$, $p=1$ nên $P=m+n+p=7$.

**Câu 38.** $\int_{1}^{e}\frac{2\ln x+1}{x(\ln x+2)^2}dx=\ln\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên dương, biết $\frac{a}{b};\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính giá trị $a+b+c+d$ ?

**A.** 18. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 17.

**Lời giải**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Chọn C**

Đặt $t=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=0;\ x=\mathrm{e}\Rightarrow t=1$. Khi đó:

$$I=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{2\ln x+1}{x\left(\ln x+2\right)^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{2t+1}{\left(t+2\right)^2}\mathrm{d}t=\int_0^1\left(\frac{-3}{\left(t+2\right)^2}+\frac{2}{t+2}\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{3}{t+2}+2\ln\left|t+2\right|\right)\Big|_0^1=\ln\frac{9}{4}-\frac{1}{2}.$$

Vậy $a+b+c+d=9+4+1+2=16$.

**Câu 39.** **(THPT - YÊN ĐỊNH THANH HÓA 2018 2019- LẦN 2)** Cho $\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\left(3x^3-1\right)\ln x+3x^2-1}{1+x\ln x}\mathrm{d}x=a.\mathrm{e}^3+b+c.\ln\left(\mathrm{e}+1\right)$ với $a,b,c$ là các số nguyên và $\ln\mathrm{e}=1$. Tính $P=a^2+b^2+c^2$.

**A.** $P=9$. **B.** $P=14$. **C.** $P=10$. **D.** $P=3$.

**Lời giải**

Ta có

$$I=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\left(3x^3-1\right)\ln x+3x^2-1}{1+x\ln x}\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{3x^2\left(1+x\ln x\right)-\left(1+\ln x\right)}{1+x\ln x}\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}3x^2\mathrm{d}x-\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\left(1+\ln x\right)}{1+x\ln x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^3-1-A$$

Tính $A=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\left(1+\ln x\right)}{1+x\ln x}\mathrm{d}x$. Đặt $t=1+x\ln x\Rightarrow \mathrm{d}t=\left(1+\ln x\right)\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=1\\ x=\mathrm{e}\Rightarrow t=\mathrm{e}+1\end{cases}$. Khi đó $A=\int_1^{1+\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln t\Big|_1^{1+\mathrm{e}}=\ln(\mathrm{e}+1)$.

Vậy $I=\mathrm{e}^3-1-\ln(\mathrm{e}+1)\longrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-1\\ c=-1\end{cases}\Rightarrow P=a^2+b^2+c^2=3$.

**Câu 40.** Biết rằng: $\int_0^{\ln 2}\left(x+\frac{1}{2e^x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln^a 2+b\ln 2+c\ln\frac{5}{3}$. Trong đó $a,b,c$ là những số nguyên. Khi đó $S=a+b-c$ bằng:

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\int_0^{\ln 2}\left(x+\frac{1}{2e^x+1}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\ln 2}x\mathrm{d}x+\int_0^{\ln 2}\frac{1}{2e^x+1}\mathrm{d}x.$$

Tính $\int_0^{\ln 2}x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\ln 2}=\frac{\ln^2 2}{2}$

Tính $\int_0^{\ln 2}\frac{1}{2e^x+1}\mathrm{d}x$

Đặt $t=2e^x+1\Rightarrow \mathrm{d}t=2e^x\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t-1}$. Đổi cận: $x=\ln 2\Rightarrow t=5, x=0\Rightarrow t=3$.

$$\int_0^{\ln 2}\frac{1}{2e^x+1}\mathrm{d}x=\int_3^5\frac{\mathrm{d}t}{t\left(t-1\right)}=\int_3^5\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\left(\ln\left|t-1\right|-\ln\left|t\right|\right)\Big|_3^5=\ln 4-\ln 5-\ln 2+\ln 3=\ln 2-\ln\frac{5}{3}.$$

$$\int_0^{\ln 2}\left(x+\frac{1}{2e^x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln^2 2+\ln 2-\ln\frac{5}{3}\Rightarrow a=2,b=1,c=-1$$

Vậy $a+b-c=4$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 41.** Cho $\int_0^1 \frac{\left(x^2+x\right)\mathrm{e}^x}{x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x = a.\mathrm{e}+b\ln\left(\mathrm{e}+c\right)$ với $a$, $b$, $c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a+2b-c$.

**A.** $P=1$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=0$. **D.** $P=-2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $I=\int_0^1 \frac{\left(x^2+x\right)\mathrm{e}^x}{x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{(x+1)\mathrm{e}^x x\mathrm{e}^x}{x\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$.

Đặt $t=x\mathrm{e}^x+1\Rightarrow \mathrm{d}t=(1+x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=\mathrm{e}+1$.

Khi đó: $I=\int_1^{\mathrm{e}+1}\frac{t-1}{t}\mathrm{d}t=\int_1^{\mathrm{e}+1}\left(1-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\left(t-\ln|t|\right)\Big|_1^{\mathrm{e}+1}=\mathrm{e}-\ln(\mathrm{e}+1)$.

Suy ra: $a=1$, $b=-1$, $c=1$.

Vậy: $P=a+2b-c=-2$.

**Câu 42.** Biết $\int_0^1 \frac{\left(x^2+5x+6\right)\mathrm{e}^x}{x+2+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=a\mathrm{e}-b-\ln\frac{a\mathrm{e}+c}{3}$ với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên và $\mathrm{e}$ là cơ số của logarit tự nhiên. Tính $S=2a+b+c$.

**A.** $S=10$. **B.** $S=0$. **C.** $S=5$. **D.** $S=9$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có : $I=\int_0^1 \frac{\left(x^2+5x+6\right)\mathrm{e}^x}{x+2+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{(x+2)(x+3)\mathrm{e}^{2x}}{(x+2)\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$.

Đặt $t=(x+2)\mathrm{e}^x\Rightarrow \mathrm{d}t=(x+3)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$. Đổi cận : $x=0\Rightarrow t=2$, $x=1\Rightarrow t=3\mathrm{e}$.

$I=\int_2^{3\mathrm{e}}\frac{t\mathrm{d}t}{t+1}=\int_2^{3\mathrm{e}}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\left(t-\ln|t+1|\right)\Big|_2^{3\mathrm{e}}=3\mathrm{e}-2-\ln\frac{3\mathrm{e}+1}{3}$.

Vậy $a=3$, $b=2$, $c=1\Rightarrow S=9$.

**Câu 43.** $\int_0^1 \frac{\pi x^3+2^x+\mathrm{e}x^3.2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x=\frac{1}{m}+\frac{1}{\mathrm{e}\ln n}\ln\left(p+\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+\pi}\right)$ với $m$, $n$, $p$ là các số nguyên dương. Tính tổng $S=m+n+p$.

**A.** $S=6$. **B.** $S=5$. **C.** $S=7$. **D.** $S=8$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\int_0^1 \frac{\pi x^3+2^x+\mathrm{e}x^3.2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^3+\frac{2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+\int_0^1\frac{2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+J$.

Tính $J=\int_0^1\frac{2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x$. Đặt $\pi+\mathrm{e}.2^x=t\Rightarrow \mathrm{e}.2^x\ln 2\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\Leftrightarrow 2^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\mathrm{e}.\ln 2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận: Khi $x=0$ thì $t=\pi+\mathrm{e}$; khi $x=1$ thì $t=\pi+2\mathrm{e}$.

$J=\int_0^1\frac{2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\mathrm{e}\ln 2}\int_{\pi+\mathrm{e}}^{\pi+2\mathrm{e}}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\mathrm{e}\ln 2}\ln|t|\Big|_{\pi+\mathrm{e}}^{\pi+2\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}\ln 2}\ln\left(1+\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+\pi}\right)$.

Khi đó $\int_0^1 \frac{\pi x^3+2^x+\mathrm{e}x^3.2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{\mathrm{e}\ln 2}\ln\left(1+\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+\pi}\right)\Rightarrow m=4$, $n=2$, $p=1$. Vậy $S=7$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 44.** Biết $I=\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{\ln^3 x+3x}\left(\ln^2 x+\frac{1}{3}x\right)}{x}dx=\frac{2}{9}\left(\sqrt{1+ae+27e^2+27e^3}-3\sqrt{3}\right)$, $a$ là các số hữu tỉ. Giá trị của $a$ là:

**A.** 9. **B.** – 6. **C.** – 9. **D.** 6.

**Lời giải**

Biết $I=\int\limits_1^e \frac{\sqrt{\ln^3 x+3x}\left(\ln^2 x+\frac{1}{3}x\right)}{x}dx=\frac{2}{9}\left(\sqrt{1+ae+27e^2+27e^3}-3\sqrt{3}\right)$. Giá trị của a là:

Ta có:

$$I=\int\limits_1^e \frac{\sqrt{\ln^3 x+3x}\left(\ln^2 x+\frac{1}{3}x\right)}{x}dx=\frac{1}{3}\int\limits_1^e \frac{\sqrt{\ln^3 x+3x}\left(3\ln^2 x+x\right)}{x}dx$$

Đặt $t=\ln^3 x+3x\Rightarrow dt=\frac{3}{x}\ln^2 x+1$

Đổi cận $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=3\\ x=e\Rightarrow t=1+3e\end{cases}$.

$$\Rightarrow I=\int\limits_3^{1+3e}\sqrt{t}dt=\frac{2}{3}\left(\sqrt{t^3}\right)\Big|_3^{1+3e}=\frac{2}{3}\left(\sqrt{(1+3e)^3}-3\sqrt{3}\right)=\frac{2}{9}\left(\sqrt{1+9e+27e^2+27e^3}-3\sqrt{3}\right)\Rightarrow a=9.$$

**Chọn A**

**Câu 45.** Cho tích phân $I=\int_e^{e^2}\frac{\left(x^2+1\right)\ln x+1}{x\ln x}dx=\frac{ae^4+be^2}{2}+c+d\ln 2$. Chọn phát biểu **đúng nhất**:

**A.** $a=b=c=d$ **B.** $a=b^2=\sqrt{c}=\frac{1}{d}$ **C.** A và B đúng **D.** A và B sai

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có

$$I=\int_e^{e^2}\frac{\left(x^2+1\right)\ln x+1}{x\ln x}dx=\int_e^{e^2}\frac{x^2\ln x+1+\ln x}{x\ln x}dx$$

$$=\int_e^{e^2}\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x\ln x}\right)dx=\int_e^{e^2}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx+\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx$$

Xét $M=\int_e^{e^2}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\ln|x|\right)\Big|_e^{e^2}=\frac{e^4-e^2}{2}+1$

Xét $N=\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx$, đặt $t=\ln x$, suy ra $dt=\frac{1}{x}dx$.

Đổi cận $x=e\Rightarrow t=1$ và $x=e^2\Rightarrow t=2$ ta được

$N=\int_1^2\frac{dt}{t}=\left(\ln|t|\right)\Big|_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln 2$.

Vậy $I=\frac{e^4-e^2}{2}+1+\ln 2$.

Do đó $a=-b=c=d=1$. Ta chọn phương án **B.**

**Câu 46.** Trong các số dưới đây, số nào ghi giá trị của $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2^{x-1}.\cos x}{1+2^x}dx=\frac{a}{b},a,b\in\mathbb{N}$. Khi đó $a.b$ bằng

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1

**Lời giải**

Ta có: $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{x-1}\cos x}{1+2^x}dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x\cos x}{(1+2^x).2}dx - \int\limits_{0}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{2^x\cos x}{(1+2^x).2}dx$ (1)

Đặt $x=-t$ ta có $x=0$ thì $t=0, x=\frac{\pi}{2}$ thì $t=\frac{\pi}{2}$ và $dx=-dt$

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x\cos x}{(1+2^x).2}dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{-t}\cos(-t)}{(1+2^{-t}).2}d(-t) = -\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(1+2^t).2}dt = -\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+2^x).2}dx$$

Thay vào (1) có

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{x-1}\cos x}{1+2^x}dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x\cos x}{(1+2^x).2}dx + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+2^x).2}dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+2^x)\cos x}{(1+2^x).2}dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2}dx = \frac{\sin x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

Vậy $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{x-1}\cos x}{1+2^x}dx = \frac{1}{2}$

**Chọn C**

**Câu 47.** Tính tích phân $I = \int\limits_{-2}^{2} \frac{x^{2016}}{e^x+1}\mathrm{d}x$.

**A.** $I=0$. **B.** $I = \frac{2^{2018}}{2017}$. **C.** $I = \frac{2^{2017}}{2017}$. **D.** $I = \frac{2^{2018}}{2018}$.

**Lời giải.**

**Chọn C**

Đặt $x=-t \Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Đổi cận: Với $x=2 \Rightarrow t=-2; x=-2 \Rightarrow t=2$

Khi đó: $I = \int\limits_{2}^{-2} \frac{-t^{2016}}{e^{-t}+1}\mathrm{d}t = \int\limits_{-2}^{2} \frac{x^{2016}e^x\mathrm{d}x}{1+e^x}$, suy ra $2I = \int\limits_{-2}^{2} x^{2016}\mathrm{d}x = \frac{x^{2017}}{2017}\Big|_{-2}^{2} = \frac{2^{2018}}{2017} \Rightarrow I = \frac{2^{2017}}{2017}$.

**Câu 48.** Biết tích phân $\int\limits_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx = \frac{a.\pi+b}{8}$ trong đó $a,b \in \mathbb{N}$. Tính tổng $a+b$?

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -1

**Lời giải**

$$I = \int\limits_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx = \int\limits_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx + \int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx = \int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}dx$$

Đặt $x=\sin t \Rightarrow I = \frac{\pi+2}{8}$.

**Chọn C**

**ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 2**

Cho hàm số $f$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[a;b]$. Giả sử hàm số $x=\varphi(t)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]^{(*)}$ sao cho $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$ và $a \le \varphi(t) \le b$ với mọi $t \in [\alpha;\beta]$. Khi đó:

$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$

**Một số phương pháp đổi biến:** Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có dạng

1. $\sqrt{a^2-x^2}$ : đặt $x = |a|\sin t;\ t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

2. $\sqrt{x^2-a^2}$ : đặt $x = \frac{|a|}{\sin t};\ t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$

3. $\sqrt{x^2+a^2}$ : $x = |a|\tan t;\ t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

4. $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ : đặt $x = a.\cos 2t$

**Lưu ý:** Chỉ nên sử dụng phép đặt này khi các dấu hiệu 1, 2, 3 đi với $x$ mũ chẵn. Ví dụ, để tính tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}}$ thì phải đổi biến dạng 2 còn với tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}$ thì nên đổi biến dạng 1.

**Câu 49.** Biết rằng $\int_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-5}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}$ trong đó $a$, $b$ là các số nguyên dương và $4 < a+\sqrt{b} < 5$. Tổng $a+b$ bằng

**A.** 5. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\int_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-5}}\mathrm{d}x = \int_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{4-(x-3)^2}}\mathrm{d}x$.

Đặt $x-3 = 2\sin t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, $\mathrm{d}x = 2\cos t\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x = 4 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$, $x = a+\sqrt{b} \Rightarrow t = \arcsin\frac{a+\sqrt{b}-3}{2} = m$.

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{m} \frac{2\cos t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{m} \mathrm{d}t = t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{m} = m-\frac{\pi}{6}$.

Theo đề ta có $m-\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \arcsin\frac{a+\sqrt{b}-3}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{a+\sqrt{b}-3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a+\sqrt{b} = \sqrt{3}+3.$

Do đó $a = 3$, $b = 3$, $a+b = 6$.

**Câu 50.** Tích phân $I = \int_0^1 \frac{3+4x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$ có giá trị là:

**A.** $I = \frac{7\pi}{6} - 4\sqrt{3} + 8$. **B.** $I = \frac{7\pi}{6} - 4\sqrt{3} - 8$.

**C.** $I = \frac{7\pi}{6} + 4\sqrt{3} - 8$. **D.** $I = \frac{7\pi}{6} + 4\sqrt{3} + 8$.

**Lời giải**

Tích phân $I = \int_0^1 \frac{3+4x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$ có giá trị là:

Ta có: $(3+3x-x^2)' = 3-2x$ và $3+4x = 9-2(3-2x)$

$\Rightarrow I=\int_0^1 \frac{3+4x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx=\int_0^1 \frac{7-2(2-2x)}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx=\int_0^1 \frac{7}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx-\int_0^1 \frac{2(2-2x)}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx.$

Xét $I_1=\int_0^1 \frac{7}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx=\int_0^1 \frac{7}{\sqrt{4-(x-1)^2}}dx.$

Đặt $x-1=2\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=2\cos t dt.$

Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=-\frac{\pi}{6}\\ x=1\Rightarrow t=0\end{cases}.$

$\Rightarrow I_1=\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \frac{14\cos t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}dt=\frac{7\pi}{6}.$

Xét $I_2=\int_0^1 \frac{2(2-2x)}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx.$

Đặt $t=3+2x-x^2\Rightarrow dt=(2-2x)dx.$

Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=3\\ x=1\Rightarrow t=4\end{cases}.$

$\Rightarrow I_2=\int_3^4 \frac{2}{\sqrt{t}}dt=4\left(t^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_3^4=4\left(2-\sqrt{3}\right).$

$I=I_1-I_2=\frac{7\pi}{6}+4\sqrt{3}-8.$

**Chọn C**

**Câu 51.** Cho $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-2x\sqrt{1-x^2}}dc=a\pi+b$ với $a,b\in R$. Giá trị $a+b$ gần nhất với

**A.** $\frac{1}{10}$ **B.** 1 **C.** $-\frac{1}{5}$ **D.** $\sqrt{2}$

**Lời giải**

**Đáp án: C**

Cũng như câu 25, câu 26 cũng là một câu tích phân đòi hỏi khả năng biến đổi của các thí sinh. Đối với câu này, chúng ta sử dụng phương pháp đưa về lượng giác.

Đặt $x=\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. I được viết lại là

$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1-2\sin t\cos t}.\cos t dt=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{(\cos t-\sin t)^2}.\cos t dt=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos t-\sin t)\cos t dt$

$\Leftrightarrow -\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin t\cos t dt+\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 t dt=\frac{-1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin 2t d(2t)+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos 2t+1)d(2t)$

$\Leftrightarrow I=\frac{\cos 2t}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{\sin 2t+2t}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}-1}{8}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Suy ra $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}-1}{8}\approx 0{,}175$.

***Nhận xét:*** *Hai bài toán trên chính là cách hướng có thể ra đề để tránh tình trạng sử dụng máy tính Casio. Thí sinh hiểu bản chất và cách làm thực sự sẽ không gặp khó khăn nhiều khi giải quyết các bài toán này.*

**Câu 52.** Tích phân $I=\int\limits_{\frac{5}{2}}^{3}\sqrt{(x-1)(3-x)}dx$ có giá trị là:

**A.** $I=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $I=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{8}$. **C.** $I=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$. **D.** $I=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{8}$.

**Lời giải**

Tích phân $I=\int\limits_{\frac{5}{2}}^{3}\sqrt{(x-1)(3-x)}dx$ có giá trị là:

Ta có:

$I=\int\limits_{\frac{5}{2}}^{3}\sqrt{(x-1)(3-x)}dx=\int\limits_{\frac{5}{2}}^{3}\sqrt{-3-x^2+2x}dx=\int\limits_{\frac{5}{2}}^{3}\sqrt{1-(x-2)^2}dx$.

Đặt $x-2=\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=\cos t dt$.

Đổi cận $\begin{cases}x=\frac{5}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}\\ x=3\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}\end{cases}$.

$\Rightarrow I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t dt=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$.

**Chọn C**

**Câu 53.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(\tan x)=\cos^4 x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $\frac{\pi+2}{8}$. **B.** 1. **C.** $\frac{2+\pi}{4}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $t=\tan x$. Ta có $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x=1+t^2\Rightarrow\cos^4 x=\frac{1}{(1+t^2)^2}\Rightarrow f(t)=\frac{1}{(1+t^2)^2}$

$I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

Đặt $x=\tan u,\left(\frac{-\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \mathrm{d}x=(1+\tan^2 u)\mathrm{d}u$; đổi cận: $x=0\Rightarrow u=0$; $x=1\Rightarrow u=\frac{\pi}{4}$.

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\tan^2 u}{(1+\tan^2 u)^2}\mathrm{d}u=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2 u}\right)^2}.\frac{1}{\cos^2 u}\mathrm{d}u=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 u du=\left(\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}\sin 2u\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{2+\pi}{8}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 54.** Tính tích phân $\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \frac{-4x^4+x^2-3}{x^4+1}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(a\sqrt{3}+b+c\pi\right)+4$. Với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên. Khi đó biểu thức $a+b^2+c^4$ có giá trị bằng

**A.** $20$. **B.** $241$. **C.** $196$. **D.** $48$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \frac{-4x^4+x^2-3}{x^4+1}\mathrm{d}x=\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \left(-4+\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)\mathrm{d}x=-4\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}x+\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x=I+J$.

Tính $I=-4\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}x=-4x\Big|_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}=-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}+4$.

Tính $J=\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x=\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\mathrm{d}x.$

Đặt $t=x-\frac{1}{x}\Rightarrow \mathrm{d}t=\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$. Khi $\begin{cases} x=1\Rightarrow t=0 \\ x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\Rightarrow t=\sqrt{2} \end{cases}$.

Khi đó $J=\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}$. Đặt $t=\sqrt{2}\tan u\Rightarrow \mathrm{d}t=\sqrt{2}\left(1+\tan^2 u\right)\mathrm{d}u$. Khi $\begin{cases} t=0\Rightarrow u=0 \\ t=\sqrt{2}\Rightarrow u=\frac{\pi}{4} \end{cases}$.

Suy ra $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\left(1+\tan^2 u\right)}{2\left(1+\tan^2 u\right)}\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}u=\frac{\sqrt{2}}{2}u\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi$.

Vậy $\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \frac{-4x^4+x^2-3}{x^4+1}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(-16\sqrt{3}-16+\pi\right)+4\Rightarrow \begin{cases} a=b=-16 \\ c=1 \end{cases}$.

Vậy $a+b^2+c^4=241$.

**Câu 55.** **(CỤM TRẦN KIM HƯNG -HƯNG YÊN NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;4\right]$ và thỏa mãn điều kiện $4xf\left(x^2\right)+6f\left(2x\right)=\sqrt{4-x^2}$. Tính tích phân $\int\limits_0^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\frac{\pi}{5}$. **B.** $I=\frac{\pi}{2}$. **C.** $I=\frac{\pi}{20}$. **D.** $I=\frac{\pi}{10}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $4xf\left(x^2\right)+6f\left(2x\right)=\sqrt{4-x^2}\Rightarrow \int\limits_0^2 \left(4xf\left(x^2\right)+6f\left(2x\right)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x\Leftrightarrow 4I_1+6I_2=I$.

Trong đó

$I_1=\int\limits_0^2 \left(xf\left(x^2\right)\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 f\left(x^2\right)\mathrm{d}\left(x^2\right)=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x$

$I_2=\int\limits_0^2 \left(f\left(2x\right)\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 f\left(2x\right)\mathrm{d}\left(2x\right)=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$I=\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2(t)}.\cos(t)\,\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos(2t)\right)\mathrm{d}t=\left(2t+\sin(2t)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi\,.$$

Khi đó ta có hệ $\begin{cases}I_1=I_2\\4I_1+6I_2=\pi\end{cases}\Leftrightarrow I_1=I_2=\frac{\pi}{10}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{10}$ hay $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{5}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

# TÍCH PHÂN HÀM ẨN PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

## TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 1

**Câu 1.** Cho $\int_1^2 f\left(x^2+1\right)x\mathrm{d}x=2$. Khi đó $I=\int_2^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** 2. **B.** 1. **C.** –1. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $t=x^2+1\Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=2$; $x=2\Rightarrow t=5$.

Khi đó: $2=\frac{1}{2}\int_2^5 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_2^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x\Rightarrow I=\int_2^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x=4.$.

**Câu 2.** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[1;+\infty\right)$ và $\int_0^3 f\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}x=8$. Tích phân $I=\int_1^2 xf\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng:

**A.** $I=16$. **B.** $I=2$. **C.** $I=8$. **D.** $I=4$

**Lời giải**

**Chọn D**

$I=\int_0^3 f\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}x=8$. Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$;

đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=3\Rightarrow t=2$.

Khi đó $I=\int_1^2 2tf\left(t\right)\mathrm{d}t=8\Rightarrow\int_1^2 tf\left(t\right)\mathrm{d}t=4$. Vậy $I=\int_1^2 xf\left(x\right)\mathrm{d}x=4$.

**Câu 3.** **(THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4)** Cho $I=\int_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2$. Giá trị của $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x.f\left(\sqrt{3\cos x+1}\right)}{\sqrt{3\cos x+1}}\mathrm{d}x$ bằng

**A.** 2. **B.** $-\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $-2$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $t=\sqrt{3\cos x+1}\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{-3\sin x}{2\sqrt{3\cos x+1}}\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=2$; $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$.

Khi đó: $J=\int_2^1-\frac{2}{3}f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int_1^2\frac{2}{3}f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\int_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.2=\frac{4}{3}$.

**Câu 4.** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2;\int_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int_{-1}^1 f\left(\left|2x-1\right|\right)\mathrm{d}x$

.

**A.** $I=\frac{2}{3}$. **B.** $I=4$. **C.** $I=\frac{3}{2}$. **D.** $I=6$.

**Lời giải**

**Chọn B**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Có $I=\int\limits_{-1}^{1} f\left(\left|2x-1\right|\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} f\left(1-2x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} f\left(2x-1\right)\mathrm{d}x=I_1+I_2$

Tính $I_1=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} f\left(1-2x\right)\mathrm{d}x$ .Đặt $u=1-2x\Rightarrow \mathrm{d}u=-2\,\mathrm{d}x$ . Đổi cận: $\begin{cases} x=-1\Rightarrow u=3 \\ x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow u=0 \end{cases}$.

$\Rightarrow I_1=\dfrac{-1}{2}\int\limits_{3}^{0} f\left(u\right)\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{3} f\left(u\right)\mathrm{d}u=3$

Tính $I_2=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} f\left(2x-1\right)\mathrm{d}x$. Đặt $u=2x-1\Rightarrow \mathrm{d}u=2\,\mathrm{d}x$ . Đổi cận: $\begin{cases} x=1\Rightarrow u=1 \\ x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow u=0 \end{cases}$.

$\Rightarrow I_2=\dfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f\left(u\right)\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f\left(u\right)\mathrm{d}u=1$

Vậy $I=I_1+I_2=4$.

**Câu 5.** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[0;4\right]$ và $\int\limits_{0}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x=1;\int\limits_{0}^{4} f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$. Tính $\int\limits_{-1}^{1} f\left(\left|3x-1\right|\right)\mathrm{d}x$ .

**A.** 4. **B.** 2. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn C**

$\int\limits_{-1}^{1} f\left(\left|3x-1\right|\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1/3} f\left(1-3x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1/3}^{1} f\left(3x-1\right)\mathrm{d}x$.

$=-\dfrac{1}{3}\int\limits_{-1}^{1/3} f\left(1-3x\right)\mathrm{d}\left(1-3x\right)+\dfrac{1}{3}\int\limits_{1/3}^{1} f\left(3x-1\right)\mathrm{d}\left(3x-1\right)$.

$=-\dfrac{1}{3}\int\limits_{4}^{0} f\left(t\right)\mathrm{d}t+\dfrac{1}{3}\int\limits_{0}^{2} f\left(t\right)\mathrm{d}\left(t\right)=-\dfrac{1}{3}\left(-3\right)+\dfrac{1}{3}.1=\dfrac{4}{3}$.

**Câu 6.** Cho $f\left(x\right)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}\,x=4$, $\int\limits_{0}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}\,x=6$. Tính $I=\int\limits_{-1}^{1} f\left(\left|2x+1\right|\right)\mathrm{d}\,x$ .

**A.** $I=3$. **B.** $I=5$. **C.** $I=6$. **D.** $I=4$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $u=2x+1\Rightarrow \mathrm{d}\,x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}\,u$. Khi $x=-1$ thì $u=-1$. Khi $x=1$ thì $u=3$.

Nên $I=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-1}^{3} f\left(\left|u\right|\right)\mathrm{d}\,u=\dfrac{1}{2}\left(\int\limits_{-1}^{0} f\left(\left|u\right|\right)\mathrm{d}\,u+\int\limits_{0}^{3} f\left(\left|u\right|\right)\mathrm{d}\,u\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\int\limits_{-1}^{0} f\left(-u\right)\mathrm{d}\,u+\int\limits_{0}^{3} f\left(u\right)\mathrm{d}\,u\right)$.

Xét $\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}\,x=4$. Đặt $x=-u\Rightarrow \mathrm{d}\,x=-\mathrm{d}\,u$.

Khi $x=0$ thì $u=0$. Khi $x=1$ thì $u=-1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Nên $4=\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}\,x=-\int\limits_{0}^{-1} f\left(-u\right)\mathrm{d}\,u=\int\limits_{-1}^{0} f\left(-u\right)\mathrm{d}\,u$.

Ta có $\int\limits_{0}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}\,x=6\Rightarrow\int\limits_{0}^{3} f\left(u\right)\mathrm{d}\,u=6$.

Nên $I=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-1}^{0} f\left(-u\right)\mathrm{d}\,u+\int\limits_{0}^{3} f\left(u\right)\mathrm{d}\,u\right)=\frac{1}{2}\left(4+6\right)=5$.

**Câu 7.** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int\limits_{0}^{1} f\left(2x\right)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_{0}^{2} f\left(6x\right)\mathrm{d}x=14$. Tính $\int\limits_{-2}^{2} f\left(5\left|x\right|+2\right)\mathrm{d}x$.

**A.** 30. **B.** 32. **C.** 34. **D.** 36.

**Lời giải**

**Chọn B**

+ Xét $\int\limits_{0}^{1} f\left(2x\right)\mathrm{d}x=2$.

Đặt $u=2x\Rightarrow\mathrm{d}u=2\mathrm{d}x$; $x=0\Rightarrow u=0$; $x=1\Rightarrow u=2$.

Nên $2=\int\limits_{0}^{1} f\left(2x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} f\left(u\right)\mathrm{d}u\Rightarrow\int\limits_{0}^{2} f\left(u\right)\mathrm{d}u=4$.

+ Xét $\int\limits_{0}^{2} f\left(6x\right)\mathrm{d}x=14$.

Đặt $v=6x\Rightarrow\mathrm{d}v=6\mathrm{d}x$; $x=0\Rightarrow v=0$; $x=2\Rightarrow v=12$.

Nên $14=\int\limits_{0}^{2} f\left(6x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\int\limits_{0}^{12} f\left(v\right)\mathrm{d}v\Rightarrow\int\limits_{0}^{12} f\left(v\right)\mathrm{d}v=84$.

+ Xét $\int\limits_{-2}^{2} f\left(5\left|x\right|+2\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{0} f\left(5\left|x\right|+2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2} f\left(5\left|x\right|+2\right)\mathrm{d}x$.

□ Tính $I_1=\int\limits_{-2}^{0} f\left(5\left|x\right|+2\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=5\left|x\right|+2$.

Khi $-2<x<0$, $t=-5x+2\Rightarrow\mathrm{d}t=-5\mathrm{d}x$; $x=-2\Rightarrow t=12$; $x=0\Rightarrow t=2$.

$I_1=\frac{-1}{5}\int\limits_{12}^{2} f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\left[\int\limits_{0}^{12} f\left(t\right)\mathrm{d}t-\int\limits_{0}^{2} f\left(t\right)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{5}\left(84-4\right)=16$.

□ Tính $I_1=\int\limits_{0}^{2} f\left(5\left|x\right|+2\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=5\left|x\right|+2$.

Khi $0<x<2$, $t=5x+2\Rightarrow\mathrm{d}t=5\mathrm{d}x$; $x=2\Rightarrow t=12$; $x=0\Rightarrow t=2$.

$I_2=\frac{1}{5}\int\limits_{2}^{12} f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\left[\int\limits_{0}^{12} f\left(t\right)\mathrm{d}t-\int\limits_{0}^{2} f\left(t\right)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{5}\left(84-4\right)=16$.

Vậy $\int\limits_{-2}^{2} f\left(5\left|x\right|+2\right)\mathrm{d}x=32$.

**Câu 8.** Cho tích phân $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f\left(\sin x\right)dx=8$. Tính tích phân $K=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x.f\left(\cos x\right)dx$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** $K=-8$. **B.** $K=4$. **C.** $K=8$. **D.** $K=16$.

**Lời giải:**

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f\left(\sin x\right)dx$ Đặt $t=\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow dt=-dx$ Đổi cận:

$\Rightarrow I=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right).f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right].(-dt)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t.f\left(\cos x\right).dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.f\left(\cos x\right).dt$ (Tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân) $=K\Rightarrow K=I=8$

**Chọn C**

**Câu 9.** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(2x\right)=3f\left(x\right),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$.

Giá trị của tích phân $I=\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

**A.** $I=5$. **B.** $I=3$. **C.** $I=8$. **D.** $I=2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét tích phân $J=\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$, đặt $x=2t\Rightarrow \mathrm{d}x=2\mathrm{d}t$.

Với $x=2\Rightarrow t=1,\ x=0\Rightarrow t=0$.

Ta có $J=\int\limits_0^1 f\left(2t\right)2\mathrm{d}t=2\int\limits_0^1 f\left(2t\right)\mathrm{d}t=2\int\limits_0^1 3f\left(t\right)\mathrm{d}t=6\int\limits_0^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t=6\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=6$.

Mặt khác, ta có $J=\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow I=\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=J-\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=5$.

**Câu 10.** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(2\right)=-2;\ \int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^4 f'\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=-10$. **B.** $I=-5$. **C.** $I=0$. **D.** $I=-18$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $t=\sqrt{x}$, ta có: $t^2=x$ và $2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$. Khi $x=0\Rightarrow t=0;\ x=4\Rightarrow t=2$.

$I=\int\limits_0^4 f'\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 2tf'\left(t\right)\mathrm{d}t$.

Đặt $u=2t;\ \mathrm{d}v=f'\left(t\right)\mathrm{d}t$ ta được: $\mathrm{d}u=2\mathrm{d}t;\ v=f\left(t\right)$.

Khi đó: $I=\left(2tf\left(t\right)\right)\Big|_0^2-2\int\limits_0^2 f\left(t\right)\mathrm{d}t=4f\left(2\right)-2.1=4.\left(-2\right)-2=-10$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 11.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 6$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x = 3$. Tính tích phân $I = \int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I = -2$. **B.** $I = 6$. **C.** $I = 9$. **D.** $I = 2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

•Xét $I = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 6$, đặt $\sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}} = \mathrm{d}t$

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 1$; $x = 16 \Rightarrow t = 4$

$I = 2\int_1^4 f(t)\mathrm{d}t = 6 \Rightarrow \int_1^4 f(t)\mathrm{d}t = \frac{6}{2} = 3.$

• $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x = 3$, đặt $\sin x = u \Rightarrow \cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$

$J = \int_0^1 f(u)\mathrm{d}u = 3$

Vậy $I = \int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = 3 + 3 = 6.$

**Câu 12.** Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 4$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x = 2$. Tính $I = \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I = 10$. **B.** $I = 6$. **C.** $I = 4$. **D.** $I = 2$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 4$, đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$

đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = 1$, $x = 9 \Rightarrow t = 3$

Do đó ta có: $\int_1^3 \frac{f(t)}{t} 2t\,\mathrm{d}t = 4 \Leftrightarrow \int_1^3 f(t)\mathrm{d}t = 2$ (1)

Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x.\mathrm{d}x = 4$, đặt $t = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = \cos x.\mathrm{d}x$

đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$

Do đó ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x.\mathrm{d}x = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^3 f(t)\mathrm{d}t = 4..$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 13.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn $f(x)=\dfrac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}+\dfrac{\ln x}{x}$. Tính tích phân $I=\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=3+2\ln^2 2$. **B.** $I=2\ln^2 2$. **C.** $I=\ln^2 2$. **D.** $I=2\ln 2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^4\left[\dfrac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}+\dfrac{\ln x}{x}\right]\mathrm{d}x=\int_1^4\dfrac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x+\int_1^4\dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

Xét $K=\int_1^4\dfrac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Đặt $2\sqrt{x}-1=t\Rightarrow\sqrt{x}=\dfrac{t+1}{2}\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\mathrm{d}t$.

$\Rightarrow K=\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

Xét $M=\int_1^4\dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int_1^4\ln x\mathrm{d}(\ln x)=\left.\dfrac{\ln^2 x}{2}\right|_1^4=2\ln^2 2$.

Do đó $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x+2\ln^2 2\Rightarrow\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x=2\ln^2 2$.

**Câu 14.** Cho $\int_0^1 f(2x+1)\mathrm{d}x=12$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin^2 x\right)\sin 2x\mathrm{d}x=3$. Tính $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** 26. **B.** 22. **C.** 27. **D.** 15.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $2x+1=t\Rightarrow 12=\int_1^3 f(t)\mathrm{d}\left(\dfrac{t-1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=24$.

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin^2 x\right)\sin 2x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin^2 x\right).2\sin x\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x.f\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}(\sin x)$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}\left(\sin^2 x\right)=\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=3$

$\Rightarrow\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=3+24=27$.

**Câu 15.** Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x=3$ và $\int_0^1\dfrac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x=1$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn A**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $\tan x = t$ suy ra $\mathrm{d}(\tan x) = \mathrm{d}t \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \Leftrightarrow (1+\tan^2 x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.

$\Leftrightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{(1+\tan^2 x)} = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(t)\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 3$.

Vậy $\int_0^1 f(x)dx = 4$.

**Câu 16.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x = 4$; $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 2$. Tính $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I = 6$. **B.** $I = 2$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = 1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Từ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x = 4$; Ta đặt $t = \tan x$ ta được $\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t = 4$

Từ $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{(x^2+1-1) f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 2$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2 + \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 2+4 = 6$.

**Câu 17.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^{2018} f(x)\mathrm{d}x = 2$. Khi đó tích phân $\int_0^{\sqrt{e^{2018}-1}} \frac{x}{x^2+1} f\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn B**

Xét $I = \int_0^{\sqrt{e^{2018}-1}} \frac{x}{x^2+1} f\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \ln\left(x^2+1\right) \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \sqrt{e^{2018}-1} \Rightarrow t = 2018$.

Suy ra $I = \frac{1}{2}\int_0^{2018} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{2018} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.2 = 1$.

**Câu 18.** Tìm tất cả các giá trị dương của $m$ để $\int_0^3 x(3-x)^m dx = -f''\left(\frac{10}{9}\right)$, với $f(x) = \ln x^{15}$.

**A.** $m = 20$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = 5$. **D.** $m = 3$.

**Lời giải**

**Chọn D**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

+ Từ $f(x)=\ln x^{15} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{15x^{14}}{x^{15}}=\dfrac{15}{x} \Rightarrow f''(x)=\dfrac{-15}{x^2}$ do đó $f''\left(\dfrac{10}{9}\right)=\dfrac{-243}{20}$.

+ Tính tích phân $I=\int_0^3 x(3-x)^m \mathrm{d}x$:

• Đặt $t=3-x \Rightarrow x=3-t$, $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$, $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 3 \\ t & 3 & 0 \end{array}$

• Do đó $I=\int_3^0 (3-t)t^m(-\mathrm{d}t)=\int_0^3 \left(3t^m-t^{m+1}\right)\mathrm{d}t=\dfrac{3t^{m+1}}{m+1}-\dfrac{t^{m+2}}{m+2}\Big|_0^3=\dfrac{3^{m+2}}{(m+1)(m+2)}$

+ Ta có $\int_0^3 x(3-x)^m\,dx=-f''\left(\dfrac{10}{9}\right) \Leftrightarrow \dfrac{3^{m+2}}{(m+1)(m+2)}=\dfrac{243}{20} \Leftrightarrow \dfrac{3^{m+2}}{(m+1)(m+2)}=\dfrac{3^5}{4.5}$

Thay lần lượt các giá trị $m$ ở 4 đáp án, nhận giá trị $m=3$.

Chú ý:

-Việc giải phương trình $\dfrac{3^m}{(m+1)(m+2)}=\dfrac{3^3}{4.5}$ không cần thiết nên chọn phương pháp thế đáp để làm trắc nghiệm trong bài này.

-Để giải phương trình $\dfrac{3^m}{(m+1)(m+2)}=\dfrac{3^3}{4.5}$ ta xét hàm trên $f(m)=\dfrac{3^m}{(m+1)(m+2)}-\dfrac{3^3}{4.5}$ với $m>0$ thì chứng minh được phương trình có nghiệm duy nhất $m=3$.

**Câu 19.** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x)=f(x)$. Biết $\int_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=5$. Tính $I=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\dfrac{5}{2}$. **B.** $I=\dfrac{7}{2}$. **C.** $I=\dfrac{9}{2}$. **D.** $I=\dfrac{11}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Cách 1: Dùng tính chất để tính nhanh**

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và thỏa mãn điều kiện $f(a+b-x)=f(x), \forall x[a;b]$. Khi đó $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\dfrac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Chứng minh:

Đặt $t=a+b-x \Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$, với $x\in[a;b]$. Đổi cận: khi $x=a \Rightarrow t=b$; khi $x=b \Rightarrow t=b$

Ta có $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\int_a^b xf(a+b-x)\mathrm{d}x=-\int_b^a (a+b-t)f(t)\mathrm{d}t$

$=\int_a^b (a+b-t)f(t)\mathrm{d}t=(a+b)\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t=(a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow 2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=(a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \boxed{\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\dfrac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$.

Áp dụng tính chất trên với $a=1$, $b=3$.

$f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và thỏa mãn $f(1+3-x)=f(x)$.

Khi đó $\int_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1+3}{4}\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{5}{2}$.

**Cách 2: Đổi biến trực tiếp:**

Đặt $t=4-x$, với $x\in[1;3]$.

Ta có $\int_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=\int_1^3 xf(4-x)\mathrm{d}x=\int_1^3(4-t)f(t)\mathrm{d}t=4\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t-\int_1^3 t.f(t)\mathrm{d}t$

$\Rightarrow 5=4\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t-5\Rightarrow\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t=\frac{5}{2}$.

**Câu 20.** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$ thỏa mãn $f(4-x)=f(x),\forall x\in[1;3]$ và $\int_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=-2$. Giá trị $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** 2 . **B.** –1. **C.** –2. **D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn B**

Xét $I=\int_1^3 xf(x)\mathrm{d}x$ (1).

Đặt $x=4-t$, ta có $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$; $x=1\Rightarrow t=3$, $x=3\Rightarrow t=1$.

Suy ra $I=\int_1^3(4-t)f(4-t)\mathrm{d}t=\int_1^3(4-t)f(t)\mathrm{d}t$, hay $I=\int_1^3(4-x)f(x)dx$ (2).

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được $2I=\int_1^3 4f(x)dx\Rightarrow\int_1^3 f(x)dx=\frac{I}{2}=-1$.

**Câu 21.** **(Chuyên KHTN)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x.f(\cos^2 x)dx=\int_1^8\frac{f(\sqrt[3]{x})}{x}dx=6$.

Tính tích phân $\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}}\frac{f(x^2)}{x}dx$

**A.** 4 **B.** **6** **C.** 7 **D.** **10**

**Lời giải**

**Chọn C**

+) Đặt $t=\sqrt[3]{x}\Rightarrow t^3=x\Rightarrow 3t^2dt=dx$

Đổi cận: x 1 8

t 1 2

Khi đó $\int_1^8\frac{f(\sqrt[3]{x})}{x}dx=\int_1^2\frac{f(t)}{t^3}3t^2dt=3\int_1^2\frac{f(t)}{t}dt=6\Rightarrow\int_1^2\frac{f(t)}{t}dt=2$

+) Đặt $t=\cos^2 x\Rightarrow dt=-2\cos x\sin xdx\Rightarrow dt=-2\cos^2 x\tan xdx\Rightarrow\tan xdx=-\frac{1}{2t}dt$

Đổi cận: x $0$ $\frac{\pi}{3}$

t $1$ $\frac{1}{4}$

Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x.f(\cos^2 x)dx=-\frac{1}{2}\int_1^{\frac{1}{4}}\frac{f(t)}{t}dt=6\Rightarrow\int_{\frac{1}{4}}^1\frac{f(t)}{t}dt=12$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

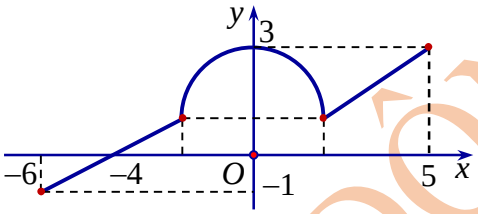
+) Đặt $t=x^2\Rightarrow dt=2xdx\Rightarrow dt=2x^2\dfrac{dx}{x}\Rightarrow\dfrac{dx}{x}=\dfrac{1}{2}\dfrac{dt}{t}$

Đổi cận: x $\dfrac{1}{2}$ $\sqrt{2}$

t $\dfrac{1}{4}$ 2

Khi đó $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}}\dfrac{f(x^2)}{x}dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{4}}^{2}\dfrac{f(t)}{t}dt=\dfrac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\dfrac{f(t)}{t}dt+\dfrac{1}{2}\int\limits_{1}^{2}\dfrac{f(t)}{t}dt=\dfrac{2+12}{2}=7$

**Câu 22.** Cho hàm số $f$ liên tục trên đoạn $[-6;5]$, có đồ thị gồm hai đoạn thẳng và nửa đường tròn như hình vẽ. Tính giá trị $I=\int\limits_{-6}^{5}[f(x)+2]dx$.




**A.** $I=2\pi+35$. **B.** $I=2\pi+34$. **C.** $I=2\pi+33$. **D.** $I=2\pi+32$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+2 & \text{khi } -6\le x\le -2\\ 1+\sqrt{4-x^2} & \text{khi } -2\le x\le 2\\ \dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3} & \text{khi } 2\le x\le 5\end{cases}$$

Ta có .

$I=\int\limits_{-6}^{5}[f(x)+2]dx=\int\limits_{-6}^{5}f(x)dx+2\int\limits_{-6}^{5}dx$

$=\int\limits_{-6}^{-2}\left(\dfrac{1}{2}x+2\right)dx+\int\limits_{-2}^{2}\left(1+\sqrt{4-x^2}\right)dx+\int\limits_{2}^{5}\left(\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3}\right)dx+22$

$=\left(\dfrac{1}{4}x^2+2x\right)\Big|_{-6}^{-2}+J+\left(\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{x}{3}\right)\Big|_{2}^{5}+22=J+28$.

Tính $J=\int\limits_{-2}^{2}\left(1+\sqrt{4-x^2}\right)dx$

Đặt $x=2\sin t\Rightarrow dx=2\cos tdt$.

Đổi cận: Khi $x=2$ thì $t=-\dfrac{\pi}{2}$; khi $x=2$ thì $t=\dfrac{\pi}{2}$.

$J=\int\limits_{-2}^{2}\left(1+\sqrt{4-x^2}\right)dx=4+4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=4+2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=4+2\pi$. Vậy $I=32+2\pi$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 23.** **(Đặng Thành Nam Đề 6)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_1^{e^6} \frac{f\left(\ln\sqrt{x}\right)}{x}\mathrm{d}x = 6$ và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos^2 x\right)\sin 2x\mathrm{d}x = 2$. Tích phân $\int\limits_1^3 \left(f(x)+2\right)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** 10. **B.** 16. **C.** 9. **D.** 5.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $t = \frac{1}{2}\ln x \Rightarrow 2\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

Đổi cận

| $x$ | 1 | $e^6$ |
|---|---|---|
| $t$ | 0 | 3 |

Khi đó $\int\limits_1^{e^6} \frac{f\left(\ln\sqrt{x}\right)}{x}\mathrm{d}x = \int\limits_1^{e^6} \frac{f\left(\frac{1}{2}\ln x\right)}{x}\mathrm{d}x = \int\limits_0^3 2f(t)\mathrm{d}t = 6 \Rightarrow \int\limits_0^3 f(t)\mathrm{d}t = 3 \Rightarrow \int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 3$.

Đặt $u = \cos^2 x \Rightarrow \mathrm{d}u = -2\cos x.\sin x\mathrm{d}x = -\sin 2x\mathrm{d}x$

Đổi cận

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|
| $u$ | 1 | 0 |

Khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos^2 x\right)\sin 2x\mathrm{d}x = -\int\limits_1^0 f(u)\mathrm{d}u = \int\limits_0^1 f(u)\mathrm{d}u = 2 \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$.

Do đó $\int\limits_1^3 \left(f(x)+2\right)\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_1^3 2\mathrm{d}x = \int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_1^3 2\mathrm{d}x = 3 - 2 + 2x\big|_1^3 = 5$.

**Câu 24.** **(Hoàng Hoa Thám Hưng Yên)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_e^{e^2} \frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}\mathrm{d}x = 2$. Tính $\int\limits_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x}\mathrm{d}x$.

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 8.

**Lời giải**

**Chọn D**

$* \; I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f\left(\cos^2 x\right)}{\cos^2 x}.\sin 2x\mathrm{d}x$.

Đặt $\cos^2 x = t \Rightarrow \sin 2x\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$.

Đổi cận

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{4}$ |
|---|---|---|
| $t$ | 1 | $\frac{1}{2}$ |

Khi đó $I_1 = -\frac{1}{2}\int\limits_1^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t \Rightarrow \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = 4$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

* $I_2=\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{f\left(\ln^2 x\right)}{\ln^2 x}.\frac{2\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

Đặt $\ln^2 x=t\Rightarrow\frac{2\ln x}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

Đổi cận

| $x$ | e | $\mathrm{e}^2$ |
|---|---|---|
| $t$ | 1 | 4 |

Khi đó $I_2=\frac{1}{2}\int\limits_1^4\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\Rightarrow\int\limits_1^4\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=4$.

* Tính $I=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{2}\frac{f(2x)}{x}\mathrm{d}x$. Đặt $2x=t\Rightarrow\mathrm{d}x=\frac{1}{2}dt$.

Đổi cận

| $x$ | $\frac{1}{4}$ | 2 |
|---|---|---|
| $t$ | $\frac{1}{2}$ | 4 |

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t+\int\limits_1^4\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=4+4=8$.

**Câu 25.** **(Đặng Thành Nam Đề 10)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_{-2}^{2}f\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)\mathrm{d}x=1$, $\int\limits_1^5\frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x=3$. Tích phân $\int\limits_1^5 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $-15$. **B.** $-2$. **C.** $-13$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $t=\sqrt{x^2+5}-x$ suy ra

$t+x=\sqrt{x^2+5}\Rightarrow(t+x)^2=x^2+5\Rightarrow t^2+2tx=5\Rightarrow x=\frac{5}{2t}-\frac{t}{2}\Rightarrow\mathrm{d}x=\left(-\frac{5}{2t^2}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t$

Đổi cận: $x=-2\Rightarrow t=5$; $x=2\Rightarrow t=1$.

Ta có: $\int\limits_{-2}^{2}f\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_5^1 f(t)\left(-\frac{5}{2t^2}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_1^5 f(t)\left(\frac{5}{t^2}+1\right)\mathrm{d}t=1$.

Suy ra $\int\limits_1^5 f(t)\left(\frac{5}{t^2}+1\right)\mathrm{d}t=2\Leftrightarrow 5\int\limits_1^5\frac{f(t)}{t^2}\mathrm{d}t+\int\limits_1^5 f(t)\mathrm{d}t=2\Leftrightarrow\int\limits_1^5 f(t)\mathrm{d}t=2-5\int\limits_1^5\frac{f(t)}{t^2}\mathrm{d}t$

$\Leftrightarrow\int\limits_1^5 f(x)\mathrm{d}x=2-5\int\limits_1^5\frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x=2-5.3=-13$.

**Câu 26.** **(KINH MÔN II LẦN 3 NĂM 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $\int\limits_0^3 f\left(\sqrt{x^2+16}+x\right)\mathrm{d}x=2019$, $\int\limits_4^8\frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x=1$. Tính $\int\limits_4^8 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** 2019. **B.** 4022. **C.** 2020. **D.** 4038.

**Lời giải**

**Chọn B**

Xét $\int\limits_0^3 f\left(\sqrt{x^2+16}+x\right)\mathrm{d}x=2019$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+16}+x$. Ta có $t-x=\sqrt{x^2+16}\Rightarrow t^2-2tx+x^2=x^2+16\Rightarrow x=\frac{t}{2}-\frac{8}{t}$.

Suy ra $\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}+\frac{8}{t^2}\right)\mathrm{d}t$.

Khi $x=0$ thì $t=4$, khi $x=3$ thì $t=8$.

Suy ra

$$2019=\int_0^3 f\left(\sqrt{x^2+16}+x\right)\mathrm{d}x=\int_4^8 f(t).\left(\frac{1}{2}+\frac{8}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\int_4^8 f(x).\left(\frac{1}{2}+\frac{8}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_4^8 f(x)\mathrm{d}x+8\int_4^8\frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_4^8 f(x)\mathrm{d}x+8.$$

Vậy $\int_4^8 f(x)\mathrm{d}x=4022$.

**TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 2**

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn : $A.f(x)+B.u'.f(u)+C.f(a+b-x)=g(x)$

+) Với $\begin{cases}u(a)=a\\u(b)=b\end{cases}$ thì $\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{A+B+C}\int_a^b g(x)dx$.

+) Với $\begin{cases}u(a)=b\\u(b)=a\end{cases}$ thì $\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{A-B+C}\int_a^b g(x)dx$.

Trong đề bài thường sẽ bị khuyết một trong các hệ số $A,B,C$.

✍Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì $\int_a^b f(a+b-x)dx=\int_a^b f(x)dx$.

**Câu 27.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(x)=6x^2f\left(x^3\right)-\frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

**A.** 2 . **B.** 4 . **C.** –1. **D.** 6 .

**Lời giải**

**Chọn B**

**Cách 1: (Dùng công thức)**

Biến đổi $f(x)=6x^2f\left(x^3\right)-\frac{6}{\sqrt{3x+1}}\Leftrightarrow f(x)-2.3x^2.f\left(x^3\right)=-\frac{6}{\sqrt{3x+1}}$ với $A=1,\ B=-2$.

Áp dụng công thức ta có: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{1+(-2)}\int_0^1-\frac{6}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x=4$.

**Cách 2: (Dùng công thức biến đổi – nếu không nhớ công thức)**

Từ $f(x)=6x^2f\left(x^3\right)-\frac{6}{\sqrt{3x+1}}\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-2\int_0^1 3x^2f\left(x^3\right)\mathrm{d}x=-6\int_0^1\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$

Đặt $u=x^3\Rightarrow du=3x^2\mathrm{d}x$ ; Với $x=0\Rightarrow u=0$ và $x=1\Rightarrow u=1$.

Khi đó $\int_0^1 3x^2f\left(x^3\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ thay vào $(*)$, ta được:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-6\int_0^1\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=6\int_0^1\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x=4.$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 28.** Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $4xf(x^2)+3f(x-1)=\sqrt{1-x^2}$. Tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $I=\frac{\pi}{4}$. **B.** $I=\frac{\pi}{6}$. **C.** $I=\frac{\pi}{20}$. **D.** $I=\frac{\pi}{16}$

**Lời giải**

**Chọn C**

Từ $4x.f(x^2)+3f(x-1)=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow 2\int_0^1 2xf(x^2)\mathrm{d}x+3\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \quad (*)$

+) Đặt $u=x^2 \Rightarrow \mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$; Với $x=0\Rightarrow u=0$ và $x=1\Rightarrow u=1$.

Khi đó $\int_0^1 2xf(x^2)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \quad (1)$

+) Đặt $t=1-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$; Với $x=0\Rightarrow t=1$ và $x=1\Rightarrow t=0$.

Khi đó $\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \quad (2)$

Thay $(1),(2)$ vào $(*)$ ta được:

$2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{20}$.

**Câu 29.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x)+f(2-x)=2x$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_0^2 f(x)dx$.

**A.** $I=-4$. **B.** $I=\frac{1}{2}$. **C.** $I=\frac{4}{3}$. **D.** $I=2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

**Cách 1: (Dùng công thức)**

Với $f(x)+f(2-x)=2x$ ta có $A=1;\ B=1$, suy ra: $I=\int_0^2 f(x)dx=\frac{1}{1+1}\int_0^2 2x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=2$.

**Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu không nhớ công thức)**

Từ $f(x)+f(2-x)=2x \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 f(2-x)dx=\int_0^2 2xdx=4 \quad (*)$

Đặt $u=2-x \Rightarrow du=-dx$; Với $x=0\Rightarrow u=2$ và $x=2\Rightarrow u=0$.

Suy ra $\int_0^2 f(2-x)dx=\int_0^2 f(u)du=\int_0^2 f(x)dx$.

Thay vào (*), ta được $2\int_0^2 f(x)dx=4 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx=2$.

**Câu 30.** Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{2}{15}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Đặt $t=1-x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Suy ra $\int\limits_0^1 f\left(1-x\right)\mathrm{d}x=-\int\limits_1^0 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$

$2f\left(x\right)+3f\left(1-x\right)=\sqrt{1-x}\Leftrightarrow 5\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\sqrt{1-x}\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}\sqrt{\left(1-x\right)^3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$.

Suy ra $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{15}$.

**Chú ý**: Ta có thể dùng công thức $\int_{x_1}^{x_2} f\left(ax+b\right)\mathrm{d}x=\int_{ax_1+b}^{ax_2+b} f\left(x\right)\mathrm{d}x$. Khi đó:

Từ $2f\left(x\right)+3f\left(1-x\right)=\sqrt{1-x}$ suy ra: $2\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+3\int_0^1 f\left(1-x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow 2\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x-3\int_1^0 f\left(1-x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x}\mathrm{d}x\Leftrightarrow 5\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{15}$.

**Câu 31.** Xét hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ và thỏa mãn điều kiện $2f\left(x\right)-3f\left(1-x\right)=x\sqrt{1-x}$.

Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\frac{1}{25}$. **B.** $I=-\frac{4}{15}$. **C.** $I=-\frac{1}{15}$. **D.** $I=\frac{4}{75}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Do $2f\left(x\right)-3f\left(1-x\right)=x\sqrt{1-x}\Rightarrow\int\limits_0^1 2f\left(x\right)\mathrm{d}x-\underbrace{\int\limits_0^1 3f\left(1-x\right)\mathrm{d}x}_{I_1}=\underbrace{\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x}\mathrm{d}x}_{I_2}\quad(1)$.

+ Xét $I_1=3\int\limits_0^1 f\left(1-x\right)\mathrm{d}x$:

Đặt $t=1-x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Khi $x=0\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=0$.

Khi đó $I_1=3\int\limits_0^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t=3I$.

+ Xét $I_2=\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$. Đặt $t=\sqrt{1-x}\Rightarrow x=1-t^2\Rightarrow \mathrm{d}x=-2t\mathrm{d}t$.

Khi $x=0\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=0$.

Khi đó $I_2=\int\limits_1^0\left(1-t^2\right)t\left(-2t\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{2t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}\right)\Big|_1^0=\frac{4}{15}$.

Thây vào $(1): 2I-3I=\frac{4}{15}\Leftrightarrow I=-\frac{4}{15}$.

**Câu 32.** Xét hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[-1;2\right]$ và thỏa mãn $f\left(x\right)+2xf\left(x^2-2\right)+3f\left(1-x\right)=4x^3$. Tính giá trị của tích phân $I=\int\limits_{-1}^2 f\left(x\right)dx$.

**A.** $I=5$. **B.** $I=\frac{5}{2}$. **C.** $I=3$. **D.** $I=15$.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Cách 1: (Dùng công thức – Dạng 2)**

Với: $f(x)+(2x)f(x^2-2)+3f(1-x)=4x^3$. Ta có:

$A=1;B=1;C=3$ và $u=x^2-2$ thỏa mãn $\begin{cases}u(-1)=-1\\u(2)=2\end{cases}$.

Khi đó áp dụng công thức có:

$I=\int\limits_{-1}^{2}f(x)=\dfrac{1}{1+1+3}\int\limits_{-1}^{2}4x^3\mathrm{d}x=\dfrac{x^4}{5}\Big|_{-1}^{2}=3$.

**Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu không nhớ công thức)**

Từ $f(x)+2xf(x^2-2)+3f(1-x)=4x^3$.

$\Rightarrow\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{2}2x.f(x^2-2)\mathrm{d}x+3\int\limits_{-1}^{2}f(1-x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}4x^3\mathrm{d}x\quad(*)$

+) Đặt $u=x^2-2\Rightarrow \mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$ ; với $x=-1\Rightarrow u=-1$ và $x=2\Rightarrow u=2$.

Khi đó $\int\limits_{-1}^{2}2x.f(x^2-2)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}f(u)\mathrm{d}u=\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x\quad(1)$

+) Đặt $t=1-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$ ; Với $x=-1\Rightarrow t=2$ và $x=2\Rightarrow t=-1$.

Khi đó $\int\limits_{-1}^{2}f(1-x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x\quad(2)$

Thay $(1),(2)$ vào $(*)$ ta được: $5\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=15\Rightarrow\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=3$.

**Câu 33.** Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x)=\sqrt{x+2}+xf(3-x^2)$. Tính giá trị của $I=\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$

**A.** $I=\dfrac{14}{3}$. **B.** $I=\dfrac{28}{3}$. **C.** $I=\dfrac{4}{3}$. **D.** $I=2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Cách 1: ( Dùng công thức).**

Với $f(x)=\sqrt{x+2}+xf(3-x^2)\Rightarrow f(x)+\dfrac{1}{2}.(-2x).f(3-x^2)=\sqrt{x+2}$

$A=1;B=\dfrac{1}{2};C=0$ và $u=3-x^2$ thỏa mãn $\begin{cases}u(-1)=2\\u(2)=-1\end{cases}$

Khi đó áp dụng công thức ta có: $I=\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}+0}\int\limits_{-1}^{2}\sqrt{x+2}\mathrm{d}x=\dfrac{28}{3}$.

**Cách 2: ( Dùng phương pháp đổi biến).**

Từ $f(x)-xf(3-x^2)=\sqrt{x+2}\Rightarrow\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{-1}^{2}xf(3-x^2)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}\sqrt{x+2}\mathrm{d}x=\dfrac{14}{3}$ (*)

Đặt $u=3-x^2\Rightarrow \mathrm{d}u=-2x\mathrm{d}x$ với $\begin{cases}x=-1\Rightarrow u=2\\x=2\Rightarrow u=-1\end{cases}$

Khi đó $\int\limits_{-1}^{2}xf(3-x^2)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-1}^{2}f(u)\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$ thay vào (*) ta được

$\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x-\dfrac{1}{2}\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{14}{3}\Leftrightarrow\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{28}{3}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 34.** Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(x)+xf\left(1-x^2\right)+3f(1-x)=\dfrac{1}{x+1}$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\dfrac{9}{2}\ln 2$. **B.** $I=\dfrac{2}{9}\ln 2$. **C.** $I=\dfrac{4}{3}$. **D.** $I=\dfrac{3}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Cách 1: (Dùng công thức)**

Với: $f(x)-\dfrac{1}{2}.(-2x)f\left(1-x^2\right)+3f(1-x)=2x$. Ta có:

$A=1$; $B=\dfrac{-1}{2}$; và $u=x^2-2$ thỏa mãn $\begin{cases}u(0)=1\\u(1)=0\end{cases}$.

Khi đó áp dụng công thức ta có:

$$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)+3}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x+1}=\frac{2}{9}\ln|x+1|\Big|_0^1=\frac{2}{9}\ln 2.$$

**Cách 2: (Dùng công thức đổi biến nếu không nhớ công thức)**

Từ $f(x)+xf\left(1-x^2\right)+3f(1-x)=\dfrac{1}{x+1}$

$$\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 xf\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x+3\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\ln|x+1|\Big|_0^1=\ln 2.\ (*)$$

+) Đặt $u=1-x^2\Rightarrow du=-2xdx$; Với $x=0\Rightarrow u=1$ và $x=1\Rightarrow u=0$.

Khi đó $\int_0^1 xf\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ (1).

+) Đặt $u=1-x\Rightarrow \mathrm{d}u=-x\mathrm{d}x$; Với $x=0\Rightarrow t=1$ và $x=1\Rightarrow t=0$.

Khi đó $\int_0^1 xf(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ (2).

Thay (1), (2) vào (*) ta được:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\ln 2\Rightarrow\frac{9}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\ln 2\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{9}\ln 2.$$

**Câu 35.** Cho hàm số $y=f(x)$ và thỏa mãn $f(x)-8x^3f\left(x^4\right)+\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0$. Tích phân $I=\int_0^1 f(x)\,dx=\dfrac{a-b\sqrt{2}}{c}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{c};\dfrac{b}{c}$ tối giản. Tính $a+b+c$

**A.** 6. **B.** –4. **C.** 4. **D.** –10.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Cách 1: (Dùng công thức).**

Biến đổi $f(x)-8x^3f\left(x^4\right)+\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0\Leftrightarrow f(x)-2.\left(4x^3\right)f\left(x^4\right)=-\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$ với $A=1;B=-2$

Áp dụng công thức ta có: $\int_0^1 f(x)\,dx=\dfrac{1}{1+(-2)}\int_0^1\left(-\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\int_0^1\dfrac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow tdt=xdx$; Với $x=0\Rightarrow t=1$ và $x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Khi đó: $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}.xdx=\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2-1}{t}.tdt=\int_1^{\sqrt{2}}(t^2-1)dt=\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{3}=\frac{a-b\sqrt{2}}{c}$

Suy ra $a=2;b=1;c=3\Rightarrow a+b+c=6$.

**Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu không nhớ công thức)**

Từ $f(x)-8x^3f\left(x^4\right)+\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx-2\int_0^1 4x^3f\left(x^4\right)dx+\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx=0$ (*)

Đặt $u=x^4\Rightarrow du=4x^3dx$; Với $x=0\Rightarrow u=0$ và $x=1\Rightarrow u=1$.

Khi đó $\int_0^1 4x^3f\left(x^4\right)dx=\int_0^1 f(u)du=\int_0^1 f(x)dx$ thay vào (*), ta được:

$\int_0^1 f(x)dx-2\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx=0\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow tdt=xdx$; Với $x=0\Rightarrow t=1$ và $x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}$.

Khi đó: $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}.xdx=\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2-1}{t}.tdt=\int_1^{\sqrt{2}}(t^2-1)dt=\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{3}=\frac{a-b\sqrt{2}}{c}$

Suy ra $a=2;b=1;c=3\Rightarrow a+b+c=6$.

**Câu 36.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ln 2;\ln 2]$ và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\frac{1}{e^x+1}$. Biết $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3$, với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính giá trị của $P=a+b$.

**A.** $P=\frac{1}{2}$. **B.** $P=-2$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Cách 1: Dùng công thức**

Với $f(x)+f(-x)=\frac{1}{e^x+1}$ ta có $A=1;B=1$, suy ra $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{1+1}\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}=\frac{1}{2}\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}$

**Cách 2: Dùng phương pháp dồn biến nếu không nhớ công thức**

Từ $f(x)+f(-x)=\frac{1}{e^x+1}\Rightarrow\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x+\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x)\mathrm{d}x=\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}(*)$

Đặt $u=-x\Rightarrow \mathrm{d}u=-\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x)\mathrm{d}x=\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(u)\mathrm{d}u=\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x$ thay vào $(*)$ ta được:

$2\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}\Leftrightarrow\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}$

Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^x\mathrm{d}x$

Với $x=-\ln 2\Rightarrow t=\frac{1}{2}, x=\ln 2\Rightarrow t=2$

$\Rightarrow\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}=\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{e^x\mathrm{d}x}{e^x\left(e^x+1\right)}=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}=\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\ln 2$

Khi đó: $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln 2=a\ln 2+b\ln 3\xrightarrow{a,b\in\mathbb{Q}}a=\frac{1}{2},b=0$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Rightarrow P = a + b = \frac{1}{2}$.

**Câu 37.** Biết hàm số $y = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ là hàm số chẵn trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ và $f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x + \cos x$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

**A.** $I = 0$. **B.** $I = 1$. **C.** $I = \frac{1}{2}$. **D.** $I = -1$.

**Lời giải:**

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dt = -dx$ Đổi cận: $\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\frac{\pi}{2} - t\right).(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - t\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx$

(Tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân) $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ ( Vì $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ là hàm số chẵn $\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ )

Vậy $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\,dx = (\cos x - \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -1 - 1 = -2$

$\Rightarrow I = -1 \Rightarrow$ **Chọn D**

**Câu 38.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$ và $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.\cos x$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f'(x)\,dx$ bằng

**A.** $-\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{\pi}{4}$. **D.** $-\frac{1}{4}$.

**Lời giải**

**Cách 1: (Dùng công thức)**

Với $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.\cos x$, ta có $A = 1; B = 1$.

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \frac{1}{1+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.\cos x.dx = \frac{1}{4}$.

**Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu nhớ công thức)**

Từ $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.\cos x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.\cos x dx = \frac{1}{2}$ (*)

Đặt $u = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow du = -dx$

Với $x = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$.

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$, thay vào (*) ta được

$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \frac{1}{4}$ (1)

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f'(x)\,dx = x f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2} f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ (*)

Từ điều kiện $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x$ suy ra

$$\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)=0 \\ f(0)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \ (2).$$

Thay (1), (2) vào (*), ta được $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx=-\frac{1}{4}$.

**Chọn D**

**Câu 39.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(1+2x)+f(1-2x)=\frac{x^2}{x^2+1}, \forall x\in\mathbb{R}$. tính tích phân $I=\int_{-1}^{3} f(x)dx$.

**A.** $I=2-\frac{\pi}{2}$. **B.** $I=1-\frac{\pi}{4}$. **C.** $I=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$. **D.** $I=\frac{\pi}{4}$.

**Lời giải.**

Đặt $t=1+2x\Rightarrow 1-2x=2-t$ và $x=\frac{t-1}{2}$, khi đó điều kiện trở thành

$$f(t)+f(2-t)=\frac{t^2-2t+1}{t^2-2t+5}\Rightarrow f(x)+f(2-x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}(*)$$

**Cách 1: (Dùng công thức)**

Với $f(x)+f(2-x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}$ ta có $A=1;B=1$.

Suy ra $\int_{-1}^{3} f(x)dx=\frac{1}{1+1}\int_{-1}^{3}\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}dx\approx 0,429=2-\frac{\pi}{2}$

**Chọn A**

**Cách 2: (Dùng công thức đổi biến – nếu nhớ công thức)**

Từ (*), ta có $f(x)+f(2-x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}\Rightarrow\int_{-1}^{3} f(x)dx+\int_{-1}^{3} f(2-x)dx=\int_{-1}^{3}\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}dx$ (2*)

Đặt $u=2-x\Rightarrow du=-dx$. Với $x=-1\Rightarrow u=3; x=3\Rightarrow u=-1$.

Suy ra $\int_{-1}^{3} f(2-x)dx=\int_{-1}^{3} f(u)du=\int_{-1}^{3} f(x)dx$, thay vào (*), ta được:

$$2\int_{-1}^{3} f(x)dx=\int_{-1}^{3}\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}dx\Rightarrow\int_{-1}^{3} f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{3}\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}dx\approx 0,429=2-\frac{\pi}{2}$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 3**

**Cách giải**: Lần lượt đặt $t=u(x)$ và $t=v(x)$ để giải hệ phương trình hai ẩn (trong đó có ẩn $f(x)$ ) để suy ra hàm số $f(x)$ (nếu $u(x)=x$ thì chỉ cần đặt một lần $t=v(x)$ ).

Các kết quả đặc biệt:

Cho $A.f(ax+b)+B.f(-ax+c)=g(x)$ với $A^2\neq B^2$ ) khi đó $f(x)=\dfrac{A.g\left(\dfrac{x-b}{a}\right)-B.g\left(\dfrac{x-c}{-a}\right)}{A^2-B^2}$ (*)

+)Hệ quả 1 của (*): $A.f(x)+B.f(-x)=g(x)\Rightarrow f(x)=\dfrac{A.g(x)-B.g(-x)}{A^2-B^2}$

+)Hệ quả 2 của (*): $A.f(x)+B.f(-x)=g(x)\Rightarrow f(x)=\dfrac{g(x)}{A+B}$ với $g(x)$ là hàm số chẵn.

**Câu 40.** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x$. Tính $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\dfrac{f(x)}{x}dx$.

**A.** $I=\dfrac{3}{2}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\dfrac{1}{2}$. **D.** $I=-1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt, $t=\dfrac{1}{x}\Rightarrow x=\dfrac{1}{t}$ khi đó điều kiện trở thành $f\left(\dfrac{1}{t}\right)+2f(t)=\dfrac{3}{t}\Rightarrow 2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{3}{x}$.

Hay $4f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{6}{x}$, kết hợp với điều kiện $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x$. Suy ra :

$$3f(x)=\frac{6}{x}-3x\Rightarrow\frac{f(x)}{x}=\frac{2}{x^2}-1\Rightarrow I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{2}{x^2}-1\right)dx=\left(\frac{-2}{x}-x\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{3}{2}.$$

**Chọn B**

**Câu 41.** **(Nguyễn Du Dak-Lak 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\left[\dfrac{1}{3};3\right]$ thỏa mãn $f(x)+x.f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^3-x$. Giá trị tích phân $I=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\dfrac{f(x)}{x^2+x}\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\dfrac{8}{9}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{16}{9}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

+ Đặt $x=\dfrac{1}{t}\Rightarrow \mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

+ Đổi cận: $x=\dfrac{1}{3}\Rightarrow t=3; x=3\Rightarrow t=\dfrac{1}{3}$.

+ Ta có $I=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\dfrac{f(x)}{x^2+x}\mathrm{d}x=-\int\limits_{3}^{\frac{1}{3}}\dfrac{f\left(\dfrac{1}{t}\right)}{\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{1}{t}}.\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\dfrac{f\left(\dfrac{1}{t}\right)}{t+1}\mathrm{d}t$.

Suy ra:

$$2I=\int_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{f(x)}{x^2+x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{f(x)+x.f\left(\frac{1}{x}\right)}{x(x+1)}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{x(x-1)(x+1)}{x(x+1)}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{3}}^{3}(x-1)\mathrm{d}x=\frac{16}{9}.$$

Vậy $I=\frac{8}{9}$.

**Câu 42.** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và thỏa mãn $2f(3x)+3f\left(\frac{2}{x}\right)=-\frac{15x}{2}$, $\int_{3}^{9}f(x)\mathrm{d}x=k$. Tính $I=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ theo $k$.

**A.** $I=-\frac{45+k}{9}$. **B.** $I=\frac{45-k}{9}$. **C.** $I=\frac{45+k}{9}$. **D.** $I=\frac{45-2k}{9}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $t=2x\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$. Đổi cận $\begin{vmatrix} x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=1\\ x=\frac{3}{2}\Rightarrow t=3\end{vmatrix}$.

Khi đó $I=\frac{1}{2}\int_{1}^{3}f\left(\frac{2}{t}\right)\mathrm{d}x$.

Mà $2f(3x)+3f\left(\frac{2}{x}\right)=-\frac{15x}{2}\Leftrightarrow f\left(\frac{2}{x}\right)=-\frac{5x}{2}-\frac{2}{3}f(3x)$

Nên $I=\frac{1}{2}\int_{1}^{3}\left[-\frac{5x}{2}-\frac{2}{3}f(3x)\right]\mathrm{d}x=-\frac{5}{4}\int_{1}^{3}x\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\int_{1}^{3}f(3x)\mathrm{d}x=-5-\frac{1}{3}\int_{1}^{3}f(3x)\mathrm{d}x$ (*)

Đặt $u=3x\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}x$. Đổi cận $\begin{vmatrix} x=1\Rightarrow u=3\\ x=3\Rightarrow t=9\end{vmatrix}$.

Khi đó $I=-5-\frac{1}{9}\int_{3}^{9}f(t)\mathrm{d}t=-5-\frac{k}{9}=-\frac{45+k}{9}$.

**Câu 43.** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x)+2018f(x)=2x\sin x$. Tính giá trị của $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\frac{2}{2019}$. **B.** $I=\frac{2}{1009}$. **C.** $I=\frac{4}{2019}$. **D.** $I=\frac{1}{1009}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Cách 1: (Dùng công thức)**

Với $f(-x)+2018f(x)=2x\sin x$ ta có $A=1;B=2018$

Suy ra $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{1+2018}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2x\sin x\mathrm{d}x\overset{Casio}{=}\frac{4}{2019}\Rightarrow$ **Đáp án C**

**Cách 2:**

Áp dụng Hệ quả 2: $Af(x)+Bf(-x)=g(x) \Rightarrow f(x)=\dfrac{g(x)}{A+B}$ với $g(x)$ là hàm số chẵn.

Ta có $f(-x)+2018f(x)=2x\sin x \Rightarrow f(x)=\dfrac{2x\sin x}{2019}$

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=\frac{2}{2019}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx \overset{Casio}{=} \frac{4}{2019} \Rightarrow \textbf{Đáp án C}$$

**Câu 44.** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x)+2018f(x)=e^x$. Tính giá trị của $I=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

**A.** $I=\dfrac{e^2-1}{2019e}$. **B.** $I=\dfrac{e^2-1}{2018e}$. **C.** $I=0$. **D.** $I=\dfrac{e^2-1}{e}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Cách 1: (Dùng công thức).**

Với $f(-x)+2018f(x)=e^x$ ta có $A=1; B=2018$.

Suy ra $I=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\dfrac{1}{1+2018}\int_{-1}^{1} e^x dx=\dfrac{1}{2019}e^x\Big|_{-1}^{1}=\dfrac{e^2-1}{2019e}$.

**Cách 2: (Dùng công thức)**

Áp dụng Hệ quả 1: $A.f(x)+B.f(-x)=g(x) \Rightarrow f(x)=\dfrac{A.g(x)-B.g(-x)}{A^2-B^2}$.

Ta có:

$$f(-x)+2018f(x)=e^x \Rightarrow f(x)=\frac{2018e^x-e^{-x}}{2018^2-1} \Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\frac{1}{2019.2017}\int_{-1}^{1}\left(2018e^x-e^{-x}\right)dx$$

$$\approx 1{,}164.10^{-3} \approx \frac{e^2-1}{2019e} \text{ (Casio).}$$

**Câu 45.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(2x)+f(1-x)=12x^2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng $1$ là

**A.** $y=2x+2$. **B.** $y=4x-6$. **C.** $y=2x-6$. **D.** $y=4x-2$.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Áp dụng kết quả**

"Cho $A.f(ax+b)+B.f(-ax+c)=g(x)$ (với $A^2 \neq B^2$) khi đó $f(x)=\dfrac{A.g\left(\dfrac{x-b}{a}\right)-B.g\left(\dfrac{x-c}{a}\right)}{A^2-B^2}$".

Ta có

$$2f(2x)+f(1-x)=12x^2=g(x) \Leftrightarrow f(x)=\frac{2.g\left(\frac{x}{2}\right)-g\left(\frac{x-1}{-2}\right)}{2^2-1}$$

$$=\frac{6x^2-3(x-1)^2}{3}=x^2+2x-1.$$

Suy ra $\begin{cases} f(1)=2 \\ f'(1)=4 \end{cases}$, khi đó phương trình tiếp tuyến cần lập là: $y=4x-2$.

**Câu 46.** Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx=2018$ và $g(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $g(x)+g(-x)=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

**A.** $I=2018$. **B.** $I=\frac{1009}{2}$. **C.** $I=4036$. **D.** $I=1008$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Áp dụng Hệ quả

$A.g(x)+B.g(-x)=h(x)\Rightarrow g(x)=\frac{h(x)}{A+B}$ với $h(x)$ là hàm số chẵn.

Ta có: $g(x)+g(-x)=1=h(x)\Rightarrow g(x)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.

Kết hợp với điều kiện $f(x)$ là hàm số chẵn, ta có:

$I=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=2018$.

*Chú ý: Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $[-a;a]\Rightarrow\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$.*

**Câu 47.** Cho số dương $a$ và hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(-x)=a,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $2a^2$. **B.** $a$. **C.** $a^2$. **D.** $2a$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $x=-t\Rightarrow\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{-a} f(-t)(-\mathrm{d}t)=\int_{-a}^{a} f(-t)\mathrm{d}t=\int_{-a}^{a} f(-x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow 2\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}\left[f(x)+f(-x)\right]\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a} a\mathrm{d}x\Leftrightarrow 2\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=2a^2\Leftrightarrow\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=a^2$.

**Câu 48.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa điều kiện $f(x)+f(-x)=2\sin x$. Tính $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$

**A.** $-1$. **B.** $0$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Giả sử $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=-x\Rightarrow\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$, đổi cận $x=-\frac{\pi}{2}\to t=\frac{\pi}{2}$ $x=\frac{\pi}{2}\to t=-\frac{\pi}{2}$.

Khi đó $I=-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t$.

Suy ra $2I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+f(-x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\sin x\mathrm{d}x=0\Rightarrow 2I=0\Rightarrow I=0$

**Câu 49.** Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2-2\cos 2x}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=3$. **B.** $I=4$. **C.** $I=6$. **D.** $I=8$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

Xét $\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ Đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$; Đổi cận: $x=-\frac{3\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{3\pi}{2}$; $x=0\Rightarrow t=0$.

Suy ra $\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{0} f(-t)\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(-t)\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)\mathrm{d}x$.

Theo giả thiết ta có: $f(x)+f(-x)=\sqrt{2-2\cos 2x}\Leftrightarrow\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\left(f(x)+f(-x)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2-2\cos x}\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)\mathrm{d}x=2\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}|\sin x|\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)\mathrm{d}x=2\int\limits_{0}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x-2\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$

**Câu 50.** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên **R** và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$. Tính $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

**A.** $I=-1$. **B.** $I=1$. **C.** $I=-2$. **D.** $I=2$.

**Lời giải**

$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ (1) Đặt $t=-x\Rightarrow dt=-dx$ Đổi cận:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Rightarrow I=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(-t).(-dt)=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-t)\,dt=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)\,dx$ (2) (Tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân)

(1) + (2) $\Rightarrow 2I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+f(-x)\right]dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2+2\cos 2x}dx$

$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2(1+\cos 2x)}dx=$

$\sqrt{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\cos^2 x}dx=2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos x|\,dx=2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=2\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\left[1-(-1)\right]=4$

$\Rightarrow I=2$

**Chọn D**

**Câu 51.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $3f(-x)-2f(x)=\tan^2 x$. Tính $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$

**A.** $1-\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{\pi}{2}-1$. **C.** $1+\frac{\pi}{4}$. **D.** $2-\frac{\pi}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

**Cách 1:** Ta có $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x=(\tan x-x)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}-\left(-1+\frac{\pi}{4}\right)=2-\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 2-\frac{\pi}{2}=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[3f(-x)-2f(x)\right]\mathrm{d}x.$

Đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$, đổi cận $x=-\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=-\frac{\pi}{4}$.

$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[3f(-x)-2f(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[3f(t)-2f(-t)\right]\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[3f(x)-2f(-x)\right]\mathrm{d}x$

Suy ra, $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(-x)\mathrm{d}x\Rightarrow 2-\frac{\pi}{2}=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[3f(x)-2f(x)\right]\mathrm{d}x\Leftrightarrow 2-\frac{\pi}{2}=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$

Vậy $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x=2-\frac{\pi}{2}$

**Cách 2: ( Trắc nghiệm)**

Chọn $f(x)=f(-x)=\tan^2 x$ (Thỏa mãn giả thiết).

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Khi đó $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x = 2 - \frac{\pi}{2}$

**Câu 52.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ln 2;\ln 2]$ và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\frac{1}{e^x+1}$.

Biết $\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3$ $(a;b\in\mathbb{Q})$. Tính $P=a+b$.

**A.** $P=\frac{1}{2}$. **B.** $P=-2$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi $I=\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=-x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$.

Đổi cận: Với $x=-\ln 2 \Rightarrow t=\ln 2$; Với $x=\ln 2 \Rightarrow t=-\ln 2$.

Ta được $I=-\int\limits_{\ln 2}^{-\ln 2} f(-t)\mathrm{d}t = \int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-t)\mathrm{d}t = \int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x)\mathrm{d}x$.

Khi đó ta có: $2I = \int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x)\mathrm{d}x == \int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} \left[f(x)+f(-x)\right]\mathrm{d}x = \int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$.

Xét $\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$. Đặt $u=\mathrm{e}^x \Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

Đổi cận: Với $x=-\ln 2 \Rightarrow u=\frac{1}{2}$; $x=\ln 2 \Rightarrow u=2$.

Ta được $\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x = \int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x+1\right)}\mathrm{d}x = \int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{u(u+1)}\mathrm{d}u$

$= \int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u = \left(\ln|u| - \ln|u+1|\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} = \ln 2$

Vậy ta có $a=\frac{1}{2}$, $b=0 \Rightarrow a+b=\frac{1}{2}$.

**Câu 53.** Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $2f(x)+3f(1-x)=x\sqrt{1-x}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)dx$.

**A.** $I=-\frac{4}{15}$. **B.** $I=\frac{1}{15}$. **C.** $I=\frac{4}{75}$. **D.** $I=\frac{1}{25}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Cách 1: (Dùng công thức)**

Với $2f(x)+3f(1-x)=x\sqrt{1-x}$ ta có $A=2;B=3$.

Suy ra: $\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2+3}\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x}dx \overset{Casio}{=} 0,05(3) = \frac{4}{75}$.

**Áp dụng kết quả**

"Cho $A.f(ax+b)+B.f(-ax+c)=g(x)$ (Với $A^2 \neq B^2$) khi đó

$f(x)=\dfrac{A.g\left(\dfrac{x-b}{a}\right)-B.g\left(\dfrac{x-c}{-a}\right)}{A^2-B^2}$".

Ta có: $2f(x)+3f(1-x)=x\sqrt{1-x}=g(x)\Rightarrow f(x)=\dfrac{2g(x)-3g(1-x)}{2^2-3^2}$

$=\dfrac{2x\sqrt{1-x}-3(1-x)\sqrt{x}}{-5}$.

Suy ra: $I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\dfrac{2x\sqrt{1-x}-3(1-x)\sqrt{x}}{-5}dx \overset{Casio}{=} 0,05(3)=\dfrac{4}{75}$.

**Cách 3: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu không nhớ công thức)**

Từ $2f(x)+3f(1-x)=x\sqrt{1-x}\Rightarrow 2\int_0^1 f(x)dx+3\int_0^1 f(1-x)dx=\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx \overset{Casio}{=} 0,2(6)=\dfrac{4}{15}(*)$

Đặt $u=1-x\Rightarrow du=-dx$; Với $x=0\Rightarrow u=1$ và $x=1\Rightarrow u=0$.

Suy ra $\int_0^1 f(1-x)dx=\int_0^1 f(u)du=\int_0^1 f(x)dx$ thay vào $(*)$, ta được:

$5\int_0^2 f(x)dx=\dfrac{4}{15}\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)dx=\dfrac{4}{75}$.

**TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 4**

**Câu 54.** Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $[-1,1]$ và $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. Biết $\int_0^1 f(x)dx=5$ và $\int_0^1 g(x)dx=7$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

**A.** $\int_{-1}^1 f(x)dx=10$. **B.** $\int_{-1}^1 g(x)dx=14$.

**C.** $\int_{-1}^1\left[f(x)+g(x)\right]dx=10$. **D.** $\int_{-1}^1\left[f(x)-g(x)\right]dx=10$.

**Lời giải**

Nhớ 2 tích chất sau để làm trắc nghiệm nhanh:

**Câu 55.** Nếu hàm $f(x)$ CHẴN thì $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$ **2.** Nếu hàm $f(x)$ LẺ thì $\int_{-a}^a f(x)dx=0$

Nếu chứng minh thì như sau:

Đặt $A=\int_{-1}^1 f(x)dx=\underbrace{\int_{-1}^0 f(x)dx}_{A_1}+\underbrace{\int_0^1 f(x)dx}_{A_2}$

$A_1=\int_{-1}^0 f(x)dx$. Đặt $t=-x\Rightarrow dt=-dx$

Đổi cận: $\begin{array}{c|cc} x & -1 & 0 \\ \hline t & 1 & 0 \end{array}$

$\Rightarrow A_1=\int_1^0 f(1-t).(-dt)=\int_0^1 f(-t)dt=\int_0^1 f(-x)dx$ (Do tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân) $=\int_0^1 f(x)dx$ (Do $f(x)$ là hàm chẵn $\Rightarrow f(-x)=f(x)$)

Vậy $A=\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx=10$ (1)

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Đặt $B=\int_{-1}^{1} g(x)dx=\underbrace{\int_{-1}^{0} g(x)dx}_{B_1}+\underbrace{\int_{0}^{1} g(x)dx}_{B_2}$

$B_1=\int_{-1}^{0} g(x)dx$. Đặt $t=-x \Rightarrow dt=-dx$

Đổi cận: | -1 | 0 |
|---|---|---|
| t | 1 | 0 |

$\Rightarrow B_1=\int_{1}^{0} g(-t).(-dt)=\int_{0}^{1} g(-t)dt=\int_{0}^{1} g(-x)dx$ (Do tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân) $=-\int_{0}^{1} g(x)dx$ (Do $f(x)$ là hàm chẵn $\Rightarrow g(-x)=-g(x)$)

Vậy $B=\int_{-1}^{1} g(x)dx=-\int_{0}^{1} g(x)dx+\int_{0}^{1} g(x)dx=0$ (2)

Từ (1) và (2)

**Chọn B**

**Câu 56.** Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên $[-4;4]$ biết $\int_{-2}^{0} f(-x)dx=2$ và $\int_{1}^{2} f(-2x)dx=4$. Tính $I=\int_{0}^{4} f(x)dx$.

**A.** $I=-10$. **B.** $I=-6$. **C.** $I=6$. **D.** $I=10$.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Cách 1:** Sử dụng công thức: $\int_{x_1}^{x_2} f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int_{x_1}^{x_2} f(ax)dx$ và tính chất $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$ với $f(x)$ là hàm số lẻ trên đoạn $[-a;a]$.

Áp dụng, ta có:

- $4=\int_{1}^{2} f(-2x)dx=-\frac{1}{2}\int_{-2}^{-4} f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-4}^{-2} f(x)dx \Leftrightarrow \int_{-4}^{-2} f(x)dx=8$.
- $2=\int_{-2}^{0} f(-x)dx=-\int_{2}^{0} f(x)=\int_{0}^{2} f(x) \Leftrightarrow \int_{0}^{2} f(x)=2$

Suy ra: $0=\int_{-4}^{4} f(x)dx=\int_{-4}^{-2} f(x)dx+\int_{-2}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{4} f(x)dx$

$\Leftrightarrow 0=8+\left(\int_{-2}^{2} f(x)dx-\int_{0}^{2} f(x)dx\right)+I \Leftrightarrow 0=8+(0-2)+I \Leftrightarrow I=-6$.

**Cách 2:** Xét tích phân $\int_{-2}^{0} f(-x)dx=2$.

Đặt $-x=t \Rightarrow dx=-dt$.

Đổi cận: khi $x=-2$ thì $t=2$; khi $x=0$ thì $t=0$ do đó $\int_{-2}^{0} f(-x)dx=-\int_{2}^{0} f(t)dt=\int_{0}^{2} f(t)dt$

$\Rightarrow \int_{0}^{2} f(t)dt=2 \Rightarrow \int_{0}^{2} f(x)dx=2$.

Do hàm số $y=f(x)$ là hàm số lẻ nên $f(-2x)=-f(2x)$.

Do đó $\int_{1}^{2} f(-2x)dx=-\int_{1}^{2} f(2x)dx \Rightarrow \int_{1}^{2} f(2x)dx=-4$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Xét $\int_1^2 f(2x)\mathrm{d}x$.

Đặt $2x=t \Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận: khi $x=1$ thì $t=2$; khi $x=2$ thì $t=4$ do đó $\int_1^2 f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_2^4 f(t)\mathrm{d}t=-4$

$\Rightarrow \int_2^4 f(t)\mathrm{d}t=-8 \Rightarrow \int_2^4 f(x)\mathrm{d}x=-8$.

Do $I=\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x=2-8=-6$.

**Câu 57.** **(Sở Đà Nẵng 2019)** Cho hàm số chẵn $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^1 \frac{f(2x)}{1+5^x}\mathrm{d}x=8$. Giá trị của $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

**A.** 8. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 16.

**Lời giải**

**Chọn D**

+) Ta có $8=\int_{-1}^1 \frac{f(2x)}{1+5^x}\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 \frac{f(2x)}{1+5^x}\mathrm{d}x+\int_0^1 \frac{f(2x)}{1+5^x}\mathrm{d}x$. (1)

Xét $I=\int_{-1}^0 \frac{f(2x)}{1+5^x}\mathrm{d}x$:

Đặt $t=-x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=-1 \Rightarrow t=1$ và $x=0 \Rightarrow t=0$. Khi đó

$I=\int_1^0 \frac{f(-2t)}{1+5^{-t}}(-\mathrm{d}t)=\int_0^1 \frac{f(-2t)}{1+5^{-t}}\mathrm{d}t=\int_0^1 \frac{5^t f(-2t)}{5^t+1}\mathrm{d}t$.

Vì $y=f(x)$ là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$ nên $f(-2t)=f(2t),\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó $I=\int_0^1 \frac{5^t f(2t)}{5^t+1}\mathrm{d}t=\int_0^1 \frac{5^x f(2x)}{5^x+1}\mathrm{d}x$. Thay vào (1) thu được

$8=\int_0^1 \frac{5^x f(2x)}{5^x+1}\mathrm{d}x+\int_0^1 \frac{f(2x)}{1+5^x}\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{(5^x+1)f(2x)}{5^x+1}\mathrm{d}x=\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}(2x)=8 \Rightarrow \int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=16$.

**Câu 58.** Cho $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trong đoạn $[-1;\ 1]$ và $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=2$. Kết quả $I=\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $I=1$. **B.** $I=3$. **C.** $I=2$. **D.** $I=4$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$I=\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 \frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x+\int_0^1 \frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=I_1+I_2$

Xét $I_1=\int_{-1}^0 \frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$

Đặt $x=-t \Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$, đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=0$, $x=-1 \Rightarrow t=1$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$I_1=\int_1^0 \frac{f(x)}{1+e^{-t}}(-dt)=\int_0^1 \frac{e^t.f(x)}{1+e^t}dt$.

Lại có $\int_0^1 \frac{e^t.f(t)}{1+e^t}dt=\int_0^1 \frac{e^x.f(x)}{1+e^x}dx$.

Suy ra: $I=\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+e^x}dx=\int_0^1 \frac{e^t.f(t)}{1+e^t}dt+\int_0^1 \frac{f(t)}{1+e^t}dx=\int_0^1 \frac{(1+e^t).f(t)}{1+e^t}dt=\int_0^1 f(t)dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(t)dt=1.$

**Câu 59.** Cho $y=f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_1^2 f(x)dx=1$. Giá trị của $\int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^x+1}dx$ bằng

**A.** 1. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn D**

**Cách 1:** Sử dụng tính chất của hàm số chẵn

Ta có: $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{b^x+1}dx=\int_0^a f(x)dx$, với $f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $[-a;a]$.

Áp dụng ta có:

$\int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^x+1}dx=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=1+2=3$

**Cách 2:** Do $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_1^2 f(x)dx=1\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=1$ và $\int_1^2 f(x)dx=2$

$\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx=3$.

Mặt khác $\int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^x+1}dx=\int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^x+1}dx+\int_0^2 \frac{f(x)}{3^x+1}dx$ và $y=f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(-x)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Xét $I=\int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^x+1}dx$. Đặt $t=-x\Rightarrow dx=-dt$

Suy ra $I=\int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^x+1}dx=-\int_2^0 \frac{f(-t)}{3^{-t}+1}dt=\int_0^2 \frac{f(-t)}{\frac{1}{3^t}+1}dt=\int_0^2 \frac{3^t f(t)}{3^t+1}dt=\int_0^2 \frac{3^x f(x)}{3^x+1}dx$

$\Rightarrow\int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^x+1}dx=\int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^x+1}dx+\int_0^2 \frac{f(x)}{3^x+1}dx=\int_0^2 \frac{3^x f(x)}{3^x+1}dx+\int_0^2 \frac{f(x)}{3^x+1}dx=\int_0^2 \frac{(3^x+1)f(x)}{3^x+1}dx=$

$\int_0^2 f(x)dx=3$.

**TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 4**

" Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $g[f(x)]=x$ và $g(t)$ là hàm đơn điệu ( luôn đồng biến hoặc nghịch biến) trên $\mathbb{R}$ .Hãy tính tích phân $I=\int_a^b f(x)dx$ "

**Cách giải:** Đặt $y=f(x)\Rightarrow x=g(y)\Rightarrow dx=g'(y)dy$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Đổi cận $\begin{cases} x=a \to g(y)=a \Leftrightarrow y=\alpha \\ x=b \to g(y)=b \Leftrightarrow y=\beta \end{cases}$

Suy ra $I=\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta yg(y)dy$

**Câu 60.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^3(x)+f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^2 f(x)dx$

**A.** $I=2$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=\frac{5}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $y=f(x)\Rightarrow x=y^3+y\Rightarrow dx=(3y^2+1)dy$

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \to y^3+y=0 \Leftrightarrow y=0 \\ x=2 \to y^3+y=2 \Leftrightarrow y=1 \end{cases}$

Khi đó $I=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 y(3y^2+1)dy=\int_0^1 (3y^3+y)dy=\frac{5}{4}\Rightarrow$ đáp án **D**

**Câu 61.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f^3(x)-3f^2(x)+6f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_0^5 f(x)dx$.

**A.** $I=\frac{5}{4}$. **B.** $I=\frac{5}{2}$. **C.** $I=\frac{5}{12}$. **D.** $I=\frac{5}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $y=f(x)\Rightarrow x=2y^3-3y^2+6y\Rightarrow dx=6(y^2-y+1)dy$.

Đổi cận: với $x=0\Rightarrow 2y^3-3y^2+6y=0\Leftrightarrow y=0$ và $x=5\Rightarrow 2y^3-3y^2+6y=5\Leftrightarrow y=1$.

Khi đó $I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 y.6(y^2-y+1)dy=6\int_0^1 (y^3-y^2+y)dy=\frac{5}{2}$.

**Câu 62.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x+f^3(x)+2f(x)=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_{-2}^1 f(x)dx$.

**A.** $I=\frac{7}{4}$. **B.** $I=\frac{7}{2}$. **C.** $I=\frac{7}{3}$. **D.** $I=\frac{5}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $y=f(x)\Rightarrow x=-y^3-2y+1\Rightarrow dx=(-3y^2-2)dy$.

Đổi cận: Với $x=-2\Rightarrow -y^3-2y+1=-2\Leftrightarrow y=1;\ x=1\Rightarrow -y^3-2y+1=1\Leftrightarrow y=0$.

Khi đó: $I=\int_1^0 y(-3y^2-2)dy=\frac{7}{4}$.

**TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 5**

Bài toán: " Cho $f(x).f(a+b-x)=k^2$, khi đó $I=\int_a^b \frac{dx}{k+f(x)}=\frac{b-a}{2k}$

**Chứng minh:**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Đặt $t=a+b-x\Rightarrow\begin{cases}dt=-dx\\ f(x)=\dfrac{k^2}{f(t)}\end{cases}$ và $x=a\Rightarrow t-b;\ x=b\Rightarrow t=a$.

Khi đó $I=\int\limits_a^b\dfrac{\mathrm{d}x}{k+f(x)}=\int\limits_a^b\dfrac{\mathrm{d}x}{k+\dfrac{k^2}{f(t)}}=\dfrac{1}{k}\int\limits_a^b\dfrac{\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x}{k+f(x)}$.

$2I=\int\limits_a^b\dfrac{\mathrm{d}x}{k+f(x)}+\dfrac{1}{k}\int\limits_a^b\dfrac{\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x}{k+f(x)}=\dfrac{1}{k}\int\limits_a^b\mathrm{d}x=\dfrac{1}{k}(b-a)\Rightarrow I=\dfrac{b-a}{2k}$.

**Câu 63.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0;1]$. Biết $f(x).f(1-x)=1$ với $\forall x\in[0;1]$. Tính giá trí $I=\int\limits_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$

**A.** $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $1+f(x)=f(x)f(1-x)+f(x)\Rightarrow\dfrac{f(x)}{1+f(x)}=\dfrac{1}{f(1-x)+1}$

Xét $I=\int\limits_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$.

Đặt $t=1-x\Leftrightarrow x=1-t\Rightarrow\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1;\ x=1\Rightarrow t=0$.

Khi đó $I=-\int\limits_1^0\dfrac{\mathrm{d}t}{1+f(1-t)}=\int\limits_0^1\dfrac{\mathrm{d}t}{1+f(1-t)}=\int\limits_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{1+f(1-x)}=\int\limits_0^1\dfrac{f(x)\mathrm{d}x}{1+f(x)}$

Mặt khác $\int\limits_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}+\int\limits_0^1\dfrac{f(x)\mathrm{d}x}{1+f(x)}=\int\limits_0^1\dfrac{1+f(x)}{1+f(t)}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\mathrm{d}x=1$ hay $2I=1$. Vậy $I=\dfrac{1}{2}$.

**Câu 64.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, ta có $f(x)>0$ và $f(0).f(2018-x)=1$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^{2018}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$

**A.** $I=2018$. **B.** $I=0$ **C.** $I=1009$ **D.** 4016

**Lời giải**

**Chọn C**

ta có $I=\int\limits_0^{2018}\dfrac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x=\dfrac{2018-0}{2.1}=1009$.

**Câu 65.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)>0$ khi $x\in[0;5]$. Biết $f(x).f(5-x)=1$, tính tích phân $I=\int_0^5\dfrac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$.

**A.** $I=\dfrac{5}{4}$. **B.** $I=\dfrac{5}{3}$. **C.** $I=\dfrac{5}{2}$. **D.** $I=10$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $x=5-t\Rightarrow\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$

$x=0\Rightarrow t=5;\ x=5\Rightarrow t=0$

$I=-\int_5^0\dfrac{\mathrm{d}t}{1+f(5-t)}=\int_0^5\dfrac{f(t)\mathrm{d}t}{1+f(t)}$ (do $f(5-t)=\dfrac{1}{f(t)}$)

$\Rightarrow 2I=\int_0^5 \mathrm{d}t=5 \Rightarrow I=\frac{5}{2}$.

**Câu 66.** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x)=f(x)$. Biết $\int_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=5$. Tính tích phân $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{11}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $t=4-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$ và $x=1\Rightarrow t=3$; $x=3\Rightarrow t=1$.

Khi đó: $5=\int_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=\int_1^3 (4-t)f(4-t)\mathrm{d}t=\int_1^3 (4-x)f(4-x)\mathrm{d}x=\int_1^3 (4-x)f(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra: $10=\int_1^3 xf(x)\mathrm{d}x+\int_1^3 (4-x)f(x)\mathrm{d}x=4\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{5}{2}$.

**Câu 67.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên **R** và $f(x)>0$ khi $x\in[0;a]$ $(a>0)$. Biết $f(x).f(a-x)=1$, tính tích phân $I=\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)}$.

**A.** $I=\frac{a}{2}$. **B.** $I=2a$. **C.** $I=\frac{a}{3}$. **D.** $I=\frac{a}{4}$.

**Lời giải:**

$I=\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)}$ (1) Đặt $t=a-x\Rightarrow dt=-dx$ Đổi cận:

$\Rightarrow I=\int_a^0 -\frac{dt}{1+f(a-t)}=\int_0^a \frac{1}{1+f(a-t)}dt=\int_0^a \frac{1}{1+f(a-x)}dx$ (2) (Tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân)

(1) + (2) $\Rightarrow 2I=\int_0^a\left[\frac{1}{1+f(x)}+\frac{1}{1+f(a-x)}\right]dx$

$=\frac{1+f(a-x)+1+f(x)}{1+f(x).f(a-x)+f(x)+f(a-x)}dx=\int_0^2 \frac{2+f(a-x)+f(x)}{2+f(a-x)+f(x)}dx=\int_0^a dx=a \Rightarrow I=\frac{a}{2}$

**Chọn A**

**Câu 68.** Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $\begin{cases} f(x).f(a-x)=1 \\ f(x)>0,\forall x\in[0;a] \end{cases}$ và $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}=\frac{ba}{c}$, trong đó $b$, $c$ là hai số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó $b+c$ có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

**A.** $(11;22)$. **B.** $(0;9)$. **C.** $(7;21)$. **D.** $(2017;2020)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Cách 1.** Đặt $t=a-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=a; x=a\Rightarrow t=0$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Lúc đó $I=\int\limits_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}=\int\limits_a^0 \frac{-\mathrm{d}t}{1+f(a-t)}=\int\limits_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+f(a-x)}=\int\limits_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{1}{f(x)}}=\int\limits_0^a \frac{f(x)\mathrm{d}x}{1+f(x)}$

Suy ra $2I=I+I=\int\limits_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}+\int\limits_0^a \frac{f(x)\mathrm{d}x}{1+f(x)}=\int\limits_0^a 1\mathrm{d}x=a$

Do đó $I=\frac{1}{2}a \Rightarrow b=1; c=2 \Rightarrow b+c=3.$

**Cách 2.** Chọn $f(x)=1$ là một hàm thỏa các giả thiết.

Dễ dàng tính được $I=\frac{1}{2}a \Rightarrow b=1; c=2 \Rightarrow b+c=3.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

## TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 6

**Câu 69.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;4]$, đồng biến trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn đẳng thức $x+2x.f(x)=[f'(x)]^2$, $\forall x\in[1;4]$. Biết rằng $f(1)=\frac{3}{2}$, tính $I=\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x$?

**A.** $I=\frac{1186}{45}$. **B.** $I=\frac{1174}{45}$. **C.** $I=\frac{1222}{45}$. **D.** $I=\frac{1201}{45}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $x+2x.f(x)=[f'(x)]^2\Rightarrow\sqrt{x}.\sqrt{1+2f(x)}=f'(x)\Rightarrow\frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}=\sqrt{x}$, $\forall x\in[1;4]$.

Suy ra $\int\frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}\mathrm{d}x=\int\sqrt{x}\mathrm{d}x+C\Leftrightarrow\int\frac{\mathrm{d}f(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}\mathrm{d}x=\int\sqrt{x}\mathrm{d}x+C$

$\Rightarrow\sqrt{1+2f(x)}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$. Mà $f(1)=\frac{3}{2}\Rightarrow C=\frac{4}{3}$. Vậy $f(x)=\frac{\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{3}\right)^2-1}{2}$.

Vậy $I=\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1186}{45}$.

**Câu 70.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x).\mathrm{e}^{f^3(x)-x^2-1}-\frac{2x}{f^2(x)}=0$ và $f(0)=1$. Tích phân $\int_0^{\sqrt{7}}x.f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\frac{2\sqrt{7}}{3}$. **B.** $\frac{15}{4}$. **C.** $\frac{45}{8}$. **D.** $\frac{5\sqrt{7}}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $3f'(x).\mathrm{e}^{f^3(x)-x^2-1}-\frac{2x}{f^2(x)}=0\Leftrightarrow 3f^2(x).f'(x).\mathrm{e}^{f^3(x)}=2x.\mathrm{e}^{x^2+1}$

Suy ra $\mathrm{e}^{f^3(x)}=\mathrm{e}^{x^2+1}+C$. Mặt khác, vì $f(0)=1$ nên $C=0$.

Do đó $\mathrm{e}^{f^3(x)}=\mathrm{e}^{x^2+1}\Leftrightarrow f^3(x)=x^2+1\Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$.

Vậy $\int_0^{\sqrt{7}}x.f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\sqrt{7}}x.\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{7}}\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}(x^2+1)=\frac{3}{8}\left[(x^2+1)\sqrt[3]{x^2+1}\right]\Big|_0^{\sqrt{7}}=\frac{45}{8}$.

**Câu 71.** Cho hàm số $f(x)=x^4+4x^3-3x^2-x+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^1 f^2(x).f'(x)\mathrm{d}x$.

**A.** 2. **B.** –2. **C.** $-\frac{7}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $t=f(x)\Rightarrow\mathrm{d}t=f'(x)\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=f(0)=1$, $x=1\Rightarrow t=f(1)=2$.

Khi đó $I=\int_1^2 t^2\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}\Big|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 72.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;1)$ và $f(x)\neq 0$, $\forall x\in(0;1)$. Biết rằng $f\left(\frac{1}{2}\right)=a$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=b$ và $x+xf'(x)=2f(x)-4$, $\forall x\in(0;1)$. Tính tích phân $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x.\cos x+2\sin 2x}{f^2(\sin x)}\mathrm{d}x$ theo $a$ và $b$.

**A.** $I=\frac{3a+b}{4ab}$. **B.** $I=\frac{3b+a}{4ab}$. **C.** $I=\frac{3b-a}{4ab}$. **D.** $I=\frac{3a-b}{4ab}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$\forall x\in(0;1)$ ta có:

$x+xf'(x)=2f(x)-4\Leftrightarrow x+4=2f(x)-xf'(x)\Rightarrow x^2+4x=2xf(x)-x^2f'(x)$

$\Leftrightarrow\frac{x^2+4x}{f^2(x)}=\frac{2xf(x)-x^2f'(x)}{f^2(x)}\Leftrightarrow\frac{x^2+4x}{f^2(x)}=\left(\frac{x^2}{f(x)}\right)'$.

Tính $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x.\cos x+2\sin 2x}{f^2(\sin x)}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x.\cos x+4\sin x.\cos x}{f^2(\sin x)}\mathrm{d}x$

Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$, đổi cận $x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=\frac{1}{2}$, $x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{t^2+4t}{f^2(t)}\mathrm{d}t=\left.\frac{t^2}{f(t)}\right|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{f\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{3}{4b}-\frac{1}{4a}=\frac{3a-b}{4ab}$.

**Câu 73.** Cho hàm số $f$ liên tục, $f(x)>-1$, $f(0)=0$ và thỏa $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}$. Tính $f\left(\sqrt{3}\right)$.

**A.** 0. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 9.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Leftrightarrow\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\left.\sqrt{f(x)+1}\right|_0^{\sqrt{3}}=\left.\sqrt{x^2+1}\right|_0^{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\left.\sqrt{f(x)+1}\right|_0^{\sqrt{3}}=1$

$\Leftrightarrow\sqrt{f\left(\sqrt{3}\right)+1}-\sqrt{f(0)+1}=1\Leftrightarrow\sqrt{f\left(\sqrt{3}\right)+1}=2\Leftrightarrow f\left(\sqrt{3}\right)=3$.

**Câu 74.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_2^5 f(x)\mathrm{d}x=4$, $f(5)=3$, $f(2)=2$. Tính $I=\int\limits_1^2 x^3f'\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x$

**A.** 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$.

$x = 1 \Rightarrow t = 2$; $x = 2 \Rightarrow t = 5$. Khi đó $I = \frac{1}{2}\int_2^5 (t-1) f'(t)\mathrm{d}t$.

Đặt $u = t - 1 \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}t$; $\mathrm{d}v = f'(t)\mathrm{d}t$, chọn $v = f(t)$.

$I = \frac{1}{2}(t-1) f(t)\Big|_2^5 - \frac{1}{2}\int_2^5 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(4f(5) - f(2)) - 2 = 3$.

**Câu 75.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn $f(x) = \frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}$. Tính tích phân $I = \int_3^4 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I = 3 + 2\ln^2 2$. **B.** $I = 2\ln^2 2$. **C.** $I = \ln^2 2$. **D.** $I = 2\ln 2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^4 \left[\frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}\right]\mathrm{d}x = \int_1^4 \frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x + \int_1^4 \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

Xét $K = \int_1^4 \frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Đặt $2\sqrt{x} - 1 = t \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{t+1}{2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \mathrm{d}t$.

$\Rightarrow K = \int_1^3 f(t)\mathrm{d}t = \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

Xét $M = \int_1^4 \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int_1^4 \ln x \mathrm{d}(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^4 = 2\ln^2 2$.

Do đó $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x + 2\ln^2 2 \Rightarrow \int_3^4 f(x)\mathrm{d}x = 2\ln^2 2$.

**Câu 76.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x.f\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}x = \int_1^{16} \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{x}\mathrm{d}x = 1$. Tính tích phân $\int_{\frac{1}{8}}^1 \frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x$.

**A.** $I = 3$. **B.** $I = \frac{3}{2}$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = \frac{5}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x.f\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}x = 1$, $I_2 == \int_1^{16} \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{x}\mathrm{d}x = 1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

□ Đặt $t=\sin^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t=2\sin x.\cos x\mathrm{d}x=2\sin^2 x.\cot x\mathrm{d}x=2t.\cot x\mathrm{d}x$.

| $x$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|
| $t$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |

$$I_1=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x.f\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(t).\frac{1}{2t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}}\frac{f(4x)}{4x}\mathrm{d}(4x)=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}}\frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}}\frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x=2I_1=2$

□Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

| $x$ | $1$ | $16$ |
|---|---|---|
| $t$ | $1$ | $4$ |

$$I_2=\int_{1}^{16}\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{x}\mathrm{d}x=\int_{1}^{4}\frac{f(t)}{t^2}2t\mathrm{d}t=2\int_{1}^{4}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=2\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{f(4x)}{4x}\mathrm{d}(4x)=2\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\int_{\frac{1}{8}}^{1}\frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}I_2=\frac{1}{2}$

Khi đó, ta có:

$$\int_{\frac{1}{8}}^{1}\frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}}\frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}.$$

**Câu 77.** Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $4x.f\left(x^2\right)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$. Tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

**A.** $I=\frac{\pi}{4}$. **B.** $I=\frac{\pi}{6}$. **C.** $I=\frac{\pi}{20}$. **D.** $I=\frac{\pi}{16}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Vì $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $4x.f\left(x^2\right)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$ nên ta có

$$\int_0^1\left[4x.f\left(x^2\right)+3f(1-x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_0^1 4x.f\left(x^2\right)\mathrm{d}x+\int_0^1 3f(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\ (1).$$

Mà $\int_0^1 4x.f\left(x^2\right)\mathrm{d}x=2\int_0^1 f\left(x^2\right)\mathrm{d}\left(x^2\right)\xrightarrow{t=x^2}2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=2I$

và $\int_0^1 3f(1-x)\mathrm{d}x=-3\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}(1-x)\xrightarrow{u=1-x}3\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u=3I$

Đồng thời $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\xrightarrow{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$.

Do đó, $(1)\Leftrightarrow 2I+3I=\frac{\pi}{4}$ hay $I=\frac{\pi}{20}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 78.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x = \frac{9}{5}$ và $\int_0^1 f(\sqrt{x})\mathrm{d}x = \frac{2}{5}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\frac{3}{5}$. **B.** $I=\frac{1}{4}$. **C.** $I=\frac{3}{4}$. **D.** $I=\frac{1}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $t=\sqrt{x} \Rightarrow t^2=x \Rightarrow \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$. Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=1 \Rightarrow t=1$

Suy ra $\int_0^1 f(\sqrt{x})\mathrm{d}x = 2\int_0^1 t.f(t)\mathrm{d}t \Leftrightarrow \int_0^1 t.f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{5}$. Do đó $\Leftrightarrow \int_0^1 x.f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{5}$

Mặt khác $\int_0^1 x.f(x)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x^2}{2}f'(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $\int_0^1 \frac{x^2}{2}f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10} \Rightarrow \int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{5}$

Ta tính được $\int_0^1 (3x^2)^2 \mathrm{d}x = \frac{9}{5}$.

Do đó $\int_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x - 2\int_0^1 3x^2 f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 (3x^2)^2 \mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x)-3x^2)^2 \mathrm{d}x = 0$

$\Leftrightarrow f'(x)-3x^2=0 \Leftrightarrow f'(x)=3x^2 \Leftrightarrow f(x)=x^3+C$.

Vì $f(1)=1$ nên $f(x)=x^3$

Vậy $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

# TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Với P(x) là đa thức của x, ta thường gặp các dạng sau:

| | $\int_a^b P(x).e^x dx$ | $\int_a^b P(x).\cos x dx$ | $\int_a^b P(x).\sin x dx$ | $\int_a^b P(x).\ln x dx$ |
|---|---|---|---|---|
| *u* | *P(x)* | *P(x)* | *P(x)* | *lnx* |
| *dv* | $e^x dx$ | $\cos x dx$ | $\sin x dx$ | *P(x)* |

## TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN DẠNG 1:

**Câu 1.** **(Hậu Lộc Thanh Hóa)** Biết $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{a}\pi-\ln b$. Khi đó, giá trị của $a^2+b$ bằng

**A.** 11. **B.** 7. **C.** 13. **D.** 9.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\tan x\end{cases}$

$I=x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}.\sqrt{3}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x\mathrm{d}x}{\cos x}=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x}$

$=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}+\ln\left|\cos x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}+\ln\frac{1}{2}-\ln 1=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}-\ln 2\Rightarrow a=3;b=2$. Vậy $a^2+b=11$.

**Câu 2.** Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x=a\pi+b\ln 2$, với $a$, $b$ là các số thực. Tính $16a-8b$

**A.** 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos 2x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{2}\tan x\end{cases}$. Ta có

$I=\frac{1}{2}x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\ln\left|\cos x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2\Rightarrow a=\frac{1}{8},b=-\frac{1}{4}$

**Câu 3.** Biết $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x^6+x^3}}\mathrm{d}x=\frac{\pi^3}{a}+\frac{\sqrt{3}\pi^2}{b}+c\pi+d\sqrt{3}$ với $a,b,c,d$ là các số nguyên. Tính $a+b+c+d$.

**A.** $a+b+c+d=28$. **B.** $a+b+c+d=16$. **C.** $a+b+c+d=14$. **D.** $a+b+c+d=22$.

**Lời giải**

**Chọn A**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x^6}+x^3}\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\left(\sqrt{1+x^6}-x^3\right)\sin x}{1+x^6-x^6}\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{1+x^6}-x^3\right)\sin x\mathrm{d}x.$$

Đặt $t=-x\Rightarrow dt=-dx$. Đổi cận $\begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}\\ x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$.

$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{1+t^6}+t^3\right)\sin(-t)(-dt)=-\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{1+t^6}+t^3\right)\sin t dt=-\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{1+x^6}+x^3\right)\sin x dx$$

Suy ra $2I=\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(-2x^3\sin x\right)dx\Leftrightarrow I=-\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}x^3\sin x dx$.

| | |
|---|---|
| $x^3$ (+) | $+\sin x$ |
| $3x^2$ (−) | $-\cos x$ |
| $6x$ (+) | $-\sin x$ |
| $6$ (−) | $+\cos x$ |
| $0$ | $+\sin x$ |

$$I=\left(x^3\cos x-3x^2\sin x-6x\cos x+6\sin x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi^3}{27}-\frac{\sqrt{3}\pi^2}{3}-2\pi+6\sqrt{3}$$

Suy ra: $a=27, b=-3, c=-2, d=6$. Vậy $a+b+c+d=28$.

**Câu 4.** **(Chuyên Phan Bội Châu Lần2)** Cho tích phân $I=\int\limits_0^{\pi^2}\sqrt{x}.\sin\sqrt{x}\mathrm{d}x=a\pi^2+b\ (a,\ b\in\mathbb{Z})$, Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\dfrac{a}{b}<-3$. **B.** $a^2-b=-4$. **C.** $\dfrac{a}{b}\in(-1;0)$. **D.** $a-b=6$.

**Lời giải.**

**Chọn C**

Đặt $\sqrt{x}=t\Rightarrow x=t^2\Rightarrow \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

| $x$ | $0$ $\pi^2$ |
|---|---|
| $t$ | $0$ $\pi$ |

Ta có: $I=\int\limits_0^{\pi}2t^2\sin t\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases}u=2t^2\\ \mathrm{d}v=\sin t\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=4t\mathrm{d}t\\ v=-\cos t\end{cases}$.

Suy ra $I=-2t^2\cos t\Big|_0^{\pi}+\int\limits_0^{\pi}4t\cos t\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases}u_1=4t\\ \mathrm{d}v_1=\cos t\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u_1=4\mathrm{d}t\\ v_1=\sin t\end{cases}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vậy $I=-2t^2\cos t\Big|_0^{\pi}+4t\sin t\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}4\sin t\,dt=-2\left(-\pi^2\right)+4\cos t\Big|_0^{\pi}=2\pi^2-8$.

Do đó $a=2;b=-8\Rightarrow\frac{a}{b}\in(-1;0)$.

**Câu 5.** Cho biết $\int_0^1\frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx=\frac{a}{b}.e+c$ với $a$, $c$ là các số nguyên, $b$ là số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a-b+c$.

**A.** 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** −3.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $t=x+2\Rightarrow dt=dx$, đổi cận $x=0\Rightarrow t=2$, $x=1\Rightarrow t=3$.

Ta có $I=\int_0^1\frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx=\int_2^3\frac{(t-2)^2e^{t-2}}{t^2}dt=\int_2^3\left(1-\frac{4}{t}+\frac{4}{t^2}\right)e^{t-2}dt=\int_2^3e^{t-2}dt+\int_2^3\left(-\frac{4}{t}+\frac{4}{t^2}\right)e^{t-2}dt$

+ Tính $I_1=\int_2^3e^{t-2}dt=e^{t-2}\Big|_2^3=e-1$.

+ Tính $I_2=\int_2^3\left(-\frac{4}{t}+\frac{4}{t^2}\right)e^{t-2}dt$.

Đặt $u=\frac{4}{t}\Rightarrow du=-\frac{4}{t^2}dt$, $dv=e^{t-2}dt\Rightarrow v=e^{t-2}$

Ta có $\int_2^3\frac{4}{t}e^{t-2}dt=\frac{4}{t}.e^{t-2}\Big|_2^3+\int_2^3\frac{4}{t^2}e^{t-2}dt\Rightarrow I_2=\int_2^3\left(-\frac{4}{t}+\frac{4}{t^2}\right)e^{t-2}dt=-\frac{4}{3}e+2$.

Suy ra $I=\frac{-1}{3}e+1\Rightarrow a=-1,\ b=3,\ c=1$. Vậy $a-b+c=3$.

**Câu 6.** **(Chuyên Thái Bình Lần 3)** Biết $\int_{\frac{1}{12}}^{12}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx=\frac{a}{b}e^{\frac{c}{d}}$ trong đó $a,b,c,d$ là các số nguyên dương và các phân số $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ là tối giản. Tính $bc-ad$.

**A.** 12. **B.** 1. **C.** 24. **D.** 64.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $I=\int_{\frac{1}{12}}^{12}\left[x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+1\right]e^{x+\frac{1}{x}}dx=\int_{\frac{1}{12}}^{12}x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int_{\frac{1}{12}}^{12}e^{x+\frac{1}{x}}dx$.

Đặt: $\begin{cases}u=x\\dv=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx\end{cases}\to\begin{cases}du=dx\\v=e^{x+\frac{1}{x}}\end{cases}$.

Khi đó: $I=\int_{\frac{1}{12}}^{12}x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int_{\frac{1}{12}}^{12}e^{x+\frac{1}{x}}dx=x.e^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{1}{12}}^{12}-\int_{\frac{1}{12}}^{12}e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int_{\frac{1}{12}}^{12}e^{x+\frac{1}{x}}dx$

$=12e^{12+\frac{1}{12}}-\frac{1}{12}e^{12+\frac{1}{12}}=\frac{143}{12}e^{\frac{145}{12}}$.

Vậy: $a=143;b=12;c=145;d=12$. Do đó: $bc-ad=12.145-143.12=24$.

**Câu 7.** **(THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Biết $\int_1^2 (x+1)^2 e^{x-\frac{1}{x}}dx = me^{\frac{p}{q}} - n$, trong đó $m, n, p, q$ là các số nguyên dương và $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản. Tính $T = m+n+p+q$.

**A.** $T=11$. **B.** $T=10$. **C.** $T=7$. **D.** $T=8$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $I = \int_1^2 (x+1)^2 e^{x-\frac{1}{x}}dx = \int_1^2 (x^2+2x+1)e^{x-\frac{1}{x}}dx = \int_1^2 (x^2+1)e^{x-\frac{1}{x}}dx + \int_1^2 2xe^{x-\frac{1}{x}}dx$

Xét $I_1 = \int_1^2 (x^2+1)e^{x-\frac{1}{x}}dx = \int_1^2 x^2.e^{x-\frac{1}{x}}.\frac{x^2+1}{x^2}dx = \int_1^2 x^2.e^{x-\frac{1}{x}}d\left(x-\frac{1}{x}\right) = \int_1^2 x^2 d\left(e^{x-\frac{1}{x}}\right)$

$= x^2e^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2 - \int_1^2 e^{x-\frac{1}{x}}d(x^2) = x^2e^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2 - \int_1^2 2xe^{x-\frac{1}{x}}dx$

$\Rightarrow I_1 + \int_1^2 2xe^{x-\frac{1}{x}}dx = x^2e^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2 \Rightarrow I = x^2e^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2 = 4e^{\frac{3}{2}} - 1$

Do $\int_1^2 (x+1)^2 e^{x-\frac{1}{x}}dx = me^{\frac{p}{q}} - n$, trong đó $m, n, p, q \in \mathbb{Z}^+$ và $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản $\Rightarrow \begin{cases} m=4 \\ n=1 \\ p=3 \\ q=2 \end{cases}$

Khi đó, $T = m+n+p+q = 4+1+3+2 = 10$.

**Câu 8.** **(THPT SỐ 1 TƯ NGHĨA LẦN 2 NĂM 2019)** Biết rằng $\int e^{2x}\cos 3x dx = e^{2x}(a\cos 3x + b\sin 3x) + c$, trong đó $a$, $b$, $c$ là các hằng số, khi đó tổng $a+b$ có giá trị là

**A.** $-\frac{5}{13}$. **B.** $\frac{1}{13}$. **C.** $\frac{5}{13}$. **D.** $-\frac{1}{13}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $\begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = \cos 3x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = 2e^{2x}dx \\ v = \frac{1}{3}\sin 3x \end{cases}$.

Ta có $\int e^{2x}\cos 3x dx = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x$.

Đặt $\begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = \sin 3x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = 2e^{2x}dx \\ v = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{cases}$

Ta có $\int e^{2x}\cos 3x dx = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3x dx$

$\Leftrightarrow \frac{13}{9}\int e^{2x}\cos 3x dx = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x + C_1$

$\Leftrightarrow \int e^{2x}\cos 3x dx = e^{2x}\left(\frac{2}{13}\cos 3x + \frac{3}{13}\sin 3x\right) + C$.

Suy ra $a = \frac{2}{13}$ và $b = \frac{3}{13}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vậy $a+b=\frac{5}{13}$.

Cách khác:

Ta có $\left[\int e^{2x}\cos 3x\mathrm{d}x\right]=\left[e^{2x}\left(a\cos 3x+b\sin 3x\right)+c\right]$

$\Leftrightarrow e^{2x}\cos 3x=2e^{2x}\left(a\cos 3x+b\sin 3x\right)+e^{2x}\left(-3a\sin 3x+3b\cos 3x\right)$

$\Leftrightarrow e^{2x}\cos 3x=e^{2x}\left[\left(2a+3b\right)\cos 3x+\left(-3a+2b\right)\sin 3x\right]$

Đồng nhất biểu thức ta có $\begin{cases}2a+3b=1\\-3a+2b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{2}{13}\\b=\frac{3}{13}\end{cases}$.

Vậy $a+b=\frac{5}{13}$.

**Câu 9.** **(Nguyễn Du Dak-Lak 2019)** Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-x\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi\sqrt{2}}{a}+\frac{1}{b}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+c\ln 2$ (với $a,b,c$ là các số nguyên). Khi đó $a+b+c$ bằng

**A.** 2. **B.** 4. **C.** $-1$. **D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-x\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$=-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}\left(\cos x\right)-I=2\ln\left|\cos x\right|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{0}-I=-2\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-I=\ln 2-I$.

Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Đặt: $u=x$ và $\mathrm{d}v=\frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$, ta có $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$ và $v=\frac{1}{\cos x}$.

Khi đó: $I=\frac{x}{\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\sqrt{2}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\sqrt{2}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin^2 x-1}\mathrm{d}\left(\sin x\right)$

$=\frac{\pi}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}+1}\right|=\frac{\pi}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$.

Vậy $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-x\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\ln 2-I=-\frac{\pi}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\ln 2$.

Suy ra: $\begin{cases}a=-4\\b=2\\c=1\end{cases}\Rightarrow a+b+c=-1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 10.** **(CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 2019 – LẦN 1)** Cho $I=\int_0^1\left(x+\sqrt{x^2+15}\right)dx=a+b\ln 3+c\ln 5$ với $a,b,c\in\mathbb{Q}$. Tính tổng $a+b+c$.

**A.** $1$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $\begin{cases}u=x+\sqrt{x^2+15}\\dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+15}}\right)dx\\v=x\end{cases}$.

Ta có: $I=x\left(x+\sqrt{x^2+15}\right)\Big|_0^1-\int_0^1 x\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+15}}\right)dx$

$=5-\int_0^1\left(x+\sqrt{x^2+15}-\frac{15}{\sqrt{x^2+15}}\right)dx$

$=5-\int_0^1\left(x+\sqrt{x^2+15}\right)dx+\int_0^1\frac{15}{\sqrt{x^2+15}}dx=5-I+J$.

Suy ra: $I=\frac{5}{2}+\frac{J}{2}$.

Tính $J=\int_0^1\frac{15}{\sqrt{x^2+15}}dx=15\ln\left(x+\sqrt{x^2+15}\right)\Big|_0^1$

$=15\ln 5-15\ln\sqrt{15}=15\ln 5-\frac{15}{2}\ln 3-\frac{15}{2}\ln 5=-\frac{15}{2}\ln 3+\frac{15}{2}\ln 5$.

Vậy $I=\frac{5}{2}-\frac{15}{4}\ln 3+\frac{15}{4}\ln 5$.

Do đó $a=\frac{5}{2};b=-\frac{15}{4};c=\frac{15}{4}$.

Vậy $a+b+c=\frac{5}{2}$.

**TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN DẠNG 2:**

**Câu 11.** Cho biết tích phân $I=\int_1^e x\left(2x^2+\ln x\right)dx=\frac{a.e^4+b.e^2+c}{4}$ với $a,b,c$ là các ước nguyên của 4. Tổng $a+b+c=?$

**A.** 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1

**Lời giải**

$I=\int_1^e x\left(2x^2+\ln x\right)dx=2\int_1^e x^3dx+\int_1^e x\ln xdx$.

$2\int_1^e x^3dx=\frac{1}{2}x^4\Big|_1^e=\frac{1}{2}\left(e^4-1\right)$

Ta có $\int_1^e x\ln xdx=\frac{1}{2}\left[x^2\ln x\Big|_1^e-\int_1^e x^2\frac{1}{x}dx\right]=\frac{1}{2}\left[e^2-\frac{1}{2}x^2\Big|_1^e\right]=\frac{e^2+1}{4}$

$I=\int_1^e x\left(2x^2+\ln x\right)dx=\frac{1}{2}\left(e^4-1\right)+\frac{e^2+1}{4}=\frac{2e^4+e^2-1}{4}$

**Chọn A**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 12.** **(KINH MÔN HẢI DƯƠNG 2019)** Biết $\int_0^3 x\ln\left(x^2+16\right)\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 2 + \frac{c}{2}$, trong đó $a, b, c$ là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T = a+b+c$

**A.** $T=-2$. **B.** $T=16$. **C.** $T=2$. **D.** $T=-16$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $t = x^2+16 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2}$.

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=16$ ; $x=3 \Rightarrow t=25$.

$I = \int_0^3 x\ln\left(x^2+16\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{16}^{25}\ln t\,\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases} u=\ln t \\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\frac{1}{t}\mathrm{d}t \\ v=t \end{cases}$.

$I = \frac{1}{2}\int_{16}^{25}\ln t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(t\ln t)\Big|_{16}^{25} - \frac{1}{2}\int_{16}^{25}\mathrm{d}t = 25\ln 5 - 32\ln 2 - \frac{9}{2}$.

Vậy $T = a+b+c = 25-32-9 = -16$.

**Cách 2.**

Đặt $\begin{cases} u=\ln\left(x^2+16\right) \\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\frac{2x}{x^2+16}\mathrm{d}x \\ v=\frac{x^2}{2}+8=\frac{x^2+16}{2} \end{cases}$.

$I = \int_0^3 x\ln\left(x^2+16\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2+16}{2}.\ln\left(x^2+16\right)\Big|_0^3 - \int_0^3 x\,\mathrm{d}x = 25\ln 5 - 32\ln 2 - \frac{9}{2}$

Vậy $T = a+b+c = 25-32-9 = -16$.

**Câu 13.** **(Sở Thanh Hóa 2019)** Cho $I = \int_0^1 x\ln\left(2+x^2\right)\mathrm{d}x = a\ln 3 + b\ln 2 + c$ với $a$, $b$, $c$ là các số hữu tỷ. Giá trị của $a+b+c$ bằng

**A.** $\frac{3}{2}$. **B.** $1$. **C.** $0$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $\begin{cases} u=\ln\left(2+x^2\right) \\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{2x}{2+x^2}\mathrm{d}x \\ v=\frac{x^2}{2} \end{cases}$.

Khi đó, $I = \int_0^1 x\ln\left(2+x^2\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln\left(2+x^2\right)\right]\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}.\frac{2x}{2+x^2}\mathrm{d}x$

$= \left[\frac{x^2}{2}\ln\left(2+x^2\right)\right]\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{2+x^2}\mathrm{d}x \quad (1)$.

Xét $I_1 = \int_0^1 \frac{x^3}{2+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1\left(x - \frac{2x}{x^2+2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{2x}{x^2+2}\mathrm{d}x$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\left(x^2+2\right)}{x^2+2} = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \ln\left(x^2+2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \ln 3 + \ln 2$.

Thay vào $(1)$, suy ra $I = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2} + \ln 3 - \ln 2 = \frac{3}{2}\ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{2}$.

Vậy $\begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -1 \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a+b+c = 0$.

**Câu 14.** Tính tích phân $I = \int_1^2 \left(2019\log_2 x + \frac{1}{\ln 2}\right)x^{2018}\mathrm{d}x$.

**A.** $I = 2^{2017}$. **B.** $I = 2^{2019}$. **C.** $I = 2^{2018}$. **D.** $I = 2^{2020}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$I = \int_1^2 \left(2019\log_2 x + \frac{1}{\ln 2}\right)x^{2018}\mathrm{d}x = 2019\int_1^2 x^{2018}\log_2 x\mathrm{d}x + \frac{1}{\ln 2}\int_1^2 x^{2018}\mathrm{d}x = 2019I_1 + \frac{1}{\ln 2}I_2$.

Trong đó $I_2 = \int_1^2 x^{2018}\mathrm{d}x = \frac{x^{2019}}{2019}\Big|_1^2 = \frac{2^{2019}-1}{2019}$.

và $I_1 = \int_1^2 x^{2018}\log_2 x\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = \log_2 x \\ \mathrm{d}v = x^{2018}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \frac{1}{x.\ln 2}\mathrm{d}x \\ v = \frac{x^{2019}}{2019} \end{cases}$.

Khi đó $I_1 = \left(\frac{x^{2019}}{2019}.\log_2 x\right)\Big|_1^2 - \frac{1}{2019.\ln 2}I_2 = \frac{2^{2019}}{2019} - \frac{1}{2019.\ln 2}.\frac{2^{2019}-1}{2019} = \frac{2^{2019}}{2019} - \frac{2^{2019}-1}{2019^2.\ln 2}$.

Vậy $I = 2^{2019}$.

**Câu 15.** **(PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH)** Biết $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \frac{a}{\mathrm{e}+1} + b\ln\frac{2}{\mathrm{e}+1} + c$ với $a,b,c \in \mathbb{Z}$. Tính $a+b+c$.

**A.** $-1$. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = \frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = \frac{-1}{1+x} \end{cases}$.

$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{1+x}\Big|_1^{\mathrm{e}} + \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\mathrm{e}+1} + \int_1^{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$.

$= -\frac{1}{\mathrm{e}+1} + \left(\ln x - \ln(x+1)\right)\Big|_1^{\mathrm{e}} = -\frac{1}{\mathrm{e}+1} + 1 - \ln(\mathrm{e}+1) - \ln 1 + \ln 2$.

$= -\frac{1}{\mathrm{e}+1} + \ln\frac{2}{\mathrm{e}+1} + 1 = \frac{a}{\mathrm{e}+1} + b\ln\frac{2}{\mathrm{e}+1} + c \Rightarrow a = -1;\ b = 1;\ c = 1 \Rightarrow a+b+c = 1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 16.** **(THPT PHỤ DỰC – THÁI BÌNH)** Nghiệm dương $a$ của phương trình $\int_1^a (2x-1)\ln x dx = (a^2-a)\ln a - 9$ thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** $(1;3)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(5;7)$. **D.** $(7;10)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $u = \ln x$ và $dv = (2x-1)dx$, ta có $du = \frac{1}{x}dx$ và $v = x^2 - x$.

Khi đó, đặt $I = \int_1^a (2x-1)\ln x dx = (x^2-x)\ln x\Big|_1^a - \int_1^a (x^2-x)\frac{1}{x}dx$.

$= (a^2-a)\ln a - \int_1^a (x-1)dx = (a^2-a)\ln a - \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^a$

$= (a^2-a)\ln a - \left(\frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} - a + 1\right) = (a^2-a)\ln a - \left(\frac{a^2}{2} - a + \frac{1}{2}\right)$.

Theo giả thiết: $I = (a^2-a)\ln a - 9 \Rightarrow \frac{a^2}{2} - a + \frac{1}{2} = 9 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 17 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1-3\sqrt{2} \\ a = 1+3\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Do $a > 0$ nên $a = 1+3\sqrt{2}$.

**Câu 17.** **( Sở Phú Thọ)** Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(sinx+2\cos x)}{cos^2 x}dx = a\ln 3 + b\ln 2 + c.\pi$ (với $a, b, c$ là các số hữu tỉ). Giá trị biểu thức $abc$ bằng.

**A.** $\frac{15}{8}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{5}{4}$. **D.** $\frac{17}{8}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $\left\{\begin{array}{l} u = \ln(\sin x + 2cosx) \\ dv = \frac{dx}{cos^2 x} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} du = \frac{cosx - 2\sin x}{\sin x + 2cosx}dx \\ v = \tan x \end{array}\right.$

Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x + 2cosx)}{cos^2 x}dx = \tan x.\ln(\sin x + 2cosx)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.\frac{cosx - 2\sin x}{\sin x + 2cosx}dx$

$= \ln\frac{3\sqrt{2}}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.\frac{1-2\tan x}{\tan x + 2}dx = \ln\frac{3\sqrt{2}}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2\tan x - 5 + \frac{10}{\tan x + 2}\right)dx$

$= \ln 3 - \frac{1}{2}\ln 2 - (2\ln cosx + 5x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + 10\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{cosx}{\sin x + 2cosx}dx = \ln 3 + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5\pi}{4} + 10\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{cosx}{\sin x + 2cosx}dx$

Xét tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{cosx}{sinx + 2cosx}dx = \frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(cosx - 2sinx) + 2(sinx + 2cosx)}{(sinx + 2cosx)}dx$

$= \frac{1}{5}(\ln(sinx + 2cosx) + 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{5}\left(\ln\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} - \ln 2\right) = \frac{1}{5}\left(\ln 3 - \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{2}\right)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x+2\cos x)}{\cos^2 x}dx = \ln 3+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5\pi}{4}+2(\ln 3-\frac{3}{2}\ln 2+\frac{\pi}{2}) = 3\ln 3-\frac{5}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}$

Vậy $a=3, b=-\frac{5}{2}, c=-\frac{1}{4} \Rightarrow abc=\frac{15}{8}$.

**Câu 18.** **(HSG Bắc Ninh)** Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}dx = \frac{a}{b}\ln 2+\frac{\pi}{c}$ với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên. Khi đó, $\frac{bc}{a}$ bằng

**A.** $-6$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** $6$. **D.** $-\frac{8}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $\begin{cases} u=\ln(\sin x+\cos x) \\ dv=\frac{1}{\cos^2 x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx \\ v=\tan x \end{cases}$.

Khi đó: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}dx = \tan x.\ln(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.\ \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx$.

Đặt $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.\ \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x-\tan^2 x}{\tan x+1}dx$

Đặt $\tan x=t \Rightarrow dt=(1+\tan^2 x)dx \Rightarrow dx=\frac{dt}{1+t^2}$. Với $x=0 \to t=0$ và $x=\frac{\pi}{4} \to t=1$

Ta có : $J=\int_0^1 \frac{t-t^2}{(t+1).(t^2+1)}dt = \int_0^1 \frac{(t+1)-(1+t^2)}{(1+t).(1+t^2)}dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} - \int_0^1 \frac{dt}{t+1} = \frac{\pi}{4}-\ln 2$.

Vậy $I=\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}+\ln 2=\frac{3}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{bc}{a}=-\frac{8}{3}$.

**Câu 19.** **(THPT LÊ VĂN HƯU NĂM 2018-2019)** Cho tích phân $I=\int_1^e \left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x dx = a.e^2+b$, $a$ và $b$ là các số hữu tỉ. Giá trị của $4a+3b$ là

**A.** $\frac{13}{2}$. **B.** $\frac{13}{4}$. **C.** $-\frac{13}{4}$. **D.** $-\frac{13}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $I=\int_1^e \left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x dx = \int_1^e x\ln x dx + \int_1^e \frac{1}{x}\ln x dx$.

Đặt $u=\ln x$ và $dv=xdx$, suy ra $du=\frac{1}{x}dx$ và $v=\frac{1}{2}x^2$. Khi đó

$\int_1^e x\ln x dx = \frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x dx = \frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}x^2\Big|_1^e = \frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$.

Ta có $\int_1^e \frac{1}{x}\ln x dx = \int_1^e \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2\Big|_1^e = \frac{1}{2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Suy ra $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}} x\ln x\mathrm{d}x+\int\limits_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{x}\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\mathrm{e}^2+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^2+\frac{3}{4}$.

Suy ra $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{3}{4}$. Suy ra $4a+3b=\frac{13}{4}$.

**Câu 20.** **(HKII-CHUYÊN-NGUYỄN-HUỆ-HÀ-NỘI)** Khẳng định nào sau đây đúng về kết quả $\int\limits_1^{\mathrm{e}} x^3\ln x\mathrm{d}x=\frac{3\mathrm{e}^a+1}{b}$?

**A.** $a.b=64$. **B.** $a.b=46$. **C.** $a-b=12$. **D.** $a-b=4$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=x^3\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{4}x^4\end{cases}$. Áp dụng tích phân từng phần ta tính được:

$$\int\limits_1^{\mathrm{e}} x^3\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}-\int\limits_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{4}x^3\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^4}{4}-\frac{1}{16}x^4\Big|_1^{\mathrm{e}}=\frac{3\mathrm{e}^4+1}{16}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=4\\ b=16\end{cases}\Rightarrow a.b=64.$$

**Câu 21.** Giả sử tích phân $\int\limits_0^1 x.\ln\left(2x+1\right)^{2017}\mathrm{d}x=a+\frac{b}{c}\ln 3$. Với phân số $\frac{b}{c}$ tối giản. Lúc đó

**A.** $b+c=6057$. **B.** $b+c=6059$. **C.** $b+c=6058$. **D.** $b+c=6056$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $I=\int\limits_0^1 x.\ln\left(2x+1\right)^{2017}\mathrm{d}x=2017\int\limits_0^1 x.\ln\left(2x+1\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(2x+1\right)\\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{2}{2x+1}\mathrm{d}x\\ v=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{8}\end{cases}$

Do đó $\int\limits_0^1 x.\ln\left(2x+1\right)\mathrm{d}x=\left(\ln\left(2x+1\right)\right)\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{8}\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1\left(\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{8}\right)\frac{2}{2x+1}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{3}{8}\ln 3-\left(\frac{x^2-x}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{3}{8}\ln 3$$

$$\Rightarrow I=\int\limits_0^1 x.\ln\left(2x+1\right)^{2017}\mathrm{d}x=2017\left(\frac{3}{8}\ln 3\right)=\frac{6051}{8}\ln 3.$$

Khi đó $b+c=6059$.

**Câu 22.** **(ĐỀ HỌC SINH GIỎI TỈNH BẮC NINH NĂM 2018-2019)** Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\left(\sin x+\cos x\right)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{a}{b}\ln 2+\frac{\pi}{c}$ với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên. Khi đó, $\frac{bc}{a}$ bằng

**A.** $-6$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** $6$. **D.** $-\frac{8}{3}$.

**Lời giải**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có: $\begin{cases} u = \ln\left(\sin x + \cos x\right) \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x \\ v = \tan x \end{cases}$.

Khi đó: $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\ln\left(\sin x + \cos x\right)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x.\ln\left(\sin x + \cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.\ \dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$.

Đặt $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.\ \dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x - \tan^2 x}{\tan x + 1}\mathrm{d}x$

Đặt $\tan x = t \Rightarrow dt = \left(1 + \tan^2 x\right)dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$. Với $x = 0 \to t = 0$ và $x = \dfrac{\pi}{4} \to t = 1$

Ta có : $J = \int\limits_0^1 \dfrac{t - t^2}{\left(t+1\right).\left(t^2+1\right)}\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \dfrac{\left(t+1\right) - \left(1+t^2\right)}{\left(1+t\right).\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{t+1} = \dfrac{\pi}{4} - \ln 2$.

Vậy $I = \ln\sqrt{2} - \dfrac{\pi}{4} + \ln 2 = \dfrac{3}{2}\ln 2 - \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \dfrac{bc}{a} = -\dfrac{8}{3}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

## TÍCH PHÂN HÀM ẨN PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN

**Câu 1:** **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $A=\int_0^2 (x-1)f'(x)\mathrm{d}x=9$ và $f(2)+f(0)=3$. Tính $I=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$

**A.** $I=12$. **B.** $I=-12$. **C.** $I=-6$. **D.** $I=6$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $\begin{cases}u=x-1\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$.

Ta có: $A=\int_0^2 (x-1)f'(x)\mathrm{d}x=(x-1)f(x)\Big|_0^2-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=f(2)+f(0)-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Với $A=9$ và $f(2)+f(0)=3$ nên $I=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=-6$.

**Câu 2:** **(THPT NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 x^2 f(x)dx=\frac{1}{3}$ Tính $\int_0^1 x^3 f'(x)dx$.

**A.** $-1$ **B.** 1 **C.** 3 **D.** $-3$

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\begin{cases}u=f(x)\Rightarrow du=f'(x)dx\\ dv=x^2dx\Rightarrow v=\frac{x^3}{3}\end{cases}$$

$$I=\frac{x^3}{3}f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^3}{3}f'(x)dx=\frac{1^3}{3}f(1)-0.f(0)-\int_0^1\frac{x^3}{3}f'(x)dx\alpha$$

$$\frac{1}{3}=\frac{-1}{3}\int_0^1 x^3f'(x)dx\Rightarrow\int_0^1 x^3f'(x)dx=-1$$

**Câu 3:** **(THPT NGUYỄN KHUYẾN TP.HCM NĂM 2018-2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thoả mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 x\mathrm{d}x=10$ và $f(0)=3$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $-13$ **B.** 13 **C.** 7 **D.** $-7$

**Lời giải.**

Từ công thức tính vi phân của hàm số, ta có $f'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}(f(x))$, và $\mathrm{d}(\cos^2 x)=(\cos^2 x)'\mathrm{d}x=-\sin 2x\mathrm{d}x$

Do đó, áp dụng công thức tích phân từng phần, với $u=\cos^2 x$ và $v=f(x)$, ta thu được

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 x\mathrm{d}x=f(x).\cos^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x\mathrm{d}x$$

Theo giả thiết, ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 x\mathrm{d}x=10$. Từ đó $f(x).\cos^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x\mathrm{d}x=10$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x dx = 10 - \left( f\left(\frac{\pi}{2}\right).\cos^2\frac{\pi}{2} - f(0).\cos^2 0 \right) = 13$

**Câu 4:** **(Đặng Thành Nam Đề 12)** Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{x}{x + f^2(x)}$. Biết rằng $\int_1^2 g(x)dx = 1$ và $2g(2) - g(1) = 2$. Tích phân $\int_1^2 \frac{x^2}{x + f^2(x)}dx$ bằng

**A.** 1,5. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn B**

Vì $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{x}{x + f^2(x)}$ nên $g'(x) = \frac{x}{x + f^2(x)}$.

Đặt $I = \int_1^2 \frac{x^2}{x + f^2(x)}dx \Rightarrow I = \int_1^2 xg'(x)dx$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = g'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = g(x) \end{cases}$.

Khi đó $I = xg(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 g(x)dx = 2g(2) - g(1) - 1 = 1$.

**Câu 5:** Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_1^5 x.f'(x)dx$.

**A.** $\frac{5}{4}$. **B.** $\frac{17}{4}$. **C.** $\frac{33}{4}$. **D.** −1761.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow I = xf(x)\Big|_1^5 - \int_1^5 f(x)dx$.

Từ $f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2 \Rightarrow \begin{cases} f(5) = 5 \ (x = 1) \\ f(1) = 2 \ (x = 0) \end{cases}$, suy ra $I = 23 - \int_1^5 f(x)dx$.

Đặt $t = x^3 + 3x + 1 \Rightarrow \begin{cases} dt = (3x^2 + 3)dx \\ f(t) = 3x + 2 \end{cases}$

Đổi cận: Với $t = 1 \Rightarrow 1 = x^3 + 3x + 1 \Leftrightarrow x = 0$ và $t = 5 \Rightarrow x^3 + 3x + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 1$.

Khi đó $I = 23 - \int_1^5 f(x)dx = 23 - \int_0^1 (3x + 2)(3x^2 + 3)dx \overset{Casio}{=} \frac{33}{4}$

**Chọn C**

**Câu 6:** **(Chuyên Vinh Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(x) + f(1 - x) = x^3(1 - x), \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Tính $I = \int_0^2 xf'\left(\frac{x}{2}\right)dx$ bằng:

**A.** $-\frac{1}{10}$. **B.** $\frac{1}{20}$. **C.** $\frac{1}{10}$. **D.** $-\frac{1}{20}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Lời giải**

**Chọn A**

Từ giả thiết $f(x)+f(1-x)=x^3(1-x),\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(1)=0$.

Ta có: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^3(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{20}\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{40}$.

$I=\int_0^2 xf'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$, đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=2f\left(\frac{x}{2}\right)\end{cases}$

Nên

$I=2xf\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^2-2\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=4f(1)-2\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=-2\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=-4\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=-\frac{1}{10}$.

**Câu 7:** **(CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG QUẢNG NAM LẦN 2 NĂM 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$. Biết $\int_0^1\left[x.f'(1-x)-f(x)\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$. Tính $f(0)$.

**A.** $f(0)=-1$. **B.** $f(0)=\frac{1}{2}$. **C.** $f(0)=-\frac{1}{2}$. **D.** $f(0)=1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $A=\int_0^1\left[x.f'(1-x)-f(x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^1 x.f'(1-x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $I=\int_0^1 x.f'(1-x)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f'(1-x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=-f(1-x)\end{cases}$

Khi đó $I=-f(1-x).x\Big|_0^1+\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=-f(0)+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

Do đó $A=-f(0)+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow f(0)=-\frac{1}{2}$.

**Câu 8:** **(THPT Nghèn Lần1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 x\,f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}$ và $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{9}{5}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\frac{3}{4}$. **B.** $I=\frac{1}{5}$. **C.** $I=\frac{1}{4}$. **D.** $I=\frac{4}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét $A=\int_0^1 x\,f(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Rightarrow A=\dfrac{x^2}{2}f(x)\Big|_0^1-\dfrac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(x)\,dx=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(x)\,dx=\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow\int_0^1 x^2f'(x)\,dx=\dfrac{3}{5}.$

□Xét $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx-2k\int_0^1 x^2f'(x)\,dx+k^2\int_0^1 x^4dx=0$ (1) $\Leftrightarrow\dfrac{9}{5}-2k.\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{5}k^2=0\Leftrightarrow k=3.$

(1) trở thành $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx-6\int_0^1 x^2f'(x)\,dx+9\int_0^1 x^4dx=0\Leftrightarrow\int_0^1\left(f'(x)-3x^2\right)^2dx=0.$

$\left(f'(x)-3x^2\right)^2\ge0\Rightarrow\int_0^1\left(f'(x)-3x^2\right)^2dx\ge0.$

Do đó $\int_0^1\left(f'(x)-3x^2\right)^2dx=0\Leftrightarrow f'(x)-3x^2=0\Leftrightarrow f'(x)=3x^2\Rightarrow f(x)=\int3x^2dx=x^3+C$

$f(1)=1\Rightarrow f(x)=x^3.$

□ $I=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 x^3dx=\dfrac{1}{4}.$

**Câu 9:** **(Chuyên Vinh Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$. Biết $f(0)=1$ và $f(x)f(2-x)=e^{2x^2-4x}$ với mọi $x\in[0;2]$. Tính tích phân $I=\int_0^2\dfrac{\left(x^3-3x^2\right)f'(x)}{f(x)}dx$.

**A.** $I=-\dfrac{14}{3}$. **B.** $I=-\dfrac{32}{5}$. **C.** $I=-\dfrac{16}{3}$. **D.** $I=-\dfrac{16}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Từ giả thiết $f(x)f(2-x)=e^{2x^2-4x}$, thay $x=2$ ta được $f(2)=1$.

Ta có $I=\int_0^2\dfrac{\left(x^3-3x^2\right)f'(x)}{f(x)}dx$. Đặt $\begin{cases}u=x^3-3x^2\\dv=\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\left(3x^2-6x\right)dx\\v=\ln\left|f(x)\right|\end{cases}$.

Khi đó: $I=\left(x^3-3x^2\right)\ln\left|f(x)\right|\Big|_0^2-\int_0^2\left(3x^2-6x\right)\ln\left|f(x)\right|dx$

$=-3\int_0^2\left(x^2-2x\right)\ln\left|f(x)\right|dx=-3J$ (do $f(2)=1$), với $J=\int_0^2\left(x^2-2x\right)\ln\left|f(x)\right|dx$.

Đặt $x=2-t$ thì

$J=\int_2^0\left[(2-t)^2-2(2-t)\right]\ln\left|f(2-t)\right|d(2-t)$

$=\int_2^0\left[(2-x)^2-2(2-x)\right]\ln\left|f(2-x)\right|d(2-x)=\int_0^2\left(x^2-2x\right)\ln\left|f(2-x)\right|dx.$

Suy ra

$$2J=\int_0^2\left(x^2-2x\right)\ln\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x+\int_0^2\left(x^2-2x\right)\ln\left|f\left(2-x\right)\right|\mathrm{d}x=\int_0^2\left(x^2-2x\right)\ln\left|f\left(x\right)f\left(2-x\right)\right|\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^2\left(x^2-2x\right)\ln e^{2x^2-4x}\mathrm{d}x=\int_0^2\left(x^2-2x\right)\left(2x^2-4x\right)\mathrm{d}x=\frac{32}{15}\Rightarrow J=\frac{16}{15}.$$

Vậy $I=-3J=-\frac{16}{5}$.

**Câu 10:** **(THPT Sơn Tây Hà Nội 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^3 x\cdot f'\left(2x-4\right)\mathrm{d}x=8$; $f\left(2\right)=2$. Tính $I=\int_{-2}^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=-5$. **B.** $I=-10$. **C.** $I=5$. **D.** $I=10$.

**Lời giải**

**Chọn B**

+ Xét $J=\int_0^3 x\cdot f'\left(2x-4\right)\mathrm{d}x=8$.

Đặt $u=x$ và $\mathrm{d}v=f'\left(2x-4\right)\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}f\left(2x-4\right)\right)$, ta được $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$ và $v=\frac{1}{2}f\left(2x-4\right)$.

$$\Rightarrow J=\frac{1}{2}x.f\left(2x-4\right)\Big|_0^3-\frac{1}{2}\int_0^3 f\left(2x-4\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}f\left(2\right)-\frac{1}{2}\int_0^3 f\left(2x-4\right)\mathrm{d}x=3-\frac{1}{2}\int_0^2 f\left(2x-4\right)\mathrm{d}x.$$

Vì $J=8\Rightarrow 3-\frac{1}{2}\int_0^3 f\left(2x-4\right)\mathrm{d}x=8\Rightarrow\int_0^3 f\left(2x-4\right)\mathrm{d}x=-10$.

Đặt $2t=2x-4\Rightarrow 2\mathrm{d}t=2\mathrm{d}x\Leftrightarrow\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$

Đổi cận:

| $x$ | 0 | 3 |
|---|---|---|
| $t$ | $-2$ | 1 |

$$I_1=\int_{-2}^1 f\left(2t\right)\mathrm{d}t=\int_{-2}^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}x=-10.$$

Vậy $I=-10$.

**Câu 11:** **(KÊNH TRUYỀN HÌNH GIÁO DỤC QUỐC GIA VTV7 –2019)** Cho hàm $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[1;2\right]$ thỏa mãn $f\left(2\right)=0$, $\int_1^2\left(f'\left(x\right)\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{45}$ và $\int_1^2\left(x-1\right)f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{30}$. Tính $I=\int_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=-\frac{1}{36}$. **B.** $I=-\frac{1}{15}$. **C.** $I=\frac{1}{12}$. **D.** $I=-\frac{1}{12}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Xét: $E=\int_1^2\left(x-1\right)f\left(x\right)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=f\left(x\right)\\ \mathrm{d}v=\left(x-1\right)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\\ v=\frac{\left(x-1\right)^2}{2}\end{cases}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Rightarrow E=\dfrac{(x-1)^2}{2}.f(x)\Big|_1^2-\int_1^2\dfrac{(x-1)^2}{2}f'(x)\mathrm{d}x=-\int_1^2\dfrac{(x-1)^2}{2}f'(x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow -\int_1^2\dfrac{(x-1)^2}{2}f'(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{30}\Rightarrow\int_1^2(x-1)^2f'(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{15}.$ Ta có: $\int_1^2(x-1)^4\mathrm{d}x=\dfrac{1}{5}$ và $\int_1^2\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{45}.$

Ta tìm số $k$ để $\int_1^2\left(f'(x)-k(x-1)^2\right)^2\mathrm{d}x=0.$

$\int_1^2\left(f'(x)-k(x-1)^2\right)^2\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int_1^2\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x-2k\int_1^2f'(x).(x-1)^2\mathrm{d}x+k^2\int_1^2(x-1)^4\mathrm{d}x=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{45}-2k.\dfrac{1}{15}+k^2.\dfrac{1}{5}=0\Leftrightarrow k=\dfrac{1}{3}.$

Khi đó: $\int_1^2\left(f'(x)-\dfrac{1}{3}(x-1)^2\right)^2\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow f'(x)-\dfrac{1}{3}(x-1)^2=0\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{9}(x-1)^3+C.$

Mà $f(2)=0\Rightarrow C=\dfrac{-1}{9}\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{9}(x-1)^3-\dfrac{1}{9}\Rightarrow\int_1^2f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2\left[\dfrac{1}{9}(x-1)^3-\dfrac{1}{9}\right]\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{12}.$

**Câu 12:** **(NGUYỄN TRUNG THIÊN HÀ TĨNH)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;2]$, thỏa các điều kiện $f(2)=1$ và $\int_0^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}$. Giá trị của $\int_1^2\dfrac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x$:

**A.** 1. **B.** 2. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=x\end{cases}$

$\Rightarrow\int_0^2f(x)\mathrm{d}x=x.f(x)\Big|_0^2-\int_0^2x.f'(x)\mathrm{d}x=2-\int_0^2x.f'(x)\mathrm{d}x\Rightarrow-\int_0^2x.f'(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}-2=-\dfrac{4}{3}.$

Ta lại có: $\int_0^2\dfrac{1}{4}x^2\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{12}\Big|_0^2=\dfrac{2}{3}.$

Do đó: $\int_0^2\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x-\int_0^2x.f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^2\dfrac{1}{4}x^2\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{3}+\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\int_0^2\left[f'(x)-\dfrac{1}{2}x\right]^2\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow f'(x)-\dfrac{1}{2}x=0$ (vì $\int_0^2\left[f'(x)-\dfrac{1}{2}x\right]^2\mathrm{d}x\ge0$ , $\forall x\in[0;2]$)

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+C\Rightarrow f(2)=1+C\Leftrightarrow C=0.$

Vậy $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2\Rightarrow\int_1^2\dfrac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x=\int_1^2\dfrac{1}{4}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}x\Big|_1^2=\dfrac{1}{4}.$

□Tổng quát:

Khi đề bài cho biết giá trị $f(a)$, $f(b)$, $\int_a^b u(x).f'(x)\mathrm{d}x = h$, $\int_a^b \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = k$ (với $u(x)$ là một biểu thức chứa $x$ đã tường minh), để tìm $f(x)$ trước tiên ta đi tìm 2 số $\alpha, \beta$ sao cho $\int_a^b \left[f'(x)+\alpha.u(x)+\beta\right]^2 \mathrm{d}x = 0$, rồi suy ra $f'(x) = -\alpha.u(x) - \beta$, sau đó nguyên hàm hai vế để tìm $f(x)$.

**Bài tập tương tự**

**Vd 1:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn các điều kiện $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = 4$. Tính $J = \int_0^1 \left[f^3(x) + 2018x\right]\mathrm{d}x$.

**Giải:**

Ta có: $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = 2 - 0 = 2$.

Với $\alpha \in \mathbb{R}$, xét tích phân: $I = \int_0^1 \left[f'(x)+\alpha\right]^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x + 2\alpha\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \alpha^2 \mathrm{d}x = 4 + 2\alpha.2 + \alpha^2 = (\alpha+2)^2$.

Ta có: $I = 0 \Rightarrow \alpha = -2 \Rightarrow f'(x) = 2 \Rightarrow f(x) = 2x + C$.

Mà $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = 2x$.

Vậy $J = \int_0^1 \left[(2x)^3 + 2018x\right]\mathrm{d}x = \left(\frac{8}{4}x^4 + \frac{2018}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = 1011$.

**Vd 2:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = 1$ và $\int_0^1 \left[f(x)\right]^2 \mathrm{d}x = 4$. Tính giá trị của tích phân $\int_0^1 \left[f(x)\right]^3 \mathrm{d}x$.

**Giải:**

Ở đây các hàm xuất hiện dưới dấu tích phân là $\left[f(x)\right]^2, xf(x), f(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f(x)+\alpha x+\beta\right]^2$. Với mỗi số thực $\alpha, \beta$ ta có:

$$\int_0^1 \left[f(x)+\alpha x+\beta\right]^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[f(x)\right]^2 \mathrm{d}x + 2\int_0^1 (\alpha x+\beta) f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 (\alpha x+\beta)^2 \mathrm{d}x$$

$$= 4 + 2(\alpha+\beta) + \frac{\alpha^2}{3} + \alpha\beta + \beta^2.$$

Cần tìm $\alpha, \beta$ sao cho $\int_0^2 \left[f(x)+\alpha x+\beta\right]^2 \mathrm{d}x = 0$ hay $4 + 2(\alpha+\beta) + \frac{\alpha^2}{3} + \alpha\beta + \beta^2 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha^2 + (3\beta+6)\alpha + 3\beta^2 + 6\beta + 2 = 0$. Để tồn tại $\alpha$ thì:

$\Delta = (3\beta+6)^2 - 4(3\beta^2 + 6\beta + 2) \ge 0 \Leftrightarrow -3\beta^2 + 12\beta - 12 \ge 0$

$\Leftrightarrow -3(\beta-2)^2 \ge 0 \Leftrightarrow \beta = 2 \Rightarrow \alpha = -6$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vậy $\int_0^1 \left[ f(x)-6x+2 \right]^2 dx = 0 \Rightarrow f(x) = 6x-2,\ \forall x \in [0;1] \Rightarrow \int_0^1 \left[ f(x) \right]^3 = 10$

**Câu 13:** **(Thuan-Thanh-Bac-Ninh)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$ và $\left( f'(x) \right)^2 + 4\left(6x^2-1\right).f(x) = 40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4, \forall x \in [0;1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng?

**A.** $\frac{23}{15}$. **B.** $\frac{13}{15}$. **C.** $-\frac{17}{15}$. **D.** $-\frac{7}{15}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$\left( f'(x) \right)^2 + 4\left(6x^2-1\right).f(x) = 40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4$

$\Rightarrow \int_0^1 \left( f'(x) \right)^2 dx + \int_0^1 4\left(6x^2-1\right).f(x)dx = \int_0^1 \left(40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4\right)dx.\ (1)$

Xét $I = \int_0^1 4\left(6x^2-1\right).f(x)dx = \int_0^1 \left(24x^2-4\right) f(x)dx$.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \left(24x^2-4\right)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = 8x^3-4x \end{cases}$.

$\Rightarrow I = \left(8x^3-4x\right).f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \left(8x^3-4x\right).f'(x)dx = 4 - 2\int_0^1 \left(4x^3-2x\right).f'(x)dx.$

Do đó:

$(1) \Rightarrow \int_0^1 \left( f'(x) \right)^2 dx - 2\int_0^1 \left(4x^3-2x\right).f'(x)dx + \int_0^1 \left(4x^3-2x\right)^2 dx = \int_0^1 \left(56x^6 - 60x^4 + 36x^2 - 8\right)dx.$

$\Rightarrow \int_0^1 \left[ f'(x) - \left(4x^3-2x\right) \right]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = 4x^3-2x \Rightarrow f(x) = x^4 - x^2 + c.$

Mà $f(1)=1 \Rightarrow c=1 \Rightarrow f(x) = x^4 - x^2 + 1.$

Do đó $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(x^4 - x^2 + 1\right)dx = \frac{13}{15}$.

**Câu 14:** Cho hàm số $f(x)$ thỏa $f(0) = f(1) = 1$. Biết $\int_0^1 e^x \left[ f(x) + f'(x) \right]dx = ae + b$. Tính biểu thức $Q = a^{2018} + b^{2018}$.

**A.** $Q=8$. **B.** $Q=6$. **C.** $Q=4$. **D.** $Q=2$.

**Lời giải**

$A = \int_0^1 e^x \left[ f(x) + f'(x) \right]dx = \underbrace{\int_0^1 e^x f(x)dx}_{A_1} + \underbrace{\int_0^1 e^x f'(x)dx}_{A_2}$

$A_1 = \int_0^1 e^x f(x)dx$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Đặt $u=f(x)\Rightarrow du=f'(x)dx$, $dv=e^x dx$ chọn $v=e^x \Rightarrow A_1=e^x.f(x)\Big|_0^1-\underbrace{\int_0^1 e^x f'(x)dx}_{A_2}$

Vậy $A=e^x f(x)\Big|_0^1-A_2+A_2=e^x f(x)\Big|_0^1=e.f(1)-f(0)=e-1$

$\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}\Rightarrow a^{2018}+b^{2018}=1+1=2$

**Chọn D**

**Câu 15:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)-2018f(x)=2018.x^{2017}.e^{2018x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2018$. Tính giá trị $f(1)$.

**A.** $f(1)=2019e^{2018}$. **B.** $f(1)=2018.e^{-2018}$. **C.** $f(1)=2018.e^{2018}$. **D.** $f(1)=2017.e^{2018}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $f'(x)-2018f(x)=2018.x^{2017}.e^{2018x}\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)-2018.f(x)}{e^{2018x}}=2018.x^{2017}$

$\Leftrightarrow\int_0^1\dfrac{f'(x)-2018.f(x)}{e^{2018x}}dx=\int_0^1 2018.x^{2017}dx\ (1)$

Xets $I=\int_0^1\dfrac{f'(x)-2018.f(x)}{e^{2018x}}dx=\int_0^1 f'(x).e^{-2018x}dx-\int_0^1 2018.f(x).e^{-2018x}dx$

Xét $I_1=\int_0^1 2018.f(x).e^{-2018x}dx$. Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\dv=2018.e^{-2018x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\v=-e^{-2018x}\end{cases}$.

Do đó $I_1=f(x).\left(-e^{-2018x}\right)\Big|_0^1+\int_0^1 f'(x).e^{-2018x}dx\Rightarrow I=f(1).e^{-2018x}-2018$

Khi đó $(1)\Leftrightarrow f(1).e^{-2018x}-2018=x^{2018}\Big|_0^1\Rightarrow f(1)=2019.e^{2018}$.

**Câu 16:** Cho hàm số $y=f(x)$ với $f(0)=f(1)=1$. Biết rằng: $\int_0^1 e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx=ae+b$ Tính $Q=a^{2017}+b^{2017}$.

**A.** $Q=2^{2017}+1$. **B.** $Q=2$. **C.** $Q=0$. **D.** $Q=2^{2017}-1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\v=e^x\end{cases}$.

$\int_0^1 e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx=e^x f(x)\Big|_1^2-\int_0^1 e^x f'(x)dx+\int_0^1 e^x f'(x)dx=ef(1)-f(0)=e-1$.

Do đó $a=1$, $b=-1$.

Suy ra $Q=a^{2017}+b^{2017}=1^{2017}+(-1)^{2017}=0$.

Vậy $Q=0$.

**Câu 17:** Cho hai hàm số liên tục $f$ và $g$ có nguyên hàm lần lượt là $F$ và $G$ trên đoạn $[1;2]$. Biết rằng $F(1)=1$, $F(2)=4$, $G(1)=\dfrac{3}{2}$, $G(2)=2$ và $\int_1^2 f(x)G(x)dx=\dfrac{67}{12}$. Tính $\int_1^2 F(x)g(x)dx$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** $\frac{11}{12}$. **B.** $-\frac{145}{12}$. **C.** $-\frac{11}{12}$. **D.** $\frac{145}{12}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $\begin{cases} u = F(x) \\ dv = g(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f(x)\,\mathrm{d}x \\ v = G(x) \end{cases}$

$$\int_1^2 F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \left(F(x)G(x)\right)\Big|_1^2 - \int_1^2 f(x)G(x)\,\mathrm{d}x = F(2)G(2) - F(1)G(1) - \int_1^2 f(x)G(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= 4.2 - 1.\frac{3}{2} - \frac{67}{12} = \frac{11}{12}.$$

**Câu 18:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;2]$ và $\int_1^2 (x-1)f'(x)\,\mathrm{d}x = a$. Tính $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ theo $a$ và $b = f(2)$.

**A.** $b - a$. **B.** $a - b$. **C.** $a + b$. **D.** $-a - b$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $u = x - 1 \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$; $\mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x$ chọn $v = f(x)$.

$$\int_1^2 (x-1)f'(x)\,\mathrm{d}x = (x-1)f(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = f(2) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = b - \int_1^2 f(x).$$

Ta có $\int_1^2 (x-1)f'(x)\,\mathrm{d}x = a \Leftrightarrow b - \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = a \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = b - a$.

**Câu 19:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 16$, $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính tích phân $I = \int_0^1 x.f'(2x)\,\mathrm{d}x$.

**A.** $I = 13$. **B.** $I = 12$. **C.** $I = 20$. **D.** $I = 7$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = f'(2x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \frac{1}{2}f(2x) \end{cases}$.

Khi đó, $I = x.\frac{1}{2}f(2x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f(2) - \frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x = 8 - \frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x$.

Với $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = 2$.

Suy ra $I = 8 - \frac{1}{4}\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 8 - 1 = 7$.

**Câu 20:** Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{2};4\right)$ và $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = 3$, tính $I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \sin 2x.f'(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

**A.** $I = 10$. **B.** $I = -2$. **C.** $I = 1$. **D.** $I = -1$.

**Lời giải**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Chọn B**

Xét tích phân $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\sin 2x.f'(\sin x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0}2\sin x.f'(\sin x).\cos x\mathrm{d}x$.

Đặt: $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow t=-\dfrac{1}{2}\\ x=0\Rightarrow t=0\end{cases}$.

$\Rightarrow I=2\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0}t.f'(t)\mathrm{d}t$.

Đặt: $\begin{cases}u=2t\\ \mathrm{d}v=f'(t)\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2\mathrm{d}t\\ v=f(t)\end{cases}$.

$\Rightarrow I=2t.f(t)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0}-2\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0}f(t)\mathrm{d}t=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)-2\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0}f(t)\mathrm{d}t$.

□ Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $M\left(-\dfrac{1}{2};4\right)\Rightarrow f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=4$.

□ Hàm số $y=f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}\Rightarrow\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0}f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}f(x)\mathrm{d}x=3$.

Vậy $I=4-2.3=-2$.

**Câu 21:** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x.f(x)\mathrm{d}x=f(0)=1$. Tính $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f'(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=1$. **B.** $I=0$. **C.** $I=2$. **D.** $I=-1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\Rightarrow \mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=\sin x\mathrm{d}x\Rightarrow v=-\cos x\end{cases}$

$\Rightarrow\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x.f(x)\mathrm{d}x=\left(-\cos x.f(x)\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f'(x)\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x.f(x)\mathrm{d}x+\cos x.f(x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=1-1=0$.

**Câu 22:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x)+2018f(x)=2x\sin x$. Tính $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$?

**A.** $\dfrac{2}{2019}$. **B.** $\dfrac{2}{2018}$. **C.** $\dfrac{2}{1009}$. **D.** $\dfrac{4}{2019}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(f\left(-x\right)+2018f\left(x\right)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2x\sin x\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(-x\right)\mathrm{d}x+2018\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2x\sin x\mathrm{d}x\Leftrightarrow 2019\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2x\sin x\mathrm{d}x\ \ (1)$

+ Xét $P=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2x\sin x\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases}u=2x\\ \mathrm{d}v=\sin x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2\mathrm{d}x\\ v=-\cos x\end{cases}$

$P=2x.\left(-\cos x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=4$

Từ $(1)$ suy ra $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{4}{2019}$.

**Câu 23:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'\left(0\right).f'\left(2\right)\neq 0$ và $g\left(x\right)f'\left(x\right)=x\left(x-2\right)\mathrm{e}^{x}$. Tính giá trị của tích phân $I=\int\limits_{0}^{2}f\left(x\right).g'\left(x\right)\mathrm{d}x$?

**A.** $-4$. **B.** $\mathrm{e}-2$. **C.** $4$. **D.** $2-\mathrm{e}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $g\left(x\right)f'\left(x\right)=x\left(x-2\right)\mathrm{e}^{x}\Rightarrow g\left(0\right)=g\left(2\right)=0$ (vì $f'\left(0\right).f'\left(2\right)\neq 0$)

$I=\int\limits_{0}^{2}f\left(x\right).g'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}g\left(x\right)=\left(f\left(x\right).g\left(x\right)\right)\Big|_{0}^{2}-\int\limits_{0}^{2}g\left(x\right).f'\left(x\right)\mathrm{d}x=-\int\limits_{0}^{2}\left(x^{2}-2x\right)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=4$.

**Câu 24:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=3$, $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{f\left(x\right)}{\cos x}\mathrm{d}x=1$ và $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin x.\tan x.f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=2$. Tích phân $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng:

**A.** $4$. **B.** $\dfrac{2+3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{1+3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $6$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=\sin x\\ \mathrm{d}v=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\cos x\mathrm{d}x\\ v=f\left(x\right)\end{cases}$.

$I=\sin x.f\left(x\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-I_{1}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin x.\tan x.f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin^2 x.\frac{f\left(x\right)}{\cos x}\right]\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\left(1-\cos^2 x\right).\frac{f\left(x\right)}{\cos x}\right]\mathrm{d}x.$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{f\left(x\right)}{\cos x}\right]\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=1-I_1.$$

$$\Rightarrow I_1=-1\Rightarrow I=\frac{3\sqrt{2}}{2}+1=\frac{3\sqrt{2}+2}{2}.$$

**Câu 25:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f\left(2\right)=16$, $\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$

**A.** $I=12$. **B.** $I=112$. **C.** $I=28$. **D.** $I=144$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=2f\left(\frac{x}{2}\right)\end{cases}$.

Khi đó

$$I=\int_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=2xf\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^4-2\int_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=128-2I_1 \text{ với } I_1=\int_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x.$$

Đặt $u=\frac{x}{2}\Rightarrow \mathrm{d}x=2\mathrm{d}u$, khi đó $I_1=\int_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=2\int_0^2 f\left(u\right)\mathrm{d}u=2\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=8$.

Vậy $I=128-2I_1=128-16=112$.

**Câu 26:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm cấp hai $f''\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ thoả mãn $f\left(1\right)=f\left(0\right)=1$, $f'\left(0\right)=2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $\int_0^1 f''\left(x\right)\left(1-x\right)\mathrm{d}x=-2018$. **B.** $\int_0^1 f''\left(x\right)\left(1-x\right)\mathrm{d}x=-1$.

**C.** $\int_0^1 f''\left(x\right)\left(1-x\right)\mathrm{d}x=2018$. **D.** $\int_0^1 f''\left(x\right)\left(1-x\right)\mathrm{d}x=1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét $I=\int_0^1 f''\left(x\right)\left(1-x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(1-x\right)\mathrm{d}\left(f'\left(x\right)\right)$

Đặt $\begin{cases}u=1-x\\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}\left(f'\left(x\right)\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=-\mathrm{d}x\\ v=f'\left(x\right)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow I=\left(1-x\right)f'\left(x\right)\Big|_0^1+\int_0^1 f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\left[\left(1-1\right)f'\left(1\right)-f'\left(0\right)\right]+f\left(x\right)\Big|_0^1=-f'\left(0\right)+\left[f\left(1\right)-f\left(0\right)\right]$$

$$=-2018+\left(1-1\right)=-2018.$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 27:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$ và $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\, f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$. Tính $f(2018\pi)$.

**A.** $-1$. **B.** $0$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Bằng công thức tích phân từng phần ta có

$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x f(x)\mathrm{d}x=\left[\sin x f(x)\right]\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x f'(x)\mathrm{d}x$. Suy ra $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}$.

Hơn nữa ta tính được $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\left[\frac{2x-\sin 2x}{4}\right]\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{\pi}{4}$.

Do đó: $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x+2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x f'(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[f'(x)+\sin x\right]^2\mathrm{d}x=0$.

Suy ra $f'(x)=-\sin x$. Do đó $f(x)=\cos x+C$. Vì $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ nên $C=0$.

Ta được $f(x)=\cos x\Rightarrow f(2018\pi)=\cos(2018\pi)=1$.

**Câu 28:** Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$. Biết $f(0)=1$ và $f(x).f(2-x)=\mathrm{e}^{2x^2-4x}$, với mọi $x\in[0;2]$. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{2}\frac{\left(x^3-3x^2\right)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$.

**A.** $I=-\frac{16}{3}$. **B.** $I=-\frac{16}{5}$. **C.** $I=-\frac{14}{3}$. **D.** $I=-\frac{32}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Cách 1:** Theo giả thiết, ta có $f(x).f(2-x)=\mathrm{e}^{2x^2-4x}$ và $f(x)$ nhận giá trị dương nên

$\ln\left[f(x).f(2-x)\right]=\ln\mathrm{e}^{2x^2+4x}\Leftrightarrow\ln f(x)+\ln f(2-x)=2x^2-4x$.

Mặt khác, với $x=0$, ta có $f(0).f(2)=1$ và $f(0)=1$ nên $f(2)=1$.

Xét $I=\int\limits_{0}^{2}\frac{\left(x^3-3x^2\right)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$, ta có $I=\int\limits_{0}^{2}\left(x^3-3x^2\right).\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases}u=x^3-3x^2\\ \mathrm{d}v=\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\left(3x^2-6x\right)\mathrm{d}x\\ v=\ln f(x)\end{cases}$

Suy ra $I=\left[\left(x^3-3x^2\right)\ln f(x)\right]\Big|_0^2-\int\limits_{0}^{2}\left(3x^2-6x\right).\ln f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_{0}^{2}\left(3x^2-6x\right).\ln f(x)\mathrm{d}x\ (1)$.

Đến đây, đổi biến $x=2-t\Rightarrow\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Khi $x=0\to t=2$ và $x=2\to t=0$.

Ta có $I=-\int_2^0\left(3t^2-6t\right).\ln f\left(2-t\right)(-\mathrm{d}t)=-\int_0^2\left(3t^2-6t\right).\ln f\left(2-t\right)\mathrm{d}t$

Vì tích phân không phụ thuộc vào biến nên $I=-\int_0^2\left(3x^2-6x\right).\ln f\left(2-x\right)\mathrm{d}x\ \ (2).$

Từ $(1)$ và $(2)$ ta cộng vế theo vế, ta được $2I=-\int_0^2\left(3x^2-6x\right).\left[\ln f\left(x\right)+\ln f\left(2-x\right)\right]\mathrm{d}x$

Hay $I=-\frac{1}{2}\int_0^2\left(3x^2-6x\right).\left(2x^2-4x\right)\mathrm{d}x=-\frac{16}{5}.$

**Cách 2 (Trắc nghiệm)**

Chọn hàm số $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x^2-2x}$, khi đó:

$I=\int_0^2\frac{\left(x^3-3x^2\right).\mathrm{e}^{x^2-2x}.\left(2x-2\right)}{\mathrm{e}^{x^2-2x}}\mathrm{d}x=\int_0^2\left(x^3-3x^2\right).\left(2x-2\right)\mathrm{d}x=\frac{-16}{5}.$

**Câu 29:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ thỏa mãn $f\left(1\right)=0$ và $\int_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x+1\right)\mathrm{e}^x f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=2-\mathrm{e}.$ **B.** $I=\mathrm{e}-2.$ **C.** $I=\frac{\mathrm{e}}{2}.$ **D.** $I=\frac{\mathrm{e}-1}{2}.$

**Lời giải**

**Chọn B**

Xét $A=\int_0^1\left(x+1\right)\mathrm{e}^x f\left(x\right)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=f\left(x\right)\\ \mathrm{d}v=\left(x+1\right)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\\ v=x\mathrm{e}^x\end{cases}$

Suy ra $A=x\mathrm{e}^x f\left(x\right)\Big|_0^1-\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'\left(x\right)\mathrm{d}x=-\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'\left(x\right)\mathrm{d}x\Rightarrow\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1-\mathrm{e}^2}{4}$

Xét $\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2x}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}.$

Ta có $\int_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x+2\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int_0^1\left(f'\left(x\right)+x\mathrm{e}^x\right)^2\mathrm{d}x=0$

Suy ra $f'\left(x\right)+x\mathrm{e}^x=0\ \ \forall x\in\left[0;1\right]$ (do $\left(f'\left(x\right)+x\mathrm{e}^x\right)^2\ge 0\ \ \forall x\in\left[0;1\right]$)

$\Rightarrow f'\left(x\right)=-x\mathrm{e}^x\Rightarrow f\left(x\right)=\left(1-x\right)\mathrm{e}^x+C$

Do $f\left(1\right)=0$ nên $f\left(x\right)=\left(1-x\right)\mathrm{e}^x$

Vậy $I=\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(1-x\right)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\left(2-x\right)\mathrm{e}^x\Big|_0^1=\mathrm{e}-2.$

**Câu 30:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[1;2\right]$ thỏa mãn $\int_1^2\left(x-1\right)^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}$, $f\left(2\right)=0$ và $\int_1^2\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=7$. Tính tích phân $I=\int_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\frac{7}{5}.$ **B.** $I=-\frac{7}{5}.$ **C.** $I=-\frac{7}{20}.$ **D.** $I=\frac{7}{20}.$

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $u=f(x)\Rightarrow \mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v=(x-1)^2\mathrm{d}x\Rightarrow v=\dfrac{(x-1)^3}{3}$

Ta có $-\dfrac{1}{3}=\int\limits_1^2(x-1)^2\,f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{(x-1)^3}{3}.f(x)\Big|_1^2-\int\limits_1^2\dfrac{(x-1)^3}{3}f'(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}\int\limits_1^2(x-1)^3\,f'(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\limits_1^2(x-1)^3\,f'(x)\mathrm{d}x=1\Rightarrow-\int\limits_1^2 2.7(x-1)^3\,f'(x)\mathrm{d}x=-14$

Tính được $\int\limits_1^2 49(x-1)^6\mathrm{d}x=7\Rightarrow\int\limits_1^2\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x-\int\limits_1^2 2.7(x-1)^3\,f'(x)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 49(x-1)^6\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow\int\limits_1^2\left[7(x-1)^3-f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=0\Rightarrow f'(x)=7(x-1)^3\Rightarrow f(x)=\dfrac{7(x-1)^4}{4}+C.$

Do $f(2)=0\Rightarrow f(x)=\dfrac{7(x-1)^4}{4}-\dfrac{7}{4}.$

Vậy $I=\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left[\dfrac{7(x-1)^4}{4}-\dfrac{7}{4}\right]\mathrm{d}x=-\dfrac{7}{5}.$

**Câu 31:** **(THPT ĐÔ LƯƠNG 3 LẦN 2)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\int\limits_1^2(x-1)^2\,f(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{3}$, $f(2)=0$, $\int\limits_1^2\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=7$. Tính $I=\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\dfrac{7}{5}.$ **B.** $I=-\dfrac{7}{5}.$ **C.** $I=-\dfrac{7}{20}.$ **D.** $I=\dfrac{7}{20}.$

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=(x-1)^2\mathrm{d}x\end{cases}$ ta được $\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{1}{3}(x-1)^3\end{cases}$

Khi đó $\int\limits_1^2(x-1)^2\,f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}(x-1)^3\,f(x)\Big|_1^2-\dfrac{1}{3}\int\limits_1^2(x-1)^3\,f'(x)\mathrm{d}x.$

$\Rightarrow-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}\int\limits_1^2(x-1)^3\,f'(x)\mathrm{d}x.$

$\Rightarrow\int\limits_1^2(x-1)^3\,f'(x)\mathrm{d}x=1.$

Xét $\int\limits_1^2\left[f'(x)-k(x-1)^3\right]^2\mathrm{d}x=0\ \ (k\in\mathbb{R}).$

$\Leftrightarrow\int\limits_1^2\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x-2k\int\limits_1^2(x-1)^3\,f'(x)\mathrm{d}x+k^2\int\limits_1^2(x-1)^6\mathrm{d}x=0.$

$\Leftrightarrow 7-2k+\dfrac{k^2}{7}=0\Leftrightarrow k=7\Rightarrow f'(x)=7(x-1)^3.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{7(x-1)^4}{4}+C$.

Do $f(2)=0$ nên $C=-\dfrac{7}{4}\Rightarrow f(x)=\dfrac{7(x-1)^4}{4}-\dfrac{7}{4}$

Vậy $I=\dfrac{7}{4}\int_1^2\left[(x-1)^4-1\right]\mathrm{d}x=\dfrac{7}{4}\left[\dfrac{(x-1)^5}{5}-x\right]\Big|_1^2=-\dfrac{7}{5}$.

**Câu 32:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ và $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}}f^2(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{8}$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}}f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x=-\dfrac{\pi}{4}$. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{8}}f(2x)\mathrm{d}x$

**A.** $I=1$. **B.** $I=\dfrac{1}{2}$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\dfrac{1}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}}f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x=-\dfrac{\pi}{4}$. Đặt $\begin{cases}\sin 2x=u\\ f'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\cos 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}u\\ f(x)=v\end{cases}$, khi đó

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x=\sin 2x.f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\cos 2x\mathrm{d}x$

$=\sin\dfrac{\pi}{2}.f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin 0.f(0)-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\cos 2x\mathrm{d}x=-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\cos 2x\mathrm{d}x$.

Theo đề bài ta có $\int_0^{\frac{\pi}{4}}f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x=-\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\cos 2x\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{8}$.

Mặt khác ta lại có $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2x\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{8}$.

Do $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[f(x)-\cos 2x\right]^2\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[f^2(x)-2f(x).\cos 2x+\cos^2 2x\right]\mathrm{d}x=\left(\dfrac{\pi}{8}-2\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{8}\right)=0$ nên $f(x)=\cos 2x$.

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\cos 4x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{8}}=\dfrac{1}{4}$.

**Câu 33:** **(Chuyên Vinh Lần 3)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=0$ Biết $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\dfrac{9}{2}$ và $\int_0^1 f'(x)\cos\dfrac{\pi x}{2}\mathrm{d}x=\dfrac{3\pi}{4}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\dfrac{6}{\pi}$. **B.** $\dfrac{2}{\pi}$. **C.** $\dfrac{4}{\pi}$. **D.** $\dfrac{1}{\pi}$.

**Lời giải**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Chọn A**

Ta có: $\int_0^1 f(x)\sin\frac{\pi}{2}xdx=-\frac{2}{\pi}f(x).\cos\frac{\pi}{2}x\Big|_0^1+\frac{2}{\pi}\int_0^1 f'(x).\cos\frac{\pi}{2}xdx=\frac{3}{2}$

$\int_0^1(f(x)-3\sin\frac{\pi}{2}x)^2dx=\int_0^1 f^2(x)dx-6\int_0^1 f(x)\sin\frac{\pi}{2}xdx+9\int_0^1\sin^2\frac{\pi}{2}xdx=0$

Từ đây ta suy ra $f(x)=3\sin\frac{\pi}{2}x\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 3\sin\frac{\pi}{2}xdx=\frac{6}{\pi}$.

**Câu 34:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1)=0$. Biết $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$, $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $\pi$. **B.** $\frac{1}{\pi}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{3\pi}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $\begin{cases}u=\cos(\pi x)\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=-\pi\sin(\pi x)\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$.

Khi đó: $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x=\cos(\pi x)f(x)\Big|_0^1+\pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x$

$=-(f(1)+f(0))+\pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

**Cách 1:** Ta có

Tìm $k$ sao cho $\int_0^1[f(x)-k\sin(\pi x)]^2\mathrm{d}x=0$

Ta có: $\int_0^1[f(x)-k\sin(\pi x)]^2\mathrm{d}x=\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-2k\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x+k^2\int_0^1\sin^2(\pi x)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}-k+\frac{k^2}{2}=0\Leftrightarrow k=1$.

Do đó $\int_0^1[f(x)-\sin(\pi x)]^2\mathrm{d}x=0\Rightarrow f(x)=\sin(\pi x)$ (do $[f(x)-\sin(\pi x)]^2\geq 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$).

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$.

**Cách 2:** Sử dụng BĐT Holder.

$$\boxed{\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2\leq\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow f(x)=k.g(x),\ \forall x\in[a;b]$.

Áp dụng vào bài ta có $\frac{1}{4}=\left[\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x\right]^2\leq\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x.\int_0^1\sin^2(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$,

suy ra $f(x)=k.\sin(\pi x),\ k\in\mathbb{R}$.

Mà $\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,dx=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k\int_0^1\sin^2(\pi x)\,dx=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k=1\Rightarrow f(x)=\sin(\pi x)$

Vậy $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\sin(\pi x)\,dx=\frac{2}{\pi}$.

**Câu 35:** **(Thanh Chương Nghệ An Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;\pi]$ thỏa mãn: $\int_0^{\pi}[f'(x)]^2dx=\int_0^{\pi}\cos x.f(x)dx=\frac{\pi}{2}$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. Khi đó tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx$ bằng

**A.** $0$. **B.** $\frac{\pi}{2}+1$. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** $\frac{\pi}{2}-1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

*) Xét tích phân $I=\int_0^{\pi}\cos x.f(x)dx$.

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ dv=\cos x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\ v=\sin x\end{cases}$

$I=\sin x.f(x)\big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x.f'(x)dx=-\int_0^{\pi}\sin x.f'(x)dx$.

Theo giả thiết $I=\frac{\pi}{2}$, suy ra $\int_0^{\pi}\sin x.f'(x)dx=-\frac{\pi}{2}$.

*) Tìm số thực $k$ thỏa mãn $f'(x)+k.\sin x=0$. Khi đó $\int_0^{\pi}[f'(x)+k.\sin x]^2dx=0$.

$\Leftrightarrow\int_0^{\pi}[f'(x)]^2dx+\int_0^{\pi}2k\sin x.f'(x)dx+\int_0^{\pi}k^2\sin^2 xdx=0$

$\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}+2k.\left(-\frac{\pi}{2}\right)+k^2.\frac{\pi}{2}=0\Leftrightarrow k^2-2k+1=0\Leftrightarrow k=1$.

Từ đó, $f'(x)+\sin x=0\Rightarrow f'(x)=-\sin x\Rightarrow f(x)=\cos x+C$.

Do $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ nên $C=1$. Vậy $f(x)=\cos x+1$.

*) Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x+1)\,dx=(\sin x+x)\big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1+\frac{\pi}{2}$.

**Trắc nghiệm:**

Từ giả thiết $\int_0^{\pi}[f'(x)]^2dx=\frac{\pi}{2}$ và $\int_0^{\pi}\sin x.f'(x)dx=-\frac{\pi}{2}$ ta suy ra được $f'(x)=-\sin x$.

Từ đó giải tiếp như phần trên.

**Câu 36:** **(Sở Đà Nẵng 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1;1]$ và thỏa $f(1)=0$, $(f'(x))^2+4f(x)=8x^2+16x-8$ với mọi $x$ thuộc $[-1;1]$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)\,dx$ bằng

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** $-\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Cách 1.**

Đặt $I=\int_{-1}^{1}2f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Dùng tích phân từng phần, ta có: $\begin{cases}u=f\left(x\right)\\ \mathrm{d}v=2\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\\ v=2x+2\end{cases}$.

$I=\left(2x+2\right)f\left(x\right)\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\left(2x+2\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x=4f\left(1\right)-\int_{-1}^{1}\left(2x+2\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{1}\left(2x+2\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Ta có $\left(f'\left(x\right)\right)^2+4f\left(x\right)=8x^2+16x-8\Rightarrow\int_{-1}^{1}\left(f'\left(x\right)\right)^2\mathrm{d}x+2\int_{-1}^{1}2f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left(8x^2+16x-8\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int_{-1}^{1}\left(f'\left(x\right)\right)^2\mathrm{d}x-2\int_{-1}^{1}\left(2x+2\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\left(2x+2\right)^2\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left(8x^2+16x-8\right)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\left(2x+2\right)^2\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int_{-1}^{1}\left[f'\left(x\right)-\left(2x+2\right)\right]^2\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)=2x+2\Rightarrow f\left(x\right)=x^2+2x+C$, $C\in\mathbb{R}$.

Mà $f\left(1\right)=0\Rightarrow C=-3\Rightarrow f\left(x\right)=x^2+2x-3\Rightarrow\int_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\left(x^2+2x-3\right)\mathrm{d}x=-\frac{5}{3}$.

**Cách 2.**

Chọn $f\left(x\right)=ax^2+bx+c\ \left(a\neq0\right)$ (lý do: vế phải là hàm đa thức bậc hai).

$\Rightarrow f'\left(x\right)=2ax+b$.

Ta có:

$\left(f'\left(x\right)\right)^2+4f\left(x\right)=8x^2+16x-8\Rightarrow\left(2ax+b\right)^2+4\left(ax^2+bx+c\right)=8x^2+16x-8$

$\Leftrightarrow\left(4a^2+4a\right)x^2+\left(4ab+4b\right)x+b^2+4c=8x^2+16x-8$

$\Rightarrow\begin{cases}4a^2+4a=8\\ 4ab+4b=16\\ b^2+4c=-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\\ c=-3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=-2\\ b=-4\\ c=-6\end{cases}$.

Do $f\left(1\right)=0\Rightarrow a+b+c=0\Rightarrow a=1,\ b=2$ và $c=-3$.

Vậy $f\left(x\right)=x^2+2x-3\Rightarrow\int_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\left(x^2+2x-3\right)\mathrm{d}x=-\frac{5}{3}$.

**Câu 37:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ thỏa $f\left(1\right)=0$, $\int_{0}^{1}\left(f'\left(x\right)\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}$ và $\int_{0}^{1}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$. Tính $\int_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

**A.** $\frac{\pi}{2}$. **B.** $\pi$. **C.** $\frac{1}{\pi}$. **D.** $\frac{2}{\pi}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = \cos\dfrac{\pi x}{2}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{2}{\pi}\sin\dfrac{\pi x}{2} \end{cases}$

Do đó $\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2} f(x)\Big|_0^1 - \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) f'(x)\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}.$

Lại có: $\int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow I = \int_0^1 \left(-\frac{2}{\pi}.f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x - 2\left(-\frac{2}{\pi}\right)\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x$

$= \int_0^1 \left(-\frac{2}{\pi}f'(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{4}{\pi^2}\frac{\pi^2}{8} - \frac{2}{\pi}.\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = 0$

Vì $\left(-\frac{2}{\pi}f'(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2 \geq 0$ trên đoạn $[0;1]$ nên

$\int_0^1 \left(-\frac{2}{\pi}f'(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2 \mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{\pi}f'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$

Suy ra $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + C$ mà $f(1) = 0$ do đó $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right).$

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}.$

**Câu 38:** Xét hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(1) = 1$ và $f(2) = 4$. Tính $J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2}\right)\mathrm{d}x.$

**A.** $J = 1 + \ln 4.$ **B.** $J = 4 - \ln 2.$ **C.** $J = \ln 2 - \frac{1}{2}.$ **D.** $J = \frac{1}{2} + \ln 4.$

**Lời giải**

**Chọn D**

**Cách 1:** Ta có $J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{f'(x)}{x}\mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases} u = \dfrac{1}{x} \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = -\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$

$J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{x}.f(x)\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}f(2) - f(1) + \left(2\ln x + \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \ln 4.$

**Cách 2:** $J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$=\int_1^2\left(\frac{f(x)}{x}\right)'dx+\int_1^2\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\left(\frac{f(x)}{x}+2\ln|x|+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=\frac{1}{2}+\ln 4.$

**Cách 3:** ( Trắc nghiệm)

Chọn hàm số $f(x)=ax+b$. Vì $\begin{cases}f(1)=1\\f(2)=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=-2\end{cases}$, suy ra $f(x)=3x-2$.

Vậy $J=\int_1^2\left(\frac{5}{x}-\frac{3x-1}{x^2}\right)dx=\left(2\ln|x|-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=\ln 4+\frac{1}{2}$.

**Câu 39:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx=\int_0^1(x+1)e^x f(x)dx=\frac{e^2-1}{4}$ và $f(1)=0$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$

**A.** $\frac{e-1}{2}$. **B.** $\frac{e^2}{4}$. **C.** $e-2$. **D.** $\frac{e}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

- Tính: $I=\int_0^1(x+1)e^x f(x)dx=\int_0^1 xe^x f(x)dx+\int_0^1 e^x f(x)dx=J+K$.

Tính $K=\int_0^1 e^x f(x)dx$

Đặt $\begin{cases}u=e^x f(x)\\dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\left[e^x f(x)+e^x f'(x)\right]dx\\v=x\end{cases}$

$\Rightarrow K=\left(xe^x f(x)\right)\Big|_0^1-\int_0^1\left[xe^x f(x)+xe^x f'(x)\right]dx=-\int_0^1 xe^x f(x)dx-\int_0^1 xe^x f'(x)dx\ \left(\text{do } f(1)=0\right)$

$\Rightarrow K=-J-\int_0^1 xe^x f'(x)dx\Rightarrow I=J+K=-\int_0^1 xe^x f'(x)dx$.

- Kết hợp giả thiết ta được:

$\begin{cases}\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx=\frac{e^2-1}{4}\\-\int_0^1 xe^x f'(x)dx=\frac{e^2-1}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx=\frac{e^2-1}{4}\quad(1)\\2\int_0^1 xe^x f'(x)dx=-\frac{e^2-1}{2}\quad(2)\end{cases}$

- Mặt khác, ta tính được: $\int_0^1 x^2e^{2x}dx=\frac{e^2-1}{4}\quad(3)$.

- Cộng vế với vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được:

$\int_0^1\left(\left[f'(x)\right]^2+2xe^x f'(x)+x^2e^{2x}\right)dx=0\Leftrightarrow\int_o^1\left(f'(x)+xe^x\right)^2dx=0\Leftrightarrow\pi\int_o^1\left(f'(x)+xe^x\right)^2dx=0$

hay thể tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)+xe^x$, trục $Ox$, các đường thẳng $x=0$, $x=1$ khi quay quanh trục $Ox$ bằng $0$

$\Rightarrow f'(x)+xe^x=0\Leftrightarrow f'(x)=-xe^x$

$\Rightarrow f(x)=-\int xe^x dx=(1-x)e^x+C$.

- Lại do $f(1)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=(1-x)e^x$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (1-x)e^x dx=\left((1-x)e^x\right)\Big|_0^1+\int_0^1 e^x dx=-1+e^x\Big|_0^1=e-2.$

Vậy $\int_0^1 f(x)dx=e-2.$

**Câu 40:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=7$ và $\int_0^1 x^2 f(x)dx=\frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

**A.** $-\frac{7}{5}$. **B.** 1. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Cách 1:** Tính: $\int_0^1 x^2 f(x)dx$. Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ dv=x^2dx \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} du=f'(x)dx \\ v=\frac{x^3}{3} \end{cases}$.

Ta có: $\int_0^1 x^2 f(x)dx=\frac{x^3 f(x)}{3}\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3.f'(x)dx$

$=\frac{1.f(1)-0.f(0)}{3}-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3.f'(x)dx=-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3.f'(x)dx.$

Mà $\int_0^1 x^2 f(x)dx=\frac{1}{3}\Rightarrow -\frac{1}{3}\int_0^1 x^3.f'(x)dx=\frac{1}{3}\Rightarrow \int_0^1 x^3.f'(x)dx=-1.$

Ta có $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=7$ (1).

$\int_0^1 x^6 dx=\frac{x^7}{7}\Big|_0^1=\frac{1}{7}\Rightarrow \int_0^1 49x^6 dx=\frac{1}{7}.49=7$ (2).

$\int_0^1 x^3.f'(x)dx=-1\Rightarrow \int_0^1 14x^3.f'(x)dx=-14$ (3).

Cộng hai vế (1) (2) và (3) suy ra $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx+\int_0^1 49x^6 dx+\int_0^1 14x^3.f'(x)dx=7+7-14=0.$

$\Rightarrow \int_0^1 \left\{[f'(x)]^2+14x^3 f'(x)+49x^6\right\}dx=0\Rightarrow \int_0^1 [f'(x)+7x^3]^2 dx=0.$

Do $[f'(x)+7x^3]^2\ge 0\Rightarrow \int_0^1 [f'(x)+7x^3]^2 dx\ge 0$. Mà $\int_0^1 [f'(x)+7x^3]^2 dx=0\Rightarrow f'(x)=-7x^3.$

$f(x)=-\frac{7x^4}{4}+C$. Mà $f(1)=0\Rightarrow -\frac{7}{4}+C=0\Rightarrow C=\frac{7}{4}.$

Do đó $f(x)=-\frac{7x^4}{4}+\frac{7}{4}.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(-\frac{7x^4}{4}+\frac{7}{4}\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{7x^5}{20}+\frac{7}{4}x\right)\Big|_0^1=\frac{7}{5}$.

**Cách 2:** Tương tự như trên ta có: $\int_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=-1$

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz, ta có:

$$7=7\left(\int_0^1 x^3f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\le 7\left(\int_0^1\left(x^3\right)^2\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\right)=7\cdot\frac{1}{7}\cdot\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $f'(x)=ax^3$, với $a\in\mathbb{R}$.

Ta có $\int_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=-1\Rightarrow\int_0^1 x^3.ax^3\mathrm{d}x=-1\Rightarrow\frac{ax^7}{7}\Big|_0^1=-1\Rightarrow a=-7$.

Suy ra $f'(x)=-7x^3\Rightarrow f(x)=-\frac{7x^4}{4}+C$, mà $f(1)=0$ nên $C=\frac{7}{4}$

Do đó $f(x)=\frac{7}{4}\left(1-x^4\right)\forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(-\frac{7x^4}{4}+\frac{7}{4}\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{7x^5}{20}+\frac{7}{4}x\right)\Big|_0^1=\frac{7}{5}$.

**Chú ý**: Chứng minh bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Khi đó, ta có $\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)$.

**Chứng minh:**

Trước hết ta có tính chất:

Nếu hàm số $h(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x\ge 0$

Xét tam thức bậc hai $\left[\lambda f(x)+g(x)\right]^2=\lambda^2f^2(x)+2\lambda f(x)g(x)+g^2(x)\ge 0$, với mọi $\lambda\in\mathbb{R}$

Lấy tích phân hai vế trên đoạn $[a;b]$ ta được

$\lambda^2\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2\lambda\int_a^b f(x)\mathrm{g}(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\ge 0$, với mọi $\lambda\in\mathbb{R}$ $(*)$

Coi $(*)$ là tam thức bậc hai theo biến $\lambda$ nên ta có $\Delta'\le 0$

$$\Leftrightarrow\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^2-\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)\text{ (đpcm)}$$

**Câu 41:** **(CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ HÒA BÌNH LẦN 4 NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ với $f(0)=f(1)=1$. Biết rằng $\int_0^1 \mathrm{e}^x\left[f(x)+f'(x)\right]\mathrm{d}x=a\mathrm{e}+b$, $a,b\in\mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $a^{2019}+b^{2019}$ bằng

**A.** $2^{2018}+1$. **B.** $2$. **C.** $0$. **D.** $2^{2018}-1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Cách 1:**

Ta có $\int_0^1 \mathrm{e}^x\left[f(x)+f'(x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\left[\mathrm{e}^x f(x)\right]'\mathrm{d}x=\left[\mathrm{e}^x f(x)\right]\Big|_0^1=\mathrm{e}.f(1)-f(0)=\mathrm{e}-1.$

Theo đề bài $\int_0^1 \mathrm{e}^x\left[f(x)+f'(x)\right]\mathrm{d}x=a\mathrm{e}+b$, $a$, $b\in\mathbb{R}$ suy ra $a=1$, $b=-1$.

Do đó $a^{2019}+b^{2019}=1^{2019}+(-1)^{2019}=0$.

**Cách 2:**

Ta có $\int_0^1 \mathrm{e}^x\left[f(x)+f'(x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $u=f(x)$, $\mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$; ta có $\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x$, $v=\mathrm{e}^x$.

Khi đó, $\int_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x=\left[\mathrm{e}^x f(x)\right]\Big|_0^1-\int_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x=\left[\mathrm{e}^x f(x)\right]\Big|_0^1$

$\Rightarrow\int_0^1 \mathrm{e}^x\left[f(x)+f'(x)\right]\mathrm{d}x=\left[\mathrm{e}^x f(x)\right]\Big|_0^1=\mathrm{e}.f(1)-f(0)=\mathrm{e}-1.$

Theo đề bài $\int_0^1 \mathrm{e}^x\left[f(x)+f'(x)\right]\mathrm{d}x=a\mathrm{e}+b$, $a$, $b\in\mathbb{R}$ suy ra $a=1$, $b=-1$.

Do đó $a^{2019}+b^{2019}=1^{2019}+(-1)^{2019}=0$.

**Câu 42:** **(Đoàn Thượng)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1)=0$.

Biết $\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{1}{2}$, $\int_0^1 f'(x)cos(\pi x)dx=\frac{\pi}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

**A.** $\pi$. **B.** $\frac{3\pi}{2}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$ **D.** $\frac{1}{\pi}$

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $I_1=\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)dx=\frac{\pi}{2}$.

Đặt $u=\cos(\pi x)\Rightarrow du=-\pi\sin(\pi x)$, $dv=f'(x)dx$ chọn $v=f(x)$.

$\Rightarrow I_1=f(x)\cos(\pi x)\Big|_0^1+\int_0^1\pi f(x)\sin(\pi x)dx=-f(1)-f(0)+\pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx=\frac{\pi}{2}.$

$\Rightarrow\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx=\frac{1}{2}.$

Ta có $I_2=\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{1}{2}\Rightarrow I_1=I_2\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx=\int_0^1 f^2(x)dx.$

$\Leftrightarrow\int_0^1\left[f^2(x)-f(x)\sin(\pi x)\right]dx=0\Leftrightarrow f^2(x)-f(x)\sin(\pi x)=0\Leftrightarrow f(x)\left[f(x)-\sin(\pi x)\right]=0.$

$\Leftrightarrow f(x)=0$ hoặc $f(x)-\sin(\pi x)=0$. Vì $I_1\neq 0$ và $I_2\neq 0$ nên $f(x)=0$ loại.

$\Leftrightarrow f(x)-\sin(\pi x)=0\Leftrightarrow f(x)=\sin(\pi x).$

$\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\sin(\pi x)dx=-\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 43:** **(Chuyên Vinh Lần 3).** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

**A.** $\frac{7}{5}$. **B.** $1$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** $4$.

**Lời giải**

**Chọn A**

*Nhận xét*

***- Ý tưởng sáng tác bài toán giống câu 50 trong đề minh họa của BGD năm 2018. Vì thầy Nguyễn Việt Hải phân tích quá hay nên tôi trích dẫn lại nguyên văn nhận xét và ý tưởng đó***

Từ giả thiết: $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^1 3x^2 f(x) dx = 1$.

Tính: $I = \int_0^1 3x^2 f(x) dx$.

Đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = 3x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = x^3 \end{cases}$.

Ta có:

$I = \int_0^1 3x^2 f(x) dx = x^3 f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x^3 . f'(x) dx = 1.f(1) - 0.f(0) - \int_0^1 x^3 . f'(x) dx = -\int_0^1 x^3 . f'(x) dx$.

Mà: $\int_0^1 3x^2 f(x) dx = 1 \Rightarrow 1 = -\int_0^1 x^3 . f'(x) dx$

$\Leftrightarrow \int_0^1 x^3 . f'(x) dx = -1 \Leftrightarrow 7\int_0^1 x^3 . f'(x) dx = -7 \Leftrightarrow \int_0^1 7x^3 . f'(x) dx = -\int_0^1 [f'(x)]^2 dx$, (theo giả thiết: $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$).

$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(7x^3 . f'(x) + [f'(x)]^2\right) dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x)\left[7x^3 + f'(x)\right] dx = 0$

$\Rightarrow 7x^3 + f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -7x^3 \Rightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + C$.

Với $f(1) = 0 \Rightarrow -\frac{7}{4}.1^4 + C = 0 \Rightarrow C = \frac{7}{4}$.

Khi đó: $f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4}$.

Vậy: $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4}\right) dx = -\frac{7}{4}\left(\frac{x^5}{5} - x\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{5}$.

***PHÂN TÍCH***

$\int_0^1 x^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) d\frac{x^3}{3} = f(x)\frac{x^3}{3}|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} df(x) = -\frac{1}{3}\int_0^1 x^3 . f'(x) dx$

*Từ đây, chúng ta quan sát giả thiết bài toán: Ta thấy xuất hiện* $[f'(x)]^2$ *và* $x^3 . f'(x)$

*Nghĩ ngay đến hằng đẳng thức* $[f'(x) + ax^3]^2$, *như vậy số* $a = ?$ *tương ứng với bài toán?*

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$+\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$

$+\int_0^1 2ax^3.f'(x)dx = -2a$

$+\int_0^1 (ax^3)^2 dx = \frac{a^2}{7}$

Do đó số a chọn tương ứng là $\int_0^1 [f'(x)+ax^3]^2 dx = 7-2a+\frac{a^2}{7} = 0 \Leftrightarrow a = 7$.

□. Suy ra $f'(x) = -7x^3 \Rightarrow f(x) = \frac{-7x^4}{4} + \frac{7}{4}$.

Vậy đáp chọn: A

□***NHẬN XÉT:***

□*Vì đây là trắc nghiệm chỉ cần ĐS đúng do đó ta sử dụng kỹ thuật đồng nhất suy ra đáp số dễ dàng.*

$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và $\int_0^1 (-7x^3) f'(x)dx = 7$. Vì trắc nghiệm nên đồng nhất hai biểu thức dưới dấu tích phân. Suy ra $f'(x) = -7x^3 \Rightarrow f(x) = \frac{-7x^4}{4} + \frac{7}{4} \Rightarrow A$.

□Hướng tiếp cận khác theo con đường BĐT.

+ Quan sát giả thiết bài toán: $f(1) = 0, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{1}{3}$.

+ Ta nghĩ đến đánh giá bằng BĐT: Thật vậy sử dụng kiến thức dấu tam thức bậc hai. Chúng ta có kết quả BĐT Cauchy – Schawz

$t^2\int_a^b f^2(x)dx - 2t\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx = \int_a^b [t.f(x)-g(x)]^2 dx \ge 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

**Suy ra:** BĐT Cauchy – Schawz

$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f(x)^2 dx.\int_a^b g(x)^2 dx$

Do đó ta có hướng giải bài toán trên:

$\frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)d\frac{x^3}{3} = f(x)\frac{x^3}{3}|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3}df(x) = -\frac{1}{3}\int_0^1 x^3.f'(x)dx$.

Ta suy ra: $\frac{1}{9} = \left(\frac{-1}{3}\int_0^1 x^3 f'(x)dx\right)^2 \le \frac{1}{9}\int_0^1 (x^3)^2 dx \int (f'(x))^2 dx = \frac{1}{9}$.

Tương đương $f'(x) = k.x^3$

□***Ý TƯỞNG SÁNG TẠO ĐỀ***

Tạo hằng tích phân có dạng đẳng thức: $\int_0^a [A+B]^2 dx = 0$ Hoặc $\int_0^a [A+B+C]^2 dx = 0 \ldots$

**Chọn A**, *A, B thích hợp tương ứng ta có bài toán.* $0 = \int_0^a [A+B]^2 dx = \int_0^a A^2 dx + \int_0^a 2A.Bdx + \int_0^a B^2 dx$

□***MỘT SỐ BÀI TOÁN TƯƠNG TỰ***

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 44:** **(Chuyên Vinh Lần 3).** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=4$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 36$ và $\int_0^1 x.f(x)dx = \frac{1}{5}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

**A.** $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $4$. **D.** $\frac{2}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Từ giả thiết: $\int_0^1 x.f(x)dx = \frac{1}{5} \Rightarrow \int_0^1 5x.f(x)dx = 1$.

Tính: $I = \int_0^1 5x.f(x)dx$.

Đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = 5xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \frac{5}{2}x^2 \end{cases}$.

Ta có: $I = \int_0^1 5x.f(x)dx = \frac{5}{2}x^2.f(x)\Big|_0^1 - \frac{5}{2}\int_0^1 x^2.f'(x)dx$

$= \frac{5}{2}.f(1) - \frac{5}{2}\int_0^1 x^2.f'(x)dx = 10 - \frac{5}{2}\int_0^1 x^2.f'(x)dx$, (vì $f(1)=4$)

Mà: $I = \int_0^1 5x.f(x)dx = 1 \Rightarrow 1 = 10 - \frac{5}{2}\int_0^1 x^2.f'(x)dx \Leftrightarrow \int_0^1 x^2.f'(x)dx = \frac{18}{5}$

$\Leftrightarrow 10\int_0^1 x^2.f'(x)dx = 36 \Leftrightarrow 10\int_0^1 x^2.f'(x)dx = \int_0^1 [f'(x)]^2 dx$, (theo giả thiết: $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 36$)

$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[10x^2.f'(x) - [f'(x)]^2\right]dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x)\left[10x^2 - f'(x)\right]dx = 0$

$\Rightarrow 10x^2 - f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 10x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{10x^3}{3} + C$

Với $f(1)=4 \Rightarrow 4 = \frac{10.1}{3} + C \Rightarrow C = \frac{2}{3}$.

Khi đó: $f(x) = \frac{10x^3}{3} + \frac{2}{3}$.

Vậy: $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{10x^3}{3} + \frac{2}{3}\right)dx = \left(\frac{5x^4}{6} + \frac{2}{3}x\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}$.

**Câu 45:** **(Chuyên Vinh Lần 3)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $f(2)=3$, $\int_0^2 [f'(x)]^2 dx = 4$ và $\int_0^2 x^2 f(x)dx = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^2 f(x)dx$ bằng

**A.** $\frac{2}{115}$. **B.** $\frac{297}{115}$. **C.** $\frac{562}{115}$. **D.** $\frac{266}{115}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Từ giả thiết: $\int_0^2 x^2 f(x)dx = \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^2 3x^2 f(x)dx = 1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Tính: $I=\int_0^2 3x^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt: $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=3x^2\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=x^3\end{cases}$.

Ta có: $I=\int_0^2 3x^2 f(x)\mathrm{d}x=x^3.f(x)\Big|_0^2-\int_0^2 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=24-\int_0^2 x^3.f'(x)\mathrm{d}x$, (vì $f(2)=3$)

Mà: $I=\int_0^2 3x^2 f(x)\mathrm{d}x=1\Rightarrow 1=24-\int_0^2 x^3.f'(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int_0^2 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=23\Leftrightarrow\frac{4}{23}\int_0^2 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=4$

$\Leftrightarrow\frac{4}{23}\int_0^2 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$, (theo giả thiết: $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=4$)

$\Leftrightarrow\int_0^2\left[\frac{4}{23}x^3.f'(x)-\left[f'(x)\right]^2\right]\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int_0^2 f'(x)\left[\frac{4}{23}x^3-f'(x)\right]\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow\frac{4}{23}x^3-f'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=\frac{4}{23}x^3\Rightarrow f(x)=\frac{1}{23}x^4+C$

Với $f(2)=3\Rightarrow 3=\frac{16}{23}+C\Rightarrow C=\frac{53}{23}$.

Khi đó: $f(x)=\frac{1}{23}x^4+\frac{53}{23}$.

Vậy $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\left(\frac{1}{23}x^4+\frac{53}{23}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{115}x^5+\frac{53}{23}x\right)\Big|_0^2=\frac{562}{115}$.

**Câu 46:** **(Chuyên Vinh Lần 3).** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=4$, $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=5$ và $\int_0^1 x.f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\frac{15}{19}$. **B.** $\frac{17}{4}$. **C.** $\frac{17}{18}$. **D.** $\frac{15}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Tính: $I=\int_0^1 x.f(x)\mathrm{d}x$. Đặt: $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{2}x^2\end{cases}$

Ta có: $I=\frac{1}{2}x^2.f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x=2-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$, (vì $f(1)=4$).

Mà: $\int_0^1 x.f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{1}{2}=2-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x=5$, (theo giả thiết: $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=5$) $\Leftrightarrow\int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int_0^1\left(x^2 f'(x)-\left[f'(x)\right]^2\right)\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int_0^1 f'(x).\left[x^2-f'(x)\right]\mathrm{d}x=0$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Rightarrow x^2 - f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$.

Với $f(1) = 4 \Rightarrow C = \frac{11}{3}$.

Khi đó: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{11}{3}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{11}{3}\right)dx = \left(\frac{1}{12}x^4 + \frac{11}{3}x\right)\Big|_0^1 = \frac{15}{4}$.

**Câu 47:** **(Chuyên Vinh Lần 3).** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $f(2) = 6$ $\int_0^2 [f'(x)]^2\,dx = 7$ và $\int_0^2 x.f(x)\,dx = \frac{17}{2}$. Tích phân $\int_0^2 f(x)\,dx$ bằng

**A.** 8. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 5.

**Lời giải**

**Chọn A**

Tính: $I = \int_0^2 x.f(x)\,dx$.

Đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)\,dx \\ v = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

Ta có: $I = \frac{1}{2}x^2.f(x)\Big|_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 f'(x)\,dx = 12 - \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 f'(x)\,dx$, (vì $f(2) = 6$).

Theo giả thiết: $\int_0^2 x.f(x)\,dx = \frac{17}{2} \Rightarrow \frac{17}{2} = 12 - \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 f'(x)\,dx$

$\Leftrightarrow \int_0^2 x^2 f'(x)\,dx = 7$

$\Leftrightarrow \int_0^2 x^2 f'(x)\,dx = \int_0^2 [f'(x)]^2\,dx$

$\Leftrightarrow \int_0^2 \left(x^2 f'(x) - [f'(x)]^2\right)dx = 0$

$\Leftrightarrow \int_0^2 f'(x).[x^2 - f'(x)]\,dx = 0$

$\Rightarrow x^2 - f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$.

Với $f(2) = 6 \Rightarrow C = \frac{10}{3}$.

Khi đó: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{10}{3}$.

Vậy $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{10}{3}\right)dx = \left(\frac{1}{12}x^4 + \frac{10}{3}x\right)\Big|_0^2 = 8$.

**Câu 48:** **(Chuyên Vinh Lần 3)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;3]$ thỏa mãn $f(3) = 6$ $\int_0^3 [f'(x)]^2\,dx = 2$ và $\int_0^3 x^2.f(x)\,dx = \frac{154}{3}$. Tích phân $\int_0^3 f(x)\,dx$ bằng

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** $\frac{53}{5}$. **B.** $\frac{117}{20}$. **C.** $\frac{153}{5}$. **D.** $\frac{13}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Tính $I=\int_0^3 x^2.f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=f\left(x\right)\\ \mathrm{d}v=x^2\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{3}x^3\end{cases}$.

Ta có $I=\frac{1}{3}x^3.f\left(x\right)\Big|_0^3-\frac{1}{3}\int_0^3 x^3f'\left(x\right)\mathrm{d}x=54-\frac{1}{3}\int_0^3 x^3f'\left(x\right)\mathrm{d}x$, (vì $f\left(3\right)=6$).

Theo giả thiết: $\int_0^3 x^2.f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{154}{3}\Rightarrow\frac{154}{3}=54-\frac{1}{3}\int_0^3 x^3f'\left(x\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int_0^3 x^3f'\left(x\right)\mathrm{d}x=8\Leftrightarrow\int_0^3 x^3f'\left(x\right)\mathrm{d}x=4\int_0^3\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_0^3\left(x^3f'\left(x\right)-4\left[f'\left(x\right)\right]^2\right)\mathrm{d}x=0$

$\Leftrightarrow\int_0^3 f'\left(x\right)\left[x^3-4f'\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=0$.

$\Rightarrow x^3-4f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)=\frac{x^3}{4}\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{x^4}{16}+C$.

Với $f\left(3\right)=6\Rightarrow C=\frac{15}{16}$.

Khi đó: $f\left(x\right)=\frac{x^4}{16}+\frac{15}{16}$.

Vậy $\int_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^3\left(\frac{1}{16}x^4+\frac{15}{16}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{80}x^5+\frac{15}{16}x\right)\Big|_0^3=\frac{117}{20}$.

**Câu 49:** **(Chuyên Vinh Lần 3)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ thỏa mãn $f\left(1\right)=2$, $\int_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=8$ và $\int_0^1 x^3.f\left(x\right)\mathrm{d}x=10$. Tích phân $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $-\frac{2}{285}$. **B.** $\frac{194}{95}$. **C.** $\frac{116}{57}$. **D.** $\frac{584}{285}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Tính: $I=\int_0^1 x^3.f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Đặt: $\begin{cases}u=f\left(x\right)\\ \mathrm{d}v=x^3\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{4}x^4\end{cases}$.

Ta có: $I=\frac{1}{4}x^4.f\left(x\right)\Big|_0^1-\frac{1}{4}\int_0^1 x^4f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\int_0^1 x^4f'\left(x\right)\mathrm{d}x$, (vì $f\left(1\right)=2$).

Theo giả thiết: $\int_0^1 x^3.f\left(x\right)\mathrm{d}x=10\Rightarrow\int_0^1 x^4f'\left(x\right)\mathrm{d}x=-38$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Leftrightarrow 8.\int_0^1 x^4 f'(x)\mathrm{d}x = -38.8 \Leftrightarrow 8.\int_0^1 x^4 f'(x)\mathrm{d}x = -38.\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(8x^4 f'(x) + 38\left[f'(x)\right]^2\right)\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x).\left[8x^4 + 38f'(x)\right]\mathrm{d}x = 0$

$\Rightarrow 8x^4 + 38f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{4}{19}x^4 \Rightarrow f(x) = -\frac{4}{95}x^5 + C.$

Với $f(1) = 2 \Rightarrow C = \frac{194}{95}.$

Khi đó: $f(x) = -\frac{4}{95}x^5 + \frac{194}{95}.$

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-\frac{4}{95}x^5 + \frac{194}{95}\right)\mathrm{d}x = \left(-\frac{2}{285}x^6 + \frac{194}{95}x\right)\Big|_0^1 = \frac{116}{57}.$

**Câu 50:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 1$, $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = 9$ và $\int_0^1 x^3 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** $\frac{6}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = 9 \ (1)$

- Tính $\int_0^1 x^3 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = x^3.\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = \frac{x^4}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \int_0^1 x^3 f(x)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^4}{4}.f(x)\right)\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 x^4.f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\int_0^1 x^4.f'(x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \int_0^1 x^4.f'(x)\mathrm{d}x = -1 \Rightarrow 18\int_0^1 x^4.f'(x)\mathrm{d}x = -18 \ (2)$

- Lại có: $\int_0^1 x^8\mathrm{d}x = \frac{x^9}{9}\Big|_0^1 = \frac{1}{9} \Rightarrow 81\int_0^1 x^8\mathrm{d}x = 9 \ (3)$

- Cộng vế với vế các đẳng thức $(1)$, $(2)$ và $(3)$ ta được:

$\int_0^1 \left[\left[f'(x)\right]^2 + 18x^4.f'(x) + 81x^8\right]\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x) + 9x^4\right]\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \pi.\int_0^1 \left[f'(x) + 9x^4\right]\mathrm{d}x = 0$

Hay thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x) + 9x^4$, trục hoành $Ox$, các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$ khi quay quanh $Ox$ bằng 0

$\Rightarrow f'(x) + 9x^4 = 0 \Rightarrow f'(x) = -9x^4 \Rightarrow f(x) = \int f'(x).\mathrm{d}x = -\frac{9}{5}x^4 + C.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Lại do $f(1)=1\Rightarrow C=\frac{14}{5}\Rightarrow f(x)=-\frac{9}{5}x^5+\frac{14}{5}$

$\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(-\frac{9}{5}x^5+\frac{14}{5}\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{3}{10}x^6+\frac{14}{5}x\right)\Big|_0^1=\frac{5}{2}$.

**Câu 51:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0,\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx=\frac{1}{11}$ và $\int_0^1 x^4f(x)dx=-\frac{1}{55}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

**A.** $\frac{-1}{7}$ **B.** $\frac{1}{7}$ **C.** $\frac{-1}{55}$ **D.** $\frac{1}{11}$

**Lời giải:**

$\int_0^1 x^4f(x)dx=\left[\frac{x^5}{5}f(x)\right]\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^5}{5}f'(x)dx$. Suy ra $\int_0^1 x^5f'(x)dx=\frac{1}{11}$. Hơn nữa ta dễ dàng tính được $\int_0^1\left(x^5\right)^2dx=\frac{1}{11}$. Do đó $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx-2\int_0^1 x^5f'(x)dx+\int_0^1\left(x^5\right)^2dx=0$

$\Leftrightarrow\int_0^1\left[f'(x)-x^5\right]^2dx=0$.

Suy ra $f'(x)=x^5$, do đó $f(x)=\frac{1}{6}x^6+C$. Vì $f(1)=0$ nên $C=-\frac{1}{6}$. Vậy $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{x^6-1}{6}dx=\frac{-1}{7}$.

**Câu 52:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f(1)=\frac{3}{2}$; $\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{6}$ và $\int_0^1(x-1)\sqrt{1+\frac{x}{x-2}\left(f'(x)\right)^2}dx=-\frac{1}{3}$. Tính tích phân $\int_0^1 f^2(x)dx=?$

**A.** $\frac{7}{3}$ **B.** $\frac{8}{15}$ **C.** $\frac{53}{60}$ **D.** $\frac{203}{60}$

**Lời giải:**

Sử dụng tích phân từng phần ta có: $\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{6}=f(1)-\int_0^1 xf'(x)dx\Rightarrow\int_0^1 xf'(x)dx=\frac{2}{3}$.

Mặt khác: $2(1-x)\sqrt{1+\frac{x}{x-2}\left(f'(x)\right)^2}\le(1-x)^2+1+\frac{x}{x-2}\left(f'(x)\right)^2$.

Tích phân hai vế ta $\Rightarrow\frac{2}{3}\le\frac{4}{3}+\int_0^1\frac{x}{x-2}\left(f'(x)\right)^2dx\Rightarrow\int_0^1\frac{x}{2-x}\left(f'(x)\right)^2dx\le\frac{2}{3}$.

Áp dụng Holder: $\left(\int_0^1 xf'(x)dx\right)^2=\frac{4}{9}=\left(\int_0^1\sqrt{x(2-x)}\sqrt{\frac{x}{2-x}}f'(x)dx\right)^2\le\int_0^1 x(2-x)dx\int_0^1\frac{x}{2-x}\left(f'(x)\right)^2dx$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Do vậy $\Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{2-x}\left(f'(x)\right)^2 dx \geq \frac{2}{3}$ nên dấu bằng

$\Leftrightarrow f'(x) = 2-x \Rightarrow f(x) = 2x - \frac{x^2}{2} \Rightarrow \int_0^1 f^2(x)dx = \frac{53}{60}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

# TÍCH PHÂN HÀM ẨN

**Câu 1:** **(Lý Nhân Tông)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục không âm trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f(x).f'(x)=\cos x\sqrt{1+f^2(x)}$ với mọi $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ và $f(0)=\sqrt{3}$. Giá trị của $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

**A.** $2$. **B.** $1$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Với $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ta có $f(x).f'(x)=\cos x\sqrt{1+f^2(x)}\Rightarrow\frac{2f(x).f'(x)}{2\sqrt{1+f^2(x)}}=\cos x\ (*)$.

Suy ra $\sqrt{1+f^2(x)}=\sin x+C$.

Ta có $f(0)=\sqrt{3}\Rightarrow C=2$.

Dẫn đến $f(x)=\sqrt{(\sin x+2)^2-1}$.

Vậy $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sqrt{2}$.

**Câu 2:** **(Đặng Thành Nam Đề 15)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x).f'(x)=1$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Biết $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=a$ và $f(1)=b$, $f(2)=c$. Tích phân $\int_1^2\frac{x}{f(x)}\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $2c-b-a$. **B.** $2a-b-c$. **C.** $2c-b+a$. **D.** $2a-b+c$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $f(x).f'(x)=1\Leftrightarrow\frac{1}{f(x)}=f'(x)$ suy ra $\int_1^2\frac{x}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_1^2 xf'(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 x.\mathrm{d}\left[f(x)\right]$

$=xf(x)\Big|_1^2-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2f(2)-f(1)-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2c-b-a$.

**Câu 3:** **(KIM LIÊN HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03)** Cho $\int_0^1(3x+1)f'(x)\mathrm{d}x=2019,\ 4f(1)-f(0)=2020$. Tính $\int_0^{\frac{1}{3}}f(3x)\mathrm{d}x$.

**A.** $\frac{1}{9}$. **B.** $3$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $1$.

**Lời giải.**

**Chọn A**

Ta có:

$\int_0^1(3x+1)f'(x)\mathrm{d}x=2019\Leftrightarrow\int_0^1(3x+1)\mathrm{d}\left(f(x)\right)=2019\Leftrightarrow(3x+1)f(x)\Big|_0^1-3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2019$

$\Leftrightarrow 4f(1)-f(0)-3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2019\Leftrightarrow 2020-3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2019\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ (1)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Xét: $I=\int_0^{\frac{1}{3}} f(3x)\mathrm{d}x$:

Đặt $3x=t\Rightarrow \mathrm{d}t=3\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{3}$; Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0; x=\dfrac{1}{3}\Rightarrow t=1$.

Vậy: $I=\dfrac{1}{3}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$

**Câu 4:** **(HSG Bắc Ninh)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$ thỏa mãn $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[f^2(x)-2f(x).(3-x)\right]\mathrm{d}x=-\dfrac{109}{12}$. Tính $\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{f(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x$.

**A.** $\ln\dfrac{7}{9}$. **B.** $\ln\dfrac{2}{9}$. **C.** $\ln\dfrac{5}{9}$. **D.** $\ln\dfrac{8}{9}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[f^2(x)-2f(x).(3-x)\right]\mathrm{d}x=-\dfrac{109}{12}.\Leftrightarrow\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[\left(f(x)-(3-x)\right)^2-(3-x)^2\right]\mathrm{d}x=-\dfrac{109}{12}$

$\Leftrightarrow\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(f(x)-(3-x)\right)^2\mathrm{d}x-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(3-x)^2\mathrm{d}x=-\dfrac{109}{12}.$

Mà $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(3-x)^2\mathrm{d}x=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(9-6x+x^2\right)\mathrm{d}x=\left(9x-3x^2+\dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\dfrac{109}{12}$

Suy ra $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(f(x)-(3-x)\right)^2\mathrm{d}x=0$.

Vì $\left[f(x)-(3-x)\right]^2\ge 0,\ \forall x\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$ nên $f(x)=3-x,\ \forall x\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$.

Vậy $\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{f(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{3-x}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{1-x+2}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{-1}{x+1}+\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}\right)\mathrm{d}x$

$=\left(-\ln|x+1|+\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\ln\dfrac{2}{9}.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 5:** **(CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP 2019 LẦN 2)** Cho hàm $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ là hàm liên tục thỏa mãn điều kiện $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(f(x)\right)^2-2f(x)(\sin x-\cos x)\right]\mathrm{d}x=1-\frac{\pi}{2}$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=-1$. **B.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=1$. **C.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=2$. **D.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=0$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)^2\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin 2x)\,\mathrm{d}x=\left(x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$.

$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(f(x)\right)^2-2f(x)(\sin x-\cos x)+(\sin x-\cos x)^2\right]\mathrm{d}x$.

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(f(x)\right)^2-2f(x)(\sin x-\cos x)\right]\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)^2\,\mathrm{d}x=1-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-1=0$.

$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-(\sin x-\cos x)\right]^2\mathrm{d}x=0$.

$\Rightarrow f(x)=\sin x-\cos x$.

$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x=(-\cos x-\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0$.

**Câu 6:** **(CỤM TRƯỜNG SÓC SƠN MÊ LINH HÀ NỘI)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ và $f(x)>0$, $\forall x\in(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)=-x.f^2(x)$ với mọi $x\in(0;+\infty)$, biết $f(1)=\frac{2}{a+3}$ và $f(2)>\frac{1}{4}$. Tổng tất cả các giá trị nguyên của $a$ thỏa mãn là

**A.** $-14$. **B.** $1$. **C.** $0$. **D.** $-2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Trên $(0;+\infty)$ ta có $f'(x)=-x.f^2(x)\Leftrightarrow-\frac{f'(x)}{f^2(x)}=x\Leftrightarrow\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=x$.

$\Rightarrow\int\left(\frac{1}{f(x)}\right)'\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x\Leftrightarrow\frac{1}{f(x)}=\frac{x^2}{2}+C$.

Có $f(1)=\frac{2}{a+3}\Rightarrow\frac{a+3}{2}=\frac{1}{2}+C\Leftrightarrow C=\frac{a+2}{2}$.

$\frac{1}{f(2)}=2+\frac{a+2}{2}\Rightarrow f(2)=\frac{2}{a+6}$; $f(2)>\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{2}{a+6}>\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{2-a}{4(a+6)}>0\Leftrightarrow-6<a<2$.

Ta có $\frac{1}{f(x)}=\frac{x^2}{2}+\frac{a+2}{2}$. Do đó $f(x)>0$, $\forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow a\ge-2$.

Với $a\in\mathbb{Z}\Rightarrow a\in\{-2;-1;0;1\}$. Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của $a$ cần tìm là $-2$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 7:** **( Nguyễn Tất Thành Yên Bái)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(3)=21$, $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=9$. Tính tích phân $I=\int_0^1 x.f'(3x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=15$. **B.** $I=12$. **C.** $I=9$. **D.** $I=6$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f'(3x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{3}f(3x)\end{cases}$.

Suy ra $I=\frac{1}{3}x.f(3x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{3}f(3x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}f(3)-\frac{1}{9}\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=6$.

Vậy $I=6$.

**Câu 8:** **(Chuyên Thái Bình Lần3)** Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(2-x)=x.e^{x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_0^2 f(x)dx$.

**A.** $I=\frac{e^4-1}{4}$. **B.** $I=\frac{2e-1}{2}$. **C.** $I=e^4-2$. **D.** $I=e^4-1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $x=2-t\Rightarrow dx=-dt$.

$\Rightarrow I=\int_2^0 f(2-t)(-dt)=\int_0^2 f(2-t)(dt)=\int_0^2 f(2-x)dx$.

$\Rightarrow 2I=\int_0^2\left[f(x)+f(2-x)\right]dx=\int_0^2 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2 e^{x^2}d(x^2)=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^2=\frac{e^4-1}{2}$.

Vậy $I=\frac{e^4-1}{4}$.

**Câu 9:** **(THPT LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NGÃI)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $x^2f'(x)+f(x)=0$ và $f(x)\neq 0$, $\forall x\in(0;+\infty)$. Tính $f(2)$ biết $f(1)=\mathrm{e}$.

**A.** $f(2)=\mathrm{e}^2$. **B.** $f(2)=\sqrt[3]{\mathrm{e}}$. **C.** $f(2)=2\mathrm{e}^2$. **D.** $f(2)=\sqrt{\mathrm{e}}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $f(x)\neq 0$, $\forall x\in(0;+\infty)\Rightarrow f(x)=0$ không có nghiệm trên khoảng $(0;+\infty)$

$\Rightarrow f(x)=0$ không có nghiệm trên khoảng $(1;2)\Rightarrow f(1).f(2)>0$, $\forall x\in(1;2)$.

Mà $f(1)=\mathrm{e}>0$ nên $f(2)>0$.

Do đó $x^2f'(x)+f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{x^2}=-\frac{f'(x)}{f(x)}$.

Suy ra $\int_1^2\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\int_1^2\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x\Leftrightarrow-\frac{1}{x}\Big|_1^2=-\ln\left|f(x)\right|\Big|_1^2$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{2}-1\right)=-\left(\ln\left|f(2)\right|-\ln\left|f(1)\right|\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}=-\left[\ln f(2)-\ln \mathrm{e}\right]$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}=-\ln f(2)+1 \Leftrightarrow \ln f(2)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(2)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\mathrm{e}}$.

**Câu 10:** **(Lý Nhân Tông)** Biết $\int_0^1 \frac{\pi x^3+2^x+\mathrm{e}x^3 2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x=\frac{1}{m}+\frac{1}{\mathrm{e}\ln n}.\ln\left(p+\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+\pi}\right)$ với $m$, $n$, $p$ là các số nguyên dương. Tính tổng $P=m+n+p$

**A.** $P=5$. **B.** $P=6$. **C.** $P=8$. **D.** $P=7$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$\int_0^1 \frac{\pi x^3+2^x+\mathrm{e}x^3 2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{x^3\left(\pi+\mathrm{e}.2^x\right)+2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^3+\frac{2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{x^4}{4}\Big|_0^1+\frac{1}{\mathrm{e}\ln 2}.\ln\left|\pi+\mathrm{e}.2^x\right|\Big|_0^1=\frac{1}{4}+\frac{1}{\mathrm{e}.\ln 2}.\ln\left|1+\frac{\mathrm{e}}{\pi+\mathrm{e}}\right|$.

Vậy $m=4$, $n=2$, $p=1$ nên $P=m+n+p=7$.

**Câu 11:** **(THPT Sơn Tây Hà Nội 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên đoạn $[1;2]$ đồng thời thỏa mãn $f(2)=0$, $\int_1^2\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{5}{12}+\ln\frac{2}{3}$ và $\int_1^2\frac{f(x)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=-\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}$. Tính $I=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\frac{3}{4}+2\ln\frac{2}{3}$. **B.** $I=\ln\frac{2}{3}$. **C.** $I=\frac{3}{4}+2\ln\frac{3}{2}$. **D.** $I=\frac{3}{4}+2\ln\frac{2}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

+ Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=\frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\end{cases}$.

Khi đó

$\int_1^2\frac{f(x)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[f(x)\frac{x-1}{x+1}\Big|_1^2-\int_1^2\frac{x-1}{x+1}f'(x)\mathrm{d}x\right]$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\left[f(2)\frac{1}{3}-\int_1^2\frac{x-1}{x+1}f'(x)\mathrm{d}x\right]$

$\Leftrightarrow \frac{5}{6}-2\ln\frac{3}{2}=\int_1^2\frac{x-1}{x+1}f'(x)\mathrm{d}x \quad (1)$.

Xét $\int_1^2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\mathrm{d}x=\int_1^2\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^2\mathrm{d}x$

$=\int_1^2\left(1-\frac{4}{x+1}+\frac{4}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x=\left(x-4\ln\left|x+1\right|-\frac{4}{x+1}\right)\Big|_1^2=1-4\ln 3+4\ln 2-\frac{4}{3}+2=\frac{5}{3}-4\ln\frac{3}{2}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Rightarrow \frac{1}{4}\int_1^2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 dx=\frac{5}{12}-\ln\frac{3}{2}$ (2).

Theo đề $\int_1^2[f'(x)]^2dx=\frac{5}{12}-\ln\frac{3}{2}$ (3).

Từ (1), (2), (3) ta có

$\int_1^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)-f'(x)\right]^2dx=0\Rightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)-f'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}\left[x-2\ln(x+1)\right]+C$

$\Rightarrow f(2)=\frac{1}{2}\left[2-2\ln 3\right]+C=0\Rightarrow C=\ln 3-1$

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}\left[x-2\ln(x+1)\right]+\ln 3-1$

$I=\int_1^2\left(\frac{1}{2}\left[x-2\ln(x+1)\right]+\ln 3-1\right)dx$

$=\left[\frac{x^2}{4}+(\ln 3-1)x\right]\Big|_1^2-\int_1^2\ln(x+1)dx=-\frac{1}{4}+\ln 3-\int_1^2\ln(x+1)dx$

$=-\frac{1}{4}+\ln 3-\left[(x+1)\ln(x+1)\Big|_1^2-\int_1^2 xdx\right]$

$=-\frac{1}{4}+\ln 3-\left[3\ln 3-2\ln 2-1\right]=\frac{3}{2}-2\ln\frac{2}{3}.$

**Câu 12:** **(THPT TX QUẢNG TRỊ LẦN 1 NĂM 2019)** Cho hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$ và thỏa mãn $(xf'(x)-2f(x))\ln x=x^3-f(x)$, $\forall x\in(1;+\infty)$; biết $f\left(\sqrt[3]{e}\right)=3e$. Giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(12;\frac{25}{2}\right)$. **B.** $\left(13;\frac{27}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{23}{2};12\right)$. **D.** $\left(14;\frac{29}{2}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Vì $x\in(1;+\infty)$ nên ta có

$\left(x^2f'(x)-2xf(x)\right)\ln x=x^4-xf(x)$

$\Leftrightarrow\left(\frac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}\right)\ln x=1-\frac{f(x)}{x^3}$

$\Rightarrow\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)'\ln x=1-\frac{f(x)}{x^3}$

$\Leftrightarrow\int\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)'\ln x dx=\int\left(1-\frac{f(x)}{x^3}\right)dx$

$\Leftrightarrow\frac{f(x)\ln x}{x^2}-\int\frac{f(x)}{x^3}dx=x-\int\frac{f(x)}{x^3}dx+C$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Leftrightarrow \frac{f(x)\ln x}{x^2} = x + C \Leftrightarrow \frac{f(x)\ln x}{x^2} = x + C \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2(x+C)}{\ln x}$.

Theo bài ra $f\left(\sqrt[3]{e}\right) = 3e \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{\ln x}$.

Do đó $f(2) = \frac{8}{\ln 2} \in \left(\frac{23}{2}; 12\right)$.

**Câu 13:** **(Nguyễn Khuyến)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, thoả mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 x dx = 10$ và $f(0) = 3$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x dx$ bằng

**A.** –13 **B.** 13 **C.** 7 **D.** –7

**Lời giải.**

**Chọn B**

Từ công thức tính vi phân của hàm số, ta có $f'(x)\,dx = d(f(x))$, và $d(\cos^2 x) = (\cos^2 x)' dx = -\sin 2x dx$

Do đó, áp dụng công thức tích phân từng phần, với $u = \cos^2 x$ và $v = f(x)$, ta thu được

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 x dx = f(x).\cos^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x dx$

Theo giả thiết, ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 x dx = 10$. Từ đó $f(x).\cos^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x dx = 10$

$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x dx = 10 - \left(f\left(\frac{\pi}{2}\right).\cos^2\frac{\pi}{2} - f(0).\cos^2 0\right) = 13$

**Câu 14:** **(THPT LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NGÃI)** Cho hàm $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(x) + f(1-x) = 2x^2 - 2x + 1$

Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x)dx$.

**A.** $I = \frac{4}{3}$ **B.** $I = \frac{2}{3}$ **C.** $I = \frac{1}{2}$. **D.** $I = \frac{1}{3}$

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $f(x) + f(1-x) = 2x^2 - 2x + 1$

$\Rightarrow I + \int_0^1 f(1-x)dx = \int_0^1 (2x^2 - 2x + 1)dx$

$\Rightarrow I + \int_0^1 f(1-x)dx = \left(\frac{2}{3}x^3 - x^2 + x\right)\Big|_0^1$

$\Rightarrow I + \int_0^1 f(1-x)dx = \frac{2}{3}$ (1)

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Xét $\int_0^1 f(1-x)dx$, đặt: $t=1-x \Rightarrow dt=-dx$

Đổi cận

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $t$ | 1 | 0 |

Ta có: $\int_0^1 f(1-x)dx=\int_1^0 f(t)(-dt)=\int_0^1 f(t)dt=I\ (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2\int_0^1 f(x)dx=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{3}$.

Vậy $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=16$.

**Chú ý:**

Nếu $f(x)$ là hàm chẵn và liên tục trên $[-a;a]$ thì $\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+b^x}\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ với mọi $a$, $b>0$.

**Câu 15:** **(THPT-Phúc-Trạch-Hà-Tĩnh-lần-2-2018-2019-thi-tháng-4)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[0;3]$, thỏa mãn $\begin{cases} f(3-x).f(x)=1 \\ f(x)\neq 1 \end{cases}$, $\forall x\in[0;3]$ và $f(0)=\frac{1}{2}$. Tính tích phân

$$I=\int_0^3 \frac{x.f'(x)}{\left[1+f(3-x)\right]^2.f^2(x)}\mathrm{d}x$$

**A.** $I=\frac{3}{2}$. **B.** $I=\frac{1}{2}$. **C.** $I=1$. **D.** $I=\frac{5}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Từ giả thiết $\begin{cases} f(3-x).f(x)=1 \\ f(0)=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f(3)=2$.

Do $f(3-x).f(x)=1\Rightarrow\left[1+f(3-x)\right]^2.f^2(x)=\left[1+f(x)\right]^2$.

Khi đó ta được:

$$I=\int_0^3 \frac{x.f'(x)}{\left[1+f(x)\right]^2}\mathrm{d}x=-\int_0^3 x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+f(x)}\right)=-\frac{x}{1+f(x)}\Big|_0^3+\int_0^3\frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x=-1+J.$$

Tính $J=\int_0^3\frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x \overset{t=3-x}{=}-\int_3^0\frac{1}{1+f(3-t)}\mathrm{d}t=\int_0^3\frac{1}{1+f(3-t)}\mathrm{d}t=\int_0^3\frac{1}{1+f(3-x)}\mathrm{d}x$.

Suy ra $2J=\int_0^3\frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x+\int_0^3\frac{1}{1+f(3-x)}\mathrm{d}x=\int_0^3\frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x+\int_0^3\frac{f(x)}{1+f(x)}\mathrm{d}x=\int_0^3\mathrm{d}x=3$.

Do đó $J=\frac{3}{2}$. Vậy $I=\frac{1}{2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 16:** **(-Mai-Anh-Tuấn-Thanh-Hóa-lần-1-2018-2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)+2x.f(x)=e^x f(x)$ với $f(x)\neq 0,\forall x$ và $f(0)=1$. Khi đó $|f(1)|$ bằng

**A.** $e+1$. **B.** $e^{e-2}$. **C.** $e-1$. **D.** $e^{e+1}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Từ giả thiết: $f'(x)+2x.f(x)=e^x f(x)$, ta có

$f'(x)=f(x)(e^x-2x)$

$\Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=e^x-2x$ ( vì $f(x)\neq 0,\forall x$)

$\Rightarrow \int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\int (e^x-2x)dx$

$\Rightarrow \ln|f(x)|=e^x-x^2+C$.

Mà $f(0)=1$ nên $C=-1$.

Khi đó, ta được: $\ln|f(x)|=e^x-x^2-1$.

Thế $x=1$, ta có: $\ln|f(1)|=e-2\Rightarrow |f(1)|=e^{e-2}$.

**Câu 17:** **(CổLoa Hà Nội)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $xf'(x).\ln x+f(x)=2x^2,\ \forall x\in(1;+\infty)$ và $f(e)=e^2$. Tính tích phân $I=\int_e^{e^2}\dfrac{x}{f(x)}dx$.

**A.** $I=\dfrac{3}{2}$. **B.** $I=\dfrac{1}{2}$. **C.** $I=\dfrac{5}{3}$. **D.** $I=2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $xf'(x)\ln x+f(x)=2x^2\Leftrightarrow f'(x)\ln x+\dfrac{f(x)}{x}=2x,\quad \forall x\in(1;+\infty)$.

$\Rightarrow \int f'(x)\ln x dx+\int\dfrac{f(x)}{x}dx=\int 2xdx$

$\Leftrightarrow f(x)\ln x-\int\dfrac{f(x)}{x}dx+\int\dfrac{f(x)}{x}dx=x^2+C$

$\Leftrightarrow f(x)\ln x=x^2+C,\ \forall x\in(1;+\infty)$.

Do $f(e)=e^2\Rightarrow C=0$.

Suy ra $f(x)\ln x=x^2,\forall x\in(1;+\infty)$

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}>0,\ \forall x\in(1;+\infty)$

$\Rightarrow \dfrac{x}{f(x)}=\dfrac{\ln x}{x},\ \forall x\in(1;+\infty)$.

Vậy $I=\int_e^{e^2}\dfrac{x}{f(x)}dx=\int_e^{e^2}\dfrac{\ln x}{x}dx=\dfrac{1}{2}\ln^2 x\Big|_e^{e^2}=\dfrac{3}{2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 18:** **(THPT NÔNG CỐNG 2 LẦN 4 NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x)+x.f'(x)\ge x^{2018}\ \forall x\in[0;1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $\frac{1}{2018.2020}$. **B.** $\frac{1}{2019.2020}$. **C.** $\frac{1}{2020.2021}$. **D.** $\frac{1}{2019.2021}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Xét hàm số: $g(x)=x^3.f(x)-\frac{x^{2021}}{2021}$ trên $[0;1]$.

Ta có: $g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)-x^{2020}=x^2.\left[3f(x)+x.f'(x)-x^{2018}\right]\ge 0\ \forall x\in[0;1]$.

Do đó $g(x)$ là hàm số không giảm trên $[0;1]$, suy ra $g(x)\ge g(0)\ \forall x\in[0;1]$

Hay $x^3.f(x)-\frac{x^{2021}}{2021}\ge 0,\forall x\in[0;1]\Leftrightarrow f(x)\ge\frac{x^{2018}}{2021}\ge 0,\forall x\in[0;1]$.

Vậy: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\ge\int_0^1\frac{x^{2018}}{2021}\mathrm{d}x=\frac{1}{2019.2021}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $f(x)=\frac{x^{2018}}{2021}$.

**Câu 19:** **(Quỳnh Lưu Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện $f(1)=2$, $f(x)\ne 0,\ \forall x>0$ và $\left(x^2+1\right)^2f'(x)=\left[f(x)\right]^2\left(x^2-1\right)$ với mọi $x>0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

**A.** $\frac{2}{5}$. **B.** $-\frac{2}{5}$. **C.** $-\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\left(x^2+1\right)^2f'(x)=\left[f(x)\right]^2\left(x^2-1\right)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}\ \forall x\in[1;2]$ (*)

Lấy tích phân 2 vế (*) trên $[1;2]$ ta được

$$\int_1^2\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}\Big|_1^2=\int_1^2\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow-\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(1)}=\int_1^2\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}\Leftrightarrow-\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)}\Big|_1^2$$

$$\Leftrightarrow-\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{2}=-\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\Leftrightarrow f(2)=\frac{5}{2}.$$

**Câu 20:** **(Lương Thế Vinh Lần 3)** Cho đa thức bậc bốn $y=f(x)$ đạt cực trị tại $x=1$ và $x=2$. Biết $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+f'(x)}{2x}=2$. Tích phân $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $y=f(x)$ là đa thức bậc bốn nên $f'(x)$ là đa thức bậc ba. (1)

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+f'(x)}{2x}=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{f'(x)}{2x}\right)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=2$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $f'(x)$ có dạng $f'(x)=x(ax^2+bx+2)$.

Ta lại có $y=f(x)$ đạt cực trị tại $x=1$ và $x=2$ nên $f'(1)=0$, $f'(2)=0$. Do đó, ta có hệ phương trình $\begin{cases}a+b+2=0\\8a+4b+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-3\end{cases}$.

Vậy $\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 x(x^2-3x+2)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$.

**Câu 21:** **(HKII-CHUYÊN-NGUYỄN-HUỆ-HÀ-NỘI)** Cho $f(x)+4xf\left(x^2\right)=3x$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=-2$. **B.** $I=-\frac{1}{2}$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $f(x)+4xf\left(x^2\right)=3x \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)+4xf\left(x^2\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 3x\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 4xf\left(x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$.

Xét $A=\int\limits_0^1 4xf\left(x^2\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=x^2\Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0$, $x=1\Rightarrow t=1$.

Vậy $A=\int\limits_0^1 2f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 2f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow 3\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

**Câu 22:** **(CHUYÊN NGUYỄN DU ĐĂK LĂK LẦN X NĂM 2019)** Cho $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $3f'(x).e^{f^3(x)-x^2-1}-\frac{2x}{f^2(x)}=0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=1$, tính tích phân $I=\int\limits_0^{\sqrt{7}} x.f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\frac{9}{2}$. **B.** $I=\frac{45}{8}$. **C.** $I=\frac{11}{2}$. **D.** $I=\frac{15}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $3f'(x).e^{f^3(x)-x^2-1}-\frac{2x}{f^2(x)}=0\Leftrightarrow 3f'(x).\frac{e^{f^3(x)}}{e^{x^2+1}}=\frac{2x}{f^2(x)}\Leftrightarrow 3f^2(x).f'(x).e^{f^3(x)}=2x.e^{x^2+1}$

$\Leftrightarrow\left(e^{f^3(x)}\right)'=\left(e^{x^2+1}\right)'\Leftrightarrow e^{f^3(x)}=e^{x^2+1}+C\,(*)$.

Thế $x=0$ vào $(*)$ ta được $e=e+C\Leftrightarrow C=0$.

Do đó $e^{f^3(x)}=e^{x^2+1}\Leftrightarrow f^3(x)=x^2+1\Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$.

Vậy $I=\int\limits_0^{\sqrt{7}}x\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{7}}(x^2+1)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}(x^2+1)=\frac{1}{2}.\frac{(x^2+1)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\Bigg|_0^{\sqrt{7}}=\frac{3}{8}(x^2+1)\sqrt[3]{x^2+1}\Bigg|_0^{\sqrt{7}}$

$=\frac{3}{8}.(16-1)=\frac{45}{8}$.

**Câu 23:** **(Chuyên Vinh Lần 2)** Giả sử hàm số $f$ có đạo hàm cấp $n$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1-x)+x^2f''(x)=2x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 xf'(x)dx$.

**A.** $I=-1$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\frac{1}{3}$. **D.** $I=-\frac{1}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: Thay $x=0$ vào $f(1-x)+x^2f''(x)=2x$ ta được $f(1)=0$

$f(1-x)+x^2f''(x)=2x\Rightarrow -f'(1-x)+2xf''(x)+x^2f'''(x)=2$. Khi đó $f'(1)=-2$.

$f(1-x)+x^2f''(x)=2x\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[f(1-x)+x^2f''(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 2x\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow-\int\limits_0^1 f(1-x)\mathrm{d}(1\text{-}x)+f'(1)-2\int\limits_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=1\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x-2\int\limits_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=3$.

Đặt $J=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, ta có: $I=\int\limits_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=f(1)-\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-J$.

Do đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases}J-2I=3\\I=-J\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}I=-1\\J=1\end{cases}$.

Vậy $I=\int\limits_0^1 xf'(x)dx=-1$.

**Câu 24:** **(Nguyễn Trãi Hải Dương Lần1)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=0, f'(0)\neq 0$ và thỏa mãn hệ thức

$f(x).f'(x)+18x^2=(3x^2+x)f'(x)+(6x+1)f(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

Biết $\int\limits_0^1(x+1)e^{f(x)}\mathrm{d}x=a.e^2+b$, với $a;b\in\mathbb{Q}$. Giá trị của $a-b$ bằng.

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $0$. **D.** $\frac{2}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $f(x).f'(x)+18x^2=(3x^2+x)f'(x)+(6x+1)f(x)$

$\Rightarrow\int\left[f(x).f'(x)+18x^2\right]\mathrm{d}x=\int\left[(3x^2+x)f'(x)+(6x+1)f(x)\right]\mathrm{d}x$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Rightarrow \int \left[\frac{1}{2} f^2(x)+6x^3\right]' \mathrm{d}x = \int \left[\left(3x^2+x\right) f(x)\right]' \mathrm{d}x$

$\Rightarrow \frac{1}{2} f^2(x)+6x^3 = \left(3x^2+x\right) f(x)+C$, với $C$ là hằng số.

Mặt khác: theo giả thiết $f(0)=0$ nên $C=0$.

Khi đó $\frac{1}{2} f^2(x)+6x^3 = \left(3x^2+x\right) f(x)(1), \forall x \in \mathbb{R}$.

$(1) \Leftrightarrow f^2(x)+12x^3 = \left(6x^2+2x\right) f(x) \Leftrightarrow \left[f(x)-2x\right]\left[f(x)-6x^2\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=2x \\ f(x)=6x^2 \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: Với $f(x)=6x^2, \forall x \in \mathbb{R}$, ta có $f'(0)=0$ (loại).

Trường hợp 2: Với $f(x)=2x, \forall x \in \mathbb{R}$, ta có :

$$\int_0^1 (x+1)e^{f(x)}\mathrm{d}x = \int_0^1 (x+1)e^{2x}\mathrm{d}x = \left[\frac{(x+1)e^{2x}}{2}\right]\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2}\mathrm{d}x = \frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{4} \\ b=-\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow a-b=1.$$

**Câu 25:** **(GIA LỘC TỈNH HẢI DƯƠNG 2019 lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$, $f(x)\neq 0$ với mọi $x\in[1;3]$, đồng thời $f'(x)\left(1+f(x)\right)^2 = \left[\left(f(x)\right)^2(x-1)\right]^2$ và $f(1)=-1$.

Biết rằng $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = a\ln 3+b$, $a,b\in\mathbb{Z}$, tính tổng $S=a+b^2$.

**A.** $S=0$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=2$. **D.** $S=4$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $f'(x)\left(1+f(x)\right)^2 = \left[\left(f(x)\right)^2(x-1)\right]^2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)\left(1+f(x)\right)^2}{f^4(x)} = (x-1)^2$.

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được:

$$\int \frac{f'(x)\left(1+f(x)\right)^2}{f^4(x)}\mathrm{d}x = \int (x-1)^2\,dx \Leftrightarrow \int \frac{\left(1+2f(x)+f^2(x)\right)f'(x)}{f^4(x)}\mathrm{d}x = \int (x-1)^2\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int \left(\frac{1}{f^4(x)}+2\frac{1}{f^3(x)}+\frac{1}{f^2(x)}\right)\mathrm{d}\left(f(x)\right) = \frac{(x-1)^3}{3}+C$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3f^3(x)}-\frac{1}{f^2(x)}-\frac{1}{f(x)} = \frac{(x-1)^3}{3}+C$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1+3f(x)+3f^2(x)}{3f^3(x)} = \frac{(x-1)^3}{3}+C$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Mà $f(1)=-1$ nên $-\frac{1-3+3}{-3}=C\Rightarrow C=\frac{1}{3}$.

Suy ra: $-\frac{1+3f(x)+3f^2(x)}{3f^3(x)}=\frac{(x-1)^3}{3}+\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{1+3f(x)+3f^2(x)}{3f^3(x)}+\frac{1}{3}=-\frac{(x-1)^3}{3}$

$\Leftrightarrow\frac{(1+f(x))^3}{f^3(x)}=-(x-1)^3\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^3=(1-x)^3\Leftrightarrow f(x)=\frac{-1}{x}$.

Vậy: $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^3\frac{-1}{x}\mathrm{d}x=-\ln|x|\Big|_1^3=-\ln 3$. Suy ra $a=-1;b=0$ hay $a+b=-1$.

**Câu 26:** **(Sở Nam Định)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng các tiếp tuyến với đồ thị $y=f(x)$ tại các điểm có hoành độ $x=-1$, $x=0$, $x=1$ lần lượt tạo với chiều dương của trục $Ox$ các góc $30°$, $45°$, $60°$.

Tính tích phân $I=\int_{-1}^{0}f'(x).f''(x)\mathrm{d}x+4\int_0^1\left[f'(x)\right]^3.f''(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\frac{25}{3}$. **B.** $I=0$. **C.** $I=\frac{1}{3}$. **D.** $I=\frac{\sqrt{3}}{3}+1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Vì các tiếp tuyến với đồ thị $y=f(x)$ tại các điểm có hoàng độ $x=-1$, $x=0$, $x=1$ lần lượt tạo với chiều dương của trục $Ox$ các góc $30°$, $45°$, $60°$ nên hệ số góc của các tiếp tuyến lần lượt là: $f'(-1)=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $f'(0)=\tan 45°=1$, $f'(1)=\tan 60°=\sqrt{3}$.

Ta có: $I=\int_{-1}^{0}f'(x).f''(x)\mathrm{d}x+4\int_0^1\left[f'(x)\right]^3.f''(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=f'(x)\Rightarrow\mathrm{d}t=f''(x)\mathrm{d}x$. Đổi cận $\begin{cases}x=-1 & \Rightarrow t=f'(-1)=\frac{\sqrt{3}}{3}\\ x=0 & \Rightarrow t=f'(0)=1\\ x=1 & \Rightarrow t=f'(1)=\sqrt{3}\end{cases}$

$\Rightarrow I=\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}t\mathrm{d}t+4\int_1^{\sqrt{3}}t^3\mathrm{d}t=\frac{t^2}{2}\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}+t^4\Big|_1^{\sqrt{3}}=\frac{25}{3}$.

**Câu 27:** **(THTT số 3)** Cho hàm số $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn

$\mathrm{f}\left(\mathrm{x}^3+\mathrm{x}-1\right)+\mathrm{f}\left(-\mathrm{x}^3-\mathrm{x}-1\right)$

$=-6\mathrm{x}^6-12\mathrm{x}^4-6\mathrm{x}^2-2,\forall\mathrm{x}\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $\int_{-3}^{1}\mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{d}\mathrm{x}$.

**A.** 32. **B.** 4. **C.** $-36$. **D.** $-20$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $a=x^3+x-1$, khi đó ta có $f(a)+f(-a-2)=-6(a+1)^2-2\ (1)$. Hàm số $f(a)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$.

Lúc đó ycbt trở thành tính giá trị của tích phân $\int_{-3}^{1} f(a)da$. Lấy tích phân hai vế của $(1)$, ta được $\int_{-3}^{1} f(a)da+\int_{-3}^{1} f(-a-2)da=\int_{-3}^{1}\left(-6(a+1)^2-2\right)da=-40\ (2)$. Từ tích phân $\int_{-3}^{1} f(-a-2)da$ ta đặt $t=-a-2\Rightarrow dt=-da$. Khi $a=-3\Rightarrow t=1; a=1\Rightarrow t=-3$. Tích phân trên chuyển thành $\int_{-3}^{1} f(t)dt$, kết hợp với $(2)$ ta suy ra: $2\int_{-3}^{1} f(a)da=-40\Leftrightarrow \int_{-3}^{1} f(a)da=-20$. Đây chính là đáp số cần tìm.

**Câu 28:** **(Chuyên Bắc Giang)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)-f(x)=(x^2+1)e^{\frac{x^2+2x-1}{2}}, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=e$. Giá trị của $f(5)$ bằng

**A.** $3e^{12}-1$. **B.** $5e^{17}$. **C.** $5e^{17}-1$. **D.** $3e^{12}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $f'(x)-f(x)=(x^2+1)e^{\frac{x^2+2x-1}{2}}\Leftrightarrow f'(x)e^{-x}-e^{-x}f(x)=(x^2+1)e^{\frac{x^2-1}{2}}$

$\Leftrightarrow \left(e^{-x}f(x)\right)'=(x^2+1)e^{\frac{x^2-1}{2}}$.

$\Rightarrow \int_1^5 \left(e^{-x}f(x)\right)'dx=\int_1^5 (x^2+1)e^{\frac{x^2-1}{2}}dx\Leftrightarrow e^{-x}f(x)\Big|_1^5=\int_1^5 x^2e^{\frac{x^2-1}{2}}dx+\int_1^5 e^{\frac{x^2-1}{2}}dx$

$\Leftrightarrow e^{-5}f(5)-1=I_1+I_2\ (*)$

Xét: $I_2=\int_1^5 e^{\frac{x^2-1}{2}}dx$.

Đặt: $\begin{cases} u=e^{\frac{x^2-1}{2}} \\ dv=dx \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} du=xe^{\frac{x^2-1}{2}}dx \\ v=x \end{cases}$.

$I_2=xe^{\frac{x^2-1}{2}}\Big|_1^5-\int_1^5 x^2e^{\frac{x^2-1}{2}}dx=5e^{12}-1-I_1\Leftrightarrow I_1+I_2=5e^{12}-1$

$(*)\Leftrightarrow e^{-5}f(5)-1=5e^{12}-1\Leftrightarrow f(5)=5e^{17}$.

**Câu 29:** **(Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đăk Lăk)** Cho $\int_0^6 f^2(x)dx=\int_0^6 x.f(x)dx=72$. Giá trị của $\int_1^3 f(x)dx$ bằng

**A.** 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Cách 1:** Ta có: $\int_0^6 f^2(x)dx=\int_0^6 xf(x)dx=72$; $\int_0^6 x^2dx=72$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\int_0^6 \left[ f^2(x) - 2xf(x) + x^2 \right] dx = \int_0^6 \left[ f(x) - x \right]^2 dx = 72 - 2.72 + 72 = 0 \Rightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$

$\Rightarrow \int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 x dx = 4.$

**Cách 2:** Ta có: $72^2 = \left[ \int_0^6 xf(x)dx \right]^2 \le \int_0^6 x^2 dx . \int_0^6 f^2(x)dx = 72.72 = 72^2.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow f(x) = kx (k \ne 0) \Rightarrow \int_0^6 xf(x)dx = \int_0^6 kx^2 dx = 72 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow f(x) = x.$

$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 x dx = 4.$

**Câu 30:** **(Ba Đình Lần2)** Hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f^2(1-x) = (x^2+3) f(x+1)$. Biết rằng $f(x) \ne 0, \forall x \in \mathbb{R}$, tính $I = \int_0^2 (2x-1) f''(x) dx$.

**A.** $8$. **B.** $0$. **C.** $-4$. **D.** $4$.

**Lời giải**

Ta có: $\begin{cases} f^2(1-x) = (x^2+3), f(x+1) \Rightarrow f^4(1-x) = (x^2+3)^2 . f^2(x+1) \ (1) \\ f^2(1+x) = (x^2+3). f(1-x) \ (2) \end{cases}$

Từ $(1)$ và $(2)$ $\Rightarrow f(1-x) = x^2 + 3 = (1-x-1)^2 + 3$

$\Rightarrow f(x) = (x-1)^2 + 3$

$\Rightarrow f''(x) = 2$

$\Rightarrow I = \int_0^2 (4x-2) dx = (2x^2 - 2x)\Big|_0^2 = 4.$

**Câu 31:** **(Sở Lạng Sơn 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[ f'(x) \right]^2 + f(x).f''(x) = 4x^3 + 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

**A.** $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{16}{15}$. **D.** $\frac{8}{15}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $\left[ f'(x) \right]^2 + f(x).f''(x) = \left[ f(x).f'(x) \right]'$. Từ giả thiết ta có: $\left[ f(x).f'(x) \right]' = 4x^3 + 2x$

Suy ra: $f(x).f'(x) = \int (4x^3 + 2x) dx = x^4 + x^2 + C$. Với $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

Nên ta có: $f(x).f'(x) = x^4 + x^2$

Suy ra: $\int_0^1 f(x).f'(x)dx = \int_0^1 (x^4 + x^2) dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2}\Big|_0^1 = \frac{8}{15} \Rightarrow f^2(1) = \frac{16}{15}.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 32:** **(Phan Đình Tùng Hà Tĩnh)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, biết $x.f(x)\neq -1,\forall x\neq 0$; $f(1)=-2$ và $\left(x.f(x)+1\right)^2-x.f'(x)-f(x)=0$ với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Tính $\int\limits_1^e f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $\frac{1}{e}-2$. **B.** $2-\frac{1}{e}$. **C.** $-\frac{1}{e}$. **D.** $\frac{1}{e}-1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $\left[x.f(x)+1\right]^2-x.f'(x)-f(x)=0\Leftrightarrow\left[x.f(x)+1\right]^2=x.f'(x)+f(x)$

$\Leftrightarrow\frac{x.f'(x)+f(x)}{\left[x.f(x)+1\right]^2}=1$ (do $x.f(x)\neq -1,\forall x\neq 0$).

$\Leftrightarrow\left(\frac{-1}{x.f(x)+1}\right)'=1\Leftrightarrow\frac{-1}{x.f(x)+1}=x+C$

Do $f(1)=-2$ nên $\frac{-1}{f(1)+1}=C+1\Leftrightarrow 1=C+1\Leftrightarrow C=0$.

Do đó $\frac{-1}{x.f(x)+1}=x\Leftrightarrow x^2.f(x)+x=-1\Leftrightarrow f(x)=\frac{-1-x}{x^2}=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$

Suy ra $\int\limits_1^e f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^e\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{x}-\ln|x|\right)\Big|_1^e=\frac{1}{e}-2$.

**Câu 33:** **(PHÂN TÍCH BL_PT ĐỀ ĐH VINHL3 -2019..)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=3$ và $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2,\forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int\limits_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\frac{-4}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{-10}{3}$

**Lời giải**

**Chọn D**

**Cách 1.**

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có: $\int\limits_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Từ $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2,\forall x\in\mathbb{R}\ (1)$

Thay $x=0$ vào $(1)$ ta được $f(0)+f(2)=2\Rightarrow f(2)=2-f(0)=2-3=-1$.

Xét $I=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$

Đặt $x=2-t\Rightarrow dx=-dt$, đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=2\\x=2\Rightarrow t=0\end{cases}$

Khi đó $I=-\int\limits_2^0 f(2-t)dt=\int\limits_0^2 f(2-t)dt\Rightarrow I=\int\limits_0^2 f(2-x)dx$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Do đó ta có $\int_0^2 \left( f(x)+f(2-x)\right)\mathrm{d}x=\int_0^2 \left(x^2-2x+2\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow 2\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$

Vậy $\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\big|_0^2-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2.(-1)-\frac{4}{3}=-\frac{10}{3}.$

**Cách 2**

Từ $\begin{cases} f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2 \ \ (1) \\ f(0)=3 \end{cases}$

Thay $x=0;x=1$ vào $(1)$ ta được $f(2)=-1; f(1)=\frac{1}{2}.$

Xét hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ từ giả thiết trên ta có $\begin{cases} c=3 \\ a+b+c=\frac{1}{2} \\ 4a+2b+c=-1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} c=3 \\ a=\frac{1}{2} \\ b=-3 \end{cases}.$

Vậy $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+3\Rightarrow f'(x)=x-3$ suy ra $\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 x\left(x-3\right)\mathrm{d}x=-\frac{10}{3}.$

*Phân tích, bình luận và phát triển bài toán.*

*- Đây là bài toán về tích phân hàm ẩn một dạng toán mà trong đề thi hiện nay hay gặp.*

*- Trong bài toán trên để tính tích phân $\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x$ sử dụng tích phân từng phần đưa về tính tích phân $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$. Mặt khác từ biểu thức về hàm số đã cho chứa $f(x)$ và $f(2-x)$, nên ta biến đổi tạo ra hai biểu thức này bằng cách đặt $x=2-t$.*

*- Để làm được bài toán trên học sinh cần nắm vững cả hai phương pháp tính tích phân là đổi biến và từng phần.*

*- Đề xuất một số bài toán tương tự:*

**Câu 34:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $R$ và thỏa mãn $f(x)=4xf(x^2)+2x+1$ với $\forall x\in R$. Tính tích phân $I=\int_0^1 xf'(x)dx$

**A.** $-2$. **B.** $-1$. **C.** $2$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có: $\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\big|_0^1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

Từ $f(x)=4xf(x^2)+2x+1,\forall x\in\mathbb{R}\ (1)$

Thay $x=1$ vào $(1)$ ta được $f(1)=4f(1)+3\Rightarrow f(1)=-1$

Xét $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

Đặt $x=t^2\Rightarrow dx=2tdt$, đổi cận: $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=0 \\ x=1\Rightarrow t=1 \end{cases}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Khi đó $I=\int_0^1 f(t^2).2tdt \Rightarrow I=2\int_0^1 xf(x^2)dx$. Ta có $I-2I=\int_0^1 f(x)dx-4\int_0^1 xf(x^2)dx$

$=\int_0^1\left[f(x)-4xf(x^2)\right]dx=\int_0^1(2x+1)dx=\left(x^2+x\right)\Big|_0^1=2 \Leftrightarrow -I=2\Leftrightarrow I=-2$

Vậy $\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1.(-1)+2=1.$

**Câu 35:** **(SỞ GDĐT KIÊN GIANG 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $5f(x)-7f(1-x)=3\left(x^2-2x\right),\forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng tích phân $I=\int_0^1 x.f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{a}{b}$ ( với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $T=8a-3b$.

**A.** $T=1$. **B.** $T=0$. **C.** $T=16$. **D.** $T=-16$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $5f(x)-7f(1-x)=3\left(x^2-2x\right)$

Lần lượt chọn $x=0, x=1$, ta có hệ sau:

$$\begin{cases}5f(0)-7f(1)=0\\5f(1)-7f(0)=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(1)=\frac{5}{8}\\f(0)=\frac{7}{8}\end{cases}$$

Tính $I=\int_0^1 x.f'(x)\mathrm{d}x$

Đặt: $\begin{cases}u=x\\dv=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}$ Chọn $\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\v=f(x)\end{cases}$

$I=x.f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{5}{8}-J$

Đặt $x=1-t\Rightarrow J=-\int_1^0 f(1-t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=K$. Suy ra $5J-7K=3\int_0^1\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x=-2$

Ta có: $\begin{cases}J=K\\5J-7K=-2\end{cases}\Leftrightarrow J=K=1$

Vậy $I=\frac{5}{8}-1=\frac{-3}{8}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=8\end{cases}\Rightarrow T=8a-3b=0$

**Câu 36:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{2}{3};1\right]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(\frac{2}{3x})=5x$ với $\forall x\in\left[\frac{2}{3};1\right]$.

Tính tích phân $\int_{\frac{2}{3}}^1 \ln x.f'(x)dx$

**A.** $\frac{5}{3}\ln\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{5}{3}\ln\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$. **C.** $-\frac{5}{3}\ln\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{5}{3}\ln\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Lời giải**

**Chọn D**

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có: $\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\ln x.f'(x)dx=\left(\ln x.f(x)\right)\Big|_{\frac{2}{3}}^{1}-\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{f(x}{x})dx.$

Từ $2f(x)+3f(\frac{2}{3x})=5x,\ \forall x\in\left[\frac{2}{3};1\right]\ \ (1)$

Thay $x=1$ và $x=\frac{2}{3}$ vào $(1)$ ta được hệ $\begin{cases}2f(1)+3f(\frac{2}{3})=5\\2f(\frac{2}{3})+3f(1)=\frac{10}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(1)=0\\f(\frac{2}{3})=\frac{5}{3}\end{cases}.$

Xét $I=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{f'(x)}{x}\mathrm{d}x$

Đặt $x=\frac{2}{3t}\Rightarrow dx=-\frac{2}{3t^2}dt$, đổi cận: $\begin{cases}x=\frac{2}{3}\Rightarrow t=1\\x=1\Rightarrow t=\frac{2}{3}\end{cases}.$

Khi đó $I=-\frac{2}{3}\int\limits_{1}^{\frac{2}{3}}\frac{f(\frac{2}{3t}).\frac{1}{t^2}}{\frac{2}{3t}}dt=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{f(\frac{2}{3t})}{t}dt=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{f(\frac{2}{3x})}{x}.dx.$

Ta có $2I+3I=2\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{f(x)}{x}dx+3\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{f(\frac{2}{3x})}{x}.dx$

$\Leftrightarrow 5I=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{2f(x)+3f(\frac{2}{3x})}{x}.dx=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{5x}{x}dx=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}5dx=\frac{5}{3}\Leftrightarrow I=\frac{1}{3}.$

Vậy $\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\ln x.f'(x)dx=\left(\ln x.f(x)\right)\Big|_{\frac{2}{3}}^{1}-\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{f(x}{x})dx=\ln 1.f(1)-\ln\frac{2}{3}f(\frac{2}{3})-\frac{1}{3}=-\frac{5}{3}\ln\frac{2}{3}-\frac{1}{3}.$

**Câu 37:** **(Chuyên Hạ Long lần 2-2019)** Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $3f(-x)+2f(x)=x^{10},\forall x\in\mathbb{R}$.

Tính $I=\int\limits_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=55$. **B.** $I=\frac{1}{11}$. **C.** $I=11$. **D.** $I=\frac{1}{55}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $3f(-x)+2f(x)=x^{10},\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó ta thay $x=-x$ ta được $3f(x)+2f(-x)=x^{10},\forall x\in\mathbb{R}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3f(-x)+2f(x)=x^{10} \\ 3f(x)+2f(-x)=x^{10} \end{cases}$.

Giải hệ phương trình ta tìm được $f(x)=\frac{1}{5}x^{10}$. Khi đó $I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \frac{x^{10}}{5}dx=\left.\frac{x^{11}}{55}\right|_0^1=\frac{1}{55}$.

**Câu 38:** **(THPT PHỤ DỰC – THÁI BÌNH)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $(-1;+\infty)$. Biết đẳng thức $2f(x)+(x^2-1)f'(x)=\frac{x(x+1)^2}{\sqrt{x^2+3}}$ được thỏa mãn $\forall x\in(-1;+\infty)$. Tính giá trị $f(0)$.

**A.** $3-\sqrt{3}$. **B.** $2-\sqrt{3}$.

**C.** $-\sqrt{3}$. **D.** Chưa đủ dữ kiện tính $f(0)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$\forall x\in(-1;+\infty)$, ta nhân cả hai vế đẳng thức trên cho $\frac{1}{(x+1)^2}$ thì ta được:

$2f(x)+(x^2-1)f'(x)=\frac{x(x+1)^2}{\sqrt{x^2+3}}\Leftrightarrow\frac{2}{(x+1)^2}f(x)+\frac{x-1}{x+1}f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.

$\Rightarrow\left(\frac{x-1}{x+1}f(x)\right)'=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\Rightarrow\int_0^1\left(\frac{x-1}{x+1}f(x)\right)'dx=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx\Rightarrow\left(\frac{x-1}{x+1}f(x)\right)\Big|_0^1=\left(\sqrt{x^2+3}\right)\Big|_0^1$

$\Rightarrow f(0)=2-\sqrt{3}$.

**Câu 39:** **(Đặng Thành Nam Đề 14)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn [0;1] thỏa mãn $2f(x)+3f(1-x)=x\sqrt{1-x}$, với mọi $x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^2 xf'\left(\frac{x}{2}\right)dx$ bằng

**A.** $-\frac{4}{75}$. **B.** $-\frac{4}{25}$. **C.** $-\frac{16}{75}$. **D.** $-\frac{16}{25}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $1-x=a\Rightarrow x=1-a$. Khi đó ta có hệ.

$\begin{cases} 2f(x)+3f(1-x)=x\sqrt{1-x} \\ 3f(x)+2f(1-x)=(1-x)\sqrt{x} \end{cases}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{5}\left[3(1-x)\sqrt{x}-2x\sqrt{1-x}\right]$.

Đặt $t=\frac{x}{2}\Rightarrow dt=\frac{1}{2}dx; x=0\Rightarrow t=0; x=2\Rightarrow t=1$. Khi đó tích phân cần tính:

$I=\int_0^1 2t.f'(t)2dt=4\int_0^1 t.f'(t)dt=4\int_0^1 td(f(t))=4\left(tf(t)\Big|_0^1-\int_0^1 f(t)dt\right)$

$=4\left(f(1)-\int_0^1 f(x)dx\right)=4\left(0-\int_0^1\frac{1}{5}\left[3(1-x)\sqrt{x}-2x\sqrt{1-x}\right]dx\right)$

$=4.\left(\frac{-4}{75}\right)=\frac{-16}{75}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 40:** **(Sở Quảng NamT)** Cho hàm số $f(x)$ không âm, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $\left[2f(x)+1-x^2\right]f'(x)=2x\left[1+f(x)\right], \forall x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\left[2f(x)+1-x^2\right]f'(x)=2x\left[1+f(x)\right] \Leftrightarrow 2f(x).f'(x)=2x.f(x)+\left(x^2-1\right).f'(x)+2x$

$\Leftrightarrow\left[f^2(x)\right]'=\left[\left(x^2-1\right).f(x)+x^2\right]' \Rightarrow f^2(x)=\left(x^2-1\right)f(x)+x^2+C$.

Với $x=1$ thì $f^2(1)=1+C\Leftrightarrow 1=1+C\Leftrightarrow C=0$.

Do đó $f^2(x)=\left(x^2-1\right)f(x)+x^2 \Leftrightarrow f^2(x)-\left(x^2-1\right)f(x)-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=-1(l)\\ f(x)=x^2\end{array}\right.$.

Vậy $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}$.

**Câu 41:** **(SGD-Nam-Định-2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng các tiếp tuyến với đồ thị $y=f(x)$ tại các điểm có hoành độ $x=-1$, $x=0$, $x=1$ lần lượt tạo với chiều dương của trục $Ox$ các góc $30°$, $45°$, $60°$.

Tính tích phân $I=\int_{-1}^{0} f'(x).f''(x)\mathrm{d}x+4\int_0^1\left[f'(x)\right]^3.f''(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\frac{25}{3}$. **B.** $I=0$. **C.** $I=\frac{1}{3}$. **D.** $I=\frac{\sqrt{3}}{3}+1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Vì các tiếp tuyến với đồ thị $y=f(x)$ tại các điểm có hoàng độ $x=-1$, $x=0$, $x=1$ lần lượt tạo với chiều dương của trục $Ox$ các góc $30°$, $45°$, $60°$ nên hệ số góc của các tiếp tuyến lần lượt là: $f'(-1)=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $f'(0)=\tan 45°=1$, $f'(1)=\tan 60°=\sqrt{3}$.

Ta có: $I=\int_{-1}^{0} f'(x).f''(x)\mathrm{d}x+4\int_0^1\left[f'(x)\right]^3.f''(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=f'(x)\Rightarrow \mathrm{d}t=f''(x)\mathrm{d}x$. Đổi cận $\left\{\begin{array}{ll} x=-1 & \Rightarrow t=f'(-1)=\frac{\sqrt{3}}{3}\\ x=0 & \Rightarrow t=f'(0)=1\\ x=1 & \Rightarrow t=f'(1)=\sqrt{3}\end{array}\right.$

$\Rightarrow I=\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} t\mathrm{d}t+4\int_1^{\sqrt{3}} t^3\mathrm{d}t=\left.\frac{t^2}{2}\right|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}+\left.t^4\right|_1^{\sqrt{3}}=\frac{25}{3}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 42:** **(Nam Tiền Hải Thái Bình Lần1)** Cho hàm số $f(x)>0$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$, đồng thời thỏa mãn $f'(0)=0$; $f(0)=1$ và $f''(x).f(x)+\left[\frac{f(x)}{\cos x}\right]^2=\left[f'(x)\right]^2$. Tính $T=f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

**A.** $T=\frac{3}{4}$. **B.** $T=\frac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $T=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $T=\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $f''(x).f(x)+\left[\frac{f(x)}{\cos x}\right]^2=\left[f'(x)\right]^2 \Leftrightarrow \frac{f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{f^2(x)}=-\frac{1}{\cos^2 x}$

$\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]'=-\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=-\tan x+C$. Vì $\begin{cases}f'(0)=0\\f(0)=1\end{cases}$ nên $C=0$.

Do đó $\frac{f'(x)}{f(x)}=-\tan x$. Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\left(f(x)\right)}{f(x)}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}-\tan x.dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d(\cos x)}{\cos x}\Leftrightarrow \ln f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow \ln f\left(\frac{\pi}{3}\right)-\ln f(0)=\ln\frac{1}{2}-\ln 1\Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$.

**Câu 43:** **( Chuyên Lam Sơn Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0,\pi]$. Biết $f(0)=2e$ và $f(x)$ luôn thỏa mãn đẳng thức $f'(x)+\sin x.f(x)=\cos x.e^{\cos x},\forall x\in[0,\pi]$. Tính $I=\int_0^{\pi}f(x).dx$ (làm tròn đến phần trăm).

**A.** $I\approx 6,55$. **B.** $I\approx 17,30$. **C.** $I\approx 10,31$. **D.** $I\approx 16,91$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$f'(x)+\sin x.f(x)=\cos x.e^{\cos x}$. Chia hai vế đẳng thức cho $e^{\cos x}$ ta được

$f'(x).e^{-\cos x}+e^{-\cos x}.\sin x.f(x)=\cos x$ ( vế trái có dạng $u'v+uv'$)

$\Leftrightarrow\left(f(x).e^{-\cos x}\right)'=\cos x\Leftrightarrow\int\left(f(x).e^{-\cos x}\right)'dx=\int\cos x.dx$

$\Leftrightarrow f(x).e^{-\cos x}=\sin x+C$.

Do $f(0)=2e$ nên $2e.e^{-1}=C\Rightarrow C=2$.

Vậy $f(x)=\frac{\sin x+2}{e^{-\cos x}}=e^{\cos x}(\sin x+2)$.

$I=\int_0^{\pi}f(x).dx=\int_0^{\pi}e^{\cos x}(\sin x+2)dx$.

Sử dụng MTCT ( để đơn vị rad). KQ: 10,31

**Câu 44:** **(GIỮA-HKII-2019-NGHĨA-HƯNG-NAM-ĐỊNH)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[xf'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x).f''(x)\right]$ với mọi $x$ dương. Biết $f(1)=f'(1)=1$. Giá trị $f^2(2)$ bằng

**A.** $f^2(2)=\sqrt{2\ln 2+2}$. **B.** $f^2(2)=2\ln 2+2$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**C.** $f^2(2)=\ln 2+1$. **D.** $f^2(2)=\sqrt{\ln 2+1}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $\left[xf'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x).f''(x)\right];\ x>0$

$\Leftrightarrow x^2.\left[f'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x).f''(x)\right]$

$\Leftrightarrow \left[f'(x)\right]^2+\frac{1}{x^2}=1-f(x).f''(x)$

$\Leftrightarrow \left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=1-\frac{1}{x^2}$

$\Leftrightarrow \left[f(x).f'(x)\right]'=1-\frac{1}{x^2}$

Do đó: $\int\left[f(x).f'(x)\right]'.dx=\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right).dx\Rightarrow f(x).f'(x)=x+\frac{1}{x}+c_1.$

Vì $f(1)=f'(1)=1\Rightarrow 1=2+c_1\Leftrightarrow c_1=-1.$

Nên $\int f(x).f'(x).dx=\int\left(x+\frac{1}{x}-1\right).dx\Leftrightarrow\int f(x).d\left(f(x)\right)=\int\left(x+\frac{1}{x}-1\right).dx$

$\Rightarrow\frac{f^2(x)}{2}=\frac{x^2}{2}+\ln x-x+c_2.$ Vì $f(1)=1\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-1+c_2\Leftrightarrow c_2=1.$

Vậy $\frac{f^2(x)}{2}=\frac{x^2}{2}+\ln x-x+1\Rightarrow f^2(2)=2\ln 2+2.$

**Câu 45:** **(Đặng Thành Nam Đề 9)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)>0,\ \forall x\in[1;2]$ thỏa mãn $f(1)=1,\ f(2)=\frac{22}{15}$ và $\int_1^2\frac{\left(f'(x)\right)^3}{x^4}dx=\frac{7}{375}$. Tích phân $\int_1^2 f(x)dx$ bằng

**A.** $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{7}{5}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\int_1^2 f'(x)dx=f(2)-f(1)=\frac{22}{15}-1=\frac{7}{15}.$

Mặt khác sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$\frac{\left(f'(x)\right)^3}{x^4}+\frac{1}{125}x^2+\frac{1}{125}x^2\ge 3\sqrt[3]{\frac{\left(f'(x)\right)^3}{x^4}.\frac{1}{125}x^2.\frac{1}{125}x^2}=\frac{3}{25}f'(x)\ \ \forall x\in[1;2].$

Do đó

$\int_1^2\left(\frac{\left(f'(x)\right)^3}{x^4}+\frac{2}{125}x^2\right)dx\ge\frac{3}{25}\int_1^2 f'(x)dx\Leftrightarrow\int_1^2\frac{\left(f'(x)\right)^3}{x^4}dx\ge\frac{3}{25}\int_1^2 f'(x)dx-\frac{2}{125}\int_1^2 x^2dx=\frac{7}{375}.$

Vì vậy dấu bằng xảy ra, tức

$\frac{\left(f'(x)\right)^3}{x^4}=\frac{1}{125}x^2\Leftrightarrow f'(x)=\frac{x^2}{5}.$

Ta có $\int\frac{x^2}{5}dx=\frac{x^3}{15}+C\Rightarrow f(x)=\frac{x^3}{15}+C$ với $C$ là một hằng số thực.

Vì $f(1)=1\Rightarrow\frac{1}{15}+C=1\Leftrightarrow C=\frac{14}{15}\Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{5}+\frac{14}{15}$.

Vậy $\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\left(\frac{x^2}{5}+\frac{14}{15}\right)dx=\frac{7}{5}$.

**Câu 46:** **(SỞ GDĐT KIÊN GIANG 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f^2(x).f'(x)-4xe^{-f^3(x)+2x^2+x+1}=1=f(0)$. Biết rằng $I=\int_0^{\frac{-1+\sqrt{4089}}{4}}(4x+1)f(x)dx=\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T=a-3b$

**A.** $T=6123$. **B.** $T=12279$. **C.** $T=6125$. **D.** $T=12273$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có:

$3f^2(x).f'(x)-4xe^{-f^3(x)+2x^2+x+1}=1=f(0)$.

$\Leftrightarrow(f^3(x))'e^{f^3(x)}-e^{f^3(x)}=(4x+1).e^{2x^2+x+1}-e^{2x^2+x+1}$

$\Rightarrow\left[f^3(x)-x\right]'e^{f^3(x)-x}=\left(2x^2+1\right)'.e^{2x^2+1}\Rightarrow e^{f^3(x)-x}=e^{2x^2+1}+C$

Mà $f(0)=1\Rightarrow C=0\Rightarrow f^3(x)-x=2x^2+1$

$\Rightarrow f^3(x)=2x^2+x+1\Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{2x^2+x+1}$

$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{-1+\sqrt{4089}}{4}}(4x+1)f(x)dx=\frac{12285}{4}$.

**Câu 47:** **(THPT-Toàn-Thắng-Hải-Phòng)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx=\frac{3}{2}-2\ln 2$ và $\int_0^1\frac{f(x)}{(x+1)^2}dx=2\ln 2-\frac{3}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

**A.** $\frac{1-2\ln 2}{2}$. **B.** $\frac{3-2\ln 2}{2}$. **C.** $\frac{3-4\ln 2}{2}$. **D.** $\frac{1-\ln 2}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:

$\int_0^1\frac{f(x)}{(x+1)^2}dx=\int_0^1 f(x)d\left(\frac{x}{x+1}\right)=\frac{x.f(x)}{x+1}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x.f'(x)}{x+1}dx=\frac{f(1)}{2}-\int_0^1\frac{x.f'(x)}{x+1}dx=-\int_0^1\frac{x.f'(x)}{x+1}dx$

$\Rightarrow\int_0^1\frac{x.f'(x)}{x+1}dx=-\int_0^1\frac{f(x)}{(x+1)^2}dx=\frac{3}{2}-2\ln 2$.

Mặt khác:

$\int_0^1\left(\frac{x}{x+1}\right)^2dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^2dx=\int_0^1\left[1-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right]dx=\left(x-2\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}\right)\Big|_0^1=\frac{3}{2}-2\ln 2$

Khi đó:

$\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx-2\int_0^1\frac{x.f'(x)}{x+1}dx+\int_0^1\left(\frac{x}{x+1}\right)^2dx=\frac{3}{2}-2\ln 2-2\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right)+\frac{3}{2}-2\ln 2=0$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left\{ \left[ f'(x) \right]^2 - 2.\frac{x}{x+1}.f'(x) + \left( \frac{x}{x+1} \right)^2 \right\} dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[ f'(x) - \frac{x}{x+1} \right]^2 dx = 0 \ (*)$$

Vì $\left[ f'(x) - \frac{x}{x+1} \right]^2 \ge 0, \forall x \in [0;1]$ nên $\int_0^1 \left[ f'(x) - \frac{x}{x+1} \right]^2 dx \ge 0, \forall x \in [0;1]$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow f'(x) - \frac{x}{x+1} = 0, \forall x \in [0;1] \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x}{x+1}, \forall x \in [0;1]$.

Khi đó: $\int_0^1 f(x)dx = x.f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x.f'(x)dx = -\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx = -\int_0^1 \left( x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx$

$$= -\left( \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| \right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \ln 2 = \frac{1 - 2\ln 2}{2}$$

**Câu 48:** **(Đặng Thành Nam Đề 3)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn [0;1]. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \int_0^1 (2f(x) + 3x) f(x)dx - \int_0^1 (4f(x) + x)\sqrt{xf(x)}\,dx$ bằng

**A.** $-\frac{1}{24}$. **B.** $-\frac{1}{8}$. **C.** $-\frac{1}{12}$. **D.** $-\frac{1}{6}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $a = f(x)$, ta có:

$$M = \int_0^1 (2f(x) + 3x) f(x)dx - \int_0^1 (4f(x) + x)\sqrt{xf(x)}\,dx = \int_0^1 (2a + 3x)a\,dx - \int_0^1 (4a + x)\sqrt{xa}\,dx$$

$$= \int_0^1 \left( 2a^2 - 4a\sqrt{xa} + 3xa - x\sqrt{xa} \right) dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{8}\left( 2\sqrt{a} - \sqrt{x} \right)^4 - \frac{x^2}{8} \right) dx \ge \int_0^1 \left( -\frac{x^2}{8} \right) dx = -\frac{1}{24}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $2\sqrt{a} = \sqrt{x} \Leftrightarrow 4a = x \Leftrightarrow a = \frac{x}{4} \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M$ bằng $-\frac{1}{24}$.

**Lời bình**

Trong bài giải trên có sử dụng biến đổi:

$$2a^2 - 4a\sqrt{xa} + 3xa - x\sqrt{xa} = \frac{1}{8}\left( 2\sqrt{a} - \sqrt{x} \right)^4 - \frac{x^2}{8} \ge -\frac{x^2}{8}.$$

Tuy nhiên, nếu như các hệ số của biểu thức $2a^2 - 4a\sqrt{xa} + 3xa - x\sqrt{xa}$ bị thay đổi (thành các hệ số khác) thì ta khó mà đưa về dạng mũ 4 như trên được.

Câu hỏi đặt ra là trong những trường hợp đó thì phải làm thế nào để đưa ra được đánh giá.

Để ý rằng biểu thức $2a^2 - 4a\sqrt{ax} + 3ax - x\sqrt{ax}$ là đẳng cấp bậc hai. Chúng tôi xin đề xuất một hướng giải quyết trong trường hợp biểu thức cần đánh giá là đẳng cấp. Chẳng hạn trong bài toán trên, ta cần đánh giá biểu thức $g(a,x) = 2a^2 - 4a\sqrt{ax} + 3ax - x\sqrt{ax}$, với $x \in [0;1]$ và $a = f(x) \ge 0, \forall x \in [0;1]$. Ta sẽ thực hiện như sau:

+) Với $x\neq 0$ thì biểu diễn được $g(a,x)=x^2\left(\frac{2a^2}{x^2}-\frac{4a\sqrt{a}}{x\sqrt{x}}+\frac{3a}{x}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\right)$.

Đặt $t=\sqrt{\frac{a}{x}}\geq 0$. Khi đó $g(a,x)=x^2\left(2t^4-4t^3+3t^2-t\right)$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $h(t)=2t^4-4t^3+3t^2-t$ trên $[0;+\infty)$, ta được $\min\limits_{[0;+\infty)} h(t)=-\frac{1}{8}$.

Do đó ta có $g(a,x)\geq -\frac{x^2}{8}$, $\forall x\in(0;1]$.

+) Kiểm tra được đánh giá trên cũng đúng khi $x=0$.

Như vậy $g(a,x)\geq -\frac{x^2}{8}$, $\forall x\in[0;1]$. Từ đó lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[0;1]$ thì bài toán được giải quyết.

*Chú ý:* Nếu $g(a,x)$ là đẳng cấp bậc *n* thì ta đưa $x^n$ ra ngoài dấu ngoặc.

**Câu 49:** **(Đặng Thành Nam Đề 10)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1;e]$ thỏa mãn $f(1)=\frac{1}{2}$ và $x.f'(x)=xf^2(x)-3f(x)+\frac{1}{x}$, $\forall x\in[1;e]$. Giá trị của $f(e)$ bằng

**A.** $\frac{3}{2e}$. **B.** $\frac{4}{3e}$. **C.** $\frac{3}{4e}$. **D.** $\frac{2}{3e}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Theo giả thiết, với $\forall x\in[1;e]$ ta có

$$xf'(x)=xf^2(x)-3f(x)+\frac{1}{x}\Leftrightarrow x^2f^2(x)-3xf(x)+1=x^2f'(x)$$

$$\Leftrightarrow x^2f^2(x)-2xf(x)+1=x^2f'(x)+xf(x)$$

$$\Leftrightarrow (xf(x)-1)^2=x\left(xf'(x)+f(x)\right)=x\left(xf(x)-1\right)'$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(xf(x)-1\right)'}{\left(xf(x)-1\right)^2}=\frac{1}{x}\Rightarrow\int\frac{\left(xf(x)-1\right)'}{\left(xf(x)-1\right)^2}dx=\int\frac{1}{x}dx\Leftrightarrow -\frac{1}{xf(x)-1}=\ln|x|+C$$

$$\Leftrightarrow xf(x)-1=-\frac{1}{\ln|x|+C}\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x\left(\ln|x|+C\right)}.$$

Thay $x=1$ vào ta có $f(1)=1-\frac{1}{C}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow C=2\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x\left(\ln|x|+2\right)}\Rightarrow f(e)=\frac{2}{3e}$.

**Câu 50:** **(Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đăk Lăk)**Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn hai điều kiện $\left[f(x)\right]^2+3x^2+2x-1\leq 4x.f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $\int\limits_{-1}^{3}f(x)dx=12$. Giá trị $\int\limits_{0}^{2}f(x)dx$ bằng

**A.** 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 5.

**Lời giải**

**Chọn D**

$$f^2(x)+3x^2+2x-1\leq 4x.f(x)$$

$$\Leftrightarrow\left[f(x)-(x+1)\right]\left[f(x)-(3x-1)\right]\leq 0\quad(1).$$

* Nếu $x \ge 1$ thì $(1) \Leftrightarrow x+1 \le f(x) \le 3x-1$

$\Rightarrow \int_1^3 (x+1)\,dx \le \int_1^3 f(x)\,dx \le \int_1^3 (3x-1)\,dx \Leftrightarrow 6 \le \int_1^3 f(x)\,dx \le 10 \quad (2).$

* Nếu $x \le 1$ thì $(1) \Leftrightarrow 3x-1 \le f(x) \le x+1$

$\Rightarrow \int_{-1}^1 (3x-1)\,dx \le \int_{-1}^1 f(x)\,dx \le \int_{-1}^1 (x+1)\,dx \Leftrightarrow -2 \le \int_{-1}^1 f(x)\,dx \le 2 \quad (3).$

Từ $(2)$ và $(3) \Rightarrow 4 \le \int_{-1}^3 f(x)\,dx \le 12.$

Do $\int_{-1}^3 f(x)\,dx = 12 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{khi } x \ge 1 \\ x+1 & \text{khi } x \le 1 \end{cases}.$

Vậy $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = 5.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

## GTLN, GTNN, BĐT – TÍCH PHÂN

**Câu 1:** Tìm giá trị lớn nhất của $G(x)=\int_1^x\left(t^2+t\right)dt$ trên đoạn $[-1;1]$.

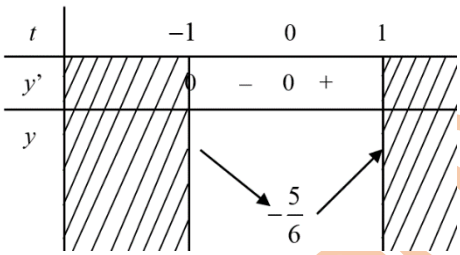
**A.** $\frac{1}{6}$. **B.** $2$. **C.** $-\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

**Lời giải**

$G(x)=\int_1^x\left(t^2+t\right)dt=\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^x=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{5}{6}$

$\Rightarrow G'(x)=x^2+x \Rightarrow$ bảng biến thiên:

Từ bảng biến thiên




**Chọn C**

**Câu 2:** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}\left(x^3-4x\right)$. Hàm số $F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $1$. **D.** $4$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $F'(x)=f(x)=\mathrm{e}^{x^2}.x(x-2)(x+2)$.

$F'(x)$ đổi dấu qua các điểm $x=0;\ x=\pm 2$ nên hàm số $F(x)$ có 3 điểm cực trị.

**Câu 3:** Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số $f(x)=\frac{2017x}{\left(x^2+1\right)^{2018}}$ thỏa mãn $F(1)=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất $m$ của $F(x)$.

**A.** $m=-\frac{1}{2}$. **B.** $m=\frac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$. **C.** $m=\frac{1+2^{2017}}{2^{2018}}$. **D.** $m=\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\int f(x)dx=\int\frac{2017x}{\left(x^2+1\right)^{2018}}dx=\frac{2017}{2}\int\left(x^2+1\right)^{-2018}d\left(x^2+1\right)=\frac{2017}{2}.\frac{\left(x^2+1\right)^{-2017}}{-2017}+C$

$=-\frac{1}{2\left(x^2+1\right)^{2017}}+C=F(x)$

Mà $F(1)=0\Rightarrow-\frac{1}{2.2^{2017}}+C=0\Rightarrow C=\frac{1}{2^{2018}}$

Do đó $F(x)=-\frac{1}{2.\left(x^2+1\right)^{2017}}+\frac{1}{2^{2018}}$ suy ra

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$F(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $\dfrac{1}{2(x^2+1)^{2017}}$ lớn nhất $\Leftrightarrow (x^2+1)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x=0$

Vậy $m=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^{2018}}=\dfrac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$.

**Câu 4:** Tìm giá trị lớn nhất $M$ của hàm số $f(t)=\int_0^t\left(2\sqrt{3}\cos 2x+2\sin 2x\right)dx$ trong khoảng $(0;+\infty)$.

**A.** $M=3\sqrt{3}$. **B.** $M=3$. **C.** $M=2\sqrt{3}$. **D.** $M=2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $f(t)=\int_0^t\left(2\sqrt{3}\cos 2x+2\sin 2x\right)dx=\left(\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x\right)\Big|_0^t=\sqrt{3}\sin 2t-\cos 2t+1$.

$f(t)=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2t-\dfrac{1}{2}\cos 2t\right)+1=2\sin\left(2t-\dfrac{\pi}{6}\right)+1\le 3$.

Dấu bằng xảy ra khi $t=\dfrac{\pi}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất $M$ của hàm số là 3.

**Câu 5:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn $f'(x)\ge x+\dfrac{1}{x}$, $\forall x\in\mathbb{R}^+$ và $f(1)=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(2)$.

**A.** 3. **B.** 2. **C.** $\dfrac{5}{2}+\ln 2$. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn C**

Theo giả thiết $f'(x)\ge x+\dfrac{1}{x}$, $\forall x\in\mathbb{R}^+$ nên lấy tích phân 2 vế với cận từ 1 đến 2 ta được

$\int_1^2 f'(x)dx\ge\int_1^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)dx=\dfrac{3}{2}+\ln 2$

Mà $\int_1^2 f'(x)dx=f(x)\Big|_1^2=f(2)-f(1)=f(2)-1$ nên $f(2)-1\ge\dfrac{3}{2}+\ln 2\Rightarrow f(2)\ge\dfrac{5}{2}+\ln 2$

Đẳng thức xảy ra khi $f'(x)=x+\dfrac{1}{x},x>0\Rightarrow f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\ln x+C$.

Mà $f(1)=1\Rightarrow C=\dfrac{1}{2}$. Vậy $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\ln x+\dfrac{1}{2}$.

KL: giá trị nhỏ nhất của $f(2)$ bằng $\dfrac{5}{2}+\ln 2$ khi $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\ln x+\dfrac{1}{2}$.

**Câu 6:** Gọi $x_1$, $x_2$ lần lượt là điểm cực đại và điểm cực tiểu của hàm số $f(x)=\int_{e^x}^{e^{2x}}t\ln t dt$. Tính $S=x_1+x_2$.

**A.** $\ln 2e$. **B.** $\ln 2$. **C.** $-\ln 2$. **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn C**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Đặt $g'(t)=t\ln t$. Ta có $f(x)=\int\limits_{e^x}^{e^{2x}} t\ln t\,dt=g\left(e^{2x}\right)-g\left(e^x\right)$

Ta có $f'(x)=\left(e^{2x}\right)'.g'\left(e^{2x}\right)-\left(e^x\right)'.g'\left(e^x\right)=2e^{2x}.e^{2x}.\ln e^{2x}-e^x.e^x.\ln e^x$

$=4xe^{4x}-xe^{2x}=xe^{2x}\left(4e^{2x}-1\right)$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=0\\x_2=-\ln 2\end{array}\right.$.

$x_1+x_2=-\ln 2$.

**Câu 7:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $[1;+\infty)$ thỏa mãn $f(1)=1$ và $f'(x)\ge 3x^2+2x-5$ trên $[1;+\infty)$. Tìm số nguyên dương lớn nhất $m$ sao cho $\min\limits_{x\in[3;10]} f(x)\ge m$ với mọi hàm số $y=f(x)$ thỏa điều kiện đề bài.

**A.** $m=15$. **B.** $m=20$. **C.** $m=25$. **D.** $m=30$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $f'(x)\ge 3x^2+2x-5$ trên $[1;+\infty)$

Do $3x^2+2x-5\ge 0$, $\forall x\in[1;+\infty)$ nên $f'(x)\ge 0$, $\forall x\in[1;+\infty)$.

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$. Suy ra $\min\limits_{x\in[3;10]} f(x)=f(3)$.

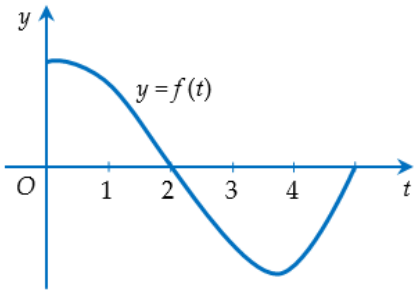
Ta lại có:

$\int\limits_1^3 f'(x)dx\ge\int\limits_1^3\left(3x^2+2x-5\right)dx\Leftrightarrow f(x)\Big|_1^3\ge\left(x^3+x^2-5x\right)\Big|_1^3$

$\Leftrightarrow f(3)-f(1)\ge 24\Leftrightarrow f(3)\ge 25$

Vậy $\min\limits_{x\in[3;10]} f(x)\ge 25$. Hay $m=25$.

**Câu 8:** Xét hàm số $F(x)=\int\limits_2^x f(t)dt$ trong đó hàm số $y=f(t)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Trong các giá trị dưới đây, giá trị nào là lớn nhất?




**A.** $F(1)$. **B.** $F(2)$. **C.** $F(3)$. **D.** $F(0)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $F'(x)=\left(\int\limits_2^x f(t)dt\right)'=f(x)$.

Xét trên đoạn $[0;3]$, ta thấy $F'(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x=2$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy trên $[0;2]$ hàm số $F(x)$ đồng biến nên $F(0)<F(2)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Dựa vào đồ thị, ta thấy trên $[2;3]$ hàm số $F(x)$ nghịch biến nên $F(3)<F(2)$.

Vậy $F(2)$ là giá trị lớn nhất.

**Câu 9:** Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=\int_0^1\left|x^2-ax\right|dx$ với $a\in[0,1]$

**A.** $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$. **C.** $\frac{2-\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}-1}{6}$

**Lời giải**

Phá dấu trị tuyệt đối ta có

$$S=\int_0^1\left|x^2-ax\right|dx=-\int_0^a\left(x^2-ax\right)dx+\int_a^1\left(x^2-ax\right)dx=\left(\frac{-x^3}{3}+\frac{ax^2}{3}\right)\Big|_0^a+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{ax^2}{3}\right)\Big|_a^1=\frac{2a^3-3a+2}{6}$$

$$S_{\min}=f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{6}$$

**Câu 10:** Cho $a+b=ab+4$ và $a<b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $I=\int_a^b\left|x^2-(a+b)x+ab\right|dx$

**A.** $4\sqrt{3}$. **B.** $12$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $48$

Ta có

$$I^2=\frac{\Delta^3}{36.a^4}=\frac{\left((a+b)^2-4ab\right)^3}{36}=\frac{\left((ab+4)^2-4ab\right)^3}{36}=\frac{\left((ab+2)^2+12\right)^3}{36}\ge\frac{12^3}{36}=48$$

$$\Rightarrow I\ge 4\sqrt{3}$$

**Câu 11:** Tìm giá trị nhỏ nhất của $I=\int_a^b\left|x^2+(2-m)x-2\right|dx$ trong đó $a<b$ là hai nghiệm của phương trình $x^2+(2-m)x-2=0$

**A.** $\frac{128}{9}$. **B.** $\frac{8\sqrt{2}}{3}$. **C.** $8$. **D.** $2\sqrt{2}$

$$I=\frac{\Delta^3}{36a^4}=\frac{\left((2-m)^2+8\right)^3}{36}\ge\frac{128}{9}\Rightarrow I\ge\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

**Câu 12:** Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=\int_0^1\left|x^3-ax\right|dx$ với $a\in[0,1]$

**A.** $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{2-\sqrt{2}}{8}$

$$S=\int_0^{\sqrt{a}}\left(a.x-x^3\right)dx+\int_{\sqrt{a}}^1\left(x^3-a.x\right)dx=\left(\frac{a.x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^{\sqrt{a}}+\left(\frac{x^4}{4}-\frac{a.x^2}{2}\right)\Big|_{\sqrt{a}}^1$$

$$S=\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}\ge\frac{1}{8}$$

**Câu 13:** Cho $a+b=ab+4$ và $a<b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $I=\int_a^b\left|(x-a)^2(x-b)\right|dx$

**A.** 12. **B.** 0. **C.** $\frac{64}{3}$. **D.** $\frac{49}{3}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$S=-\int_a^b (x-a)^2\left[(x-a)+(a-b)\right]dx=-\int_a^b (x-a)^2(x-a)dx-(a-b)\int_a^b (x-a)^2dx$$

$$S=\frac{1}{12}(a-b)^4=\frac{1}{12}\left((a+b)^2-4ab\right)^2=\frac{1}{12}\left((ab+4)^2-4ab\right)^2=\frac{1}{12}\left((ab+2)^2+12\right)^2\geq 12$$

**Câu 14:** Cho $(a-b)^2+\left(a^2-b^2\right)^2=4$ và $a<b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $I=\int_a^b \left|x^2-(a+b)x+ab\right|dx$

**A.** $\frac{16}{9}$. **B.** $\frac{9}{16}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$

$$4=(a-b)^2+\left(a^2-b^2\right)^2=(a-b)^2\left(1+(a+b)^2\right)\geq(a-b)^2$$

$$I^2=\frac{\Delta^3}{36a^4}=\frac{\left((a+b)^2-4ab\right)^3}{36}=\frac{\left((a-b)^2\right)^3}{36}\leq\frac{4^3}{36}=\frac{4}{3}$$

Khi đó $\begin{cases}a+b=0\\(a-b)^2+\left(a^2-b^2\right)^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$

**Câu 15:** Gọi a,b lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $S=\int_m^{2m}\left|x^3-4mx^2+5m^2x-2m^3\right|dx$ với $m\in[1;3]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

**A.** $a+b=\frac{41}{6}$. **B.** $a+b=1$. **C.** $a+b=\frac{21}{4}$. **D.** $a+b=2$

$$S=\int_m^{2m}\left|(x-m)^2(x-2m)\right|dx=-\int_m^{2m}(x-m)^2(x-2m)dx=-\int_m^{2m}(x-m)^2\left((x-m)-m\right)dx$$

$$S=-\int_m^{2m}(x-m)^3dx+m\int_m^{2m}(x-m)^2dx=\left(\frac{-(x-m)^4}{4}+\frac{m(x-m)^3}{3}\right)\Bigg|_m^{2m}=\frac{m^4}{12}$$

Thay $m\in[1;3]$ vào ta có $a+b=\frac{41}{6}$

**Câu 16:** m là tham số thuộc đoạn $[1;3]$. Gọi $a,b$ lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P=\int_m^{2m}(x-m)^2(x-2m)^2dx$. Tính $a+b=$

**A.** 31. **B.** 36. **C.** $\frac{122}{15}$. **D.** $\frac{121}{4}$

$$P=\frac{m^5}{30}\in\left[\frac{1}{30};\frac{3^5}{30}\right]\to T=\frac{3^5+1}{30}=\frac{122}{15}$$

**Câu 17:** Giá trị nhỏ nhất của $P=\int_m^{2m^2+2}\left|x^2-2\left(m^2+m+1\right)x+4\left(m^3+m\right)\right|dx$ là $S=\frac{a}{b};a,b$ nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $T=a+b$

**A.** 7. **B.** 337. **C.** 25. **D.** 91

**Lời giải**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có: $P=\dfrac{4\left(m^2-m+1\right)^3}{3}\ge\dfrac{4}{3}.\left(\dfrac{3}{4}\right)^3=\dfrac{9}{16}\Rightarrow T=9+16=25$

**Câu 18:** $A$ là tập các hàm số $f$ lien tục trên đoạn $[0;1]$. Tìm $m=\underbrace{\min}_{f\in A}\left\{\int_0^1 x.f^2(x)dx-\int_0^1 x^{2018}.f(x)dx\right\}$

**A.** $\dfrac{-1}{2019}$. **B.** $\dfrac{-1}{16144}$. **C.** $\dfrac{-2017}{2018}$. **D.** $\dfrac{-1}{16140}$

**Lời giải**

Biểu thức đã cho là tam thức bậc 2 ẩn là $f(x)$ có hệ số $a=x;b=-x^{2018};c=0$

Nên biểu thức Min tại $\begin{cases} f(x)=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{x^{2017}}{2} \\ m_{\min}=\displaystyle\int_0^1\dfrac{-\Delta}{4a}dx=\int_0^1\dfrac{-x^{4036}}{4.x}dx=\dfrac{-x^{4035}}{4x4036}\Big|_0^1=\dfrac{-1}{16144}\end{cases}$

**Câu 19:** $A$ là tập các hàm số $f$ lien tục trên đoạn $[0;1]$. Tìm $M=\underbrace{\min}_{f\in A}\left\{-\int_0^1 x.f^2(x)dx+\int_0^1 x^{2013}.f(x)dx\right\}$

**A.** $\dfrac{1}{2014}$. **B.** $\dfrac{503}{2014}$. **C.** $\dfrac{2012}{2013}$. **D.** $\dfrac{1}{8.2013}$

**Lời giải**

Biểu thức đã cho là tam thức bậc 2 ẩn là $f(x)$ có hệ số $a=-x;b=--x^{2013};c=0$

Nên biểu thức Max tại $\begin{cases} f(x)=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{x^{2013}}{2x}=\dfrac{x^{2012}}{2} \\ M_{max}=\displaystyle\int_0^1\dfrac{-\Delta}{4a}dx=\int_0^1\dfrac{x^{4026}}{4.x}dx=\dfrac{x^{4026}}{4.4026}\Big|_0^1=\dfrac{1}{4.4026}\end{cases}$

**Câu 20:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)\le 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Tìm giá trị lớn nhất của $f(1)$

**A.** $\dfrac{2e-1}{e}$. **B.** $\dfrac{e-1}{e}$. **C.** $e-1$. **D.** $2e-1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$f(x)+f'(x)\le 1\Leftrightarrow e^x f(x)+e^x f'(x)\le e^x\Leftrightarrow\left[e^x f(x)\right]'\le\left(e^x\right)'\Leftrightarrow\int_0^1\left[e^x f(x)\right]'dx\le\int_0^1\left(e^x\right)'dx$$

$$\Leftrightarrow\left[e^x f(x)\right]\Big|_0^1\le e^x\Big|_0^1\Leftrightarrow e.f(1)\le e-1\Leftrightarrow f(1)\le\frac{e-1}{e}.$$

Do đó giá trị lớn nhất của $f(1)$ là $\dfrac{e-1}{e}$.

**Câu 21:** $A$ là tập các hàm số $f$ lien tục trên đoạn $[0;1]$ và nhận giá trị không âm trên đoạn $[0;1]$. Tìm m nhỏ nhất sao cho $\displaystyle\int_0^1 f\left(\sqrt[2018]{x}\right)dx\le m.\int_0^1 f(x)dx\ \ \forall f\in A$

**A.** $2018$. **B.** $1$. **C.** $\dfrac{1}{2018}$. **D.** $\sqrt{2018}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Đặt $t^{2018}=x\Rightarrow dx=2018.t^{2017}dt$ nên $\int_0^1 f\left(\sqrt[2018]{x}\right)dx=2018.\int_0^1 t^{2017}.f(t).dt\le 2018\int_0^1 f(t).dt$

Tìm m nhỏ nhất nên $m\le 2018$. Ta sẽ Cm $m=2018$ là số cần tìm. Xét $f(x)=x^n$ ta có

$$\int_0^1 x^{n/2018}dx\le m\int_0^1 x^n dx\to\frac{2018}{n+2018}\le\frac{m}{n+1}\to m\ge\frac{2018(n+1)}{n+2018}$$

Cho $n\to+\infty$ ta có $m\ge 2018$. Vậy $m=2018$ là hằng số nhỏ nhất cần tìm

**Câu 22:** Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=2018.f(0)$. Tìm giá trị nhỏ nhất biểu thức $M=\int_0^1\frac{1}{[f(x)]^2}dx+\int_0^1[f'(x)]^2dx$

**A.** $\ln 2018$. **B.** $2\ln 2018$. **C.** $2e$. **D.** $2018e$

**Lời giải**

$$M=\int_0^1\left[\frac{1}{f(x)}-f'(x)\right]^2dx+2\int_0^1\frac{f(x)}{f'(x)}dx\ge 2\int_0^1\frac{f(x)}{f'(x)}dx=2\ln|f(x)|\Big|_0^1=2\ln 2018$$

**Câu 23:** Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1)=e.f(0)=e;\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2dx\le 1$. Tìm mệnh đề đúng

**A.** $f\left(\frac{1}{2}\right)=e^2$. **B.** $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}$. **C.** $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}$. **D.** $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2e}$

**Lời giải**

Ta có $\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|\Big|_0^1=\ln f(1)-\ln f(0)=\ln\frac{f(1)}{f(0)}=\ln e=1$

Nên $\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2dx\le 1\Leftrightarrow\int_0^1\left[\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2-1\right]dx\le 0$

$$\int_0^1\left[\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2-2.\frac{f'(x)}{f(x)}+1\right]dx\le 0\Leftrightarrow\int_0^1\left[\frac{f'(x)}{f(x)}-1\right]^2dx\le 0\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}-1=0$$

Vậy: $f(x)=A.e^x$. Mà $f(1)=e.f(0)=e$ Nên $f(x)=e^x\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}$

$\frac{f'(x)}{f(x)}$

$f(1)=e.f(0)=e$

$f(x)=e^x\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}$

**Câu 24:** Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=e.f(0)$. Biểu thức $\int_0^1\frac{1}{[f(x)]^2}dx+\int_0^1[f'(x)]^2dx\le 2$. Mệnh đề nào đúng

**A.** $f(1)=\sqrt{\frac{2e}{e-1}}$. **B.** $f(1)=\sqrt{\frac{2e^2}{e^2-1}}$. **C.** $f(1)=\sqrt{\frac{2(e-2)}{e-1}}$. **D.** $f(1)=\frac{2(e-2)}{e^2-1}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Lời giải**

Viết lại biểu thức cho dưới dạng $\int_0^1\left[\frac{1}{f(x)}-f'(x)\right]^2 dx\le 0$. Dấu bằng xảy ra khi

$$\frac{1}{f(x)}-f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{f(x)}=f'(x)\Leftrightarrow\int 1dx=\int f(x).d\left(f(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow x+c=\frac{f^2(x)}{2}\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{2(x+c)}$$

Thay $x=0$ vào ta có $\begin{cases}f(0)=\sqrt{2c}\\ f(1)=\sqrt{2+2c}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{f(1)}{f(0)}=e=\frac{\sqrt{2+2c}}{\sqrt{2c}}\Leftrightarrow c=\frac{1}{e^2-1}$

$$\to f(x)=\sqrt{2x+\frac{1}{e^2-1}}\to f(1)=\sqrt{\frac{2e^2}{e^2-1}}$$

**Câu 25:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1;1]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f^2(x)\le 1$ với mọi $x\in[-1;1]$ và $\int_{-1}^1 f(x)dx=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int_{-1}^1 x^2 f(x)dx$?

**A.** $-\frac{1}{2}$ **B.** $-\frac{1}{4}$ **C.** $-\frac{2}{3}$ **D.** $-1$

**Lời giải**

Ta đặt $I=\int_{-1}^1 x^2 f(x)dx\Rightarrow|I|=\left|\int_{-1}^1\left(x^2-a\right)f(x)dx\right|\le\int_{-1}^1\left|x^2-a\right||f(x)|dx\le\int_{-1}^1\left|x^2-a\right|dx\ \ \forall a\in\mathbb{R}$.

Do đó ta suy ra $|I|\le\min_{a\in\mathbb{R}}\int_{-1}^1\left|x^2-a\right|dx$. Đến đây ta chia bài toán thành 3 trường hợp như sau:

**Trường hợp 1:** Nếu $a\le 0$ thì $\min_{a\in\mathbb{R}}\int_{-1}^1\left|x^2-a\right|dx=\min_{a\le 0}\int_{-1}^1\left(x^2-a\right)dx=\min_{a\le 0}\left(\frac{2}{3}-2a\right)=\frac{2}{3}$.

**Trường hợp 2:** Nếu $a\ge 1$ thì $\min_{a\in\mathbb{R}}\int_{-1}^1\left|x^2-a\right|dx=\min_{a\ge 1}\int_{-1}^1\left(a-x^2\right)dx=\min_{a\ge 1}\left(2a-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$.

**Trường hợp 3:** Nếu $a\in[0;1]$ thì

$$\min_{a\in\mathbb{R}}\int_{-1}^1\left|x^2-a\right|dx=\min_{a\in[0;1]}\left(\int_{-1}^{-\sqrt{a}}\left(x^2-a\right)dx+\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}\left(a-x^2\right)dx+\int_{\sqrt{a}}^1\left(x^2-a\right)dx\right)$$

$$\Leftrightarrow\min_{a\in\mathbb{R}}\int_{-1}^1\left|x^2-a\right|dx=\min_{a\in[0;1]}\left[\left(\frac{x^3}{3}-ax\right)\Big|_{-1}^{-\sqrt{a}}+\left(ax-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}+\left(\frac{x^3}{3}-ax\right)\Big|_{\sqrt{a}}^1\right]$$

$$\Leftrightarrow\min_{a\in\mathbb{R}}\int_{-1}^1\left|x^2-a\right|dx=\min_{a\in[0;1]}\left(\frac{8a\sqrt{a}}{3}-2a+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}$$ khi và chỉ khi $a=\frac{1}{4}$.

**Kết luận:** Như vậy $\min_{a\in\mathbb{R}}\int_{-1}^1\left|x^2-a\right|dx=\frac{1}{2}$ do đó $|I|\le\frac{1}{2}\Rightarrow\boxed{\min I=-\frac{1}{2}}$.

**Câu 26:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn $f(x)\in[-8;8]$ với mọi $x\in[0;1]$ và $\int_0^1 xf(x)dx=3$. Tìm giá trị lớn nhất của $\int_0^1 x^3 f(x)dx$?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** 2 **B.** $\frac{31}{16}$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** $\frac{17}{8}$

**Lời giải**

Ta đặt $I=\int_0^1 x^3 f(x)dx$ khi đó: $|I-3a|=\left|\int_0^1 (x^3-ax)f(x)dx\right|\le\int_0^1|x^3-ax||f(x)|dx$

$\Rightarrow |I-3a|\le 8\int_0^1|x^3-ax|dx \ \ \forall a\in\mathbb{R}\Rightarrow I\le 3a+8\int_0^1|x^3-ax|dx \ \ \forall a\in\mathbb{R}\Rightarrow I\le\min_{a\in\mathbb{R}}\left(3a+8\int_0^1|x^3-ax|dx\right)$

.

**Trường hợp 1:** Nếu $a\le 0$ khi đó $\min_{a\in\mathbb{R}}\left(3a+8\int_0^1|x^3-ax|dx\right)=\min_{a\le 0}\left(3a+8\int_0^1(x^3-ax)dx\right)=\min_{a\le 0}(2-a)=2$

**Trường hợp 2:** Nếu $a\ge 1$ khi đó $\min_{a\in\mathbb{R}}\left(3a+8\int_0^1|x^3-ax|dx\right)=\min_{a\ge 1}\left(3a+8\int_0^1(ax-x^3)dx\right)=\min_{a\ge 1}(7a-2)=5$

**Trường hợp 3:** Nếu $a\in[0;1]$ khi đó ta có đánh giá sau:

$$\min_{a\in\mathbb{R}}\left(3a+8\int_0^1|x^3-ax|dx\right)=\min_{a\in[0;1]}\left(3a+8\int_0^{\sqrt{a}}(ax-x^3)dx+8\int_{\sqrt{a}}^1(x^3-ax)dx\right)=\min_{a\in[0;1]}(4a^2-a+2)=\frac{31}{16}$$

**Kết luận:** Vậy $\min_{a\in\mathbb{R}}\left(3a+8\int_0^1|x^3-ax|dx\right)=\frac{31}{16}\Rightarrow I\le\frac{31}{16}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=\frac{1}{8};I=\frac{31}{12}>3a=\frac{3}{8}$.

**Câu 27:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện sau: $\max_{[0;1]}|f(x)|=6$ và $\int_0^1 x^2 f(x)dx=0$. Giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 x^3 f(x)dx$ bằng bao nhiêu?

**A.** $\frac{1}{8}$ **B.** $\frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}$ **C.** $\frac{2-\sqrt[3]{4}}{16}$ **D.** $\frac{1}{24}$

**Lời giải**

Ta có với mọi số thực $a\in\mathbb{R}$ thì $\int_0^1 ax^2 f(x)dx=0$ do đó:

$$\left|\int_0^1 x^3 f(x)dx\right|=\left|\int_0^1(x^3-ax^2)f(x)dx\right|\le\int_0^1|x^3-ax^2||f(x)|dx\le 6\int_0^1|x^3-ax^2|dx \ \ \forall a\in\mathbb{R}$$

Do đó: $\left|\int_0^1 x^3 f(x)dx\right|\le\min_{a\in\mathbb{R}}6\int_0^1|x^3-ax^2|dx=\min_{a\in\mathbb{R}}g(a)$. Tới đây ta chia các trường hợp sau:

**Trường hợp 1:** Nếu $a\le 0$ thì $x^3-ax^2=x^2(x-a)\ge 0 \ \ \forall x\in[0;1]$. Khi đó:

$$g(a)=6\int_0^1|x^3-ax^2|dx=6\int_0^1 x^3-ax^2dx=6\left(\frac{1}{4}-\frac{a}{3}\right)\Rightarrow\min_{a\le 0}g(a)=\frac{3}{2}$$

**Trường hợp 2:** Nếu $a\ge 1$ thì $x^3-ax^2=x^2(x-a)\le 0 \ \ \forall x\in[0;1]$. Khi đó:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$g(a)=6\int_0^1\left|x^3-ax^2\right|dx=6\int_0^1 ax^2-x^3dx=6\left(\frac{a}{3}-\frac{1}{4}\right)\Rightarrow\min_{a\ge1}g(a)=\frac{1}{2}$

**Trường hợp 3:** Nếu $a\in[0;1]$ thì

$f(a)=6\int_0^1\left|x^3-ax^2\right|dx=6\int_0^a ax^2-x^3dx+\int_a^1 x^3-ax^2dx=\frac{2a^4-4a+3}{2}.$

Ta tìm được $\min_{a\in[0;1]}g(a)=\min_{a\in[0;1]}\left(\frac{2a^4-4a+3}{2}\right)=\frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}<\frac{1}{2}<\frac{3}{2}$ vậy $\boxed{\min_{a\in\mathbb{R}}g(a)=\frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}}$.

Do vậy:

$\left|\int_0^1 x^3f(x)dx\right|\le\min_{a\in\mathbb{R}}g(a)\Rightarrow\left|\int_0^1 x^3f(x)dx\right|\le\frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}\Rightarrow\boxed{\max_{[0;1]}\int_0^1 x^3f(x)dx=\frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}}$

**Câu 28:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x)+xf'(x)\ge x^{2018}$ với mọi $x\in[0;1]$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng:

**A.** $\frac{1}{2021\times2022}$ **B.** $\frac{1}{2018\times2021}$ **C.** $\frac{1}{2018\times2019}$ **D.** $\frac{1}{2019\times2021}$

**Lời giải**

Ta có: $3f(x)+x.f'(x)\ge x^{2018}\Rightarrow3x^2f(x)+x^3f'(x)\ge x^{2020}$

$\Rightarrow\left[x^3f(x)\right]'\ge x^{2020}\Rightarrow\int_0^t\left[x^3f(x)\right]'dx\ge\int_0^t x^{2020}dx\ \ \forall t\in[0;1]\Rightarrow f(t)\ge\frac{t^{2018}}{2021}$

Khi đó $\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx\ge\int_0^1\frac{x^{2018}}{2021}dx=\frac{1}{2019.2021}$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ là $\frac{1}{2019.2021}$.

**Câu 29:** Cho hàm số $y=f(x)$ dương và liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn $\max_{[1;3]}f(x)=2;\min_{[1;3]}f(x)=\frac{1}{2}$ và biểu thức $S=\int_1^3 f(x)dx\int_1^3\frac{1}{f(x)}dx$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó tính $\int_1^3 f(x)dx$?

**A.** $\frac{7}{2}$ **B.** $\frac{5}{2}$ **C.** $\frac{7}{5}$ **D.** $\frac{3}{5}$

**Lời giải**

Ta có: $\frac{1}{2}\le f(x)\le2\Rightarrow\left(2f(x)-1\right)\left(f(x)-2\right)\le0\Rightarrow f(x)+\frac{1}{f(x)}\le\frac{5}{2}$

$\Rightarrow\frac{1}{f(x)}\le\frac{5}{2}-f(x)\Rightarrow S\le\int_1^3 f(x)dx\left(\int_1^3\frac{5}{2}-f(x)dx\right)$. Ta tìm được $\max S=\frac{25}{4}$ khi $\int_1^3 f(x)dx=\frac{5}{2}$.

**Câu 30:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)\ge x^4+\frac{2}{x^2}-2x\ \ \forall x>0$ và $f(1)=-1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** Phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm trên $(0;1)$.

**B.** Phương trình $f(x)=0$ có đúng 3 nghiệm trên $(0;+\infty)$.

**C.** Phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm trên $(1;2)$.

**C.** Phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm trên $(2;5)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$f'(x)\ge x^4+\frac{2}{x^2}-2x=\frac{x^6-2x^3+2}{x^2}=\frac{(x^3-1)^2+1}{x^2}>0,\ \forall x>0.$

$\Rightarrow y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

$\Rightarrow f(x)=0$ có nhiều nhất 1 nghiệm trên khoảng $(0;+\infty)$ $(1)$.

Mặt khác ta có:

$f'(x)\ge x^4+\frac{2}{x^2}-2x>0,\ \forall x>0\Rightarrow\int_1^2 f'(x)dx\ge\int_1^2\left(x^4+\frac{2}{x^2}-2x\right)dx=\frac{21}{5}$

$\Rightarrow f(2)-f(1)\ge\frac{21}{5}\Rightarrow f(2)\ge\frac{17}{5}.$

Kết hợp giả thiết ta có $y=f(x)$ liên tục trên $[1;2]$ và $f(2).f(1)<0$ $(2)$.

Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra phương trình $f(x)=0$ có đúng 1 nghiệm trên khoảng $(1;2)$.

**Câu 31:** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)>0,\ \forall x\in[1;2]$ và $\int_1^2\frac{[f'(x)]^3}{x^4}dx=\frac{7}{375}$. Biết $f(1)=1$, $f(2)=\frac{22}{15}$, tính $I=\int_1^2 f(x)dx$.

**A.** $P=\frac{71}{60}$. **B.** $P=\frac{6}{5}$. **C.** $P=\frac{73}{60}$. **D.** $P=\frac{37}{30}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

+) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$\frac{[f'(x)]^3}{x^4}+\frac{x^2}{125}+\frac{x^2}{125}\ge 3\sqrt[3]{\frac{[f'(x)]^3}{x^4}.\frac{x^2}{125}.\frac{x^2}{125}}=\frac{3f'(x)}{25}$

Lấy tích phân hai vế BĐT trên ta có: $\int_1^2\frac{[f'(x)]^3}{x^4}dx+2\int_1^2\frac{x^2}{125}dx\ge\int_1^2\frac{3f'(x)}{25}dx$

$\Leftrightarrow\int_1^2\frac{[f'(x)]^3}{x^4}dx+2.\frac{7}{375}\ge\frac{3}{25}[f(2)-f(1)]\Leftrightarrow\int_1^2\frac{[f'(x)]^3}{x^4}dx\ge\frac{7}{375}.$

Kết hợp với giả thiết ta có dấu "=" của BĐT trên xảy ra

$\frac{[f'(x)]^3}{x^4}=\frac{x^2}{125}\Leftrightarrow[f'(x)]^3=\frac{x^6}{125}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{x^2}{5}\Rightarrow f(x)=\frac{x^3}{15}+C.$

Mà $f(1)=1\Rightarrow 1=\frac{1}{15}+C\Rightarrow C=\frac{14}{15}\Rightarrow f(1)=\frac{x^3+14}{15}$

+) Ta có $I=\int_1^2\frac{x^3+14}{15}dx=\frac{71}{60}.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 32:** Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời ta đặt $g(x)=1+\int_0^x f(t)dt$. Biết $g(x)\le\sqrt{f(x)}$ với mọi $x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1\frac{1}{g(x)}dx$ có giá trị lớn nhất bằng:

**A.** $\frac{1}{3}$ **B.** 1 **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{1}{2}$

**Lời giải**

Đặt $F(x)=\int_0^x f(t)dt\Rightarrow g(x)=1+F(x)\le\sqrt{f(x)}\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow\frac{F'(x)}{(F(x)+1)^2}-1\ge 0\ \forall x\in[0;1]$

$\Rightarrow h(t)=\int_0^t\left(\frac{F'(x)}{(F(x)+1)^2}-1\right)dx=1-t-\frac{1}{F(t)+1}$ là hàm số đồng biến trên $[0;1]$ do vậy ta có đánh giá:

$h(x)\ge h(0)\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow 1-x-\frac{1}{F(x)+1}\ge 0\Rightarrow\frac{1}{F(x)+1}\le 1-x\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow\boxed{\int_0^1\frac{1}{g(x)}dx\le\frac{1}{2}}$.

**Câu 33:** Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời ta đặt $g(x)=1+3\int_0^x f(t)dt$. Biết $g(x)\ge f^2(x)$ với mọi $x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1\sqrt{g(x)}dx$ có giá trị lớn nhất bằng:

**A.** $\frac{5}{2}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** $\frac{7}{4}$ **D.** $\frac{9}{5}$

**Lời giải**

Đặt $F(x)=\int_0^x f(t)dt\Rightarrow g(x)=1+3F(x)\ge f^2(x)\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow\frac{F'(x)}{\sqrt{3F(x)+1}}-1\le 0\ \forall x\in[0;1]$

$\Rightarrow h(t)=\int_0^t\left(\frac{F'(x)}{\sqrt{3F(x)+1}}-1\right)dx=\frac{2}{3}\sqrt{3F(t)+1}-t-\frac{2}{3}$ là hàm số nghịch biến trên $[0;1]$ do vậy ta có:

$h(x)\le h(0)\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow\frac{2}{3}\sqrt{3F(x)+1}-t-\frac{2}{3}\le 0$

$\Rightarrow\sqrt{3F(x)+1}\le\frac{3}{2}x+1\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow\boxed{\int_0^1\sqrt{g(x)}dx\le\frac{7}{4}}$

**Câu 34:** Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời ta đặt $g(x)=1+\int_0^{x^2} f(t)dt$. Biết $g(x)\ge 2xf(x^2)$ với mọi $x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1 g(x)dx$ có giá trị lớn nhất bằng:

**A.** 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 1

**Lời giải**

Đặt $F(x^2)=\int_0^{x^2} f(t)dt\Rightarrow g(x)=1+F(x^2)\ge 2xf(x^2)\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow\frac{2xf(x^2)}{1+F(x^2)}-1\le 0\ \forall x\in[0;1]$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Rightarrow h(t)=\int_0^{\sqrt{t}}\left(\frac{2xf\left(x^2\right)}{1+F\left(x^2\right)}-1\right)dx=\ln\left(1+F(t)\right)-\sqrt{t}$ là hàm số nghịch biến trên $[0;1]$ do vậy ta có:

$h(x)\le h(0)\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow\ln\left(1+F(x)\right)-\sqrt{x}\le 0\Rightarrow 1+F(x)\le e^{\sqrt{x}}\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow\boxed{\int_0^1 g(x)dx\le 2}$.

**Câu 35:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $3\int_0^1\left[f'(x)\left[f(x)\right]^2+\frac{1}{9}\right]dx\le 2\int_0^1\sqrt{f'(x)}f(x)dx$. Tính tích phân $\int_0^1\left[f(x)\right]^3dx$:

**A.** $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{7}{6}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Từ giả thiết suy ra:

$\int_0^1\left[\left(3\sqrt{f'(x)}f(x)\right)^2-2.3\sqrt{f'(x)}f(x)+1\right]dx\le 0\Leftrightarrow\int_0^1\left[3\sqrt{f'(x)}f(x)-1\right]^2dx\le 0$.

Suy ra $3\sqrt{f'(x)}f(x)-1=0\Leftrightarrow\sqrt{f'(x)}f(x)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow f'(x).f^2(x)=\frac{1}{9}$.

Vì $\left[f^3(x)\right]'=3.f^2(x)f'(x)$ nên suy ra $\left[f^3(x)\right]'=\frac{1}{3}\Rightarrow f^3(x)=\frac{1}{3}x+C$.

Vì $f(0)=1$ nên $f^3(0)=1\Rightarrow C=1$.

Vậy $\Rightarrow f^3(x)=\frac{1}{3}x+1$.

Suy ra $\int_0^1\left[f(x)\right]^3dx=\int_0^1\left(\frac{1}{3}x+1\right)dx=\frac{7}{6}$.

**Câu 36:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, không âm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x).f'(x)=2x\sqrt{\left(f(x)\right)^2+1}$ và $f(0)=0$. Giá trị lớn nhất $M$ và giá trị nhỏ nhất $m$ của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ lần lượt là

**A.** $M=20;\ m=2$. **B.** $M=4\sqrt{11};\ m=\sqrt{3}$.

**C.** $M=20;\ m=\sqrt{2}$. **D.** $M=3\sqrt{11};\ m=\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $f(x).f'(x)=2x\sqrt{\left(f(x)\right)^2+1}\Leftrightarrow\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{\left(f(x)\right)^2+1}}=2x$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta có $\sqrt{\left(f(x)\right)^2+1}=x^2+C$, do $f(0)=0$ nên $C=1$.

Vậy $f(x)=\sqrt{x^4+2x^2}=x\sqrt{x^2+2}$ trên đoạn $[1;3]$.

Ta có $f'(x)=\sqrt{x^2+2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}>0$ với mọi $x\in[1;3]$ nên $f(x)$ đồng biến trên $[1;3]$.

Vậy $M=f(3)=3\sqrt{11};\ m=f(1)=\sqrt{3}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 37:** Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời ta đặt $g(x)=1+2\int_0^x f(t)dt$. Biết $g(x)\ge[f(x)]^3$ với mọi $x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1 \sqrt[3]{[g(x)]^2}dx$ có giá trị lớn nhất bằng:

**A.** $\frac{5}{3}$ **B.** 4 **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** 5

**Lời giải**

Ta đặt $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ khi đó $g(x)=1+2F(x)\ge[f(x)]^3\ \forall x\in[0;1]$.

Do vậy $\frac{f(x)}{\sqrt[3]{1+2F(x)}}-1\le 0\ \forall x\in[0;1]\Leftrightarrow\frac{F'(x)}{\sqrt[3]{1+2F(x)}}-1\le 0\ \forall x\in[0;1]$.

Xét hàm số: $h(t)=\int_0^t\left(\frac{F'(x)}{\sqrt[3]{1+2F(x)}}-1\right)dx=\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{1+2F(t)}\right)^2-t-\frac{3}{4}\ \forall t\in[0;1]$ là hàm nghịch biến trên $[0;1]$ cho nên

$h(t)\le h(0)\ \forall t\in[0;1]\Rightarrow\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{1+2F(t)}\right)^2-t-\frac{3}{4}\le 0\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{1+2F(t)}\right)^2\le\frac{4}{3}t+1\ \forall t\in[0;1]$.

Do đó: $\left(\sqrt[3]{g(x)}\right)^2\le\frac{4}{3}x+1\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow\int_0^1\sqrt[3]{[g(x)]^2}dx\le\int_0^1\left(\frac{4}{3}x+1\right)dx\Rightarrow\boxed{\int_0^1\sqrt[3]{[g(x)]^2}dx\le\frac{5}{3}}$.

**Chọn A**

**Câu 38:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 xf(x)dx=0$ và $\max_{[0;1]}|f(x)|=1$. Tích phân $I=\int_0^1 e^x f(x)dx$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

**A.** $\left(-\infty;-\frac{5}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};e-1\right)$. **C.** $\left(-\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right)$. **D.** $(e-1;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Với mọi $a\in[0;1]$, ta có $0=\int_0^1 xf(x)dx=a\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 axf(x)dx$

Kí hiệu $I(a)=\int_0^1(e^x-ax)dx$.

Khi đó, với mọi $a\in[0;1]$ ta có $\left|\int_0^1 e^x f(x)dx\right|=\left|\int_0^1 e^x f(x)dx-\int_0^1 axf(x)dx\right|=\left|\int_0^1(e^x-ax)f(x)dx\right|$

$\le\int_0^1|e^x-ax|.|f(x)|dx\le\int_0^1|e^x-ax|.\max_{x\in[0;1]}|f(x)|dx=\int_0^1|e^x-ax|dx=I(a)$.

Suy ra $\left|\int_0^1 e^x f(x)dx\right|\le\min_{a\in[0;1]}I(a)$

Mặt khác

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Với mọi $a\in[0;1]$ ta có $I(a)=\int_0^1\left|e^x-ax\right|dx=\int_0^1\left(e^x-ax\right)dx=\left(e^x-\frac{a}{2}x^2\right)\Big|_0^1=e-\frac{a}{2}-1$

$\min\limits_{a\in[0;1]}I(a)=e-\frac{3}{2}\Rightarrow\left|\int_0^1 e^x f(x)dx\right|\le e-\frac{3}{2}\approx 1,22$.

Vậy $I\in\left(-\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right)$.

**Câu 39:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thoả mãn $\int_0^1 x^2 f(x)dx=0$ và $\max\limits_{[0;1]}\left|f(x)\right|=6$.

Giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 x^3 f(x)dx$ bằng

**A.** $\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}$. **C.** $\frac{2-\sqrt[3]{4}}{16}$. **D.** $\frac{1}{24}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Cách 1:**

Ta có $f(x)\le 6,\ \forall x\in[0;1]$.

Xét $I=\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}6x^3dx-\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^1 6x^3dx+\int_0^1 x^3 f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}x^3\left(6+f(x)\right)dx-\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^1 x^3\left(6-f(x)\right)dx$.

Suy ra $I\le\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}x^2\left(6+f(x)\right)dx-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^1 x^2\left(6-f(x)\right)dx$

$\Rightarrow\frac{3}{2\sqrt[3]{2}}-\frac{3}{2}+\int_0^1 x^3 f(x)dx\le\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}6x^2dx-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^1 6x^2dx+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\int_0^1 x^2 f(x)dx$.

$\Rightarrow\frac{3}{2\sqrt[3]{2}}-\frac{3}{2}+\int_0^1 x^3 f(x)dx\le 0\Rightarrow\int_0^1 x^3 f(x)dx\le\frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}$.

**Cách 2:**

Ta có với mọi số thực $a\in\mathbb{R}$ thì $\int_0^1 ax^2 f(x)dx=0$ do đó:

$$\left|\int_0^1 x^3 f(x)dx\right|=\left|\int_0^1\left(x^3-ax^2\right)f(x)dx\right|\le\int_0^1\left|x^3-ax^2\right|\left|f(x)\right|dx\le 6\int_0^1\left|x^3-ax^2\right|dx\quad\forall a\in\mathbb{R}$$

Do đó: $\left|\int_0^1 x^3 f(x)dx\right|\le\min\limits_{a\in\mathbb{R}}6\int_0^1\left|x^3-ax^2\right|dx=\min\limits_{a\in\mathbb{R}}g(a)$. Tới đây ta chia các trường hợp sau:

**Trường hợp 1:** Nếu $a\le 0$ thì $x^3-ax^2=x^2(x-a)\ge 0\ \forall x\in[0;1]$. Khi đó:

$$g(a)=6\int_0^1\left|x^3-ax^2\right|dx=6\int_0^1 x^3-ax^2dx=6\left(\frac{1}{4}-\frac{a}{3}\right)\Rightarrow\min_{a\le 0}g(a)=\frac{3}{2}$$

**Trường hợp 2:** Nếu $a\ge 1$ thì $x^3-ax^2=x^2(x-a)\le 0\ \forall x\in[0;1]$. Khi đó:

$$g(a)=6\int_0^1\left|x^3-ax^2\right|dx=6\int_0^1 ax^2-x^3dx=6\left(\frac{a}{3}-\frac{1}{4}\right)\Rightarrow\min_{a\ge 1}g(a)=\frac{1}{2}$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Trường hợp 3:** Nếu $a\in[0;1]$ thì

$$f(a)=6\int_0^1\left|x^3-ax^2\right|dx=6\int_0^a ax^2-x^3dx+\int_a^1 x^3-ax^2dx=\frac{2a^4-4a+3}{2}.$$

Ta tìm được $\min\limits_{a\in[0;1]}g(a)=\min\limits_{a\in[0;1]}\left(\frac{2a^4-4a+3}{2}\right)=\frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}<\frac{1}{2}<\frac{3}{2}$ vậy $\boxed{\min\limits_{a\in\mathbb{R}}g(a)=\frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}}$.

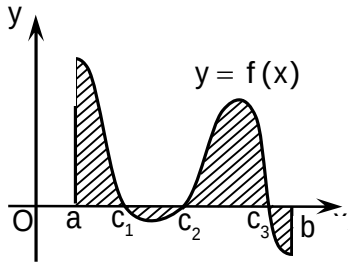
Do vậy: $\left|\int_0^1 x^3f(x)dx\right|\le\min\limits_{a\in\mathbb{R}}g(a)\Rightarrow\left|\int_0^1 x^3f(x)dx\right|\le\frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}\Rightarrow\boxed{\max\limits_{[0;1]}\int_0^1 x^3f(x)dx=\frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

# ỨNG DỤNG TÍNH DIỆN TÍCH

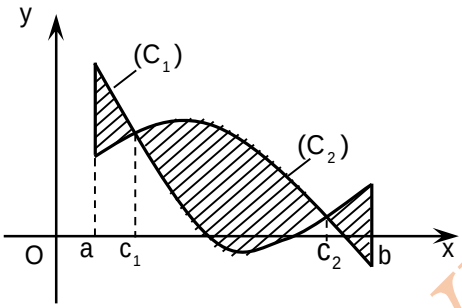
## A – KIẾN THỨC CHUNG

a - Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b |f(x)|dx$




$$(H)\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{S = \int_a^b |f(x)|dx}$$

b - Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$




$$(H)\begin{cases} (C_1): y = f_1(x) \\ (C_2): y = f_2(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$\boxed{S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx}$$

**Chú ý:**

- Nếu trên đoạn $[a;b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì: $\int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$
- Nắm vững cách tính tích phân của hàm số có chứa giá trị tuyệt đối
- Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, $x = h(y)$ và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ được xác định: $S = \int_c^d |g(y) - h(y)|dy$

## DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG ĐƯỢC GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐỒ THỊ

**PHƯƠNG PHÁP:**

***Trường hợp 1.*** Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$.

**Phương pháp giải toán**

+) Giải phương trình $f(x) = g(x)$ (1)

+) Nếu (1) vô nghiệm thì $S = \left|\int_a^b (f(x) - g(x))dx\right|$.

+) Nếu (1) có nghiệm thuộc $[a;b]$. giả sử $\alpha$ thì $S = \left|\int_a^\alpha (f(x) - g(x))dx\right| + \left|\int_\alpha^b (f(x) - g(x))dx\right|$

**Chú ý**: Có thể lập bảng xét dấu hàm số $f(x) - g(x)$ trên đoạn $[a; b]$ rồi dựa vào bảng xét dấu để tính tích phân.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

***Trường hợp 2.*** Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x),\ y=g(x)$ là $S=\int_{\alpha}^{\beta}\left|f(x)-g(x)\right|dx$. Trong đó $\alpha,\ \beta$ là nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình $f(x)=g(x)\ \ (a\le\alpha<\beta\le b)$.

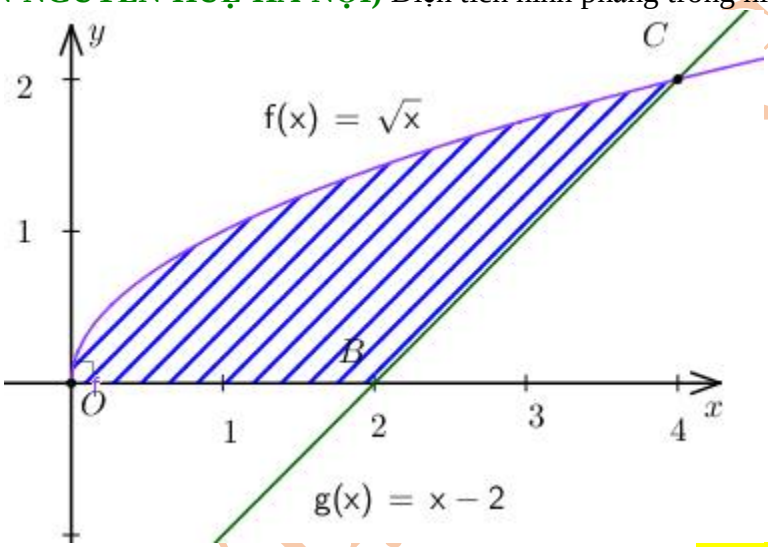
*Phương pháp giải toán*

*Bước 1.* Giải phương trình $f(x)=g(x)$ tìm các giá trị $\alpha,\beta$.

*Bước 2.* Tính $S=\int_{\alpha}^{\beta}\left|f(x)-g(x)\right|dx$ như trường hợp 1.

## B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1:** **(HKII-CHUYÊN-NGUYỄN-HUỆ-HÀ-NỘI)** Diện tích hình phẳng trong hình vẽ sau là.




**A.** $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{11}{3}$. **C.** $\frac{7}{3}$. **D.** $\frac{10}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Nhìn hình vẽ ta thấy diện tích $S=\int_{0}^{2}\sqrt{x}dx+\int_{2}^{4}\left[\sqrt{x}-(x-2)\right]dx$

$=\int_{0}^{4}\sqrt{x}dx-\int_{2}^{4}(x-2)dx$.

$=\frac{16}{3}-2=\frac{10}{3}$

**Câu 2:** **(Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đăk Lăk)** Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1,\ x=4$ bằng

**A.** $\frac{51}{4}$. **B.** $\frac{53}{4}$. **C.** $\frac{49}{4}$. **D.** $\frac{55}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$ và trục hoành là:

$x^3-3x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$.

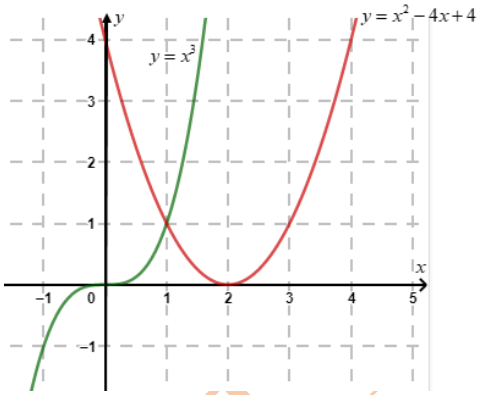
Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1,\ x=4$ bằng:

$$S=\int_1^4\left|x^3-3x^2\right|\mathrm{d}x=\int_1^3\left|x^3-3x^2\right|\mathrm{d}x+\int_3^4\left|x^3-3x^2\right|\mathrm{d}x=\left|\int_1^3\left(x^3-3x^2\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_3^4\left(x^3-3x^2\right)\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\left(\frac{x^4}{4}-x^3\right)\Big|_1^3\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}-x^3\right)\Big|_3^4\right|=6+\frac{27}{4}=\frac{51}{4}.$$

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\frac{51}{4}$.

**Câu 3:** **(Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=x^3$, $y=x^2-4x+4$ và trục $Ox$ (tham khảo hình vẽ) được tính theo công thức nào dưới đây?




**A.** $\int_0^2\left|x^3-\left(x^2-4x+4\right)\right|\mathrm{d}x$.

**B.** $-\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^2\left(x^2-4x+4\right)\mathrm{d}x$.

**C.** $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x-\int_1^2\left(x^2-4x+4\right)\mathrm{d}x$.

**D.** $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^2\left(x^2-4x+4\right)\mathrm{d}x$.

**Lời giải**

**Chọn D**

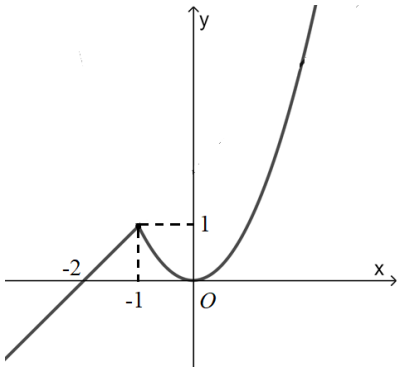
Dựa vào hình vẽ ta thấy hình phẳng cần tính diện tích gồm 2 phần:

Phần 1: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$, trục $Ox$, $x=0$, $x=1$.

Phần 2: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-4x+4$, trục $Ox$, $x=1$, $x=2$.

Do đó diện tích cần tính là $S=\int_0^1\left|x^3\right|\mathrm{d}x+\int_1^2\left|x^2-4x+4\right|\mathrm{d}x=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^2\left(x^2-4x+4\right)\mathrm{d}x$.

**Câu 4:** **(CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ HÒA BÌNH LẦN 4 NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị gồm một phần đường thẳng và một phần đường parabol có đỉnh là gốc tọa độ $O$ như hình vẽ. Giá trị của $\int_{-3}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng:



**A.** $\frac{26}{3}$. **B.** $\frac{38}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{28}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Dựa và đồ thị ta thấy:

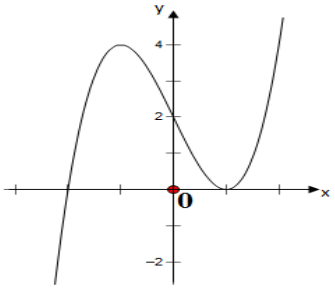
Phần đường thẳng đi qua các điểm $A(-1;1)$ và $B(-2;0)$ nên nó là một phần của đồ thị của hàm số $y=x+2$.

Phần đường parabol có đỉnh là gốc tọa độ $O(0;0)$ và đi qua điểm $A(-1;1)$ nên nó là một phần của đồ thị của hàm số $y=x^2$.

Do đó $f(x)=\begin{cases}x+2 & \text{khi } x<-1\\ x^2 & \text{khi } x\geq -1\end{cases}$

Nên $\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-3}^{-1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-3}^{-1}(x+2)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{3} x^2\mathrm{d}x=\frac{28}{3}$.

**Câu 5:** **(CổLoa Hà Nội)** Cho hàm số đa thức bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành.




**A.** 6. **B.** $\frac{19}{4}$. **C.** $\frac{27}{4}$. **D.** 8.

**Lời giải**

**Chọn C**

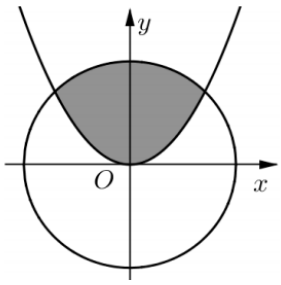
Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt và tiếp xúc trục hoành lần lượt tại tại điểm $(-2;0)$ và $(1;0)$ nên hàm số có dạng $y=f(x)=a(x+2)(x-1)^2=a(x^3-3x+2)$.

Mặt khác đồ thị hàm số lại đi qua điểm $(-1;4)$ nên ta có $a=1$. Vậy $y=f(x)=x^3-3x+2$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành là:

$S=\int_{-2}^{1}\left|x^3-3x+2\right|dx=\frac{27}{4}$.

**Câu 6:** **(THPT LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NGÃI)** Trong mặt phẳng cho Parabol $(P):y=x^2$ và đường tròn $(C):x^2+y^2=2$ (xem hình vẽ bên). Tính diện tích phần tô đậm (làm tròn đến chữ số hàng phần trăm).



**A.** 1,19 **B.** 1,90. **C.** 1,81. **D.** 1,80.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $x^2+y^2=2 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{2-x^2}$ . Vì đường cong nửa trên của $(C)$ tương ứng phần dương của trục hoành nên có phương trình $y=\sqrt{2-x^2}, (y\ge 0)$

Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong nửa trên của $(C)$ và Parabol $(P)$ là :

$x^2=\sqrt{2-x^2}$

$\Leftrightarrow x^4+x^2-2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm 1$

Suy ra diện tích hình phẳng $(H)$ (phần tô đậm) cần tính là :

$$S=\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{2-x^2}-x^2\right)dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}dx-\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1}=\int_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}dx-\frac{2}{3}$$

Xét $I=\int_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}dx$, đặt $x=\sqrt{2}\sin t \Rightarrow dx=\sqrt{2}\cos t dt$

ta được $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2-2\sin^2 t}\sqrt{2}\cos t dt$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}2\cos^2 t dt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)dt=\left.\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\right|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}+1.$$

Do đó $S=\frac{\pi}{2}+1-\frac{2}{3}=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\approx 1,90$.

**Câu 7:** **(Sở Quảng NamT)** Cho $(H)$ là hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y=x^2$, tiếp tuyến với $(P)$ tại điểm $M(2;4)$ và trục hoành. Diện tích của hình phẳng $(H)$ bằng

**A.** $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

**Lời giải**

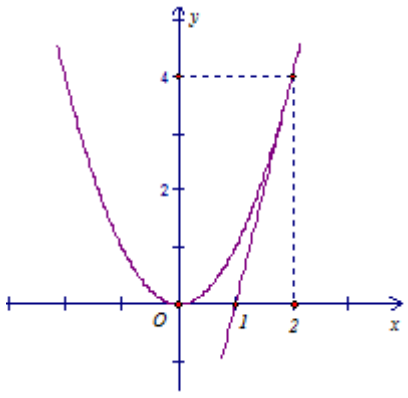
**Chọn A**

Phương trình tiếp tuyến của $(P)$ tại điểm $M(2;4)$ là: $y=4x-4$.

Giao điểm của đường thẳng $y=4x-4$ với trục hoành tại điểm $A(1;0)$.

Từ đồ thị bên ta có diện tích của hình phẳng $(H)$ là:

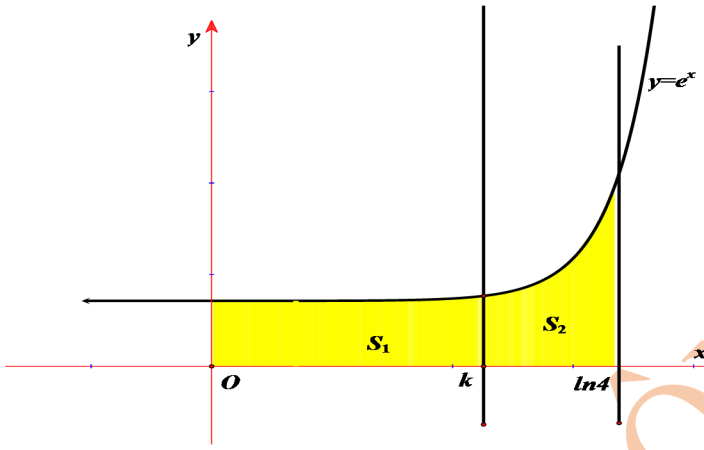
$$S=\int_0^2 x^2dx-\int_1^2(4x-4)dx=\frac{2}{3}.$$




ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 8:** Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=e^x; y=0; x=0$ và $x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k, (0<k<\ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích $S_1$ và $S_2$ như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1=2S_2$.

**A.** $k=\frac{2}{3}\ln 4$. **B.** $k=\ln 2$. **C.** $k=\ln\frac{8}{3}$. **D.** $k=\ln 3$.




*Trích đề Minh họa 2 - 2017*

**Lời giải**

Ta có: $S_1=\int_0^k e^x dx=e^x\Big|_0^k=e^k-1, S_2=\int_k^{\ln 4} e^x dx=e^x\Big|_k^{\ln 4}=4-e^k$

Do đó: $S_1=2S_2\Leftrightarrow e^k-1=2\left(4-e^k\right)\Leftrightarrow e^k=\frac{9}{3}=3\Leftrightarrow k=\ln 3$.

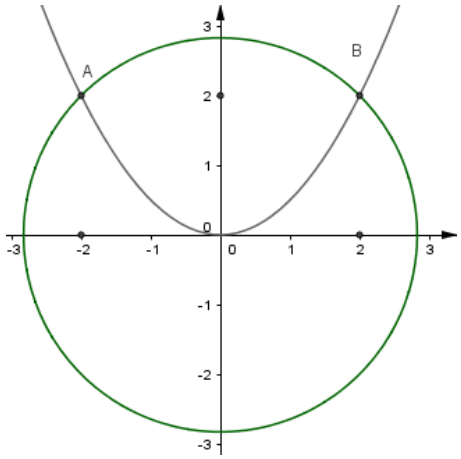
**Chọn D**

**Câu 9:** Parabol $y=\frac{x^2}{2}$ chia hình tròn có tâm là gốc tọa độ, bán kính bằng $2\sqrt{2}$ thành hai phần có diện tích là $S_1$ và $S_2$, trong đó $S_1<S_2$. Tìm tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

**A.** $\frac{3\pi+2}{21\pi-2}$. **B.** $\frac{3\pi+2}{9\pi-2}$. **C.** $\frac{3\pi+2}{12\pi}$. **D.** $\frac{9\pi-2}{3\pi+2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Diện tích hình tròn là $S=\pi r^2=8\pi$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có $S_1=\int_{-2}^{2}\left|\sqrt{8-x^2}-\frac{x^2}{2}\right|\mathrm{d}x=2\pi+\frac{4}{3}$

Suy ra $S_2=S-S_1=6\pi-\frac{4}{3}$

Vậy $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi+2}{9\pi-2}$.

**Câu 10:** **(KSCL-Lần-2-2019-THPT-Nguyễn-Đức-Cảnh-Thái-Bình)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm $y=x^2$ và $y=\frac{2x}{x-1}$ là $S=a+b\ln 2$ với $a$, $b$ là những số hữu tỷ. Tính $a+b$ ?

**A.** $\frac{-1}{3}$. **B.** $2$. **C.** $\frac{-2}{3}$. **D.** $1$.

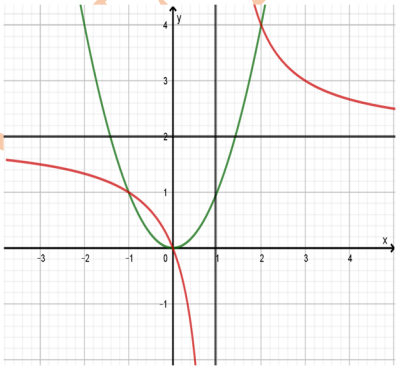
**Lời giải**

**Chọn A**

Hình phẳng $(H)$ giới hạn bởi $(C_1):y=x^2$ và $(C_2):\ y=\frac{2x}{x-1}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_1)$ và $(C_2)$ là $x^2=\frac{2x}{x-1}\ (x\neq 1)$

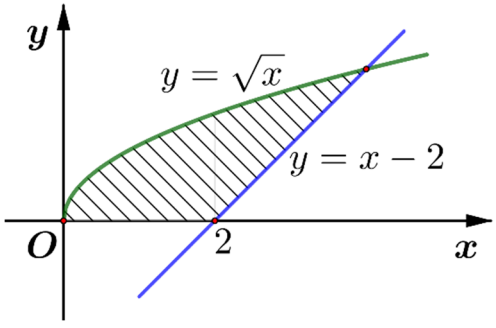
$\Rightarrow x^3-x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=2\end{array}\right.$.



$S=\int_{-1}^{0}\left(\frac{2x}{x-1}-x^2\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\left(2+\frac{2}{x-1}-x^2\right)\mathrm{d}x=\left(2x+2\ln|x-1|-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0}=\frac{5}{3}-2\ln 2$.

Suy ra $a=\frac{5}{3}$ và $b=-2$. Vậy $a+b=\frac{-1}{3}$.

**Câu 11:** **(THPT-Gia-Lộc-Hải-Dương-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)** Tính diện tích của phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ sau:

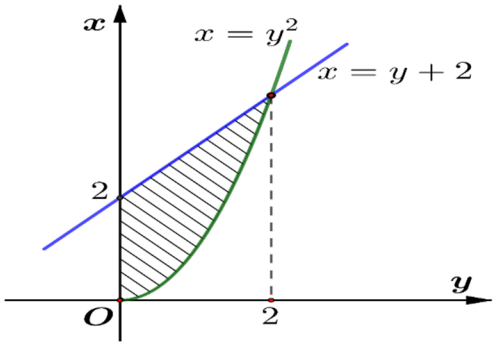


**A.** $\frac{10}{3}$. **B.** $4$. **C.** $\frac{13}{3}$. **D.** $\frac{11}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Cách 1:** Coi $x$ là hàm số theo biến số $y$.



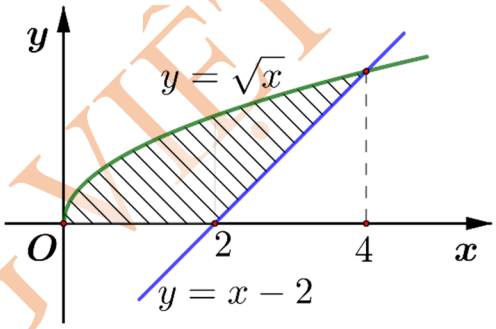

Hình phẳng đã cho giới hạn bởi các đường:

$x=y^2$ (với $y\ge 0$); $x=y+2$; $y=0$.

Ta có: $y^2=y+2\Leftrightarrow y^2-y-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \quad (loai) \\ y=2 \quad (t/m) \end{array}\right.$

Diện tích của hình phẳng cần tìm là $S=\int\limits_0^2 \left|y+2-y^2\right|\mathrm{d}y=\int\limits_0^2 \left(y+2-y^2\right)\mathrm{d}y=\frac{10}{3}$ (đvdt)

**Cách 2:**




Phương trình hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$, $y=x-2$:

$\sqrt{x}=x-2\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x=(x-2)^2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x^2-5x+4=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=4.$

Diện tích của hình phẳng cần tìm là $S=\int\limits_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x-\int\limits_2^4 (x-2)\mathrm{d}x=\frac{10}{3}$ (đvdt)

**Câu 12:** **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Tính diện tích $S$ của hình phẳng giới hạn các đường $y=x\sqrt{x^2+1}$; $y=0$ $x=1$.

**A.** $S=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$. **B.** $S=\frac{3-\sqrt{2}}{3}$. **C.** $S=\frac{3-2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $S=\frac{3\sqrt{2}-1}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong: $y=x\sqrt{x^2+1}$ và trục hoành: $y=0$.

$x\sqrt{x^2+1}=0\Leftrightarrow x=0$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$S=\int_0^1\left|x\sqrt{x^2+1}\right|\mathrm{dx}=\left|\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\mathrm{dx}\right|$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow t\mathrm{dt}=x\mathrm{dx}$.

Đổi cận: $\begin{cases}x=0\to t=1\\ x=1\to t=\sqrt{2}\end{cases}$.

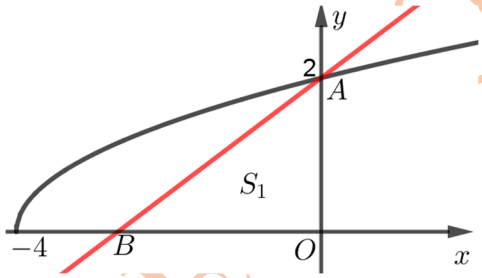
$S=\left|\int_1^{\sqrt{2}} t^2\mathrm{dt}\right|=\left|\frac{t^3}{3}\right|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$.

**Câu 13:** **(Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đăk Lăk)** Cho $(H)$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x+4}$, trục hoành và trục tung. Biết đường thẳng $d:ax+by-16=0$ đi qua $A(0;2)$ và chia $(H)$ thành hai phần có diện tích bằng nhau. Giá trị $a+b$ bằng

**A.** 5. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn C**




Gọi $S$ là diện tích hình $(H)$ suy ra $S=\int_{-4}^{0}\sqrt{x+4}\,dx=\frac{16}{3}$.

Gọi $S_1$ là diện tích hình $(H_1)$ giới hạn bởi đường thẳng $d$, trục tung và trục hoành.

Do $d:ax+by-16=0$ đi qua $A(0;2)$ suy ra $b=8$.

Theo giả thiết thì $S_1=\frac{S}{2}=\frac{8}{3}$ mà $S_1=\frac{1}{2}OA.OB\Rightarrow OB=\frac{8}{3}\Rightarrow B\left(-\frac{8}{3};0\right)$.

Do $B\in d\Rightarrow a=-6$.

Vậy $a+b=2$.

**Câu 14:** **(Ngô Quyền Hà Nội)** Diện tích miền hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2^x$, $y=-x+3$, $y=1$ bằng

**A.** $\frac{1}{\ln 2}+3$. **B.** $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{\ln 2}+1$. **D.** $\frac{1}{\ln 2}+2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

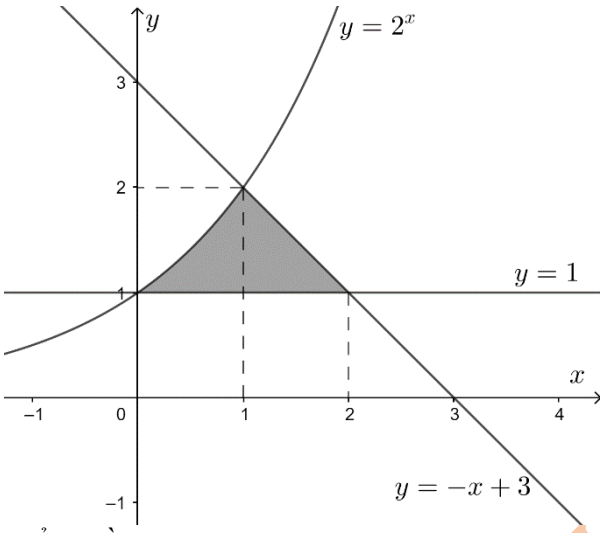
Đặt $f(x)=2^x+x-3$, suy ra $f'(x)=2^x\ln 2+1>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra $f(x)$ đồng biến.

Mà $f(1)=0$ nên $2^x=-x+3\Leftrightarrow 2^x+x-3=0\Leftrightarrow x=1$.

Ta có $-x+3=1\Leftrightarrow x=2$.

Ta có $2^x=1\Leftrightarrow x=0$.

Ta có đồ thị các hàm đã cho như sau:




Vậy diện tích miền hình phẳng cần tìm là

$$S=\int_0^1\left(2^x-1\right)\mathrm{d}x+\int_1^2\left(-x+3-1\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{2^x}{\ln 2}-x\right)\Big|_0^1+\left(-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_1^2=\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{2}.$$

**Câu 15:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số $y=x^2\sqrt{x^2+1}$, trục $Ox$ và đường thẳng $x=1$ bằng $\dfrac{a\sqrt{b}-\ln\left(1+\sqrt{b}\right)}{c}$ với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên dương. Khi đó giá trị của $a+b+c$ là

**A.** 11. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 14.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Cách 1 (dùng máy tính):**

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2\sqrt{x^2+1}=0\Leftrightarrow x=0$

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\int_0^1 x^2\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x$ vì $x^2\sqrt{x^2+1}\geq 0,\forall x\in[0;1]$.

$$\int_0^1 x^2\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{a\sqrt{b}-\ln\left(1+\sqrt{b}\right)}{c}$$

**Bước 1:** Bấm máy tính tích phân $S=\int_0^1 x^2\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x=0,4201583875$ **( Lưu D)**

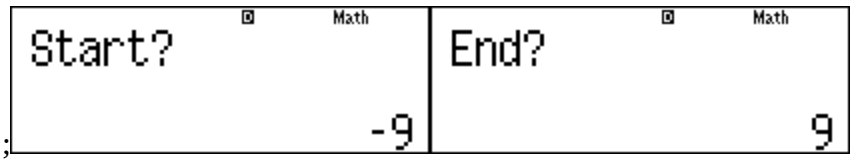
**Bước 2: Cơ sở: Tìm nghiệm nguyên của phương trình**

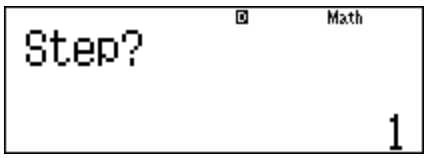
$D=\dfrac{a\sqrt{b}-\ln\left(1+\sqrt{b}\right)}{c}\Leftrightarrow c=\dfrac{a\sqrt{b}-\ln\left(1+\sqrt{b}\right)}{D}$ (coi $c=f\left(x\right)$, $a=x$, $b\in\mathbb{Z}$ và ta thử các giá trị $b=...-5;-4;..0,1;2;3;4.....$)

**Thử với** $b=1$:

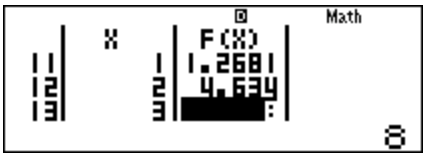
**Thử với** $b=2$ : Mode + 7

$F(X)=\dfrac{X\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{D}$;




**Kết quả:** $a=3;c=8,b=2$




**Cách 2 (giải tự luận):**

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2\sqrt{x^2+1}=0\Leftrightarrow x=0$

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\int\limits_0^1 x^2\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x$ vì $x^2\sqrt{x^2+1}\geq 0,\forall x\in[0;1]$.

Đặt $x=\tan t\Rightarrow \mathrm{d}x=\left(1+\tan^2 t\right)\mathrm{d}t$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0;x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$

Khi đó $S=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 t\sqrt{1+\tan^2 t}\left(1+\tan^2 t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\dfrac{1}{\cos t}.\dfrac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin^2 t.\cos t}{\left(\cos^2 t\right)^3}\mathrm{d}t$

Đặt $u=\sin t\Rightarrow \mathrm{d}u=\cos t\mathrm{d}t$

Đổi cận $t=0\Rightarrow u=0;t=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow u=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$S=\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{u^2}{\left(1-u^2\right)^3}\mathrm{d}u=\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1-\left(1-u^2\right)}{\left(1-u^2\right)^3}\mathrm{d}u=\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{1}{\left(1-u^2\right)^3}-\left(\frac{1}{\left(1-u^2\right)^2}\right)\right)\mathrm{d}u$$

Ta có $H=\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\dfrac{1}{\left(1-u^2\right)^3}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\dfrac{1-u+1+u}{(1-u)(1+u)}\right)^3\mathrm{d}u=\dfrac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\dfrac{1}{1+u}+\dfrac{1}{1-u}\right)^3\mathrm{d}u$

$$=\frac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{1}{(1+u)^3}+\frac{1}{(1-u)^3}+\frac{3}{1-u^2}\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{1}{(1+u)^3}+\frac{1}{(1-u)^3}+\frac{6}{\left(1-u^2\right)^2}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\left(\frac{-1}{16(1+u)^2}+\frac{1}{16(1-u)^2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{6}{\left(1-u^2\right)^2}\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{6}{\left(1-u^2\right)^2}\mathrm{d}u$$

Tính $K=\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\dfrac{6}{\left(1-u^2\right)^2}\mathrm{d}u$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$K=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{6}{\left(1-u^2\right)^2}\mathrm{d}u=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{1-u+1+u}{(1-u)(1+u)}\right)^2\mathrm{d}u=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)^2\mathrm{d}u$

$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{1}{(1-u)^2}+\frac{1}{(1+u)^2}+\frac{2}{(1-u)(1+u)}\right)\mathrm{d}u=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}+\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=3\sqrt{2}+3\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ Vậy

$H=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}+3\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{8}=\frac{7\sqrt{2}+3\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{8}$

Khi đó $S=\frac{7\sqrt{2}+3\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{8}-\frac{1}{6}K=\frac{7\sqrt{2}+3\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{8}-\frac{1}{6}\left(3\sqrt{2}+3\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)=\frac{3\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{8}$

**Câu 16:** **(Quỳnh Lưu Nghệ An)** Cho parabol $(P):y=x^2$ và hai điểm $A,B$ thuộc $(P)$ sao cho $AB=2$. Diện tích lớn nhất của hình phẳng giới hạn bởi $(P)$ và đường thẳng $AB$ là

**A.** $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi phương trình đường thẳng $AB$ là: $y=ax+b\ (a,b\in\mathbb{R})$

Phương trình giao điểm của $AB$ và $(P)$ là: $x^2-ax-b=0$

Để có 2 điểm $A,B$ thì $a^2+4b>0$. khi đó: $\begin{cases}A\left(x_1;ax_1+b\right)\\B\left(x_2;ax_2+b\right)\\x_1+x_2=a\\x_1x_2=-b\end{cases}$

Nên $AB=2\Leftrightarrow\sqrt{\left(a^2+1\right)}\left|x_2-x_1\right|=2$

Giả sử $x_2>x_1$ ta có $\left|x_2-x_1\right|=\frac{2}{\sqrt{\left(a^2+1\right)}}\le 2$

Mặt khác: $\left|x_2-x_1\right|=\sqrt{\left(x_2+x_1\right)^2-4x_1x_2}=\sqrt{a^2+4b}$

Khi đó $S=\int_{x_1}^{x_2}ax+b-x^2\mathrm{d}x=\frac{a}{2}\left(x_2^2-x_1^2\right)+b\left(x_2-x_1\right)-\frac{1}{3}\left(x_2^3-x_1^3\right)$

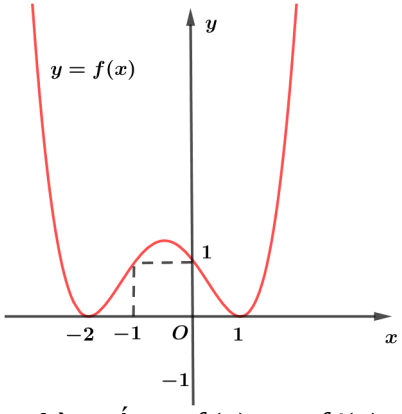
$=\left(x_2-x_1\right)\left[\frac{a}{2}\left(x_2+x_1\right)+b-\frac{1}{3}\left(x_2^2+x_1x_2+x_1^2\right)\right]$

$=\left(x_2-x_1\right)\left[\frac{a}{2}.a+b-\frac{1}{3}\left(a^2+b\right)\right]=\left(x_2-x_1\right)\left[\frac{a^2}{b}+\frac{2b}{3}\right]=\frac{a^2+4b}{6}\left(x_2-x_1\right)=\frac{\left(x_2-x_1\right)^3}{6}\le\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$

Suy ra: $S_{max}=\frac{4}{3}$ khi $\begin{cases}a=0\\x_2-x_1=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_1=x_2=1\end{cases}$ (thỏa mãn vì $(P)$ có tính đối xứng)

$\Rightarrow\begin{cases}A(1;1)\\B(-1;1)\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}A(-1;1)\\B(1;1)\end{cases}$.

**Câu 17:** **(HSG Bắc Ninh)** Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ.




Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x); y=f'(x)$ có diện tích bằng

**A.** $\frac{127}{40}$. **B.** $\frac{127}{10}$. **C.** $\frac{107}{5}$. **D.** $\frac{13}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Hàm số đã cho có dạng $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e \Rightarrow f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$.

Từ giả thiết đồ thị hàm số đã cho ta thấy đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-2;0)$, $(-1;1)$, $(0;1)$, $(1;0)$ và có hai điểm cực tiểu là $(1;0)$, $(-2;0)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(-2)=0 \\ f(1)=0 \\ f'(-2)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e=1 \\ a+b+c+d=-1 \\ 16a-8b+4c-2d=-1 \\ -32a+12b-4c+d=0 \\ 4a+3b+2c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e=1 \\ a=\frac{1}{4} \\ b=\frac{1}{2} \\ c=\frac{-3}{4} \\ d=-1 \end{cases}.$$

Do đó $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2-x+1 \Rightarrow f'(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $f(x)=f'(x)$.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-1 \\ x=1 \\ x=4 \end{cases}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x); y=f'(x)$ là

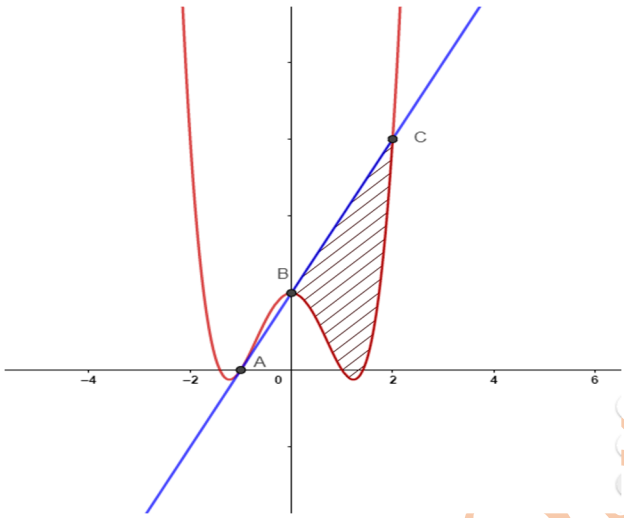
$$S=\int_{-2}^{4}\left|f(x)-f'(x)\right|dx$$

Vì biểu thức $f(x)-f'(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2$ không đổi dấu trên các khoảng $(-2;-1)$, $(-1;1)$, $(1;4)$ nên ta có

$$S=\left|\int_{-2}^{-1}\left[f(x)-f'(x)\right]dx\right|+\left|\int_{-1}^{1}\left[f(x)-f'(x)\right]dx\right|+\left|\int_{1}^{4}\left[f(x)-f'(x)\right]dx\right|=\frac{107}{5}(dvdt).$$

**Câu 18:** **(Nguyễn Du Dak-Lak 2019)** Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị $(C)$, biết rằng $(C)$ đi qua điểm $A(-1;0)$. Tiếp tuyến $\Delta$ tại $A$ của đồ thị $(C)$ cắt $(C)$ tại hai điểm có hoành độ lần lượt là

0 và 2. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\Delta$, đồ thị $(C)$ và hai đường thẳng $x=0$; $x=2$ có diện tích bằng $\frac{56}{5}$ (phần gạch chéo trong hình vẽ).




Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\Delta$, đồ thị $(C)$ và hai đường thẳng $x=-1$; $x=0$.

**A.** $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{2}{9}$. **C.** $\frac{1}{9}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Cách 1:**

Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$. TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=4ax^3+2bx$.

Phương trình tiếp tuyến $\Delta$ của đồ thị $(C)$ tại $A(-1;0)$ có dạng $y=(-4a-2b)(x+1)$.

Do tiếp tuyến $\Delta$ tại $A$ của đồ thị $(C)$ cắt $(C)$ tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2 nên phương trình $ax^4+bx^2+c=(-4a-2b)(x+1)$ nhận ba nghiệm là: $x=-1$; $x=0$; $x=2$.

Suy ra: $\begin{cases} c=-a-b \\ b=-3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2a \\ b=-3a \end{cases}$.

Vậy $(C): y=ax^4-3ax^2+2a=a\left(x^4-3x^2+2\right)$ và $\Delta: y=2a(x+1)$.

Bài cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\Delta$, đồ thị $(C)$ và hai đường thẳng $x=0$; $x=2$ có diện tích bằng $\frac{56}{5}$ nên:

$$\int_0^2 \left|2a(x+1)-a\left(x^4-3x^2+2\right)\right|\mathrm{d}x=\frac{56}{5}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 \left(2a(x+1)-a\left(x^4-3x^2+2\right)\right)\mathrm{d}x=\frac{56}{5}$$

$$\Leftrightarrow a\int_0^2 \left(-x^4+3x^2+2x\right)\mathrm{d}x=\frac{56}{5} \Leftrightarrow a.\left(\frac{-x^5}{5}+x^3+x^2\right)\Big|_0^2=\frac{56}{5} \Leftrightarrow a.\frac{28}{5}=\frac{56}{5} \Leftrightarrow a=2.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\Delta$, đồ thị $(C)$ và hai đường thẳng $x=-1$; $x=0$ là:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$S=\int_{-1}^{0}\left|a\left(x^4-3x^2+2\right)-2a\left(x+1\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\left(2x^4-6x^2-4x\right)\mathrm{d}x=2.\left(\frac{x^5}{5}-x^3-x^2\right)\Big|_{-1}^{0}=\frac{2}{5}.$$

**Cách 2:**

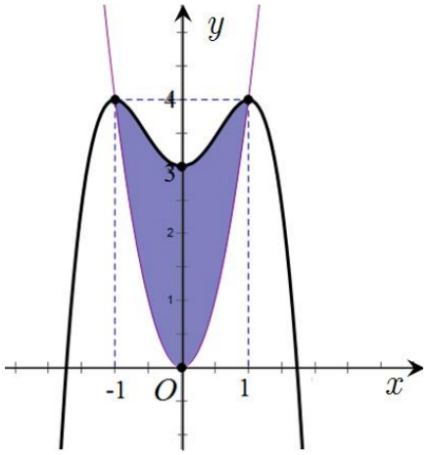
Giả sử đường thẳng $d:y=kx+m$ là tiếp tuyến với $(C)$ tại $A(0;-1)$ nên $c=-1$ và $m=-1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $d$ và $(C)$ là $ax^4+bx^2-kx=0\Leftrightarrow a\left(x+1\right)^2.x.\left(x-2\right)=0$ (do phương trình trên có 3 nghiệm như bài toán đã cho).

Theo bài ta có phương trình $a\int_{0}^{2}\left|\left(x+1\right)^2x.\left(x-2\right)\right|\mathrm{d}x=\frac{56}{5}\Rightarrow a=2$.

Từ đó ta được $S=\int_{-1}^{0}\left[2(x^4-3x^2+2)-4\left(x+1\right)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\left(2x^4-6x^2-4x\right)dx=\frac{2}{5}$.

**Câu 19:** **(Thị Xã Quảng Trị)** Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ và hàm số $y=mx^2+nx+p$ có đồ thị là các đường cong như hình vẽ bên (đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y=ax^4+bx^2+c$). Diện tích của hình phẳng được tô đậm bằng




**A.** $\frac{32}{15}$. **B.** $\frac{64}{15}$. **C.** $\frac{104}{15}$. **D.** $\frac{52}{15}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Từ đồ thị ta thấy đồ thị hàm hàm số $y=f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c$ đi qua các điểm có tọa độ $(1;4)$, $(0;3)$ và đạt cực trị tại $x=1\Rightarrow\begin{cases}f\left(1\right)=4\\f\left(0\right)=3\\f'\left(1\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c=4\\c=3\\4a+2b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=2\\c=3\end{cases}\Rightarrow f\left(x\right)=-x^4+2x^2+3$.

Từ đồ thị ta thấy đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)=mx^2+nx+p$ đi qua các điểm có tọa độ $(0;0)$, $(1;4)$ và $(-1;4)\Rightarrow\begin{cases}f\left(0\right)=0\\f\left(1\right)=4\\f\left(-1\right)=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p=0\\m+n=4\\m-n=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p=0\\m=4\\n=0\end{cases}\Rightarrow g\left(x\right)=4x^2$.

Diện tích phần tô đậm: $S=\int_{-1}^{1}\left(-x^4+2x^2+3-4x^2\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{x^5}{5}-\frac{2}{3}x^3+3x\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{64}{15}$.

**Câu 20:** **(CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP 2019 LẦN 2)** Cho đồ thị $(C): y=\sqrt{x}$. Gọi $M$ là điểm thuộc $(C)$, $A(9;0)$. Gọi $(S_1)$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(C)$, đường thẳng $x=9$ và trục hoành. $(S_2)$ là diện tích tam giác $OMA$. Tọa độ điểm $M$ để $S_1=2S_2$ là

**A.** $M\left(3;\sqrt{3}\right)$. **B.** $M(4;2)$. **C.** $M\left(6;\sqrt{6}\right)$. **D.** $M(9;3)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow S_1=\int_0^9\sqrt{x}dx=18$.

$M$ là điểm thuộc $(C)$ nên $M\left(a;\sqrt{a}\right)\Rightarrow S_{OMA}=\frac{1}{2}d\left[M;OA\right].OA=\frac{1}{2}.\sqrt{a}.9=S_2$.

Theo đề bài ta có $S_1=2S_2\Leftrightarrow 18=9\sqrt{a}\Leftrightarrow a=4\Rightarrow M(4;2)$.

**Câu 21:** **(CHUYÊN NGUYỄN DU ĐĂK LĂK LẦN X NĂM 2019)** Cho hàm số $y=\frac{x-m}{x+1}$ ( với $m>0$ ) có đồ thị là $(C)$. Gọi $S$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C)$ và hai trục tọa độ. Biết $S=1$, giá trị thực của $m$ gần nhất với số nào sau đây:

**A.** $0,56$. **B.** $0,45$. **C.** $4,4$. **D.** $1,7$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$(C)$ cắt trục $Ox$ tại điểm $A(m;0)$ và cắt trục $Oy$ tại điểm $B(0;-m)$.

Do $m>0$ nên diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(C)$ và hai trục tọa độ là:

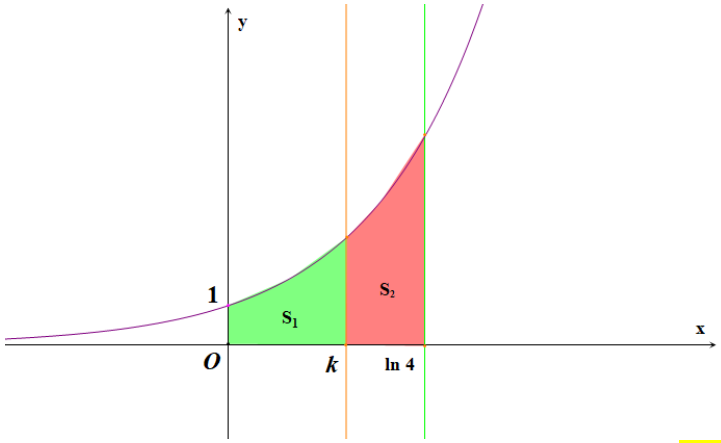
$$S=\int_0^m\left|\frac{x-m}{x+1}\right|dx=\int_0^m\frac{-x+m}{x+1}dx=\int_0^m\left(-1+\frac{m+1}{x+1}\right)dx=\left(-x+(m+1)\ln(x+1)\right)\Big|_0^m$$

$=-m+(m+1)\ln(m+1)$.

Lại có $S=1\Leftrightarrow(m+1)\ln(m+1)=1+m\Rightarrow\ln(m+1)=1$ (vì $m>0$ nên $m+1>1$ )

$\Rightarrow m+1=e\Leftrightarrow m=e-1\simeq 1,71828$.

**Câu 22:** **(Cẩm Giàng)** Cho hình thang cong $(H)$ giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k$ $(0<k<\ln 4)$ chia $(H)$ thành hai phần có diện tích là $S_1$ và $S_2$ như hình vẽ bên. Tìm $k$ để $S_1=2S_2$.




**A.** $k=\frac{4}{3}\ln 2$. **B.** $k=\ln\frac{8}{3}$. **C.** $k=\ln 2$. **D.** $k=\ln 3$.

**Lời giải**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Chọn D**

Diện tích hình thang cong $(H)$ giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=\ln 4$ là

$S=\int\limits_0^{\ln 4}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\Big|_0^{\ln 4}=\mathrm{e}^{\ln 4}-\mathrm{e}^0=4-1=3$ (đvdt).

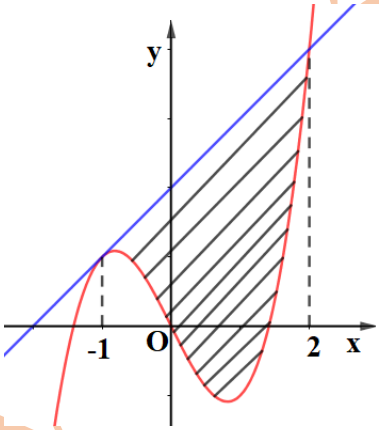
Ta có $S=S_1+S_2=S_1+\frac{1}{2}S_1=\frac{3}{2}S_1$. Suy ra $S_1=\frac{2S}{3}=\frac{2.3}{3}=2$ (đvdt).

Vì $S_1$ là phần diện tích được giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=k$ nên

$2=S_1=\int\limits_0^k\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\Big|_0^k=\mathrm{e}^k-\mathrm{e}^0=\mathrm{e}^k-1$.

Do đó $\mathrm{e}^k=3\Leftrightarrow k=\ln 3$.

**Câu 23:** **(KHTN Hà Nội Lần 3)** Cho hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ có đồ thị $(C)$. Biết rằng tiếp tuyến $d$ của $(C)$ tại điểm $A$ có hoành độ bằng $-1$ cắt $(C)$ tại điểm $B$ có hoành độ bằng $2$ (xem hình vẽ). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $d$ và $(C)$ (phần gạch chéo trong hình) bằng




**A.** $\frac{27}{4}$. **B.** $\frac{11}{2}$. **C.** $\frac{25}{4}$. **D.** $\frac{13}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

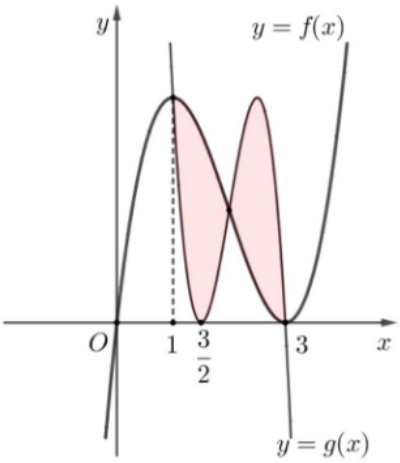
Đồ thị $(C)$ đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ suy ra $c=0$. Tiếp tuyến $d$ với $(C)$ tại điểm có hoành độ $x=-1$ có phương trình $y=(3-2a+b)x+2-a$. Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $d$ và $(C)$: $x^3+ax^2+bc=(3-2a+b)x+2-a\Leftrightarrow(x+1)\left[x^2+(a-1)x+a-2\right]=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ g(x)=x^2+(a-1)x+a-2=0\end{array}\right.$.

Vì $d$ cắt $(C)$ tại điểm $B$ có hoành độ bằng $2$ suy ra $g(2)=0\Leftrightarrow a=0$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tính là $S=\int\limits_{-1}^{2}\left|\left(x^3+bx\right)-\left((3+b)x+2\right)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}\left|x^3-3x-2\right|\mathrm{d}x=\frac{27}{4}$.

**Câu 24:** **(Đặng Thành Nam Đề 5)** Cho $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ và $g(x)=f(dx+e)$ với $a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y=f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y=f(x)$ và $y=g(x)$ gần nhất với kết quả nào dưới đây?




**A.** $4,5$. **B.** $4,25$. **C.** $3,63$. **D.** $3,67$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Vì $f(x)$ là hàm số bậc ba và có đồ thị tiếp xúc với $Ox$ tại điểm $x=3$, cắt $Ox$ tại điểm $x=0$ $\Rightarrow f(x)=x(x-3)^2$.

Ta có $g(x)=f(dx+e)$ và đồ thị hàm $g(x)$ tiếp xúc $Ox$ tại điểm $x=\frac{3}{2}$ và cắt $Ox$ tại điểm $x=3$ nên $g(x)=k\left(x-\frac{3}{2}\right)^2(x-3)$.

Từ đồ thị ta thấy đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại điểm có hoành độ $x=1$.

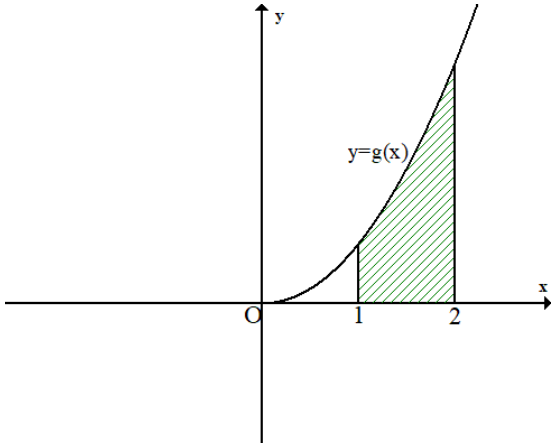
$$\Rightarrow f(1)=g(1)\Leftrightarrow 4=k\left(1-\frac{3}{2}\right)^2(1-3)\Leftrightarrow k=-8\Rightarrow g(x)=-8\left(x-\frac{3}{2}\right)^2(x-3)$$

Do đó đồ thị hàm số hai hàm số cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là: $x=1;x=3$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đường cong là:

$$S=\int_1^3\left|x(x-3)^2-\left[-8\left(x-\frac{3}{2}\right)^2(x-3)\right]\right|dx=4,5$$

**Câu 25:** **(CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP 2019 LẦN 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=g(x)=x.f\left(x^2\right)$ có đồ thị trên đoạn $[0;2]$ như hình vẽ.




Biết diện tích miền tô màu là $S=\frac{5}{2}$, tính tích phân $I=\int_1^4 f(x)dx$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** $I=5$. **B.** $I=\frac{5}{2}$. **C.** $I=\frac{5}{4}$. **D.** $I=10$.

**Lời giải**

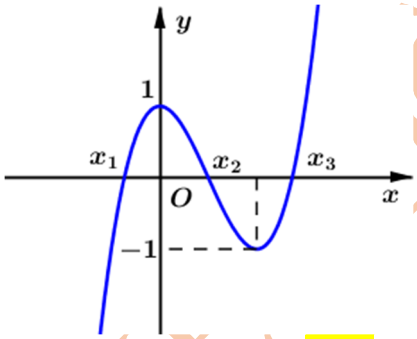
**Chọn A**

Ta có $S=\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x=\frac{5}{2}=\int_1^2 xf(x^2)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=x^2\Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=1$; $x=2\Rightarrow t=4$.

$\Rightarrow S=\int_1^2 xf(x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^4 f(t)\mathrm{d}t=\frac{5}{2}\Rightarrow\int_1^4 f(t)\mathrm{d}t=5\Rightarrow\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=5$.

**Câu 26:** **(THTT lần5)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị $(C)$ như hình vẽ. Biết đồ thị hàm số đã cho cắt trục $Ox$ tại 3 điểm có hoành độ $x_1$, $x_2$, $x_3$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và $x_3-x_1=2\sqrt{3}$. Gọi diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(C)$ và trục Ox là $S$. Diện tích $S_1$ của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)+1$, $y=-f(x)-1$, $x=x_1$ và $x=x_3$ bằng




**A.** $S+2\sqrt{3}$. **B.** $R=S+4\sqrt{3}$. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** $8\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng $S_1$ giới hạn bởi các đường $y=f(x)+1$, $y=-f(x)-1$, $x=x_1$ và $x=x_3$ ta được:

$S_1=\int_{x_1}^{x_3}\left|f(x)+1-\left(-f(x)-1\right)\right|dx=\int_{x_1}^{x_3}2\left|f(x)+1\right|dx$

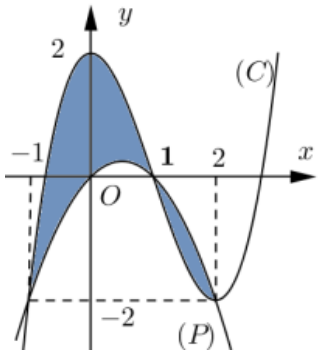
$=\int_{x_1}^{x_3}2\left(f(x)+1\right)dx$ $\left(f(x)\ge -1 \text{ trên } [x_1;x_3]\right)$

$=2\int_{x_1}^{x_3}f(x)dx+2\int_{x_1}^{x_3}dx$.

Vì $x_1$, $x_2$, $x_3$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên $x_2$ cách đều $x_1$ và $x_3$. Khi đó điểm $(x_2;0)$ là điểm uốn của đồ thị $(C)$, ta thấy hình phẳng giới hạn bởi $(C)$ và trục Ox gồm 2 phần có cùng diệntích nhưng nằm khác phía so với trục Ox, do đó $\int_{x_1}^{x_3}f(x)dx=0$.

Suy ra: $S_1=2\times 0+2\int_{x_1}^{x_3}dx=2\times(x_3-x_1)=4\sqrt{3}$.

**Câu 27:** **(Nguyễn Trãi Hải Dương Lần1)** Hình phẳng $(H)$ được giới hạn bởi đồ thị $(C)$ của hàm đa thức bậc ba và parabol $(P)$ có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** của hình vẽ có diện tích bằng




**A.** $\frac{37}{12}$. **B.** $\frac{7}{12}$. **C.** $\frac{11}{12}$. **D.** $\frac{5}{12}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Cách 1:**

Gọi hàm số bậc ba là $y=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow y'=3ax^2+2bx+c$.

Đồ thị $(C)$ đi qua các điểm $(1;0),(2;-2)$ và đạt cực trị tại $x=0;x=2$ nên ta có hệ sau :

$$\begin{cases}0=a+b+c+d\\-2=8a+4b+2c+d\\0=c\\0=12a+4b+c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-3\\c=0\\d=2\end{cases}.$$

Suy ra hàm số bậc ba là $y=x^3-3x^2+2$.

Gọi hàm bậc hai là $y=mx^2+nx+p$. Đồ thị $(P)$ đi qua các điểm $(1;0),(2;-2),(-1;-2)$ nên ta có hệ sau :

$$\begin{cases}0=m+n+p\\-2=4m+2n+p\\-2=m-n+p\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-1\\n=1\\p=0\end{cases}.$$

Suy ra hàm số bậc hai là $y=-x^2+x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C)$ và $(P)$ là :

$$x^3-3x^2+2=-x^2+x\Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\x=1\\x=2\end{cases}.$$

Vậy diện tích phần tô đậm là : $S=\int_{-1}^{2}\left|\left(x^3-2x^2-x+2\right)\right|dx$.

$$S=\left|\int_{-1}^{1}\left(x^3-2x^2-x+2\right)dx\right|+\left|\int_{1}^{2}\left(x^3-2x^2-x+2\right)dx\right|=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}=\frac{37}{12}.$$

**Cách 2:**

Vì đồ thị hàm bậc ba và đồ thị hàm bậc hai cắt trục tung tại các điểm có tung độ lần lượt là $y=2,y=0$ nên ta xét hai hàm số là $y=ax^3+bx^2+cx+2$, $y=mx^2+nx$.

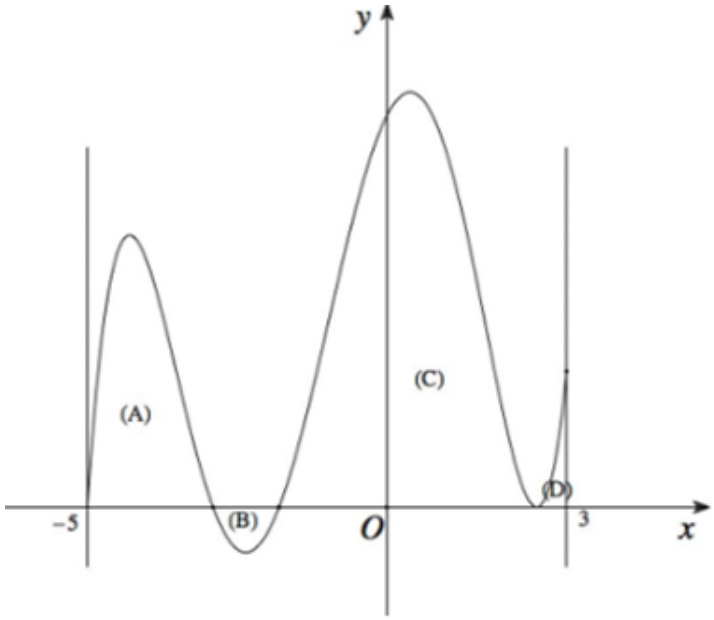
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

* Vì đồ thị hai hàm số cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là $x=-1;x=1;x=2$ nên ta có phương trình hoành độ giao điểm:

$ax^3+bx^2+cx+2=mx^2+nx \Leftrightarrow a(x+1)(x-1)(x-2)=0$. Với $x=0$ ta được $2a=2\to a=1$.

*Vậy diện tích phần tô đậm là: $S=\int_{-1}^{2}\left|(x+1)(x-1)(x-2)\right|dx=\frac{37}{12}$.

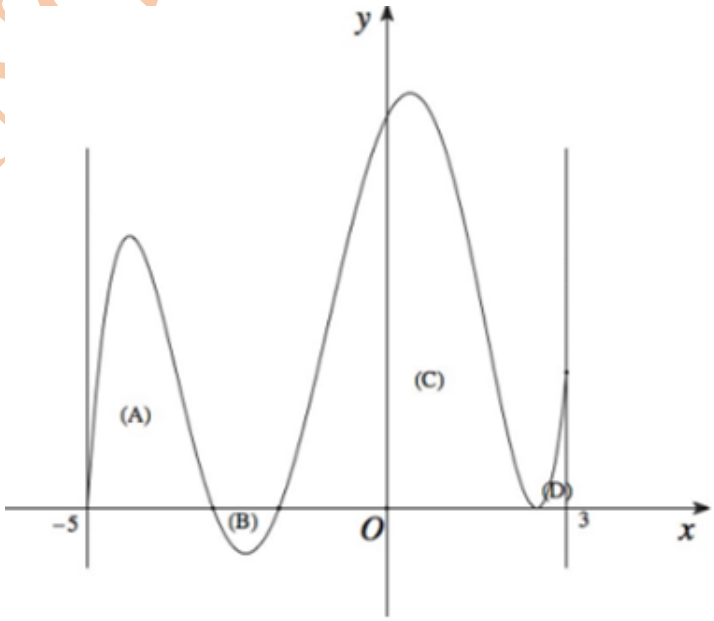
**Câu 28:** **(Đặng Thành Nam Đề 2)** Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5;3]$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Biết diện tích các hình phẳng $(A),(B),(C),(D)$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và trục hoành lần lượt bằng $6;3;12;2$. Tích phân $\int_{-3}^{1}\left[2f(2x+1)+1\right]dx$ bằng




**A.** 27. **B.** 25. **C.** 17. **D.** 21.

**Lời giải**

**Chọn D**




Quan sát đồ thị hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-5;3]$, giả sử đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại các điểm $x=-5;x=a;x=b;x=c$ với $-5<a<b<c<3$. Khi đó, theo đề bài ta có

$S_A=\int\limits_{-5}^{a}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=6\Rightarrow\int\limits_{-5}^{a}f(x)\mathrm{d}x=6$; $S_B=\int\limits_{a}^{b}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=3\Rightarrow\int\limits_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=-3$;

$S_C=\int\limits_{b}^{c}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=12\Rightarrow\int\limits_{b}^{c}f(x)\mathrm{d}x=12$; $S_D=\int\limits_{c}^{3}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=2\Rightarrow\int\limits_{c}^{3}f(x)\mathrm{d}x=2$.

Xét $I=\int\limits_{-3}^{1}\left[2f(2x+1)+1\right]\mathrm{d}x$. Đặt $t=2x+1\Rightarrow\mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$.

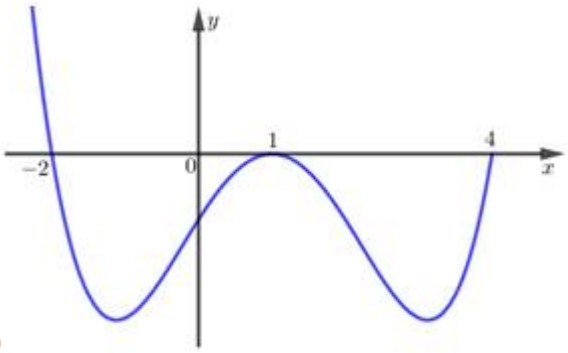
Đổi cận $\begin{cases}x=1\\x=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=3\\t=-5\end{cases}$. Do đó

$I=\frac{1}{2}\int\limits_{-5}^{3}\left[2f(t)+1\right]\mathrm{d}t=\int\limits_{-5}^{3}f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int\limits_{-5}^{3}\mathrm{d}t$. Lại có:

$\int\limits_{-5}^{3}f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{-5}^{a}f(t)\mathrm{d}t+\int\limits_{a}^{b}f(t)\mathrm{d}t+\int\limits_{b}^{c}f(t)\mathrm{d}t+\int\limits_{c}^{3}f(t)\mathrm{d}t=6-3+12+2=17$.

Vậy $I=\int\limits_{-5}^{3}f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int\limits_{-5}^{3}\mathrm{d}t=17+4=21.$

**Câu 29:** **(TTHT Lần 4)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.




Biết rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục $Ox$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ và $[1;4]$ lần lượt bằng 9 và 12. Cho $f(1)=3$. Giá trị của biểu thức $f(-2)+f(4)$ bằng

**A.** 21. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn C**

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)\Rightarrow f'(x)\le 0$ trên mỗi đoạn $[-2;1]$ và $[1;4]$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục $Ox$ với đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[-2;1]$

$S_1=\int\limits_{-2}^{1}\left|f'(x)\right|dx=-\int\limits_{-2}^{1}f'(x)dx=f(-2)-f(1)\Rightarrow f(-2)-f(1)=9\Rightarrow f(-2)=9+f(1)=12.$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục $Ox$ đồ với đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[1;4]$ là

$S_2=\int\limits_{1}^{4}\left|f'(x)\right|dx=-\int\limits_{1}^{4}f'(x)dx=f(1)-f(4)\Rightarrow f(1)-f(4)=12\Rightarrow f(4)=f(1)-12=-9.$

Vậy $f(-2)+f(4)=12-9=3.$

**Câu 30:** **(Hậu Lộc Thanh Hóa)** Tìm số thực $a$ để hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm $y=\frac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^6}$ và $y=\frac{a^2-ax}{1+a^6}$ có diện tích lớn nhất.

**A.** $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\sqrt[3]{3}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là:

$$\frac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^6}=\frac{a^2-ax}{1+a^6}\Leftrightarrow x^2+3ax+2a^2=0\Leftrightarrow (x+a)(x+2a)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-a\\x=-2a\end{array}\right.$$

Nếu $a=0$ thì diện tích hình phẳng $S=0$.

+ Nếu $a>0$ thì $S=\int\limits_{-2a}^{-a}\left|\frac{x^2+3ax+2a^2}{1+a^6}\right|\mathrm{d}x=-\int\limits_{-2a}^{-a}\frac{x^2+3ax+2a^2}{1+a^6}\mathrm{d}x=\frac{1}{6}.\frac{a^3}{1+a^6}$.

+ Nếu $a<0$ thì $S=\int\limits_{-a}^{-2a}\left|\frac{x^2+3ax+2a^2}{1+a^6}\right|\mathrm{d}x=-\int\limits_{-a}^{-2a}\frac{x^2+3ax+2a^2}{1+a^6}\mathrm{d}x=-\frac{1}{6}.\frac{a^3}{1+a^6}$.

Do đó, với $a\neq 0$ thì $S=\frac{1}{6}.\frac{|a|^3}{1+|a|^6}\le\frac{1}{6}.\frac{|a|^3}{2|a|^3}=\frac{1}{12}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $|a|^3=1\Leftrightarrow a=\pm 1$.

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai hàm đã cho có diện tích lớn nhất khi $a=1$.

**Câu 31:** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$ cho $(E)$ có phương trình $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,(a,b>0)$ và đường tròn $(C):x^2+y^2=7$. Để diện tích elip $(E)$ gấp 7 lần diện tích hình tròn $(C)$ khi đó

**A.** $ab=7$. **B.** $ab=7\sqrt{7}$. **C.** $ab=\sqrt{7}$. **D.** $ab=49$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,(a,b>0)\Rightarrow y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Diện tích $(E)$ là $S_{(E)}=4\int\limits_0^a\frac{b\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x}{a}=4\frac{b}{a}\int\limits_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$

Đặt $x=a\sin t,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow \mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0; x=a\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$

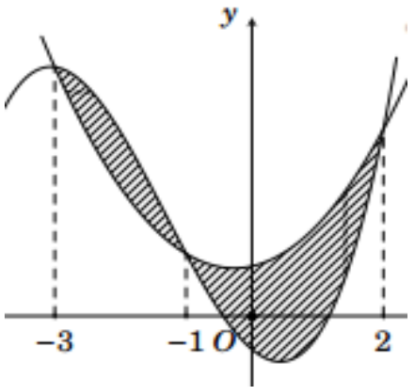
$$S_{(E)}=4\frac{b}{a}\int\limits_0^a a^2.\cos^2 t\mathrm{d}t=2ab\int\limits_0^a(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\pi ab$$

Mà ta có $S_{(C)}=\pi.R^2=7\pi$.

Theo giả thiết ta có $S_{(E)}=7.S_{(C)}\Leftrightarrow \pi ab=49\pi\Leftrightarrow ab=49$.

**Câu 32:** **(NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG LẦN IV NĂM 2019)** Người ta dự định trồng hoa Lan Ý để trang trí vào phần tô đậm (như hình vẽ). Biết rằng phần tô đậm là diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}$ và $y=g(x)=dx^2+ex+1$ trong đó $a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$. Biết rằng hai đồ thị đó cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt bằng $-3;-1;2$, chi phí trồng hoa là 800000 đồng/$1m^2$ và đơn vị trên các trục được tính là 1 mét. Số tiền trồng hoa gần nhất với số nào sau đây? (làm tròn đến đơn vị nghìn đồng).

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG




**A.** 4217000 đồng. **B.** 2083000 đồng. **C.** 422000 đồng. **D.** 4220000 đồng.

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\frac{3}{2}=0.\ (*)$$

Vì hai đồ thị cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt bằng $-3;\ -1;\ 2$ nên phương trình (*) có các nghiệm là $x=-3;\ x=-1$ và $x=2$. Do đó, ta có

$$ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\frac{3}{2}=a(x+3)(x+1)(x-2),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Cho $x=0$ ta được $-\frac{3}{2}=-6a\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$.

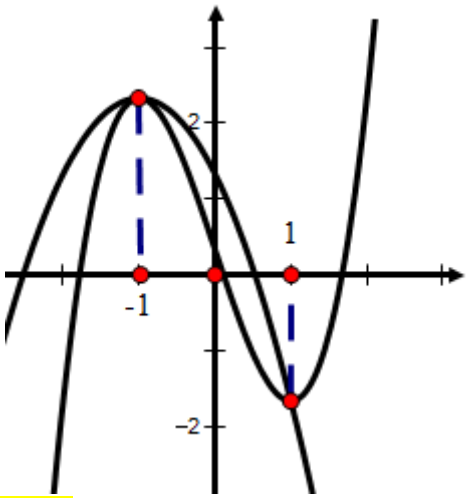
Diện tích phần trồng hoa là

$$S=\int_{-3}^{2}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-3}^{2}\left|\frac{1}{4}(x+3)(x+1)(x-2)\right|\mathrm{d}x=\frac{253}{48}\ (m^2).$$

Số tiền trồng hoa là $T=800000.S=4216666,667$ (đồng).

Làm tròn đến đơn vị nghìn đồng ta được 4217000 đồng.

**Câu 33:** **(Chuyên Thái Nguyên)** Cho hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c\ (a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị $(C)$ và $y=mx^2+nx+p\ (m,n,p\in\mathbb{R})$ có đồ thị $(P)$ như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(C)$ và $(P)$ có giá trị nằm trong khoảng nào sau đây?




**A.** $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Căn cứ đồ thị ta thấy

+ Hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ đạt cực trị tại $x=\pm 1$ nên ta có

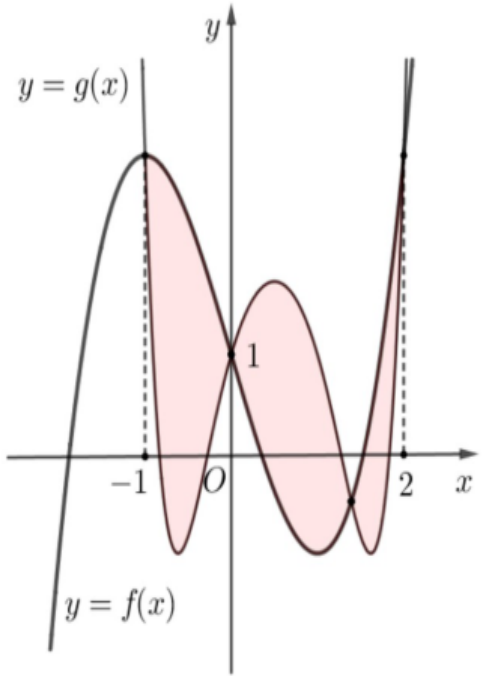
$$\begin{cases} y'(1)=0 \\ y'(-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b+3=0 \\ -2a+b+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-3 \end{cases}.$$

+ Hàm số $y=mx^2+nx+p$ đạt cực đại tại $x=-1$ và $(P)$ cắt $(C)$ tại hai điểm có hoành độ $x=\pm 1$ nên ta có

$$\begin{cases} -2m+n=0 \\ 1+a+b+c=m+n+p \\ -1+a-b+c=m-n+p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=-2 \\ m=-1 \\ p-c=1 \end{cases}$$

Suy ra $S=\int\limits_{-1}^{1}\left(mx^2+nx+p-x^3-ax^2-bx-x\right)dx=\int\limits_{-1}^{1}\left(-x^3-x^2+x+1\right)dx=\dfrac{4}{3}\in(1;2)$

**Câu 34:** **(Đặng Thành Nam Đề 9)** Cho hàm số $f(x)=x^3+ax+b$ và $g(x)=f\left(cx^2+dx\right)$ với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong đậm hơn là của hàm số $y=f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y=f(x)$ và $y=g(x)$ gần nhất với kết quả nào dưới đây?




**A.** $7,66$. **B.** $4,24$. **C.** $3,63$. **D.** $5,14$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $f(0)=1$ và hàm đạt cực đại tại điểm $x=-1$ nên

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f'(-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=-3 \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^3-3x+1$$

Khi đó $g(x)=\left(cx^2+dx\right)^3-3\left(cx^2+dx\right)+1$

Đồ thị hàm số $y=g(x)$ đi qua các điểm $(0;1);(-1;3);(2;3)$ do đó

$$\begin{cases} g(0)=1 \\ g(-1)=3 \\ g(2)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (c-d)^3-3(c-d)+1=3 \\ (4c+2d)^3-3(4c+2d)=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} c-d=-1 \\ c-d=2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 4c+2d=-1 \\ 4c+2d=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=1, d=-1 \\ c=0, d=1 \\ c=\dfrac{1}{2}, d=-\dfrac{3}{2} \\ c=-\dfrac{1}{2}, d=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vì hàm số $y=g(x)$ có ba điểm cực trị nên $c\neq 0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ nên $c>0$

Suy ra $c=1; d=-1 \Rightarrow g(x)=(x^2-x)^3-3(x^2-x)+1.$

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là

$$(x^2-x)^3-3(x^2-x)+1=x^3-3x+1$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x)^3-x^3-3\left(x^2-2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-2x\right)\left[\left(x^2-x\right)^2+x\left(x^2-x\right)+x^2-3\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x=0 \\ x^4-x^3+x^2-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=-1 \\ x=x_0\approx 1,39 \end{array}\right.$$

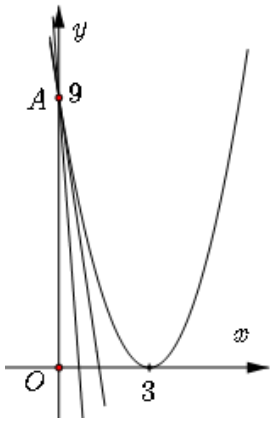
Dựa vào đồ thị ta có

Vậy

$$S\simeq \int_{-1}^{0}\left[x^3-3x-\left(x^2-x\right)^3+3\left(x^2-x\right)\right]dx+\int_{0}^{1,39}\left[\left(x^2-x\right)^3-3\left(x^2-x\right)-x^3+3x\right]dx+$$

$$+\int_{1,39}^{2}\left[x^3-3x-\left(x^2-x\right)^3+3\left(x^2-x\right)\right]dx\simeq 5,14$$

**Câu 35:** **(Đặng Thành Nam Đề 15)** Gọi $(H)$ là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=(x-3)^2$, trục hoành và trục tung. Gọi $k_1, k_2\,(k_1>k_2)$ lần lượt là hệ số góc của các đường thẳng đi qua điểm $A(0;9)$ và chia $(H)$ thành ba phần có diện tích bằng nhau (*tham khảo hình vẽ bên*).




Giá trị của $k_1-k_2$ bằng

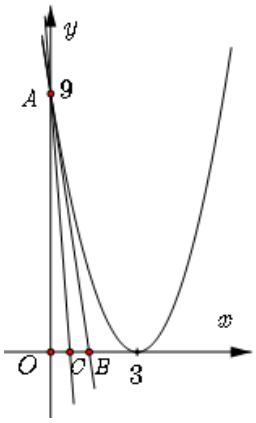
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** $\frac{13}{2}$. **B.** $7$. **C.** $\frac{25}{4}$. **D.** $\frac{27}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có diện tích của hình phẳng $(H)$ là $S=\int_0^3 (x-3)^2\,dx=9$.




Gọi $(d_1),(d_2)$ lần lượt là hai đường thẳng có hệ số góc $k_1,k_2$ và cùng đi qua điểm $A(0;9)$.

Khi đó phương trình đường thẳng $(d_1)$ là $y=k_1(x-0)+9=k_1x+9$ và phương trình đường thẳng $(d_2)$ là $y=k_2(x-0)+9=k_2x+9$.

Đường thẳng $(d_1)$ và $(d_2)$ lần lượt cắt trục $Ox$ tại $B\left(-\frac{9}{k_1};0\right)$ và $C\left(-\frac{9}{k_2};0\right)$ (vì $k_2<k_1<0$).

Theo giả thiết thì $\begin{cases} S_{\Delta AOC}=\frac{1}{3}S \\ S_{\Delta AOB}=\frac{2}{3}S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}9.\left|-\frac{9}{k_2}\right|=3 \\ \frac{1}{2}9.\left|-\frac{9}{k_1}\right|=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_2=-\frac{27}{2} \\ k_1=-\frac{27}{4} \end{cases}$.

Suy ra $k_1-k_2=-\frac{27}{4}+\frac{27}{2}=\frac{27}{4}$.

**Câu 36:** **(KSCL-Lần-2-2019-THPT-Nguyễn-Đức-Cảnh-Thái-Bình)** Cho đồ thị $(C)$ của hàm số $y=x^3-3x^2+1$. Gọi $(d)$ là tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm $A$ có hoành độ $x_A=a$. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(d)$ và $(C)$ bằng $\frac{27}{4}$, các giá trị của $a$ thỏa mãn đẳng thức nào?

**A.** $2a^2-a-1=0$. **B.** $a^2-2a=0$. **C.** $a^2-a-2=0$. **D.** $a^2+2a-3=0$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có phương trình $d$: $y=\left(3a^2-6a\right)(x-a)+a^3-3a^2+1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C)$ với $(d)$:

$x^3-3x^2+1=\left(3a^2-6a\right)(x-a)+a^3-3a^2+1 \Leftrightarrow (x-a)^2(x+2a-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=3-2a \end{array}\right.$.

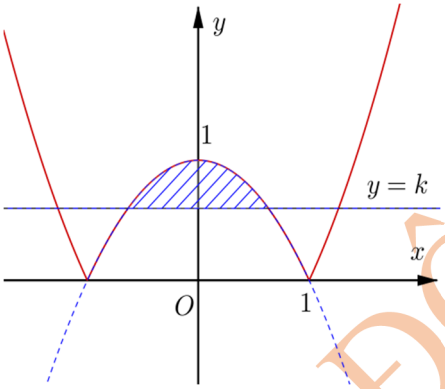
Diện tích hình phẳng cần tính là:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$S=\left|\int_{a}^{3-2a}\left(x^3-3x^2-\left(3a^2-6a\right)x+2a^3-3a^2\right)\mathrm{d}x\right|=\frac{27}{4}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{-27}{4}a^4+27a^3-\frac{81}{2}a^2+27a=0\\ \frac{-27}{4}a^4+27a^3-\frac{81}{2}a^2+27a-\frac{27}{2}=0\,(vn)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2\\ a=0\end{array}\right.$$

**Câu 37:** Cho hình phẳng $(H)$ giới hạn bởi các đường $y=\left|x^2-1\right|$ và $y=k, 0<k<1$. Tìm $k$ để diện tích của hình phẳng $(H)$ gấp hai lần diện tích hình phẳng được kẻ sọc trong hình vẽ bên.




**A.** $k=\sqrt[3]{4}$. **B.** $k=\sqrt[3]{2}-1$. **C.** $k=\frac{1}{2}$. **D.** $k=\sqrt[3]{4}-1$.

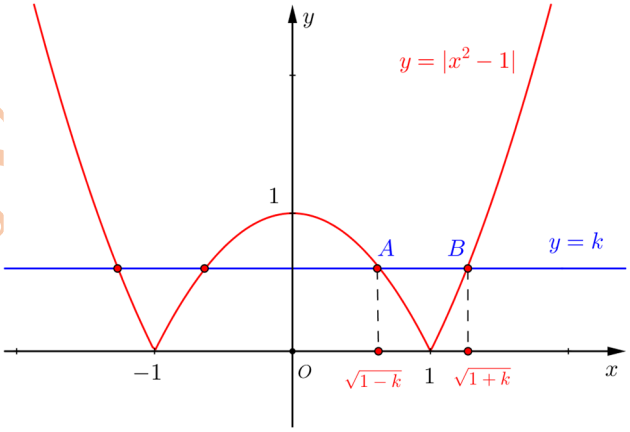
**Lời giải**

**Chọn D**

Do đồ thị nhận trục $Oy$ làm trục đối xứng nên yêu cầu bài toán trở thành:

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=1-x^2, y=k, x=0$ bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

$y=1-x^2, y=x^2-1, y=k, x>0.$

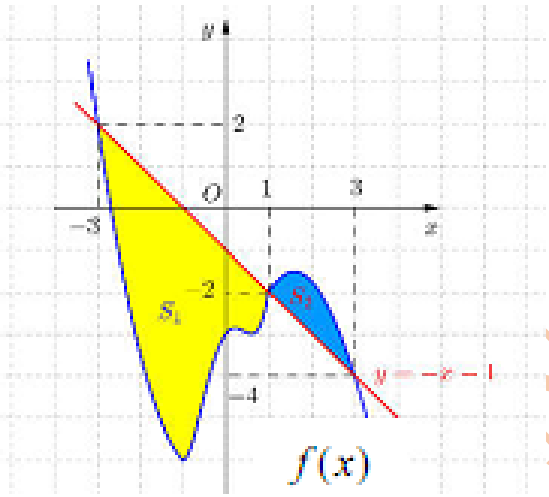



$$\int_{0}^{\sqrt{1-k}}\left(1-x^2-k\right)\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{1-k}}^{1}\left(k-1+x^2\right)\mathrm{d}x+\int_{1}^{\sqrt{1+k}}\left(k-x^2+1\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow(1-k)\sqrt{1-k}-\frac{1}{3}(1-k)\sqrt{1-k}$$

$$=\frac{1}{3}-(1-k)-\frac{1}{3}(1-k)\sqrt{1-k}+(1-k)\sqrt{1-k}+(1+k)\sqrt{1+k}-\frac{1}{3}(1+k)\sqrt{1+k}-(1+k)+\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{3}(1+k)\sqrt{1+k}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+k}\right)^3=2\Leftrightarrow k=\sqrt[3]{4}-1.$$

**Câu 38:** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-3;3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng $S_1$, $S_2$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-x-1$ lần lượt là $M$, $m$. Tính tích phân $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$ bằng




**A.** $6+m-M$. **B.** $6-m-M$. **C.** $M-m+6$. **D.** $m-M-6$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $M=S_1=\int_{-3}^{1}\left(-x-1-f(x)\right)dx=\int_{-3}^{1}(-x-1)dx-\int_{-3}^{1}f(x)dx=\left(-\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_{-3}^{1}=-\int_{-3}^{1}f(x)dx$.

$m=S_2=\int_{1}^{3}\left(f(x)+x+1\right)dx=\int_{1}^{3}f(x)dx+\int_{1}^{3}(x+1)dx=\int_{1}^{3}f(x)dx+\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{1}^{3}=\int_{1}^{3}f(x)dx+6$.

$S_1-S_2=-\int_{-3}^{1}f(x)dx-\int_{1}^{3}f(x)dx-6\Leftrightarrow M-m=-6-\left(\int_{-3}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{3}f(x)dx\right)$

$\Leftrightarrow M-m=-6-\int_{-3}^{3}f(x)dx\Leftrightarrow\int_{-3}^{3}f(x)dx=m-M+6$

**Câu 39:** **(Đặng Thành Nam Đề 6)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, có đồ thị $(C)$ và $M$ là một điểm bất kì thuộc $(C)$ sao cho tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ cắt $(C)$ tại điểm thứ hai $N$; tiếp tuyến của $(C)$ tại $N$ cắt $(C)$ tại điểm thứ hai $P$. Gọi $S_1, S_2$ lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $MN$ và $(C)$; đường thẳng $NP$ và $(C)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

**A.** $S_1=8S_2$. **B.** $S_2=8S_1$. **C.** $S_2=16S_1$. **D.** $S_1=16S_2$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Giả sử $a>0$ và gọi $m,n,p$ lần lượt là hoành độ các điểm $M,N,P$ với $m<n$. Tiếp tuyến tại $M$ là $y=ex+f$ cắt $(C)$ tại điểm $M$, $N$ có hoành độ $m,n$ trong đó tại điểm $M$ là điểm tiếp xúc. Vì vậy phương trình $(ax^3+bx^2+cx+d)-(ex+f)=a(x-m)^2(x-n)$ có các nghiệm là $x_1=x_2=m; x_3=n$. Theo định lý vi-et ta có $2m+n=\frac{-b}{a}\Leftrightarrow n=-\frac{b}{a}-2m$.

Với giả sử $m<n\Rightarrow m<\frac{-b}{3a}$.

Một cách tương tự cho tiếp tuyến $NP$ có

$2n+p=\frac{-b}{a}\Leftrightarrow p=\frac{-b}{a}-2n=\frac{-b}{a}-2\left(\frac{-b}{a}-2m\right)=\frac{b}{a}+4m<n$

Sử dụng tích phân $\int_a^b (x-a)^2(x-b)dx=\frac{-1}{12}(a-b)^4$. Diện tích các mặt phẳng:

$S_1=S_{(MN,(C))}=\int_m^{-\frac{b}{a}-2m}\left|a(x-m)^2\left(x+\frac{b}{a}+2m\right)\right|dx=-\int_m^{-\frac{b}{a}-2m}a(x-m)^2\left(x+\frac{b}{a}+2m\right)dx=\frac{a}{12}\left(-\frac{b}{a}-3m\right)^4$

$S_2=S_{(NP,(C))}=\int_{\frac{b}{a}+4m}^{-\frac{b}{a}-2m}\left|a\left(x+\frac{b}{a}+2m\right)^2\left(x-\frac{b}{a}-4m\right)\right|dx$

$=\int_m^{-\frac{b}{a}-2m}a\left(x+\frac{b}{a}+2m\right)^2\left(x-\frac{b}{a}-4m\right)dx=\frac{a}{12}\left(-\frac{2b}{a}-6m\right)^4$

$\Rightarrow S_2=16S_1$.

*Lưu ý: Có thể chọn 1 hàm bậc ba cụ thể với điểm M cụ thể để thử đáp án trắc nghiệm.

**Câu 40:** **(CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG QUẢNG NAM LẦN 2 NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $(C)$ nằm trên trục hoành. Hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn các điều kiện $(y')^2+y''.y=-4$ và $f(0)=1;\ f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(C)$ và trục hoành gần nhất với số nào dưới đây?

**A.** 0,95. **B.** 0,96. **C.** 0,98. **D.** 0,97.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\left(f'(x)\right)^2+f''(x).f(x)=-4$

$\Leftrightarrow\left(f'(x).f(x)\right)'=-4$

$\Leftrightarrow\int\left(f'(x).f(x)\right)'dx=\int-4dx$

$\Leftrightarrow f'(x).f(x)=-4x+C$

$\Leftrightarrow\int f'(x).f(x)dx=\int(-4x+C)dx$

$\Leftrightarrow\int f(x)d\left(f(x)\right)=-4\frac{x^2}{2}+C.x+B$

$\Leftrightarrow\frac{f^2(x)}{2}=-2x^2+C.x+B$

$\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{-4x^2+2C.x+B}$.

Giả thiết cho $f(0)=1$ và $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{B}=1\\ \sqrt{-\frac{1}{4}+\frac{C}{2}+B}=\frac{\sqrt{5}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=1\\ C=1\end{cases}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Rightarrow f(x)=\sqrt{-4x^2+2x+1}\quad (C)$

*) Phương trình hoành độ giao điểm của $(C)$ với trục hoành $\sqrt{-4x^2+2x+1}=0$.

$\Leftrightarrow -4x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4} \\ x_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\end{array}\right.$.

Vì $(C)$ luôn ở phía trên trục hoành nên $S=\int\limits_{\frac{1-\sqrt{5}}{4}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}\sqrt{-4x^2+2x+1}dx\approx 0,98$.

**Câu 41:** **(THẠCH THÀNH I - THANH HÓA 2019)** Xác định $a>0$ sao cho diện tích giới hạn bởi hai parabol: $y=\dfrac{4a^2-2ax-x^2}{1+a^4}$, $y=\dfrac{x^2}{1+a^4}$ có giá trị lớn nhất.

**A.** $a=\sqrt[4]{3}$. **B.** $a=\sqrt[3]{3}$. **C.** $a=\sqrt[3]{4}$. **D.** $a=\sqrt[4]{5}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Phương trình hoành độ giao điểm của hai parabol: $\dfrac{4a^2-2ax-x^2}{1+a^4}=\dfrac{x^2}{1+a^4}\Leftrightarrow 2x^2+2ax-4a^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2a\\ x=a\end{array}\right.$.

Diện tích cần tìm là: $S=\int\limits_{-2a}^{a}\left|\dfrac{4a^2-2ax-x^2}{1+a^4}-\dfrac{x^2}{1+a^4}\right|dx=-\dfrac{2}{1+a^4}\int\limits_{-2a}^{a}\left(x^2+ax-2a^2\right)dx$

$=-\dfrac{2}{1+a^4}\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{ax^2}{2}-2a^2x\right)\Bigg|_{x=-2a}^{x=a}=9.\dfrac{a^3}{1+a^4}$.

Xét hàm số: $f(a)=9.\dfrac{a^3}{1+a^4}$, $a\in(0;+\infty)$. Ta có: $f'(a)=9.\dfrac{3a^2-a^6}{\left(1+a^4\right)^2}$.

$f'(a)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\notin(0;+\infty)\\ a=-\sqrt[4]{3}\notin(0;+\infty)\\ a=\sqrt[4]{3}\in(0;+\infty)\end{array}\right.$. Từ đó ta có bảng biến thiên:

| $a$ | $0$ | | $\sqrt[4]{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(a)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(a)$ | $0$ | $\nearrow$ | $f(\sqrt[4]{3})$ | $\searrow$ | $0$ |

Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $a=\sqrt[4]{3}$.

**Nhận xét:** Có thể đánh giá như sau: $1+a^4=1+\dfrac{a^4}{3}+\dfrac{a^4}{3}+\dfrac{a^4}{3}\ge 4\sqrt[4]{\left(\dfrac{a^4}{3}\right)^3}=\dfrac{4\sqrt[4]{3}}{3}a^3$

Suy ra $f(a)=9.\dfrac{a^3}{1+a^4}\le 9\dfrac{a^3}{\frac{4\sqrt[4]{3}}{3}a^3}=\dfrac{27}{4\sqrt[4]{3}}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 1=\dfrac{a^4}{3}\Leftrightarrow a^4=3\Leftrightarrow a=\sqrt[4]{3}$

**Câu 42:** Cho khối trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O;R)$ và $(O';R)$, $OO'=4R$. Trên đường tròn $(O;R)$ lấy hai điểm $A$, $B$ sao cho $AB=a\sqrt{3}$. Mặt phẳng $(P)$ đi qua $A$, $B$ cắt đoạn $OO'$ và tạo với đáy một góc $60°$, $(P)$ cắt khối trụ theo thiết diện là một phần của elip. Diện tích thiết diện đó bằng

**A.** $\left(\dfrac{4\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$. **B.** $\left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$. **C.** $\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$. **D.** $\left(\dfrac{4\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

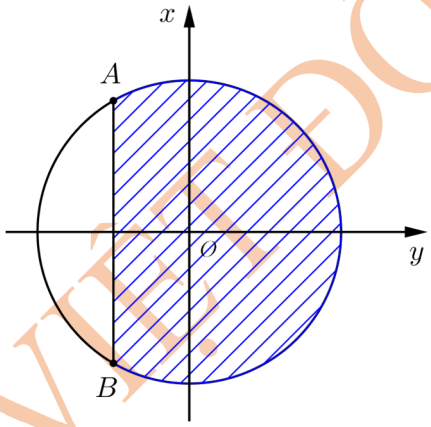
**Lời giải**

**Chọn A**

**Cách 1:** Gọi diện tích cần tìm là $S$, diện tích của hình này chiếu xuống đáy là $S'$.

Ta có: $S'=S.\cos 60°$.

Hình chiếu của phần elip xuống đáy là miền sọc xanh như hình vẽ.




Trong $\Delta AOB$ ta có: $\cos\widehat{AOB}=\dfrac{OA^2+OB^2-AB^2}{2.OA.OB}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow \widehat{AOB}=\dfrac{2\pi}{3}$.

Suy ra: sđ $\widehat{AOB}$ lớn $=\dfrac{4\pi}{3}$.

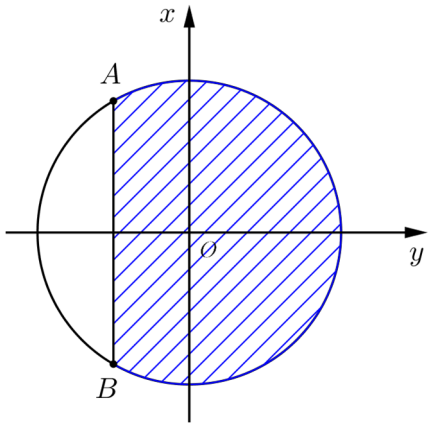
Do đó $S'=S_{quatAOB}+S_{\Delta AOB}=\dfrac{\frac{4\pi}{3}}{2\pi}.\pi R^2+\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)R^2=\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$

Vậy $S=\dfrac{S'}{\cos 60°}=2\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2=\left(\dfrac{4\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$

**Cách 2:** Ta có: $\cos\widehat{AOB}=\dfrac{OA^2+OB^2-AB^2}{2.OA.OB}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow \widehat{AOB}=120°\Rightarrow OH=\dfrac{R}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxy$ như hình vẽ

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG




Suy ra: phương trình đường tròn đáy là $x^2+y^2=R^2 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$.

Hình chiếu của phần elip xuống đáy là miền sọc xanh như hình vẽ.

Ta có $S=2\int\limits_{-\frac{R}{2}}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx$. Đặt $x=R.\sin t \Rightarrow S=\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$.

Gọi diện tích phần elip cần tính là $S'$.

Theo công thức hình chiếu, ta có $S'=\frac{S}{\cos 60^\circ}=2S=\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

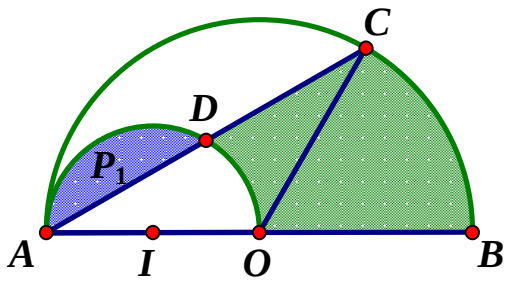
**Câu 43:** **(CHUYÊN NGUYỄN DU ĐĂK LĂK LẦN X NĂM 2019)** Ta vẽ hai nửa đường tròn như hình bên, trong đó đường kính của nửa đường tròn lớn gấp đôi đường kính của nửa đường tròn nhỏ. Biết rằng nửa đường tròn đường kính AB có bán kính bằng 4 và $\widehat{BAC}=30^0$. Diện tích hình (H) (phần tô đậm) bằng:

**A.** $2\pi+2\sqrt{3}$ **B.** $2\pi+3\sqrt{3}$

**C.** $\frac{10\pi}{3}+2\sqrt{3}$ **D.** $\frac{7\pi}{3}+3\sqrt{3}$

**Lời giải**

**Chọn B**




Ta có diện tích tam giác cong ABC bằng 4 lần diện tích tam giác cong ADO

Diện tích phần $P_1$ là: $S_{P_1}=2.\frac{2\pi}{3}-S_{AID}=\frac{4\pi}{3}-\frac{1}{2}2.2\sin 120^0=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$

Vậy diện tích hình tam giác cong ADO là: $S=\frac{1}{2}.2^2\pi-S_{P_1}=2\pi-\left(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)=\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

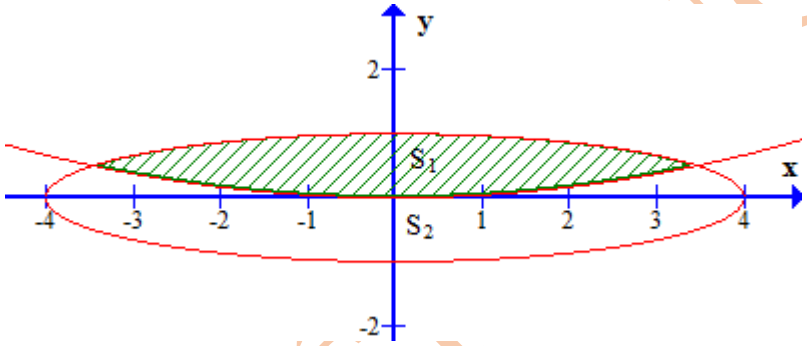
Vậy diện tích cần tìm là: $S = 3(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}) = 2\pi + 3\sqrt{3}$

**Câu 44:** **(SỞ NAM ĐỊNH 2018-2019)** Biết rằng parabol $y = \frac{1}{24}x^2$ chia hình phẳng giới hạn bởi elip có phương trình $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1$ thành hai phần có diện tích lần lượt là $S_1, S_2$ với $S_1 < S_2$. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

**A.** $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{8\pi - \sqrt{3}}$. **B.** $\frac{4\pi - \sqrt{2}}{8\pi + \sqrt{2}}$. **C.** $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{12\pi}$. **D.** $\frac{8\pi - \sqrt{3}}{12\pi}$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1$. Diện tích của elip là: $S_{(E)} = \pi.4.1 = 4\pi$.

Ta có: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{16}x^2}$.

Nhận thấy $S_1$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \frac{1}{24}x^2$ và phần elip nằm phía trên trục hoành.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y = \frac{1}{24}x^2$ và elip $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1$ là

$$\frac{1}{24}x^2 = \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} \Leftrightarrow \frac{1}{576}x^4 + \frac{1}{16}x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 12 \\ x^2 = -48 \ (vn) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{3}.$$

Do đó dựa vào đồ thị ta có:

$$S_1 = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} - \frac{1}{24}x^2\right) dx = \frac{1}{4}\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \sqrt{16 - x^2}\,dx - \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \frac{x^2}{24}dx = \frac{1}{4}\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \sqrt{16 - x^2}\,dx - \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Xét $I = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \sqrt{16 - x^2}\,dx.$

Đặt $x = 4\sin t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = 4\cos t\,dt$. Khi $x = -2\sqrt{3} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{3}$, khi $x = 2\sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$.

Suy ra $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{16\left(1-\sin^2 t\right)}4\cos t\,\mathrm{d}t=16\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=16\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)\mathrm{d}t=16\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}$

$=\frac{16\pi}{3}+4\sqrt{3}$. Do đó $S_1=\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{4\pi+\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow S_2=4\pi-S_1=4\pi-\frac{4\pi+\sqrt{3}}{3}=\frac{8\pi-\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $\frac{S_1}{S_2}=\frac{4\pi+\sqrt{3}}{8\pi-\sqrt{3}}$. Chọn phương án A

**Câu 45:** Cho parabol $(P):y=x^2$ và một đường thẳng $d$ thay đổi cắt $(P)$ tại hai điểm $A$, $B$ sao cho $AB=2018$. Gọi $S$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P)$ và đường thẳng $d$. Tìm giá trị lớn nhất $S_{max}$ của $S$.

**A.** $S_{max}=\frac{2018^3+1}{6}$. **B.** $S_{max}=\frac{2018^3}{3}$. **C.** $S_{max}=\frac{2018^3-1}{6}$. **D.** $S_{max}=\frac{2018^3}{6}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Giả sử $A(a;a^2)$; $B(b;b^2)(b>a)$ sao cho $AB=2018$.

Phương trình đường thẳng $d$ là: $y=(a+b)x-ab$. Khi đó

$S=\int\limits_a^b\left|(a+b)x-ab-x^2\right|\mathrm{d}x=\int\limits_a^b\left(\left(a+b\right)x-ab-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\left(b-a\right)^3$.

Vì $AB=2018\Leftrightarrow\left(b-a\right)^2+\left(b^2-a^2\right)^2=2018^2\Leftrightarrow\left(b-a\right)^2\left(1+\left(b+a\right)^2\right)=2018^2$.

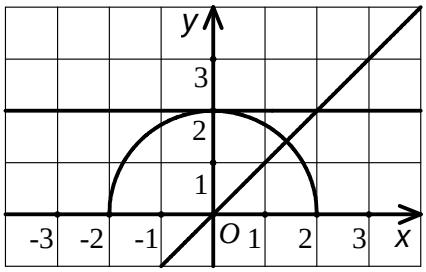
$\Rightarrow\left(b-a\right)^2\le 2018^2\Rightarrow\left|b-a\right|=b-a\le 2018\Rightarrow S\le\frac{2018^3}{6}$. Vậy $S_{\max}=\frac{2018^3}{6}$ khi $a=-1009$ và $b=1009$.

**Câu 46:** Cho hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=2$, $y=x$ có diện tích là $S=a+b.\pi$. Chọn kết quả đúng:

**A.** $a>1$, $b>1$. **B.** $a+b<1$. **C.** $a+2b=3$. **D.** $a^2+4b^2\ge 5$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Các phương trình hoành độ giao điểm:

* $\sqrt{4-x^2}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\4-x^2=x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x=\sqrt{2}.\end{cases}$

* $\sqrt{4-x^2}=2\Leftrightarrow x=0$.

* $x=2$.

Diện tích cần tính là: $S=\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(2-\sqrt{4-x^2}\right)dx+\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}(2-x)dx$

$=\int\limits_0^{\sqrt{2}}2dx+\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}(2-x)dx-\int\limits_0^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}dx$

$=(2x)\Big|_0^{\sqrt{2}}+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{\sqrt{2}}^{2}-\int\limits_0^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}dx=2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}-\int\limits_0^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}dx=3-\int\limits_0^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}dx$.

Đặt $x=2\sin t \Rightarrow dx=2\cos t dt$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=\sqrt{2} \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$.

Ta có $\int\limits_0^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{4-4\sin^2 t}.2\cos t dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}4\cos^2 t dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}2(1+\cos 2t)dx$

$=2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+1$.

Vậy $S=3-\frac{\pi}{2}-1=2-\frac{1}{2}.\pi$.

Theo kí hiệu của bài toán ta suy ra $a=2$, $b=-\frac{1}{2}$. Do đó mệnh đề đúng là $a^2+4b^2\geq 5$.

**Câu 47:** Tìm giá trị của tham số m sao cho: $y=x^3-3x+2$ và y = m(x+2) giới hạn bởi hai hình phẳng có cùng diện tích

**A.** 0 < m < 1. **B.** m = 1. **C.** $1<m<9$. **D.** m = 9

**Lời giải**

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3x+2=m(x+2)$

$\Leftrightarrow x=-2$ hoặc $x=1\pm\sqrt{m}$, $m\geq 0$.

Điều kiện d: y = m(x+2) và (C): $y=x^3-3x+2$ giới hạn 2 hình phẳng: $0<m\neq 9$.

Gọi $S_1$, $S_2$ lần lượt là diện tích các hình phẳng nhận được theo thứ tự từ trái sang phải.

Nếu m = 1: d đi qua điểm uốn (0;2) của (C). Khi đó $S_1=S_2=\int\limits_{-2}^{0}(x^3-4x)dx=4$

Nếu 0 < m < 1: $S_1>4>S_2$

Nếu 1 < m < 9: $S_1<4<S_2$

Nếu $m>9 \Rightarrow 1-\sqrt{m}<-2; 1+\sqrt{m}>4$. Khi đó:

$S_1=\int\limits_{1-\sqrt{m}}^{-2}\left|x^3-3x+2-m(x+2)\right|dx$; $S_2=\int\limits_{-2}^{1+\sqrt{m}}\left|x^3-3x+2-m(x+2)\right|dx$

$S_2-S_1=2m\sqrt{m}>0$

Vậy m = 1 thỏa yêu cầu bài toán.

**Chọn B**

**Câu 48:** **Cho hàm số** $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2-2x-2m-\frac{1}{3}$ có đồ thị (*C*). Tìm $m\in\left(0;\frac{5}{6}\right)$ sao cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (*C*) và các đường thẳng $x=0$, $x=2$, $y=0$ và có diện tích bằng 4.

**A.** $m=\frac{1}{4}$. **B.** $m=\frac{1}{3}$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m=1$

**Lời giải**

Xét hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2-2x-2m-\frac{1}{3}$ trên $[0;2]$. Ta có $y'=x^2+2mx-2$,

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-m-\sqrt{m^2+2}\\x=-m+\sqrt{m^2+2}\end{array}\right.$. Do $m\in\left(0;\frac{5}{6}\right)$ nên $-m-\sqrt{m^2+2}<0,\ \ 0<-m+\sqrt{m^2+2}<2$

và $y(0)=-2m-\frac{1}{3}<0,\ y(2)=2m-\frac{5}{3}<0.$

Ta có bảng biến thiên trong $[0;2]$

| $x$ | | $-m+\sqrt{m^2+2}$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | ↘ | | ↗ | $y(2)$ |

Dựa vào BBT suy ra $y<0,\ \forall x\in(0;2)$

Gọi $S$ là diện tích hình phẳng cần tìm. Ta có:

$S=4\Leftrightarrow\int_0^2\left|\frac{1}{3}x^3+mx^2-2x-2m-\frac{1}{3}\right|dx=4$

$\Leftrightarrow-\int_0^2\left(\frac{1}{3}x^3+mx^2-2x-2m-\frac{1}{3}dx\right)=4\Leftrightarrow\frac{4m+10}{3}=4\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$

**Chọn C**

**Câu 49:** Cho hàm số $y=\frac{x^4}{2}-2m^2x^2+2$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực $m$ sao cho đồ thị của hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu, đồng thời đường thẳng cùng phương với trục hoành qua điểm cực đại tạo với đồ thị một hình phẳng có diện tích bằng $\frac{64}{15}$ là

**A.** $\varnothing$. **B.** $\{\pm1\}$. **C.** $\left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2};\pm1\right\}$. **D.** $\left\{\pm\frac{1}{2};\pm1\right\}$.

**Lời giải**

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

$y'=2x^3-4m^2x=2x\left(x^2-2m^2\right);\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt{2}m\\x=-\sqrt{2}m\end{array}\right.$

Đồ thị của hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow m\neq0$

Vì $a=\frac{1}{2}>0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=0$ suy ra điểm cực đại của đồ thị hàm số là $A(0;2)$

Đường thẳng cùng phương với trục hoành qua điểm cực đại có phương trình là $d:y=2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_m)$ và $d$ là:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$\frac{x^4}{2}-2m^2x^2+2=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\x^2=4m^2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2|m|\\x=-2|m|\end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là: (chú ý rằng hàm số đã cho là hàm chẵn)

$$S=\int_{-2|m|}^{2|m|}\left|\frac{x^4}{2}-2m^2x^2\right|dx=2\int_{0}^{2|m|}\left|\frac{x^4}{2}-2m^2x^2\right|dx=2\left|\int_{0}^{2|m|}\left(\frac{x^4}{2}-2m^2x^2\right)dx\right|$$

$$=2\left|\left(\frac{x^5}{10}-\frac{2}{3}m^2x^3\right)\right|_0^{2|m|}\Bigg|=\frac{64}{15}|m|^5$$

Ta có $S=\frac{64}{15}\Leftrightarrow|m|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-1\end{array}\right.$

**Chọn B**

**Câu 50:** Cho hàm số $y=x^4-4x^2+m$ có đồ thị là (C). Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) với y<0 và trục hoành, S' là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) với y>0 và trục hoành. Với giá trị nào của m thì $S=S'$ ?

**A.** $m=2$ **B.** $m=\frac{2}{9}$ **C.** $m=\frac{20}{9}$ **D.** $m=1$

**Lời giải**

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4-4x^2+m=0$ (*)

Đặt $x^2=t;\ t\ge 0$, phương trình trở thành: $t^2-4t+m=0$ (**)

Để S>0, S'>0 thì 0<m<4. Khi đó (*) có 4 nghiệm phân biệt $-\sqrt{t_2};-\sqrt{t_1};\sqrt{t_1};\sqrt{t_2}$ với $t_1;t_2,(t_1<t_2)$ là hai nghiệm dương phân biệt của (**)

Do ĐTHS hàm bậc 4 nhận Oy làm trục đối xứng nên

$$S=S'\Leftrightarrow\int_0^{\sqrt{t_1}}\left(x^4-4x^2+m\right)dx=\int_{\sqrt{t_2}}^{\sqrt{t_1}}\left(x^4-4x^2+m\right)dx$$

$$\Leftrightarrow\int_0^{\sqrt{t_2}}\left(x^4-4x^2+m\right)dx=0\Leftrightarrow\frac{t_2^2}{5}-\frac{4t_2}{3}+m=0$$

Kết hợp với (**) ta được $m=\frac{20}{9}$.

**Chọn C**

**Câu 51:** Cho parabol $(P):y=x^2+1$ và đường thẳng $d:y=mx+2$. Biết rằng tồn tại $m$ để diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P)$ và $d$ đạt giá trị nhỏ nhất, tính diện tích nhỏ nhất đó.

**A.** $S=0.$ **B.** $S=\frac{4}{3}.$ **C.** $S=\frac{2}{3}.$ **D.** $S=4.$

**Lời giải**

**Chọn B**

Phương trình hoành độ giao điểm của $(P)$ và $d$ là $x^2+1=mx+2\Leftrightarrow x^2-mx-1=0$ $(*)$

Ta có $\Delta=m^2+4>0,\forall m\in\mathbb{R}.$ Nên phương trình $(*)$ luôn có 2 nghiệm phân biệt $x=a$ và $x=b$ $(a<b)$. Do đó $(P)$ luôn cắt $d$ tại 2 điểm phân biệt $A(a;ma+2)$ và $B(b;mb+2)$.

Với mọi $m$, đường thẳng $d$ luôn đi qua điểm $M(0;2)$. Mà $y_{CT}=1.$

Suy ra $mx+2\ge x^2+1,\forall x\in[a;b].$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Do đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P)$ và $d$ là

$$S=\int_a^b\left(mx+2-\left(x^2+1\right)\right)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(mx+1-x^2\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{mx}{2}+x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_a^b$$

$$=(b-a)\left[\frac{m}{2}(b+a)+1-\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+ab\right)\right]=(b-a)\left[\frac{m}{2}(b+a)+1-\frac{1}{3}(a+b)^2+\frac{1}{3}ab\right]$$

$$\Rightarrow S^2=(b-a)^2\left[\frac{m}{2}(b+a)+1-\frac{1}{3}(a+b)^2+\frac{1}{3}ab\right]^2$$

$$=\left[(b+a)^2-4ab\right]\left[\frac{m}{2}(b+a)+1-\frac{1}{3}(a+b)^2+\frac{1}{3}ab\right]^2$$

Vì $a,b$ là nghiệm của phương trình $(*)$ nên ta có $\begin{cases}a+b=m\\ab=-1\end{cases}$.

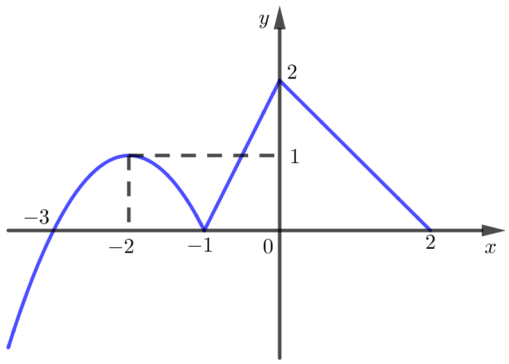
Khi đó $S^2=\left(m^2+4\right)\left(\frac{m^2}{6}+\frac{2}{3}\right)^2\geq 4.\frac{4}{9}=\frac{16}{9}.$

Đẳng thức xảy ra khi $m=0$. Vậy $S_{\min}=\frac{4}{3}.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

# ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN VỚI HÀM SỐ

**Câu 1:** **(Sở Phú Thọ)** Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên $[-3;2]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y=ax^2+bx+c$).




Biết $f(-3)=0$, giá trị của $f(-1)+f(1)$ bằng

**A.** $\frac{23}{6}$. **B.** $\frac{31}{6}$. **C.** $\frac{35}{3}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Cách 1: Giải bằng phương pháp tự luận (dùng nguyên hàm)**

Ta xác định biểu thức của hàm số $y=f'(x)$. Từ hình vẽ ta thấy trên $[-3,2]$ đồ thị gồm 3 nhánh:

□Nhánh parabol $y=a_1x^2+b_1x+c_1$ xác định trên $[-3,-1]$ đi qua 3 điểm $(-3,0)$, $(-2,1)$ và $(-1,0)$.

□Nhánh đường thẳng $y=a_2x+b_2$ xác định trên $[-1,0]$ đi qua 2 điểm $(-1,0)$ và $(0,2)$.

□Nhánh đường thẳng $y=a_3x+b_3$ xác định trên $[0,2]$ đi qua 2 điểm $(0,2)$ và $(2,0)$.

Từ đây, giải các hệ phương trình tương ứng ta suy ra biểu thức của $f'(x)$ là:

$$f'(x)=\begin{cases}-x^2-4x-3 & \text{khi } -3\le x\le -1\\ 2x+2 & \text{khi } -1\le x\le 0\\ -x+2 & \text{khi } 0\le x\le 2\end{cases}.$$

$f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$, do đó biểu thức của $f(x)$ có dạng:

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{x^3}{3}-2x^2-3x+C_1 & \text{khi } -3\le x\le -1\\ x^2+2x+C_2 & \text{khi } -1\le x\le 0\\ -\frac{x^2}{2}+2x+C_3 & \text{khi } 0\le x\le 2\end{cases}.$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vì $f(-3)=0$ nên ta có: $-\frac{(-3)^3}{3}-2(-3)^2-3(-3)+C_1=0\Leftrightarrow C_1=0$.

Do $f$ liên tục tại $x=-1$ nên ta có: $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$, suy ra:

$$-\frac{(-1)^3}{3}-2(-1)^2-3(-1)=(-1)^2+2(-1)+C_2\Leftrightarrow C_2=\frac{7}{3}.$$

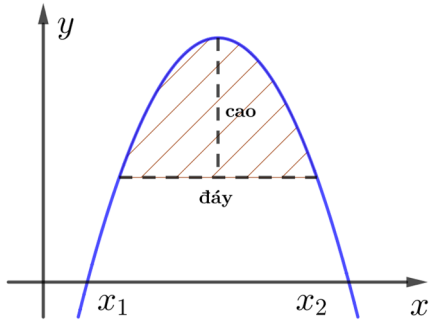
Tương tự, $f$ liên tục tại $x=0$ nên ta có:

$$0^2+2.0+\frac{7}{3}=-\frac{0^2}{2}+2.0+C_3\Leftrightarrow C_3=\frac{7}{3}.$$

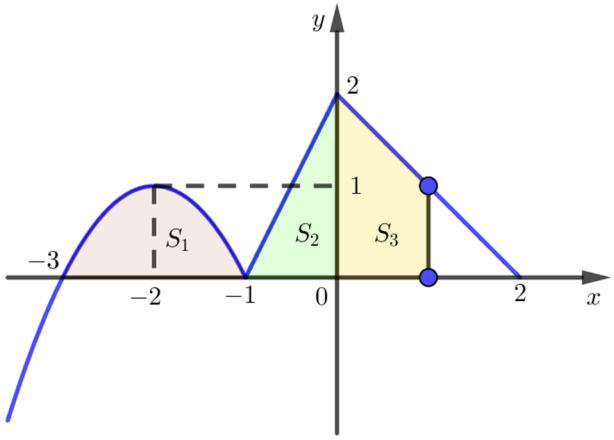
Vậy: $f(-1)+f(1)=\left[(-1)^2+2(-1)+\frac{7}{3}\right]+\left[-\frac{1^2}{2}+2.1+\frac{7}{3}\right]=\frac{31}{6}$.

**Cách 2: Giải nhanh bằng phương pháp đánh giá diện tích trên đồ thị**

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi một parabol và một đường thẳng có phương song song với trục $Ox$ được cho bởi công thức: $S=\frac{2}{3}$day.cao (1)




Áp dụng công thức này ta giải nhanh bài toán này như sau:




Nhánh parabol $y=ax^2+bx+c$ qua 3 điểm $(-3,0)$, $(-2,1)$ và $(-1,0)$ nên ta tính ra được hệ số $a=1$.

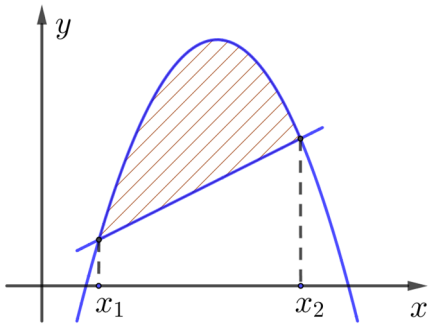
Ta có: $f(-1)+f(1)=\left[f(-1)-f(-3)\right]+\left[f(1)-f(-3)\right]=S_1+(S_1+S_2+S_3)$.

Với: $S_1=\frac{2}{3}2.1=\frac{4}{3}$, $S_2=\frac{1}{2}1.2=1$, $S_3=\frac{1}{2}(1+2).1=\frac{3}{2}$.

Suy ra: $f(-1)+f(1)=\frac{31}{6}$.

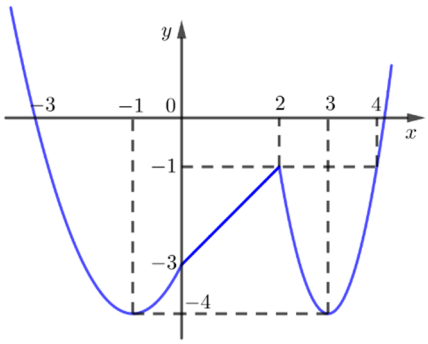
**Mở rộng bài toán:** Một nhược điểm của công thức (1) là chỉ có thể tính được diện tích khi "lát cắt" parabol song song với trục $Ox$. Trường hợp "lát cắt" bất kỳ, diện tích hình giới hạn bởi một đường thẳng và parabol $(P): ax^2+bx+c$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $x_1, x_2$ (như hình minh hoạ bên dưới) ta có diện tích được cho bởi công thức:

$$S=\frac{|a||x_1-x_2|^3}{6} \quad (2)$$




Với công thức tính nhanh diện tích "lát cắt parabol", ta có thể xây dựng bài toán tương tự với đồ thị liên tục gồm các nhánh là đường thẳng hoặc parabol. ***Tác giả đề xuất một bài toán tương tự như sau:***

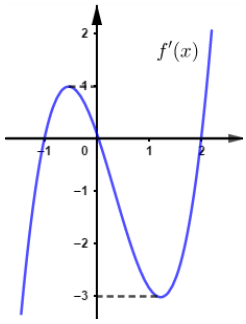
**:** Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên $[-3;4]$ như hình vẽ (hai nhánh cong của đồ thị là parabol)




Biết $f(-3)=1$, giá trị của $f(0)+f(3)$ bằng

**A.** $\frac{77}{3}$. **B.** $-23$. **C.** $-\frac{65}{3}$. **D.** $27$.

**Câu 2:** **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào trong các phương án $A, B, C, D$ dưới đây là đúng?




**A.** $f(2)>f(-1)>f(0)$.

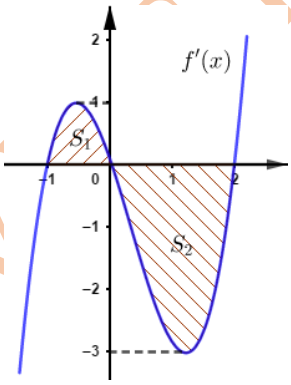
**B.** $f(0)>f(-1)>f(2)$.

**C.** $f(0)>f(2)>f(-1)$.

**D.** $f(-1)>f(0)>f(2)$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Gọi $S_1, S_2$ là diện tích của các phần giới hạn như hình vẽ.

Ta có: $S_1=\int\limits_{-1}^{0} f'(x)\,dx=f(0)-f(-1)>0\Rightarrow f(0)>f(-1)$.

$S_2=-\int\limits_{0}^{2} f'(x)\,dx=\int\limits_{2}^{0} f'(x)\,dx=f(0)-f(2)>0\Rightarrow f(0)>f(2)$.

Mà $S_1<S_2\Rightarrow f(0)-f(-1)<f(0)-f(2)\Rightarrow f(-1)>f(2)$.

Vậy $f(0)>f(-1)>f(2)$.

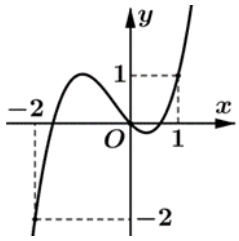
$S_2=-\int\limits_{0}^{2} f'(x)\,dx=\int\limits_{2}^{0} f'(x)\,dx=f(0)-f(2)>0\Rightarrow f(0)>f(2)$.

Mà $S_1<S_2\Rightarrow f(0)-f(-1)<f(0)-f(2)\Rightarrow f(-1)>f(2)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vậy $f(0)>f(-1)>f(2)$.

**Câu 3:** **(Hùng Vương Bình Phước)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[-2;1]$. Hình bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Đặt $g(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}$.




Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $g(1)<g(-2)<g(0)$.

**B.** $g(0)<g(1)<g(-2)$.

**C.** $g(-2)<g(1)<g(0)$.

**D.** $g(0)<g(-2)<g(1)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $g'(x)=f'(x)-x=0\Leftrightarrow x=-2\vee x=0\vee x=1$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ và đồ thị hàm số $y=x$ ta có bảng biến thiên

| $x$ | -2 | | 0 | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | 0 | + | 0 | - | 0 |
| $g(x)$ | $g(-2)$ | ↗ | $g(0)$ | ↘ | $g(1)$ |

Từ bảng biến thiên ta suy ra $g(0)>g(-2)$ và $g(0)>g(1)$. (1)

Mặt khác, dựa vào đồ thị ta có:

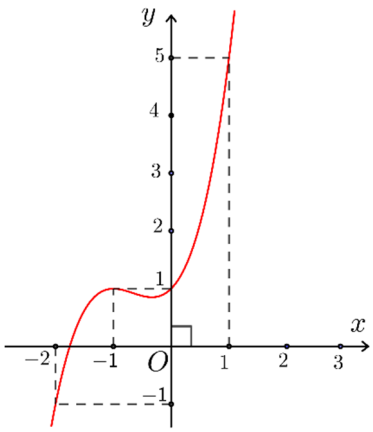
$$S_1>S_2\Leftrightarrow\int_{-2}^{0}|f'(x)-x|dx>\int_{0}^{1}|f'(x)-x|dx\Leftrightarrow\int_{-2}^{0}g'(x)dx>\int_{0}^{1}-g'(x)dx$$

$$\Leftrightarrow g(0)-g(-2)>-(g(1)-g(0))\Leftrightarrow g(1)>g(-2).\ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $g(-2)<g(1)<g(0)$ nên chọn đáp án **C.**

**Câu 4:** **(Sở Lạng Sơn 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị hàm số như hình dưới đây.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

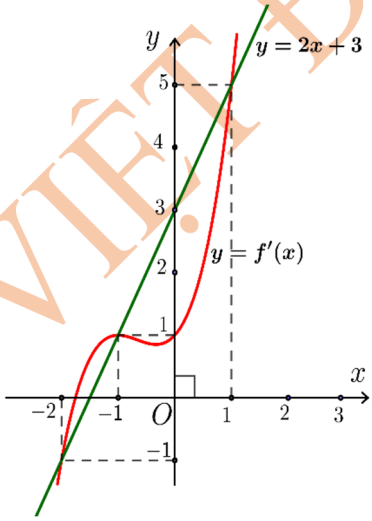



Lập hàm số $g(x)=f(x)-x^2-3x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $g(-1)>g(1)$. **B.** $g(-1)=g(1)$.

**C.** $g(-1)<g(-2)$. **D.** $g(-1)=g(-2)$.

**Lời giải**




**Chọn A**

$g(x)=f(x)-x^2-3x \Rightarrow g'(x)=f'(x)-(2x+3)$.

Vẽ đường thẳng $y=2x+3$ cắt đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tại các điểm $x=-2,\ x=-1,\ x=1$

Nhìn vào đồ thị ta thấy

$S_1$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x), y=2x+3, x=-2,\ x=-1$. Khi đó,

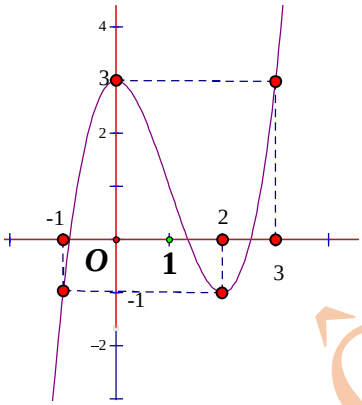
$$S_1=\int_{-2}^{-1}\left|f'(x)-(2x+3)\right|dx=\int_{-2}^{-1}\left(f'(x)-(2x+3)\right)dx>0 \Rightarrow \int_{-2}^{-1}g'(x)dx>0 \Rightarrow g(-1)>g(-2)$$

$S_2$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x), y=2x+3, x=-1,\ x=1$. Khi đó,

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$S_2=\int_{-1}^{1}\left|f'(x)-(2x+3)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left((2x+3)-f'(x)\right)\mathrm{d}x>0\Rightarrow\int_{-1}^{1}g'(x)\mathrm{d}x<0\Rightarrow g(-1)>g(1).$$

**Câu 5:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hình bên. Tính tích phân $I=\int_{1}^{2}f'(2x-1)\mathrm{d}x$.




**A.** $I=-2$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=1$. **D.** $I=2$.

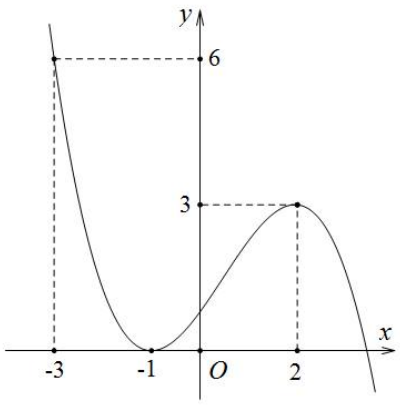
**Lời giải**

**Chọn C**

Dựa vào đồ thị hàm số ta có đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua các điểm $(-1;-1)$, $(0;3)$, $(2;-1)$, $(3;3)$ nên hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+3$.

Ta có: $I=\int_{1}^{2}f'(2x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{1}^{2}f'(2x-1)\mathrm{d}(2x-1)=\frac{1}{2}f(2x-1)\Big|_1^2=\frac{1}{2}\left[f(3)-f(1)\right]=1$

**Câu 6:** **(CổLoa Hà Nội)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $(-\infty;+\infty)$ và có đồ thị như hình vẽ. Tích phân $I=\int_{0}^{1}\left|f'(5x-3)\right|\mathrm{d}x$ bằng




**A.** $\frac{9}{5}$. **B.** $9$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Lời giải**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Chọn A**

Từ đồ thị hàm số $f(x)$, ta có bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[-3;2]$

| $x$ | $-3$ | | $-1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $6$ | ↘ | $0$ | ↗ | $3$ |

Xét, $I=\int_0^1\left|f'(5x-3)\right|\mathrm{d}x$.

Đặt $u=5x-3\Rightarrow \mathrm{d}u=5\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{5}\mathrm{d}u$

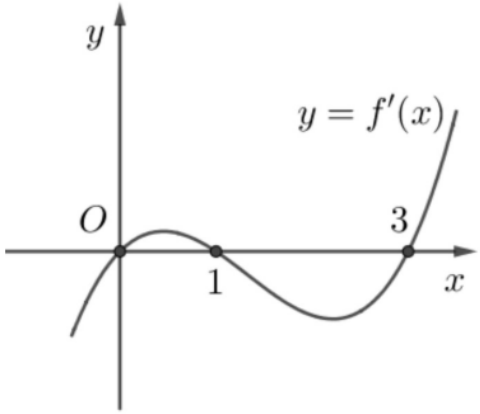
Đổi cận:

| $x$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $u$ | $-3$ | $2$ |

Kết hợp với bảng xét dấu của hàm số $y=f(x)$, Ta được:

$$I=\frac{1}{5}\int_{-3}^{2}\left|f'(u)\right|\mathrm{d}u=\frac{1}{5}\int_{-3}^{-1}\left|f'(u)\right|\mathrm{d}u+\frac{1}{5}\int_{-1}^{2}\left|f'(u)\right|\mathrm{d}u=-\frac{1}{5}\int_{-3}^{-1}f'(u)\,\mathrm{d}u+\frac{1}{5}\int_{-1}^{2}f'(u)\,\mathrm{d}u$$

**Câu 7:** **(Đặng Thành Nam Đề 9)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên R và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ, Biết $\int_0^3(x+1)f'(x)dx=a$ và $\int_0^1\left|f'(x)\right|dx=b$, $\int_1^3\left|f'(x)\right|dx=c$, $f(1)=d$. Tích phân $\int_0^3 f(x)dx$ bằng




**A.** $-a+b+4c-5d$. **B.** $-a+b-3c+2d$. **C.** $-a+b-4c+3d$. **D.** $-a-b-4c+5d$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Tích phân từng phần có

$$\int_0^3 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x = \int_0^3 (x+1)\mathrm{d}\big(f(x)\big) = (x+1)f(x)\Big|_0^3 - \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 4f(3) - f(0) - \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$$

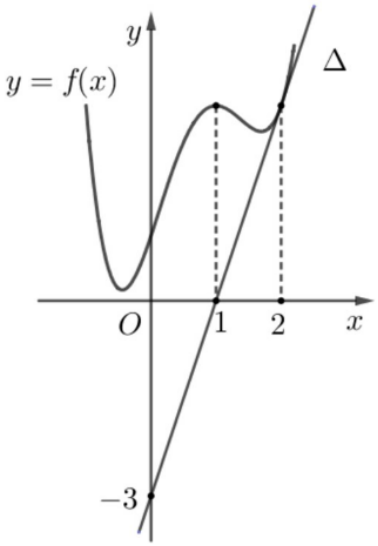
Suy ra $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 4f(3) - f(0) - \int_0^3 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x = 4f(3) - f(0) - a \quad (1)$

$$b = \int_0^1 \left|f'(x)\right|\mathrm{d}x = \int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = f(1) - f(0) = d - f(0) \Rightarrow f(0) = d - b \quad (2)$$

$$c = \int_1^3 \left|f'(x)\right|\mathrm{d}x = -\int_1^3 f'(x)\mathrm{d}x = f(1) - f(3) = d - f(3) \Rightarrow f(3) = d - c \quad (3)$$

Từ $(1),(2),(3) \Rightarrow \int_0^3 f(x)dx = 4(d-c) - (d-b) - a = -a + b - 4c + 3d.$

**Câu 8:** **(Đặng Thành Nam Đề 2)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f(x)$ như hình vẽ bên. Biết rằng hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=1$; đường thẳng $\Delta$ trong hình vẽ bên là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$. Tích phân $\int_0^{\ln 3} e^x f''\left(\frac{e^x+1}{2}\right)dx$ bằng




**A.** 8. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $t = \frac{e^x+1}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2}e^x dx$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1; x=\ln 3\Rightarrow t=2.$

Khi đó $\int\limits_0^{\ln 3} e^x f''\left(\frac{e^x+1}{2}\right)dx=2\int\limits_1^2 f''(t)dt=2f'(t)\Big|_1^2=2\left(f'(2)-f'(1)\right).$

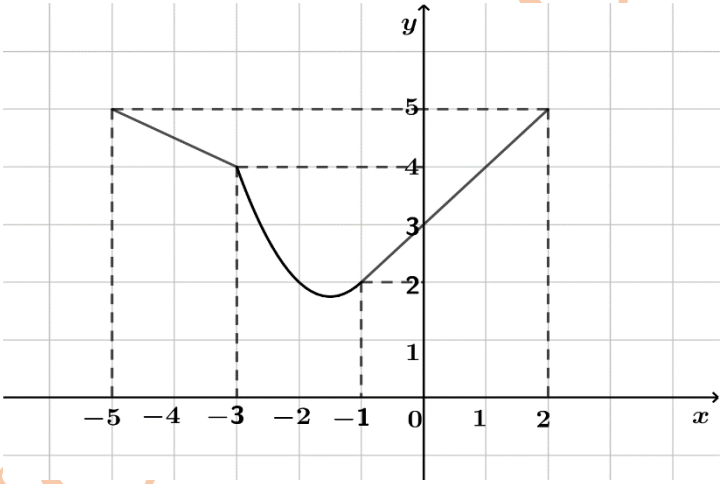
Do hàm số đạt cực đại tại điểm $x=1$ và có đạo hàm trên $\mathbb{R}\Rightarrow f'(1)=0$.

Mặt khác đường thẳng $\Delta$ đi qua hai điểm $A(1;0)$, $B(0;-3)$ nên có hệ số góc $k=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=3$.

Do $\Delta$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ nên $f'(2)=3$.

Vậy $\int\limits_0^{\ln 3} e^x f''\left(\frac{e^x+1}{2}\right)dx=2(3-0)=6.$

**Câu 9:** **(CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP 2019 LẦN 2)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục có đồ thị như hình bên dưới




Biết $F'(x)=f(x),\ \forall x\in[-5;2]$ và $\int\limits_{-3}^{-1} f(x)\,dx=\frac{14}{3}$. Tính $F(2)-F(-5)$.

**A.** $-\frac{145}{6}$. **B.** $-\frac{89}{6}$. **C.** $\frac{145}{6}$. **D.** $\frac{89}{6}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Trên đoạn $[-5;-3]$ ta có $f(x)=\frac{5-x}{2}$; trên đoạn $[-1;2]$ ta có $f(x)=x+3$.

Khi đó: $F(2)-F(-5)=\int\limits_{-5}^{2} f(x)\,dx$.

$=\int\limits_{-5}^{-3} f(x)\,dx+\int\limits_{-3}^{-1} f(x)\,dx+\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,dx=\int\limits_{-5}^{-3}\frac{5-x}{2}dx+\int\limits_{-3}^{-1} f(x)\,dx+\int\limits_{-1}^{2}(x+3)\,dx=\frac{145}{6}.$

**Câu 10:** **(CHUYÊN HUỲNH MẪN ĐẠT 2019 lần 1)** Cho $P=\int\limits_a^b\left(-x^4+5x^2-4\right)\mathrm{d}x$ có giá trị lớn nhất với ($a<b;a,b\in\mathbb{R}$). Khi đó tính $S=a^2+b^2$

**A.** $S=5$. **B.** $S=8$. **C.** $S=4$. **D.** $S=7$.

**Lời giải**

**Chọn A**

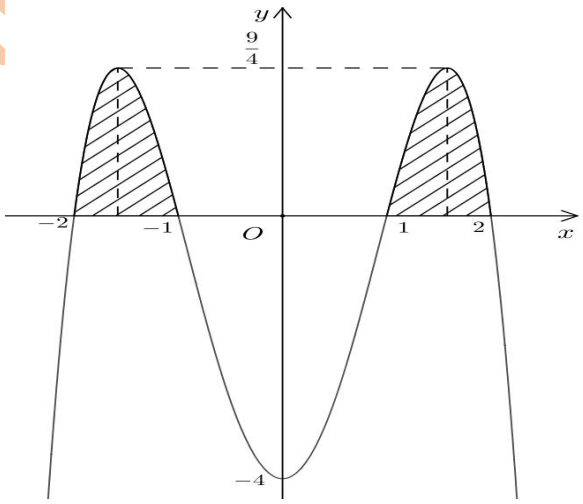
Xét hàm số $f\left(x\right)=-x^4+5x^2-4$, có $f'\left(x\right)=-4x^3+10x$.

$$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow-4x^3+10x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{\sqrt{10}}{2}\\x=-\dfrac{\sqrt{10}}{2}\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{\sqrt{10}}{2}$ | | $0$ | | $\frac{\sqrt{10}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $\frac{9}{4}$ | ↘ | $-4$ | ↗ | $\frac{9}{4}$ | ↘ | $-\infty$ |

Đồ thị hàm số:

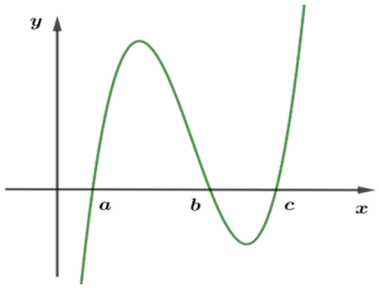



Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $f\left(x\right)=-x^4+5x^2-4\geq0$ với $\forall x\in\left[-2;-1\right]\cup\left[1;2\right]$.

Do đó $P$ có giá trị lớn nhất thì $\left[\begin{array}{l}a=-2,\ b=-1\\a=1,\ b=2\end{array}\right.$.

Vậy $S = a^2 + b^2 = 5$.

**Câu 11:** **(Kim Liên)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết $f(a) > 0$, tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục hoành.




**A.** 3. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 2.

**Lời giải**

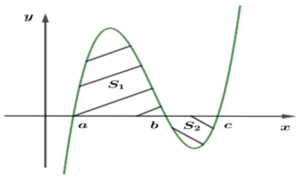
**Chọn C**

Từ đồ thị ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = b \\ x = c \end{array}\right.$ và đi qua các nghiệm trên, đạo hàm đổi dấu nên hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Xét bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $a$ | | $b$ | | $c$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(a)$ | ↗ | $f(b)$ | ↘ | $f(c)$ | ↗ | $+\infty$ |

Ta thấy: $f(a)$ hoặc $f(c)$ là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$. (1)

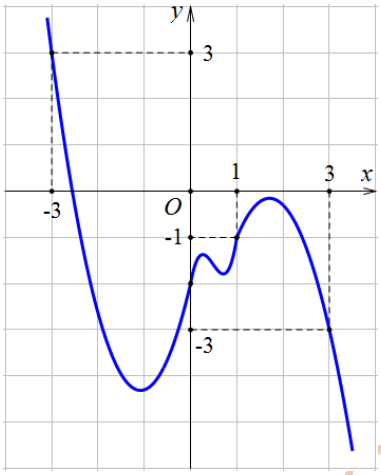



$$S_1 = \int_a^b f'(x)dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a); S_2 = \int_b^c -f'(x)dx = f(x)\Big|_c^b = f(b) - f(c)$$

Ta thấy $S_1 > S_2 \Rightarrow f(b) - f(a) > f(b) - f(c) \Leftrightarrow f(a) < f(c) \Rightarrow 0 < f(a) < f(c)$, vì $f(a) > 0$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm hoàn toàn phía trên trục hoành hay đồ thị hàm số $y = f(x)$ không cắt trục hoành.

**Câu 12:** **(CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG QUẢNG NAM LẦN 2 NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-3;3]$ và đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x)=2f(x)+x^2+4$. Biết $f(1)=-24$. Hỏi $g(x)=0$ có bao nhiêu nghiệm thực?




**A.** 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn D**

$g(1)=2f(1)+1^2+4=-43<0$

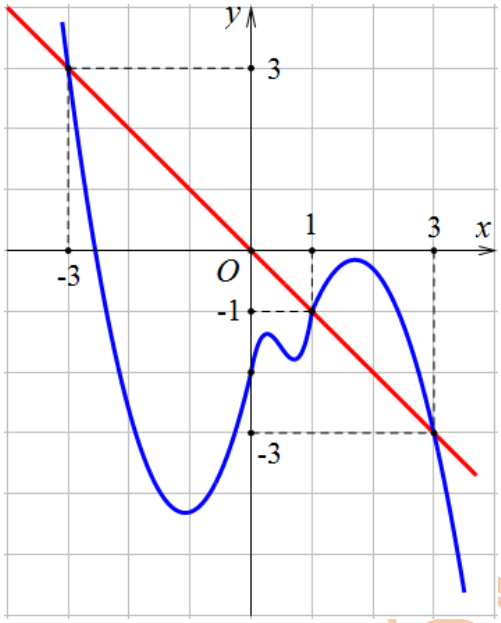
$g'(x)=2f'(x)+2x$

$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-x\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

| $x$ | $-3$ | | $1$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | $g(-3)$ | $\searrow$ | $g(1)=-43$ | $\nearrow$ | $g(3)$ |

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG




Đặt $M(-3;3)$, $N\left(-3;-\frac{9}{2}\right)$, $P\left(0;-\frac{9}{2}\right)$, $A(1;0)$, $B(3;0)$, $C(3;-3)$, $D(1;-1)$.

$S_{MNPO}=\frac{\left(\frac{9}{2}+\frac{15}{2}\right).3}{2}=18$, $S_{ABCD}=\frac{(1+3).2}{2}=4$.

Gọi $S_1$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x), y=-x$, $x=-3$ và $x=1$ thì

$$S_1=\int_{-3}^{1}[-f'(x)-x]\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_{-3}^{1}g'(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}[g(1)-g(-3)]=\frac{1}{2}g(-3)+\frac{43}{2}.$$

Vì $S_1<S_{MNPO}\Leftrightarrow\frac{1}{2}g(-3)+\frac{43}{2}<18\Leftrightarrow g(-3)<-7<0$.

Gọi $S_2$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x), y=-x$, $x=1$ và $x=3$ thì

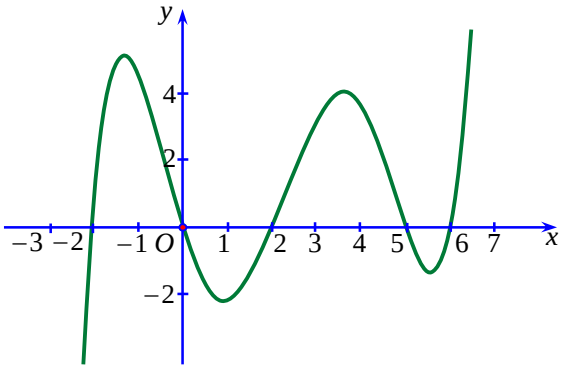
$$S_2=\int_{1}^{3}[f'(x)+x]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{1}^{3}g'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[g(3)-g(1)]=\frac{1}{2}g(3)+\frac{43}{2}.$$

Vì $S_2<S_{ABCD}\Leftrightarrow\frac{1}{2}g(-3)+\frac{43}{2}<4\Leftrightarrow g(3)<-35<0$.

Vậy trên đoạn $[-3;3]$ phương trình $g(x)=0$ vô nghiệm.

**Câu 13:** **(GIỮA-HKII-2019-NGHĨA-HƯNG-NAM-ĐỊNH)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG




Số nghiệm thuộc đoạn $[-2;6]$ của phương trình $f(x)=f(0)$ là

**A.** 5 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

**Lời giải**

**Chọn B**

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ ta có BBT

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $5$ | | $6$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | ↘ | $f(-2)$ | ↗ | $f(0)$ | ↘ | $f(2)$ | ↗ | $f(5)$ | ↘ | $f(6)$ | ↗ | $+\infty$ |

Gọi $S_1$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x);y=0;x=0;x=2$

Gọi $S_2$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x);y=0;x=2;x=5$

Gọi $S_3$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x);y=0;x=5;x=6$

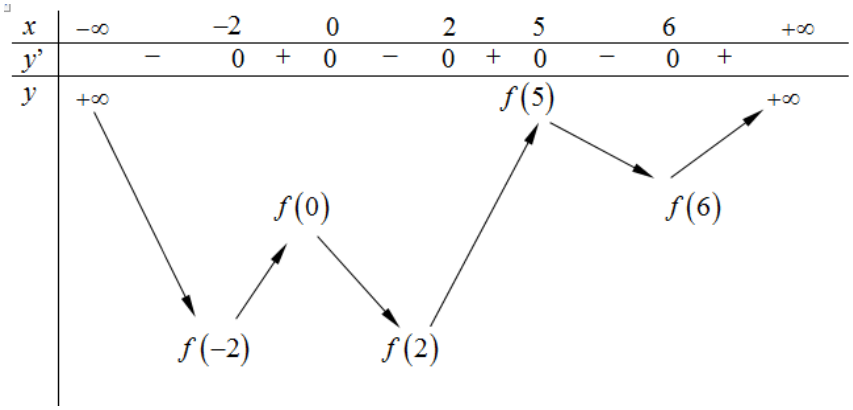
$S_1=-\int_0^2 f'(x)dx=f(0)-f(2)$; $S_2=\int_2^5 f'(x)dx=f(5)-f(2)$;

$S_3=-\int_5^6 f'(x)dx=f(5)-f(6)$

Từ đồ thị ta thấy $S_2>S_1\Rightarrow f(5)-f(2)>f(0)-f(2)\Rightarrow \boxed{f(5)>f(0)}$

và $S_1+S_3<S_2\Rightarrow f(0)-f(2)+f(5)-f(6)<f(5)-f(2)\Rightarrow \boxed{f(6)>f(0)}$

Khi đó ta có BBT chính xác ( dạng đồ thị chính xác ) như sau:




Vậy phương trình $f\left(x\right)=f\left(0\right)$ có 2 nghiệm thuộc đoạn $\left[-2;6\right]$

**Câu 14:** **(Đặng Thành Nam Đề 2)** Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị $\left(C\right)$. Gọi $\left(\Delta\right):y=dx+e$ là tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại điểm $A$ có hoành độ $x=-1$. Biết $\Delta$ cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt $M,N$ $(M,N\neq A)$ có hoành độ lần lượt là $x=0;x=2$. Cho biết $\int_0^2\left(dx+e-f\left(x\right)\right)dx=\frac{28}{5}$. Tích phân $\int_{-1}^0\left(f\left(x\right)-dx-e\right)dx$ bằng:

**A.** $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{2}{9}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$\left(\Delta\right):y=dx+e$ là tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại điểm $A$ có hoành độ $x=-1$ nên phương trình $f\left(x\right)-dx-e=0$ có nghiệm kép là $x_{1,2}=-1$.

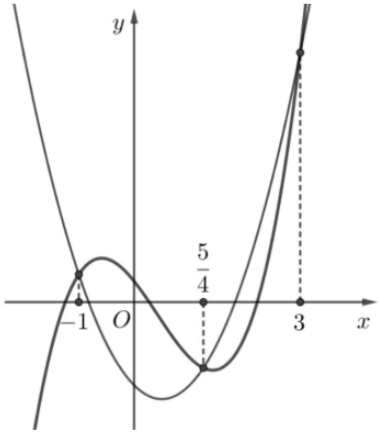
$\Delta$ cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt $M,N$ $(M,N\neq A)$ có hoành độ lần lượt là $x=0;x=2$ nên phương trình $f\left(x\right)-dx-e=0$ có thêm nghiệm là $x_3=0;x_4=2$.

Do đó $f\left(x\right)-dx-e=a\left(x+1\right)^2x\left(x-2\right)$.

Ta có: $\int_0^2\left(dx+e-f\left(x\right)\right)\mathrm{dx}=\frac{28}{5}\Leftrightarrow\int_0^2a\left(x+1\right)^2x\left(x-2\right)dx=\frac{28}{5}\Leftrightarrow a=\frac{-\frac{28}{5}}{\int_0^2\left(x+1\right)^2x\left(x-2\right)dx}=1.$

Vậy $f\left(x\right)-dx-e=\left(x+1\right)^2x\left(x-2\right)\Rightarrow\int_{-1}^0\left(f\left(x\right)-dx-e\right)dx=\int_{-1}^0\left(x+1\right)^2x\left(x-2\right)dx=\frac{1}{5}.$

**Câu 15:** **(Đặng Thành Nam Đề 14)** Cho hai hàm số $f\left(x\right)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ và $g\left(x\right)=mx^3+nx^2+px+1$ với $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $m$, $n$, $p$, $q$ là các số thực. Đồ thị của hai hàm số $y=f'\left(x\right)$, $y=g'\left(x\right)$ như hình vẽ bên. Tổng các nghiệm của phương trình $f\left(x\right)+q=g\left(x\right)+e$ bằng




**A.** $\frac{13}{3}$. **B.** $-\frac{13}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $-\frac{4}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $h(x)=f(x)-g(x)$. Do hai đồ thị $y=f'(x)$, $y=g'(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $-1$, $-\frac{5}{4}$ và $3$; mà bậc của đa thức $h'(x)$ bằng 3. Ta có

$h'(x)=k(x+1)\left(x-\frac{5}{4}\right)(x-3)(k\neq 0)$ với $h(0)=f(0)-g(0)=e-q$.

Do đó

$$\begin{aligned} h(x) &= \big(h(x)-h(0)\big)+h(0)\\ &= \int_0^x h'(x)\,\mathrm{d}x+e-q\\ &= k\int_0^x (x+1)\left(x-\frac{5}{4}\right)(x-3)\,\mathrm{d}x+e-q\\ &= \frac{k}{4}\int_0^x (x+1)(4x-5)(x-3)dx+e-q\\ &= \frac{k}{4}\int_0^x (4x^3-13x^2-2x+15)dx+e-q\\ &= \frac{k}{4}\left(x^4-\frac{13}{3}x^3-x^2+15x\right)+e-q. \end{aligned}$$

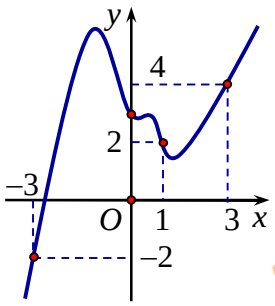
Phương trình $f(x)+q=g(x)+e$ tương đương với

$$h(x)=e-q\Leftrightarrow x^4-\frac{13}{3}x^3-x^2+15x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-\frac{5}{3}\\ x=0\\ x=3. \end{array}\right.$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vậy tổng các nghiệm của phương trình bằng $-\frac{5}{3}+0+3=\frac{4}{3}$.

**Câu 16:** **(THPT Chuyên Thái Bình-lần 4 năm 2017-2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-3;3]$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết $f(1)=6$ và $g(x)=f(x)-\frac{(x+1)^2}{2}$. Kết luận nào sau đây là đúng?




**A.** Phương trình $g(x)=0$ có đúng hai nghiệm thuộc $[-3;3]$.

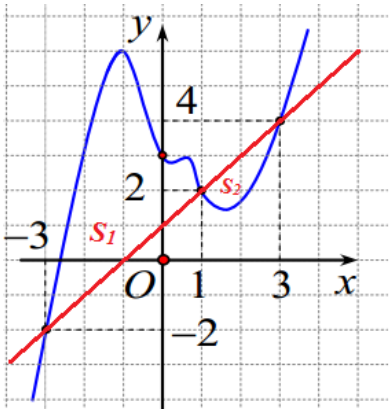
**B.** Phương trình $g(x)=0$ không có nghiệm thuộc $[-3;3]$.

**C.** Phương trình $g(x)=0$ có đúng một nghiệm thuộc $[-3;3]$.

**D.** Phương trình $g(x)=0$ có đúng ba nghiệm thuộc $[-3;3]$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Ta có: $g(x)=f(x)-\frac{(x+1)^2}{2} \Rightarrow g'(x)=f'(x)-(x+1)$.

Vẽ đường thẳng $y=x+1$ trên cùng một hệ trục tọa độ với đồ thị hàm số $y=f'(x)$ (như hình vẽ bên).

Từ đồ thị ta thấy: $g'(x)=f'(x)-(x+1)>0$, $\forall x\in(-3;1)$ (do đường cong nằm phía trên đường thẳng), $g'(x)=f'(x)-(x+1)<0$, $\forall x\in(1;3)$ (do đường cong nằm phía dưới đường thẳng).

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có: $g(1)=f(1)-\frac{(1+1)^2}{2}=6-2=4$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-3$ | | $1$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | | ↗ | $4$ | ↘ | |

Dựa vào đồ thị ta thấy: diện tích $S_1$ lớn hơn $4$ (trong phần bên trái có nhiều hơn 4 ô, mỗi ô có diện tích bằng 1), do đó:

$$4<S_1=\int_{-3}^{1}g'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow 4<g(x)\big|_{-3}^{1} \Leftrightarrow 4<g(1)-g(-3) \Leftrightarrow g(-3)<0.$$

Mặt khác: diện tích nhỏ hơn $4$ (trong phần bên phải có ít hơn $4$ ô), do đó:

$$4>S_2=-\int_{1}^{3}g'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow 4>-g(x)\big|_{1}^{3} \Leftrightarrow 4>g(1)-g(3) \Leftrightarrow g(3)>0.$$

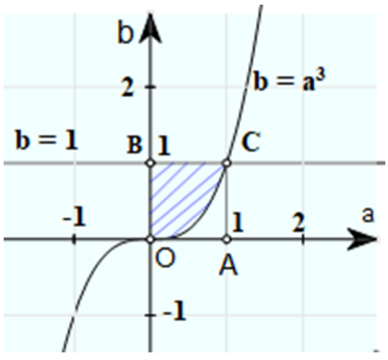
Vậy phương trình $g(x)=0$ có đúng một nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$ (nghiệm này nằm trong khoảng $(-3;1)$).

**Câu 17:** Chọn ngẫu nhiên hai số thực $a,b\in[0;1]$. Tính xác suất để phương trình $2x^3-3ax^2+b=0$ có tối đa hai nghiệm.

**A.** $P=\frac{1}{4}$. **B.** $P=\frac{1}{2}$. **C.** $P=\frac{2}{3}$. **D.** $P=\frac{3}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn D**




+) Xét $y=2x^3-3ax^2+b$, $y'=0\Leftrightarrow 6x(x-a)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=a\end{array}\right.$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y(0)y(a)\ge 0\Leftrightarrow b(b-a^3)\ge 0$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Mà $b\in[0;1]$ nên $b\left(b-a^3\right)\ge 0\Leftrightarrow b\ge a^3$.

Ta thấy việc chọn ngẫu nhiên hai số $a$, $b\in[0;1]$ chính là việc chọn ngẫu nhiên một điểm $M(a;b)$ ***khi xét trên hệ trục tọa độ*** $Oab$.

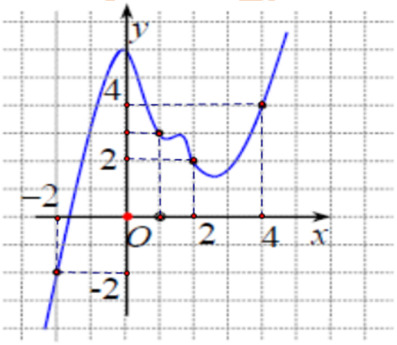
+) Gọi $A$ là biến cố thỏa mãn bài toán. Ta có $\Omega$ là tập hợp các điểm $M(a;b)$ sao cho $a$, $b\in[0;1]$ và chính là các điểm thuộc hình vuông $OACB$ trên hình vẽ, do đó $|\Omega|=S_{OACB}=1$.

+) $\Omega(A)$ là tập hợp các điểm thuộc hình phẳng $(H)$ giới hạn bởi các đồ thị $b=1$, $b=a^3$, $a=0$ (phần gạch chéo trên đồ thị). Xét phương trình hoành độ giao điểm $a^3=1\Leftrightarrow a=1$

$$\Rightarrow|\Omega(A)|=\int_0^1\left|1-a^3\right|\mathrm{d}a=\left|\int_0^1\left(1-a^3\right)\mathrm{d}a\right|=\left(a-\frac{a^4}{4}\right)\Big|_0^1=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

Vậy xác suất cần tìm là $P=\dfrac{\frac{3}{4}}{1}=\dfrac{3}{4}$.

**Câu 18:** **(Sở Hưng Yên Lần1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.




Giá trị của biểu thức $I=\int_0^4 f'(x-2)\mathrm{d}x+\int_0^2 f'(x+2)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $-2$. **B.** $2$. **C.** $6$. **D.** $10$.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Cách 1:**

Đặt $I_1=\int_0^4 f'(x-2)\mathrm{d}x$, $I_2=\int_0^2 f'(x+2)\mathrm{d}x$.

Tính $I_1$: Đặt $u=x-2\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x$.

Đổi cận:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

| $x$ | 0 | 4 |
|---|---|---|
| $u$ | -2 | 2 |

Ta có: $I_1=\int\limits_{-2}^{2} f'(u)\mathrm{d}u=\int\limits_{-2}^{2} f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\big|_{-2}^{2}=f(2)-f(-2)=2-(-2)=4$.

Tính $I_2$: Đặt $v=x+2\Rightarrow \mathrm{d}v=\mathrm{d}x$.

Đổi cận:

| $x$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $v$ | 2 | 4 |

Ta có: $I_2=\int\limits_{2}^{4} f'(v)\mathrm{d}v=\int\limits_{2}^{4} f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\big|_{2}^{4}=f(4)-f(2)=4-2=2$.

Vậy: $I=I_1+I_2=4+2=6$.

**Cách 2:** $I=\int\limits_{0}^{4} f'(x-2)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2} f'(x+2)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{4} f'(x-2)\mathrm{d}(x-2)+\int\limits_{0}^{2} f'(x+2)\mathrm{d}(x+2)$

$=f(x-2)\big|_{0}^{4}+f(x+2)\big|_{0}^{2}=\big(f(2)-f(-2)\big)+\big(f(4)-f(2)\big)=\big(2-(-2)\big)+(4-2)=6$.

**Câu 19:** **(CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=1$ và $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2-2x$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

**A.** $0<m\le 1$. **B.** $m>\mathrm{e}$. **C.** $0<m<\mathrm{e}$. **D.** $1<m<\mathrm{e}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2-2x\Rightarrow\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\int(2-2x)dx\Rightarrow\ln|f(x)|=2x-x^2+C$.

Do $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $\ln f(x)=2x-x^2+C\Rightarrow f(x)=\mathrm{e}^{2x-x^2+C}$.

Ta có $f(0)=1\Leftrightarrow \mathrm{e}^{C}=1\Leftrightarrow C=0$. Vậy $f(x)=\mathrm{e}^{2x-x^2}$.

**Cách 1:**

Phương trình $f(x)=m\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x-x^2}=m\Leftrightarrow\begin{cases}2x-x^2=\ln m & (1)\\ m>0\end{cases}$.

Gọi $g(x)=2x-x^2$

Bảng biến thiên của $g(x)$.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-\infty$ |

Phương trình $(1)$ có 2 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $\ln m < 1 \Leftrightarrow 0 < m < \mathrm{e}$.

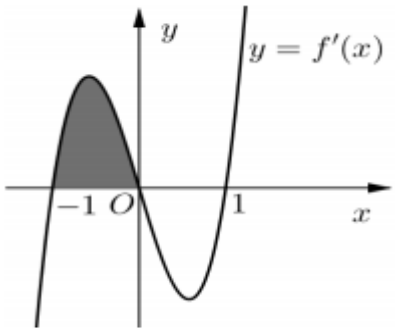
**Cách 2:**

Từ $f(x) = \mathrm{e}^{2x-x^2} \Rightarrow f'(x) = 2(1-x)\mathrm{e}^{2x-x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Bảng biến thiên của $f(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $e$ | ↘ | $0$ |

**Câu 20:** **(THPT LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NGÃI)** Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2$ $(a,b \in \mathbb{R})$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng diện tích phần tô đậm bằng $\frac{1}{8}$. Phương trình $8f(x)+1=0$ có bao nhiêu nghiệm?




**A.** 0. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn D**

Diện tích phần tô đậm là $S=\int_{-1}^{0} f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{8} \Leftrightarrow f(x)\big|_{-1}^{0}=\frac{1}{8} \Leftrightarrow f(0)-f(-1)=\frac{1}{8}$.

Mà $f(0)=a.0^4+b.0^2=0$.

Do đó $f(-1)=-\frac{1}{8} \Rightarrow f(1)=f(-1)=-\frac{1}{8}$ (do $f(x)$ là hàm số chẵn).

Ta có bảng biến thiên

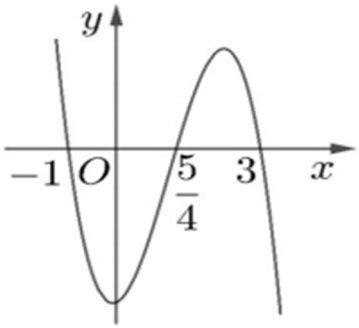
| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{8}$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{8}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Ta có $8f(x)+1=0 \Leftrightarrow f(x)=-\frac{1}{8}$ (*).

Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-\frac{1}{8}$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $8f(x)+1=0$ có 2 nghiệm $(x=-1 \vee x=1)$.

**Câu 21:** **(Triệu Thái Vĩnh Phúc Lần 3)** Cho hàm số $f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$ $(m,n,p,q,r\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới




Tập nghiệm của phương trình $f(x)=r$ có số phần tử là

**A.** 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn C**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có $f'(x)=4mx^3+3nx^2+2px+q.$ Do đồ thị của hàm $f'(x)$ cắt trục $Ox$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $-1;\frac{5}{4};3$ nên $f'(x)=4m(x+1)\left(x-\frac{5}{4}\right)(x-3)=m(x+1)(4x-5)(x-3)$, với $m\neq 0.$

Suy ra $f(x)=\int m(x+1)(4x-5)(x-3)dx+C=m\left(x^4-\frac{13}{3}x^3-x^2+15x\right)+C.$

Theo bài ra, $f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$ nên ta có $f(0)=r\Rightarrow C=r$.

Vậy $f(x)=m\left(x^4-\frac{13}{3}x^3-x^2+15x\right)+r$.

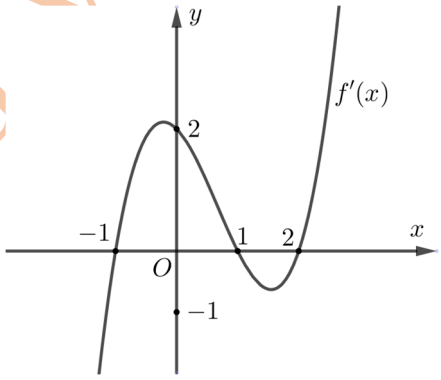
Phương trình $f(x)=r\Leftrightarrow m\left(x^4-\frac{13}{3}x^3-x^2+15x\right)+r=r$

$\Leftrightarrow x^4-\frac{13}{3}x^3-x^2+15x=0$

$\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=3$ hoặc $x=-\frac{5}{3}.$

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x)=r$ có 3 phần tử.

**Câu 22:** **(Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+m,$ (với $a,b,c,d,m\in\mathbb{R}$). Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



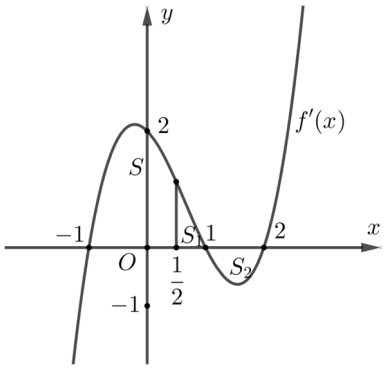

Tập nghiệm của phương trình $f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)$ có số phần tử là

**A.** 5. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn C**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG




Gọi $S$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f'(x)$, trục hoành $Ox$ và các đường thẳng $x=-1;\ x=1$.

$S_1$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f'(x)$, trục hoành $Ox$ và các đường thẳng $x=\dfrac{1}{2};\ x=1$.

$S_2$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f'(x)$, trục hoành $Ox$ và các đường thẳng $x=1;\ x=2$.

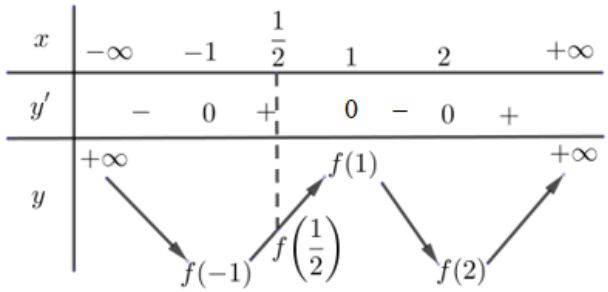
Dựa vào đồ thị ta có:

$$S>S_2 \Rightarrow \int_{-1}^{1} f'(x)\mathrm{d}x > \int_{1}^{2}\left(-f'(x)\right)\mathrm{d}x \Rightarrow f(1)-f(-1)>f(1)-f(2) \Rightarrow f(-1)<f(2).$$

$$S_1<S_2 \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1} f'(x)\mathrm{d}x < \int_{1}^{2}\left(-f'(x)\right)\mathrm{d}x \Rightarrow f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)<f(1)-f(2) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)>f(2)$$

Trên khoảng $(-1;1)$, hàm số $f(x)$ đồng biến nên $f(-1)<f\left(\dfrac{1}{2}\right)<f(1)$.

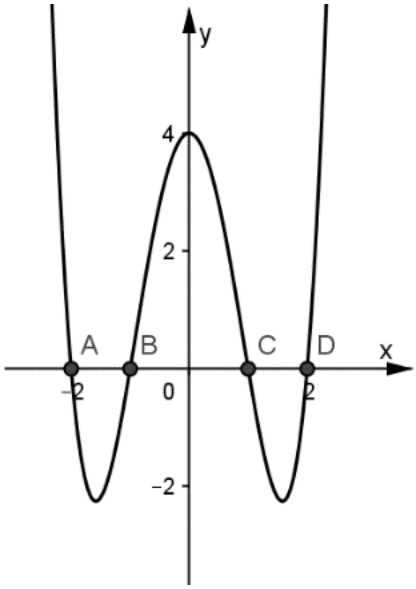
Hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:




Vậy phương trình $f(x)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ có tất cả 4 nghiệm thực.

**Câu 23:** **(THPT NÔNG CỐNG 2 LẦN 4 NĂM 2019)** Cho hàm số $f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+r$ $(a,b,c,d,e,r\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên (cắt $Ox$ tại $A(-2;0)$, $B(-1;0)$, $C(1;0)$, $D(2;0)$). Phương trình $f(x)=r$ có bao nhiêu nghiệm?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG




**A.** 2. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Cách 1:**

Ta có $y=f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+r \Rightarrow f'(x)=5ax^4+4bx^3+3cx^2+2dx+e$

Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ đi qua các điểm $A(-2;0)$, $B(-1;0)$, $C(1;0)$, $D(2;0)$ và $E(0;4)$ nên ta có:

$$\begin{cases} e=4 \\ 80a-32b+12c-4d+e=0 \\ 5a-4b+3c-2d+e=0 \\ 5a+4b+3c+2d+e=0 \\ 80a+32b+12c+4d+e=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{5} \\ b=0 \\ c=-\frac{5}{3} \\ d=0 \\ e=4 \end{cases}.$$

Vậy $y=f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{5}{3}x^3+4x+r$.

Khi đó phương trình $f(x)=r \Leftrightarrow \frac{1}{5}x^5-\frac{5}{3}x^3+4x=0 \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{5}x^4-\frac{5}{3}x^2+4\right)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Vậy phương trình $f(x)=r$ có 1 nghiệm.

**Cách 2:**

Ta có $y=f'(x)$ là hàm số bậc 4.

Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt $Ox$ tại bốn điểm $A(-2;0)$, $B(-1;0)$, $C(1;0)$, $D(2;0)$ suy ra $f'(x)=k(x^2-1)(x^2-4)$, $k>0$.

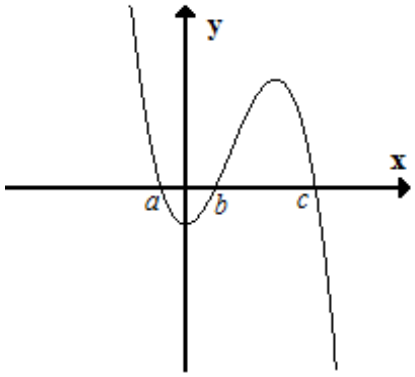
Lại có điểm $E(0;4)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f'(x) \Rightarrow k=1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vậy $f'(x)=x^4-5x^2+4$.

Mặt khác $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(x^4-5x^2+4\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}x^5-\frac{5}{3}x^3+4x+r \Rightarrow f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{5}{3}x^3+4x+r$.

**Câu 24:** **(THPT SỐ 1 TƯ NGHĨA LẦN 2 NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm có hoành độ $a<b<c$ như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $f(x-a)=f(c)$ là




**A.** 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

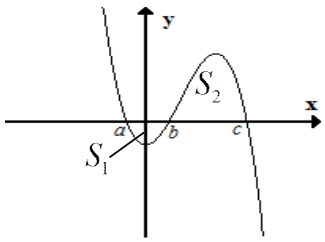
**Lời giải**

**Chọn D**

+) Từ đồ thị $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $a$ | | $b$ | | $c$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $f(a)$ | ↘ | | ↗ | $f(c)$ | ↘ | |

+) Từ đồ thị $y=f'(x)$ ta có:

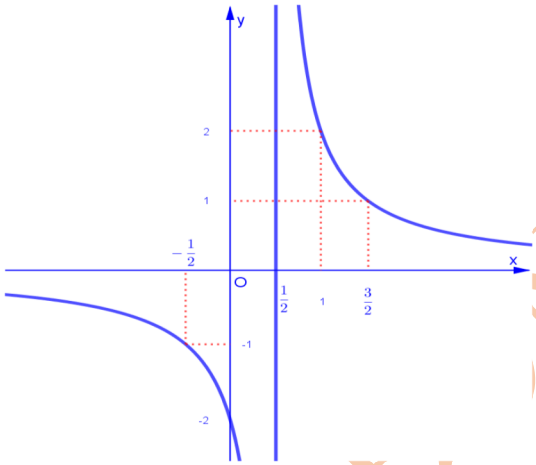



$$S_1<S_2 \Leftrightarrow \int_a^b -f'(x)\mathrm{d}x<\int_b^c f'(x)\mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow f(a)-f(b)<f(c)-f(b)$$
$$\Leftrightarrow f(a)<f(c)$$

+) Số nghiệm của phương trình $f(x-a)=f(c)$ là số giao điểm của đồ thị $y=f(x-a)$ và đường thẳng $y=f(c)$ trong đó đường thẳng $y=f(c)$ là đường song song hoặc trùng với trục hoành, cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $f(c)$, còn đồ thị hàm số $y=f(x-a)$ có được là do tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f(x)$ sang trái theo phương của trục hoành $(-a)$ đơn vị.

Từ ba điều trên suy ra phương trình $f(x-a)=f(c)$ có đúng một nghiệm.

**Câu 25:** **(THPT-Yên-Mô-A-Ninh-Bình-2018-2019-Thi-tháng-4)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ, biết $f(0)=1$, $f(1)=2$. Giá trị của $P=f(-1)+f(3)$ bằng




**A.** $4+\ln 15$. **B.** $2+\ln 15$. **C.** $3+\ln 15$. **D.** $\ln 15$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ, nên hàm số $y=f'(x)=\frac{2}{2x-1}$.

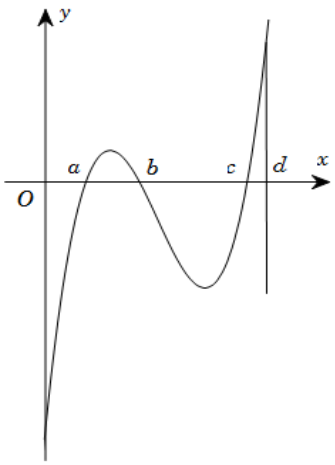
Ta có $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{2}{2x-1}dx=\ln|2x-1|+C=\begin{cases}\ln(2x-1)+A, x>\frac{1}{2}\\ \ln(1-2x)+B, x<\frac{1}{2}\end{cases}$

Do $f(1)=2\Rightarrow A=2; f(0)=1\Rightarrow B=1$

Suy ra $f(x)=\begin{cases}\ln(2x-1)+2, x>\frac{1}{2}\\ \ln(1-2x)+1, x<\frac{1}{2}\end{cases}$.

Vậy $P=f(-1)+f(3)=3+\ln 15$.

**Câu 26:** Cho các số thực $a, b, c, d$ thỏa mãn $0<a<b<c<d$ và hàm số $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi $M$ và $m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[0;d]$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?




**A.** $M+m=f(0)+f(c)$.

**C.** $M+m=f(b)+f(a)$.

**B.** $M+m=f(d)+f(c)$.

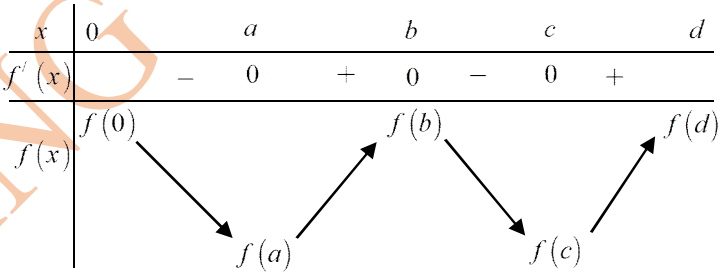
**D.** $M+m=f(0)+f(a)$.

**Lời giải**

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta có nhận xét:

- Hàm số $y=f'(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi qua $x=a$.
- Hàm số $y=f'(x)$ đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi qua $x=b$.
- Hàm số $y=f'(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi qua $x=c$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[0;d]$ như sau:




Sử dụng bảng biến thiên ta tìm được: $\begin{cases}\max\limits_{[0;d]}\left[f(x)\right]=\max\left\{f(0),f(b),f(d)\right\}\\ \min\limits_{[0;d]}\left[f(x)\right]=\min\left\{f(a),f(c)\right\}\end{cases}$.

Quan sát đồ thị, dùng phương pháp tích phân để tính diện tích, ta có

$$\int_a^b f'(x)dx<\int_b^c\left[0-f'(x)\right]dx\longrightarrow f(c)<f(a)\longrightarrow\min_{[0;d]}\left[f(x)\right]=f(c).$$

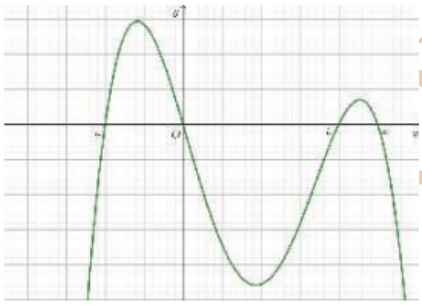
Tương tự, ta có

$$\begin{cases}\int_0^a\left[0-f'(x)\right]dx>\int_a^b f'(x)dx\to f(0)>f(b)\\ \int_b^c\left[0-f'(x)\right]dx>\int_c^d f'(x)dx\to f(b)>f(d)\end{cases}\to f(0)>f(b)>f(d)\longrightarrow\max_{[0;d]}\left[f(x)\right]=f(0).$$

Vậy $\max_{[0;d]}\left[f(x)\right]=f(0);\ \min_{[0;d]}\left[f(x)\right]=f(c).$

**Chọn A**

**Câu 27:** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết phương trình $f'(x)=0$ có bốn nghiệm phân biệt $a$, $0$, $b$, $c$ với $a<0<b<c$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng

**A.** $f(a)>f(c)>f(b)$.

**B.** $f(a)>f(b)>f(c)$.

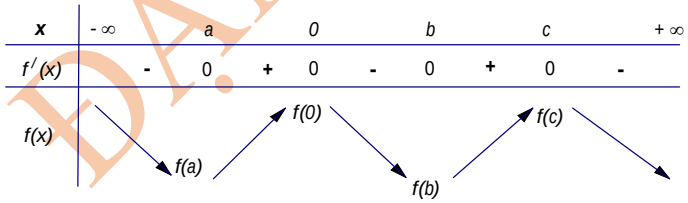
**C.** $f(c)>f(a)>f(b)$.

**D.** $f(b)>f(a)>f(c)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có bảng biến thiên




Suy ra $f(c)>f(b)$ (1)

Gọi $S_1$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f'(x)$, đường thẳng $x=a$, $x=0$.

$S_2$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f'(x)$, đường thẳng $x=0$, $x=b$.

$S_3$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f'(x)$, đường thẳng $x=b$, $x=c$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vì $S_1+S_3<S_2 \Leftrightarrow \int_a^0 |f'(x)|\mathrm{d}x+\int_b^c |f'(x)|\mathrm{d}x<\int_0^b |f'(x)|\mathrm{d}x$

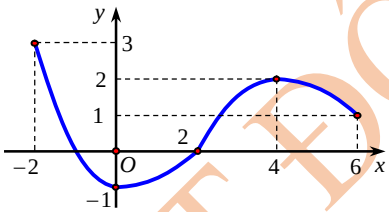
$\Leftrightarrow \int_a^0 f'(x)\mathrm{d}x+\int_b^c f'(x)\mathrm{d}x<-\int_0^b f'(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow f(0)-f(a)+f(c)-f(b)<-f(b)+f(0)$

$\Leftrightarrow f(a)>f(c)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow f(a)>f(c)>f(b)$.

**Câu 28:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình vẽ bên. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.




**A.** $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x)=f(-2)$. **B.** $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x)=f(2)$.

**C.** $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x)=f(6)$. **D.** $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x)=f(-1)$.

**Lời giải**

☑ Do vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất chỉ có thể tại $x=-1$ hoặc $x=6$.

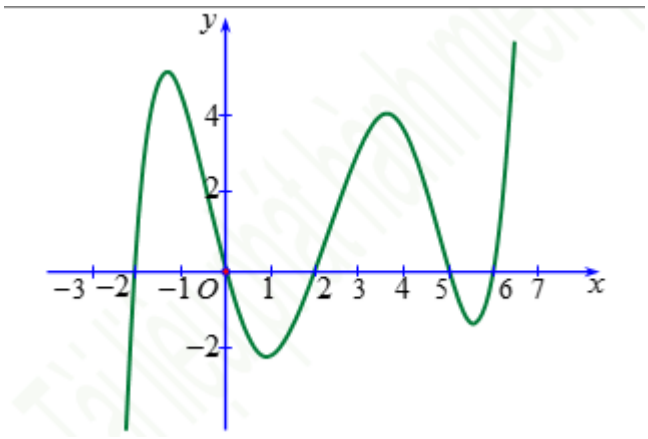
☑ Gọi $S_1$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và trục $Ox$ $(-1\le x\le 2)$, $S_2$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và trục $Ox$ $(2\le x\le 6)$. Ta có

$S_1<S_2 \Rightarrow -\int_{-1}^{2} f'(x)\mathrm{d}x<\int_2^6 f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow -f(2)+f(-1)<f(6)-f(2) \Leftrightarrow f(-1)<f(6)$.

Vậy $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x)=f(6)$.

**Câu 29:** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $M=\max\limits_{[-2;6]} f(x)$, $m=\min\limits_{[-2;6]} f(x)$, $T=M+m$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

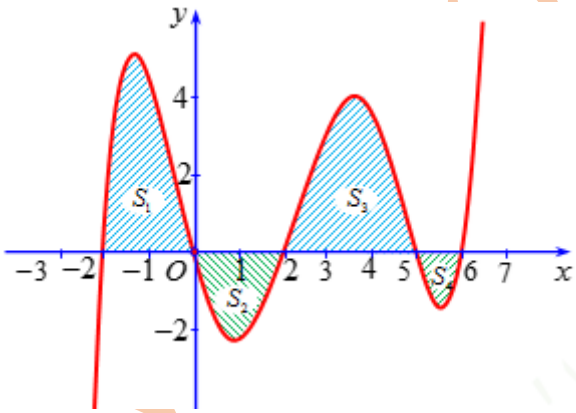
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG




**A.** $T = f(5) + f(-2)$. **B.** $T = f(5) + f(6)$. **C.** $T = f(0) + f(2)$. **D.** $T = f(0) + f(-2)$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Gọi $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$ lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ với và trục hoành.

Quan sát hình vẽ, ta có

◈ $\int_{-2}^{0} f'(x)\mathrm{d}x > \int_{0}^{2} -f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)\Big|_{-2}^{0} > f(x)\Big|_{2}^{0}$

$\Leftrightarrow f(0) - f(-2) > f(0) - f(2) \Leftrightarrow f(-2) < f(2)$

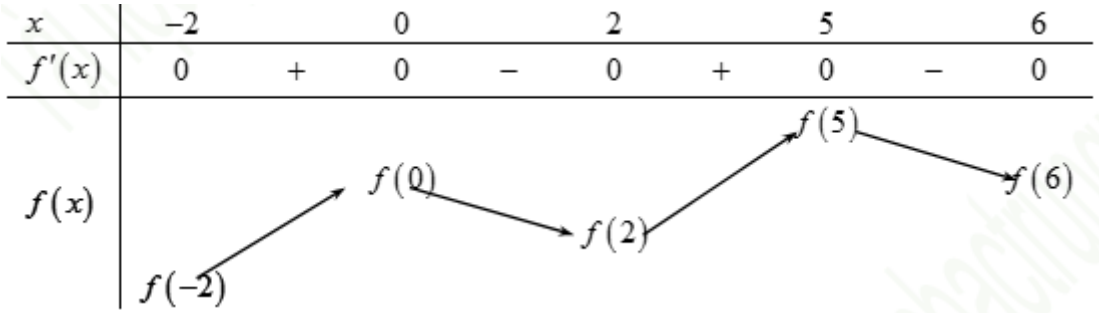
◈ $\int_{0}^{2} -f'(x)\mathrm{d}x < \int_{2}^{5} f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)\Big|_{2}^{0} < f(x)\Big|_{2}^{5}$

$\Leftrightarrow f(0) - f(2) < f(5) - f(2)$ 0

◈ $\int_{2}^{5} f'(x)\mathrm{d}x > \int_{5}^{6} -f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)\Big|_{2}^{5} > f(x)\Big|_{6}^{5}$

$\Leftrightarrow f(5) - f(2) > f(5) - f(6) \Leftrightarrow f(2) < f(6)$

Ta có bảng biến thiên




Dựa vào bảng biến thiên ta có $M=\max\limits_{[-2;6]} f(x)=f(5)$ và $x=0$

Khi đó $T=f(5)+f(-2)$.

**Câu 30:** **(HKII Kim Liên 2017-2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=1$ và $f'(x)=(6x-3x^2).f(x)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $f(x)=m$ có nghiệm duy nhất.

**A.** $\left[\begin{array}{l} m>e^4 \\ 0<m<1 \end{array}\right.$. **B.** $1<m<e^4$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m>e^4 \\ m<1 \end{array}\right.$. **D.** $1\le m\le e^4$.

**Lời giải**

**Chọn A**

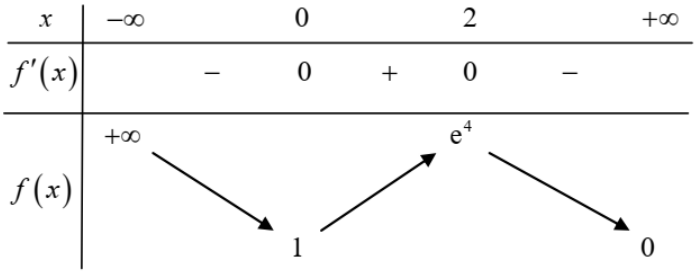
Theo giả thiết $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên ta có $f'(x)=(6x-3x^2).f(x)\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=6x-3x^2$.

Suy ra $\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int(6x-3x^2)\mathrm{d}x\Rightarrow\ln f(x)=3x^2-x^3+C$.

Mặt khác $f(0)=1$ nên $C=\ln f(0)=\ln 1=0$. Vậy $\ln f(x)=3x^2-x^3\Leftrightarrow f(x)=e^{3x^2-x^3}$.

Ta có $f'(x)=(6x-3x^2).e^{3x^2-x^3}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

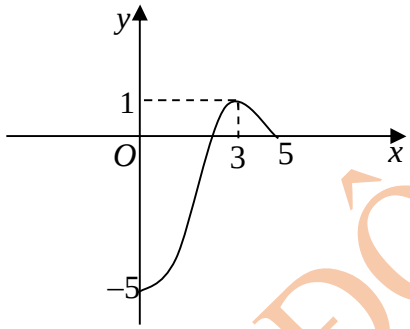



**Nhận xét:**

Số nghiệm của phương trình $f(x)=m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m$. Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ suy ra phương trình $f(x)=m$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m>e^4 \\ 0<m<1 \end{array}\right.$

.

**Câu 31:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;5]$ được cho như hình bên.




Tìm mệnh đề đúng

**A.** $f(0)=f(5)<f(3)$. **B.** $f(3)<f(0)=f(5)$.

**C.** $f(3)<f(0)<f(5)$. **D.** $f(3)<f(5)<f(0)$.

**Lời giải**

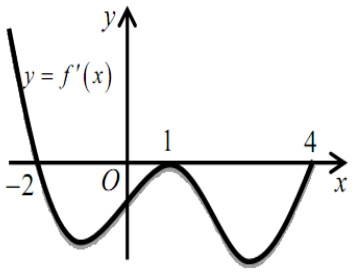
**Chọn C**

Ta có $\int_3^5 f'(x)\mathrm{d}x=f(5)-f(3)>0$, do đó $f(5)>f(3)$.

$\int_0^3 f'(x)\mathrm{d}x=f(3)-f(0)<0$, do đó $f(3)<f(0)$

$\int_0^5 f'(x)\mathrm{d}x=f(5)-f(0)<0$, do đó $f(5)<f(0)$

**Câu 32:** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây




Biết rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục $Ox$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ và $[1;4]$ lần lượt bằng $9$ và $12$. Cho $f(1)=3$. Giá trị biểu thức $f(-2)+f(4)$ bằng

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** 21 **B.** 9. **C.** 3. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn C**

Theo giả thiết ta có $\int_{-2}^{1}\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x=9$ và $\int_{1}^{4}\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x=12$.

Dựa vào đồ thị ta có: $\int_{-2}^{1}\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x=-\int_{-2}^{1}f'(x)\mathrm{d}x=-f(x)\Big|_{-2}^{1}=-f(-1)+f(-2)$

$\Rightarrow -f(1)+f(-2)=9$.

Tương tự ta có $-f(4)+f(1)=12$.

Như vậy $\left[-f(1)+f(-2)\right]-\left[-f(4)+f(1)\right]=-3\Leftrightarrow f(-2)+f(4)-2f(1)=-3$

$\Leftrightarrow f(-2)+f(4)-6=-3\Leftrightarrow f(-2)+f(4)=3$.

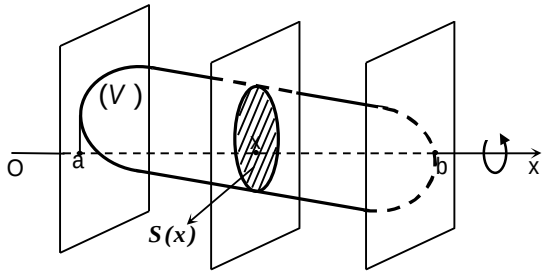
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

# ỨNG DỤNG THỂ TÍCH

## A – KIẾN THỨC CHUNG

### 1 - Thể tích vật thể

Gọi $B$ là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục $Ox$ tại các điểm $a$ và $b$; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục $Ox$ tại điểm $x$, $(a \le x \le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$.

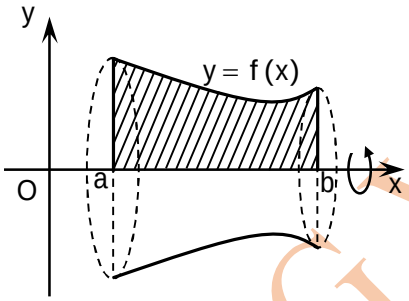



$$V = \int_a^b S(x)dx$$

Khi đó, thể tích của vật thể $B$ được xác định: $V = \int_a^b S(x)dx$

### 2 - Thể tích khối tròn xoay

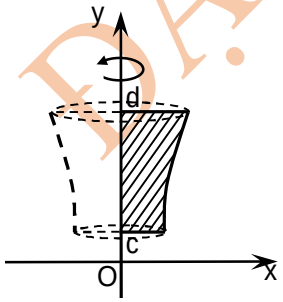
Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục $Ox$:




$$\begin{cases} (C): y = f(x) \\ (Ox): y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

**Chú ý:**

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục $Oy$:




$$\begin{cases} (C): x = g(y) \\ (Oy): x = 0 \\ y = c \\ y = d \end{cases} \qquad V_y = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$$

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục $Ox$:

$$V = \pi \int_a^b \left| f^2(x) - g^2(x) \right| dx$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

## THỂ TÍCH GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐỒ THỊ (TRÒN XOAY)

**PHƯƠNG PHÁP:**

**. Tính thể tích khối tròn xoay:**

**Trường hợp 1.** Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$ và $x=b$ $(a<b)$ ***quay quanh trục Ox*** là $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$.

**Trường hợp 2.** Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$ và $x=b$ $(a<b)$ ***quay quanh trục Ox*** là $V=\pi\int_a^b\left|f^2(x)-g^2(x)\right|dx$.

## B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1:** **(KÊNH TRUYỀN HÌNH GIÁO DỤC QUỐC GIA VTV7 –2019)** Cho hình phẳng $D$ giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{\dfrac{3+(x-2)e^x}{xe^x+1}}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay $D$ quanh trục hoành có thể tích $V=\pi\left[a+b\ln\left(1+\dfrac{1}{e}\right)\right]$, trong đó $a,b$ là các số hữu tỷ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $a-2b=5$. **B.** $a+b=3$. **C.** $a-2b=7$. **D.** $a+b=5$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Thể tích của hình phẳng $D$ là

$$V=\pi\int_0^1 y^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\frac{3+(x-2)e^x}{xe^x+1}\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\frac{3+xe^x-2e^x}{xe^x+1}\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\frac{1+xe^x+2-2e^x}{xe^x+1}\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_0^1\mathrm{d}x+\pi\int_0^1\frac{2\left(1-e^x\right)}{xe^x+1}\mathrm{d}x=\pi+\pi\int_0^1\frac{2\left(1-e^x\right)}{xe^x+1}\mathrm{d}x=\pi+K.$$

Với $K=2\pi\int_0^1\dfrac{1-e^x}{xe^x+1}\mathrm{d}x=2\pi\int_0^1\dfrac{\dfrac{1}{e^x}-1}{x+\dfrac{1}{e^x}}\mathrm{d}x$.

Đặt $u=x+\dfrac{1}{e^x}\Rightarrow\mathrm{d}u=\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow u=1$; $x=1\Rightarrow u=1+\dfrac{1}{e}$.

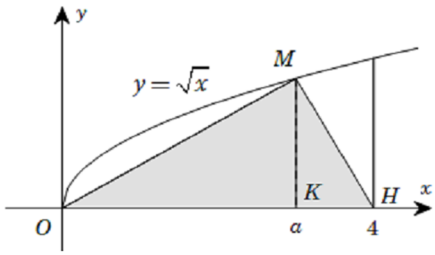
$$\Rightarrow K=-2\pi\int_1^{1+\frac{1}{e}}\frac{\mathrm{d}u}{u}=-2\pi.\ln|u|\Big|_1^{1+\frac{1}{e}}=-2\pi\ln\left(1+\frac{1}{e}\right).$$

Vậy $V=\pi-2\pi\ln\left(1+\dfrac{1}{e}\right)=\pi\left[1-2.\ln\left(1+\dfrac{1}{e}\right)\right]$.

Từ đó ta suy ra được $\begin{cases}a=1\\b=-2\end{cases}\Rightarrow a-2b=5$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 2:** **(Gang Thép Thái Nguyên)** Gọi $V$ là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $y=0$ và $x=4$ quanh trục $Ox$. Đường thẳng $x=a\,(0<a<4)$ cắt đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ tại $M$ (hình vẽ). Gọi $V_1$ là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác $OMH$ quanh trục $Ox$. Biết rằng $V=2V_1$. Khi đó




**A.** $a=2$. **B.** $a=2\sqrt{2}$. **C.** $a=\dfrac{5}{2}$. **D.** $a=3$.

**Lời giải**

**Chọn D**

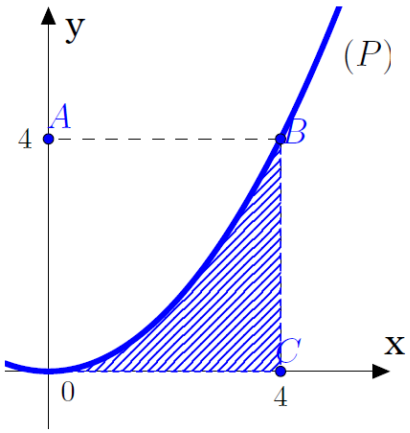
Ta có: $V=\pi\int_0^4 x\,dx=\pi\dfrac{x^2}{2}\Big|_0^4=8\pi$. Mà $V=2V_1\Rightarrow V_1=4\pi$.

Gọi $K$ là hình chiếu của $M$ trên $Ox\ \Rightarrow OK=a, KH=4-a, MK=\sqrt{a}$.

Khi xoay tam giác $OMH$ quanh $Ox$ ta được khối tròn xoay là sự lắp ghép của hai khối nón sinh bởi các tam giác $OMK$, $MHK$, hai khối nón đó có cùng mặt đáy và có tổng chiều cao là $OH=4$ nên thể tích của khối tròn xoay đó là $V_1=\dfrac{1}{3}.\pi.4.\left(\sqrt{a}\right)^2=\dfrac{4\pi a}{3}$, từ đó suy ra $a=3$.

**Câu 3:** **(Lương Thế Vinh Lần 3)** Cho hình vuông $OABC$ có cạnh bằng $4$ được chia thành hai phần bởi parabol $(P)$ có đỉnh tại $O$. Gọi $S$ là hình phẳng không bị gạch (như hình vẽ). Tính thể tích $V$ của khối tròn xoay khi cho phần $S$ quay quanh trục $Ox$.

**A.** $V=\dfrac{128\pi}{5}$. **B.** $V=\dfrac{128\pi}{3}$. **C.** $V=\dfrac{64\pi}{5}$. **D.** $V=\dfrac{256\pi}{5}$.




**Lời giải**

**Chọn D**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có parabol $(P)$ có đỉnh $O$ và đi qua điểm $B(4;4)$ có phương trình $y=\frac{1}{4}x^2$.

Khi đó thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng (phần gạch chéo) khi quay quanh trục $Ox$ là: $V_1=\pi\int_0^4\left(\frac{1}{4}x^2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{64\pi}{5}$

Thể tích khối trụ khi quay hình vuông $OABC$ quanh cạnh $OC$ là: $V_2=\pi r^2h=\pi.4^2.4=64\pi$.

Suy ra thể tích $V$ của khối tròn xoay khi cho phần $S$ quay quanh trục $Ox$ là

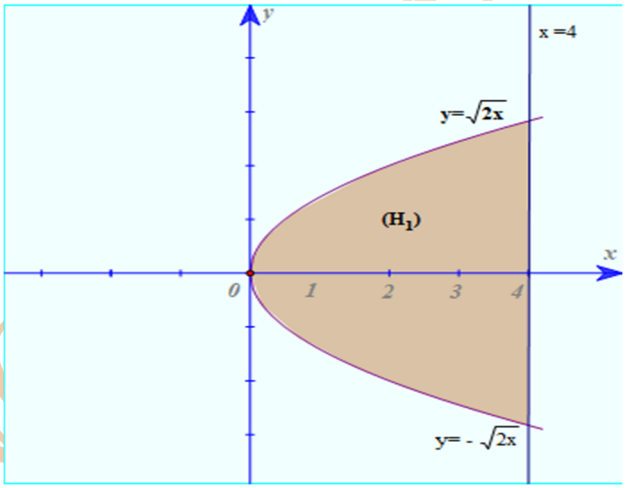
$V=V_2-V_1=64\pi-\frac{64\pi}{5}=\frac{256\pi}{5}$.

**Câu 4:** **(Sở Bắc Ninh 2019)** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hình $(H_1)$ giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{2x}, y=-\sqrt{2x}, x=4$; hình $(H_2)$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x;y)$ thỏa mãn các điều kiện $x^2+y^2\le 16;(x-2)^2+y^2\ge 4$ ; $(x+2)^2+y^2\ge 4$. Khi quay $(H_1);(H_2)$ quanh $Ox$ ta được các khối tròn xoay có thể tích lần lượt là $V_1,V_2$ .Khi đó, mệnh đề nào sau đây là đúng?

**A.** $V_2=2V_1$ . **B.** $V_1=V_2$ . **C.** $V_1+V_2=48\pi$ . **D.** $V_2=4V_1$ .

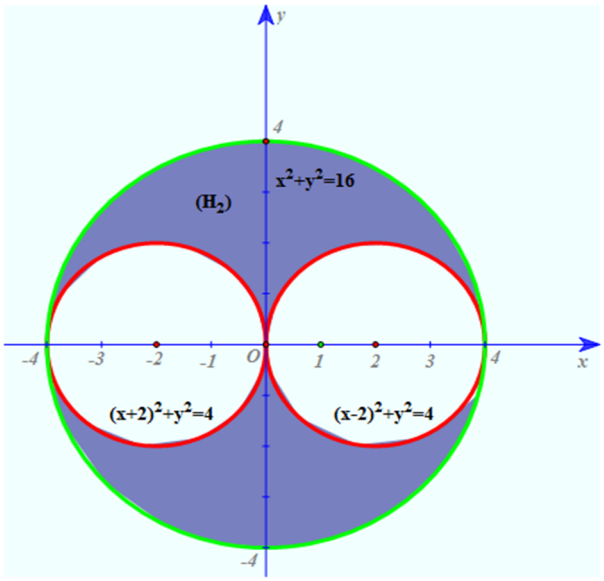
**Lời giải**

**Chọn D**




Ta thấy đồ thị của 2 hàm số $y=\sqrt{2x}$ và $y=-\sqrt{2x}$ đối xứng nhau qua trục hoành nên khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng $(H_1)$ quanh trục $Ox$ cũng là khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $\begin{cases}y=\sqrt{2x}\\y=0\\x=4\end{cases}$ quanh trục $Ox$.

Do đó $V_1=\pi\int_0^4 2x\mathrm{d}x=\pi\,x^2\Big|_0^4=16\pi$ .




Gọi $(C_1)$ là hình tròn tâm $O$ bán kính $R_1=4$ , $(C_2)$ là hình tròn tâm $I(2;0)$ bán kính $R_2=2$ và $(C_3)$ là hình tròn tâm $J(-2;0)$ bán kính $R_3=2$. Khi đó hình phẳng $(H_2)$ là phần nằm bên trong hình tròn $(C_1)$ nhưng nằm bên ngoài các hình tròn $(C_2)$ và $(C_3)$. Gọi $V_3,V_4,V_5$ lần lượt là thể tích của các khối cầu có bán kính $R_1,R_2,R_3$ thì $V_2=V_3-(V_4+V_5)$

Do đó $V_2=\frac{4\pi.4^3}{3}-(\frac{4\pi.2^3}{3}+\frac{4\pi.2^3}{3})=64\pi$

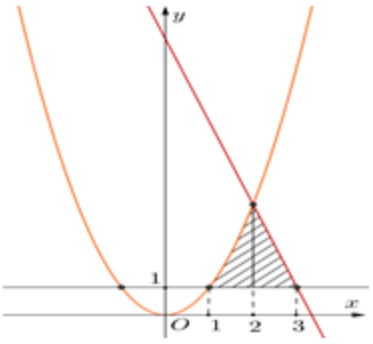
Vậy $V_2=4V_1$.

**Câu 5:** **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai)** Gọi $D$ là miền được giới hạn bởi các đường $y=-3x+10$, $y=1$, $y=x^2$ và $D$ nằm ngoài parabol $y=x^2$. Khi cho $D$ quay xung quanh trục $Ox$, ta nhận được vật thể tròn xoay có thể tích là:

**A.** $\frac{56}{5}\pi$. **B.** $12\pi$. **C.** $11\pi$. **D.** $\frac{25}{3}\pi$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Vẽ các đường các đường $y=-3x+10$, $y=1$, $y=x^2$

Phương trình hoành độ giao điểm 2 đồ thị $y=x^2$ và $y=1$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

là $x^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$

Phương trình hoành độ giao điểm 2 đồ thị $y=x^2$ và $y=-3x+10$

là $x^2=-3x+10\Leftrightarrow x^2+3x-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-5\end{array}\right.$

Phương trình hoành độ giao điểm 2 đồ thị $y=-3x+10$ và $y=1$

là $-3x+10=1\Leftrightarrow x=3$

Theo hình vẽ, $D$ là miền gạch chéo.

Do đó ta có thể tích vật thể tròn xoay nhận được $V=V_1+V_2-V_3$, trong đó:

$V_1$ là thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng $D_1$ quay quanh $Ox$, với $D_1$ giới hạn bởi các đường $y=x^2;y=0;x=1;x=2$.

$V_2$ là thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng $D_2$ quay quanh $Ox$, với $D_2$ giới hạn bởi các đường $y=-3x+10;y=0;x=2;x=3$.

$V_3$ là thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng $D_3$ quay quanh $Ox$, với $D_3$ giới hạn bởi các đường $y=1;y=0;x=1;x=3$.

Suy ra $V=\pi\left[\int_1^2\left(x^2\right)^2\mathrm{d}x+\int_2^3(10-3x)^2\mathrm{d}x-\int_1^3\mathrm{d}x\right]$

$=\pi\left[\int_1^2x^4\mathrm{d}x+\int_2^3\left(9x^2-60x+100\right)\mathrm{d}x-\int_1^3\mathrm{d}x\right]$

$=\pi\left[\left.\frac{x^5}{5}\right|_1^2+\left.\left(3x^3-30x^2+100x\right)\right|_2^3-\left.x\right|_1^3\right]$

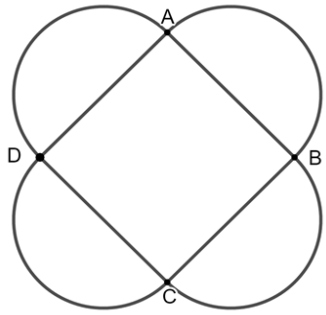
$=\pi\left[\frac{1}{5}\left(2^5-1\right)+\left(3.3^3-30.3^2+100.3\right)-\left(3.2^3-30.2^2+100.2\right)-(3-1)\right]$

$=\frac{56\pi}{5}$.

**Câu 6:** **(CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ HÒA BÌNH LẦN 4 NĂM 2019)** Trong mặt phẳng cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2\sqrt{2}$, phía ngoài hình vuông vẽ thêm bốn đường tròn nhận các cạnh của hình vuông làm đường kính (hình vẽ). Thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình trên khi quay quanh đường thẳng $AC$ bằng

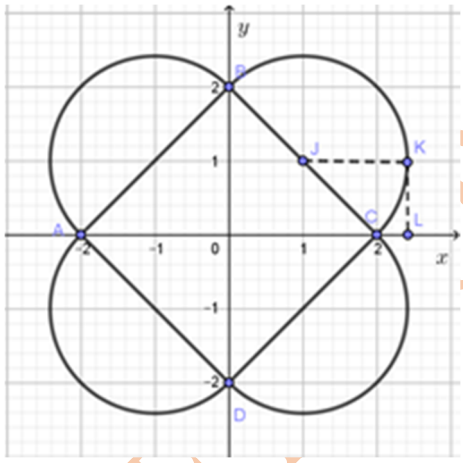
**A.** $\frac{32\pi}{3}+4\pi^2$. **B.** $\frac{16\pi}{3}+2\pi^2$. **C.** $\frac{8\pi}{3}+\pi^2$. **D.** $\frac{64\pi}{3}+8\pi^2$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG




**Lời giải**

**Chọn A**




Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có $J(1;1), K\left(\sqrt{2}+1;1\right), C(2;0)$.

Phương trình đường tròn $J(1;1)$ bán kính $JB=\sqrt{2}$ là

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\sqrt{2-(x-1)^2}+1=\sqrt{1+2x-x^2}+1, \text{khi } y\geq 1 \\ y=-\sqrt{2-(x-1)^2}+1=-\sqrt{1+2x-x^2}+1, \text{khi } y<1 \end{array}\right. .$$

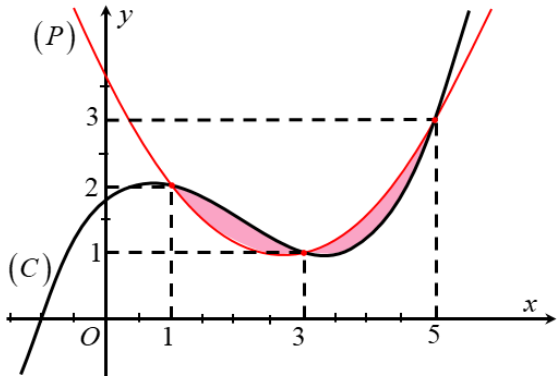
Do quay hình phẳng xung quanh đường thẳng $AC$ có thể tích gấp đôi khi quay phần hình phẳng gồm tam giác vuông $OBC$ và nửa hình tròn tâm $J$ bán kính $JB$.

Nên thể tích khối tròn xoay $V=2\pi\int\limits_0^{1+\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+2x-x^2}+1\right)^2\mathrm{d}x-2\pi\int\limits_2^{1+\sqrt{2}}\left(-\sqrt{1+2x-x^2}+1\right)^2\mathrm{d}x$

$=\dfrac{32\pi}{3}+4\pi^2$

(*Tính tích phân trên dùng máy tính do thi trắc nghiệm*)

**Câu 7:** **(Thị Xã Quảng Trị)** Cho đồ thị $(C): y=ax^3+bx^2+cx+d$ và Parabol $(P): y=mx^2+nx+p$ có đồ thị như hình vẽ (đồ thị $(C)$ là đường cong đậm hơn). Biết phần hình phẳng được giới hạn bởi $(C)$ và $(P)$ (phần tô đậm) có diện tích bằng 1. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay phần hình phẳng đó quanh trục hoành bằng




**A.** $3\pi$. **B.** $\frac{237}{35}\pi$. **C.** $5\pi$. **D.** $\frac{159}{35}\pi$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đồ thị $(P)$ đi qua các điểm $(1;2)$; $(3;1)$ và $(5;3)$ nên Parabol có phương trình là $y=\frac{3}{8}x^2-2x+\frac{29}{8}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $(C)$ và $(P)$ là

$ax^3+(b-m)x^2+(c-n)x+d-p=0 \quad (*)$.

Dựa vào hình vẽ ta có đồ thị $(C)$ cắt đồ thị $(P)$ tại các điểm có hoành độ $1;\ 3;\ 5$ nên phương trình hoành độ cũng có dạng là $a(x-1)(x-3)(x-5)=0$

$\Leftrightarrow a\left(x^3-9x^2+23x-15\right)=0 \quad (**)$.

Theo giả thiết ta có diện tích phần tô đậm bằng 1 suy ra

$$S=\int_1^3 a\left(x^3-9x^2+23x-15\right)\mathrm{d}x+\int_5^3 a\left(x^3-9x^2+23x-15\right)\mathrm{d}x=1 \Rightarrow a=\frac{1}{8}.$$

Với $a=\frac{1}{8}$ ta có $\frac{1}{8}\left(x^3-9x^2+23x-15\right)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^3-\frac{9}{8}x^2+\frac{23}{8}x-\frac{15}{8}=0 \quad (1)$.

Từ $(1)$ và $(*)$ ta có $\begin{cases} a=\frac{1}{8} \\ b-\frac{3}{8}=-\frac{9}{8} \\ c+2=\frac{23}{8} \\ d-\frac{29}{8}=-\frac{15}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{8} \\ b=-\frac{3}{4} \\ c=\frac{7}{8} \\ d=\frac{7}{4} \end{cases}$.

Suy ra $(C)$ có phương trình là $y=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{7}{8}x+\frac{7}{4}$.

Vậy thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay phần hình phẳng đó quanh trục hoành là

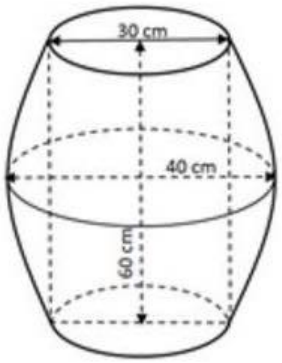
$$V=\pi\int_1^3\left(\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{7}{8}x+\frac{7}{4}\right)^2\mathrm{d}x-\pi\int_1^3\left(\frac{3}{8}x^2-2x+\frac{29}{8}\right)^2\mathrm{d}x+$$

$$+\pi\int_3^5\left(\frac{3}{8}x^2-2x+\frac{29}{8}\right)^2\mathrm{d}x-\pi\int_3^5\left(\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{7}{8}x+\frac{7}{4}\right)^2\mathrm{d}x$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$=\frac{395\pi}{84}-\frac{199\pi}{60}+\frac{409\pi}{60}-\frac{437\pi}{84}=3\pi$.

**Câu 8:** Một thùng đựng Bia hơi (có dạng như hình vẽ) có đường kính đáy là 30cm, đường kính lớn nhất của thân thùng là 40cm, chiều cao thùng là 60 cm, cạnh bên hông của thùng có hình dạng của một parabol. Thể tích của thùng Bia hơi gần nhất với số nào sau đây? (với giả thiết độ dày thùng Bia không đáng kể).



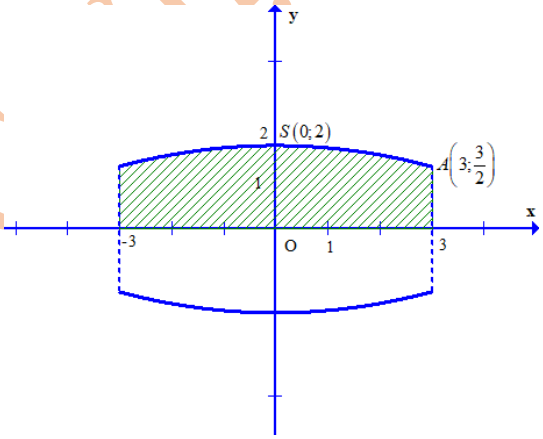

**A.** 70 (lít). **B.** 62 (lít). **C.** 60 (lít). **D.** 64 (lít).

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi $(P): y=ax^2+bx+c$ là parabol đi qua điểm $A\left(3;\frac{3}{2}\right)$ và có đỉnh $I(0;2)$ (hình vẽ bên dưới).

Khi đó thể tích thùng Bia bằng thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi $(P)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=3; x=-3$ quay quanh trục $Ox$.

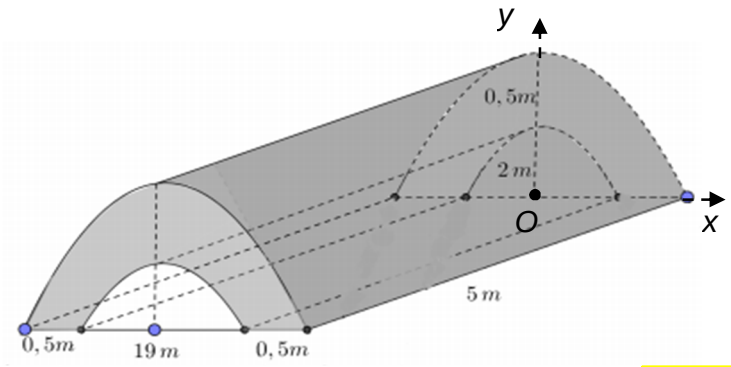



Ta thấy $(P)$ có đỉnh $I(0;2)$ nên $(P): y=ax^2+2$, mặt khác $(P)$ đi qua điểm $A\left(3;\frac{3}{2}\right)$ nên ta tìm được $(P)$ có phương trình $y=\frac{-x^2}{18}+2$.

Khi đó thể tích thùng Bia là:

$V=\pi\int_{-3}^{3}\left(\frac{-x^2}{18}+2\right)^2 dx=\frac{203}{10}\pi\left(dm^3\right)\approx 63,77$ (lít).

**Câu 9:** **(Cẩm Giàng)** Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã Y có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol).

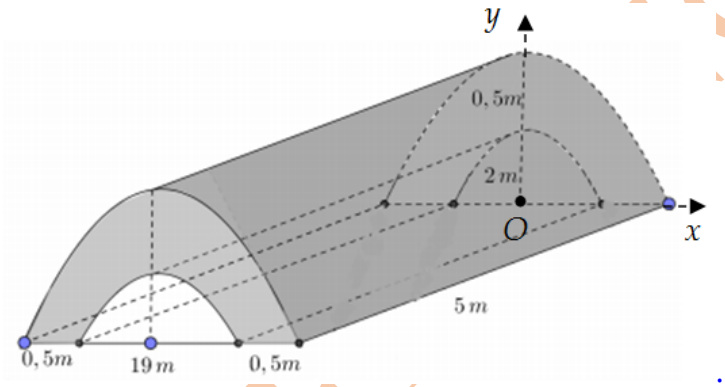



**A.** $19\,\text{m}^3$. **B.** $21\,\text{m}^3$. **C.** $18\,\text{m}^3$. **D.** $40\,\text{m}^3$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Chọn hệ trục $Oxy$ như hình vẽ.




Gọi $(P_1): y = a_1x^2 + b_1$ là Parabol đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2};0\right), B(0;2)$

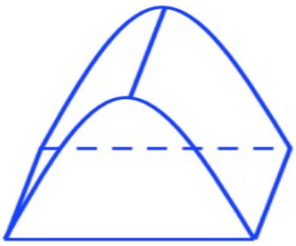
Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a.\left(\frac{19}{2}\right)^2 + 2 \\ 2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{8}{361} \\ b_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2$.

Gọi $(P_2): y = a_2x^2 + b_2$ là Parabol đi qua hai điểm $C(10;0), D\left(0;\frac{5}{2}\right)$

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a_2.(10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -\frac{1}{40} \\ b_2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}$.

Ta có thể tích của bê tông là: $V = 5.2\left[\int_0^{10}\left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}\right)dx - \int_0^{\frac{19}{2}}\left(-\frac{8}{361}x^2 + 2\right)dx\right] = 40\,\text{m}^3$.

**Câu 10:** **(Chuyên Hưng Yên Lần 3)** Để chuẩn bị cho hội trại do Đoàn trường tổ chức, lớp 12A dự định dựng một cái lều trại có hình parabol như hình vẽ. Nền của lều trại là một hình chữ nhật có kích thước bề ngang 3 mét, chiều dài 6 mét, đỉnh trại cách nền 3 mét. Tính thể tích phần không gian bên trong trại.

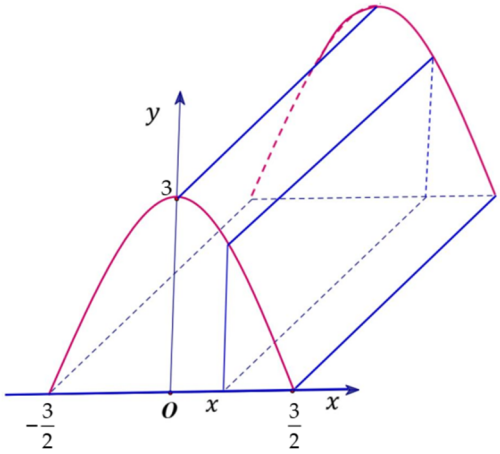


**A.** $72\ \text{m}^3$. **B.** $36\ \text{m}^3$. **C.** $72\pi\ \text{m}^3$. **D.** $36\pi\ \text{m}^3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ.




Giả sử phương trình của parabol là $(P): y = ax^2 + bx + c$.

Ta có parabol có đỉnh là $(0;3)$ và đi qua điểm $\left(\frac{3}{2};0\right)$ nên có hệ phương trình

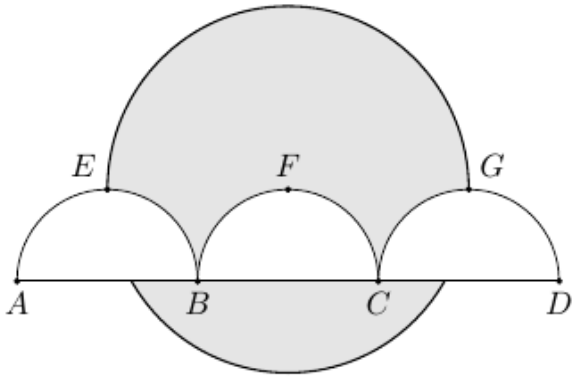
$$\begin{cases} b = 0 \\ c = 3 \\ \frac{9}{4}a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-4}{3} \\ b = 0 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow (P): y = \frac{-4}{3}x^2 + 3.$$

Cắt vật thể bởi một mặt phẳng vuông góc với trục $Ox$ tại điểm có hoành độ $x$ $\left(\frac{-3}{2} \le x \le \frac{3}{2}\right)$, ta thấy thiết diện thu được là một hình chữ nhật có chiều rộng bằng $\frac{-4}{3}x^2 + 3$ mét và chiều dài bằng $6$ mét. Diện tích thiết diện thu được là $6\left(\frac{-4}{3}x^2 + 3\right) = -8x^2 + 18$.

Vậy thể tích phần không gian bên trong trại là $\int\limits_{\frac{-3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-8x^2 + 18\right) dx = 36\ \left(\text{m}^3\right)$.

**Câu 11:** **(THPT Sơn Tây Hà Nội 2019)** Trong hình vẽ dưới đây, đoạn $AD$ được chia làm $3$ bởi các điểm $B$ và $C$ sao cho $AB = BC = CD = 2$. Ba nửa đường tròn có bán kính $1$ là $\overset{\frown}{AEB}$, $\overset{\frown}{BFC}$ và $\overset{\frown}{CGD}$ có đường kính tương ứng là $AB$, $BC$ và $CD$. Các điểm $E$, $F$, $G$ lần lượt là tiếp điểm của tiếp tuyến chung $EG$ với $3$ nửa đường tròn. Một đường tròn tâm $F$, bán kính bằng $2$. Diện tích miền bên trong đường tròn tâm $F$ và bên ngoài $3$ nửa đường tròn (miền tô đậm) có thể biểu

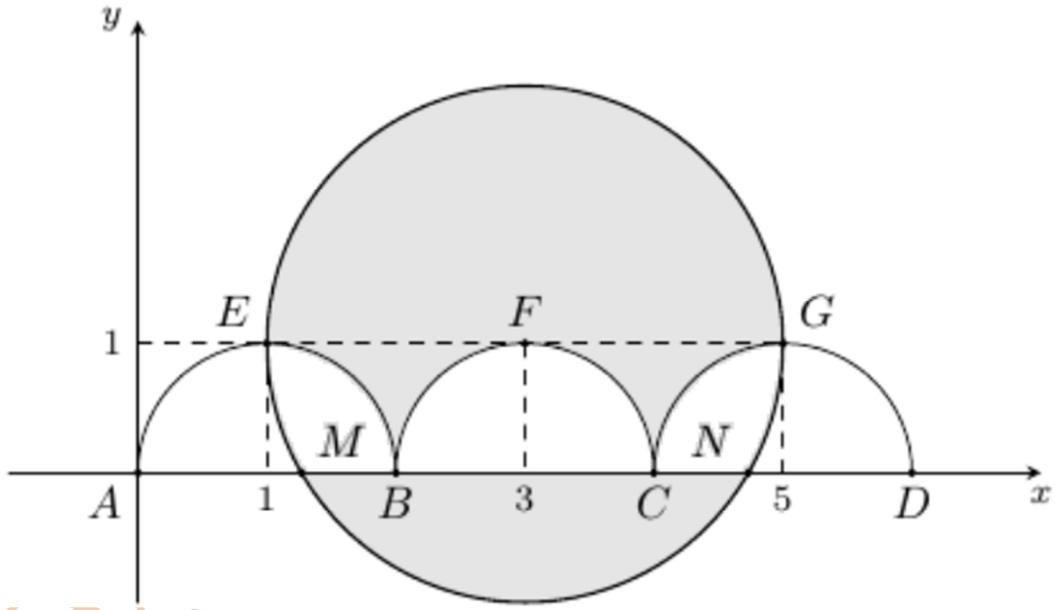
diễn dưới dạng $\frac{a}{b}\pi-\sqrt{c}+d$, trong đó $a$, $b$, $c$, $d$ là các số nguyên dương và $a$, $b$ nguyên tố cùng nhau. Tính giá trị của $a+b+c+d$?




**A.** 14. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 17.

**Lời giải**

**Chọn D**




Chọn hệ trục $Axy$ như hình vẽ, khi đó $F(3;1)$ nên đường tròn tâm $F$, bán kính bằng $2$ có dạng

$$(x-3)^2+(y-1)^2=4.$$

Gọi $M$, $N$ là giao điểm của đường tròn $(F)$ với trục hoành.

Suy ra $x_M=3-\sqrt{3}$ và $x_N=3+\sqrt{3}$.

Gọi $S_1$ là diện tích giới hạn bởi nửa đường tròn $\overset{\frown}{AEB}$, đường tròn $(F)$ và trục hoành.

Khi đó, $S_1=\frac{1}{2}S_{\overset{\frown}{AEB}}-\int_1^{3-\sqrt{3}}\left(1-\sqrt{4-(x-3)^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\pi-\int_1^{3-\sqrt{3}}\left(1-\sqrt{4-(x-3)^2}\right)\mathrm{d}x.$

Tính $I=\int_{1}^{3-\sqrt{3}}\left(1-\sqrt{4-(x-3)^2}\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $x-3=2\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x=2\cos t.\mathrm{d}t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Khi $x=1$ thì $t=-\frac{\pi}{2}$ và khi $x=3-\sqrt{3}$ thì $t=-\frac{\pi}{3}$.

Nên $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}}\left(1-\sqrt{4-4\sin^2 t}\right).2\cos t.\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}}\left(1-\left|2\cos t\right|\right).2\cos t.\mathrm{d}t$.

Do $t\in\left(-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{3}\right)$ nên $\cos t>0$, suy ra $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}}\left(2\cos t-4\cos^2 t\right)\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+2$.

Vậy $S_1=\frac{1}{4}\pi-\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+2\right)=\frac{7}{12}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}-2$.

Gọi $S$ là diện tích miền tô đậm.

Ta có $S=S_{(F)}-2S_1-S_{\overset{\frown}{BFC}}=4\pi-2\left(\frac{7}{12}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}-2\right)-\frac{1}{2}\pi=\frac{7}{3}\pi-\sqrt{3}+4$.

Suy ra $a=7$, $b=3$, $c=3$, $d=4$. Vậy $a+b+c+d=17$.

**Câu 12:** **(Nguyễn Trãi Hải Dương Lần1)** Cho hình phẳng $(D)$ giới hạn bởi các đường $y=x-\pi$, $y=\sin x$ và $x=0$. Gọi $V$ là thể tích khối tròn xoay tạo thành do $(D)$ quay quanh trục hoành và $V=p\pi^4,\ (p\in\mathbb{Q})$. Giá trị của $24p$ bằng

**A.** 8. **B.** 4. **C.** 24. **D.** 12.

**Lời giải**

**Chọn A**

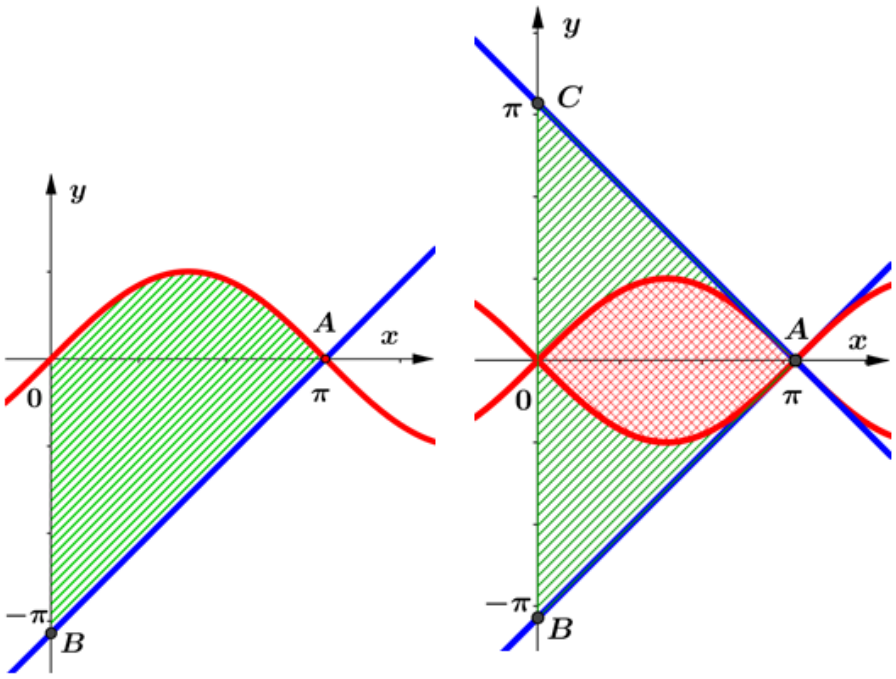
Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x-\pi$ và $y=\sin x$:

$x-\pi=\sin x \Leftrightarrow x-\pi-\sin x=0\ (1)$. Ta thấy $x=\pi$ là một nghiệm của phương trình $(1)$.

Xét hàm số $f(x)=x-\pi-\sin x \Rightarrow f'(x)=1-\cos x\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $x=\pi$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x)=0$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG




**Cách 1:**

Xét hàm số $g(x)=\pi-x-\sin x,\ x\in(0;\pi)$.

$g'(x)=-1-\cos x<0,\ \forall x\in(0;\pi)$, suy ra hàm số $g(x)=\pi-x-\sin x$ nghịch biến trên $(0;\pi)$.

$\forall x\in(0;\pi): g(x)>g(\pi)\Rightarrow \pi-x-\sin x>\pi-\pi-\sin\pi=0\Rightarrow \pi-x>\sin x\ (2)$.

Do đó thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay $(D)$ quanh trục hoành là thể tích của khối nón khi quay tam giác vuông $OAB$ quanh trục hoành.

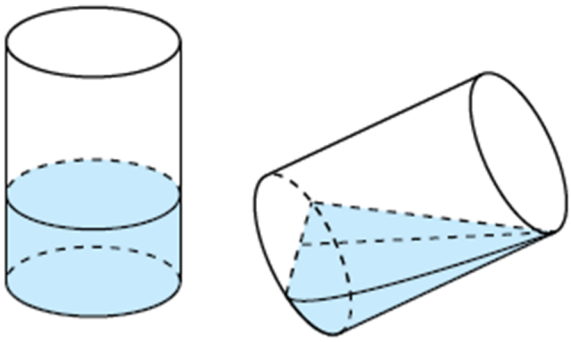
$V=\frac{1}{3}.\pi.OB^2.OA=\frac{1}{3}\pi.\pi^2.\pi=\frac{1}{3}\pi^4\ \Rightarrow p=\frac{1}{3}$. Vậy $24p=24.\frac{1}{3}=8$.

**Cách 2:** Từ $(2)$ ta có $V=\pi\int_0^{\pi}(x-\pi)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}(x-\pi)^2\mathrm{d}(x-\pi)$

$=\pi.\left.\frac{(x-\pi)^3}{3}\right|_0^{\pi}=\frac{\pi^4}{3}\ \Rightarrow p=\frac{1}{3}$.

Vậy $24p=24.\frac{1}{3}=8$.

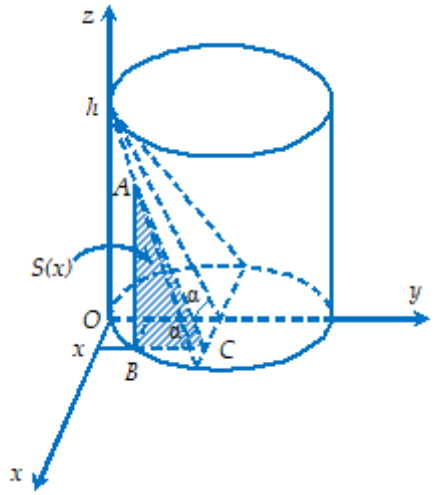
**Câu 13:** **(Sở Hưng Yên Lần1)** Có một cốc thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là $4cm$, chiều cao trong lòng cốc là $12cm$ đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết rằng khi nghiêng cốc nước vừa lúc chạm miệng cốc thì ở đáy cốc, mực nước trùng với đường kính đáy.



**A.** $128\pi\ cm^3$. **B.** $256 cm^3$. **C.** $256\pi\ cm^3$. **D.** $128 cm^3$.

**Lời giải**

**Chọn D**




+) Chọn hệ trục tọa độ $Oxy$ như hình vẽ.

$R=4$ cm là bán kính đáy cốc, $h=12$ cm là chiều cao của cốc.

+) Thiết diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục $Ox$ tại điểm có hoành độ $x\ (-4\le x\le 4)$ là một tam giác $ABC$ vuông tại $B$ có độ dài cạnh $BC=\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{16-x^2}$ và $BA=\sqrt{R^2-x^2}.\dfrac{h}{R}=\sqrt{16-x^2}.\dfrac{12}{4}=3\sqrt{16-x^2}$.

+) Diện tích thiết diện là $S(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{16-x^2}.3\sqrt{16-x^2}=\dfrac{3}{2}(16-x^2)\ (\text{cm}^2)$.

+) Thể tích khối nước trong cốc là $V=\int\limits_{-4}^{4}\dfrac{3}{2}(16-x^2)dx=\dfrac{3}{2}\left(16x-\dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_{-4}^{4}=128\ (\text{cm}^3)$.

**Chú ý:** Có thể tính thể tích hình trên bằng công thức tính nhanh $V=\dfrac{2}{3}R^2h$.

+) Với $R=4$ cm, $h=12$ cm thể tích cần tìm $V=\dfrac{2}{3}.4^2.12=128$ cm$^3$.

**Câu 14:** **(CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 2019 – LẦN 1)** Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=-1$ và $x=1$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục $Ox$ tại điểm có hoành độ $x(-1\le x\le 1)$ là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $\sqrt{1-x^4}$.

**A.** $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** 4. **D.** $\frac{1}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi độ dài cạnh tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $\sqrt{1-x^4}$ là $\frac{\sqrt{1-x^4}}{\sqrt{2}}$

Ta có diện tích thiết diện được cho bằng: $S(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{1-x^4}}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1-x^4\right)$

Thể tích vật thể cần tìm là: $V=\int_{-1}^{1}S(x).dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}\left(1-x^4\right)dx=\frac{2}{5}$.

**Câu 15:** **(THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4)** Cho vật thể $(T)$ giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$; $x=2$. Cắt vật thể $(T)$ bởi mặt phẳng vuông góc với trục $Ox$ tại $x\ (0\le x\le 2)$ ta thu được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $(x+1)\mathrm{e}^x$. Thể tích vật thể $(T)$ bằng

**A.** $\frac{\left(13\mathrm{e}^4-1\right)\pi}{4}$. **B.** $\frac{13\mathrm{e}^4-1}{4}$. **C.** $2\mathrm{e}^2$. **D.** $2\pi\mathrm{e}^2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi $S(x)$ là diện tích của thiết diện, ta có $S(x)=(x+1)^2\mathrm{e}^{2x}$.

Thể tích vật thể $(T)$ là $V=\int_0^2 S(x)\mathrm{d}x=\int_0^2(x+1)^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=(x+1)^2\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2(x+1)\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\end{cases}$.

$V=\frac{1}{2}(x+1)^2\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^2-\int_0^2(x+1)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{9}{2}\mathrm{e}^4-\frac{1}{2}-\int_0^2(x+1)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x+1\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\end{cases}$.

$V=\frac{9}{2}\mathrm{e}^4-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(x+1)\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^2+\frac{1}{2}\int_0^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=3\mathrm{e}^4+\left(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\right)\Big|_0^2=\frac{13\mathrm{e}^4-1}{4}$ (đvtt)

**Câu 16:** **(THĂNG LONG HN LẦN 2 NĂM 2019)** Tính thể tích vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$, $x=\pi$. Biết rằng thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với $Ox$ tại điểm có hoành độ $x\ (0\le x\le\pi)$ là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $\sin x+2$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** $\frac{7\pi}{6}+1$. **B.** $\frac{9\pi}{8}+1$. **C.** $\frac{7\pi}{6}+2$. **D.** $\frac{9\pi}{8}+2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với $Ox$ tại điểm có hoành độ $x$ $(0\le x\le\pi)$, $a$ là cạnh góc vuông của tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $\sin x+2$.

Ta có: $a^2+a^2=(\sin x+2)^2\Rightarrow a^2=\frac{1}{2}(\sin x+2)^2$.

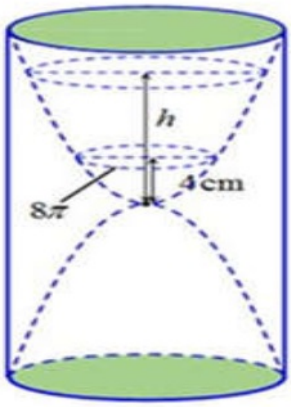
$S(x)=\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{4}(\sin x+2)^2$.

Vậy thể tích vật thể là:

$$V=\int_0^{\pi}S(x)\,dx=\int_0^{\pi}\frac{1}{4}(\sin x+2)^2\,dx=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(\sin^2x+4\sin x+4)\,dx=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}+4\sin x+4\right)dx$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{\pi}(-\cos 2x+8\sin x+9)\,dx=\frac{1}{8}\left(-\frac{\sin 2x}{2}-8\cos x+9x\right)\Big|_{x=0}^{x=\pi}=\frac{9\pi}{8}+2.$$

**Câu 17:** **(KINH MÔN HẢI DƯƠNG 2019)** Một chiếc đồng hồ cát như hình vẽ, gồm hai phần đối xứng nhau qua mặt nằm ngang và đặt trong một hình trụ. Thiết diện thẳng đứng qua trục của nó là hai parabol chung đỉnh và đối xứng nhau qua mặt nằm ngang. Ban đầu lượng cát đổ hết ở phần trên của đồng hồ thì chiều cao $h$ của mực cát bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao của bên đó (xem hình).



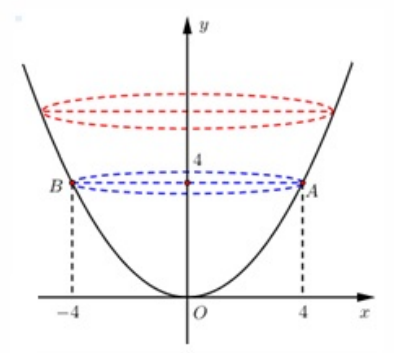

Cát chảy từ trên xuống dưới với lưu lượng không đổi $12,72\text{cm}^3$/phút. Khi chiều cao của cát còn $4\text{cm}$ thì bề mặt trên cùng của cát tạo thành một đường tròn có chu vi $8\pi$ cm (xem hình). Biết sau 10 phút thì cát chảy hết xuống phần bên dưới của đồng hồ. Hỏi chiều cao của khối trụ bên ngoài là bao nhiêu cm?

**A.** $10\text{cm}$. **B.** $9\text{cm}$. **C.** $8\text{cm}$. **D.** $12\text{cm}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG




Gọi $(\alpha)$ là mặt phẳng song song với đáy của hình trụ và cắt đồng hồ cát. Khi đó mặt cắt là một đường tròn có bán kính $x(\text{cm})$, suy ra diện tích đường tròn là $S_t = \pi x^2 (\text{cm}^2)$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxy$ như hình vẽ, gọi phương trình parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$.

Bán kính của đường tròn mặt cát bằng $4(\text{cm})$, nên $(P)$ đi qua 3 điểm $(0;0)$, $(0;4)$ và $(4;4)$.

Suy ra phương trình của $(P): y = \dfrac{x^2}{4} \Rightarrow x^2 = 4y \Rightarrow S_t = 4\pi y$.

Suy ra thể tích cát ban đầu là $V = \int_0^h S_t dy = 4\pi \int_0^h y dy$ (vì mặt cắt vuông góc với $Oy$).

Mà thể tích khối cát là $V_c = 12,72.10 = 127,2(\text{cm}^3)$.

Suy ra $4\pi \int_0^h y dy = 127,2 \Leftrightarrow 2\pi y^2 \Big|_0^h = 127,2 \Leftrightarrow 2\pi h^2 = 127,2 \Leftrightarrow h = \sqrt{\dfrac{63,6}{\pi}} \approx 4,5(\text{cm})$.

Suy ra chiều cao của khối trụ bên ngoài là: $2.\dfrac{4}{3}.h \approx 12(\text{cm})$.

**Câu 18:** Cho D là miền phẳng giới hạn bởi các đường : $y = f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ ; $y = g(x) = \dfrac{x^2}{2}$ .Tính thể tích khối tròn xoay thu được tạo thành khi quay D quanh trục Ox ? Thể tích được viết dưới dạng $T = m\pi^2 + n\pi$ ;m,n∈ R thì tổng giá trị $m+n$ là ?

**A.** $\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{13}{20}$ **C.** $\dfrac{2}{5}$ **D.** $\dfrac{3}{5}$

**Lời giải**

**Chọn B**

Xét phương trình $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{x^2}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Như vậy, thể tích cần tìm sẽ được tính theo công thức: $V = \pi \int_{-1}^{1} \left| f^2(x) - g^2(x) \right| dx$

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left| \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 - \frac{x^4}{4} \right| dx = \pi \left| \int_{-1}^{1} \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2} dx - \int_{-1}^{1} \frac{x^4}{4} dx \right|$$

$$\pi \left| \int_{-1}^{1} \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2} dx - \frac{x^5}{20} \Big|_{-1}^{1} \right| = \pi \left| \int_{-1}^{1} \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2} dx - \frac{1}{10} \right|$$

$V=\pi\left|I-\frac{1}{10}\right|$ với $I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx$

Tính I: Đặt $x=\tan t, t\in\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\ dx=\frac{1}{\cos^2 t}dt=(1+\tan^2 t)dt$

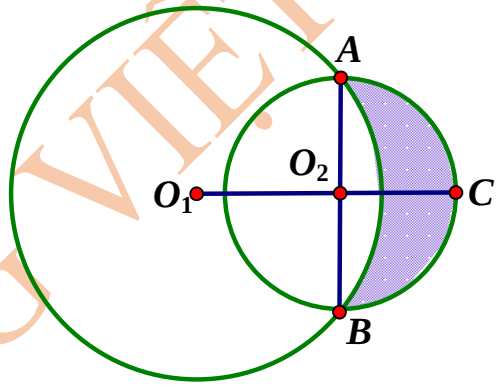
Ta có thể viết I lại dưới dạng

$$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\tan^2 t}{\left(1+\tan^2 t\right)^2}dt=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t dt=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)dt$$

$$\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}V=\pi\left|\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\right|=\frac{\pi^2}{4}+\frac{2\pi}{5}$$

***Nhận xét:*** *Đây là một bài toán khá khó, đòi hỏi thí sinh phải biết đúng công thức và việc xử lí tích phân khéo léo.*

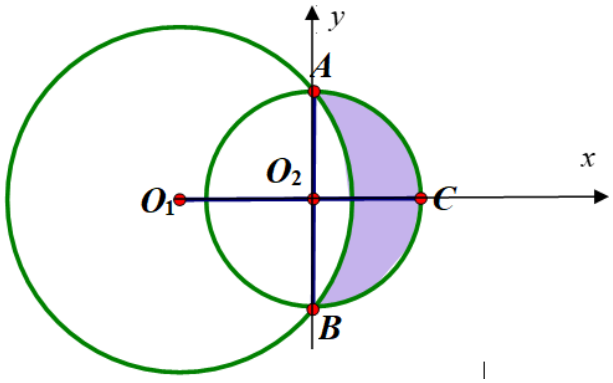
**Câu 19:** Cho hai đường tròn $(O_1;10)$ và $(O_2;8)$ cắt nhau tại hai điểm $A,B$ sao cho $AB$ là một đường kính của đường tròn $(O_2)$. Gọi $(H)$ là hình phẳng giới hạn bởi hai đường tròn ( phần được tô màu như hình vẽ). Quay $(H)$ quanh trục $O_1O_2$ ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích $V$ của khối tròn xoay tạo thành.




**A.** $\frac{824\pi}{3}$. **B.** $\frac{608}{3}\pi$. **C.** $\frac{97}{3}\pi$. **D.** $\frac{145}{3}\pi$

**Lời giải**

**Chọn B**




ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta xây dựng hệ trục tọa độ $Oxy$ như hình vẽ

Ta có $O_1O_2 = \sqrt{O_1A^2 - O_2A^2} = 6$.

Ta có $O_2(0;0), O_1(-6;0)$.

Đường tròn $(O_2;8)$ có phương trình là: $x^2 + y^2 = 64 \Rightarrow y = \sqrt{64 - x^2}$.

Đường tròn $(O_1;10)$ có phương trình là: $(x+6)^2 + y^2 = 100 \Rightarrow y = \sqrt{100 - (x+6)^2}$.

Thể tích cần tìm $V = \pi\int_0^8 (64 - x^2)dx - \pi\int_0^4 \left[100 - (x+6)^2\right]dx = \frac{608\pi}{3}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

# BÀI TOÁN THỰC TẾ VÀ ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH

**Câu 1:** Một mảnh vườn hình tròn tâm $O$ bán kính $6m$. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng $6m$ nhận $O$ làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là $70000$ đồng $/m^2$ Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)

**A.** 8412322 đồng. **B.** 8142232 đồng. **C.** 4821232 đồng. **D.** 4821322 đồng

**Lời giải**

Xét hệ trục tọa độ oxy đặt vào tâm khu vườn, khi đó phương trình đường tròn tâm O là

$x^2+y^2=36$. Khi đó phần nửa cung tròn phía trên trục $Ox$ có phương trình $y=\sqrt{36-x^2}=f(x)$

Khi đó diện tích S của mảnh đất bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị $y=f(x)$ và hai đường thẳng $x=-3;\ x=3$

$$\Rightarrow S=2\int_{-3}^{3}\sqrt{36-x^2}dx$$

Đặt $x=6\sin t\Rightarrow dx=6\cos tdt$. Đổi cận: $x=-3\Rightarrow t=-\frac{\pi}{6}$; $x=3\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow S=2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}36\cos^2 tdt=36\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(\cos 2t+1)\,dt=18(\sin 2t+2t)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=18\sqrt{3}+12\pi$$

Do đó số tiền cần dùng là $70000.S\approx 4821322$ đồng

**Câu 2:** Sân trường có một bồn hoa hình tròn tâm $O$. Một nhóm học sinh lớp 12 được giao thiết kế bồn hoa, nhóm này định chia bồn hoa thành bốn phần, bởi hai đường parabol có cùng đỉnh $O$ và đối xứng nhau qua $O$. Hai đường parabol này cắt đường tròn tại bốn điểm $A$, $B$, $C$, $D$ tạo thành một hình vuông có cạnh bằng $4m$ (như hình vẽ). Phần diện tích $S_1$, $S_2$ dùng để trồng hoa, phần diện tích $S_3$, $S_4$ dùng để trồng cỏ (Diện tích làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai). Biết kinh phí trồng hoa là 150.000 đồng /1m$^2$, kinh phí để trồng cỏ là 100.000 đồng/1m$^2$. Hỏi nhà trường cần bao nhiêu tiền để trồng bồn hoa đó? (Số tiền làm tròn đến hàng chục nghìn)

**A.** 6.060.000 đồng. **B.** 5.790.000 đồng. **C.** 3.270.000 đồng. **D.** 3.000.000 đồng.

**Lời giải**

**Chọn C**

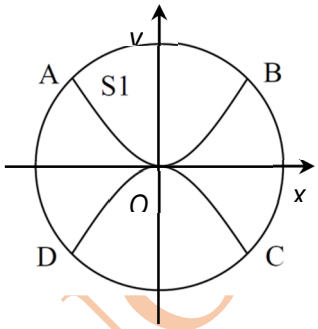
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Parabol có hàm số dạng $y=ax^2+bx+c$ có đỉnh là gốc tọa độ và đi qua điểm $B(2;2)$ nên có phương trình $y=\frac{1}{2}x^2$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Đường tròn bồn hoa có tâm là gốc tọa độ và bán kính $OB = 2\sqrt{2}$ nên có phương trình là $x^2 + y^2 = 8$. Do ta chỉ xét nhánh trên của đường tròn nên ta chọn hàm số nhánh trên là $y = \sqrt{8 - x^2}$.

Vậy diện tích phần $S_1 = \int_{-2}^{2} \left( \sqrt{8 - x^2} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx$




Do đó, diện tích trồng hoa sẽ là $S_1 + S_2 = 2\int_{-2}^{2} \left( \sqrt{8 - x^2} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx \approx 15,233...$

Vậy tổng số tiền để trồng bồn hoa là: $15,233 \times 150.000 + \left( \pi \left( 2\sqrt{2} \right)^2 - 15,233 \right) \times 100.000 \approx 3.274.924$ đồng.

Làm tròn đến hàng chục nghìn nên ta có kết quả là 3.270.000 đồng.

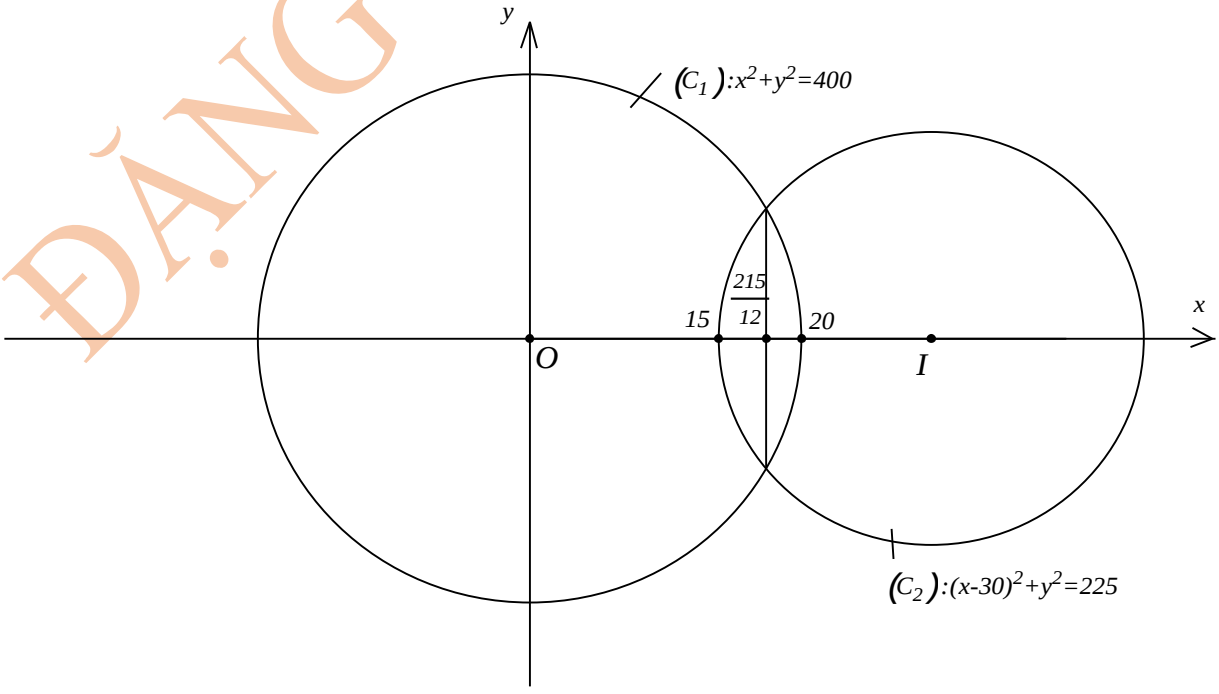
**Câu 3:** **(Sở Hà Nam)** Một khu vườn có dạng hợp của hai hình tròn giao nhau. Bán kính của hai đường tròn là $20m$ và $15m$, khoảng cách giữa hai tâm của hai hình tròn là $30m$. Phần giao của hai hình tròn được trồng hoa với chi phí 300000 đồng/$m^2$. Phần còn lại được trồng cỏ với chi phí 100000 đồng/$m^2$. Hỏi chi phí để trồng hoa và cỏ của khu vườn gần nhất với số tiền nào dưới đây?

**A.** 202 triệu đồng. **B.** 208 triệu đồng.

**C.** 192 triệu đồng. **D.** 218 triệu đồng.

**Lời giải**

**Chọn A**




+ Gắn hệ trục như hình vẽ.

+ Đường tròn $(C_1)$ có tâm $O(0;0)$, bán kính $R_1=20$ có phương trình: $x^2+y^2=400$

$\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{400-x^2}$.

+ Đường tròn $(C_2)$ có tâm $I(30;0)$, bán kính $R_2=15$ có phương trình: $(x-30)^2+y^2=225$

$\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{225-(x-30)^2}$.

+ Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_1)$ và $(C_2)$ là:

$400-x^2=225-(x-30)^2\Leftrightarrow x=\dfrac{215}{12}$.

+ Diện tích trồng hoa: $S_1=2.\int\limits_{15}^{\frac{215}{12}}\sqrt{225-(x-30)^2}dx+2.\int\limits_{\frac{215}{12}}^{20}\sqrt{400-x^2}dx\approx 60,255m^2$.

+ Diện tích trồng cỏ: $S_2=\pi R_1^2+\pi R_2^2-2S_1=\pi.20^2+\pi.15^2-2.60,255\approx 1842,985m^2$

Tổng chi phí trồng hoa và cỏ là:
$P=300000.S_1+100000.S_2=300000.60,255+100000.1842,985=202375000$ đồng

Vậy chi phí để trồng hoa và cỏ của khu vườn gần nhất với số tiền 202 triệu đồng

**Câu 4:** **(THANH CHƯƠNG 1 NGHỆ AN 2019 LẦN 3)** Lô gô gắn tại Shoroom của một hãng ô tô là một hình tròn như hình vẽ bên. Phần tô đậm nằm giữa Parabol đỉnh $I$ và đường gấp khúc $AJB$ được giát bạc với chi phí 10 triệu đồng $/m^2$ phần còn lại phủ sơn với chi phí 2 triệu đồng/$m^2$. Biết $AB=2m,\ IA=IB=\sqrt{5}m$ và $JA=JB=\dfrac{\sqrt{13}}{2}m$. Hỏi tổng số tiền giát bạc và phủ sơn của lô gô nói trên gần với số nào nhất trong các số sau:

**A.** 19 250 000đồng. **B.** 19 050 000 đồng.

**C.** 19 150 000đồng. **D.** 19 500 000đồng.

**Lời giải**

**Chọn C**

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Do $AB=2m,\ IA=IB=\sqrt{5}m$ và $JA=JB=\dfrac{\sqrt{13}}{2}m$

Nên ta có : $I(0;0),\ A(-1;2),\ B(1;2),\ J\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$; phương trình Para bol là $y=2x^2$, đường thẳng $JB$ là $y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$.

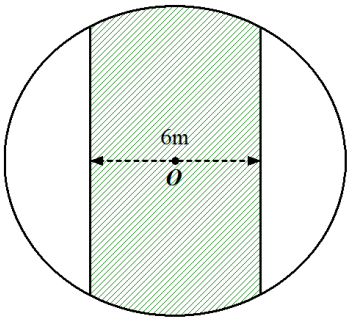
Gọi $K$ là tâm của hình tròn $KB=KI=r\Rightarrow K\left(0;\dfrac{5}{4}\right),r=\dfrac{5}{4}$.

Phần diện tích dát bạc là : $S_1=2\int\limits_0^1\left(\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}-2x^2\right)dx=\dfrac{7}{6}m^2$.

Phần diện tích phủ sơn là : $S_2 = \pi r^2 - S_1 \simeq 3,73m^2$.

Tổng số tiền giát bạc và phủ sơn của lô gô nói trên là: $\frac{7}{6}.10000000 + 3,73.2000000 = 19127000$ đồng

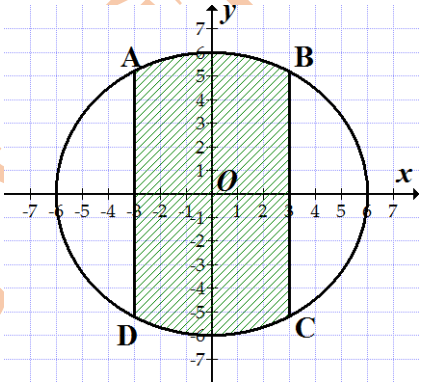
**Câu 5:** **(Lý Nhân Tông)** Một mảnh vườn hình tròn tâm $O$ bán kính 6m. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng $6m$ nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là $70000$ đồng/$m^2$. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó ?




**A.** 8 412 322 đồng. **B.** 4 821 322 đồng. **C.** 3 142 232 đồng. **D.** 4 821 232 đồng.

**Lời giải**

**Chọn B**




Đặt hệ trục $Oxy$ như hình vẽ.

Phương trình đường tròn $x^2 + y^2 = 36 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{36 - x^2}$.

Diện tích phần trồng cây: $S = 2\int_{-3}^{3} \sqrt{36 - x^2}\,dx$.

Đặt $x = 6\sin t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = 6\cos t dt$. Đổi cận: $x = -3 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6};\ x = 3 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$.

$$S = 2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{36 - 36\sin^2 t}.6\cos t.dt = 72\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t.dt = 36\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t).dt$$

$= 36\left( t + \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 12\pi + 18\sqrt{3}$.

Số tiền cần để trồng cây là: $70000.S \approx 4\,821\,322$ đồng.

**Câu 6:** **(THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4)** Cho hàm số $y = x^4 - 6x^2 + m$ có đồ thị $(C_m)$. Giả sử $(C_m)$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi $(C_m)$ và trục hoành có phần phía trên trục hoành và phần phía dưới trục hoành có diện tích bằng nhau. Khi đó $m = \frac{a}{b}$ (với $a, b$ là các số nguyên, $b > 0$; $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của biểu thức $S = a + b$ là

**A.** 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn B**

$y' = 4x^3 - 12x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array} \right.$.

$(C_m)$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt khi $y(0).y\left(\sqrt{3}\right) < 0 \Leftrightarrow m(m-9) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 9$.

Gọi $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ lần lượt là hoành độ giao điểm của $(C_m)$ với trục hoành

$(x_1 < x_2 < 0 < x_3 < x_4)$.

Theo đề bài ta có: $\int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,dx + \int_{x_3}^{x_4} |f(x)|\,dx = \int_{x_2}^{x_3} |f(x)|\,dx$.

Do $f(x)$ là hàm số chẵn và có hệ số $a > 0$ nên

$2\int_{x_1}^{x_2} \left[-f(x)\right]dx = \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx \Leftrightarrow \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{0} f(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow \int_{x_1}^{0} f(x)\,dx = 0$

$\Leftrightarrow \int_{x_1}^{0} \left(x^4 - 6x^2 + m\right)dx = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{x^5}{5} - 2x^3 + mx \right)\Big|_{x_1}^{0} = 0 \Leftrightarrow -\frac{{x_1}^5}{5} + 2{x_1}^3 - mx_1 = 0$

$\Leftrightarrow {x_1}^5 - 10{x_1}^3 + 5mx_1 = 0 \Leftrightarrow \left({x_1}^4 - 6{x_1}^2 + m\right) - 4{x_1}^2 + 4m = 0 \Leftrightarrow {x_1}^2 = m$.

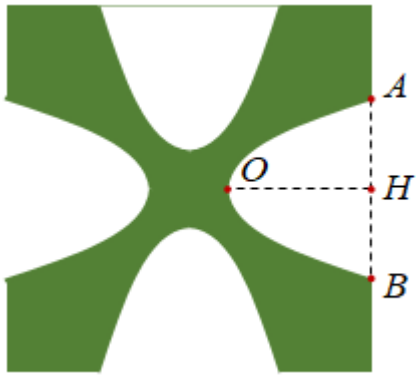
Vì $x_1$ là nghiệm phương trình $x^4 - 6x^2 + m = 0$ nên $m^2 - 6m + m = 0$

$\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} m = 0 \\ m = 5 \end{array} \right. \Rightarrow m = 5$ (vì $0 < m < 9$).

Suy ra $a = 5$, $b = 1$ nên $a + b = 6$.

**Câu 7:** **(Hàm Rồng)** Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5$ cm, $OH = 4$ cm. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.

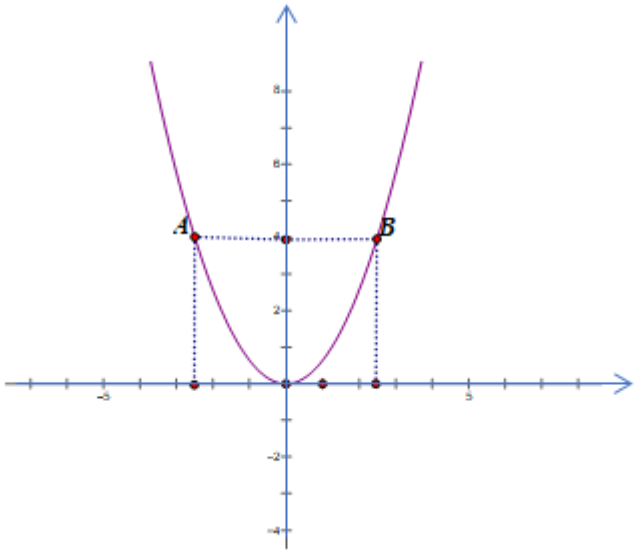
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG




**A.** $\frac{140}{3}\text{cm}^2$. **B.** $\frac{160}{3}\text{cm}^2$. **C.** $\frac{14}{3}\text{cm}^2$. **D.** $50\ \text{cm}^2$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Chon hệ trục tọa độ sao cho $O$ là gốc tọa độ $OH$ thuộc $Oy, Ox$ vuông góc với $OH$ tại $O$ chiều dương hướng từ $A$ đến $B$. Khi đó ta có $B\left(\frac{5}{2};4\right)$. Giả sử parabol $(P)$ đi qua $O, A, B$ nhận $O$ làm đỉnh có dạng: $y = ax^2 + bx + c$

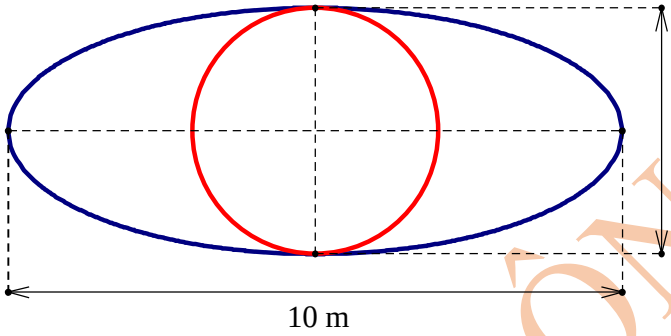
Dễ dàng ta có hệ phương trình $\begin{cases} O \in (P) \\ \frac{-b}{2a} = 0 \\ B \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a = \frac{16}{25} \end{cases}$. Do đó $y = \frac{16}{25}x^2$.

Gọi diện tích hình phẳng giới hạn các đường $y = \frac{16}{25}x^2, y = 4, x = \frac{-5}{2}, x = \frac{5}{2}$, là $S_1$. Khi đó ta có:

$$S_1 = \int_{-2,5}^{2,5}\left(4 - \frac{16}{25}x^2\right)dx = \left(4x - \frac{16}{75}x^3\right)\Big|_{-2,5}^{2,5} = \frac{40}{3}$$

Do đó diện tích hình hoa văn là: $S=10^2-\frac{40}{3}.4=\frac{140}{3}\left(cm^2\right)$.

**Câu 8:** **(CổLoa Hà Nội)** Để trang trí cho một lễ hội đầu xuân, từ một mảnh vườn hình elip có chiều dài trục lớn là $10$ m, chiều dài trục nhỏ là $4$ m, Ban tổ chức vẽ một đường tròn có đường kính bằng độ dài trục nhỏ và có tâm trùng với tâm của elip như hình vẽ. Trên hình tròn người ta trồng hoa với giá $100.000$ đồng/m$^2$, phần còn lại của mảnh vườn người ta trồng cỏ với giá $60.000$ đồng/m$^2$ (biết giá trồng hoa và trồng cỏ bao gồm cả công và cây). Hỏi ban tổ chức cần bao nhiêu tiền để trồng hoa và cỏ? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).




**A.** 2387000 đồng. **B.** 2638000 đồng. **C.** 2639000 đồng. **D.** 2388000 đồng.

**Lời giải**

**Chọn D**

**Cách 1:**

Elip có độ dài trục lớn bằng $10$ m và độ dài trục nhỏ là $4$ m $\Rightarrow 2a=10\Rightarrow a=5$; $2b=4\Rightarrow b=2$.

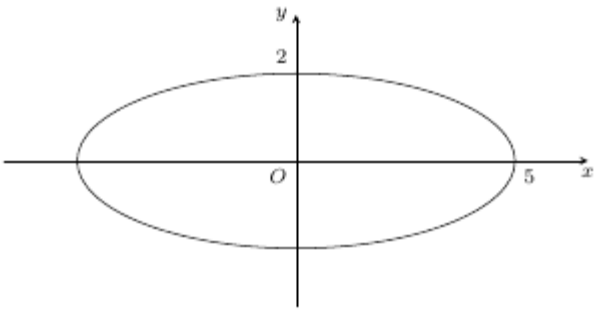
Đường tròn có đường kính bằng độ dài trục nhỏ $\Rightarrow 2r=2b=4\Rightarrow r=2$.

$\Rightarrow$ Tổng số tiền $T$ mà ban tổ chức cần để trồng hoa trên hình tròn và trồng cỏ trên phần còn lại của mảnh vườn là $T=\left(\pi r^2\right)\times 100.000+\left[\pi ab-\pi r^2\right]\times 60.000\approx 2388000$ đồng.

**Cách 2:**

Theo giả thiết ta có $\begin{cases}2a=10\\2b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\b=2.\end{cases}$

Phương trình chính tắc của Elip là $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$. Chọn hệ trục như hình vẽ bên dưới.




ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Khi đó diện tích của Elip là $S_1 = 4\int_0^5 \frac{2}{5}\sqrt{25-x^2}\,dx = \frac{8}{5}\int_0^5 \sqrt{25-x^2}\,dx$.

Đặt $x = 5\sin t \Rightarrow dx = 5\cos t dt$.

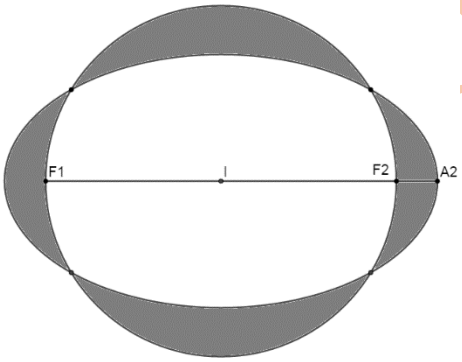
Khi đó $S_1 = 40\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dx = 20\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t + 1)dx = 20\left(\frac{1}{2}\sin 2t + t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 10\pi$.

Đường tròn có đường kính bằng độ dài trục nhỏ nên $2r = 4 \Leftrightarrow r = 2$.

Do đó diện tích đường tròn là $S_2 = \pi r^2 = 4\pi$.

Vậy số tiền $T$ cần tìm là $T = S_2 \times 100.000 + [S_1 - S_2] \times 60.000 \approx 2388000$ đồng.

**Câu 9:** **(Chuyên Sơn La Lần 3 năm 2018-2019)** Gia đình anh A có 1 bồn hoa được thiết kế như hình dưới đây:

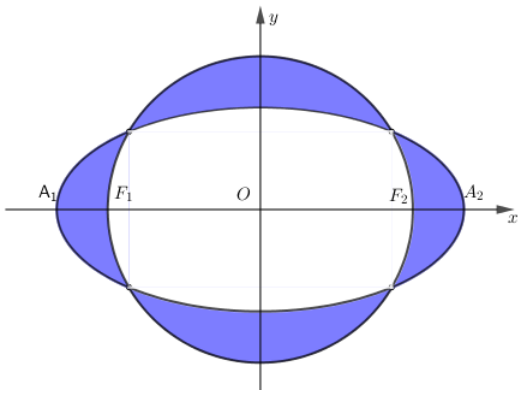



Ở đây $I$ là tâm của hình tròn và cũng là trung điểm của $F_1F_2$, $F_1, F_2$ là hai tiêu điểm của hình elip, $A_2$ là một đỉnh của elip, $IF_2 = 3$, $F_2A_2 = 1$. Anh A dự định trồng cỏ Nhật toàn bộ phần diện tích tô đậm. Hỏi số tiền anh A cần phải trả để mua cỏ gần nhất với số nào sau đây biết rằng giá cỏ Nhật là 65.000đ/m$^2$?

**A.** 563.000 đ. **B.** 560.000 đ. **C.** 577.000 đ. **D.** 559.000 đ.

**Lời giải**

**Chọn A**




Chọn hệ tọa độ như hình vẽ, ta có:

Phương trình của đường tròn là $x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm\sqrt{9-x^2}$

Elip có tiêu điểm $F_2(3;0)$ nên $c=3$, nửa trục lớn $AO=4$ nên $a=4$, $b^2=a^2-c^2=16-9=7$

Phương trình Elip là $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1\Rightarrow y=\pm\sqrt{7\left(1-\frac{x^2}{16}\right)}$

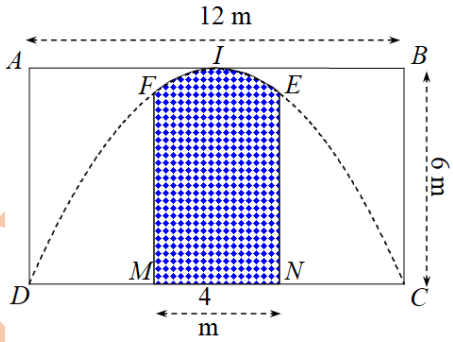
Giao điểm của đường tròn và Elip là $\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{7}{3}\right),\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{7}{3}\right),\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};-\frac{7}{3}\right),\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3};-\frac{7}{3}\right)$

Do tính chất đối xứng nên diện tích cần tính bằng

$$S=4\int_0^{\frac{4\sqrt{2}}{3}}\left(\sqrt{9-x^2}-\sqrt{7\left(1-\frac{x^2}{16}\right)}\right)dx+4\int_{\frac{4\sqrt{2}}{3}}^{4}\sqrt{7\left(1-\frac{x^2}{16}\right)}dx-4\int_{\frac{4\sqrt{2}}{3}}^{3}\sqrt{9-x^2}dx\approx 8,661$$

Suy ra số tiền cần mua cỏ là $8,661\times 65.000=562.965\approx 563.000$.

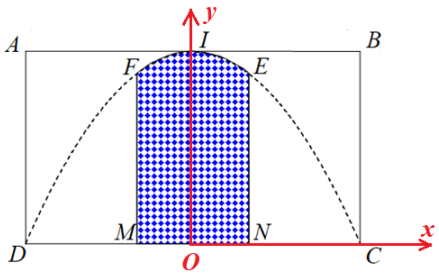
**Câu 10:** **(THẠCH THÀNH I - THANH HÓA 2019)** Một công ty quảng cáo $X$ muốn làm một bức tranh trang trí hình $MNEIF$ ở chính giữa của một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có chiều cao $BC=6\ m$, chiều dài $CD=12\ m$ (*hình vẽ bên*). Cho biết $MNEF$ là hình chữ nhật có $MN=4\ m$; cung $EIF$ có hình dạng là một phần của cung parabol có đỉnh $I$ là trung điểm của cạnh $AB$ và đi qua hai điểm $C$, $D$. Kinh phí làm bức tranh là 900.000 đồng/$m^2$. Hỏi công ty $X$ cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh đó?




**A.** 20.400.000 đồng. **B.** 20.600.000 đồng. **C.** 20.800.000 đồng. **D.** 21.200.000 đồng.

**Lời giải**

**Chọn C**




Gọi $O$ là trung điểm $MN$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxy$ như hình vẽ.

Khi đó, ta có phương trình đường parabol đỉnh $I(0;6)$

và đi qua hai điểm $C(6;0)$, $D(-6;0)$ là $(P):y=6-\frac{1}{6}x^2$.

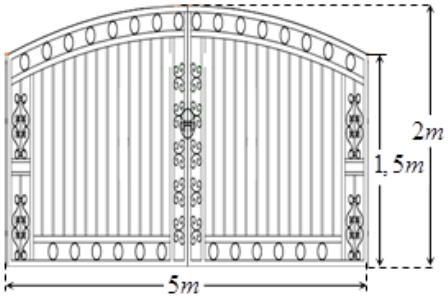
Diện tích bức tranh là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường parabol $(P)$, trục $Ox$ và hai đường thẳng $x=-2,\ x=2$. Khi đó

$$S=\int_{-2}^{2}\left|6-\frac{1}{6}x^2\right|dx=\int_{-2}^{2}\left(6-\frac{1}{6}x^2\right)dx=\frac{208}{9}\left(m^2\right).$$

Vậy, số tiền công ty $X$ cần dùng để làm bức tranh là

$$T=900.000\times\frac{208}{9}=20.800.000 \text{ (đồng).}$$

**Câu 11:** **(THPT-Nguyễn-Công-Trứ-Hà-Tĩnh-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)** Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá $1m^2$ của rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng nghìn).

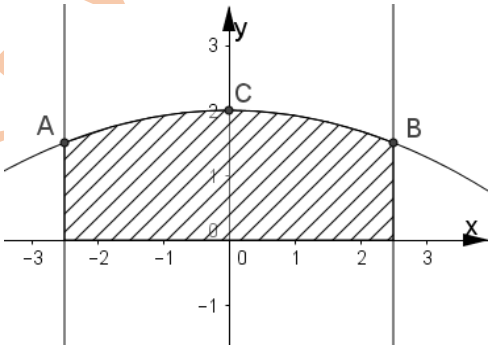



**A.** 6.620.000 đồng. **B.** 6.320.000 đồng. **C.** 6.520.000 đồng. **D.** 6.417.000 đồng.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.




Trong đó $A(-2,5;1,5)$, $B(2,5;1,5)$, $C(0;2)$.

Giả sử đường cong phía trên là một Parabol có dạng $y=ax^2+bx+c$, với $a;b;c\in\mathbb{R}$.

Do Parabol đi qua các điểm $A(-2,5;1,5)$, $B(2,5;1,5)$, $C(0;2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}a(-2,5)^2+b(-2,5)+c=1,5\\ a(2,5)^2+b(2,5)+c=1,5\\ c=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{2}{25}\\ b=0\\ c=2\end{cases}.$$

Khi đó phương trình Parabol là $y=-\frac{2}{25}x^2+2$.

Diện tích $S$ của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-\frac{2}{25}x^2+2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-2,5;\ x=2,5$.

Ta có $S=\int_{-2,5}^{2,5}\left(-\frac{2}{25}x^2+2\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{2}{25}\frac{x^3}{3}+2x\right)\Big|_{-2,5}^{2,5}=\frac{55}{6}$.

Vậy ông An phải trả số tiền để làm cái cửa sắt là

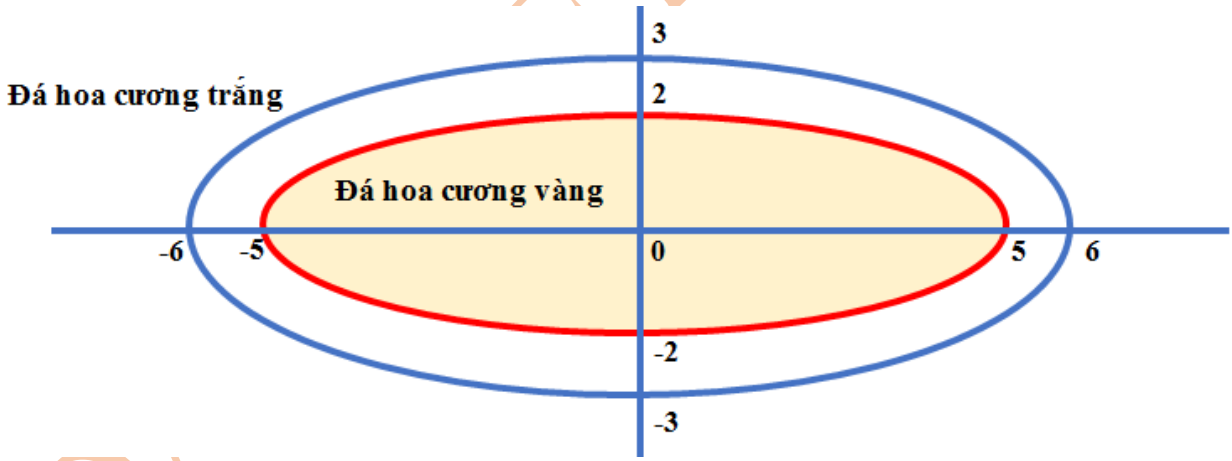
$S\times 700000=\frac{55}{6}\times 700000\approx 6.417.000$ (đồng).

**Câu 12:** **(GIỮA-HKII-2019-NGHĨA-HƯNG-NAM-ĐỊNH)** Một mặt bàn hình elip có chiều dài là 120cm, chiều rộng là 60cm. Anh Hải muốn gắn đá hoa cương cho mặt bàn theo hình (phần đá hoa cương màu trắng và phần đá hoa cương màu vàng), biết rằng phần đá hoa cương màu vàng cũng là elip có chiều dài 100 cm và chiều rộng là 40 cm. Biết rằng đá hoa cương màu trắng có giá $600.000 vnd/m^2$ và đá hoa cương màu vàng có giá $650.000 vnd/m^2$. Hỏi số tiền để gắn đá hoa cương theo cách trên gần với số tiền nào dưới đây?

**A.** 355.000 đồng. **B.** 339.000 đồng. **C.** 368.000 đồng. **D.** 353.000 đồng.

**Lời giải**

**Chọn A**



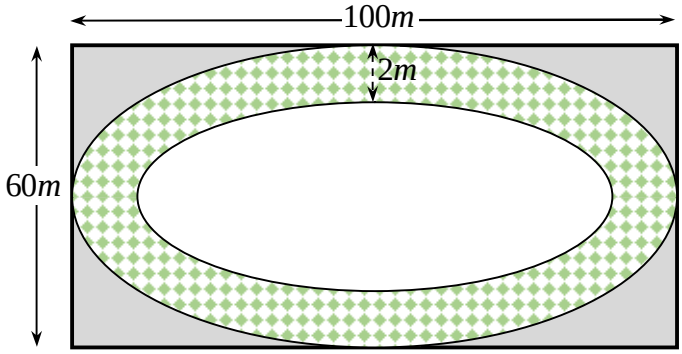

Ta có:

Diện tích phần đá hoa cương màu vàng là: $\pi.0,5.0,2=0,1\pi\left(m^2\right)$

Diện tích phần đá hoa cương màu vàng là: $\pi.0,6.0,3-\pi.0,5.0,2=0,08\pi\left(m^2\right)$

Số tiền phải trả là: $0,1\pi.650\,000+0,08\pi.600\,000\approx 355\,000$ đồng.

**Câu 13:** Một sân chơi cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài 100 và chiều rộng là $60m$ người ta làm một con đường nằm trong sân (như hình vẽ). Biết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường elip, Elip của đường viền ngoài có trục lớn và trục bé lần lượt song song với các cạnh hình chữ nhật và chiều rộng của mặt đường là $2m$. Kinh phí cho mỗi $m^2$ làm đường 600.000 đồng. Tính tổng số tiền làm con đường đó. (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).




**A.** 293904000. **B.** 283904000. **C.** 293804000. **D.** 283604000.

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét hệ trục tọa độ $Oxy$ đặt gốc tọa độ $O$ vào tâm của hình Elip.

Phương trình Elip của đường viền ngoài của con đường là $(E_1):\frac{x^2}{50^2}+\frac{y^2}{30^2}=1$. Phần đồ thị của $(E_1)$ nằm phía trên trục hoành có phương trình $y=30\sqrt{1-\frac{x^2}{50^2}}=f_1(x)$.

Phương trình Elip của đường viền trong của con đường là $(E_2):\frac{x^2}{48^2}+\frac{y^2}{28^2}=1$. Phần đồ thị của $(E_2)$ nằm phía trên trục hoành có phương trình $y=28\sqrt{1-\frac{x^2}{48^2}}=f_2(x)$.

Gọi $S_1$ là diện tích của $(E_1)$ và bằng hai lần diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị hàm số $y=f_1(x)$. Gọi $S_2$ là diện tích của $(E_2)$ và bằng hai lần diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị hàm số $y=f_2(x)$.

Gọi $S$ là diện tích con đường. Khi đó

$$S=S_1-S_2=2\int_{-50}^{50}30\sqrt{1-\frac{x^2}{50^2}}\mathrm{d}x-2\int_{-48}^{48}28\sqrt{1-\frac{x^2}{48^2}}\mathrm{d}x.$$

Tính tích phân $I=2\int_{-a}^{a}b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\mathrm{d}x,(a,b\in\mathbb{R}^+)$.

Đặt $x=a\sin t,\left(-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=-a\Rightarrow t=-\frac{\pi}{2};x=a\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Khi đó $I = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} b\sqrt{1-\sin^2 t}.a\cos t\,\mathrm{d}t = 2ab\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = ab\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t$

$= ab\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = ab\pi$ .

Do đó $S = S_1 - S_2 = 50.30\pi - 48.28\pi = 156\pi$ .

Vậy tổng số tiền làm con đường đó là $600000.S = 600000.156\pi \approx 294053000$ (đồng).

**Câu 14:** **(THPT-Ngô-Quyền-Hải-Phòng-Lần-2-2018-2019-Thi-24-3-2019)** Một thùng đựng dầu có thiết diện ngang (mặt trong của thùng) là một đường elip có độ dài trục lớn bằng $2\text{m}$, độ dài trục bé bằng $1\text{m}$, chiều dài (mặt trong của thùng) bằng $3{,}5\text{m}$. Thùng được đặt sao cho trục bé nằm theo phương thẳng đứng (như hình bên). Biết chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ điểm thấp nhất của đáy thùng đến mặt dầu) là $0{,}75\text{m}$. Tính thể tích $V$ của dầu có trong thùng (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

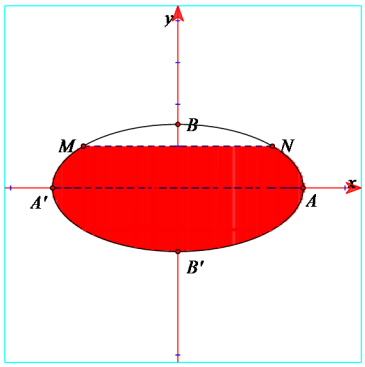



**A.** $V = 4,42\text{m}^3$. **B.** $V = 3,23\text{m}^3$. **C.** $V = 1,26\text{m}^3$. **D.** $V = 7,08\text{m}^3$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.




Độ dài trục lớn $2a = 2 \Leftrightarrow a = 1$.

Độ dài trục bé $2b = 1 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$.

Phương trình đường elip là: $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{1-x^2}{4} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$

Gọi $M$ , $N$ lần lượt là giao điểm của dầu với elip.

Gọi $S_1$ là diện tích của elip ta có $S_1 = \pi ab = \pi.1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\pi$ .

Gọi $S_2$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi elip và đường thẳng $MN$ .

Theo đề bài chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là 0,75m nên ta có phương trình của đường thẳng $MN$ là $y = \frac{1}{4}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của elip và đường thẳng MN là $\frac{1-x^2}{4} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow 4x^2 = 3$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Do đó

$$S_2 = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2}dx - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Tính $I = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2}dx$.

Đặt $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$ .

Đổi cận: Khi $x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ thì $t = -\frac{\pi}{3}$; Khi $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{3}$.

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

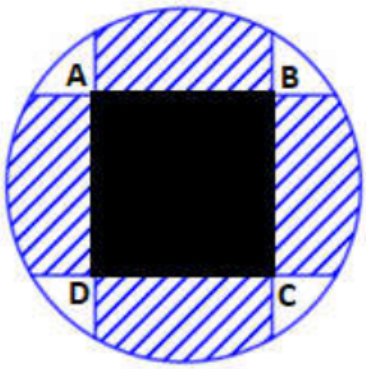
Vậy $S_2 = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$.

Diện tích giới hạn hình phẳng cần tìm $S = S_1 - S_2 = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8}$.

Thể tích dầu có trong thùng là $V = \int_0^{3,5} S dx = \int_0^{3,5} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right)dx = 4,42$

**Câu 15:** **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Bồn hoa của một trường X có dạng hình tròn bán kính bằng $8m$. Người ta chia bồn hoa thành các phần như hình vẽ dưới đây và có ý định trồng hoa như sau: Phần diện tích bên trong hình vuông $ABCD$ để trồng hoa (phần tô đen). Phần diện tích kéo dài từ 4 cạnh của hình vuông đến đường tròn dùng để trồng cỏ (phần gạch chéo). Ở 4 góc còn lại mỗi góc trồng một cây cọ. Biết $AB = 4m$, giá trồng hoa là 200.000 đ/m$^2$, giá trồng cỏ là 100.000 đ/m$^2$, mỗi cây cọ giá 150.000 đ. hỏi cần bao nhiêu tiền để thực hiện việc trang trí bồn hoa đó (làm tròn đến hàng nghìn).

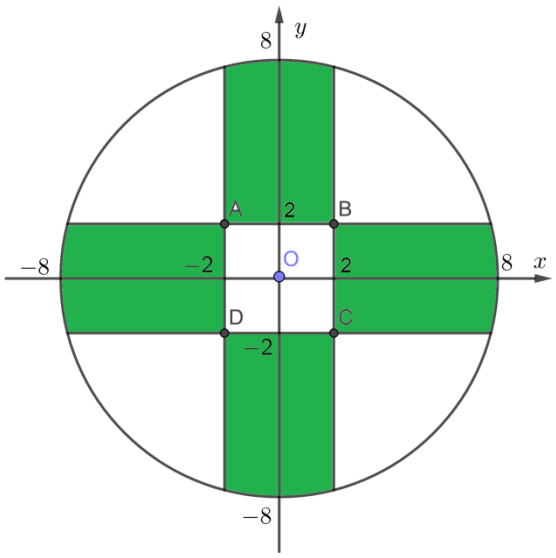
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG




**A.** 13.265.000 đồng. **B.** 12.218.000 đồng. **C.** 14.465.000 đồng. **D.** 14.865.000 đồng.

**Lời giải**

**Chọn A**




Chọn hệ trục tọa độ sao cho gốc tọa độ trùng với tâm hình tròn, suy ra phương trình đường tròn là: $x^2+y^2=64$.

+ Diện tích hình vuông $ABCD$ là: $S_{ABCD}=4\times 4=16\left(m^2\right)$.

$\Rightarrow$ Số tiền để trồng hoa là: $T_1=16\times 200.000=3.200.000$ (đồng).

+ Diện tích trồng cỏ là: $S=4\int\limits_{-2}^{2}\left(\sqrt{64-x^2}-2\right)\mathrm{d}x\approx 94,654\left(m^2\right)$.

$\Rightarrow$ Số tiền trồng cỏ là: $T_2=94,654\times 100.000=9.465.000$ (đồng).

+ Số tiền trồng 4 cây cọ là: $T_3=150.000\times 4=600.000$ (đồng).

Vậy tổng số tiền để thực hiện việc trang trí bồn hoa là:

$T=T_1+T_2+T_3=13.265.000$ (đồng).

+ Diện tích trồng cỏ là: $S=4\int\limits_{-2}^{2}\left(\sqrt{64-x^2}-2\right)\mathrm{d}x\approx 94,654\left(m^2\right)$.

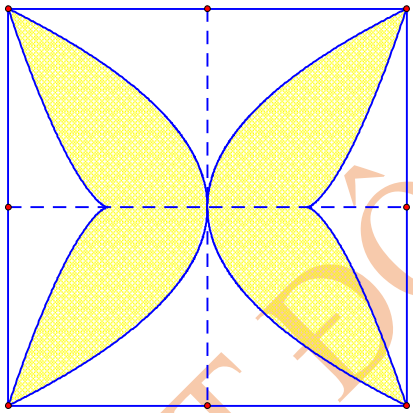
$\Rightarrow$ Số tiền trồng cỏ là: $T_2 = 94,654 \times 100.000 = 9.465.000$ (đồng).

+ Số tiền trồng 4 cây cọ là: $T_3 = 150.000 \times 4 = 600.000$ (đồng).

Vậy tổng số tiền để thực hiện việc trang trí bồn hoa là:

$T = T_1 + T_2 + T_3 = 13.265.000$ (đồng).

**Câu 16:** **(PHÂN TÍCH BL_PT ĐỀ ĐH VINHL3 -2019..)**Sàn của một viện bảo tàng mỹ thuật được lát bằng những viên gạch hình vuông cạnh $40\ (cm)$ như hình bên. Biết rằng người thiết kế đã sử dụng các đường cong có phương trình $4x^2 = y^4$ và $4(|x|-1)^3 = y^2$ để tạo hoa văn cho viên gạch. Diện tích phần được tô đậm gần nhất với giá trị nào dưới đây?

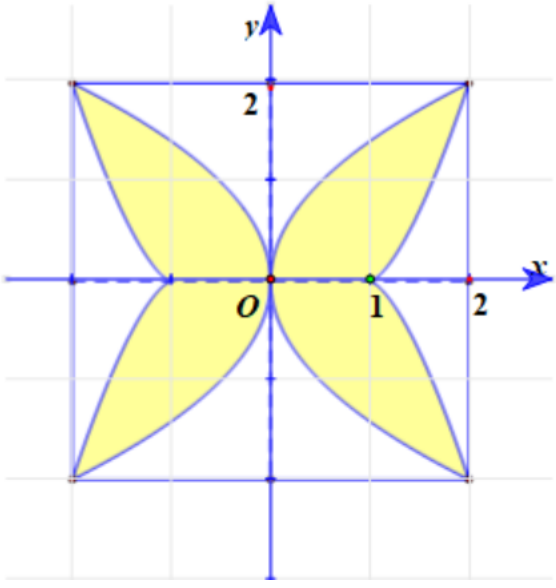


**A.** $506\left(cm^2\right)$. **B.** $747\ \left(cm^2\right)$. **C.** $507\ \left(cm^2\right)$. **D.** $746\ \left(cm^2\right)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có hệ trục tọa độ $Oxy$ như hình vẽ và đơn vị trong hình tính theo *dm*.




Xét khi $x \ge 0$ và $y \ge 0$ ta có $4x^2 = y^4 \Rightarrow y = \sqrt{2x}$, $4(|x|-1)^3 = y^2 \Rightarrow y = 2\sqrt{(x-1)^3}$.

Diện tích phần tô đậm là

$$S = 4\int_0^2 \sqrt{2x}\,dx - 4\int_1^2 2\sqrt{(x-1)^3}\,dx = \left(\frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3}\right)\Bigg|_0^2 - \frac{16}{5}\sqrt{(x-1)^5}\Bigg|_1^2 = \frac{32}{3} - \frac{16}{5} = \frac{112}{15}\ \left(dm^2\right)$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vậy $S \approx 746,67\ (cm^2)$

**Nhận xét:** Dựa vào tính đối xứng của hình, rút ra phương trình các đường cong trong góc phần tư thứ nhất. Từ đó áp dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng.

**Câu 17:** **(Triệu Thái Vĩnh Phúc Lần 3)** Mảnh vườn nhà ông An có dạng hình elip với bốn đỉnh $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$ như hình vẽ bên. Ông dùng 2 đường Parabol có đỉnh là tâm đối xứng của elip cắt elip tại 4 điểm $M, N, P, Q$ như hình vẽ sao cho tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MN = 4$ để chia vườn. Phần tô đậm dùng để trồng hoa và phần còn lại để trồng rau. Biết chi phí trồng hoa là $600.000$ đồng/$m^2$ và trồng rau là $50.000$ đồng/$m^2$. Hỏi số tiền phải chi gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8\,m$, $B_1B_2 = 4\,m$?

**A.** 4.899.000 đồng **B.** 5.675.000 đồng **C.** 3.526.000 đồng **D.** 7.120.000 đồng

**Lời giải**

**Chọn E.**

Diện tích của hình Elip có trục trục lớn 8 và trục bé 4: $S_{(E)} = 4.2.\pi = 8\pi$

Phương trình đường Elip: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

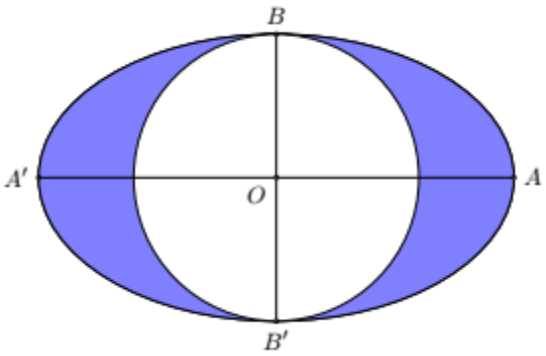
Ta có: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4\left(1 - \frac{x^2}{16}\right)}$

Diện tích trồng hoa: $S_{(H)} = 4\int_2^4 \sqrt{4\left(1 - \frac{x^2}{16}\right)}dx + 4\int_0^2 \sqrt{\frac{3x}{2}}dx$.

Diện tích trồng hoa: $S_{(R)} = S_{(E)} - S_{(H)}$.

Suy ra số tiền phải chi là: $T = 50000.S_{(R)} + 600000.S_{(H)} \approx 11.742.142$ đồng.

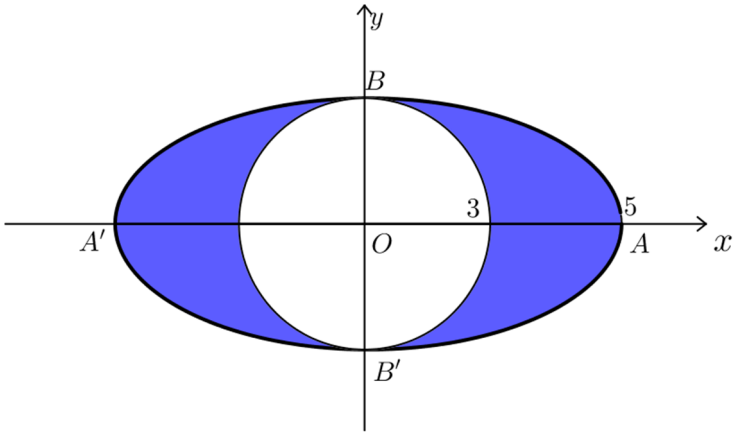
**Câu 18:** **(THPT-Yên-Mô-A-Ninh-Bình-2018-2019-Thi-tháng-4)** Trong mặt phẳng, cho đường elip $(E)$ có độ dài trục lớn là $AA' = 10$, độ dài trục nhỏ là $BB' = 6$, đường tròn tâm $O$ có đường kính là $BB'$ (như hình vẽ bên dưới). Tính thể tích $V$ của khối tròn xoay có được bằng cách cho miền hình hình phẳng giới hạn bởi đường elip và được tròn (được tô đậm trên hình vẽ) quay xung quanh trục $AA'$.




**A.** $V = 36\pi$. **B.** $V = 60\pi$. **C.** $V = 24\pi$. **D.** $V = \frac{20\pi}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Chọn hệ trục $Oxy$ như hình vẽ.

Giả sử phương trình chính tắc của elip có dạng $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases}AA'=10\\BB'=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=10\\2b=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\b=3\end{cases}\Rightarrow(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1\Rightarrow y=\pm\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$.

Đường tròn tâm $O$ bán kính $OB$ có phương trình $x^2+y^2=9\Rightarrow y=\pm\sqrt{9-x^2}$.

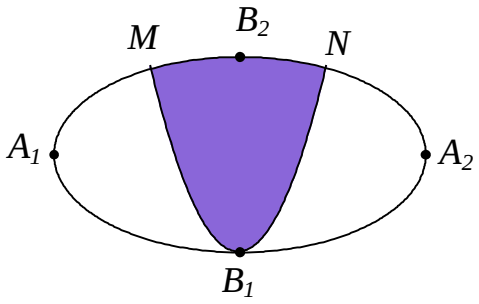
Gọi $V_1$ là thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$, $y=0$, $x=0, x=5$ quay xung quanh trục $Ox$.

Gọi $V_2$ là thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{9-x^2}$, $y=0$, $x=0, x=3$ quay xung quanh trục $Ox$.

Thể tích khối tròn xoay cần tìm bằng:

$$V=2(V_1-V_2)=2\left(\pi\int_0^5\frac{9}{25}(25-x^2)\,dx-\pi\int_0^3(9-x^2)\,dx\right)=24\pi.$$

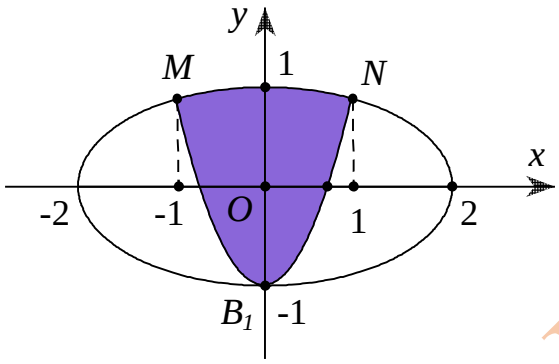
**Câu 19:** **(Chuyên Vinh Lần 2)** Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh $A_1, A_2, B_1, B_2$ như hình vẽ bên. Người ta chia elip bởi parabol có đỉnh $B_1$, trục đối xứng $B_1B_2$ và đi qua các điểm $M, N$. Sau đó sơn phần tô đậm với giá 200.000 đồng/$\text{m}^2$ và trang trí đèn led phần còn lại với giá 500.000 đồng/$\text{m}^2$. Hỏi kinh phí sử dụng gần nhất với giá trị nào dưới đây? Biết rằng $A_1A_2=4m, B_1B_2=2m, MN=2m$.



**A.** 2.341.000 đồng. **B.** 2.057.000 đồng. **C.** 2.760.000 đồng. **D.** 1.664.000 đồng.

**Lời giải**

**Chọn A**




Phương trình đường Elip là: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Diện tích hình Elip là $S_{(E)}=\pi a.b=2\pi\left(m^2\right)$

Tọa độ giao điểm $M,N$ là nghiệm hệ: $\begin{cases}x=\pm1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm1\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$.

Vậy $M\left(-1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\mathrm{N}\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Parabol $(P)$ đối xứng qua $Oy$ có dạng $y=ax^2+c\left(a\neq0\right)$.

Vì $B_1\left(0;-1\right),N\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\in(P)\Rightarrow\begin{cases}c=-1\\ a=\frac{\sqrt{3}}{2}+1\end{cases}\Rightarrow(P):y=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x^2-1$.

Diện tích phần tô đậm là: $S_1=2\int_0^1\left[\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x^2+1\right]dx$

• Tính $I_1=\int_0^1\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx$. Đặt $\frac{x}{2}=\sin t\Rightarrow\frac{dx}{2}=\cos t dx.$ Đổi cận $\begin{cases}x=0\to t=0\\ x=1\to t=\frac{\pi}{6}\end{cases}$.

Suy ra $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1-\sin^2t}.2\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{6}}2\cos^2tdt=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1+\cos2t\right)dt=\left(t+\frac{1}{2}\sin2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}$.

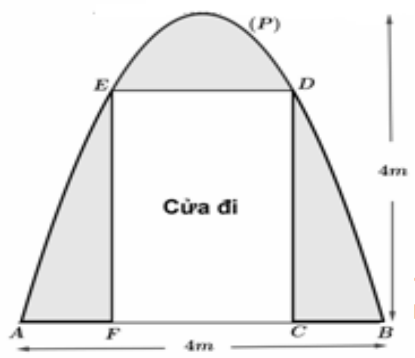
• Tính $I_2=\int_0^1\left[-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x^2+1\right]dx=\left[-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)\frac{x^3}{3}+x\right]\Big|_0^1=-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{2}{3}$.

Vậy $S_1=2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{4}{3}\ \mathrm{m}^2$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Tổng số tiền sử dụng là: $S_1.200000+\left(S_{(E)}-S_1\right).500000\approx 2.341.000$ đồng

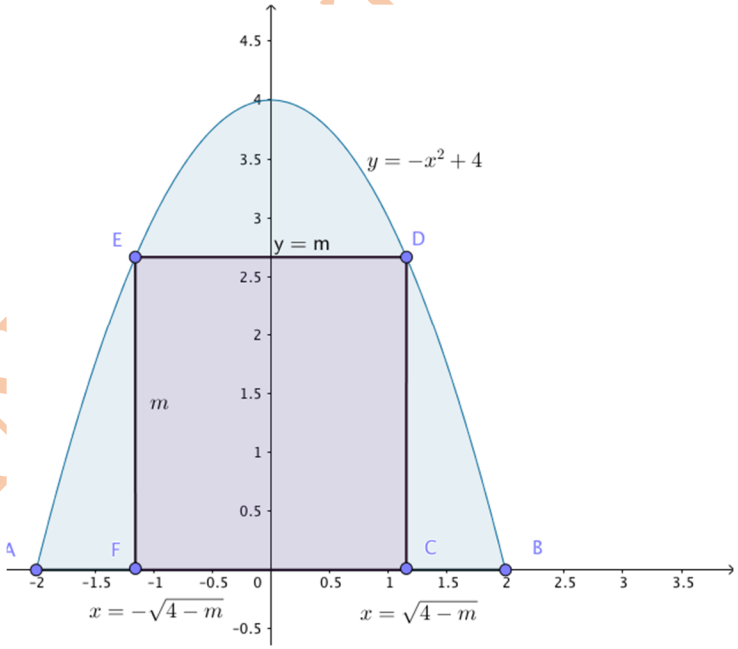
**Câu 20:** **(SỞ QUẢNG BÌNH NĂM 2019)** Một chiếc cổng có hình dạng là một Parabol $(P)$ có kích thước như hình vẽ, biết chiều cao cổng bằng $4\ m$, $AB=4\ m$. Người ta thiết kế cửa đi là một hình chữ nhật $CDEF$ (với $C,F\in AB$; $D,E\in(P)$), phần còn lại (*phần tô đậm*) dùng để trang trí. Biết chi phí để trang trí phần tô đậm là 1.000.000 đồng/$m^2$. Hỏi số tiền ít nhất dùng để trang trí phần tô đậm gần với số tiền nào dưới đây?




**A.** 4.450.000 đồng. **B.** 4.605.000 đồng. **C.** 4.505.000 đồng. **D.** 4.509.000 đồng.

**Lời giải**

**Chọn D**




* Xét $(P): y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ có toạ độ đỉnh $(0;4)$ và qua điểm có toạ độ $(2;0)$.

Ta có hoành độ đỉnh: $\dfrac{-b}{2a}=0\Rightarrow b=0$; $(P)$ qua điểm $(0;4)\Rightarrow c=4$ và $(P)$ qua điểm $(2;0)$ $\Rightarrow a=-1$

Suy ra: $(P): y=-x^2+4$

* Xét đường thẳng qua $E,D$: $y=m$ (với $0<m<4$). Khi đó $E\left(-\sqrt{4-m};m\right)$ và $D\left(\sqrt{4-m};m\right)$ là giao điểm của $(P)$ và đường thẳng $y=m$. Suy ra: $ED=2\sqrt{4-m}$, $EF=m$.

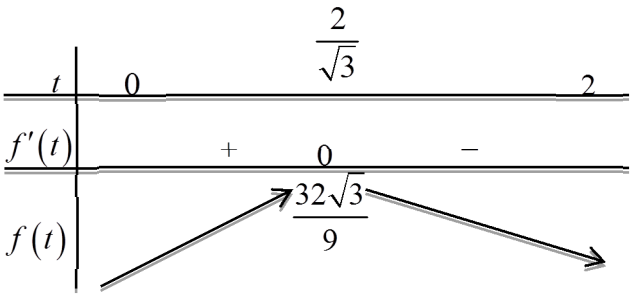
* Yêu cầu của bài toán đạt được khi diện tích hình chữ nhật $CDEF$ phải lớn nhất.

Ta có: $S_{CDEF} = ED.EF = 2\sqrt{4-m}.m$

Đặt $t = \sqrt{4-m} \Rightarrow t^2 = 4-m \Rightarrow m = 4-t^2$ (với $0 < t < 2$)

Khi đó: $S_{CDEF} = f(t) = 2t\left(4-t^2\right) = -2t^3 + 8t$

$f'(t) = -6t^2 + 8 = 0 \Rightarrow t = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$




Suy ra: $MaxS_{CDEF} = \dfrac{32\sqrt{3}}{9}$ khi $t = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow m = \dfrac{8}{3}$

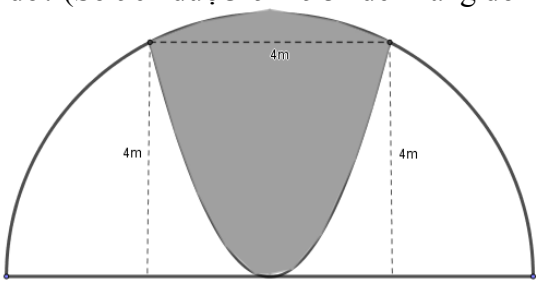
* Mặt khác diện tích của chiếc cổng: $S = \int_{-2}^{2}\left|-x^2+4\right| = \dfrac{32}{3}$ $(m^2)$

Suy ra diện tích nhỏ nhất của phần dùng để trang trí là: $S - MaxS_{CDEF} = \dfrac{32}{3} - \dfrac{32\sqrt{3}}{9} \approx 4,5083$ ($m^2$)

* Vậy số tiền ít nhất dùng để trang trí phần tô đậm: $4,5083 \times 1.000.000 = 4.508.300$ (đồng).

(***Lưu ý***: Có thể dùng MTBT để tìm GTLN của $S_{CDEF}$ trên khoảng $0 < m < 4$).

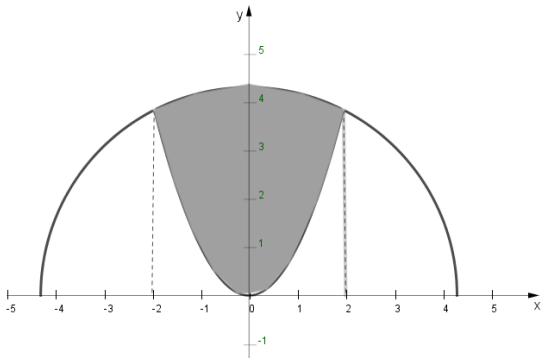
**Câu 21:** **(Sở Thanh Hóa 2019)** Một khuôn viên dạng nửa hình tròn, trên đó người ta thiết kế phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm và có trục đối xứng vuông góc với đường kính của nửa hình tròn, hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa hình tròn (phần tô đậm) và cách nhau một khoảng 4 (m). Phần còn lại của khuôn viên (phần không tô đậm) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước như hình vẽ, chi phí để trồng hoa và cỏ Nhật Bản tương ứng là 150.000 đồng/m2 và 100.000 đồng/m2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng hoa và cỏ Nhật Bản trong khuôn viên đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)




**A.** 3.926.990 (đồng). **B.** 4.115.408 (đồng) **C.** 1.948.000 (đồng). **D.** 3.738.574 (đồng).

**Lời giải**

**Chọn D**



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Ta có Parabol có đỉnh là gốc tọa độ và đi qua điểm $(2;4)$ nên có phương trình $y = x^2$.

Đường tròn tâm là gốc tọa độ đi qua điểm có tọa độ $(2;4)$ nên có bán kính $R = 2\sqrt{5}$ có phương trình $x^2 + y^2 = 20$.

Gọi S là diện tích phần tô đậm. Ta có $S = \int_{-2}^{2} (\sqrt{20 - x^2} - x^2)dx \approx 11,9396$

Diện tích nửa hình tròn là $10\pi$ nên diện tích phần còn lại là $(10\pi$ - S)

Vậy số tiền cần tìm là: $S.150.000 + (10\pi - S).100.000 \approx 3.738.574$ (đồng).

**Câu 22:** **(Chuyên Phan Bội Châu Lần2)** Người ta xây một sân khấu với mặt sân có dạng hợp của hai hình tròn giao nhau. Bán kính của hai của hai hình tròn là 20 mét và 15 mét. Khoảng cách giữa hai tâm của hai hình tròn là 30 mét. Chi phí làm mỗi mét vuông phân giao nhau của hai hình tròn là 300 ngàn đồng và chi phí làm mỗi mét vuông phần còn lại là 100 ngàn đồng. Hỏi số tiền làm mặt sân của sân khấu gần với số nào trong các số dưới đây?

**A.** 202 triệu đồng. **B.** 208 triệu đồng. **C.** 218 triệu đồng. **D.** 200 triệu đồng.

**Lời giải.**

**Chọn A**

Gọi $O, I$ lần lượt là tâm của các đường tròn bán kính bằng 20 mét và bán kính bằng 15 mét. Gắn hệ trục $Oxy$ như hình vẽ, vì $OI = 30$ mét nên $I(0; 30)$. Phương trình hai đường tròn lần lượt là $x^2 + y^2 = 20^2$ và $x^2 + (y - 30)^2 = 15^2$. Gọi $A, B$ là các giao điểm của hai đường tròn đó.

Tọa độ $A, B$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20^2 \\ x^2 + (y - 30)^2 = 15^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{5\sqrt{455}}{12} \\ y = \dfrac{215}{12} \end{cases}$.

Tổng diện tích hai đường tròn là $\pi(20^2 + 15^2) = 625\pi$ (mét vuông).

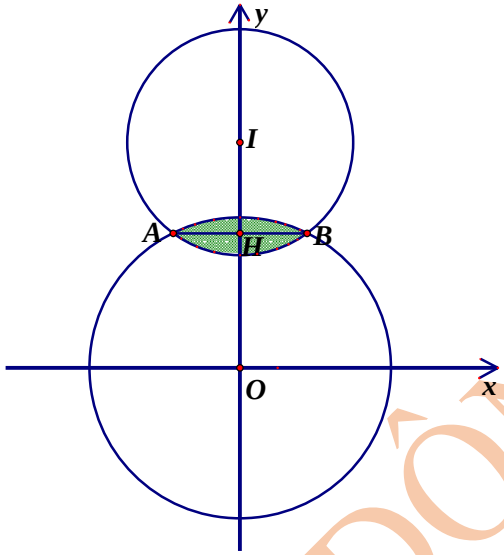
Phần giao của hai hình tròn chính là phần hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = 30 - \sqrt{15^2 - x^2}$ và $y = \sqrt{20^2 - x^2}$. Do đó diện tích phần giao giữa hai hình tròn là

$$S = \int_{-\frac{5\sqrt{455}}{12}}^{\frac{5\sqrt{455}}{12}} \left(\sqrt{20^2 - x^2} + \sqrt{15^2 - x^2} - 30\right)dx \approx 60,2546 \text{ (mét vuông).}$$

Số tiền để làm phần giao giữa hai hình tròn là $300.000 \text{x} 60{,}2546 \approx 18.076.386$ (đồng).

Số tiền để làm phần còn lại là $100.000 \text{x} \left(625\pi - 2 \text{x} 60{,}2546\right) = 184.299.220$ (đồng).

Vậy tổng số tiền làm sân khấu là $184.299.220 + 18.076.386 \approx 202.375.606$ (đồng).

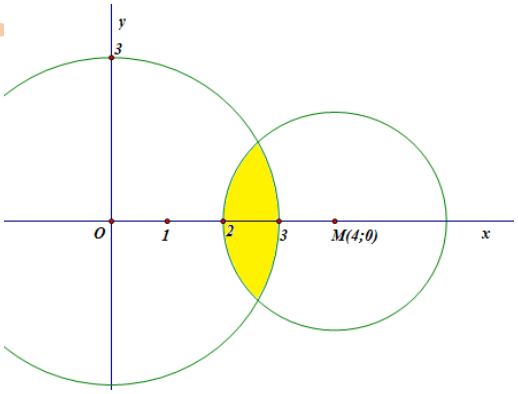



**Câu 23:** Trên cánh đồng cỏ có 2 con bò được cột vào 2 cây cọc khác nhau. Biết khoảng cách giữa 2 cọc là 4 mét còn 2 sợi dây cột 2 con bò dài 3 mét và 2 mét. Tính phần diện tích mặt cỏ lớn nhất mà 2 con bò có thể ăn chung (lấy giá trị gần đúng nhất).

**A.** $1{,}034\,\text{m}^2$ **B.** $1{,}574\,\text{m}^2$ **C.** $1{,}989\,\text{m}^2$ **D.** $2{,}824\,\text{m}^2$

**Lời giải**

Diện tích mặt cỏ ăn chung sẽ lớn nhất khi 2 sợi dây được kéo căng và là phần giao của 2 đường tròn.




Xét hệ trục tọa độ như hình vẽ, gọi $O, M$ là vị trí của cọc. Bài toán đưa về tìm diện tích phần được tô màu.

Ta có phương trình đường tròn tâm $(O): x^2 + y^2 = 3^2$ và phương trình đường tròn tâm $(M): (x-4)^2 + y^2 = 2^2$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Phương trình các đường cong của đường tròn nằm phía trên trục $Ox$ là: $y=\sqrt{9-x^2}$ và $y=\sqrt{4-(x-4)^2}$

Phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{4-(x-4)^2}=\sqrt{9-x^2}\Leftrightarrow 4+8x-16=9\Leftrightarrow x=\dfrac{21}{8}$

Diện tích phần được tô màu là: $S=2\left[\int\limits_{2}^{\frac{21}{8}}\sqrt{4-(x-4)^2}dx+\int\limits_{\frac{21}{8}}^{3}\sqrt{9-x^2}dx\right]\approx 1,989$. Ta có thể giải tích phân này bằng phép thế lượng giác, tuy nhiên để tiết kiệm thời gian nên bấm máy.

**Chọn C**

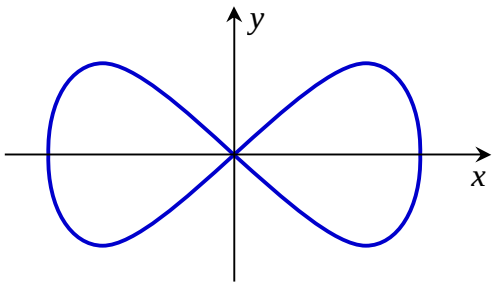
Vậy phương trình của elip là $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{25}=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{5}{8}\sqrt{64-y^2}\ \ (E_1)\\ y=\dfrac{5}{8}\sqrt{64-y^2}\ \ (E_1)\end{array}\right.$

Khi đó diện tích dải vườn được giới hạn bởi các đường $(E_1);(E_2);\ x=-4;\ x=4$ và diện tích của dải vườn là $S=2\int\limits_{-4}^{4}\dfrac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{5}{2}\int\limits_{0}^{4}\sqrt{64-x^2}\,\mathrm{d}x$

Tính tích phân này bằng phép đổi biến $x=8\sin t$, ta được $S=80\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Khi đó số tiền là $T=80\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right).100000=7652891,82\simeq 7.653.000$.

**Câu 24:** Trong Công viên Toán học có những mảnh đất mang hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng một loài hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học. Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemniscate có phương trình trong hệ tọa độ $Oxy$ là $16y^2=x^2\left(25-x^2\right)$ như hình vẽ bên.




Tính diện tích $S$ của mảnh đất Bernoulli biết rằng mỗi đơn vị trong hệ tọa độ $Oxy$ tương ứng với chiều dài 1 mét.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**A.** $S=\frac{125}{6}\left(m^2\right)$ **B.** $S=\frac{125}{4}\left(m^2\right)$ **C.** $S=\frac{250}{3}\left(m^2\right)$ **D.** $S=\frac{125}{3}\left(m^2\right)$

**Lời giải**

**Chọn D**

Vì tính đối xứng trụ nên diện tích của mảnh đất tương ứng với 4 lần diện tích của mảnh đất thuộc góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ $Oxy$.

Từ giả thuyết bài toán, ta có $y=\pm\frac{1}{4}x\sqrt{5-x^2}$.

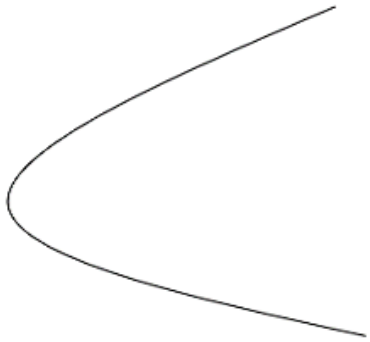
Góc phần tư thứ nhất $y=\frac{1}{4}x\sqrt{25-x^2};x\in[0;5]$

Nên $S_{(I)}=\frac{1}{4}\int_0^5 x\sqrt{25-x^2}\mathrm{d}x=\frac{125}{12}\Rightarrow S=\frac{125}{3}(m^3)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

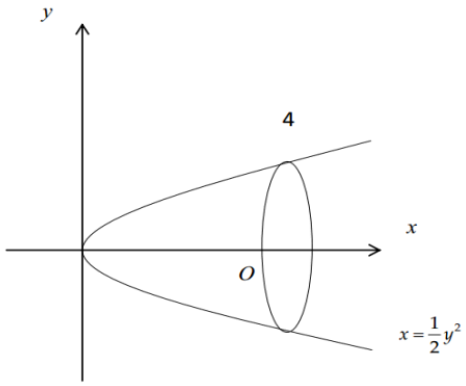
# BÀI TOÁN THỰC TẾ VÀ ỨNG DỤNG THỂ TÍCH

**Câu 1:** Một cái chuông có dạng như hình vẽ. Giả sử khi cắt chuông bởi mặt phẳng qua trục của chuông, được thiết diện có đường viền là một phần parabol ( hình vẽ ). Biết chuông cao 4m, và bán kính của miệng chuông là $2\sqrt{2}$ . Tính thể tích chuông?



**A.** $6\pi$ **B.** $12\pi$ **C.** $2\pi^3$ **D.** $16\pi$

**Lời giải**




Xét hệ trục như hình vẽ, dễ thấy parabol đi qua ba điểm $(0;0),\left(4;2\sqrt{2}\right),\left(4;-2\sqrt{2}\right)$ nên có phương trình $x=\dfrac{y^2}{2}$. Thể tích của chuông là thể tích của khối tròn xoay tạo bởi hình phẳng $y=\sqrt{2}x, x=0, x=4$ quay quanh trục Ox. Do đó

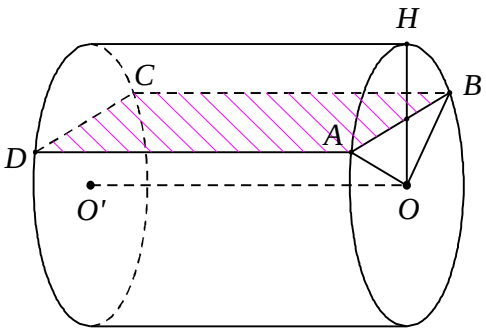
Ta có $V=\pi\int_0^4 2xdx=\left(\pi x^2\right)\Big|_0^4=16\pi$

**Câu 2:** Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5m, có bán kính đáy 1m, với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với 0,5m của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn (theo đơn vị $m^3$)

**A.** $11{,}781\,m^3$. **B.** $12{,}637\,m^3$. **C.** $114{,}923\ m^3$. **D.** $8{,}307\ m^3$.

**Lời giải**

**Chọn B**




- Thể tích của bồn (hình trụ) đựng dầu là: $V=\pi r^2 h=\pi.1^2.5=5\pi\ (m^3)$
- Thể tích phần đã rút dầu ra (*phần trên mặt (ABCD)*) là: $V_1=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right).5\approx 3,070\ (m^3)$
- Vậy thể tích cần tìm là: $V_2=V-V_1=5\pi-3,07\approx 12,637\ (m^3)$.

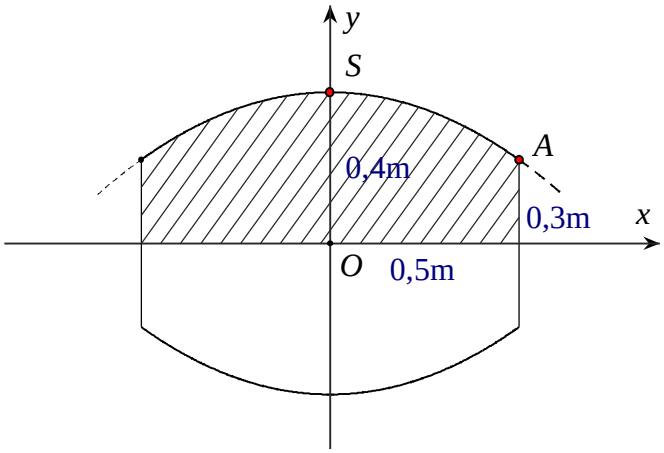
**Câu 3:** Một thùng rượu có bán kính các đáy là $30cm$, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có bán kính là $40cm$, chiều cao thùng rượu là $1m$ (hình vẽ). Biết rằng mặt phẳng chứa trục và cắt mặt xung quanh thùng rượu là các đường parabol, hỏi thể tích của thùng rượu ( đơn vị lít) là bao nhiêu?



**A.** $425,2\ lit.$ **B.** $425162\ lit.$ **C.** $212581\ lit.$ **D.** $212,6\ lit.$

**Lời giải**

**Chọn A**



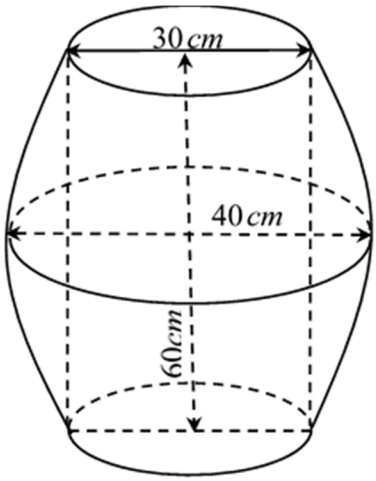

• Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c$ là parabol đi qua điểm $A(0,5;0,3)$ và có đỉnh $S(0;0,4)$ (hình vẽ). Khi đó, thể tích thùng rượu bằng thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi $(P)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = \pm 0,5$ quay quanh trục $Ox$.

• Dễ dàng tìm được $(P): y = -\frac{2}{5}x^2 + 0,4$

• Thể tích thùng rượu là:

$$V = \pi \int_{-0,5}^{0,5} \left(-\frac{2}{5}x^2 + 0,4\right)^2 dx = 2\pi \int_{0}^{0,5} \left(-\frac{2}{5}x^2 + 0,4\right)^2 dx = \frac{203\pi}{1500} \approx 425,5 \text{ (l)}$$

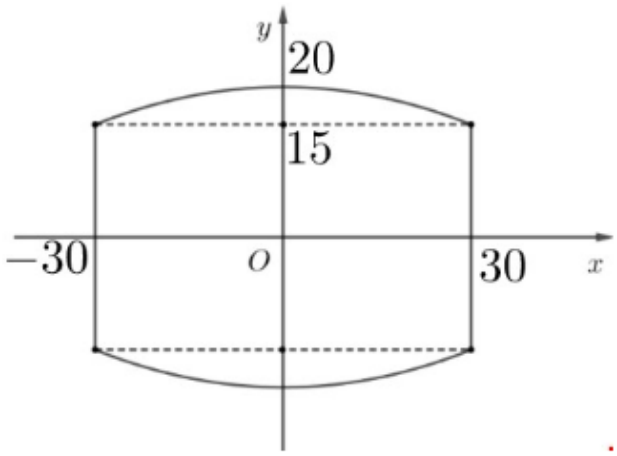
**Câu 4:** **(Đặng Thành Nam Đề 17)** Một thùng đựng bia hơi (có dạng khối tròn xoay như hình vẽ) có đường kính đáy là $30\,\text{cm}$, đường kính lớn nhất của thân thùng là $60\,\text{cm}$, các cạnh bên hông của thùng có hình dạng của một parabol. Thể tích của thùng bia hơi gần nhất với kết quả nào dưới đây? (giả sử độ dày của thùng bia không đáng kể)




**A.** 70 (lít). **B.** 62 (lít). **C.** 60 (lít). **D.** 64 (lít).

**Lời giải**

**Chọn D**




Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.

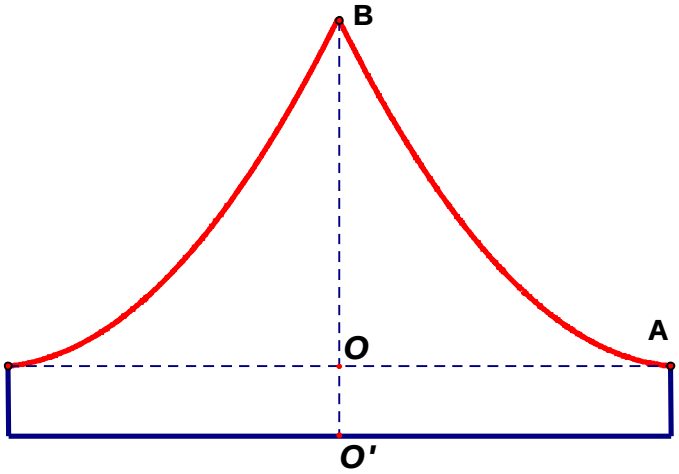
Ta có phương trình parabol phía trên trục hoành đi qua các điểm $(-30;15);(30;15);(0;20)$ là:

$y=-\frac{x^2}{180}+20.$

Thể tích thùng bằng thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=-\frac{x^2}{180}+20; y=0; x=-30; x=30.$

Vì vậy $V=\pi\int\limits_{-30}^{30}\left(-\frac{x^2}{180}+20\right)^2 \mathrm{d}x=20300\pi\,(\mathrm{cm}^3)\approx 63{,}8\,(\text{lít}).$

**Câu 5:** **(ĐH Vinh Lần 1)** Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho Ông già Noel có hình dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên. Biết rằng $OO'=5\text{cm}, OA=10\text{cm}, OB=20\text{cm}$, đường cong $AB$ là một phần của một parabol có đỉnh là điểm $A$. Thể tích của chiếc mũ bằng




**A.** $\frac{2750\pi}{3}\left(\mathrm{cm}^3\right).$ **B.** $\frac{2500\pi}{3}\left(\mathrm{cm}^3\right).$ **C.** $\frac{2050\pi}{3}\left(\mathrm{cm}^3\right).$ **D.** $\frac{2250\pi}{3}\left(\mathrm{cm}^3\right).$

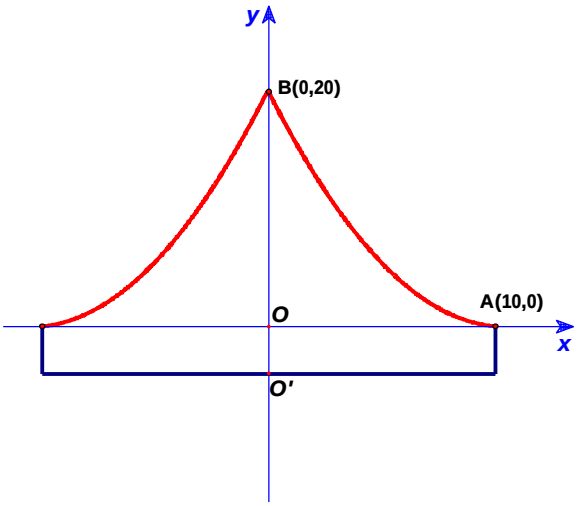
**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi $V$ là thể tích của nón, $V_1$ là thể tích khối trụ có chiều cao $OO'$, bán kính đáy $OA$, nên $V_1 = 5.10^2.\pi = 500\pi$.

Gọi $V_2$ là thể tích phần còn lại của nón.

**Cách 1**: chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.




Khi đó, $V_2$ là thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi nhánh parabol $AB$ và hai trục tọa độ quanh trục $Oy$.

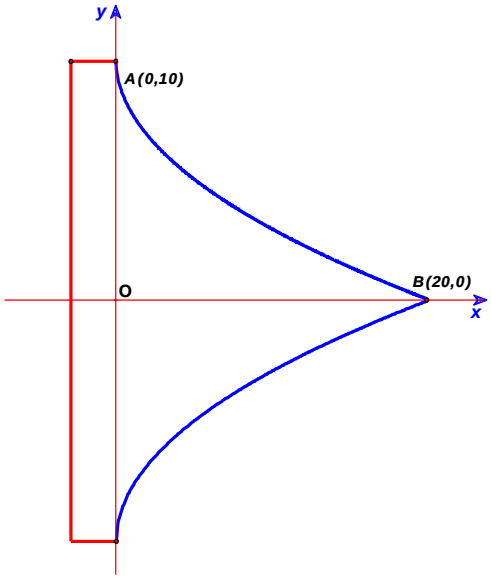
Phương trình parabol (P) chứa nhánh $AB$ có dạng $y = a(x-10)^2$.

Vì (P) đi qua điểm $B(0;20)$ nên $a = \frac{1}{5}$; do đó (P): $y = \frac{1}{5}(x-10)^2$.

Suy ra $x = -\sqrt{5y}+10$ ( do $x<10$ ). Vậy, $V_2 = \pi\int_0^{20}\left(-\sqrt{5y}+10\right)^2 dy = \frac{1000\pi}{3}\ \left(\text{cm}^3\right)$

Đáp số: $V = V_1 + V_2 = \frac{2500\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$.

**Cách 2**: chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.




Khi đó, $V_2$ là thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi nhánh parabol $AB$ và hai trục tọa độ quanh trục $Ox$.

Phương trình parabol (P) chứa nhánh $AB$ có dạng $y = a\sqrt{x} + 10$.

Vì (P) đi qua điểm $B(20;0)$ nên $a = -\sqrt{5}$; do đó (P): $y = -\sqrt{5x} + 10$.

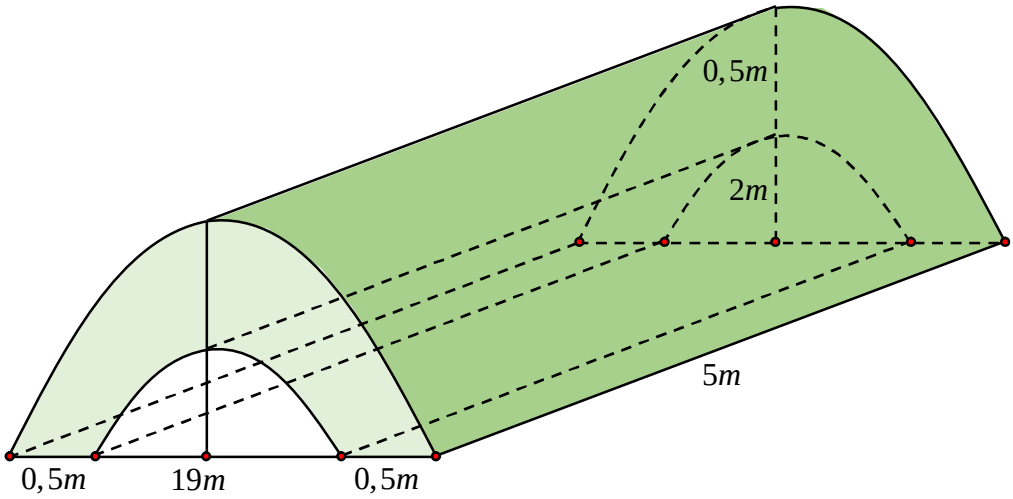
Vậy $V_2 = \pi \int_0^{20} \left(-\sqrt{5x} + 10\right)^2 dx = \dfrac{1000\pi}{3} \left(\text{cm}^3\right)$.

Đáp số: $V = V_1 + V_2 = \dfrac{2500\pi}{3} \left(\text{cm}^3\right)$.

**Dạng toán:** Tính thể tích khối tròn xoay.

**Phương pháp:** dùng ứng dụng của tích phân để tính khối tròn xoay, có thể dùng trực tiếp các công thức tính thể tích chỏm cầu, chảo parabol, hình nêm, phiến trụ, nón cụt…

**Câu 6:** Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã X có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol).

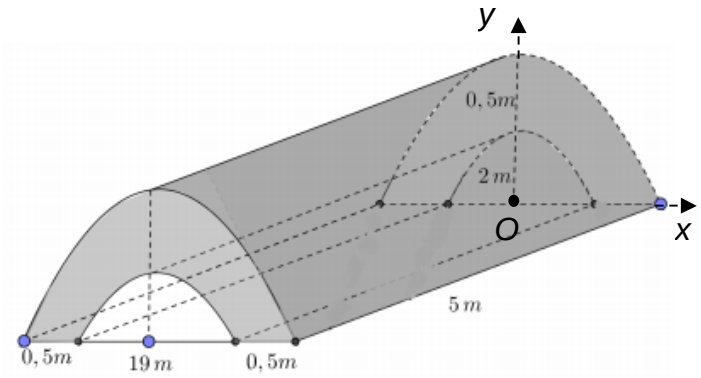



**A.** $19m^3$. **B.** $21m^3$. **C.** $18m^3$.. **D.** $40m^3$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Chọn hệ trục $Oxy$ như hình vẽ.




Gọi $(P_1): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2};0\right), B(0;2)$

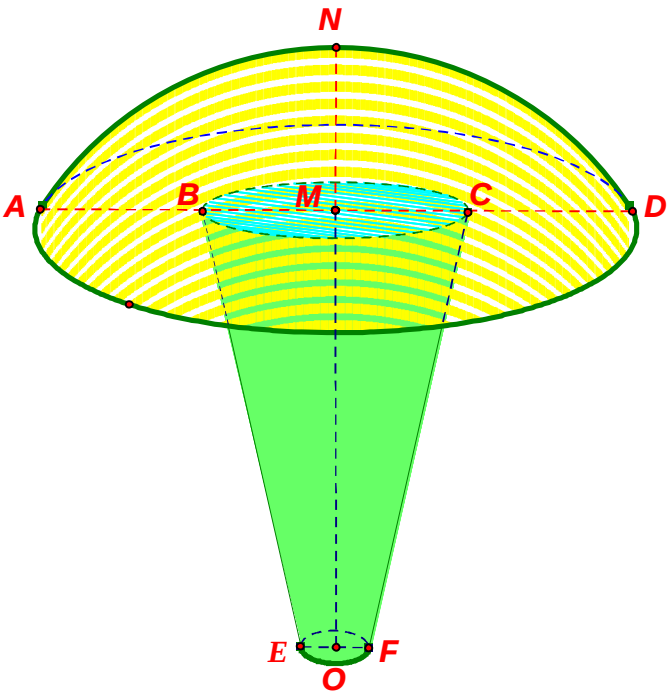
Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a.\left(\frac{19}{2}\right)^2 + 2 \\ 2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{8}{361} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2$

Gọi $(P_2): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $C(10;0), D\left(0;\frac{5}{2}\right)$

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a.(10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{40} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}$

Ta có thể tích của bê tông là: $V = 5.2\left[\int_0^{10}\left(-\frac{1}{40}x^2+\frac{5}{2}\right)dx-\int_0^{\frac{19}{2}}\left(-\frac{8}{361}x^2+2\right)dx\right]=40m^3$

**Câu 7:** **(ĐH Vinh Lần 1)** Cây dù ở khu vui chơi "công viên nước" của trẻ em có phần trên là một chỏm cầu, phần thân là một khối nón cụt như hình vẽ. Biết $ON = OD = 2m$; $MN = 40cm$; $BC = 40cm$; $EF = 20cm$. Tính thể tích của cây dù




**A.** $336000\pi\left(cm^3\right)\ \frac{2750\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right).$

**B.** $\frac{896000\pi}{3}\left(cm^3\right).$

**C.** $112000\pi\left(cm^3\right)\ \frac{2050\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right).$

**D.** $896000\pi\left(cm^3\right)\ \frac{2250\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right).$

**Lời giải**

**Chọn A**

Thể tích phần trên của cây dù là thể tích của khối chỏm cầu:

$$V_1=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)=\pi.MN^2.\left(ON-\frac{MN}{3}\right)=\pi.40^2\left(200-\frac{40}{3}\right)=\frac{896000}{3}\pi\left(cm^3\right).$$

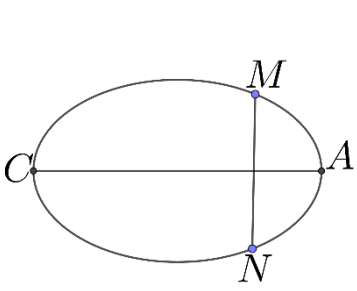
Thể tích phần thân của cây dù là thể tích của khối nón cụt:

$$V_2=\frac{1}{3}\pi.h.\left(R_1^2+R_2^2+R_1.R_2\right)=\frac{1}{3}\pi.OM.\left(MB^2+OE^2+MB.OE\right)=\frac{1}{3}\pi.160.\left(400+100+200\right)$$

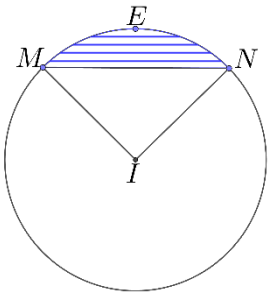
$$=\frac{112000}{3}\pi\left(cm^3\right).$$

Vậy thể tích của cây dù: $V = V_1 + V_2 = \frac{896000}{3}\pi + \frac{112000}{3}\pi = 336000\pi\left(cm^3\right)$.

**Câu 8:** **(THPT NINH BÌNH – BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019)** Sân vận động Sports Hub (Singapore) là nơi diễn ra lễ khai mạc đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức ở Singapore năm 2015. Nền sân là một Elip $(E)$ có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$. Nếu cắt sân vận động theo mặt phẳng vuông góc với trục lớn của $(E)$ và cắt $(E)$ tại $M$ và $N$ (hình a) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm $I$ ( phần tô đậm trong hình b) với $MN$ là dây cung và $\widehat{MIN} = 90^0$. Để lắp máy điều hòa không khí cho sân vận động thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và vật liệu làm mái che không đáng kể. Hỏi thể tích đó xấp xỉ bao nhiêu?




**Hình a**



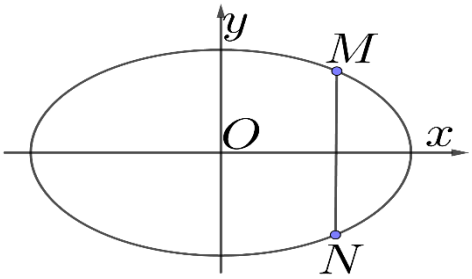

**Hình b**

**A.** $57793m^3$. **B.** $115586m^3$. **C.** $32162m^3$. **D.** $101793m^3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sau




Phương trình chính tắc Elip $(E)$ là: $\frac{x^2}{45^2} + \frac{y^2}{75^2} = 1$. Từ đó, suy ra

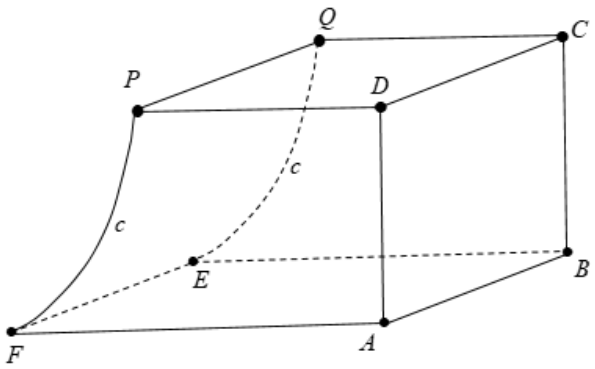
$$y^2 = \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right).45^2 \Rightarrow MN = 2\sqrt{45^2 - \frac{45^2}{75^2}x^2}.$$

Diện tích thiết diện là:

$$S(x) = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{1}{2}R^2 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)R^2 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{MN}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\left(45^2 - \frac{45^2}{75^2}x^2\right)$$

Thể tích cần tính là: $V=\int\limits_{-75}^{75}S(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-75}^{75}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(45^2-\frac{45^2}{75^2}x^2\right)\mathrm{d}x\approx 115586m^3$.

**Câu 9:** **(Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2)** Một chi tiết máy được thiết kế như hình vẽ bên.

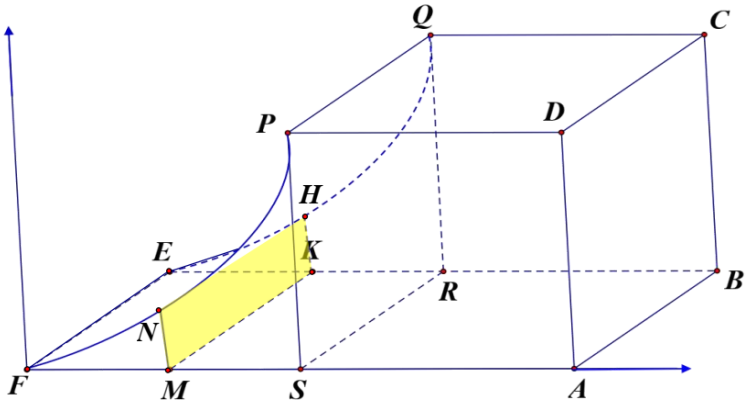



Các tứ giác $ABCD, CDPQ$ là các hình vuông cạnh $2,5cm$. Tứ giác $ABEF$ là hình chữ nhật có $BE=3,5cm$. Mặt bên $PQEF$ được mài nhẵn theo đường parabol $(P)$ có đỉnh parabol nằm trên cạnh $EF$. Thể tích của chi tiết máy bằng

**A.** $\frac{395}{24}cm^3$. **B.** $\frac{50}{3}cm^3$. **C.** $\frac{125}{8}cm^3$. **D.** $\frac{425}{24}cm^3$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Gọi hình chiếu của $P, Q$ trên $AF$ và $BE$ là $R$ và $S$. Vật thể được chia thành hình lập phương $ABCD.PQRS$ có cạnh $2,5cm$, thể tích $V_1=\frac{125}{8}cm^3$ và phần còn lại có thể tích $V_2$. Khi đó thể tích vật thể $V=V_1+V_2=\frac{125}{8}+V_2$.

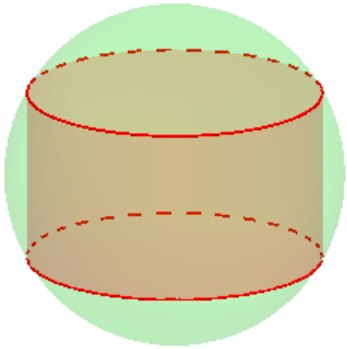
Đặt hệ trục $Oxyz$ sao cho $O$ trùng với $F$, $Ox$ trùng với $FA$, $Oy$ trùng với tia $Fy$ song song với $AD$. Khi đó Parabol $(P)$ có phương trình dạng $y=ax^2$, đi qua điểm $P\left(1;\frac{5}{2}\right)$ do đó $a=\frac{5}{2}\Rightarrow y=\frac{5}{2}x^2$.

Cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với $Ox$ và đi qua điểm $M(x;0;0), 0\le x\le 1$ ta được thiết diện là hình chữ nhật $MNHK$ có cạnh là $MN=\frac{5}{2}x^2$ và $MK=\frac{5}{2}$ do đó diện tích $S(x)=\frac{25}{4}x^2$

Áp dụng công thức thể tích vật thể ta có $V_2=\int_0^1 \frac{25}{4}x^2dx=\frac{25}{12}$

Từ đó $V=\frac{125}{8}+\frac{25}{12}=\frac{425}{24}cm^3$

**Câu 10:** Một khối cầu có bán kính là $5(dm)$, người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng $3(dm)$ để làm một chiếc lu đựng nước (như hình vẽ). Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.



**A.** $\frac{100}{3}\pi\left(dm^3\right)$ **B.** $\frac{43}{3}\pi\left(dm^3\right)$ **C.** $41\pi\left(dm^3\right)$ **D.** $132\pi\left(dm^3\right)$

**Lời giải**

**Chọn D**

**Cách 1:** Trên hệ trục tọa độ $Oxy$, xét đường tròn $(C):(x-5)^2+y^2=25$. Ta thấy nếu cho nửa trên trục $Ox$ của $(C)$ quay quanh trục $Ox$ ta được mặt cầu bán kính bằng 5. Nếu cho hình phẳng $(H)$ giới hạn bởi nửa trên trục $Ox$ của $(C)$, trục $Ox$, hai đường thẳng $x=0$, $x=2$ quay xung quanh trục $Ox$ ta sẽ được khối tròn xoay chính là phần cắt đi của khối cầu trong đề bài.

Ta có $(x-5)^2+y^2=25\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{25-(x-5)^2}$

$\Rightarrow$ Nửa trên trục $Ox$ của $(C)$ có phương trình $y=\sqrt{25-(x-5)^2}=\sqrt{10x-x^2}$

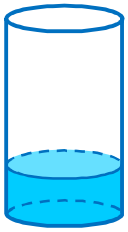
$\Rightarrow$ Thể tích vật thể tròn xoay khi cho $(H)$ quay quanh $Ox$ là:

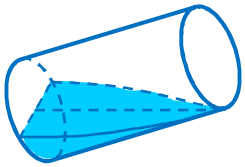
$$V_1=\pi\int_0^2\left(10x-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(5x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2=\frac{52\pi}{3}$$

Thể tích khối cầu là: $V_2=\frac{4}{3}\pi.5^3=\frac{500\pi}{3}$

Thể tích cần tìm: $V=V_2-2V_1=\frac{500\pi}{3}-2.\frac{52\pi}{3}=132\pi\left(dm^3\right)$

**Câu 11:** Có một cốc thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là $6\,\text{cm}$, chiều cao trong lòng cốc là $10\,\text{cm}$ đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy mực nước trùng với đường kính đáy.

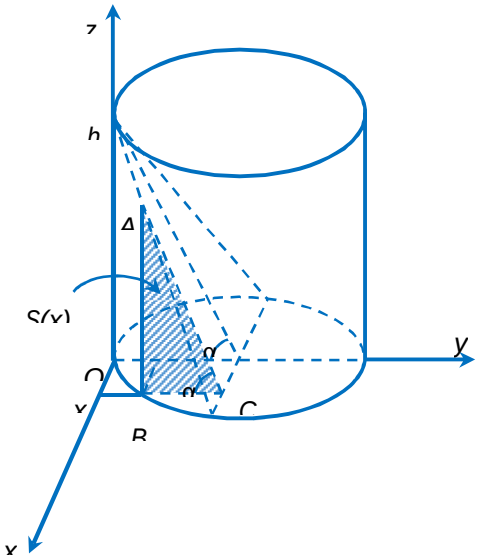




**A.** $240\,\text{cm}^3$. **B.** $240\pi\,\text{cm}^3$. **C.** $120\,\text{cm}^3$. **D.** $120\pi\,\text{cm}^3$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Đặt $R=6\,(\text{cm}),\ h=10\,(\text{cm})$. Gán hệ trục tọa độ như hình vẽ.

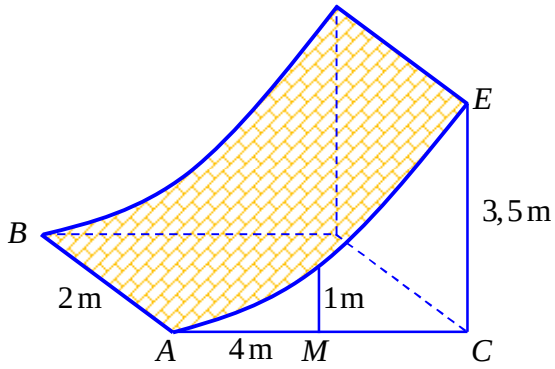
Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục $Ox$ tại điểm $x$ $(-6 \le x \le 6)$ cắt vật thể theo thiết diện có diện tích là $S(x)$.

Ta thấy thiết diện đó là một tam giác vuông, giả sử là tam giác $ABC$ vuông tại $B$ như trong hình vẽ.

Ta có $S(x) = S_{ABC} = \frac{1}{2} AB.BC = \frac{1}{2} BC^2 \tan\alpha = \frac{1}{2}\left(R^2 - x^2\right)\frac{h}{R} = \frac{5\left(36 - x^2\right)}{6}$.

Vậy thể tích lượng nước trong cốc là $V = \int_{-6}^{6} S(x)\,dx = \int_{-6}^{6} \frac{5\left(36 - x^2\right)}{6} dx = 240\,(\text{cm}^3)$.

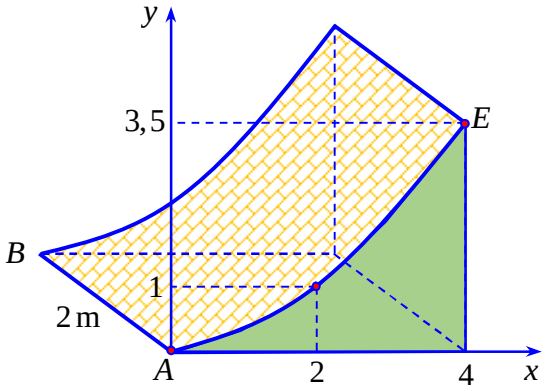
**Câu 12:** Chướng ngại vật "tường cong" trong một sân thi đấu X-Game là một khối bê tông có chiều cao từ mặt đất lên là $3,5\,\text{m}$. Giao của mặt tường cong và mặt đất là đoạn thẳng $AB = 2\,\text{m}$. Thiết diện của khối tường cong cắt bởi mặt phẳng vuông góc với $AB$ tại $A$ là một hình tam giác vuông cong $ACE$ với $AC = 4\,\text{m}$, $CE = 3,5\,\text{m}$ và cạnh cong $AE$ nằm trên một đường parabol có trục đối xứng vuông góc với mặt đất. Tại vị trí $M$ là trung điểm của $AC$ thì tường cong có độ cao $1\text{m}$ (xem hình minh họa bên). Tính thể tích bê tông cần sử dụng để tạo nên khối tường cong đó.




**A.** $9,75\,\text{m}^3$. **B.** $10,5\,\text{m}^3$. **C.** $10\,\text{m}^3$. **D.** $10,25\,\text{m}^3$.

**Lời giải**

**Chọn C**

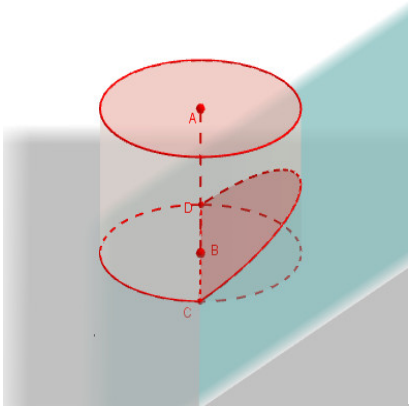



Chọn hệ trục $Oxy$ như hình vẽ sao cho $A \equiv O$

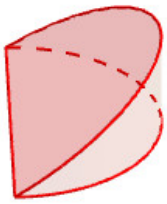
$\Rightarrow$ cạnh cong $AE$ nằm trên parabol $(P): y = ax^2 + bx$ đi qua các điểm $(2;1)$ và $\left(4;\frac{7}{2}\right)$ nên $(P): y = \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{8}x$

Khi đó diện tích tam giác cong $ACE$ có diện tích $S = \int_0^4 \left(\frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{8}x\right)\mathrm{d}x = 5\,\mathrm{m}^2$.

**Câu 13:** **Từ một khúc** gỗ hình trụ có đường kính 30cm, người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua đường kính đáy và nghiêng với đáy một góc $45^0$ để lấy một hình nêm (xem hình minh họa dưới đây)




**Hình 1**



**Hình 2**

Kí hiệu$V$ là thể tích của hình nêm (Hình 2). Tính $V$.

**A.** $V = 2250\left(cm^3\right)$. **B.** $V = \frac{225\pi}{4}\left(cm^3\right)$. **C.** $V = 1250\left(cm^3\right)$. **D.** $V = 1350\left(cm^3\right)$

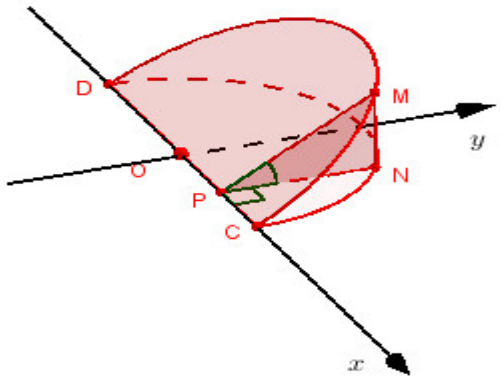
**Lời giải**

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.Khi đó hình nêm có đáy

là nửa hình tròn có phương trình: $y = \sqrt{225 - x^2}, x \in \left[-15;15\right]$

Một một mặt phẳng cắt vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x$, $\left(x \in \left[-15;15\right]\right)$

cắt hình nêm theo thiết diện có diện tích là $S\left(x\right)$ (xem hình).

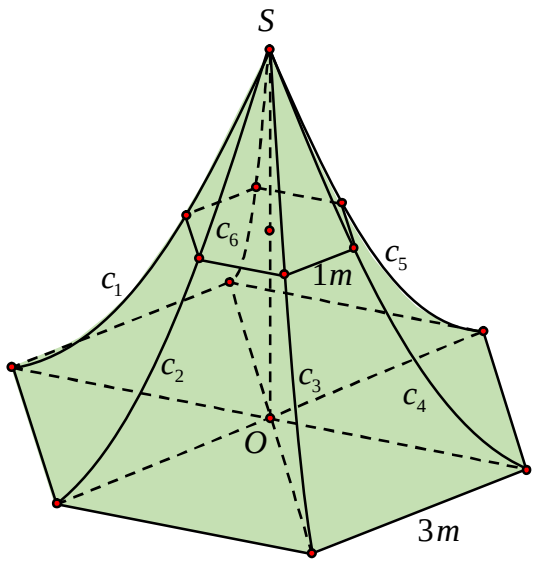


Dễ thấy $NP = y$ và $MN = NP\tan 45^0 = y = \sqrt{15 - x^2}$ khi đó $S(x) = \frac{1}{2}MN.NP = \frac{1}{2}.(225 - x^2)$ suy ra thể tích hình nêm là: $V = \int_{-15}^{15} S(x)dx$

$= \frac{1}{2}\int_{-15}^{15}.(225 - x^2)dx = 2250(cm^3)$.

**Chọn A**

**Câu 14:** Người ta dựng một cái lều vải $(H)$ có dạng hình "chóp lục giác cong đều" như hình vẽ bên. Đáy của $(H)$ là một hình lục giác đều cạnh 3 $m$. Chiều cao $SO = 6$ $m$ ($SO$ vuông góc với mặt phẳng đáy). Các cạnh bên của $(H)$ là các sợi dây $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$, $c_5$, $c_6$ nằm trên các đường parabol có trục đối xứng song song với $SO$. Giả sử giao tuyến (nếu có) của $(H)$ với mặt phẳng $(P)$ vuông góc với $SO$ là một lục giác đều và khi $(P)$ qua trung điểm của $SO$ thì lục giác đều có cạnh 1 $m$. Tính thể tích phần không gian nằm bên trong cái lều $(H)$ đó.

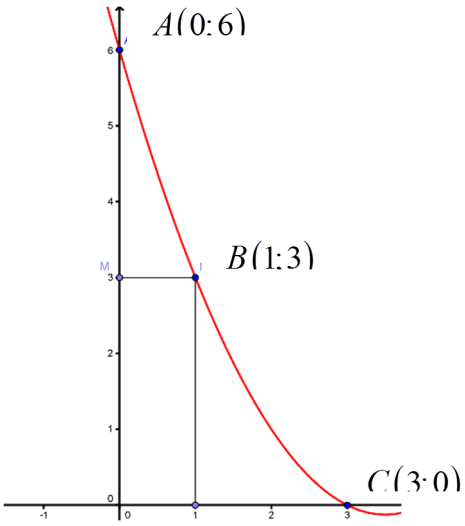



**A.** $\frac{135\sqrt{3}}{5}(m^3)$. **B.** $\frac{96\sqrt{3}}{5}(m^3)$. **C.** $\frac{135\sqrt{3}}{4}(m^3)$. **D.** $\frac{135\sqrt{3}}{8}(m^3)$.

**Lời giải**

Đặt **hệ** trục tọa độ như hình vẽ, ta có parabol cần tìm đi qua 3 điểm có tọa độ lần lượt là $A(0;6)$, $B(1;3)$, $C(3;0)$ nên có phương trình là $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 6$

Theo **hình** vẽ ta có cạnh của "**thiết diện lục giác**" là $BM$. Nếu ta đặt $t=OM$ thì $BM=\frac{7}{2}-\sqrt{2t+\frac{1}{4}}$ (chú ý là ta phải lấy giá trị có dấu "$-$" trước dấu căn và cho $B$ chạy từ $C$ đến $A$).

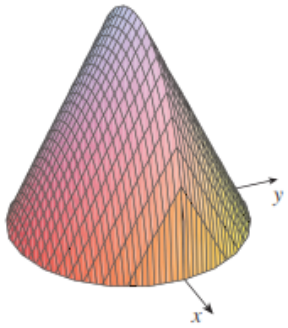



Khi đó, diện **tích** của "**thiết diện lục giác**" bằng $S(t)=6.\frac{BM^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{7}{2}-\sqrt{2t+\frac{1}{4}}\right)^2$ với $t\in[0;6]$.

Vậy thể tích của "túp lều" theo đề bài là: $V=\int_0^6 S(t)\,dt=\int_0^6 \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{7}{2}-\sqrt{2t+\frac{1}{4}}\right)^2 dt=...=\frac{135\sqrt{3}}{8}$

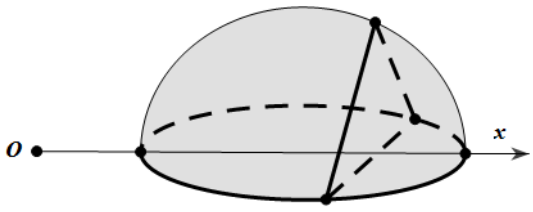
**Chọn D**

**Câu 15:** Một vật có kích thước và hình dáng như hình vẽ dưới đây. Đáy là hình tròn bán kính 4 cắt vật bởi các mặt phẳng vuông góc với trục $Ox$ ta được thiết diện là tam giác đều. Thể tích của vật thể là:




**A.** $V=\frac{256}{3}$. **B.** $V=\frac{64}{3}$. **C.** $V=\frac{256\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\frac{32\sqrt{3}}{3}$.

**Lời giải**



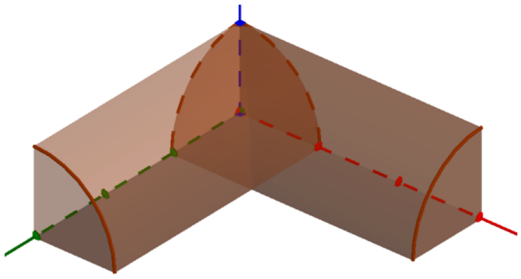

Chọn tâm đường tròn làm gốc.

Diện tích thiết diện là $S=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2=\sqrt{3}(4-x^2)$

$V=\int_{-2}^{2}S(x)dx=\sqrt{3}\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx=\frac{32\sqrt{3}}{3}$.

**Chọn D**

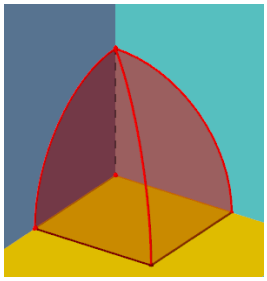
**Câu 16:** Gọi $(H)$ là phần giao của hai khối $\frac{1}{4}$ hình trụ có bán kính $a$, hai trục hình trụ vuông góc với nhau. Xem hình vẽ bên. Tính thể tích của $(H)$.



**A.** $V_{(H)}=\frac{2a^3}{3}$. **B.** $V_{(H)}=\frac{3a^3}{4}$. **C.** $V_{(H)}=\frac{a^3}{2}$. **D.** $V_{(H)}=\frac{\pi a^3}{4}$.

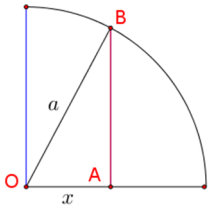
**Lời giải**

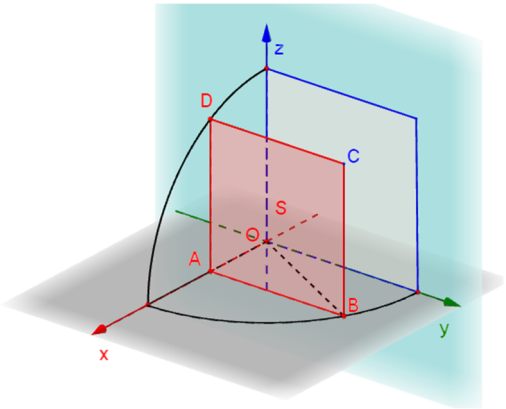
**Chọn A**



Ta gọi trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó phần giao $(H)$ là một vật thể có đáy là một phần tư hình tròn tâm $O$ bán kính $a$, thiết diện của mặt phẳng vuông góc với trục $Ox$ là một hình vuông có diện tích $S(x)=a^2-x^2$

Thể tích khối $(H)$ là $\int_0^a S(x)dx=\int_0^a(a^2-x^2)dx=\frac{2a^3}{3}$.

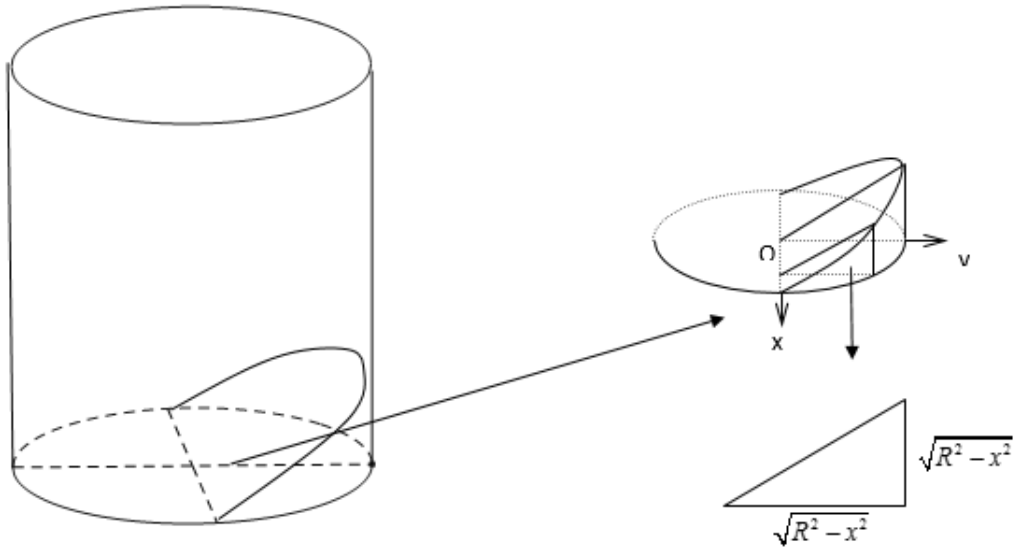


**Câu 17:** Cho một vật thể bằng gỗ có dạng khối trụ với bán kính đáy bằng R. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng có giao tuyến với đáy là một đường kính của đáy và tạo với đáy góc $45^0$. Thể tích của khối gỗ bé là:

**A.** $V=\frac{2R^3}{3}$. **B.** $V=\frac{\pi R^3}{6}$. **C.** $V=\frac{R^3}{3}$. **D.** $V=\frac{\pi R^3}{3}$.

**Lời giải**




Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ. Cắt khối gỗ bé bởi các mặt phẳng vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ x ta được thiết diện là tam giác vuông có diện tích bằng $A(x)=\frac{1}{2}\sqrt{R^2-x^2}$. Vậy thể tích khối gỗ bé bằng: $V=\int\limits_{-R}^{R}\frac{1}{2}\sqrt{R^2-x^2}=\frac{2R^3}{3}$.

**Chọn A**

# ỨNG DỤNG THỰC TẾ KHÁC

**Câu 1:** Một hạt proton di chuyển trong điện trường có biểu thức gia tốc ( theo $cm^2/s$ ) là $a(t)=\dfrac{-20}{(1+2t)^2}$ (với $t$ tính bằng giây). Tìm hàm vận tốc $v$ theo $t$, biết rằng khi $t=0$ thì $v=30\ (cm/s)$.

**A.** $\dfrac{10}{1+2t}$ **B.** $\dfrac{10}{1+2t}+20$ **C.** $(1+2t)^{-3}+30$ **D.** $\dfrac{-20}{(1+2t)^2}+30$

**Lời giải**

**Chọn B**

- $v(t)=\int a(t)\,dt=\int\dfrac{-20}{(1+2t)^2}dt=\dfrac{10}{1+2t}+C$
- Do $v(0)=30$, suy ra $\dfrac{10}{1+2.0}+C=30\Leftrightarrow C=20$
- Vậy, hàm $v(t)=\dfrac{10}{1+2t}+20$.

**Câu 2:** **(SỞ BÌNH THUẬN 2019)** Một ôtô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t)=6t(m/s)$. Đi được $10\,s$, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ôtô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-60(m/s^2)$. Tính quãng đường $S$ đi được của ôtô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

**A.** $300(m)$. **B.** $330(m)$. **C.** $350(m)$. **D.** $400(m)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Trong $10s$, đầu tiên ôtô đi được quãng đường $\int_0^{10}v(t)dt=\int_0^{10}6tdt=3t^2\Big|_0^{10}=300(m)$

Khi đi được $10s$, vận tốc ôtô đó đạt được là $v(10)=60(m/s)$

Thời điểm vật bắt đầu phanh gấp, vật chuyển động với vận tốc: $\int-60dt=-60t+C(m)$

Khi $t=10s$, vật đang chuyển động với vận tốc $60(m/s)\Rightarrow-60t+C=60\Rightarrow C=660$

Khi dừng hẳn $v(t)=0(m/s)\Rightarrow-60t+660=0\Leftrightarrow t=11(s)$

Nên quãng đường từ lúc bắt đầu phanh gấp đến khi dừng hẳn là:

$\int_{10}^{11}v(t)dt=\int_{10}^{11}(-60t+660)dt=\left(-30t^2+660t\right)\Big|_{10}^{11}=30(m)$.

Vậy quãng đường $S$ đi được của ôtô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

$S=300+30=330(m)$.

**Câu 3:** Một người lái xe ô tô đang chạy với vận tốc $20\ m/s$ thì người lái xe phát hiện có hàng rào ngăn đường ở phía trước cách $45m$ (tính từ vị trí đầu xe đến hàng rào) vì vậy, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+20\,(m/s)$, trong đó $t$ là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, xe ô tô còn cách hàng rào ngăn cách bao nhiêu mét (tính từ vị trí đầu xe đến hàng rào)?

**A.** $5\,m$. **B.** $4\,m$. **C.** $6\,m$. **D.** $3\,m$.

**Lời giải**

**Chọn A**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Xe đang chạy với vận tốc $v=20\ m/s$ tương ứng với thời điểm $t=0(s)$

Xe đừng lại tương ứng với thời điểm $t=4(s)$.

Quảng đường xe đã đi là $S=\int_0^4(-5t+20)\mathrm{d}t=\left(-\frac{5}{2}t^2+20t\right)\Big|_0^4=40(m)$.

Vậy ô tô cách hàng rào một đoạn $45-40=5(m)$.

**Câu 4:** Một vật chuyển động với vận tốc $10\ m/s$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=3t+t^2$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

**A.** $\frac{4300}{3}\ m$. **B.** $4300\ m$. **C.** $430\ m$. **D.** $\frac{430}{3}\ m$.

**Lời giải**

**Chọn A**

• Hàm vận tốc $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int\left(3t+t^2\right)\mathrm{d}t=\frac{3t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+C$

• Lấy mốc thời gian lúc tăng tốc $\Rightarrow v(0)=10\Rightarrow C=10$

Ta được: $v(t)=\frac{3t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+10$

• Sau 10 giây, quãng đường vật đi được là:

$$s=\int_0^{10}\left(\frac{3t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+10\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{t^3}{2}+\frac{t^4}{12}+10t\right)\Big|_0^{10}=\frac{4300}{3}\ m.$$

**Câu 5:** Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t)=7t$ (m/s). Đi được $5$ (s), người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-70\ (\mathrm{m/s^2})$. Tính quãng đường $S$ (m) đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

**A.** $S=95,70$ (m). **B.** $S=87,50$ (m). **C.** $S=94,00$ (m). **D.** $S=96,25$ (m).

**Lời giải**

**Chọn D**

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe lăn bánh đến khi được phanh:

$$S_1=\int_0^5 v_1(t)\mathrm{d}t=\int_0^5 7t\mathrm{d}t=7\frac{t^2}{2}\Big|_0^5=87,5\ (\mathrm{m}).$$

Vận tốc $v_2(t)$ (m/s) của ô tô từ lúc được phanh đến khi dừng hẳn thoả mãn

$v_2(t)=\int(-70)\mathrm{d}t=-70t+C$, $v_2(5)=v_1(5)=35\Rightarrow C=385$. Vậy $v_2(t)=-70\,\mathrm{t}+385$.

Thời điểm xe dừng hẳn tương ứng với $t$ thoả mãn $v_2(t)=0\Leftrightarrow t=5,5$ (s).

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe được phanh đến khi dừng hẳn:

$$S_2=\int_5^{5,5} v_1(t)\mathrm{d}t=\int_5^{5,5}(-70t+385)\mathrm{d}t=8,75\ (\mathrm{m}).$$

Quãng đường cần tính $S=S_1+S_2=96,25$ (m).

**Câu 6:** Một ôtô đang chạy đều với vận tốc 15 m/s thì phía trước xuất hiện chướng ngại vật nên người lái đạp phanh gấp. Kể từ thời điểm đó, ôtô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $-a\ m/s^2$. Biết ôtô chuyển động thêm được $20m$ thì dừng hẳn. Hỏi $a$ thuộc khoảng nào dưới đây.

**A.** $(3;4)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(5;6)$. **D.** $(6;7)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi $x(t)$ là hàm biểu diễn quãng đường, $v(t)$ là hàm vận tốc.

Ta có: $v(t)-v(0)=\int_0^t(-a)\mathrm{d}t=-at \Rightarrow v(t)=-at+15$.

$$x(t)-x(0)=\int_0^t v(t)\mathrm{d}t=\int_0^t(-at+15)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}at^2+15t$$

$$x(t)=-\frac{1}{2}at^2+15t$$

Ta có: $\begin{cases}v(t)=0\\x(t)=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-at+15=0\\-\frac{1}{2}at^2+15t=20\end{cases}\Rightarrow -\frac{15}{2}t+15t=20\Rightarrow t=\frac{8}{3}\Rightarrow a=\frac{45}{8}$.

**Câu 7:** Một ôtô đang chạy với vận tốc 18 $m/s$ thì người lái hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ôtô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-36t+18$ $(m/s)$ trong đó $t$ là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Quãng đường ôtô di chuyển được kể từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn là bao nhiêu mét?

**A.** 5,5 $m$. **B.** 3,5 $m$. **C.** 6,5 $m$. **D.** 4,5 $m$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Lấy mốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu hãm phanh. Gọi $T$ là thời điểm ô tô dừng. Ta có $v(T)=0$. Suy ra $-36T+18=0\Rightarrow T=0,5$ (s)

Khoảng thời gian từ lúc hãm phanh đến lúc dừng hẳn ô tô là 0,5 s. Trong khoảng thời gian đó, ô tô di chuyển được quãng đường là $s=\int_0^{0,5}(-36t+18)\,dt=\left(-18t^2+18t\right)\Big|_0^{0,5}=4,5(m)$.

**Câu 8:** Một lực 50 N cần thiết để kéo căng một chiếc lò xo có độ dài tự nhiên 5 cm đến 10 cm. Hãy tìm công sinh ra khi kéo lò xo từ độ dài từ 10 cm đến 13 cm?

**A.** 1,95J. **B.** 1,59 J. **C.** 1000 J. **D.** 10000 J

**Lời giải**

Theo định luật Hooke, khi chiếc lò xo bị kéo căng thêm $x$ m so với độ dài tự nhiên thì chiếc lò xo trì lại với một lực $f(x)=kx$ .Khi kéo căng lò xo từ 5 cm đến 10 cm, thì nó bị kéo căng thêm 5 cm = 0,05 m. Bằng cách này, ta được $f(0,05)=50$ bởi vậy:

$$0.05k=50\Rightarrow k=\frac{50}{0.05}=1000$$

Do đó: $f(x)=1000x$ và công được sinh ra khi kéo căng lò xo từ 10 cm đến 13 cm là:

$$\mathrm{W}=\int_{0,05}^{0,08}1000x\,dx=1000\frac{x^2}{2}\Big|_{0,05}^{0,08}=1,95J$$

**Chọn A**

**Câu 9:** Một ôtô đang chạy đều với vận tốc 15 m/s thì phía trước xuất hiện chướng ngại vật nên người lái đạp phanh gấp. Kể từ thời điểm đó, ôtô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $-a$ $m/s^2$. Biết ôtô chuyển động thêm được $20m$ thì dừng hẳn. Hỏi $a$ thuộc khoảng nào dưới đây.

**A.** $(3;4)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(5;6)$. **D.** $(6;7)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi $x(t)$ là hàm biểu diễn quãng đường, $v(t)$ là hàm vận tốc.

Ta có: $v(t)-v(0)=\int_0^t(-a)\mathrm{d}t=-at \Rightarrow v(t)=-at+15$.

$x(t)-x(0)=\int_0^t v(t)\mathrm{d}t=\int_0^t(-at+15)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}at^2+15t$

$x(t)=-\frac{1}{2}at^2+15t$

Ta có: $\begin{cases}v(t)=0\\x(t)=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-at+15=0\\-\frac{1}{2}at^2+15t=20\end{cases}\Rightarrow -\frac{15}{2}t+15t=20\Rightarrow t=\frac{8}{3}\Rightarrow a=\frac{45}{8}$.

**Câu 10:** Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162 (mét) so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t)=10t-t^2$, trong đó $t$ (phút) là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $v(t)$ được tính theo đơn vị mét/phút ($m/p$). Nếu như vậy thì khi bắt đầu tiếp đất vận tốc $v$ của khí cầu là

**A.** $v=5(m/p)$. **B.** $v=7(m/p)$. **C.** $v=9(m/p)$. **D.** $v=3(m/p)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi thời điểm khí cầu bắt đầu chuyển động là $t=0$, thời điểm khinh khí cầu bắt đầu tiếp đất là $t_1$.

Quãng đường khí cầu đi được từ thời điểm $t=0$ đến thời điểm khinh khí cầu bắt đầu tiếp đất là $t_1$ là

$\int_0^{t_1}(10t-t^2)\mathrm{d}t=5t_1^2-\frac{t_1^3}{3}=162\Leftrightarrow t\approx -4,93\vee t\approx 10,93\vee t=9$

Do $v(t)\ge 0\Leftrightarrow 0\le t\le 10$ nên chọn $t=9$.

Vậy khi bắt đầu tiếp đất vận tốc $v$ của khí cầu là $v(9)=10.9-9^2=9(m/p)$

**Câu 11:** Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì người lái đạp phân, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+10(m/s)$, trong đó $t$ là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

**A.** $0,2m$. **B.** $2m$. **C.** $10m$. **D.** $20m$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có ô tô đi được thêm 2 giây nữa với vận tốc chậm dần đều $v(t)=-5t+10(m/s)$

ứng dụng tích phân, ta có quãng đường cần tìm là:

$S=\int_0^2 v(t)\mathrm{d}t=\int_0^2(-5t+10)\mathrm{d}t=\left(-\frac{5}{2}t^2+10t\right)\Big|_0^2=10(m)$

* Lúc dừng thì ta có: $v(t)=0\Rightarrow -5t+10=0\Rightarrow t=2$

Từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn, ô tô đi được quãng đường: $S=v_0t+\frac{1}{2}at^2$

Với $\begin{cases} a=-5 \\ t=2 \\ v_0=10 \end{cases} \Rightarrow S=10.2+\frac{1}{2}(-5).2^2=10(m)$

* Áp dụng công thức lý 10 ta có: $v_2^2-v_1^2=2.a.s$

Ta còn có công thức liên hệ giữa vận tốc và gia tốc: $v=v_0+a.t$

Dựa vào phương trình chuyển động thì $a=-5(m/s^2)$

Khi dừng hẳn thì ta có $v_2=0(m/s)$

Theo công thức ban đầu, ta được $s=\frac{v_2^2-v_1^2}{2a}=\frac{0-10^2}{2.(-5)}=10(m)$.

**Câu 12:** Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi h(t) là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=3at^2+bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$. Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là bao nhiêu.

**A.** $8400m^3$. **B.** $2200m^3$. **C.** $6000m^3$. **D.** $4200m^3$

**Lời giải**

Ta có $h(t)=\int(3at^2+bt)dt=at^3+\frac{bt^2}{2}$.

Khi đo ta có hệ: $\begin{cases} 5^3.a+\frac{1}{2}.b.5^2=150 \\ 10^3.a+\frac{1}{2}.b.10^2=1100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$ Khi đó $h(t)=t^3+t^2$.

Vậy thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là $h(20)=8400m^3$.

**Chọn A**

**Câu 13:** Gọi $h(t)$ $(cm)$ là mức nước trong bồn chứa sau khi bơm được $t$ giây. Biết rằng $h'(t)=\frac{1}{5}\sqrt[3]{t+8}$ và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây (chính xác đến $0,01\ cm$)

**A.** $2,67\ cm$. **B.** $2,66\ cm$. **C.** $2,65\ cm$. **D.** $2,68\ cm$.

**Chọn B**

• Hàm $h(t)=\int\frac{1}{5}\sqrt[3]{t+8}dt=\frac{3}{20}(t+8)\sqrt[3]{t+8}+C$

• Lúc $t=0$, bồn không chứa nước. Suy ra $h(0)=0\Rightarrow\frac{12}{5}+C=0\Leftrightarrow C=-\frac{12}{5}$

Vậy, hàm $h(t)=\frac{3}{20}(t+8)\sqrt[3]{t+8}-\frac{12}{5}$

• Mức nước trong bồn sau 6 giây là $h(6)\approx 2,66\ cm$.

**Câu 14:** Một đám vi trùng tại ngày thứ $t$ có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t)=\frac{4000}{1+0,5t}$ và lúc đầu đám vi trùng có 250000 con. Hỏi sau 10 ngày số lượng vi trùng gần với số nào sau đây nhất?

**A.** 251000 con. **B.** 264334 con. **C.** 261000 con. **D.** 274334 con.

**Chọn B**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

- $N(t)=\int\frac{4000}{1+0,5t}\mathrm{d}t=8000.\ln|1+0,5t|+C$
- Lúc đầu có 250000 con, suy ra $N(0)=250000\Rightarrow C=250000$
- Vậy $N(t)=8000.\ln|1+0,5t|+250000\Rightarrow N(10)\approx 264334,0758$.

**Câu 15:** Một đám vi trùng tại ngày thứ $t$ có số lượng $N(t)$, biết rằng $N'(t)=\frac{7000}{t+2}$ và lúc đầu đám vi trùng có 300000 con. Sau 10 ngày, đám vi trùng có khoảng bao nhiêu con?

**A.** 302542 con. **B.** 322542 con. **C.** 312542 con. **D.** 332542 con.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $N(t)=\int N'(t)\mathrm{d}t=\int\frac{7000}{t+2}\mathrm{d}t=7000\ln|t+2|+C$

Do $N(0)=300000\Rightarrow C=300000-7000\ln 2$

Khi đó $N(10)=7000\ln 12+300000-7000\ln 2=312542$.

**Câu 16:** Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn trong hồ bơi được mô hình bởi hàm số $B'(t)=\frac{1000}{(1+0,3t)^2},t\geq 0$, trong đó $B(t)$ là số lượng vi khuẩn trên mỗi $ml$ nước tại ngày thứ $t$. Số lượng vi khuẩn ban đầu là 500 con trên một $ml$ nước. Biết rằng mức độ an toàn cho người sử dụng hồ bơi là số vi khuẩn phải dưới 3000 con trên mỗi $ml$ nước. Hỏi vào ngày thứ bao nhiêu thì nước trong hồ không còn an toàn nữa?

**A.** 9 **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\int B'(t)\mathrm{d}t=\int\frac{1000}{(1+0,3t)^2}\mathrm{d}t=-\frac{1000}{0,3(1+0,3t)}+C$

Mà $B(0)=500\Leftrightarrow-\frac{10000}{3(1+0,3.0)}+C=500\Leftrightarrow C=\frac{11500}{3}$

Do đó: $B(t)=-\frac{10000}{3(1+0,3t)}+\frac{11500}{3}$

Nước trong hồ vẫn an toàn khi chỉ khi $B(t)<3000\Leftrightarrow-\frac{10000}{3(1+0,3t)}+\frac{11500}{3}<3000\Leftrightarrow t<10$

Vậy kể từ ngày thứ 10, nước hồ không còn an toàn.

**Câu 17:** **(KHTN Hà Nội Lần 3)** Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $V(t)$ là thể tích nước bơm được sau $t$ giây. Biết rằng $V'(t)=at^2+bt$ và ban đầu bể không có nước, sau 5 giây thể tích nước trong bể là $15m^3$, sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $110m^3$. Thể tích nước bơm được sau 20 giây bằng

**A.** $60m^3$. **B.** $220m^3$. **C.** $840m^3$. **D.** $420m^3$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$V'(t)=at^2+bt\Rightarrow V(t)=\int at^2+bt\,\mathrm{d}t=a\frac{t^3}{3}+b\frac{t^2}{2}+c.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Theo bài ta có hệ $\begin{cases} V(0)=0 \\ V(5)=15 \\ V(10)=110 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\frac{0^3}{3}+b\frac{0^2}{2}+c=0 \\ a\frac{5^3}{3}+b\frac{5^2}{2}+c=15 \\ a\frac{10^3}{3}+b\frac{10^2}{2}+c=110 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{10} \\ b=\frac{1}{5} \\ c=0 \end{cases}$.

Suy ra, $V(20)=\frac{3}{10}\cdot\frac{20^3}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{20^2}{2}=840m^3$.

**Câu 18:** Hạt electron có điện tích âm là $1,6.10^{-19}C$. Nếu tách hai hạt eletron từ $1pm$ đếm $4pm$ thì công $W$ sinh ra là

**A.** $W=3,194.10^{-28}\ J$. **B.** $W=1,728.10^{-16}\ J$.

**C.** $W=1,728.10^{-28}\ J$. **D.** $W=3,194.10^{-16}\ J$.

**Lời giải**

**Chọn B**

• Áp dụng công thức $A=\int_a^b \frac{kq_1q_2}{x^2}dx$.

Trong đó: $k=9.10^9;\ a=1\,pm=10^{-12}m;\ b=4\,pm=4.10^{-12}\ m;\ q_1=q_2=1,6.10^{-19}C$

• Suy ra: $A=\int_{10^{-12}}^{4.10^{-12}} \frac{9.10^9.\left(1,6.10^{-19}\right)^2}{x^2}dx=2,304.10^{-28}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{10^{-12}}^{4.10^{-12}}=1,728.10^{-16}\ J$.

**Câu 19:** Trong mạch máy tính, cường độ dòng điện (đơn vị $mA$) là một hàm số theo thời gian $t$, với $I(t)=0,3-0,2t$. Hỏi tổng điện tích đi qua một điểm trong mạch trong 0,05 giây là bao nhiêu?

**A.** $0,29975\ mC$. **B.** $0,29\ mC$. **C.** $0,01525\ mC$. **D.** $0,01475\ mC$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$$q=\int_0^{0,05} I(t)dt=\int_0^{0,05}(0,3-0,2t)dt=\left(0,3t-\frac{t^2}{10}\right)\Big|_0^{0,05}=0,01475\ mC.$$

**Câu 20:** Dòng điện xoay chiều hình sin chạy qua một đoạn mạch LC có có biểu thức cường độ là $i(t)=I_0\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$. Biết $i=q'$ với $q$ là điện tích tức thời ở tụ điện. Tính từ lúc $t=0$, điện lượng chuyển qua tiết diện thẳng của dây dẫn của đoạn mạch đó trong thời gian bằng $\frac{\pi}{\omega}$ là

**A.** $\frac{\pi\sqrt{2}I_0}{\omega}$. **B.** 0. **C.** $\frac{2I_0}{\omega}$. **D.** $\frac{\pi I_0}{\omega\sqrt{2}}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điện lượng chuyển qua tiết diện của dây dẫn của đoạn mạch trong thời gian từ 0 đến $\frac{\pi}{\omega}$ là

$$q=\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} i(t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} I_0\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)dt=\frac{I_0}{\omega}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}}=\frac{2I_0}{\omega}$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 21:** Khi một chiếc lò xo bị kéo căng thêm $x(m)$ so với độ dài tự nhiên là $0,15(m)$ của lò xo thì chiếc lò xo trì lại (chống lại) với một lực $f(x)=800x$. Hãy tìm công $W$ sinh ra khi kéo lò xo từ độ dài từ $0,15(m)$ đến $0,18(m)$.

**A.** $W=36.10^{-2}J$. **B.** $W=72.10^{-2}J$. **C.** $W=36J$. **D.** $W=72J$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Công được sinh ra khi kéo căng lò xo từ 0,15m đến 0,18m là:

$$W=\int_0^{0,03}800x.dx=400x^2\Big|_0^{0,03}=36.10^{-2}J.$$

***Chú ý:*** Nếu lực là một giá trị biến thiên (như nén lò xo) và được xác định bởi hàm $F(x)$ thì công sinh ra theo trục $Ox$ từ $a$ tới $b$ là $A=\int_a^b F(x)dx$.

**Câu 22:** Một dòng điện xoay chiều $i=I_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$ chạy qua một mạch điện có điện trở thuần R.Hãy tính nhiệt lượng Q tỏa ra trên đoạn mạch đó trong thời gian một chu kì T.

**A.** $\frac{RI_0^2}{2}T$. **B.** $\frac{RI_0^2}{3}T$. **C.** $\frac{RI_0^2}{4}T$. **D.** $\frac{RI_0^2}{5}T$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $Q=\int_0^T Ri^2dt=\int_0^T RI_0^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)dt=RI_0^2\int_0^T\frac{1-\cos2\left(\frac{2\pi}{T}+\varphi\right)}{2}dt$

$$=\frac{RI_0^2}{2}\left(t-\frac{T}{4\pi}\sin2\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)\right)\Big|_0^T=\frac{RI_0^2}{2}T.$$

**Câu 23:** Đặt vào một đoạn mạch hiệu điện thế xoay chiều $u=U_0\sin\frac{2\pi}{T}t$. Khi đó trong mạch có dòng diện xoay chiều $i=I_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$ với $\varphi$ là độ lệch pha giữa dòng diện và hiệu điện thế.Hãy Tính công của dòng diện xoay chiều thực hiện trên đoạn mạnh đó trong thời gian một chu kì.

**A.** $\frac{U_0I_0}{2}\cos\varphi$. **B.** $\frac{U_0I_0}{2}T\sin\varphi$. **C.** $\frac{U_0I_0}{2}T\cos(\varphi+\pi)$. **D.** $\frac{U_0I_0}{2}T\cos\varphi$

**Lời giải**

Ta có:

$$A=\int_0^T uidt=\int_0^T U_0I_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)\sin\frac{2\pi}{T}tdt=U_0I_0\int_0^T\frac{1}{2}\left(\cos\varphi-\cos\left(\frac{4\pi}{T}t+\varphi\right)\right)dt$$

$$=\frac{U_0I_0}{2}\int_0^T\frac{1}{2}\left(\cos\varphi-\cos\left(\frac{4\pi}{T}t+\varphi\right)\right)dt=\frac{U_0I_0}{2}\left(t\cos\varphi-\frac{T}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{T}t+\varphi\right)\right)\Big|_0^T=\frac{U_0I_0}{2}T\cos\varphi.$$

**Lời giải**

**Chọn D**

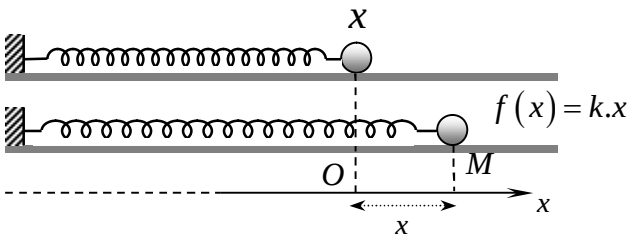
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**Câu 24:** Để kéo căng một lò xo có độ dài tự nhiên từ $10cm$ đến $15cm$ cần lực $40N$. Tính công $(A)$ sinh ra khi kéo lò xo có độ dài từ $15cm$ đến $18cm$.

**A.** $A=1,56\ (J)$. **B.** $A=1\ (J)$. **C.** $A=2,5\ (J)$. **D.** $A=2\ (J)$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Theo Định luật Hooke, lực cần dùng để giữ lò xo giãn thêm $x$ mét từ độ dài tự nhiên là $f(x)=kx$, với $k(N/m)$ là độ cứng của lò xo. Khi lò xo được kéo giãn từ độ dài $10cm$ đến $15cm$, lượng kéo giãn là $5\ cm=0.05\ m$. Điều này có nghĩa $f(0.05)=40$, do đó:

$$0,05k=40\Leftrightarrow k=\frac{40}{0,05}=800(N/m)$$

Vậy $f(x)=800x$ và công cần để kéo dãn lò xo từ $15cm$ đến $18cm$ là:

$$A=\int_{0,05}^{0,08}800\,dx=400x^2\Big|_{0,05}^{0,08}=400\left[(0,08)^2-(0,05)^2\right]=1,56(J)$$

**Câu 25:** Một thanh AB có chiều dài là 2a ban đầu người ta giữ thanh ở góc nghiêng $\alpha=\alpha_o$, một đầu thanh tựa không ma sát với bức tường thẳng đứng. Khi buông thanh, nó sẽ trượt xuống dưới tác dụng của trọng lực. Hãy biểu diễn góc $\alpha$ theo thời gian t (Tính bằng công thức tính phân)

**A.** $t=-\int_{\alpha_o}^{\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3}{2a}(\sin\alpha_o-\sin\alpha)}}$.

**B.** $t=-\int_{\alpha_o}^{\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3g}{2a}(\sin\alpha_o+\sin\alpha)}}$.

**C.** $t=-\int_{\alpha_o}^{\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3g}{a}(\sin\alpha_o-\sin\alpha)}}$.

**D.** $t=-\int_{\alpha_o}^{\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3g}{2a}(\sin\alpha_o-\sin\alpha)}}$

**Lời giải**

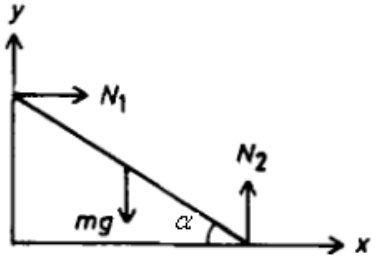
Do trượt không ma sát nên cơ năng của thanh được bảo toàn

$mga\sin\alpha_o=mga\sin\alpha+K_q+K_{tt}$ (1)

Do khối tâm chuyển động trên đường tròn tâm O bán kính a nên: $K_{tt}=\frac{ma^2\omega^2}{2}=\frac{1}{2}ma^2\alpha'^2$

Động năng quay quanh khối tâm: $K_q=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}\frac{1}{12}m(2a)^2\alpha'^2=\frac{1}{6}ma^2\alpha'^2$

Thay vào (1) ta được: $\frac{2}{3}a\alpha'^2=g(\sin\alpha_o-\sin\alpha)$




$\alpha'=-\sqrt{\frac{3g}{2a}(\sin\alpha_o-\sin\alpha)}$

$t=-\int_{\alpha_o}^{\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3g}{2a}(\sin\alpha_o-\sin\alpha)}}$. **Chọn D**