

ĐỀ CHÍNH THỨC  
(Đề gồm 02 trang)

Môn: Toán Lớp 11  
(Thời gian làm bài: 150 phút)

Họ và tên thí sinh.....Số báo danh.....

**Câu 1 (4,0 điểm):**

a) Giải phương trình  $\sin 2x + \sqrt{2}(\sin x - 2\cos x) = 2$ .

b) Cho  $\log_{25} 7 = a, \log_9 11 = b, \log_3 5 = c$ . Tính  $\log_{135} 385$  theo  $a, b, c$ .

**Câu 2 (4,0 điểm):**

a) Tìm tất cả các giá trị nguyên không vượt quá 10 của tham số  $m$  để phương trình

$$\log_3^2 27x - 6\log_9 \frac{x}{81} + m\log_3 x + 3m - 23 = 0 \quad \text{có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \text{ thỏa mãn}$$

$$x_1 \cdot x_2 \leq 81.$$

b) Cho điểm  $M$  thay đổi trên parabol  $y = x^2$ ,  $H$  là hình chiếu của  $M$  trên trục hoành. Gọi  $x$  là hoành độ của  $H$ . Tính  $\lim_{x \rightarrow +\infty} OM - MH$ .

**Câu 3 (4,0 điểm):**

a) Cho 2026 số nguyên dương đôi một khác nhau và nhỏ hơn 4050. Chứng minh rằng luôn tồn tại 3 số để tổng hai số này bằng số kia.

b) Cho hình chóp tam giác đều  $S.ABC$  có  $SA = 1$ . Gọi  $D, E$  lần lượt là trung điểm của  $SA, SC$ . Tính thể tích của khối chóp  $S.ABC$  biết  $BD$  vuông góc với  $AE$ .

**Câu 4 (4,0 điểm):**

a) Nhân dịp tết Trung thu, xí nghiệp sản xuất bánh muốn sản xuất hai loại bánh: bánh nướng và bánh dẻo. Để sản xuất hai loại bánh này, xí nghiệp cần: đường, bột mì, trứng, mứt bí, lạp xưởng. Xí nghiệp đã nhập về 600kg bột mì và 240kg đường, các nguyên liệu khác luôn đáp ứng được số lượng mà xí nghiệp cần. Mỗi chiếc bánh nướng cần 120g bột mì, 60g đường. Mỗi chiếc bánh dẻo cần 160g bột mì và 40g đường. Theo khảo sát thị trường, lượng bánh dẻo tiêu thụ không vượt quá ba lần lượng bánh nướng và sản phẩm của xí nghiệp sản xuất luôn được tiêu thụ hết. Mỗi chiếc bánh nướng lãi 8000 đồng, mỗi chiếc bánh dẻo lãi 6000 đồng. Để đáp ứng nhu cầu thị trường; đảm bảo lượng bột mì, đường không vượt quá số lượng mà xí nghiệp đã chuẩn bị và vẫn thu được lợi nhuận cao nhất thì xí nghiệp phải sản xuất bao nhiêu chiếc bánh nướng và bao nhiêu chiếc bánh dẻo.

b) Cho dãy số  $u_n$  xác định bởi 
$$\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_{n+1} = u_n \cdot u_{n-1} + 2 \end{cases}, n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt  $S_n = u_1^2 + 1 \cdot u_2^2 + 1 \cdot u_3^2 + 1 \dots u_n^2 + 1 - 1, n \in \mathbb{N}^*$ . Chứng minh với mọi  $n \in \mathbb{N}^*, S_n$  là số chính phương.

**Câu 5 (4,0 điểm):**

a) Tìm hai số thực  $a, b$  sao cho hàm số  $\frac{\sqrt{2x-1} + ax + b}{x-1}$  có giới hạn hữu hạn khi  $x \rightarrow 1$ .

b) Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành, điểm  $C'$  di động trên cạnh  $SC$ . Mặt phẳng  $P$  chứa  $AC'$  và song song với đường thẳng  $BD$ ,  $P$  cắt các cạnh  $SB$  và  $SD$  lần lượt tại  $B'$ ,  $D'$ .

Xác định vị trí của điểm  $C'$  trên cạnh  $SC$  sao cho  $\frac{2BB'}{SB} + \frac{3SD'}{DD'} + \frac{10SC'}{CC'} = 8$ .

.....**HẾT**.....

- Học sinh không được sử dụng tài liệu;
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

| Đáp án                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Điểm                                                                    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Câu 1a</b></p> <p>1a) <math>\sin 2x + \sqrt{2}(\sin x - 2\cos x) = 2</math></p> <p><math>\Leftrightarrow 2\sin x \cos x + \sqrt{2}\sin x - 2\sqrt{2}\cos x - 2 = 0</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x(\sqrt{2}\cos x + 1) - 2(\sqrt{2}\cos x + 1) = 0</math></p> <p><math>\Leftrightarrow (\sqrt{2}\sin x - 2)(\sqrt{2}\cos x + 1) = 0</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \sqrt{2} \\ \sqrt{2}\cos x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \mp \frac{3\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).</math></p>                                                                                                   | <p><b>0,5</b></p> <p><b>0,5</b></p> <p><b>0,5+0,5+0,5</b></p>           |
| <p><b>Câu 1b</b> Cho <math>\log_{25} 7 = a, \log_9 11 = b, \log_3 5 = c</math>. Tính <math>\log_{135} 385</math> theo <math>a, b, c</math>.</p> <p>Từ giả thiết <math>\Rightarrow 7 = 5^{2a}; 11 = 3^{2b}; 5 = 3^c</math></p> <p><math>\log_{135} 385 = \frac{\log_3 11.7.5}{\log_3 27.5} = \frac{\log_3 11 + \log_3 7 + \log_3 5}{\log_3 27 + \log_3 5}</math></p> <p><math>= \frac{2b + 2ac + c}{3 + c}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                  | <p><b>0,5</b></p> <p><b>0,5</b></p> <p><b>0,5</b></p>                   |
| <p><b>Câu 2a</b></p> <p><math>\log_3 27x = 3 + \log_3 x</math>, đặt <math>t = \log_3 x</math> ta có phương trình</p> <p><math>(3+t)^2 - 6\left(\frac{t}{2} - 2\right) + mt + 3m - 23 = 0</math></p> <p><math>\Leftrightarrow t^2 + (3+m)t + 3m - 2 = 0</math>, phương trình này luôn có hai nghiệm phân biệt <math>t_1, t_2</math> với mọi <math>m</math> vì <math>\Delta = (m-3)^2 + 8 &gt; 0 \ \forall m</math>.</p> <p>Phương trình đã cho luôn có hai nghiệm <math>x_1 = 3^{t_1}, x_2 = 3^{t_2}</math></p> <p><math>x_1 x_2 \leq 81 \Leftrightarrow 3^{t_1+t_2} \leq 3^4 \Leftrightarrow t_1 + t_2 \leq 4 \Leftrightarrow m \geq -7</math></p> <p>Tìm được <math>m = -7; -6; \dots; 10</math></p> | <p><b>0,5</b></p> <p><b>0,5</b></p> <p><b>0,5</b></p> <p><b>0,5</b></p> |
| <p><b>Câu 2b</b></p> <p>Ta có <math>H(x;0), M(x;x^2) \Rightarrow OM =  x \sqrt{1+x^2}, HM = x^2</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow +\infty} OM - MH = \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{1+x^2} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + x} \right)</math></p> <p><math>= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + 1} = \frac{1}{2}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | <p><b>0,5</b></p> <p><b>0,5+0,5</b></p> <p><b>0,5</b></p>               |
| <p><b>Câu 3a</b></p> <p>Gọi 2026 số nguyên dương khác nhau và nhỏ hơn 4050 là <math>a_1 &lt; a_2 &lt; \dots &lt; a_{2026}</math> (1)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                         |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| <p><b>Đặt</b> <math>b_1 = a_2 - a_1; b_2 = a_3 - a_1; \dots b_{2025} = a_{2026} - a_1(2)</math><br/> Ta có (2) chứa 2025 số nguyên dương khác nhau và nhỏ hơn 4050<br/> Từ (1) và (2) ta có 4051 số nguyên từ 1 đến 4050<br/> Vậy có một số ở (1) và (2) trùng nhau, giả sử số đó là<br/> <math>a_i - a_1 = a_j \Rightarrow a_i = a_1 + a_j</math> (đpcm)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | <p><b>0,5</b><br/><b>0,5</b><br/><b>1,0</b></p> |
| <div data-bbox="300 376 619 689" data-label="Image"> </div> <p><b>Câu 3b</b><br/> Lấy <math>F</math> là trung điểm của <math>SE</math> thì <math>DF \parallel AE</math>, mà <math>BD \perp AE</math><br/> nên <math>BD \perp DF \Rightarrow BD^2 + DF^2 = BF^2</math> (1).<br/> Đặt <math>AB = x</math>. Áp dụng công thức đường trung tuyến ta có:<br/> <math display="block">BD^2 = \frac{AB^2 + SB^2}{2} - \frac{SA^2}{4} = \frac{x^2 + 1^2}{2} - \frac{1^2}{4} = \frac{2x^2 + 1}{4}</math> Tương tự: <math>AE^2 = BE^2 = \frac{2x^2 + 1}{4}</math>; <math>DF^2 = \frac{AE^2}{4} = \frac{2x^2 + 1}{16}</math><br/> <math display="block">BF^2 = \frac{BS^2 + BE^2}{2} - \frac{SE^2}{4} = \frac{1 + \frac{2x^2 + 1}{4}}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{4} = \frac{7}{16} + \frac{2x^2 + 1}{8}</math> Đặt <math>t = \frac{2x^2 + 1}{4}</math>, thay vào (1) ta có: <math>t + \frac{t}{4} = \frac{7}{16} + \frac{t}{2} \Leftrightarrow t = \frac{7}{12}</math><br/> <math>\Rightarrow \frac{2x^2 + 1}{4} = \frac{7}{12} \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{3}</math>.<br/> Khi đó đường cao<br/> <math display="block">SH = \sqrt{SC^2 - CH^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}</math> .<br/> Vậy <math>V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{\sqrt{21}}{54}</math>.</p> | <p><b>0,5</b><br/><b>0,5</b><br/><b>0,5</b></p> |
| <p><b>Câu 4a</b><br/> Gọi <math>x, y</math> (chiếc) là số lượng bánh nướng, bánh dẻo mà xí nghiệp cần sản xuất. Trong đó <math>0 &lt; x, 0 &lt; y</math> với <math>x, y \in \mathbb{N}^*</math>.<br/> Khối lượng bột mỳ cần dùng là: <math>0,12x + 0,16y</math> (kg).</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                 |

Khối lượng đường cần dùng là:  $0,06x + 0,04y$  (kg).

Ta có:  $0,12x + 0,16y \leq 600$  hay  $3x + 4y \leq 15000$ ;

$0,06x + 0,04y \leq 240$  hay  $3x + 2y \leq 12000$ .

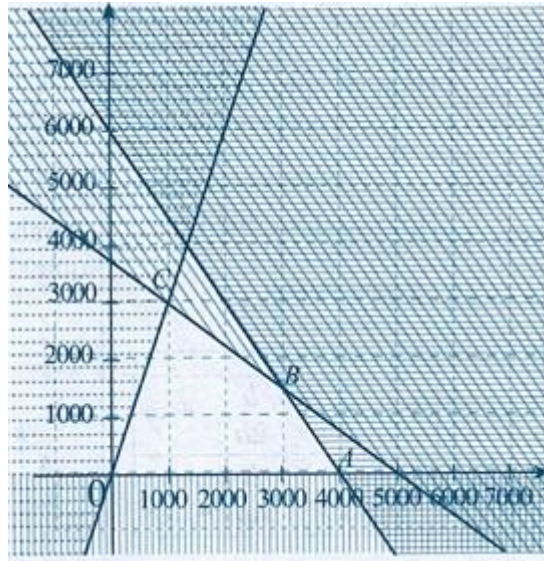
Số tiền lãi thu được là:  $T = 8x + 6y$  (nghìn đồng). Bài toán đưa về,

tìm  $x, y$  là nghiệm của hệ bất phương trình: 
$$\begin{cases} 3x + 4y \leq 15000 \\ 3x + 2y \leq 12000 \\ y \leq 3x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (V)$$
 0,5

để  $T = 8x + 6y$  đạt giá trị lớn nhất.

Trước hết, ta biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình (V).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tứ giác  $OABC$  với  $O(0;0), A(4000;0), B(3000;1500), C(1000;3000)$  0,5



Tính giá trị của  $T$  tại các cặp số  $(x; y)$  là tọa độ các đỉnh trên rồi so sánh các giá trị đó, ta được  $T$  đạt giá trị lớn nhất bằng 33000 (nghìn đồng) hay 33 triệu đồng tại  $x = 3000; y = 1500$ . 0,5

Vậy để đạt được tiền lãi cao nhất, xí nghiệp nên sản xuất 3000 chiếc bánh nướng và 1.500 chiếc bánh dẻo.

#### Câu 4b)

Khi  $n = 1$ , ta có  $S_1 = u_1^2 + 1 - 1 = 2 - 1 = u_2 - 1^2$

Giả sử  $S_k = u_{k+1} - 1^2, k \geq 1$

Ta chứng minh  $S_{k+1} = u_{k+2} - 1^2 (*)$  0,5

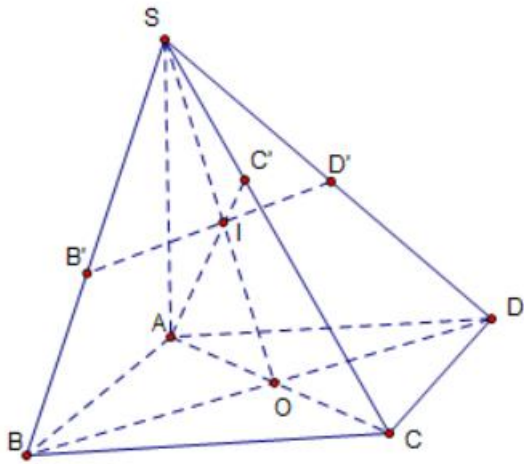
0,5

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| $S_{k+1} = u_1^2 + 1 \quad u_2^2 + 1 \quad u_3^2 + 1 \dots u_{k+1}^2 + 1 - 1$ $= S_k + 1 \quad u_{k+1}^2 + 1 - 1 = \left[ u_{k+1}^2 - 1^2 + 1 \right] u_{k+1}^2 + 1 - 1$ <p>Ta có:</p> $= u_{k+1}^2 + 1^2 - 2u_{k+1} \quad u_{k+1}^2 + 1 + u_{k+1}^2 + 1 - 1$ $= u_{k+1}^2 + 1 - u_{k+1}^2 = u_{k+2} - 1^2$ <p>Do <math>u_1 = 1; u_2 = 2 \Rightarrow u_n</math> là số nguyên nên <math>S_n</math> là số chính phương (đpcm)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | <p>0,5</p> <p>0,5</p>                       |
| <p><b>Câu 5a</b></p> <p><b>Giải.</b></p> <p><u>Điều kiện cần</u></p> $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} + ax + b}{(x-1)^2} \text{ tồn tại hữu hạn suy ra } a + b = -1 \Rightarrow b = -a - 1$ <p>Suy ra <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} + ax + b}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} + ax - a - 1}{(x-1)^2}</math></p> $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2x-2}{\sqrt{2x-1}+1} + a(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1} + a}{x-1}$ <p><math>\Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = 0</math></p> <p><u>điểm)</u></p> <p><u>Điều kiện đủ</u></p> <p>Với <math>a = -1, b = 0</math></p> $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} + ax + b}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} - x}{(x-1)^2}$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)^2}{(x-1)^2 (\sqrt{2x-1} + x)} = -\frac{1}{2}$ | <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> |
| <p><b>Câu 5b</b></p> $\frac{C'S}{CC'} \cdot \frac{AC}{AO} \cdot \frac{IO}{IS} = 1 \Rightarrow \frac{C'S}{CC'} = \frac{1}{2} \frac{IO}{IS}$ $\frac{2BB'}{SB} + \frac{3SD'}{D'D} + \frac{10SC'}{C'C} = 8 \Leftrightarrow \frac{2IO}{SO} + \frac{3SB'}{B'B} + 5 \frac{SI}{IO} = 8$ $\Leftrightarrow \frac{2}{\frac{SO}{OI}} + 3 \left( \frac{SI}{IO} \right) + 5 \frac{SI}{IO} = 8 \Leftrightarrow \frac{2}{\frac{SI+IO}{OI}} + 3 \left( \frac{SI}{IO} \right) + 5 \frac{SI}{IO} = 8$ $\frac{2}{\frac{SI}{OI} + 1} + 3 \left( \frac{SI}{IO} \right) + 5 \frac{SI}{IO} = 8$ <p><math>x = \frac{SI}{IO}, x &gt; 0</math>, ta có phương trình</p>                                                                                                                                                                                                                             | <p>0,5</p> <p>0,5</p>                       |

$$\frac{2}{x+1} + 8x = 8 \Leftrightarrow 1 = 4(1-x^2)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{SC'}{CC'} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



0,5

0,5