

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG. QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

Mục lục của chương

Bài 1. Điểm, đường thẳng và mặt phẳng trong không gian	223
Bài 2. Hai đường thẳng song song	242
Bài 3. Đường thẳng và mặt phẳng song song	253
Bài 4. Hai mặt phẳng song song	262
Bài 5. Phép chiếu song song	274
Bài 6. Ôn tập chương 4	281

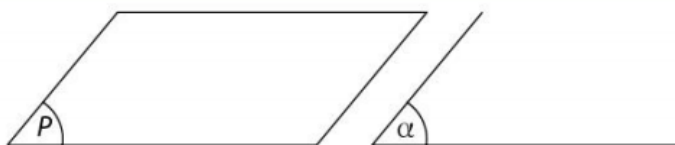
1 ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN

I. MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN

1) Khái niệm mở đầu

Mặt bảng, mặt bàn, mặt hồ nước yên lặng cho ta hình ảnh một phần của một mặt phẳng. Mặt phẳng không có bề dày và không có giới hạn.

- Để biểu diễn mặt phẳng, ta thường dùng hình bình hành hay một miền góc và ghi tên của mặt phẳng vào một góc của hình biểu diễn.
- Để kí hiệu mặt phẳng, ta dùng chữ cái in hoa hoặc chữ cái Hy Lạp trong dấu ngoặc để kí hiệu mặt phẳng.



LƯU Ý. Mặt phẳng (P) còn được viết tắt là mp (P) hoặc (P).

2) Điểm thuộc mặt phẳng



Cho hai điểm A, B và mặt phẳng (P).

- ◇ Nếu điểm A thuộc mặt phẳng (P) thì ta nói A nằm trên (P) hay (P) chứa A , hay (P) đi qua A và kí hiệu là $A \in (P)$.
- ◇ Nếu điểm B không thuộc mặt phẳng (P) thì ta nói B nằm ngoài (P) hay (P) không chứa B và kí hiệu là $B \notin (P)$.

3) Biểu diễn các hình không gian lên một mặt phẳng



Để biểu diễn một hình trong không gian lên một mặt phẳng (tờ giấy, mặt bảng, ...), ta thường dựa vào các quy tắc sau:

- ◇ Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.

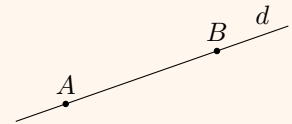
- ◇ Giữ nguyên tính liên thuộc (thuộc hay không thuộc) giữa điểm với đường thẳng hoặc với đoạn thẳng.
- ◇ Giữ nguyên tính song song, tính cắt nhau giữa các đường thẳng.
- ◇ Biểu diễn đường nhìn thấy bằng nét vẽ liền và biểu diễn đường bị che khuất bằng nét vẽ đứt đoạn.

II. CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN CỦA HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

1) Tính chất 1



Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.



LƯU Ý. Đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt A, B được kí hiệu là AB . Ta cũng nói đường thẳng AB xác định bởi hai điểm A, B .

Ví dụ 1



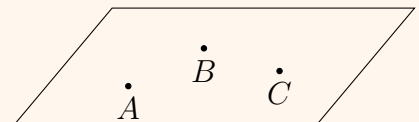
Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua hai trong bốn điểm đã cho?

 **Hướng dẫn giải.** Do qua hai điểm phân biệt chỉ có một đường thẳng nên qua bốn điểm phân biệt không thẳng hàng A, B, C, D , ta xác định được sáu đường thẳng là AB, AC, AD, BC, BD và CD .

2) Tính chất 2



Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.



LƯU Ý. Mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng được kí hiệu là mặt phẳng (ABC) .

Ví dụ 2

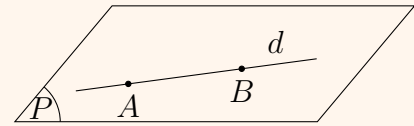
Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua ba đỉnh của tam giác MNP ?

Hướng dẫn giải. Ba đỉnh của tam giác MNP không thẳng hàng nên chỉ có một mặt phẳng đi qua ba đỉnh của tam giác MNP .

3) Tính chất 3



Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.



LƯU Ý. Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) thường được kí hiệu là $d \subset (P)$ hoặc $(P) \supset d$.

Ví dụ 3

Cho mặt phẳng (Q) đi qua bốn đỉnh của tứ giác $ABCD$. Các điểm nằm trên các đường chéo của tứ giác $ABCD$ có thuộc (Q) không? Giải thích.

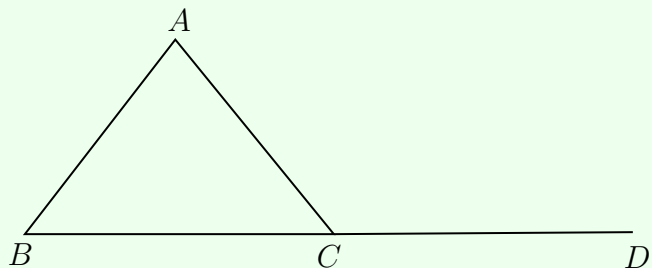
Hướng dẫn giải.

- Áp dụng tính chất 2, ta có mặt phẳng (Q) là mặt phẳng duy nhất đi qua bốn điểm A, B, C, D .
- Áp dụng tính chất 3, ta có mọi điểm nằm trên các đường chéo AC, BD đều thuộc mặt phẳng (Q) .



1

Cho tam giác ABC . Gọi D là điểm nằm trên đường thẳng chứa cạnh BC sao cho $BD = 2BC$. Điểm D có thuộc mặt phẳng (ABC) không? Đường thẳng AD có nằm trong mặt phẳng (ABC) không?



4) Tính chất 4



Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.



LƯU Ý. Nếu có nhiều điểm cùng thuộc một mặt phẳng thì ta nói những điểm đó đồng phẳng, còn nếu không có mặt phẳng nào chứa các điểm đó thì ta nói chúng không đồng phẳng.



Ví dụ 4



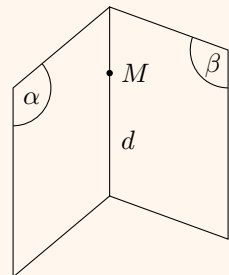
Cho tam giác MNP và điểm O không thuộc mặt phẳng chứa ba điểm M, N, P . Tìm các mặt phẳng phân biệt được xác định từ bốn điểm M, N, P, O .

Hướng dẫn giải. Bốn điểm M, N, P, O là bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng trong không gian (tồn tại theo tính chất 4). Ta xác định được bốn mặt phẳng phân biệt là: $(MNP), (MNO), (MPO), (NPO)$.

5) Tính chất 5



Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.



LƯU Ý. Đường thẳng d chung của hai mặt phẳng (P) và (Q) được gọi là giao tuyến của (P) và (Q) , kí hiệu $d = (P) \cap (Q)$.



Ví dụ 5



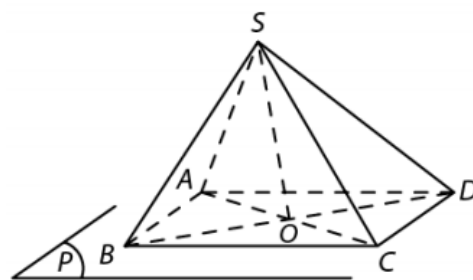
Trong mặt phẳng (P) , cho hình bình hành $ABCD$. Lấy một điểm S nằm ngoài mặt phẳng (P) . Hãy xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) .

Hướng dẫn giải. Rõ ràng S là một điểm chung của (SAC) và (SBD) .

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC, BD của hình bình hành $ABCD$. Ta có O thuộc AC và $AC \subset (SAC)$ nên O thuộc (SAC) .

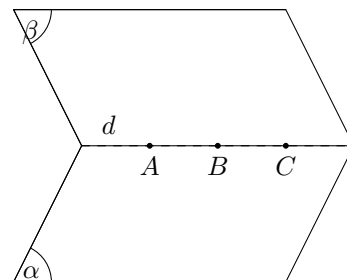
Tương tự O thuộc BD và $BD \subset (SBD)$ nên O thuộc (SBD) . Suy ra, O cũng là một điểm chung của (SAC) và (SBD) .

Vậy, giao tuyến của (SAC) và (SBD) là đường thẳng SO , hay $SO = (SAC) \cap (SBD)$.



Ví dụ 6

Cho A, B, C là ba điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) . Chứng minh rằng A, B, C thẳng hàng.

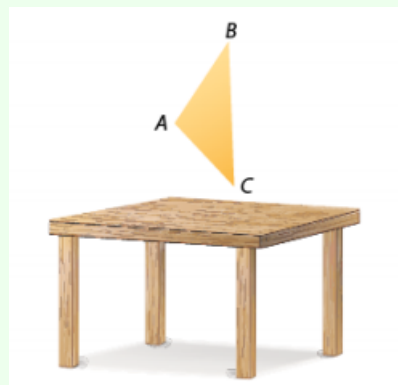


Hướng dẫn giải. Ta có A, B, C là ba điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) nên A, B, C cùng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) (theo tính chất 5). Vậy A, B, C thẳng hàng.



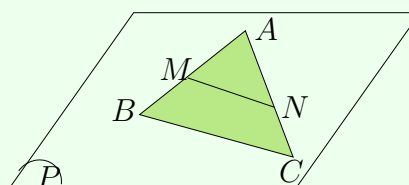
2

Bạn Nam cầm một miếng bìa hình tam giác với 3 đỉnh là A, B, C (Hình 4.23) đưa lên không quá cao so với mặt bàn và khẳng định rằng: “Nếu ta đặt các thanh thước dài dọc theo các cạnh AB, BC, CA để các thanh thước này chạm vào mặt bàn lần lượt tại các vị trí đánh dấu là điểm D, E, F thì ba điểm này thẳng hàng”. Bạn Mai không đồng ý và khẳng định: “ D, E, F không thẳng hàng được vì A, B, C không thẳng hàng”. Hãy cho biết ai đúng, ai sai? Vì sao?



3

Trong mặt phẳng (P) , cho tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AC . Tính tỉ số $\frac{MN}{BC}$.



6) Tính chất 6



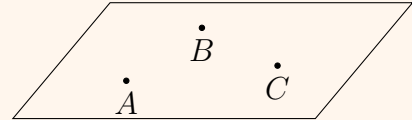
Trong mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.

III. CÁCH XÁC ĐỊNH MẶT PHẪNG



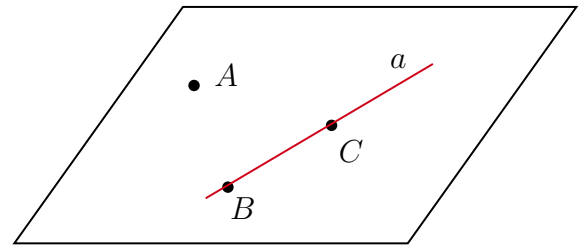
Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa ba điểm không thẳng hàng.

Mặt phẳng xác định bởi ba điểm A, B, C không thẳng hàng kí hiệu là $mp(ABC)$ hay (ABC) .



Ví dụ 7

Cho đường thẳng a và điểm A không nằm trên đường thẳng a . Trên a lấy hai điểm B, C phân biệt. Đường thẳng a có nằm trong (ABC) không? Giải thích.



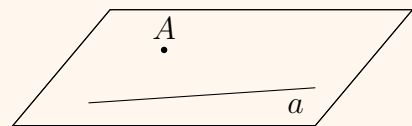
 **Hướng dẫn giải.** Áp dụng tính chất 2, ta có duy nhất một mặt phẳng đi qua ba điểm phân biệt A, B, C là mặt phẳng (ABC) .

Áp dụng tính chất 3, ta có đường thẳng a có hai điểm phân biệt B, C nằm trong (ABC) nên mọi điểm của đường thẳng a nằm trong (ABC) . Do đó đường thẳng a nằm trong (ABC) .



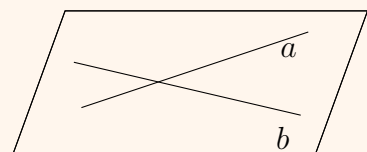
Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng đó.

Mặt phẳng xác định bởi điểm A và đường thẳng a không qua điểm A kí hiệu là $mp(A, a)$ hay (A, a) .



Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

Mặt phẳng xác định bởi điểm hai đường thẳng a, b cắt nhau kí hiệu là $mp(a, b)$.

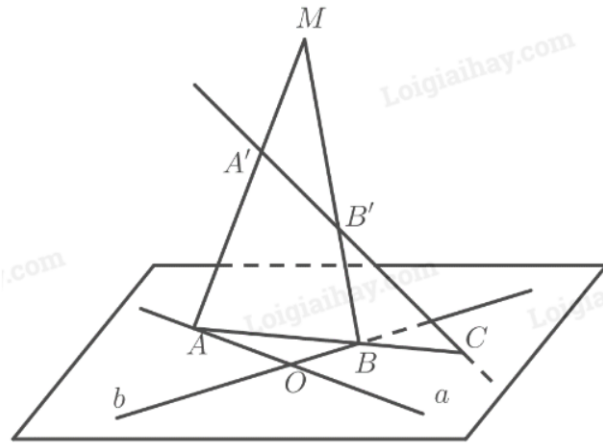


Ví dụ 8

Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại O và điểm M không thuộc mặt phẳng (a, b) .

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (M, a) và (M, b) .
- Lấy A, B lần lượt là hai điểm trên a, b và khác với điểm O . Tìm giao tuyến của (MAB) và mp (a, b) .
- Lấy điểm A' trên đoạn MA và điểm B' trên đoạn MB sao cho đường thẳng $A'B'$ cắt mp (a, b) tại C . Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Hướng dẫn giải.



a) Ta có:

$$\begin{cases} M \in (M, a) \\ M \in (M, b) \end{cases} \Rightarrow M \in (M, a) \cap (M, b)$$

$$\begin{cases} O \in a \subset (M, a) \\ O \in b \subset (M, b) \end{cases} \Rightarrow O \in (M, a) \cap (M, b)$$

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (M, a) và (M, b) là đường thẳng MO .

b) Ta có:

$$\begin{cases} A \in (MAB) \\ A \in a \subset (a, b) \end{cases} \Rightarrow A \in (MAB) \cap (a, b)$$

$$\begin{cases} B \in (MAB) \\ B \in b \subset (a, b) \end{cases} \Rightarrow B \in (MAB) \cap (a, b)$$

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (MAB) và (a, b) là đường thẳng AB (1).

c) Ta có:

$$\begin{cases} A' \in MA \subset (MAB) \\ B' \in MB \subset (MAB) \end{cases} \Rightarrow A'B' \subset (MAB)$$

Vì $C \in A'B' \subset (MAB)$ và $C \in mp(a, b)$ nên điểm C nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (MAB) và (a, b) (2).

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm A, B, C thẳng hàng.



④ Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau và hai điểm M, N không nằm trong mặt phẳng (a, b) . Biết rằng đường thẳng MN và mặt phẳng (a, b) luôn có một điểm chung. Một mặt phẳng (α) thay đổi luôn luôn chứa MN và (α) có điểm chung với hai đường thẳng a, b lần lượt là A, B . Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định khi (α) thay đổi.



⑤

Giải thích tại sao ghế bốn chân có thể bị khập khiễng còn ghế ba chân thì không.



⑥

Trong xây dựng, người ta thường dùng máy quét tia laser để kẻ các đường thẳng trên tường hoặc sàn nhà. Tìm giao tuyến của mặt phẳng tạo bởi các tia laser OA và OB của các mặt tường trong hình bên.



IV. HÌNH CHÓP VÀ TỨ DIỆN

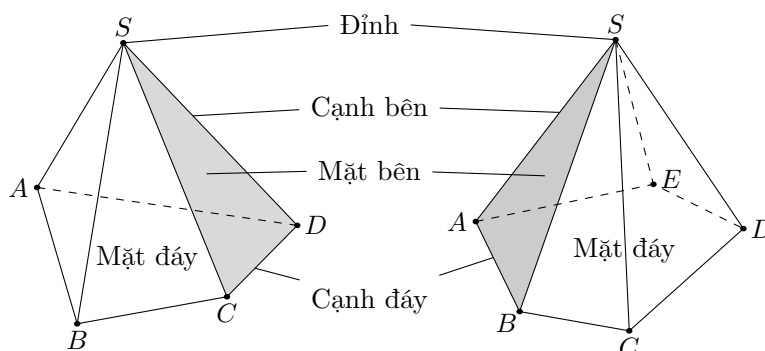
1) Hình chóp



Cho đa giác lồi $A_1A_2 \dots A_n$ nằm trong mặt phẳng (α) và điểm S không thuộc (α) . Nối S với các đỉnh $A_1, A_2, \dots, A_n$ ta được n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1$. Hình tạo bởi n tam giác đó và đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ được gọi là hình chóp, kí hiệu $S.A_1A_2 \dots A_n$.

Trong hình chóp $S.A_1A_2 \dots A_n$, ta gọi:

- ◇ Điểm S là **đỉnh**;
- ◇ Các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1$ là các **mặt bên**;
- ◇ Đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ là **mặt đáy**;
- ◇ Các đoạn thẳng $SA_1, SA_2, \dots, SA_n$ là các **cạnh bên**;
- ◇ Các cạnh của đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ là các **cạnh đáy**.



Ta gọi hình chóp có đáy tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... lần lượt là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác, ...

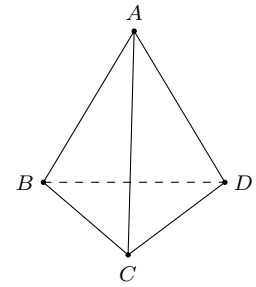
2) Hình tứ diện



Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình tạo bởi bốn tam giác ABC, ACD, ADB và BCD được gọi là hình tứ diện (hay tứ diện), kí hiệu $ABCD$.

Trong tứ diện $ABCD$, ta gọi:

- ◇ Các điểm A, B, C, D là các **đỉnh**.
- ◇ Các đoạn thẳng AB, AC, AD, BC, CD, BD là các **cạnh** của tứ diện.
- ◇ Hai cạnh không đi qua một đỉnh là **hai cạnh đối diện**.
- ◇ Các tam giác ABC, ACD, ADB, BCD là các **mặt** của tứ diện.
- ◇ Đỉnh không thuộc một mặt của tứ diện là **đỉnh đối diện** với mặt đó.



LƯU Ý.

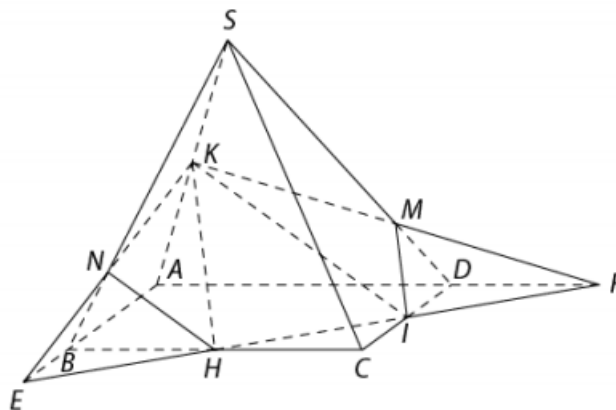
- a) Hình tứ diện có bốn mặt là các tam giác đều được gọi là hình tứ diện đều.
- b) Một tứ diện có thể xem như là một hình chóp tam giác với đỉnh là một đỉnh tùy ý của tứ diện và đáy là mặt của tứ diện không chứa đỉnh đó.

Ví dụ 9



Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm của BC, CD, SA . Tìm giao điểm của mặt phẳng (HIK) với các cạnh của hình chóp và giao tuyến của mặt phẳng (HIK) với các mặt của hình chóp.

Hướng dẫn giải.



Đường thẳng HI cắt đường thẳng AB và AD lần lượt tại E, F .

Gọi N là giao điểm của KE và SB , M là giao điểm của KF và SD .

Ta có giao điểm của (HIK) với các cạnh SB, SA, SD lần lượt là N, K, M . Từ đó suy ra:

$$(HIK) \cap (ABCD) = IH; (HIK) \cap (SBC) = HN;$$

$$(HIK) \cap (SAB) = NK; (HIK) \cap (SAD) = KM; (HIK) \cap (SCD) = MI.$$

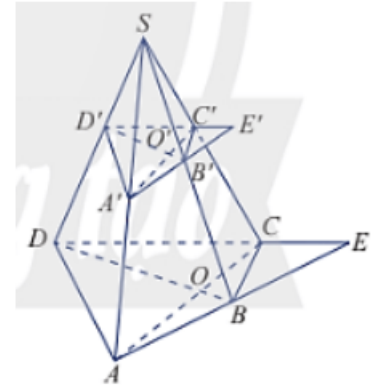


LƯU Ý. Việc tìm giao tuyến của mặt phẳng (HIK) trong ví dụ 9 với các mặt của hình chóp được gọi là tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (HKI). Ta tìm các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau của mặt phẳng (HIK) với các mặt của hình chóp cho đến khi khép kín thành một đa giác phẳng. Đa giác đó là thiết diện cần tìm và các đoạn giao tuyến chính là các cạnh của thiết diện. Thiết diện ở ví dụ 9 là ngũ giác $IHNKM$.

Ví dụ 10



Cho hình chóp $S.ABCD$. Trên các cạnh bên của hình chóp lấy lần lượt các điểm A', B', C', D' . Cho biết AC cắt BD tại O , $A'C'$ cắt $B'D'$ tại O' , AB cắt CD tại E và $A'B'$ cắt $D'C'$ tại E' (Hình vẽ). Chứng minh rằng:



- S, O', O thẳng hàng;
- S, E', E thẳng hàng

Hướng dẫn giải.

a) Ta có:

$$\begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$$

$$\begin{cases} O' \in A'C' \subset (SAC) \\ O' \in B'D' \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O' \in (SAC) \cap (SBD)$$

Mà $S \in (SAC) \cap (SBD)$.

Do đó, S, O, O' cùng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) .

Vậy S, O', O thẳng hàng.

b) Ta có:

$$\begin{cases} E \in AB \subset (SAB) \\ E \in CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow E \in (SAB) \cap (SCD)$$

$$\begin{cases} E' \in A'B' \subset (SAB) \\ E' \in C'D' \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow E' \in (SAB) \cap (SCD)$$

Mà $S \in (SAB) \cap (SCD)$.

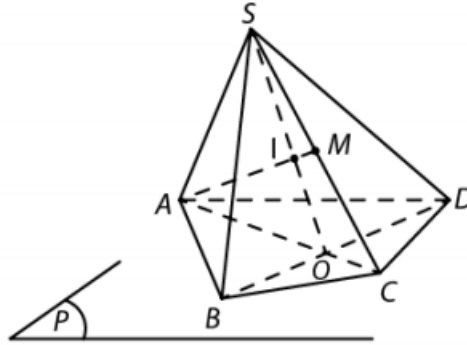
Do đó, S, E, E' cùng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

Vậy ba điểm S, E, E' thẳng hàng.

Ví dụ 11



Trong mặt phẳng (P) , cho tứ giác $ABCD$, lấy điểm S nằm ngoài mặt phẳng (P) . Gọi M là trung điểm của SC . Tìm giao điểm của AM và mặt phẳng (SBD) .



Hướng dẫn giải.

- ◇ Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi O là giao điểm của AC và BD .
- ◇ Trong mặt phẳng (SAC) , ta có đường thẳng AM và SO cắt nhau tại một điểm, gọi điểm đó là I .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} I \in SO \\ SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SBD) \text{ và hiển nhiên } I \in AM.$$

Vậy I là giao điểm của AM và (SBD) .



LƯU Ý.

- ◇ Để tìm giao điểm của một đường thẳng và một mặt phẳng, ta có thể đưa về việc tìm giao điểm của đường thẳng đó với một đường thẳng nằm trong mặt phẳng đã cho.
- ◇ Nếu I là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α) thì ta còn kí hiệu là $I = d \cap (\alpha)$ hoặc $d \cap (\alpha) = I$.



- ⑦ Cho hình chóp $S.ABCD$ với hai đường thẳng AB và CD cắt nhau. Gọi M là một điểm thuộc SA (khác S và A). Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (MCD) .



8 Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình thang có đáy lớn AB . Gọi M là trung điểm của SD . Hãy xác định giao điểm của các cặp mặt phẳng (SAD) và (SBC) ; (MBC) và (SAD) .



9 Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình thang có đáy lớn AB . Gọi M là trung điểm của SD . Hãy xác định giao điểm của các cặp mặt phẳng (SAD) và (SBC) ; (MBC) và (SAD) .



10 Cho tứ diện $SABC$. Gọi H, K lần lượt là hai điểm trên hai cạnh SA và SC ($H \neq S, A$; $K \neq S, C$) sao cho HK không song song với AC . Gọi I là trung điểm của BC .

- Tìm giao điểm của đường thẳng HK và mặt phẳng (ABC) .
- Tìm giao tuyến của các mặt phẳng (SAI) và (ABK) ; (SAI) và (BCH) .



11 Trong mặt phẳng (Q) , cho hình thang $ABCD$, đáy lớn AD . Lấy điểm S nằm ngoài mặt phẳng (Q) . Gọi M là trung điểm của SB . Tìm giao điểm của đường thẳng AM và mặt phẳng (SCD) .

BÀI TẬP



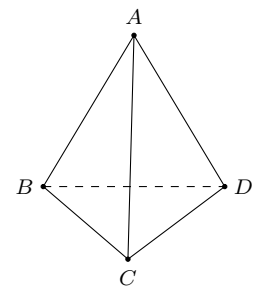
1 Trắc nghiệm

❖ **Câu 1.** Trong không gian, qua ba điểm không thẳng hàng xác định được bao nhiêu mặt phẳng?

- (A) 1 . (B) 2 . (C) 3 . (D) Vô số .

❖ **Câu 2.** Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng (tham khảo hình vẽ). Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ các điểm đã cho?

- (A) 4 . (B) 2 . (C) 3 . (D) 6 .



❖ **Câu 3.** Một hình chóp có đáy là ngũ giác có số mặt và số cạnh là

- (A) 6 mặt, 5 cạnh . (B) 6 mặt, 10 cạnh.
(C) 5 mặt, 5 cạnh . (D) 5 mặt, 10 cạnh .

❖ **Câu 4.** Trong hình học không gian, cho mặt phẳng (P) . Khẳng định nào đúng?

- (A) Điểm luôn phải thuộc mặt phẳng (P) .
- (B) Điểm luôn không thuộc mặt phẳng (P) .
- (C) Điểm vừa thuộc, đồng thời vừa không thuộc mặt phẳng (P) .
- (D) Điểm có thể thuộc mặt phẳng (P) , có thể không thuộc mặt phẳng (P) .

❖ **Câu 5.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- (A) Qua 2 điểm phân biệt có duy nhất một mặt phẳng.
- (B) Qua 3 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.
- (C) Qua 3 điểm không thẳng hàng có duy nhất một mặt phẳng.
- (D) Qua 4 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.

❖ **Câu 6.** Cho hai đường thẳng a, b cắt nhau và không đi qua điểm A . Xác định được nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng bởi a, b và A ?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

❖ **Câu 7.** Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trên một mặt phẳng. Trên AB, AD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho MN cắt BD tại I . Điểm I **không** thuộc mặt phẳng nào sau đây?

- (A) (CMN) .
- (B) (BCD) .
- (C) (ABD) .
- (D) (ACD) .

❖ **Câu 8.** Trong không gian, mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

- (A) Có duy nhất một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.
- (B) Tồn tại duy nhất một mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau.
- (C) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua ba điểm phân biệt.
- (D) Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

❖ **Câu 9.** Trong không gian, mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

- (A) Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.
- (B) Nếu ba điểm phân biệt M, N, P cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì chúng thẳng hàng.
- (C) Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn có vô số điểm chung khác nữa.
- (D) Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

❖ **Câu 10.** Cho mặt phẳng (P) và ba điểm A, B, C phân biệt không thẳng hàng và không thuộc mặt phẳng (P) . Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của AB, BC, CA với (P) . Khẳng định nào đúng?

- (A) $\triangle MNP = \triangle ABC$.
- (B) M, N, P thẳng hàng.
- (C) 4 điểm M, N, P, C không đồng phẳng.
- (D) 4 điểm A, B, C, M không đồng phẳng.

2 Tự luận

❖ **Bài 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD . Lấy M, N lần lượt thuộc các cạnh SA, SC .

- a) Chứng minh đường thẳng MN nằm trong mặt phẳng (SAC) .
- b) Chứng minh O là điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) .

❖ **Bài 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC .

- a) Tìm giao điểm I của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD) . Chứng minh $IA = 2IM$.
- b) Tìm giao điểm E của đường thẳng SD và mặt phẳng (ABM) .
- c) Gọi N là một điểm tùy ý trên cạnh AB . Tìm giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) .

❖ **Bài 3.** Cho tứ diện $ABCD$ và E là một điểm nằm trong tam giác BCD . Gọi F là một điểm nằm giữa A và E . Xác định giao điểm của đường thẳng BF và mặt phẳng (ACD) .

❖ **Bài 4.** Cho tam giác ABC và điểm S không thuộc mặt phẳng (ABC) . Lấy D, E là các điểm lần lượt thuộc các cạnh SA, SB và D, E khác S .

- a) Đường thẳng DE có nằm trong mặt phẳng (SAB) không?
- b) Giả sử DE cắt AB tại F . Chứng minh rằng F là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (CDE) .

❖ **Bài 5.** Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng phân biệt a, b nằm trong (P) . Một đường thẳng c cắt hai đường thẳng a và b tại hai điểm phân biệt. Chứng minh rằng đường thẳng c nằm trong mặt phẳng (P) .

❖ **Bài 6.** Có tồn tại hay không một hình chóp có số cạnh (gồm cả cạnh bên và cạnh đáy) của nó là số lẻ? Vì sao?

Bài 7. Tại các nhà hàng, khách sạn, nhân viên phục vụ bàn thường xuyên phải bưng bê nhiều khay, đĩa đồ ăn khác nhau. Một trong những nguyên tắc nhân viên cần nhớ là khay phải được bưng bằng ít nhất 3 ngón tay. Hãy giải thích tại sao.

Bài 8. Trong mặt phẳng (P) , cho hình bình hành $ABCD$. Lấy S nằm ngoài mặt phẳng (P) . Lấy M, N lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh SA, SC .

- Chứng minh rằng đường thẳng MN nằm trong mặt phẳng (SAC) .
- Giả sử MN và AC cắt nhau tại I , chứng minh I là điểm chung của hai mặt phẳng (BMN) và (ABC) , từ đó suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (BMN) và (ABC) .

Bài 9. Cho bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, CD .

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABN) và (MCD) .
- Gọi I và K lần lượt là điểm trên đoạn thẳng AC và AD . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MCD) và (BIK) .

Bài 10. Trong mặt phẳng (P) , cho tứ giác $ABCD$. Gọi S là điểm không thuộc mặt phẳng (P) . Lấy M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SA, SC .

- Xác định giao điểm K của đường thẳng SD và mặt phẳng (BMN) .
- Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng MK và AD , Q là giao điểm của hai đường thẳng NK và CD . Chứng minh rằng ba điểm P, Q, B thẳng hàng.

Bài 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SCD .

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBG) và (SAC) .
- Tìm giao điểm của đường thẳng BG và mặt phẳng (SAC) .

Bài 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của AC và BD ; M và N lần lượt là trung điểm của SB và SD ; P thuộc đoạn SC và không là trung điểm của SC .

- Tìm giao điểm E của đường thẳng SO và mặt phẳng (MNP) .
- Tìm giao điểm Q của đường thẳng SA và mặt phẳng (MNP) .
- Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của QM và AB , QP và AC , QN và AD . Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Bài 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F, G lần lượt là ba điểm trên ba cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại I ($I \neq C$), EG cắt AD tại H ($H \neq D$).

- Tìm giao tuyến của các mặt phẳng (EFG) và (BCD) , (EFG) và (ACD) .
- Chứng minh ba đường thẳng CD, IG, HF cùng đi qua một điểm.

Bài 14. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ và lấy một điểm E thuộc cạnh SA của hình chóp (E khác S, A). Trong mặt phẳng $(ABCD)$ vẽ một đường thẳng d cắt các cạnh CB, CD lần lượt tại M, N và cắt các tia AB, AD lần lượt tại P, Q .

- Xác định giao điểm của $mp(E, d)$ với các cạnh SB, SD của hình chóp.
- Xác định giao tuyến của $mp(E, d)$ với các mặt của hình chóp.

Bài 15. Cho hình tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AC, BC, BD lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $AM = CM, BN = CN, BP = 2DP$.

- Xác định giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP) .
- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (MNP) .

Bài 16. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho $AE = \frac{1}{2}BE$ và $AF = 2CF$. Gọi O là một điểm nằm trong tam giác BCD .

- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (OEF) và (ABD) .
- Xác định giao điểm (nếu có) của đường thẳng AD và mặt phẳng (OEF) .

Bài 17. Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AB, AC, AD . Gọi O là một điểm nằm trong tam giác BCD .

- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (ABO) và (ACD) .
- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (ABO) và (MNP) .
- Xác định giao điểm của đường thẳng AO và mặt phẳng (MNP) .

Bài 18. Cho hình tứ diện $SABC$ và các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các cạnh SA, SB, SC . Giả sử hai đường thẳng $B'C'$ và BC cắt nhau tại D , hai đường thẳng $C'A'$ và CA cắt nhau tại E và hai đường thẳng $A'B'$ và AB cắt nhau tại F . Chứng minh rằng ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Bài 19. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi I là trung điểm của AD , J là điểm đối xứng với D qua C , K là điểm đối xứng với D qua B . Xác định thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng (IJK) và tính diện tích của thiết diện này.

Bài 20. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến d và một điểm O nằm ngoài cả hai mặt phẳng $(P), (Q)$. Gọi A, B là hai điểm phân biệt thuộc mặt phẳng (P) sao cho AB cắt d tại C . Gọi D, E lần lượt là giao điểm của các đường thẳng OA, OB với mặt phẳng (Q) . Chứng minh rằng ba điểm C, D, E thẳng hàng.

Bài 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M là trung điểm của SB , G là trọng tâm tam giác SAD .

- Tìm giao điểm I của GM với $(ABCD)$. Chứng minh $IC = 2ID$.
- Tìm giao điểm J của (OMG) với AD . Đặt $JA = k \cdot JD$. Tìm k .
- Tìm giao điểm K của (OMG) với SA . Đặt $KA = p \cdot KS$. Tìm p .
- Tìm thiết diện tạo bởi (OMG) với hình chóp $S.ABCD$.

Bài 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi K là trọng tâm của tam giác SAC và I, J lần lượt là trung điểm của CD và SD .

- Tìm giao điểm H của đường thẳng IK với mặt phẳng (SAB) .
- Xác định thiết diện tạo bởi mặt phẳng (IJK) với hình chóp.

Bài 23. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ không là hình thang, điểm P nằm trong tam giác SAB và điểm M thuộc cạnh SD sao cho $MD = 2MS$.

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (PCD) .
- Tìm giao điểm của SC với mặt phẳng (ABM) .
- Gọi N là trung điểm của AD . Tìm thiết diện tạo bởi (MNP) và hình chóp.

Bài 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Trên các cạnh SB, SD ta lần lượt lấy các điểm M và N thỏa $SB = 3SM$ và $3SN = 2SD$.

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (SCD) .
- Tìm thiết diện của mặt phẳng (AMN) và hình chóp $S.ABCD$.
- Gọi K là giao điểm của IN và CD . Tính tỉ số $\frac{KC}{KD}$.

Bài 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC . Gọi (P) là mặt phẳng qua M, N và B .

- Tìm giao tuyến của (P) với các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCD), (SAD)$.
- Tìm $E = DA \cap (P), F = DC \cap (P)$.
- Chứng tỏ rằng E, F, B thẳng hàng.

 **Bài 26.** Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm cạnh CD . Gọi M, N lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, CDA .

- Chứng minh rằng các điểm M, N thuộc mặt phẳng (ABI) .
- Gọi G là giao điểm của AM và BN . Chứng minh rằng: $\frac{GM}{GA} = \frac{GN}{GB} = \frac{1}{3}$.
- Gọi P, Q lần lượt là trọng tâm các tam giác DAB, ABC . Chứng minh rằng các đường thẳng CP, DQ cùng đi qua điểm G và $\frac{GP}{GC} = \frac{GQ}{GD} = \frac{1}{3}$.

 **Bài 27.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và K là trung điểm của AB và CD . Gọi J là một điểm trên đoạn AD sao cho $AD = 3JD$.

- Tìm giao điểm F của IJ và (BCD) .
- Tìm giao điểm E của (IJK) và đường thẳng BC . Tính tỉ số: $\frac{EB}{EC}$.
- Chứng minh ba đường thẳng AC, KJ, IE đồng quy tại điểm H . Tính $\frac{HC}{HA}$.
- Chứng minh $EJ // HF$ và đường thẳng IK đi qua trung điểm của đoạn HF .
- Gọi O là trung điểm IK và G là trọng tâm của tam giác BCD . Chứng minh ba điểm A, O, G thẳng hàng. Tính tỉ số: $\frac{OA}{OG}$.

2 HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

I. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian.

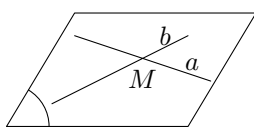
◇ Nếu a và b cùng nằm trong một mặt phẳng thì ta nói a và b đồng phẳng. Khi đó có ba trường hợp sau xảy ra:

☆ Nếu a và b có hai điểm chung thì ta nói a trùng b , kí hiệu $a \equiv b$.

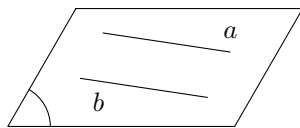
☆ Nếu a và b có một điểm chung duy nhất M thì ta nói a và b cắt nhau tại M , kí hiệu $a \cap b = M$.

☆ Nếu a và b không có điểm chung thì ta nói a và b song song với nhau, kí hiệu $a // b$.

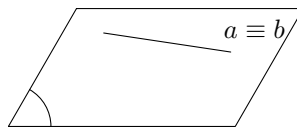
◇ Nếu a và b không cùng nằm trong bất kì mặt phẳng nào thì ta nói a và b chéo nhau. Khi đó, ta cũng nói a chéo với b , hoặc b chéo với a .



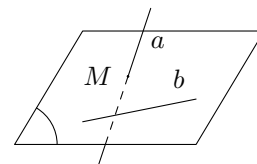
$a \cap b = \{M\}$
 a cắt b tại M



$a // b$
 a song song với b



$a \equiv b$
 a trùng với b



a và b chéo nhau



Hai đường thẳng được gọi là song song nếu chúng cùng nằm trên một mặt phẳng và không có điểm chung.



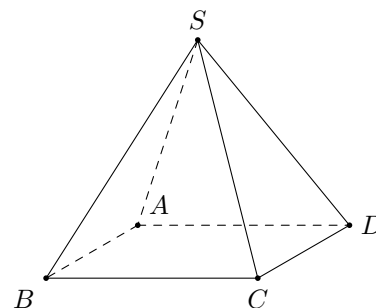
🔔 LƯU Ý.

- Hai đường thẳng được gọi là chéo nhau nếu chúng không đồng phẳng.
- Cho hai đường thẳng song song a và b . Có duy nhất một mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó, kí hiệu $mp(a, b)$.

Ví dụ 1

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây:



a) AB và CD ;

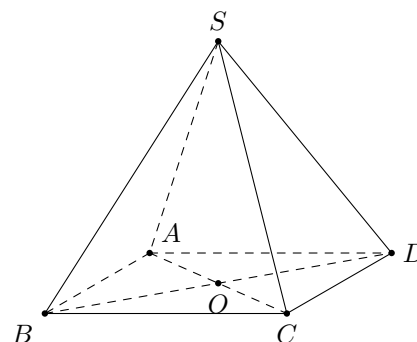
b) SA và SC ;

c) SA và BC .

Lời giải.

a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, ta có $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD$.

b) Trong mặt phẳng (SAC) , ta có SA cắt SC tại điểm S .



c) Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$.

Giả sử SA và BC cùng nằm trong một mặt phẳng (P) , suy ra đường thẳng AC nằm trong (P) , suy ra (P) chứa điểm O . Tương tự, ta cũng có OB nằm trong (P) , suy ra (P) chứa điểm D . Suy ra (P) chứa cả năm đỉnh của hình chóp $S.ABCD$. Điều này vô lý.

Vậy hai đường thẳng SA và BC không nằm trong cùng bất kỳ mặt phẳng nào, suy ra SA chéo với BC .



① Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD . Chứng minh đường thẳng MN song song với đường thẳng BD và đường thẳng AB chéo với đường thẳng CD . Hãy chỉ ra thêm một cặp đường thẳng chéo nhau khác của tứ diện này.

II. TÍNH CHẤT CƠ BẢN VỀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

1) Định lý 1



Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có đúng một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

Ví dụ 2



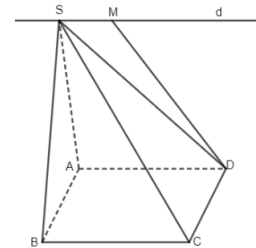
Cho hình chóp $S.ABCD$. Vẽ hình thang $ADMS$ có hai đáy là AD và MS . Gọi d là đường thẳng trong không gian đi qua S và song song với AD . Chứng minh đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (SAD) .

Hướng dẫn giải.

$ADMS$ là hình thang có hai đáy AD và MS nên $AD \parallel MS$.

Theo đề bài, lại có $d \parallel AD$. Do đó $d \equiv MS$ (theo định lý 1).

Lại có $SM \subset (ADMS)$ nên $d \subset (ADMS) \Rightarrow d \subset (SAD)$.



2) Định lý 2

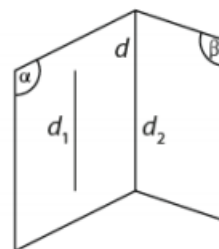
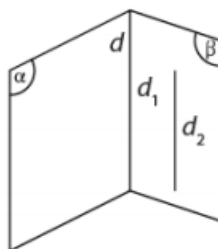
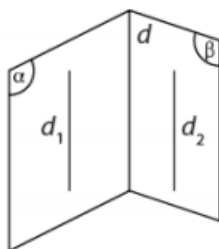


Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

Hệ quả



Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

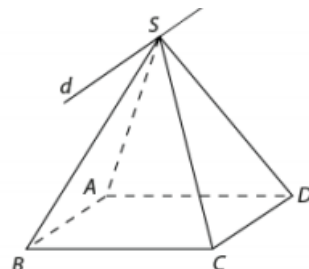


Ví dụ 3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Xác định giao tuyến các mặt phẳng (SAD) và (SBC) .

Hướng dẫn giải.

Các mặt phẳng (SAB) và (SCD) có điểm chung là S và lần lượt chứa hai đường thẳng song song là AB và CD nên giao tuyến của chúng là đường thẳng d đi qua S và song song với AB, CD .



Ví dụ 4

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của AC, BC và BD . Gọi Q là giao điểm của AD và mặt phẳng (MNP) . Xét vị trí tương đối của ba đường thẳng MQ, NP, CD .

Hướng dẫn giải.

Ta có:

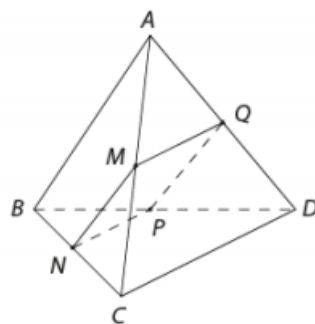
$$MQ = (MNP) \cap (ACD);$$

$$NP = (MNP) \cap (BCD);$$

$$CD = (ACD) \cap (BCD).$$

Theo Định lý 2, ta có MQ, NP, CD hoặc đôi một song song hoặc đồng quy.

Mặt khác, $NP \parallel CD$ (NP là đường trung bình của tam giác BCD) nên ta có MQ, NP, CD đôi một song song nhau.



② Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$). Gọi M là một điểm thuộc đoạn SA (M khác S và A). Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (MCD) .

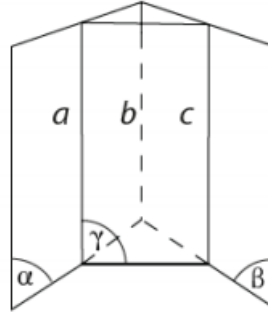


③ Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và AC . (P) là mặt phẳng chứa IJ và cắt SB, SC lần lượt tại K, L . Chứng minh rằng $IJLK$ là hình thang. Nếu K là trung điểm của SB thì tứ giác $IJLK$ là hình gì?

3) Định lý 3



Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.



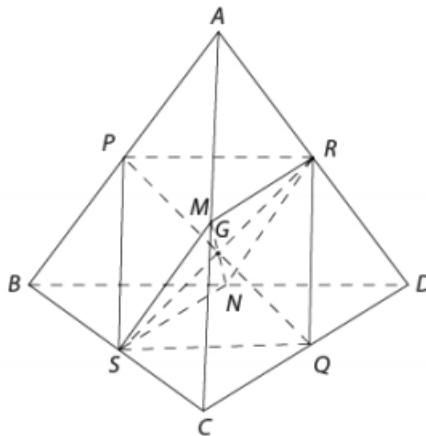
LƯU Ý. Khi hai đường thẳng phân biệt a, b cùng song song với đường thẳng c thì ta có thể kí hiệu $a//b//c$ và gọi là ba đường thẳng song song.

☕ Ví dụ 5



Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R và S lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AC, BD, AB, CD, AD và BC . Chứng minh rằng các đoạn thẳng MN, PQ, RS đồng quy tại trung điểm của mỗi đoạn.

Hướng dẫn giải.



Ta có: PR là đường trung bình của tam giác ABD , suy ra $PR//BD$ và $PR = \frac{1}{2}BD$ (1).

QS là đường trung bình của tam giác BCD , suy ra $QS//BD$ và $QS = \frac{1}{2}BD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $PR//QS$ và $PR = QS$, suy ra $PRQS$ là hình bình hành và do đó hai đường thẳng PQ và RS cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đường.

Tương tự, $MRNS$ là hình bình hành nên RS cắt MN tại trung điểm G .

Vậy ba đường thẳng MN, PQ, RS đồng quy tại G .

Ví dụ 6

Cho tứ diện $ABCD$ có I và J lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và BD . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua I, J và cắt hai cạnh AC và AD lần lượt tại M và N .

- Chứng minh $IJNM$ là một hình thang.
- Tìm vị trí của điểm M để $IJNM$ là hình bình hành.

Hướng dẫn giải.

- Ta có: I là trung điểm của BC , J là trung điểm của BD .

$\Rightarrow IJ$ là đường trung bình của tam giác BCD nên

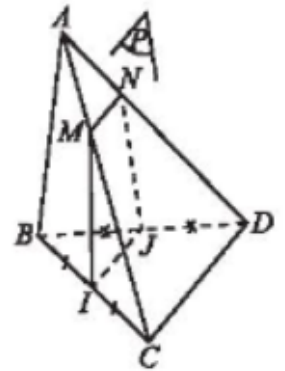
$$\Rightarrow IJ \parallel CD, \quad IJ = \frac{1}{2}CD$$

Ta có:

$$IJ = (BCD) \cap (P)$$

$$MN = (ACD) \cap (P)$$

$$CD = (ACD) \cap (BCD) \Rightarrow IJ \parallel CD$$



Do đó theo định lí 2 về giao tuyến của ba mặt phẳng ta có: $IJ \parallel MN \parallel CD \Rightarrow IJNM$ là hình thang.

- Để $IJNM$ là hình bình hành thì $IJ = MN$.

Mà $IJ = \frac{1}{2}CD$ nên $MN = \frac{1}{2}CD$.

Khi đó MN là đường trung bình của tam giác $ACD \Rightarrow M$ trung điểm của AC .

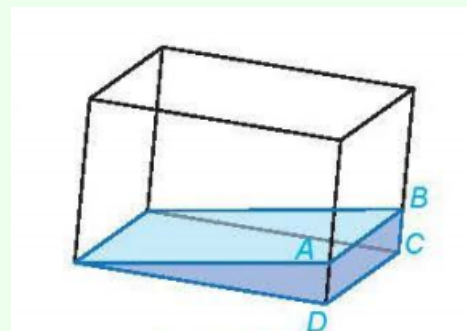


- Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AD, SD, SB . Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình bình hành.



5

Một bể kính chứa nước có đáy là hình chữ nhật được đặt nghiêng như Hình bên. Giải thích tại sao đường mép nước AB song song với cạnh CD của bể nước.



BÀI TẬP



1 Trắc nghiệm

❖ **Câu 1.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- (A) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau .
- (B) Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung .
- (C) Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau và không song song thì chéo nhau .
- (D) Hai đường thẳng phân biệt không chéo nhau thì hoặc cắt nhau hoặc song song .

❖ **Câu 2.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

- (A) Hai đường thẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác .
- (B) Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không điểm chung .
- (C) Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng .
- (D) Hai đường thẳng chéo nhau khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng .

❖ **Câu 3.** Cho tứ diện $ABCD$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- (A) AB và CD cắt nhau .
- (B) AB và CD chéo nhau .
- (C) AB và CD song song .
- (D) Tồn tại mặt phẳng chứa AB và CD .

❖ **Câu 4.** Cho ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau từng đôi một theo ba giao tuyến d_1, d_2, d_3 , biết $d_1 // d_2$. Khẳng định nào **đúng**?

- (A) d_1, d_3 chéo nhau .
- (B) d_1, d_3 cắt nhau .
- (C) d_1, d_3 trùng nhau .
- (D) d_1, d_3 song song với nhau .

❖ **Câu 5.** Hai đường thẳng chéo nhau khi và chỉ khi:

- (A) Hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.
- (B) Hai đường thẳng không có điểm chung.
- (C) Hai đường thẳng không cùng nằm trong một mặt phẳng nào.
- (D) Hai đường thẳng cùng chéo nhau với đường thẳng thứ ba.

❖ **Câu 6.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (CMN) và (BCD) là đường thẳng song song với đường thẳng

- (A) BD . (B) CD . (C) BC . (D) AB .

❖ **Câu 7.** Cho ba đường thẳng a, b, c . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- (A) Nếu a và b cùng song song với c thì a song song với b .
 (B) Nếu a và b cùng chéo nhau với c thì a và b chéo nhau.
 (C) Nếu a song song với b , b và c chéo nhau thì a và c chéo nhau hoặc cắt nhau.
 (D) Nếu a và b cắt nhau, b và c cắt nhau thì a và c cắt nhau.

❖ **Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) Đường thẳng d đi qua S và song song với AB .
 (B) Đường thẳng d đi qua S và song song với DC .
 (C) Đường thẳng d đi qua S và song song với BC .
 (D) Đường thẳng d đi qua S và song song với BD .

❖ **Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC . Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào song song với MN ?

- (A) AB . (B) AD . (C) BD . (D) AC .

❖ **Câu 10.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD . Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào **không** song song với NP ?

- (A) MQ . (B) BD . (C) AD . (D) BC .

2 Tự luận

❖ **Bài 1.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng AD và P, Q là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng BC .

Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng MQ và NP ; cũng như vị trí tương đối của hai đường thẳng MP và NQ .

❖ **Bài 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB // CD$). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA, SB, SC, SD . Chứng minh rằng tứ giác $MNCD$ là hình thang.

❖ **Bài 3.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và ABD . Chứng minh rằng đường thẳng G_1G_2 song song với đường thẳng CD .

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi I là trung điểm của SD . Hai mặt phẳng (IAC) và (SBC) cắt nhau theo giao tuyến Cx . Chứng minh rằng $Cx \parallel SB$.

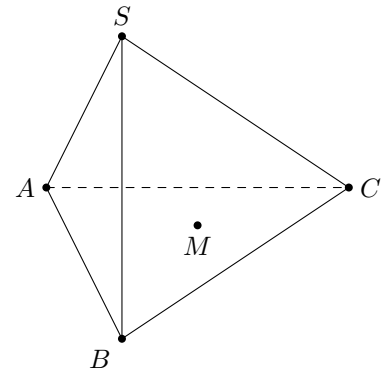
Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, AB, SD . Xác định giao tuyến của mỗi cặp mặt phẳng sau: (SAD) và (SBC) ; (MNP) và $(ABCD)$.

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AB là đáy lớn và $AB = 2CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và SB . Chứng minh rằng đường thẳng NC song song với đường thẳng MD .

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$). Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SD .

- Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MAB) và (SCD) .
- Gọi N là giao điểm của đường thẳng SC và mặt phẳng (MAB) . Chứng minh rằng MN là đường trung bình của tam giác SCD .

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABC$ và điểm M thuộc miền trong tam giác ABC . Qua M , vẽ đường thẳng d song song với SA , cắt (SBC) tại N . Trên hình vẽ, hãy chỉ rõ vị trí của điểm N và xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (CMN) .



Bài 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SCD) và (SAB) .
- Lấy một điểm M trên đoạn SA (M khác S và A), mặt phẳng (BCM) cắt SD tại N . Tứ giác $CBMN$ là hình gì?

Bài 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, AC và BD cắt nhau tại O . Gọi I là trung điểm của SO . Mặt phẳng (ICD) cắt SA, SB lần lượt tại M, N .

- Hãy nói cách xác định hai điểm M và N . Cho $AB = a$. Tính MN theo a .
- Trong mặt phẳng $(CDMN)$, gọi K là giao điểm của CN và DM . Chứng minh $SK \parallel BC \parallel AD$.

Bài 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Gọi M là một điểm di động trên cạnh SC .

- Tìm giao điểm N của SD và mặt phẳng (ABM) .
- Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng BM và AN . Chứng minh rằng I nằm trên một đường thẳng cố định khi M di động trên cạnh SC .

Bài 12. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD và G là trung điểm của đoạn MN .

- Tìm giao điểm A' của đường thẳng AG và mặt phẳng (BCD) .
- Qua M , kẻ đường thẳng Mx song song với AA' và Mx cắt (BCD) tại M' . Chứng minh B, M', A' thẳng hàng và $BM' = M'A' = A'N$.

Bài 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SAD . Lấy I là trung điểm của đoạn BC .

- Chứng minh $MN \parallel BD$.
- Gọi L, H lần lượt là giao điểm của SB, SD với mặt phẳng (MNI) . Chứng minh rằng $LH \parallel BD$.

Bài 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là một điểm bất kì thuộc cạnh SC .

- Xác định các giao tuyến của mặt phẳng (MAB) với các mặt của hình chóp.
- Xác định các giao tuyến của mặt phẳng (MAD) với các mặt của hình chóp.

Bài 15. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA .

- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (ANP) và (CMQ) .
- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (ANP) và (ABD) .
- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (CMQ) và (BCD) .
- Chứng minh rằng các giao tuyến tìm được ở trên đôi một song song với nhau.

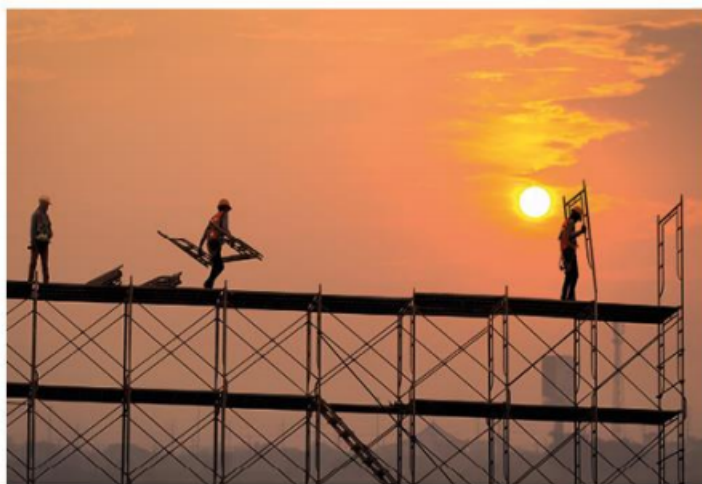
Bài 16. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD . Trên cạnh AC lấy điểm K . Gọi M là giao điểm của BK và AI , N là giao điểm của DK và AJ . Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với đường thẳng BD .

Bài 17. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi G, H lần lượt là giao điểm của hai đường chéo của hai hình bình hành đó. Chứng minh rằng ba đường thẳng GH, CE, DF đôi một song song.

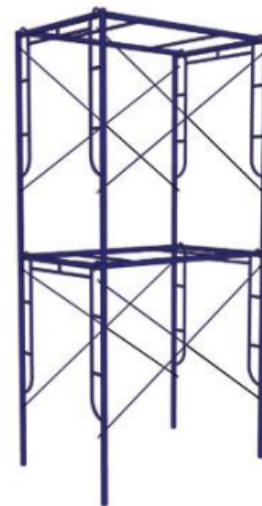
Bài 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA ; I, J, K, L lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SM, SN, SP, SQ .

- Chứng minh rằng I, J, K, L đồng phẳng và tứ giác $IJKL$ là hình bình hành.
- Chứng minh rằng $IK // BC$.
- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng $(IJKL)$ và (SBC) .

Bài 19. Giàn giáo là thiết bị chuyên dụng được sử dụng tại hầu hết các công trình xây dựng (Hình a). Có nhiều loại giàn giáo khác nhau, trong đó phổ biến nhất là loại giàn giáo khung (giàn giáo H) (Hình b). Hãy chỉ ra một số hình ảnh của những đường thẳng song song, chéo nhau và cắt nhau trên một giàn giáo khung.

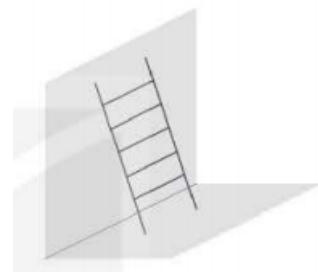


a) Giàn giáo trong công trình



b) Giàn giáo khung (giàn giáo H)

Bài 20. Một chiếc thang được đặt sao cho hai đầu của chân thang dựa vào tường, hai đầu còn lại nằm trên sàn nhà (hình vẽ). Biết rằng chiếc thang có dạng hình chữ nhật, hãy giải thích vì sao hai đầu của chân thang nằm trên sàn nhà lại cách đều chân tường.



3 ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG

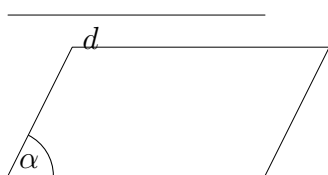
I. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẪNG



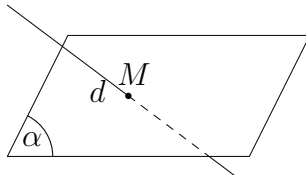
Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) . Nếu d và mặt phẳng α không có điểm chung thì ta nói d song song với (α) hay (α) song song d . Kí hiệu là $d // (\alpha)$ hay $(\alpha) // d$.

Ngoài ra

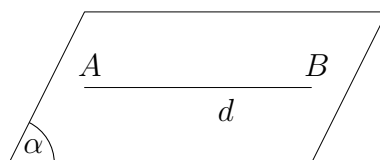
- ◇ Nếu d và (α) có một điểm chung duy nhất M thì ta nói d và (α) cắt nhau tại điểm M và kí hiệu $d \cap (\alpha) = \{M\}$ hay $d \cap (\alpha) = M$.
- ◇ Nếu d và (α) có nhiều hơn một điểm chung thì ta nói d nằm trong (α) hay (α) chứa d và kí hiệu $d \subset (\alpha)$ hay $(\alpha) \supset d$.



$d // (\alpha)$



$d \cap (\alpha) = M$



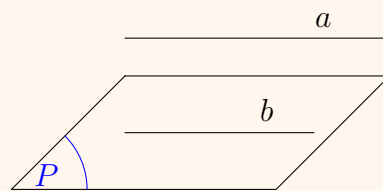
$d \subset (\alpha)$

II. ĐIỀU KIỆN ĐỂ MỘT ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MỘT MẶT PHẪNG

Định lý 1



Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng b nào đó nằm trong (P) thì a song song với (P) .



Ví dụ 1

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD . Chứng minh rằng MN song song với các mặt phẳng (ABC) và (ABD) .

 **Lời giải.** Gọi E là trung điểm của CD .

Ta có: M và N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD . Khi đó,

$$\frac{EM}{EA} = \frac{EN}{EB} = \frac{2}{3}.$$

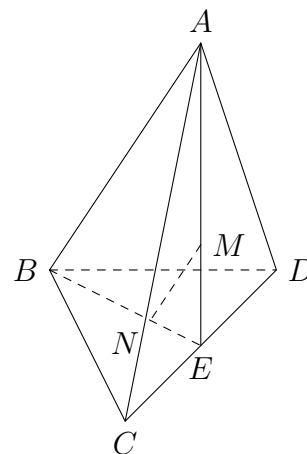
Áp dụng định lý Thales vào $\triangle ABE$, ta nhận được $MN \parallel AB$.

Ta có

$$\begin{cases} MN \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \Rightarrow (MN) \parallel (ABC). \\ MN \notin (ABC) \end{cases}$$

Tương tự

$$\begin{cases} MN \parallel AB \\ AB \subset (ABD) \Rightarrow (MN) \parallel (ABD). \\ MN \notin (ABD) \end{cases}$$



Ví dụ 2



Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD .

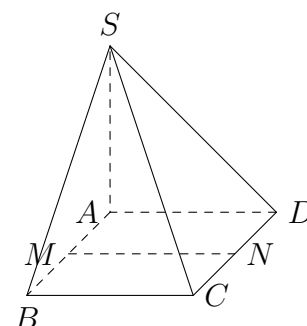
- Chứng minh $MN \parallel (SBC)$ và $MN \parallel (SAD)$.
- Gọi E là trung điểm của SA . Chứng minh $SB \parallel (MNE)$ và $SC \parallel (MNE)$.

 **Lời giải.**

- Chứng minh $MN \parallel (SBC)$ và $MN \parallel (SAD)$.

Vì M, N là trung điểm AB, CD nên $MN \parallel BC \parallel AD$. Khi đó,

$$\begin{aligned} \diamond & \begin{cases} MN \parallel BC \\ BC \subset (SBC) \Rightarrow MN \parallel (SBC). \\ MN \notin (SBC) \end{cases} \\ \diamond & \begin{cases} MN \parallel AD \\ AD \subset (SAD) \Rightarrow MN \parallel (SAD). \\ MN \notin (SAD) \end{cases} \end{aligned}$$



b) Gọi E là trung điểm của SA . Chứng minh $SB \parallel (MNE)$ và $SC \parallel (MNE)$.

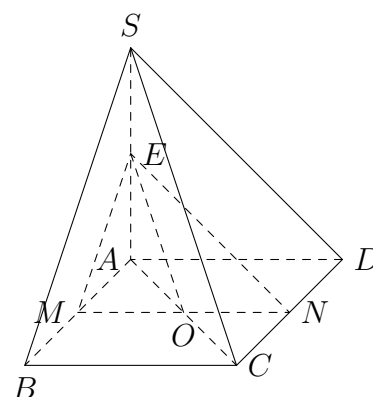
Vì M, E là trung điểm AB, SA nên $ME \parallel SB$. Khi đó,

$$\begin{cases} ME \parallel SB \\ ME \subset (MNE) \Rightarrow SB \parallel (MNE). \\ SB \notin (MNE) \end{cases}$$

Gọi $O = MN \cap AC$. Khi đó, O là trung điểm AC .

Ta có $EO \subset (MNE)$ và $EO \parallel SC$. Khi đó

$$\begin{cases} EO \parallel SC \\ EO \subset (MNE) \Rightarrow SC \parallel (MNE). \\ SC \notin (MNE) \end{cases}$$



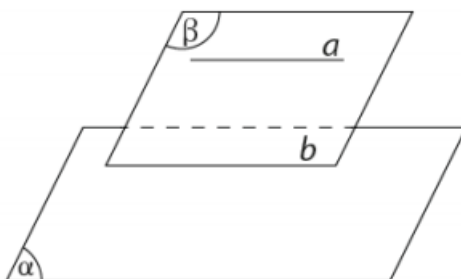
① Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, AD . Các đường thẳng MN, NP, MP có song song với mặt phẳng (BCD) không? Vì sao?

III. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG

1) Định lý 2



Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) . Nếu mặt phẳng (Q) chứa a , cắt (P) theo giao tuyến b thì a song song với b .



Ví dụ 3

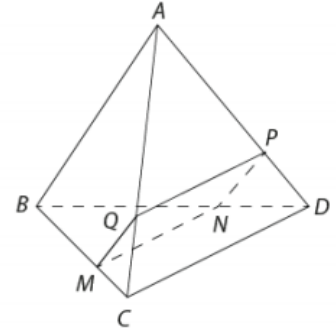
Cho tứ diện $ABCD$. Lấy M thuộc đoạn thẳng BC sao cho $BM = 2MC$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với các đường thẳng AB và CD . Xác định giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt phẳng (ABC) , (ACD) , (BCD) , (ABD) .

Hướng dẫn giải.

Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với AB nên (α) cắt mặt phẳng (ABC) (chứa AB) theo giao tuyến d đi qua M và song song với AB . Gọi Q là giao điểm của d với AC .

Tương tự, (α) song song với CD nên (α) cắt (ACD) và (BCD) (là các mặt phẳng chứa CD) theo các giao tuyến QP và MN cùng song song với CD ($P \in AD$, $N \in BD$).

Vậy $(\alpha) \cap (ABD) = NP$.

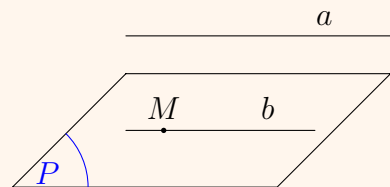


② Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy I là điểm thuộc cạnh BC (I khác B và C). Gọi (α) là mặt phẳng qua I và song song với các đường thẳng AB và SD . Tìm giao điểm của các đường thẳng AD , SA , SB với (α) .

2) Hệ quả 1



Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) .
Nếu qua điểm M thuộc (P) ta vẽ đường thẳng b song song với a thì b phải nằm trong (P) .

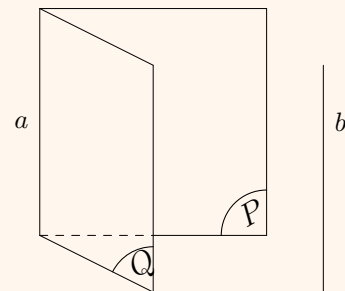


3) Hệ quả 2



Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó. Nghĩa là

$$\begin{cases} d // (P) \\ d // (Q) \\ (P) \cap (Q) = a \end{cases} \Rightarrow d // a$$



4) Định lý 3



Cho trước hai đường thẳng chéo nhau, có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

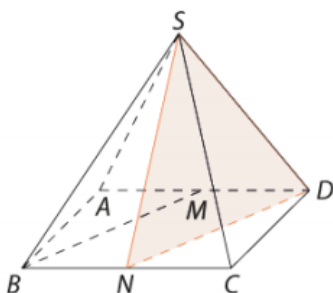


Ví dụ 4



Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của đoạn AD . Xác định mặt phẳng chứa SD và song song với BM .

Hướng dẫn giải.



Gọi N là trung điểm của BC , ta có $MD \parallel BN$ và $MD = BN = \frac{1}{2}BC$ nên $MBND$ là hình bình hành.

Suy ra $BM \parallel ND$, mà $ND \subset (SDN)$ nên $BM \parallel (SDN)$.

Vậy (SDN) là mặt phẳng chứa SD và song song với BM .



③ Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$, AD song song BC và $AD = 2BC$. Xác định mặt phẳng chứa SB và song song với CD .

BÀI TẬP



1 Trắc nghiệm

❖ **Câu 1.** Trong không gian, cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) . Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) ?

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

❖ **Câu 2.** Cho tứ diện $ABCD$. Vị trí tương đối giữa đường thẳng BC và (BCD) là

- (A) $BC \parallel (BCD)$. (B) $BC \subset (BCD)$.
(C) $BC \cap (BCD) = A$. (D) $BC \cap (BCD) = D$.

❖ **Câu 3.** Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) . Mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng a và cắt (P) theo giao tuyến b . Vị trí tương đối giữa a và b là:

- (A) Cắt nhau. (B) Trùng nhau.
(C) Song song. (D) Chéo nhau.

❖ **Câu 4.** Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) . Khẳng định nào **sai**?

- (A) Nếu có mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng a và cắt (P) theo giao tuyến b thì b song song với a .
(B) Trong mặt phẳng (P) có vô số đường thẳng chéo nhau với a .
(C) Đường thẳng a không có điểm chung với mặt phẳng (P) .
(D) Trong mặt phẳng (P) có duy nhất một đường thẳng song song với a .

❖ **Câu 5.** Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và song song với b ?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) Vô số.

❖ **Câu 6.** Cho hai mặt phẳng $(\alpha); (\beta)$ cắt nhau và cùng song song với đường thẳng d . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) Giao tuyến của $(\alpha); (\beta)$ trùng với d .
(B) Giao tuyến của $(\alpha); (\beta)$ song song hoặc trùng với d .
(C) Giao tuyến của $(\alpha); (\beta)$ cắt d .
(D) Giao tuyến của $(\alpha); (\beta)$ song song với d .

❖ **Câu 7.** Cho tứ diện $ABCD$. Cho các mệnh đề sau:

- (a) $AD \subset (ABC)$.
(b) $AD \cap (ABC) = C$.
(c) $AB \subset (ABC)$.
(d) $AC \parallel (ABD)$.

Trong các mệnh đề đã cho, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

❖ **Câu 8.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACD , điểm M nằm trên cạnh AB sao cho $AM = 2MB$. Đường thẳng MG song song với mặt phẳng nào sau đây?

- (A) (ACD) . (B) (ABD) . (C) (BCD) . (D) (ABC) .

2 Tự luận

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm hai đường chéo. Gọi M là trung điểm của cạnh SC .

- Chứng minh rằng đường thẳng OM song song với hai mặt phẳng (SAD) và (SBD) .
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMD) và (SAD) .

Bài 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD , điểm I nằm trên cạnh BC sao cho $BI = 2IC$. Chứng minh rằng đường thẳng IG song song với mặt phẳng (ACD) .

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với giao tuyến d của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) .

Bài 4. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không nằm trong cùng một mặt phẳng. Gọi O và O' lần lượt là tâm của $ABCD$ và $ABEF$.

- Chứng minh đường thẳng OO' song song với các mặt phẳng $(CDEF)$, (ADF) và (BCE) .
- Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AF và BE . Chứng minh $MN \parallel (CDEF)$.
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMN) và $(ABCD)$.

Bài 5. Cho hai tam giác ABC và ABD không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, AD .

- Đường thẳng AM có song song với mặt phẳng (BCD) hay không? Hãy giải thích tại sao.
- Đường thẳng MN có song song với mặt phẳng (BCD) hay không? Hãy giải thích tại sao.

Bài 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh BC, CD . Chứng minh rằng đường thẳng BD song song với mặt phẳng (AMN) .

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang ($AB \parallel CD$). Gọi E là một điểm nằm giữa S và A . Gọi (P) là mặt phẳng qua E và song song với hai đường thẳng AB, AD . Xác định giao tuyến của (P) và các mặt bên của hình chóp. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD , P là trung điểm của SA . Chứng minh:

- MN song song với các mặt phẳng (SBC) và (SAD) ;
- SB song song với mặt phẳng (MNP) ;
- SC song song với mặt phẳng (MNP) ;
- Gọi G_1 và G_2 theo thứ tự là trọng tâm của hai tam giác ABC và SBC . Chứng minh G_1G_2 song song với mặt phẳng (SAD) .

Bài 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và một điểm M di động trên cạnh AD . Một mặt phẳng (α) qua M , song song với CD và SA , cắt BC , SC , SD lần lượt tại N, P, Q .

- $MNPQ$ là hình gì?
- Gọi $I = MQ \cap NP$. Chứng minh rằng điểm I luôn luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M di động trên AD .

Bài 10. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thuộc cạnh AB . Gọi (α) là mặt phẳng qua M , song song với hai đường thẳng BC và AD . Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (α) với các cạnh AC, CD và DB .

- Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành.
- Trong trường hợp nào thì $MNPQ$ là hình thoi?

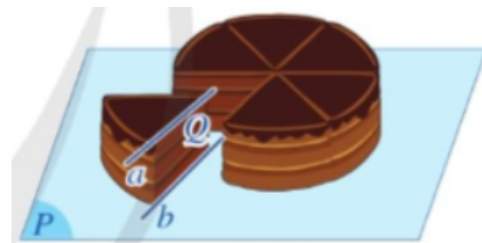
Bài 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy điểm M trên cạnh AD sao cho $AD = 3AM$. Gọi G, N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và ABC .

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .
- Chứng minh rằng MN song song với mặt phẳng (SCD) và NG song song với mặt phẳng (SAC) .

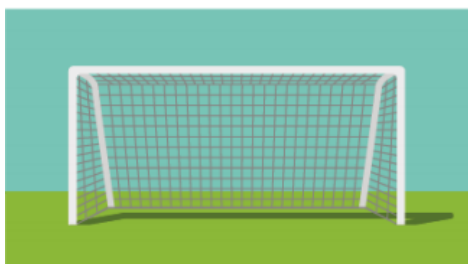
Bài 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một tứ giác lồi. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Mặt phẳng (α) đi qua O , song song với AB và SC . Xác định giao điểm của mặt phẳng (α) với các đường thẳng SA, AD, BC .

Bài 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB . Gọi M là trung điểm của CD , (P) là mặt phẳng qua M song song với SA và BC . Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (P) . Thiết diện đó hình gì?

Bài 14. Trong Hình bên, khi cắt bánh sinh nhật, mặt cắt và mặt khay đựng bánh lần lượt gọi nên hình ảnh hai mặt phẳng (Q) và (P); mép trên và mép dưới của lát cắt lần lượt gọi nên hình ảnh hai đường thẳng a và b , trong đó $a \parallel (P)$. Cho biết hai đường thẳng a và b có song song với nhau hay không.



Bài 15. Trong giờ học bóng đá, khi hai bạn Nam và Mai lại gần khung thành thủ môn, bạn Nam khẳng định thanh ngang trên cùng của khung thành và bóng của nó là hình ảnh của hai đường thẳng song song. Bạn Mai cho rằng hai đường thẳng này chưa chắc song song vì còn phụ thuộc vào ảnh hưởng của ánh sáng Mặt Trời nữa. Hãy cho biết ai đúng, ai sai. Vì sao? Biết rằng, Mặt Trời cách xa Trái Đất nên các tia sáng có thể xem là những đường thẳng song song.



4 HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

I. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

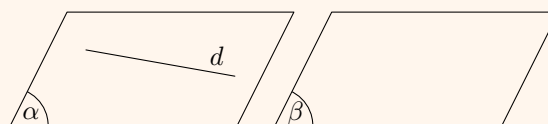
Cho hai mặt phẳng (α) và (β) , có thể xảy ra một trong ba trường hợp sau:

Hình minh họa	Số điểm chung	Vị trí tương đối	Kí hiệu
	Không có điểm chung	(α) song song với (β) hay (β) song song với (α)	$(\alpha) // (\beta)$ hay $(\beta) // (\alpha)$
	Có vô số điểm chung thẳng hàng	(α) cắt (β) theo giao tuyến d	$(\alpha) \cap (\beta) = d$
	Có ít nhất 3 điểm chung không thẳng hàng	(α) trùng với (β)	$(\alpha) \equiv (\beta)$



Hai mặt phẳng (α) và (β) được gọi là **song song** với nhau nếu chúng không có điểm chung.

Kí hiệu $(\alpha) // (\beta)$ hay $(\beta) // (\alpha)$



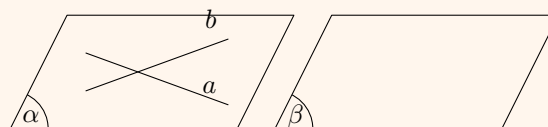
II. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

Định lý 1



Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau và hai đường thẳng này song song với mặt phẳng (β) thì (α) và (β) song song với nhau. Tức là

$$\begin{cases} a, b \subset (\alpha) \\ a, b // (\beta) \\ a, b \text{ cắt nhau} \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // (\beta).$$



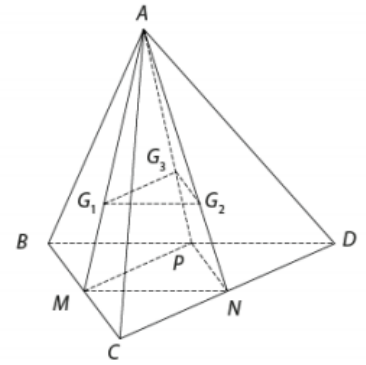
Ví dụ 1

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ABD . Chứng minh mặt phẳng $(G_1G_2G_3)$ song song với mặt phẳng (BCD) .

Hướng dẫn giải.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD, DB .

Ta có: $M \in AG_1$ và $\frac{AG_1}{AM} = \frac{2}{3}$; $N \in AG_2$ và $\frac{AG_2}{AN} = \frac{2}{3}$;
 $P \in AG_3$ và $\frac{AG_3}{AP} = \frac{2}{3}$. Do đó $\frac{AG_1}{AM} = \frac{AG_2}{AN}$, suy ra $G_1G_2 \parallel MN$.
 Vì $MN \subset (BCD)$ nên $G_1G_2 \parallel (BCD)$. Tương tự, $\frac{AG_1}{AM} = \frac{AG_3}{AP}$,
 suy ra $G_1G_3 \parallel MP$.
 Vì $MP \subset (BCD)$ nên $G_1G_3 \parallel (BCD)$. Vậy $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$.



- ① Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC . Chứng minh rằng mặt phẳng (MNP) song song với mặt phẳng $(ABCD)$.

III. TÍNH CHẤT CỦA HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

1) Định lý 2

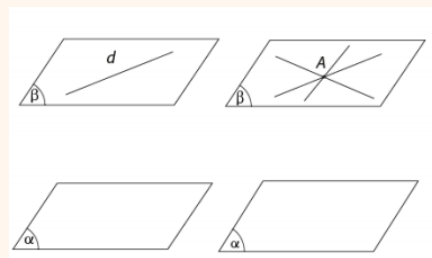


Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

2) Hệ quả



- ◇ Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α) .
- ◇ Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

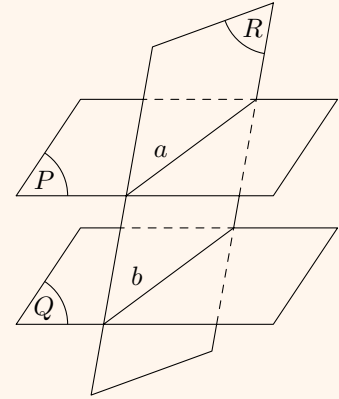


- ◇ Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) . Mọi đường thẳng đi qua A song song với (α) đều nằm trong (β) đi qua A và song song với (α) .

3) Định lý 2



Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.



Ví dụ 2



Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn AB, AC, AD . Lấy I, K là hai điểm bất kỳ lần lượt trên MN, MP . Hai đường thẳng AI, AK lần lượt cắt BC, BD tại I', K' . Chứng minh rằng $IK // I'K'$.

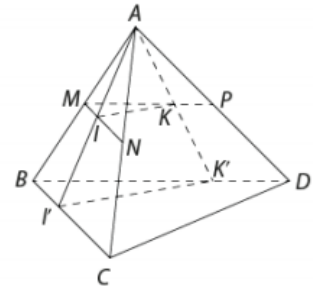
Hướng dẫn giải.

Ta có $MN // BC$ (đường trung bình của tam giác ABC), mà $BC \subset (BCD)$ nên $MN \subset (BCD)$.

Tương tự, ta có $MP // BD$ (đường trung bình tam giác ABD), nên $MP \subset (BCD)$.

Từ đó suy ra $(MNP) // (BCD)$.

Mặt khác, mặt phẳng (AIK) cắt hai mặt phẳng (MNP) và (BCD) lần lượt theo hai giao tuyến là IK và $I'K'$, nên ta có $IK // I'K'$.



② Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm của hai đường chéo, tam giác SBD là tam giác đều. Một mặt phẳng (α) di động song song với mặt phẳng (SBD) và cắt đoạn thẳng AC . Chứng minh rằng các giao tuyến của (α) với hình chóp tạo thành một tam giác đều.



③ Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ với đáy lớn $AD = 2BC$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AD và SD .

a) Chứng minh rằng $(SAB) // (CIK)$.

b) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC, BD . Lấy M là điểm bất kỳ trên

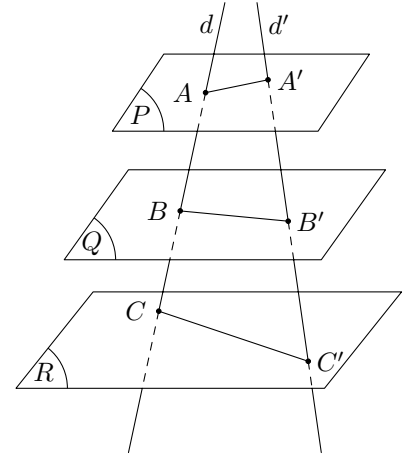
đoạn CD , đường thẳng OM cắt CI, AB lần lượt tại N, P và SM cắt CK tại Q . Chứng minh rằng $SP \parallel NQ$.

IV. ĐỊNH LÝ THALÈS TRONG KHÔNG GIAN

1) Định lý (Định lý Thalès).

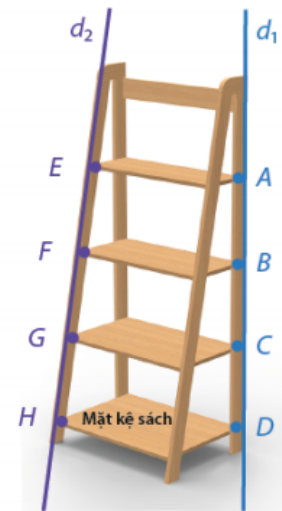
Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến phân biệt bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Trong hình vẽ bên, ta có $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$.



Ví dụ 3

Hình bên là kệ sách gỗ có bốn mặt kệ, với thanh gỗ đứng (xem như đường thẳng d_1) và thanh gỗ xiên (xem như đường thẳng d_2). Giả sử các mặt kệ xuất hiện ở các vị trí A, B, C, D, E, F, G, H . Biết rằng $EF = 32$ cm và các điểm A, B, C, D cách đều nhau. Các mặt kệ đặt song song với mặt đất. Tính độ dài HE .



Hướng dẫn giải. Các mặt kệ sách đặt song song với mặt đất nên là hình ảnh của các mặt phẳng song song nhau, ta kí hiệu các mặt phẳng từ đáy kệ sách lên trên lần lượt là $(P_1), (P_2), (P_3), (P_4)$. Áp dụng định lý Thalès cho ba mặt phẳng $(P_1), (P_2), (P_3)$ với hai cát tuyến d_1, d_2 ta có: $\frac{FG}{BC} = \frac{GH}{CD} \Rightarrow \frac{FG}{GH} = \frac{BC}{CD}$.
Mà $BC = CD$ nên $\frac{FG}{GH} = 1 \Rightarrow FG = GH$.

Tương tự, áp dụng định lý Thalès cho ba mặt phẳng $(P_2), (P_3), (P_4)$ với hai cát tuyến d_1, d_2 , ta có $EF = FG$. Từ đó suy ra $GH = FG = EF = 32$ cm.

Vậy $HE = EF + FG + GH = 96$ cm.



- ④ Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 9$, $SB = 12$, $SC = 15$. Trên cạnh SA lấy các điểm M, N sao cho $SM = 4$, $MN = 3$, $NA = 2$. Vẽ hai mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) , lần lượt đi qua M, N , cắt SB theo thứ tự tại M', N' và cắt SC theo thứ tự tại M'', N'' . Tính độ dài các đoạn thẳng SM' , $M'N'$, $M''N''$, $N''C$.



⑤

Các kệ trong ngăn mát của tủ lạnh có thể xem là hình ảnh của các mặt phẳng (Hình vẽ). Thông tin từ nhà sản xuất là các kệ này được lắp song song với nhau. Bề mặt bên trái và bên phải của tủ lạnh có các giá đỡ bên dưới các kệ. Nếu các giá đỡ ở mặt bên trái cách đều nhau một khoảng 15 cm thì các giá đỡ ở mặt bên phải cách nhau bao nhiêu? Vì sao?



V. HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP

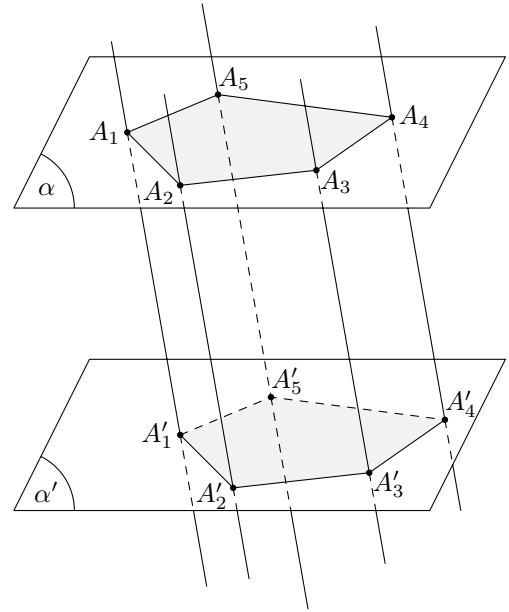
1) Hình lăng trụ



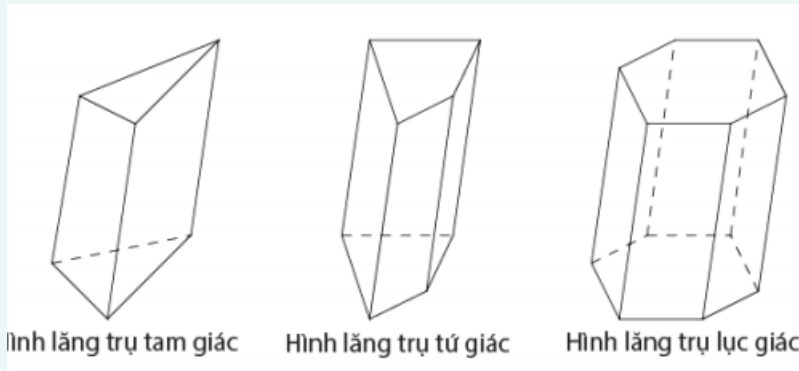
Cho hai mặt phẳng song song (α) và (α') . Trên (α) cho đa giác lồi $A_1A_2 \dots A_n$. Qua các đỉnh $A_1, A_2, \dots, A_n$ vẽ các đường thẳng đôi một song song và cắt mặt phẳng (α') tại $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$. Hình gồm hai đa giác $A_1A_2 \dots A_n, A'_1A'_2 \dots A'_n$ và các tứ giác $A_1A'_1A_2A'_2, A_2A'_2A_3A'_3, \dots, A_nA'_nA_1A'_1$ được gọi là **hình lăng trụ** và kí hiệu là $A_1A_2 \dots A_n.A'_1A'_2 \dots A'_n$.

Trong hình lăng trụ $A_1A_2 \dots A_n.A'_1A'_2 \dots A'_n$, ta gọi:

- ◇ Các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ được gọi là các *đỉnh*, các đoạn thẳng $A_1A'_1, A_2A'_2, \dots, A_nA'_n$ được gọi là các *cạnh bên*, các đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ và $A'_1A'_2, A'_2A'_3, \dots, A'_nA'_1$ được gọi là các *cạnh đáy* của hình lăng trụ.
- ◇ Hai đa giác $A_1A_2 \dots A_n, A'_1A'_2 \dots A'_n$ được gọi là *mặt đáy* của hình lăng trụ.
- ◇ Các tứ giác $A_1A'_1A_2A'_2, A_2A'_2A_3A'_3, \dots, A_nA'_nA_1A'_1$ được gọi là các **mặt bên** của hình lăng trụ.



LƯU Ý. Tên của hình lăng trụ được gọi dựa theo tên của đa giác đáy.



Ví dụ 4

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, M' lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC và $A'B'$.

- a) Chứng minh $(MNM') \parallel (BCC'B')$.
- b) Tìm giao điểm N' của $A'C'$ và (MNM') . Tứ giác $MNN'M'$ là hình gì?

Lời giải.

- a) Chứng minh $(MNM') \parallel (BCC'B')$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} MM' \parallel BB' \text{ (tính chất đường trung bình hình bình hành } AA'B'B) \\ MN \parallel BC \text{ (tính chất đường trung bình tam giác } ABC) \\ MM', MN \subset (MNM') \\ BB', BC \subset (BCC'B') \\ MN \cap MM' = M \end{cases}$$

$$\Rightarrow (MNM') // (BCC'B').$$

b) Tìm giao điểm N' của $A'C'$ và (MNM') . Tứ giác $MNN'M'$ là hình gì?

$$\text{Ta có } \begin{cases} (MNM') // (BCC'B') \\ (A'B'C') \cap (BCC'B') = B'C' \\ M' \in (A'B'C') \cap (MNM') \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } (A'B'C') \cap (MNM') = x'M'x // B'C'.$$

Trong $(A'B'C')$, gọi $N' = A'C' \cap x'M'x \Rightarrow$

$$\begin{cases} N' \in A'C' \\ N' \in x'M'x \subset (MNM') \end{cases} \Rightarrow N' = A'C' \cap (MNM').$$

Suy ra $M'N'$ là đường trung bình tam giác

$$A'B'C' \Rightarrow M'N' = \frac{1}{2}B'C'.$$

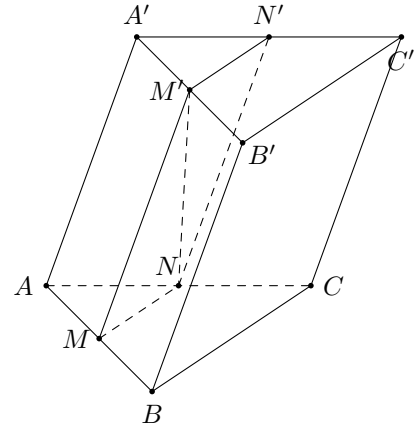
Mà MN là đường trung bình tam giác ABC nên

$$MN // BC \text{ và } MN = \frac{1}{2}BC.$$

Lại do $BC // B'C'$ và $BC = B'C'$ nên $MN // M'N'$

và $MN = M'N'$.

Vậy tứ giác $MNN'M'$ là hình bình hành.

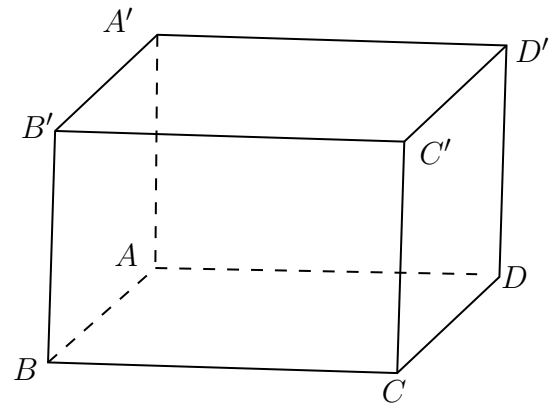


2) Hình hộp



Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.

- ◇ Hình hộp có sáu mặt (bốn mặt bên và hai mặt đáy) đều là những hình bình hành. Mỗi mặt có một mặt song song với nó, hai mặt như thế gọi là **hai mặt đối diện**.
- ◇ Hình hộp có tám đỉnh, hai đỉnh của hình hộp gọi là **hai đỉnh đối diện** nếu chúng không cùng nằm trên một mặt nào. Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là **đường chéo** của hình hộp.



Ví dụ 5



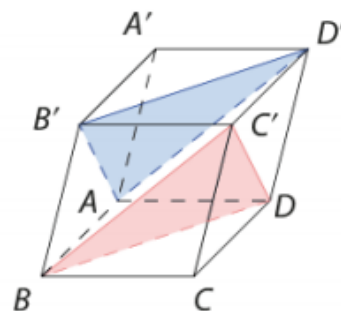
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(C'BD)$ song song với nhau.

Hướng dẫn giải.

$ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên ta có $BB' \parallel DD'$ (cùng song song CC') và $BB' = DD'$ (cùng bằng CC').

Suy ra $BDD'B'$ là hình bình hành, do đó $BD \parallel B'D'$.

Mặt khác, $B'D' \subset (AB'D')$, suy ra $BD \parallel (AB'D')$ (1).



Chứng minh tương tự, ta có $AD \parallel B'C'$ và $AD = B'C'$, nên $ADC'B'$ là hình bình hành.

Từ đó, ta có $DC' \parallel AB'$, mà $AB' \subset (AB'D')$ nên $DC' \parallel (AB'D')$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(C'BD) \parallel (AB'D')$.



⑥ Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng bốn đường chéo của hình hộp cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

BÀI TẬP



1 Trắc nghiệm

❖ **Câu 1.** Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) . Có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và song song với (P) ?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) Vô số.

❖ **Câu 2.** Cho mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) Mọi đường thẳng nằm trong (P) đều song song với mọi đường thẳng nằm trong (Q) .
 (B) (P) song song với mọi đường thẳng nằm trong (Q) .
 (C) Nếu mặt phẳng (R) song song với mặt phẳng (P) thì mặt phẳng (R) song song với mặt phẳng (Q) .
 (D) Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q) thì đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) .

❖ **Câu 3.** Hai mặt phẳng được gọi là song song với nhau nếu

- (A) chúng không có điểm chung .
 (B) chúng có một đường thẳng chung .

- Ⓒ chúng có đúng một điểm chung .
Ⓓ chúng có ít nhất một điểm chung .

❖ **Câu 4.** Mệnh đề nào đúng?

- Ⓐ Nếu $(P) // (Q)$ và $a \subset (P), b \subset (Q)$ thì $a // b$.
Ⓑ Nếu $a // (P)$ và $b // (Q)$ thì $a // b$.
Ⓒ Nếu $(P) // (Q)$ và $a \subset (P)$ thì $a // (Q)$.
Ⓓ Nếu $a // b$ và $a \subset (P), b \subset (Q)$ thì $(P) // (Q)$.

❖ **Câu 5.** Mệnh đề nào đúng?

- Ⓐ Hình hộp là hình tứ diện .
Ⓑ Hình tứ diện là hình hộp .
Ⓒ Hình lập phương là hình hộp .
Ⓓ Hình hộp là hình lập phương .

❖ **Câu 6.** Mệnh đề nào sau đây là sai?

- Ⓐ Qua một điểm bất kỳ có một và chỉ một mặt phẳng song song với một mặt phẳng cho trước.
Ⓑ Hai mặt phẳng được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.
Ⓒ Ba mặt phẳng phân biệt đôi một song song với nhau chắn trên hai cát tuyến bất kỳ những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.
Ⓓ Hai mặt phẳng song song cắt mặt phẳng thứ ba theo hai giao tuyến song song với nhau.

❖ **Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, SA . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- Ⓐ $(SBN) // (DAP)$.
Ⓑ $(SBC) // (MPD)$.
Ⓒ $(SBN) // (PMD)$.
Ⓓ $(SDN) // (MAP)$.

❖ **Câu 8.** Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- Ⓐ $(ADF) // (BCE)$.
Ⓑ $AD // (BEF)$.
Ⓒ $(ABC) // (DEF)$.
Ⓓ $EC // (ABD)$.

❖ **Câu 9.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sai?

- Ⓐ $(ABCD) // (A'B'C'D')$.
Ⓑ $(ABB'A') // (DCC'D')$.

© $(ACC'A') // (ABD)$.

© $(A'B'C') // (ABD)$.

❖ **Câu 10.** Cho a, b là hai đường thẳng phân biệt cắt ba mặt phẳng song song $(P), (Q), (R)$ lần lượt tại các điểm A, B, C và A', B', C' . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

© $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.

© $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$.

© $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

© $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$.



2 Tự luận

❖ **Bài 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ với đáy lớn là AD , $AD = 2BC$. Gọi I, K, L lần lượt là trung điểm của các đoạn AD, SA, SD . Chứng minh rằng $(SAB) // (ILC)$ và $(SCD) // (BIK)$.

❖ **Bài 2.** Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành $ABCD$. Ta dựng các nửa đường thẳng song song với nhau và nằm về một phía đối với mặt phẳng (P) , lần lượt đi qua các điểm A, B, C, D . Một mặt phẳng (Q) cắt bốn nửa đường thẳng nói trên tại các điểm A', B', C', D' . Chứng minh rằng:

$$AA' + CC' = BB' + DD'.$$

❖ **Bài 3.** Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', BB', CC' . Chứng minh rằng mặt phẳng $(MNP) // (ABC)$.

❖ **Bài 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, tâm là O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn SA và SD .

a) Chứng minh rằng $(OMN) // (SBC)$.

b) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và ON . Chứng minh rằng $PQ // (SBC)$.

❖ **Bài 5.** Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AB và CD . Qua các điểm A, D lần lượt vẽ các đường thẳng m, n song song với nhau và không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh rằng $mp(B, m)$ và $mp(C, n)$ song song với nhau.

❖ **Bài 6.** Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại M', N' .

a) Chứng minh $(CBE) // (ADF)$.

b) Chứng minh $(DEF) // (MNN'M')$.

Bài 7. Cho ba mặt phẳng (P) , (Q) , (R) đôi một song song. Hai đường thẳng d , d' cắt ba mặt phẳng lần lượt tại A , B , C và A' , B' , C' . Biết rằng $AB = 2$ cm, $BC = 6$ cm và $A'B' = 3$ cm, tính $B'C'$.

Bài 8. Cho hình tứ diện $SABC$. Trên cạnh SA lấy các điểm A_1 , A_2 sao cho $AA_1 = A_1A_2 = A_2S$. Gọi (P) , (Q) là hai mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) và lần lượt đi qua A_1 , A_2 . Mặt phẳng (P) cắt các cạnh SB , SC lần lượt tại B_1 , C_1 . Mặt phẳng (Q) cắt các cạnh SB , SC lần lượt tại B_2 , C_2 . Chứng minh $BB_1 = B_1B_2 = B_2S$ và $CC_1 = C_1C_2 = C_2S$.

Bài 9. Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng song song với mặt phẳng $(A'B'C'D')$ cắt các cạnh bên của hình lăng trụ lần lượt tại A'' , B'' , C'' , D'' . Hỏi hình tạo bởi các điểm A , B , C , D , A'' , B'' , C'' , D'' là hình gì?

Bài 10. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi G , G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và $A'B'C'$.

- Chứng minh rằng tứ giác $AGG'A'$ là hình bình hành.
- Chứng minh rằng $AGC.A'G'C'$ là hình lăng trụ.

Bài 11. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh AD , BC , $B'C'$, $A'D'$ lần lượt tại các điểm E , F , G , H . Chứng minh rằng tứ giác $EFGH$ là hình bình hành.

Bài 12. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M , M' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC , $B'C'$.

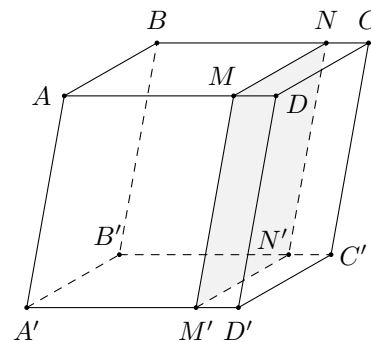
- Tìm giao điểm của mặt phẳng $(AB'C')$ với đường thẳng $A'M$.
- Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BA'C')$.
- Tìm giao điểm G của đường thẳng d với mặt phẳng $(AM'M)$. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác $AB'C'$.

Bài 13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng:

- Hai mặt phẳng (BDA') và $(B'D'C)$ song song với nhau.
- Đường chéo AC' đi qua các trọng tâm G_1 và G_2 của hai tam giác BDA' và $B'D'C$.
- G_1 và G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

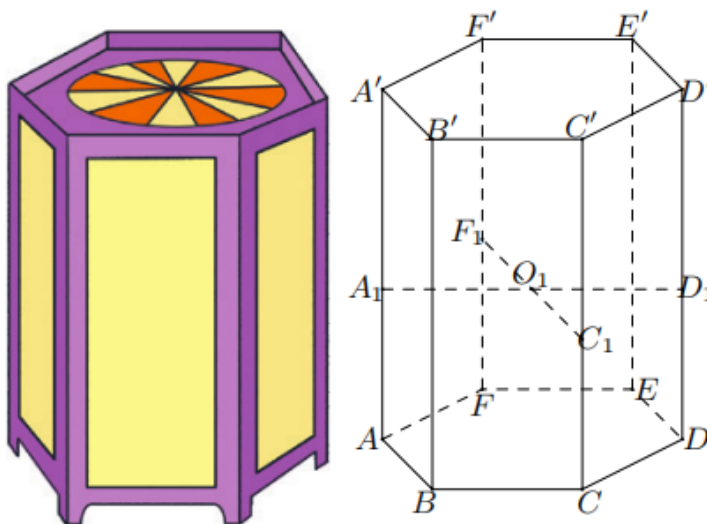
Bài 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M , N lần lượt là trung điểm của AB , CD . (P) là mặt phẳng đi qua MN và song song với mặt phẳng (SAD) . Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P) .

Bài 15. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng song song với mặt bên $(ABB'A')$ của hình hộp và cắt các cạnh $AD, BC, A'D', B'C'$ lần lượt tại M, N, M', N' . Chứng minh rằng $ABNM.A'B'N'M'$ là hình hộp.



Bài 16. Để làm một khung lồng đèn kéo quân hình lăng trụ lục giác $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$, Bình gắn hai thanh tre A_1D_1, F_1C_1 song song với mặt phẳng đáy và cắt nhau tại O_1 .

- Xác định giao tuyến của mặt phẳng (A_1D_1, F_1C_1) với các mặt bên của lăng trụ.
- Cho biết $A'A_1 = 6AA_1$ và $AA' = 70$ cm. Tính CC_1 và C_1C' .



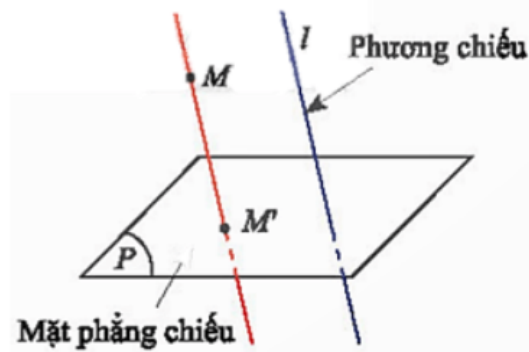
Bài 17. Sau khi gắn kệ treo tường bằng gỗ (Hình 4.87), bạn Nam chuẩn bị đặt đồ trang trí lên nhưng lại lo lắng kệ bị nghiêng, các đồ đạc sẽ bị rơi vỡ. Bạn Bình đề xuất với bạn Nam: "Chỉ cần dùng một viên bi đặt lên vài vị trí trên kệ, nếu viên bi đứng yên thì yên tâm, nếu viên bi lăn xuống thì phải chỉnh lại kệ". Xem mặt kệ và mặt đất lần lượt là hình ảnh của mặt phẳng (P) và (Q) . Với cách làm của bạn Bình, nếu viên bi lăn xuống đất thì (P) và (Q) có song song với nhau không? Vì sao?



I. KHÁI NIỆM PHÉP CHIẾU SONG SONG



Trong không gian, cho một mặt phẳng (P) và đường thẳng l cắt (P) . Với mỗi điểm M trong không gian, vẽ một đường thẳng đi qua M và song song hoặc trùng với l . Đường thẳng này cắt (P) tại M' . Phép cho tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M' trong (P) được gọi là **phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương l** .



- ◇ Mặt phẳng (P) được gọi là **mặt phẳng chiếu** và đường thẳng l được gọi là **phương chiếu** của phép chiếu song song;
- ◇ Phép chiếu song song theo phương l còn được gọi tắt là **phép chiếu theo phương l** ;
- ◇ Điểm M' gọi là **ảnh của điểm M** theo phép chiếu theo phương l .
- ◇ Cho hình $\mathcal{H}$ trong không gian. Ta gọi tập hợp $\mathcal{H}'$ các ảnh M' của tất cả những điểm M thuộc $\mathcal{H}$ qua phép chiếu song song theo phương l là **hình chiếu song song** của $\mathcal{H}$ lên mặt phẳng (P) .

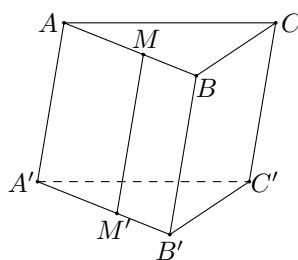


Ví dụ 1

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$.

- a) Xác định hình chiếu của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ theo phương CC' .
- b) Gọi M là một điểm thuộc đoạn thẳng AB . Xác định hình chiếu của M trên mặt phẳng $(A'B'C')$ theo phương CC' .

Lời giải.



- a) Vì $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ nên $AA'//BB'//CC'$. Vì A' thuộc mặt phẳng $(A'B'C')$

nên A' là hình chiếu của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ theo phương CC' .

- b) Trong mặt phẳng $(ABB'A')$ vẽ $MM' // AA'$ với M' thuộc $A'B'$ thì $MM' // CC'$. Vì M' thuộc mặt phẳng $(A'B'C')$ nên M' là hình chiếu của M trên mặt phẳng $(A'B'C')$ theo phương CC' .

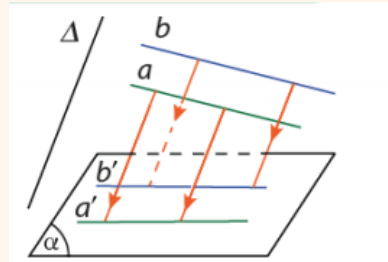


- ① Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD . Tìm hình chiếu song song của điểm O trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ theo phương AA' .

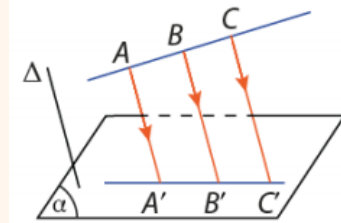
II. CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÉP CHIẾU SONG SONG



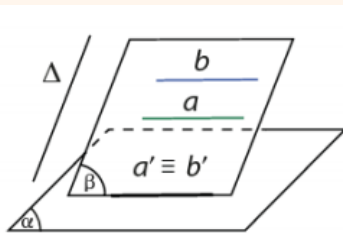
- ◆ Phép chiếu song song biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự 3 điểm đó.
- ◆ Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, tia thành tia, đoạn thẳng thành đoạn thẳng, biến tia thành tia.
- ◆ Phép chiếu song song biến 2 đường thẳng song song thành 2 đường thẳng song song hoặc trùng nhau.
- ◆ Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng cùng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.



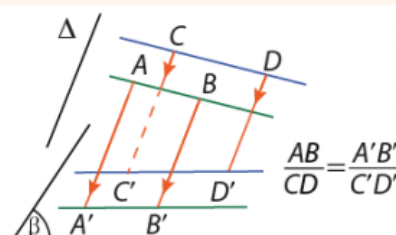
Hình 4.91



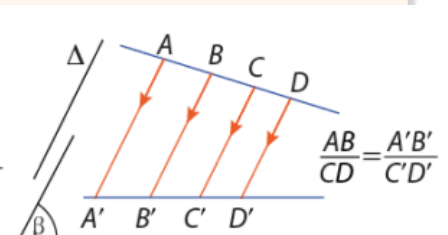
Hình 4.92



Hình 4.93



Hình 4.94



Hình 4.95

Ví dụ 2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AD, BC . Lấy P, Q lần lượt là hai điểm trên cạnh SB, SA sao cho $\frac{SP}{SB} = \frac{SQ}{SA} = \frac{2}{3}$.

- Tìm ảnh của các đoạn thẳng MN, PQ và tam giác MNP qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (SCD) theo phương AD .
- Hãy nhận xét về vị trí tương đối của ảnh hai đường thẳng MN, PQ qua phép chiếu trên.

Hướng dẫn giải.

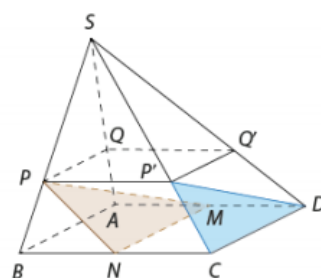
- Ảnh của M và N qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (SCD) theo phương AD lần lượt là C và D nên ảnh của MN qua phép chiếu này là đoạn thẳng CD .

Trong (SAD) , vẽ $QQ' \parallel AD$ ($Q' \in SD$); trong (SBC) , vẽ PP' song song với BC ($P' \in SC$).

Do đó ảnh của P, Q qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (SCD) theo phương AD lần lượt là P', Q' . Vậy ảnh của PQ là đoạn thẳng $P'Q'$, và ảnh của tam giác MNP là tam giác DCP' .

- Ta có:

$$\frac{SP'}{SC} = \frac{SP}{SB} = \frac{2}{3}, \quad \frac{SQ'}{SD} = \frac{SQ}{SA} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{SP'}{SC} = \frac{SQ'}{SD} \Rightarrow P'Q' \parallel CD.$$



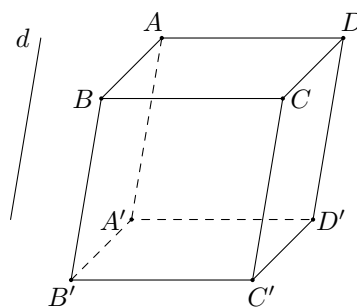
Ví dụ 3

Cho hình bình hành $ABCD$ và gọi $A'B'C'D'$ là hình chiếu của $ABCD$ trên mặt phẳng (P) theo phương d . Chứng minh rằng tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên AB song song với CD , do đó hình chiếu của AB là $A'B'$ song song với hình chiếu của CD là $C'D'$. Tương tự $A'D'$ song song với $B'C'$.

Tứ giác $A'B'C'D'$ có $A'B' \parallel C'D'$ và $A'D' \parallel B'C'$ nên nó là hình bình hành.





- ② Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC . Một phép chiếu song song biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$, biến M thành M' . Chứng minh rằng $A'M'$ là đường trung tuyến của tam giác $A'B'C'$.

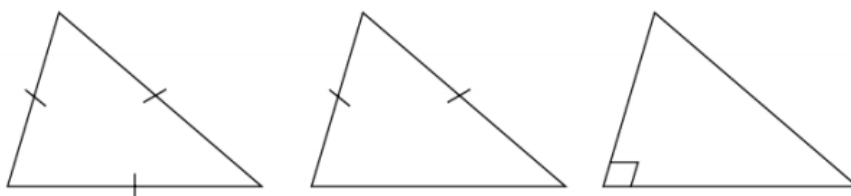
III. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN



Hình biểu diễn của một hình $\mathcal{H}$ trong không gian là hình chiếu song song của hình $\mathcal{H}$ trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

a) Tam giác:

Một tam giác bất kì bao giờ cũng có thể xem là hình biểu diễn của một tam giác có dạng tùy ý cho trước (có thể là tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông,...)



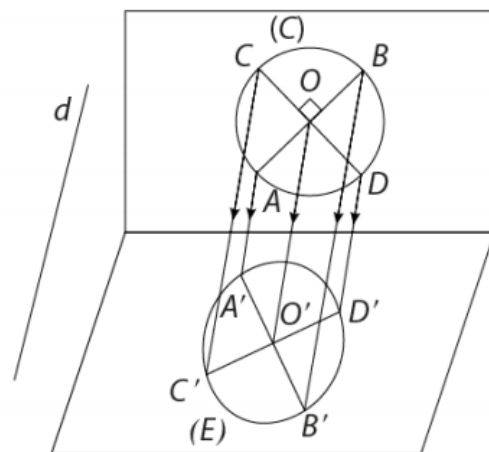
b) Hình bình hành:

Một hình bình hành bất kì bao giờ cũng có thể xem là hình biểu diễn của một hình bình hành tùy ý cho trước (có thể là hình bình hành, hình vuông, hình chữ nhật...)



- c) **Hình thang:** Một hình thang bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình thang tùy ý cho trước, miễn là tỉ số độ dài hai đáy của hình biểu diễn phải bằng tỉ số độ dài hai đáy của hình thang ban đầu.

- d) **Hình tròn:** Vì hình chiếu song song của một hình tròn là một hình elip hoặc một hình tròn, hoặc đặc biệt có thể là một đoạn thẳng nên người ta thường dùng hình elip để biểu diễn cho hình tròn.



BÀI TẬP



1 Trắc nghiệm

❖ **Câu 1.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hình chiếu của tam giác $A'B'C'$ theo phương BB' lên mặt phẳng (ABC) là hình nào?

- (A) ADC . (B) ADB . (C) BCD . (D) ABC .

❖ **Câu 2.** Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) Hình chiếu song song của một hình chóp cắt có thể là một hình tam giác.
 (B) Hình chiếu song song của một hình chóp cắt có thể là một đoạn thẳng.
 (C) Hình chiếu song song của một hình chóp cắt có thể là một hình chóp cắt.
 (D) Hình chiếu song song của một hình chóp cắt có thể là một điểm.

❖ **Câu 3.** Qua phép chiếu song song, tính chất nào **không được** bảo toàn?

- (A) Chéo nhau. (B) Đồng quy.
 (C) Thẳng hàng. (D) Song song.

❖ **Câu 4.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- (A) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.
 (B) Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau thì song song.
 (C) Hình chiếu song song của hai một hình vuông là một hình vuông.
 (D) Hình chiếu song song của một lục giác đều là một lục giác đều.

❖ **Câu 5.** Qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) , hai đường thẳng a và b có hình chiếu là hai đường thẳng song song a' và b' . Khi đó:

- (A) a và b phải song song với nhau.
 (B) a và b phải cắt nhau.
 (C) a và b có thể chéo nhau hoặc song song với nhau.
 (D) a và b không thể song song.

❖ **Câu 6.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hình chiếu song song của điểm B' trên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương chiếu $A'D$ là:

- (A) Điểm B . (B) Điểm D . (C) Điểm C . (D) Điểm A .

❖ **Câu 7.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hình chiếu song song của đoạn thẳng $A'B$ trên mặt phẳng $(CDD'C')$ theo phương chiếu BC là:

- (A) Đoạn thẳng $D'C$. (B) Đoạn thẳng $A'D'$.
(C) Đoạn thẳng AB' . (D) Đoạn thẳng $A'B$.

❖ **Câu 8.** Trong các Hình 44a, b, c, có bao nhiêu hình có thể là hình biểu diễn cho hình chóp tứ giác?



- (A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

2 Tự luận

❖ **Bài 1.** Những mệnh đề nào trong các mệnh đề sau đây là đúng?

- a) Phép chiếu song song biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
b) Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng cắt nhau.
c) Phép chiếu song song biến tam giác đều thành tam giác cân.
d) Phép chiếu song song biến hình vuông thành hình bình hành.

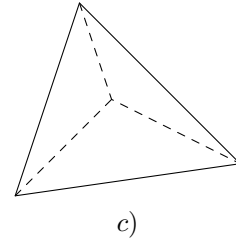
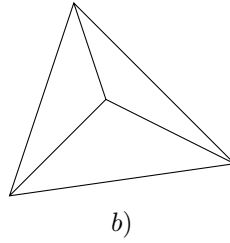
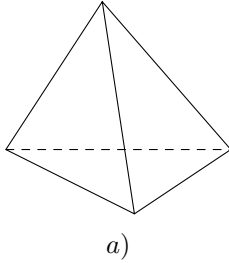
❖ **Bài 2.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- a) Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu của nó.
b) Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu của nó.
c) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.
d) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau.

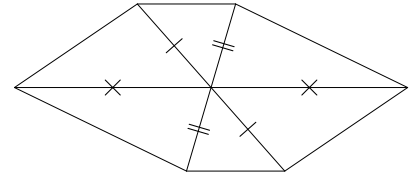
❖ **Bài 3.** Nếu tam giác $A'B'C'$ là hình chiếu của tam giác ABC qua một phép chiếu song song thì tam giác ABC có phải là hình chiếu của tam giác $A'B'C'$ qua một phép chiếu song song hay không? Hãy giải thích.

Bài 4. Phép chiếu song song biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng phép chiếu đó biến trọng tâm của tam giác ABC thành trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.

Bài 5. Trong các Hình $a), b), c)$, hình nào là hình biểu diễn cho hình tứ diện?

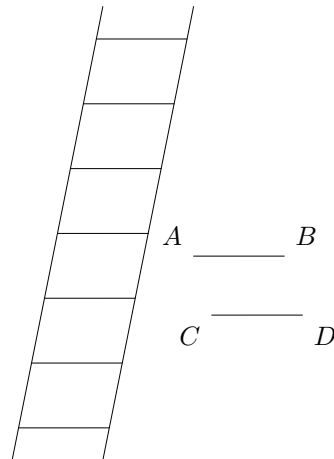
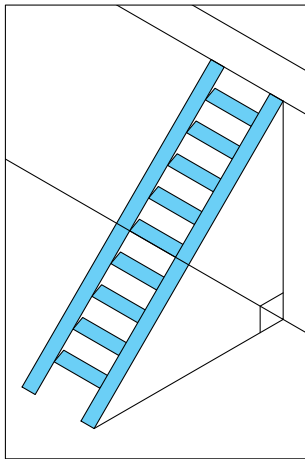


Bài 6. Hình bên có thể là hình biểu diễn của một hình lục giác đều hay không? Vì sao?



Bài 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định ảnh của tam giác $A'C'D'$ qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương $A'B$.

Bài 8. Trong hình bên dưới, AB và CD là bóng của hai thanh chắn của một chiếc thang dưới ánh mặt trời. Hãy giải thích tại sao AB song song với CD .



6 ÔN TẬP CHƯƠNG 4



1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

❖ **Câu 1.** Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) . Mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng a và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường thẳng b . Vị trí tương đối của hai đường thẳng a và b là

- (A) chéo nhau. (B) cắt nhau. (C) song song. (D) trùng nhau.

❖ **Câu 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh SD . Đường thẳng SB song song với mặt phẳng

- (A) (CDM) . (B) (ACM) . (C) (ADM) . (D) (ACD) .

❖ **Câu 3.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(AB'D')$ song song với mặt phẳng

- (A) $(ABCD)$. (B) $(BCC'B')$. (C) (BDA') . (D) (BDC') .

❖ **Câu 4.** Cho ba mặt phẳng (P) , (Q) , (R) đôi một song song với nhau. Đường thẳng a cắt các mặt phẳng (P) , (Q) , (R) lần lượt tại A , B , C sao cho $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ và đường thẳng b cắt các mặt phẳng (P) , (Q) , (R) lần lượt tại A' , B' , C' . Tỉ số $\frac{A'B'}{B'C'}$ bằng

- (A) $\frac{2}{3}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{3}{2}$. (D) $\frac{2}{5}$.

❖ **Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB , SD , K là giao điểm của mặt phẳng (AMN) và đường thẳng SC . Tỉ số $\frac{SK}{SC}$ bằng

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{1}{4}$. (D) $\frac{2}{3}$.

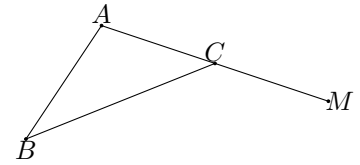
❖ **Câu 6.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M , M' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC , $B'C'$. Hình chiếu của $\triangle B'DM$ qua phép chiếu song song trên $(A'B'C'D')$ theo phương AA' là

- (A) $\triangle B'A'M'$. (B) $\triangle C'D'M'$. (C) $\triangle DMM'$. (D) $\triangle B'D'M'$.

❖ **Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I , J , E , F lần lượt là trung điểm SA , SB , SC , SD . Đường thẳng nào **không song song** với IJ ?

- (A) EF . (B) CD . (C) AD . (D) AB .

❖ **Câu 8.** Cho tam giác ABC . Lấy điểm M trên cạnh AC kéo dài (Hình bên). Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?



- (A) $M \in (ABC)$. (B) $C \in (ABM)$.
(C) $A \in (MBC)$. (D) $B \in (ACM)$.

❖ **Câu 9.** Cho tứ diện $ABCD$ với I và J lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Bốn điểm I, J, B, C đồng phẳng.
(B) Bốn điểm I, J, A, C đồng phẳng.
(C) Bốn điểm I, J, B, D đồng phẳng.
(D) Bốn điểm I, J, C, D đồng phẳng.

❖ **Câu 10.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có AC cắt BD tại M , AB cắt CD tại N . Trong các đường thẳng sau đây, đường nào là giao tuyến của (SAC) và (SBD) ?

- (A) SM . (B) SN . (C) SB . (D) SC .

❖ **Câu 11.** Cho hình bình hành $ABCD$ và một điểm S không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là một đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

- (A) AB . (B) AC . (C) BC . (D) SA .

❖ **Câu 12.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. M là điểm trên SA sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và CD , cắt hình chóp theo một tứ giác có diện tích là

- (A) $\frac{400}{9}$. (B) $\frac{200}{3}$. (C) $\frac{40}{9}$. (D) $\frac{200}{9}$.

❖ **Câu 13.** Quan hệ song song trong không gian có tính chất nào trong các tính chất sau?

- (A) Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (P) đều song song với (Q) .
(B) Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (P) đều song song với mọi đường thẳng nằm trong (Q) .
(C) Nếu hai đường thẳng song song với nhau lần lượt nằm trong hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) thì (P) và (Q) song song với nhau.
(D) Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng cho trước ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với mặt phẳng cho trước đó.

❖ **Câu 14.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh $AC, AA', A'C', BC$. Ta có

- (A) $(MNP) // (BCA)$. (B) $(MNQ) // (A'B'C')$.
(C) $(NQP) // (CAB)$. (D) $(MPQ) // (ABA')$.

❖ **Câu 15.** Trong không gian, hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi

- (A) Hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.
(B) Hai đường thẳng không có điểm chung.
(C) Hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng.
(D) Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba.

❖ **Câu 16.** Trong không gian, đường thẳng song song với mặt phẳng khi và chỉ khi

- (A) Đường thẳng đó song song với một đường thẳng thuộc mặt phẳng.
(B) Đường thẳng và mặt phẳng không có điểm chung.
(C) Đường thẳng đó không có điểm chung với một đường thẳng thuộc mặt phẳng.
(D) Đường thẳng đó không có điểm chung với hai đường thẳng thuộc mặt phẳng.

❖ **Câu 17.** Trong không gian, hai mặt phẳng song song với nhau khi và chỉ khi

- (A) Có một mặt phẳng chứa hai đường thẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng còn lại.
(B) Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng.
(C) Hai mặt phẳng cùng song song với mặt phẳng thứ ba.
(D) Hai mặt phẳng không có điểm chung.

❖ **Câu 18.** Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và (α) . Giả sử $a // b, b // (\alpha)$. Khi đó

- (A) $a // (\alpha)$. (B) $a \subset (\alpha)$.
(C) a cắt (α) . (D) $a // (\alpha)$ hoặc $a \subset (\alpha)$.

❖ **Câu 19.** Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) . Giả sử $b \not\subset (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Nếu $b // (\alpha)$ thì $b // a$.
(B) Nếu b cắt (α) thì b cắt a .
(C) Nếu $b // a$ thì $b // (\alpha)$.
(D) Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt cả a và b .

❖ **Câu 20.** Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối của a và (P) ?

- (A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 4.

❖ **Câu 21.** Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- (A) Có duy nhất một mặt phẳng song song với a và b .
 (B) Có duy nhất một mặt phẳng qua a và song song với b .
 (C) Có duy nhất một mặt phẳng qua điểm M , song song với a và b (với M là điểm cho trước).
 (D) Có vô số đường thẳng song song với a và cắt b .

❖ **Câu 22.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- (A) Hai mặt phẳng không cắt nhau thì song song.
 (B) Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì cắt nhau.
 (C) Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.
 (D) Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có vô số mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

❖ **Câu 23.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- (A) IJ song song với CD . (B) IJ song song với AB .
 (C) IJ chéo CD . (D) IJ cắt AB .

❖ **Câu 24.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Khẳng định nào sau đây **sai**?

- (A) Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên.
 (B) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO (O là giao điểm của AC và BD).
 (C) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là SI (I là giao điểm của AD và BC).
 (D) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là đường trung bình của $ABCD$.

❖ **Câu 25.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I, I' lần lượt là trung điểm của $AB, A'B'$. Qua phép chiếu song song phương AI' , mặt phẳng chiếu $(A'B'C')$ biến I thành?

- (A) A' . (B) B' . (C) C' . (D) I' .

❖ **Câu 26.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD . Giao tuyến của mặt phẳng (ACD) và (GAB) là

- (A) AM (M là trung điểm của AB).
- (B) AN (N là trung điểm của CD).
- (C) AH (H là hình chiếu của B trên CD).
- (D) AK (K là hình chiếu của C trên BD).

❖ **Câu 27.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có AD không song song với BC . Gọi M, N, P, Q, R, T lần lượt là trung điểm AC, BD, BC, CD, SA, SD . Cặp đường thẳng nào sau đây song song với nhau?

- (A) MP và RT .
- (B) MQ và RT .
- (C) MN và RT .
- (D) PQ và RT .

❖ **Câu 28.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC và G là trọng tâm của tam giác SAB . Giao tuyến của (SAB) và (IJG) là

- (A) SC .
- (B) đường thẳng qua S và song song với AB .
- (C) đường thẳng qua G và song song với DC .
- (D) đường thẳng qua G và cắt BC .

❖ **Câu 29.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, I theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và AB . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) (NOM) cắt (OPM) .
- (B) $(MON) // (SBC)$.
- (C) $(PON) \cap (MNP) = NP$.
- (D) $(NMP) // (SBD)$.

❖ **Câu 30.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J và K lần lượt là trung điểm của AC, BC và BD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (IKJ) là đường thẳng

- (A) KD .
- (B) KI .
- (C) qua K và song song với AB .
- (D) Không có.

❖ **Câu 31.** Cho hai đường thẳng phân biệt a và b trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa a và b ?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

❖ **Câu 32.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, qua phép chiếu song song phương CC' , mặt phẳng chiếu $(A'B'C')$ biến M thành M' . Trong đó M là trung điểm của BC . Chọn mệnh đề **đúng**?

- (A) M' là trung điểm của $A'B'$. (B) M' là trung điểm của $B'C'$.
(C) M' là trung điểm của $A'C'$. (D) Cả ba đáp án trên đều sai.

❖ **Câu 33.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- (A) Nếu 3 điểm A, B, C là 3 điểm chung của 2 mặt phẳng (P) và (Q) thì A, B, C thẳng hàng.
(B) Nếu A, B, C thẳng hàng và $(P), (Q)$ có điểm chung là A thì B, C cũng là 2 điểm chung của (P) và (Q) .
(C) Nếu 3 điểm A, B, C là điểm chung của 2 mặt phẳng (P) và (Q) phân biệt thì A, B, C không thẳng hàng.
(D) Nếu A, B, C thẳng hàng và A, B là 2 điểm chung của (P) và (Q) phân biệt thì C cũng là điểm chung của (P) và (Q) .

❖ **Câu 34.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có M, N, P lần lượt là các điểm thuộc các cạnh SA, SB, SC . Gọi O là giao điểm của AC và BD . Biết Q là giao điểm của SD với mặt phẳng (MNP) . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) SO, MP, NQ đồng quy. (B) M, N, Q thẳng hàng.
(C) N, P, Q thẳng hàng. (D) SO, SD, NQ đồng quy.

❖ **Câu 35.** Cho hình chóp $S.ABC$ có M, N, P lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCA . Gọi (α) là mặt phẳng qua S và song song với (ABC) . Biết Q là giao điểm giữa AN và (α) . Tỷ số $\frac{QN}{QA}$ bằng

- (A) $\frac{1}{3}$. (B) $\frac{2}{3}$. (C) $\frac{3}{2}$. (D) 3.

❖ **Câu 36.** Cho hình chóp $S.ABC$ có M, N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và SBC . Gọi Δ là giao tuyến giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AMN) . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- (A) $\Delta // MN$.
(B) Δ đi qua hai điểm A và C .
(C) Δ cắt SB .
(D) Bốn điểm A, M, N, C đồng phẳng.

❖ **Câu 37.** Cho chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB//CD$. Giả sử $AC \cap BD = O$ và $AD \cap BC = I$. Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là

- (A) SO . (B) SB . (C) SI . (D) SA .

❖ **Câu 38.** Cho chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SD, AB, ON . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- (A) $(MON) // (SBC)$. (B) $(MOP) // (SBC)$.
(C) $MN // (ABCD)$. (D) $(MON) // (ABC)$.

❖ **Câu 39.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Có bao nhiêu cạnh của hình lập phương chéo nhau với đường chéo AC' của hình lập phương?

- (A) 2. (B) 3. (C) 6. (D) 4.

❖ **Câu 40.** Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không thuộc cùng một mặt phẳng, có cạnh chung AB . Kết quả nào sau đây **đúng**?

- (A) $BC // (AEF)$. (B) $FD // (BEF)$.
(C) $(CEF) // (ABD)$. (D) $(AFD) // (BCE)$.

❖ **Câu 41.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào **sai**?

- (A) $(A'BD) // (CB'D')$. (B) $(AB'D') // (A'BD)$.
(C) $B'D' // (BCD)$. (D) $(DA'C') // (B'AC)$.

❖ **Câu 42.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- (A) Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể song song với nhau.
(B) Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể cắt nhau.
(C) Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể trùng nhau.
(D) Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu song song của nó.

❖ **Câu 43.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

- (A) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau.
(B) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau thì cắt nhau.
(C) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.
(D) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể cắt nhau, trùng nhau, song song với nhau.

❖ **Câu 44.** Hình chóp có 18 cạnh (bao gồm cả cạnh đáy và cạnh bên) có bao nhiêu mặt?

- (A) 9. (B) 10. (C) 18. (D) 19 .

❖ **Câu 45.** Chọn khẳng định **sai**?

- (A) Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì sẽ cắt mặt phẳng còn lại.
 (B) Nếu hai mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mặt phẳng kia.
 (C) Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) và (Q) song song với nhau.
 (D) Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì mặt phẳng (R) đã cắt (P) đều phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song với nhau.

❖ **Câu 46.** Chọn khẳng định **sai**?

- (A) Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì sẽ cắt mặt phẳng còn lại.
 (B) Nếu hai mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mặt phẳng kia.
 (C) Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) và (Q) song song với nhau.
 (D) Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì mặt phẳng (R) đã cắt (P) đều phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song với nhau.

❖ **Câu 47.** Số đường chéo của một hình hộp là

- (A) 4 . (B) 24 . (C) 2 . (D) 28.

❖ **Câu 48.** Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng thuộc một mặt phẳng. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- (A) Bốn điểm A, B, C, D đã cho đôi một khác nhau.
 (B) Không có ba điểm nào trong bốn điểm A, B, C, D là thẳng hàng.
 (C) Hai đường thẳng AC và BD song song với nhau.
 (D) Hai đường thẳng AC và BD không có điểm chung.

❖ **Câu 49.** Cho (P) và điểm A nằm ngoài (P) . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) Qua A có vô số mặt phẳng song song với (P) .
 (B) Qua A có đúng một mặt phẳng song song với (P) .
 (C) Qua A không có mặt phẳng song song với (P) .
 (D) Qua A có đúng hai mặt phẳng song song với (P) .

❖ **Câu 50.** Cho tứ diện $ABCD$. Một mặt phẳng cắt các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ diện lần lượt tại M, N, P, Q . Khi đó

- (A) MN, AC, PQ đồng quy.
 (B) MN, AC, PQ đôi một song song.
 (C) MN, AC, PQ đôi một chéo nhau.
 (D) MN, AC, PQ đôi một song song hoặc chéo nhau.

2 Trắc nghiệm đúng sai

❖ **Câu 1.** Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
(A) Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.		
(B) Hai đường thẳng song song xác định một mặt phẳng.		
(C) Hai đường thẳng được gọi là song song nếu chúng không có điểm chung.		
(D) Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.		

❖ **Câu 2.** Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và BC . Gọi H, K lần lượt là trọng tâm của $\triangle SAB$ và $\triangle SBC$.

Phát biểu	Đ	S
(A) $AC \parallel (SIJ)$.		
(B) IJ cắt SB .		
(C) $HK \parallel IJ$.		
(D) Giao tuyến của (BHK) và (ABC) là đường thẳng đi qua B và song song với AC .		

❖ **Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC . Mặt phẳng (MNP) cắt SD tại Q

Phát biểu	Đ	S	Phát biểu	Đ	S
(A) $NQ = a$.			(C) $(MNP) \parallel (ABCD)$.		
(B) $(MNO) \parallel (SCD)$.			(D) $S_{MNPQ} = a^2$.		

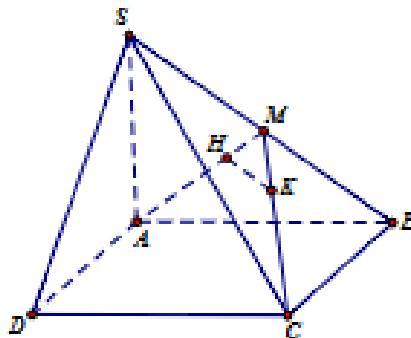
❖ **Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Gọi E là trung điểm DC và M là trung điểm BC . Trên cạnh SA lấy điểm N sao cho $AN = \frac{2}{3}SA$.

Phát biểu	Đ	S
A AG cắt mặt phẳng .		
B Đường thẳng ME cắt mặt phẳng (NBD) .		
C $(NGD) \parallel (SME)$.		
D Gọi I là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (SME) . Khi đó SI cắt mặt phẳng (NOB) .		

❖ **Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SD .

Phát biểu	Đ	S
A $(OMN) \parallel (SBC)$.		
B Mặt phẳng (OMN) đi qua trung điểm của cạnh AB .		
C Giao tuyến của (OMN) và mặt phẳng $(ABCD)$ là đường thẳng đi qua O và song song với đường thẳng AB .		
D Điểm C thuộc mặt phẳng (OMN) .		

❖ **Câu 6.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm đoạn SB , H và K lần lượt là trọng tâm tam giác SAB và SBC (tham khảo hình vẽ dưới đây).

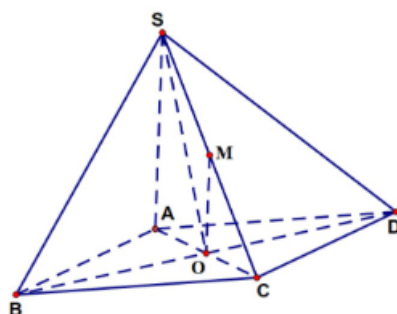


Phát biểu	Đ	S	Phát biểu	Đ	S
A $AB // CD$.			C $HK // (ABCD)$.		
B SC và AB cắt nhau.			D $(HK) // (SAC)$.		

❖ **Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SD, CD .

Phát biểu	Đ	S
A $BD // (MNP)$.		
B $MN // BD$.		
C $NP // (SAB)$.		
D Mặt phẳng (MNP) cắt hình chóp theo thiết diện là một hình bình hành.		

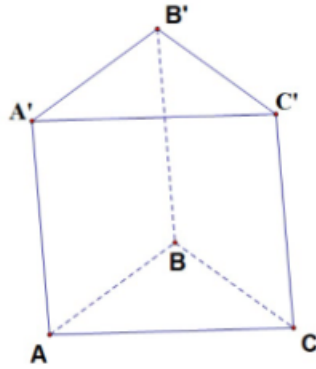
❖ **Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, tâm là O . Gọi M là trung điểm của SC .



Phát biểu	Đ	S
A SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) .		
B Giao điểm của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD) thuộc cạnh SO .		
C Đường thẳng MO cắt mặt phẳng (SAD) .		
D Ba mặt phẳng (SAB) , (SAC) và (MOB) đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt và ba giao tuyến này đồng quy.		

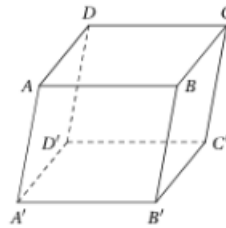
❖ **Câu 9.** Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của

$A'B'$ và AB , và I là tâm của hình bình hành $BCC'B'$.



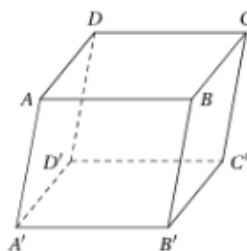
Phát biểu	Đ	S
A Đường thẳng MN cắt đường thẳng $B'C'$.		
B Giao tuyến của hai mặt phẳng (MNI) và $(BCC'B')$ song song với BB' .		
C $(MNI) \parallel (ACC'A')$.		
D Đường thẳng MI cắt mặt phẳng (ABC) tại điểm K . Khi đó, $NK = AC$.		

❖ **Câu 10.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, khẳng định nào sau đây là đúng?



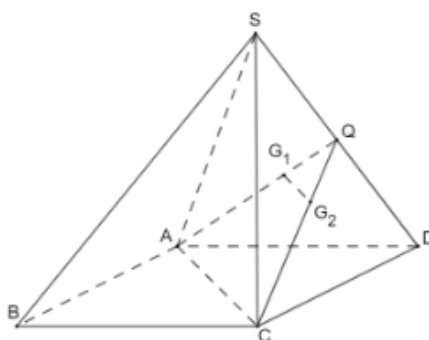
Phát biểu	Đ	S
A $(DCB') \parallel (AAB')$.		
B $DC \parallel AB$.		
C Giao tuyến của mặt phẳng (BBD') và $(A'B'C'D')$ là đường thẳng $B'B$.		
D $(DC) \parallel (ABB'A')$.		

❖ **Câu 11.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, khẳng định nào sau đây là đúng?



Phát biểu	Đ	S
A $(DCB') // (AAB')$.		
B $DC // AB$.		
C Giao tuyến của mặt phẳng $(BB'D')$ và $(A'B'C'D')$ là đường thẳng $B'B$.		
D $(DC) // (ABB'A')$.		

❖ **Câu 12.** Trong không gian, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAD và SCD . Xét tính đúng – sai của các mệnh đề sau:



Phát biểu	Đ	S
A Đường thẳng G_1G_2 và AC có một điểm chung.		
B Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ là đường thẳng AB .		
C Đường thẳng G_1G_2 song song với mặt phẳng $(ABCD)$.		
D Mặt phẳng chứa đường thẳng G_1G_2 và song song với mặt phẳng $(ABCD)$ cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, E, F . Khi đó, tứ giác $MNEF$ là hình bình hành.		

❖ **Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, trong đó một đáy là AD . Gọi M là trọng tâm tam giác SAD , N thuộc cạnh AC sao cho $NA = \frac{1}{2}NC$.

- A** $AD // BC$.
B $(DMN) // (SCB)$.
C Có duy nhất một mặt phẳng chứa SB và song song với AD .
D $MN // (SCB)$.

❖ **Câu 14.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AD // BC$ và $AD = 2 \cdot BC$. Gọi G là trọng tâm tam

giác SCD .

A ____ Hai đường thẳng SA và BC chéo nhau.

B ____ Giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (SCD) là giao điểm của hai đường thẳng AB và SC .

C ____ Hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) có đúng một điểm chung.

D ____ Đường thẳng CG song song với mặt phẳng (SAB) .



Tự luận

Bài 1. Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM = 3AM$. Mặt phẳng (P) đi qua M song song với hai đường thẳng AD và BC .

a) Xác định giao điểm K của mặt phẳng (P) với đường thẳng CD .

b) Tính tỉ số $\frac{KC}{CD}$.

Bài 2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và AA' .

a) Xác định giao điểm của mặt phẳng (MNP) và đường thẳng $B'C$.

b) Gọi K là giao điểm của của mặt phẳng (MNP) với đường thẳng $B'C$. Tính tỉ số $\frac{KB'}{KC}$.

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAD, SCD .

a) Chứng minh $GK \parallel (ABCD)$.

b) Mặt phẳng chứa đường thẳng GK và song song với mặt phẳng $(ABCD)$ cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, E, F . Chứng minh rằng tứ giác $MNEF$ là hình bình hành.

Bài 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh $AD, A'B'$. Chứng minh rằng

a) $BD \parallel B'D', (A'BD) \parallel (CB'D')$ và $MN \parallel (BDD'B')$

b) Đường thẳng AC' đi qua trọng tâm G của tam giác $A'BD$.

Bài 5. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BD . Điểm P thuộc cạnh AC sao cho $PA = 2PC$.

a) Xác định giao điểm E của đường thẳng MP với mặt phẳng (BCD) .

b) Xác định giao điểm Q của đường thẳng CD với mặt phẳng (MNP) .

- c) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (ACD) với mặt phẳng (MNP) .
- d) Gọi I là giao điểm của MQ và NP , G là trọng tâm của tam giác ABD . Chứng minh C, I, G thẳng hàng.

 **Bài 6.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $AB, C'D'$.

- a) Chứng minh rằng $(A'DN) \parallel (B'CM)$.
- b) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của đường thẳng $D'B$ với các mặt phẳng $(A'DN), (B'CM)$. Chứng minh rằng $D'E = BF = \frac{1}{2}EF$.

 **Bài 7.** Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Lấy M, M' lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng $BC, B'C'$; lấy các điểm G, G', K lần lượt thuộc các đoạn $AM, A'M', A'B$ sao cho $\frac{AG}{AM} = \frac{A'G'}{A'M'} = \frac{A'K}{A'B} = \frac{2}{3}$.

- a) Chứng minh rằng $C'M \parallel (A'BM')$.
- b) Chứng minh rằng $G'K \parallel (BCC'B')$.
- c) Chứng minh rằng $(GG'K) \parallel (BCC'B')$.
- d) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua K và song song với mặt phẳng (ABC) . Mặt phẳng (α) cắt cạnh CC' tại điểm I . Tính $\frac{IC}{IC'}$.

 **Bài 8.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và $A'B'$ và O là một điểm thuộc miền trong của mặt bên $CC'D'D$. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (OMN) với các mặt của hình hộp.

 **Bài 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình thoi cạnh a , tam giác SAD đều, M là điểm trên cạnh AB , (α) là mặt phẳng qua M và $(\alpha) \parallel (SAD)$ cắt CD, SC, SB lần lượt tại N, P, Q .

- a) Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình thang cân.
- b) Đặt $AM = x$, tính diện tích $MNPQ$ theo a và x .

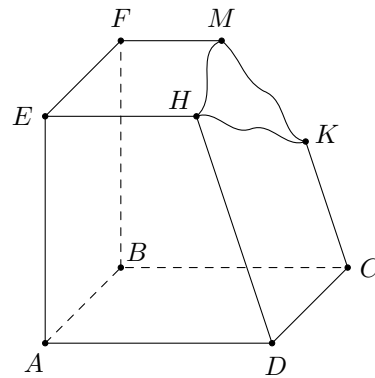
 **Bài 10.** Cho mặt phẳng (α) và hai đường thẳng chéo nhau a, b cắt (α) tại A và B . Gọi d là đường thẳng thay đổi luôn luôn song song với (α) và cắt a tại M , cắt b tại N . Qua điểm N dựng đường thẳng song song với a cắt (α) tại điểm C .

- a) Tứ giác $MNCA$ là hình gì?
- b) Chứng minh rằng điểm C luôn luôn chạy trên một đường thẳng cố định.
- c) Xác định vị trí của đường thẳng d để độ dài MN nhỏ nhất.

Bài 11. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Lấy các điểm M, N lần lượt thuộc các đường chéo AC và BF sao cho $MC = 2MA$; $NF = 2NB$. Qua M, N kẻ các đường thẳng song song với AB , cắt các cạnh AD, AF lần lượt tại M_1, N_1 . Chứng minh rằng

- $MN \parallel DE$;
- $M_1N_1 \parallel (DEF)$;
- $(MNN_1M_1) \parallel (DEF)$.

Bài 12. Một khối gỗ có các mặt đều là một phần của mặt phẳng với $(ABCD) \parallel (EFMH)$, $CK \parallel DH$. Khối gỗ bị hỏng một góc (hình bên). Bác thợ mộc muốn làm đẹp khối gỗ bằng cách cắt khối gỗ theo mặt phẳng (R) đi qua K và song song với mặt phẳng $(ABCD)$.



- Hãy giúp bác thợ mộc xác định giao tuyến của mặt phẳng (R) với các mặt của khối gỗ để cắt được chính xác.
- Gọi I, J lần lượt là giao điểm DH, BF với mặt phẳng (R) . Biết $BF = 60$ cm, $DH = 75$ cm, $CK = 40$ cm. Tính FJ .