

TRUNG TÂM GDNN-GDTX TP. THUẬN AN
TỔ TOÁN



TOÁN 12

 GV: DOÃN THỊNH

 BÌNH DƯƠNG

MỤC LỤC

PHẦN I	GIẢI TÍCH	3
CHƯƠNG 1	ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM. KHẢO SÁT HÀM SỐ	5
1	SỰ ĐỒNG BIẾN - NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ	5
2	CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ	19
3	GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT	36
4	ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ	42
5	KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ	49
CHƯƠNG 2	HÀM SỐ LŨY THỪA. HÀM SỐ MŨ - HÀM SỐ LOGARIT	73
1	LŨY THỪA	73
2	HÀM SỐ LŨY THỪA	77
3	LOGARIT	83
4	HÀM SỐ MŨ - HÀM SỐ LOGARIT	88
5	PHƯƠNG TRÌNH MŨ - PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT	97
6	BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ - BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT	106
CHƯƠNG 3	NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG	115
1	NGUYÊN HÀM	115
2	TÍCH PHÂN	129
3	ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN	144
CHƯƠNG 4	SỐ PHỨC	155
1	SỐ PHỨC - CÁC PHÉP TOÁN TRÊN SỐ PHỨC	155
2	PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HỆ SỐ THỰC	164

PHẦN II HÌNH HỌC**169****CHƯƠNG 1 KHỐI ĐA DIỆN****171**

- | | | |
|---|---|-----|
| 1 | KHÁI NIỆM VỀ HÌNH ĐA DIỆN VÀ KHỐI ĐA DIỆN | 171 |
| 2 | KHỐI ĐA DIỆN LỒI, KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU | 175 |
| 3 | THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN | 180 |

CHƯƠNG 2 MẶT NÓN - MẶT TRỤ - MẶT CẦU**199**

- | | | |
|---|----------------------------|-----|
| 1 | KHÁI NIỆM VỀ MẶT TRÒN XOAY | 199 |
| 2 | MẶT CẦU | 207 |

CHƯƠNG 3 PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN**215**

- | | | |
|---|---|-----|
| 1 | HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN | 215 |
| 2 | PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG | 228 |
| 3 | PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN | 240 |

PHẦN



GIẢI TÍCH

CHƯƠNG 1

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM. KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 1. SỰ ĐỒNG BIẾN - NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Ký hiệu K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng. Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên K , ta có

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **đồng biến** (tăng) trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **nghịch biến** (giảm) trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.

Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là **đơn điệu** trên K .

Nhận xét.

- Hàm số $f(x)$ đồng biến trên K khi và chỉ khi

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0, \forall x_1, x_2 \in K, x_1 \neq x_2.$$

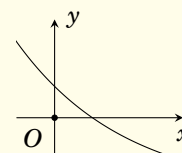
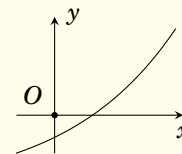
Khi đó đồ thị của hàm số **đi lên** từ trái sang phải.

- Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K khi và chỉ khi

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0, \forall x_1, x_2 \in K, x_1 \neq x_2.$$

Khi đó đồ thị của hàm số **đi xuống** từ trái sang phải.

- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$ thì hàm số $f(x)$ **đồng biến** trên khoảng $(a; b)$.
- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in (a; b)$ thì hàm số $f(x)$ **nghịch biến** trên khoảng $(a; b)$.
- Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in (a; b)$ thì hàm số $f(x)$ **không đổi** trên khoảng $(a; b)$.
- Nếu hàm số $f(x)$ **đồng biến** trên khoảng $(a; b)$ thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a; b)$.
- Nếu hàm số $f(x)$ **nghịch biến** trên khoảng $(a; b)$ thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a; b)$.
- Nếu thay đổi khoảng $(a; b)$ bằng một **đoạn** hoặc **nửa khoảng** thì phải **bổ sung** thêm giả thiết “hàm số $f(x)$ **liên tục** trên đoạn hoặc nửa khoảng đó”.



2 QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

Cho $u = u(x)$, $v = v(x)$ và C là hằng số.

- ① Tổng, hiệu: $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
- ② Tích: $(uv)' = u'v + v'u \Rightarrow (C \cdot u)' = C \cdot u'$.
- ③ Thương: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}, (v \neq 0) \Rightarrow \left(\frac{C}{u}\right)' = -\frac{C \cdot u'}{u^2}$.
- ④ Đạo hàm hàm hợp: Nếu $y = f(u)$ với $u = u(x)$ thì $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

3 CÔNG THỨC TÍNH ĐẠO HÀM HÀM PHÂN THỨC

$$\textcircled{1} \quad y = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y' = \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$$

$$\textcircled{2} \quad y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} \Rightarrow y' = \left(\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} \right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} x^2 + 2 \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{(a'x^2+b'x+c')^2}.$$

4 BẢNG CÔNG THỨC TÍNH ĐẠO HÀM

Hàm sơ cấp	Hàm hợp
$(C)' = 0, \quad (C \text{ là hằng số})$	
$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad (x \neq 0)$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}, \quad (u \neq 0)$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (x > 0)$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, \quad (u > 0)$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi biểu thức

Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định

- **Bước 1:** Tìm tập xác định $\mathcal{D}$.
- **Bước 2:** Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.
- **Bước 3:** Tìm nghiệm của $f'(x)$ hoặc những giá trị x làm cho $f'(x)$ không xác định.
- **Bước 4:** Lập bảng biến thiên.
- **Bước 5:** Kết luận.

 **Ví dụ 1.** Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 5$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 2.** Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x + 1$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 3.** Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x - 1$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 4.** Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = x^4 - 2x^2$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 5.** Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = x^4 + 4x^2$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 6.** Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \frac{3x + 1}{1 - x}$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 7.** Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số: $y = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x + 2}$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 8.** Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

□ **Dạng 2.** Tìm tham số m để hàm bậc ba, hàm nhất biến đơn điệu trên tập xác định hoặc từng khoảng xác định

① Hàm nhất biến có dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, điều kiện $x \neq -\frac{d}{c}$.

— Đồng biến $ad - bc > 0$.

— Nghịch biến $ad - bc < 0$.

② Hàm bậc ba có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

— Đồng biến $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

— Nghịch biến $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

— Suy biến tức là $a = b = 0$ hàm số trở thành hàm bậc nhất, để thấy hàm số đồng biến nếu $c > 0$ và hàm số nghịch biến nếu $c < 0$.

🔪 **Ví dụ 1.** Tìm m để hàm số $y = \frac{mx-1}{x-1}$ đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

🔪 **Ví dụ 2.** Cho hàm số $y = (m^2 - 1)\frac{x^3}{3} - (m + 1)x^2 + 3x + 5$. Tất cả các giá trị của m để hàm số đồng biến trên tập xác định.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 3. Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên một khoảng $(m;n)$

Bước 1: Điều kiện xác định $x \neq -\frac{d}{c}$.

Bước 2: Tính $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Bước 3: Thực hiện yêu cầu bài toán:

— Hàm số đồng biến trên khoảng $(m;n) \Leftrightarrow \begin{cases} ad-bc > 0 \\ -\frac{d}{c} \notin (m;n) \end{cases}$.

— Hàm số nghịch trên khoảng $(m;n) \Leftrightarrow \begin{cases} ad-bc < 0 \\ -\frac{d}{c} \notin (m;n) \end{cases}$.

🔪 Ví dụ 1. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x-m}$. Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

🔪 Ví dụ 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 4. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ đơn điệu trên khoảng $(a; b)$ *Phương pháp 1 : Khi $f'(x) = 0$ nhẩm được nghiệm.**Bước 1: Tính $f'(x)$.**Bước 2: Giải $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}$.**Bước 3: Lập bảng biến thiên.**Bước 4: Dựa vào bảng biến thiên suy ra điều kiện để hàm số đơn điệu trên $(a; b)$.**Phương pháp 2 : Khi $f'(x) = 0$ không nhẩm được nghiệm.**Bước 1: Tính $f'(x)$.**Bước 2: Cô lập m , đưa về một trong các dạng sau:*

$$— m \geq g(x), \forall x \in K \Leftrightarrow m \geq \max_K g(x).$$

$$— m \leq g(x), \forall x \in K \Leftrightarrow m \leq \max_K g(x).$$

✎ Ví dụ 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$. Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.**Lời giải:**

.....

.....

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 2. Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2+2m)x - 3$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.**Lời giải:**

.....

.....

.....

.....

.....

© TRẮC NGHIỆM**🔥 Câu 1.** Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ đồng biến trên các khoảng:**A.** $(-\infty; 1)$.**B.** $(0; 2)$.**C.** $(2; +\infty)$.**D.** $\mathbb{R}$.**🔥 Câu 2.** Các khoảng nghịch biến của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ là**A.** $(-\infty; 1)$ và $(2; +\infty)$.**B.** $(0; 2)$.**C.** $(2; +\infty)$.**D.** $\mathbb{R}$.

🔥 **Câu 3.** Hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ nghịch biến trên các khoảng

- A. $(-\infty; 1); (1; +\infty)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-1; +\infty)$. D. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

🔥 **Câu 4.** Các khoảng nghịch biến của hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 3$ là

- A. $(-\infty; 0); (1; +\infty)$. B. $(0; 1)$. C. $[-1; 1]$. D. $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

🔥 **Câu 5.** Các khoảng đồng biến của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ là

- A. $(-\infty; 0); (2; +\infty)$. B. $(0; 2)$. C. $[0; 2]$. D. $\mathbb{R}$.

🔥 **Câu 6.** Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; 0)$. C. $(1; +\infty)$. D. $\mathbb{R}$.

🔥 **Câu 7.** Hỏi hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x - 2$ nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $(5; +\infty)$. B. $(2; 3)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(1; 5)$.

🔥 **Câu 8.** Hỏi hàm số $y = \frac{3}{5}x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 2$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(-\infty; 0)$. B. $\mathbb{R}$. C. $(0; 2)$. D. $(2; +\infty)$.

🔥 **Câu 9.** Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 15$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$. B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số đồng biến trên $(-9; -5)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.

🔥 **Câu 10.** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{1-x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

🔥 **Câu 11.** Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
D. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

🔥 **Câu 12.** Cho hàm số $y = x + 3 + 2\sqrt{2-x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

🔥 **Câu 13.** Hỏi hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 5}{x + 1}$ nghịch biến trên các khoảng nào?

- A. $(-\infty; -4)$ và $(2; +\infty)$. B. $(-4; 2)$.
C. $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$. D. $(-4; -1)$ và $(-1; 2)$.

🔥 **Câu 14.** Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

🔥 **Câu 15.** Cho hàm số $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 2020$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.
B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.
C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.
D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
- B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1), (1; +\infty)$.
- D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến với $x \neq 1$.

Câu 17. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Trong các phát biểu sau, đâu là phát biểu **sai**?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và $[0; 1]$.
- C. Hàm số đồng biến trên $[-1; 0]$ và $[1; +\infty)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$.

Câu 18. Hàm số $y = \frac{2}{3x^2+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 0)$.
- B. $(-\infty; +\infty)$.
- C. $(0; +\infty)$.
- D. $(-1; 1)$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x^3 \cdot (x-1)^2 \cdot (x+2)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.
- B. $(-2; 0)$.
- C. $(-\infty; -2)$ và $(0; 1)$.
- D. $(-2; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = (x+1)^2 \cdot (x-1)^3 \cdot (2-x)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; 2)$.
- B. $(-\infty; -1)$.
- C. $(-1; 1)$.
- D. $(2; +\infty)$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(0; 1)$.
- B. $(-1; 0)$.
- C. $(-\infty; -1)$.
- D. $(-1; +\infty)$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	2	1	2	$-\infty$		

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; +\infty)$.
- B. $(-1; 0)$.
- C. $(-1; 1)$.
- D. $(0; 1)$.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	1	4	$-\infty$	

Hàm số đồng biến trên khoảng?

- A. $(-2; +\infty)$.
- B. $(-2; 3)$.
- C. $(3; +\infty)$.
- D. $(-\infty; -2)$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	-2	-1	1	3
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	0	1	-2	5

Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	1	$+\infty$	1

Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$

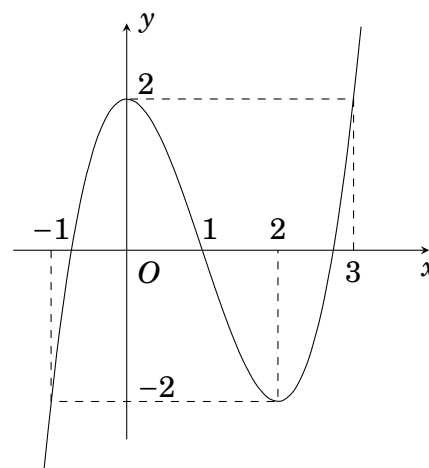
Mệnh đề nào đúng ?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

Câu 27.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(0; 1)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(-1; 1)$. D. $(-1; 0)$.



Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình sau. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$+\infty$	2	$+\infty$

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
 B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; 0)$. B. $(-3; 1)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(-\infty; -2)$.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y	1	$+\infty$	0	$+\infty$	1

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(-1; 1)$. C. $(-1; 0)$. D. $(1; +\infty)$.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-3	-2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$		5		$-\infty$

Trong các mệnh đề sau, có bao nhiêu mệnh đề sai?

- i) Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -5)$ và $(-3; -2)$.
 ii) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 5)$.
 iii) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
 iv) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 2x^2 + 4 - \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

❖ Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x-2)(x+5)(x+1)$. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(2; +\infty)$. B. $(-2; 0)$. C. $(0; 1)$. D. $(-6; -1)$.

❖ Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x^3(x-1)^2(x+2)$. Khoảng nghịch biến của hàm số là

- A. $(-\infty; -2); (0; 1)$. B. $(-2; 0); (1; +\infty)$. C. $(-\infty; -2); (0; +\infty)$. D. $(-2; 0)$.

❖ Câu 35. Với giá trị nào của m thì hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - mx + 2$ nghịch biến trên tập xác định của nó?

- A. $m \geq 4$. B. $m \leq 4$. C. $m > 4$. D. $m < 4$.

❖ Câu 36. Giá trị của m để hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định là

- A. $-2 < m < 2$. B. $-2 < m \leq -1$. C. $-2 \leq m \leq 2$. D. $-2 \leq m \leq 1$.

❖ Câu 37. Cho hàm số $f(x) = x + 2 + \frac{m}{x-1}$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

- A. $m < 1$. B. $m \leq 0$. C. $m \geq 1$. D. $m \geq 0$.

❖ Câu 38. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x-m+2}{x+1}$ giảm trên các khoảng mà nó xác định?

- A. $m < -3$. B. $m \leq -3$. C. $m \leq 1$. D. $m < 1$.

❖ Câu 39. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-3)x - m + 2$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $-3 \leq m \leq 1$. B. $m \leq 1$. C. $-3 < m < 1$. D. $m \leq -3; m \geq 1$.

❖ Câu 40. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+2)x^2 + 6(m+1)x - 3m + 5$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 0. B. -1. C. 2. D. 1.

❖ Câu 41. Tìm giá trị nhỏ nhất của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} + mx^2 - mx - m$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $m = -5$. B. $m = 0$. C. $m = -1$. D. $m = -6$.

❖ Câu 42. Tìm số nguyên m nhỏ nhất sao cho hàm số $y = \frac{(m+3)x-2}{x+m}$ luôn nghịch biến trên các khoảng xác định của nó?

- A. $m = -1$. B. $m = -2$. C. $m = 0$. D. Không có m .

❖ Câu 43. Hàm số $y = -x^3 + mx^2 - m$ đồng biến trên $(1; 2)$ thì m thuộc tập nào sau đây?

- A. $[3; +\infty)$. B. $(-\infty; 3)$. C. $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$. D. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.

❖ Câu 44. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (4-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ là

- A. $(-\infty; 1]$. B. $(-\infty; 4]$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(-\infty; 4)$.

❖ Câu 45. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x+4}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -7)$ là

- A. $[4; 7)$. B. $(4; 7]$. C. $(4; 7)$. D. $(4; +\infty)$.

Câu 46. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -5)$

- A. $(2; 5)$. B. $[2; 5)$. C. $(2; +\infty)$. D. $(2; 5)$.

Câu 47. Giá trị của m để hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ là

- A. $-2 < m < 2$. B. $-2 < m \leq -1$. C. $-2 \leq m \leq 2$. D. $-2 \leq m \leq 1$.

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = f(5 - 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(2; 3)$. B. $(0; 2)$. C. $(3; 5)$. D. $(5; +\infty)$.

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Hàm số $y = f(3 - 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

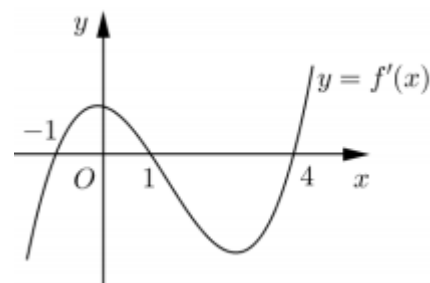
- A. $(4; +\infty)$. B. $(-2; 1)$. C. $(2; 4)$. D. $(1; 2)$.

Câu 50.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.

Hàm số $y = f(2 - x)$ đồng biến trên khoảng

- A. $(2; +\infty)$. B. $(-2; 1)$. C. $(-\infty; -2)$. D. $(1; 3)$.



Câu 51. Cho hàm số $f'(x)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

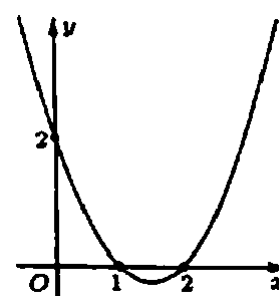
Hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; 1)$. B. $(-4; -3)$. C. $(0; 1)$. D. $(-2; -1)$.

Câu 52.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$. Hàm số $g(x) = f(x - x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

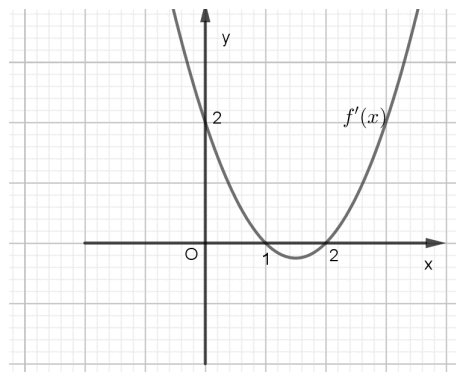
- A. $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$. B. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$. C. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.



Câu 53.

Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(2 - x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

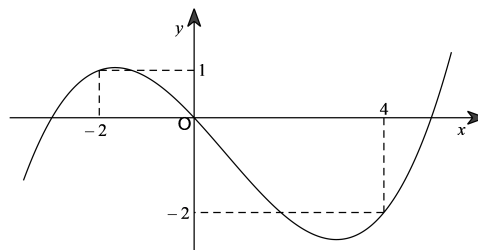
- A. $(-\infty; 0)$. B. $(0; 1)$. C. $(1; 2)$. D. $(0; +\infty)$.



Câu 54.

Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. B. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. C. $(-2; -1)$. D. $(2; 3)$.



Câu 55. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$			
$f'(x)$	+	0	-	0	-	0	+	0	-

Hàm số $y = f(x - 1) + x^3 - 12x + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(1; 2)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(3; 4)$.

BÀI 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (có thể a là $-\infty$; b là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$.

- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 .
- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 .

Chú ý:

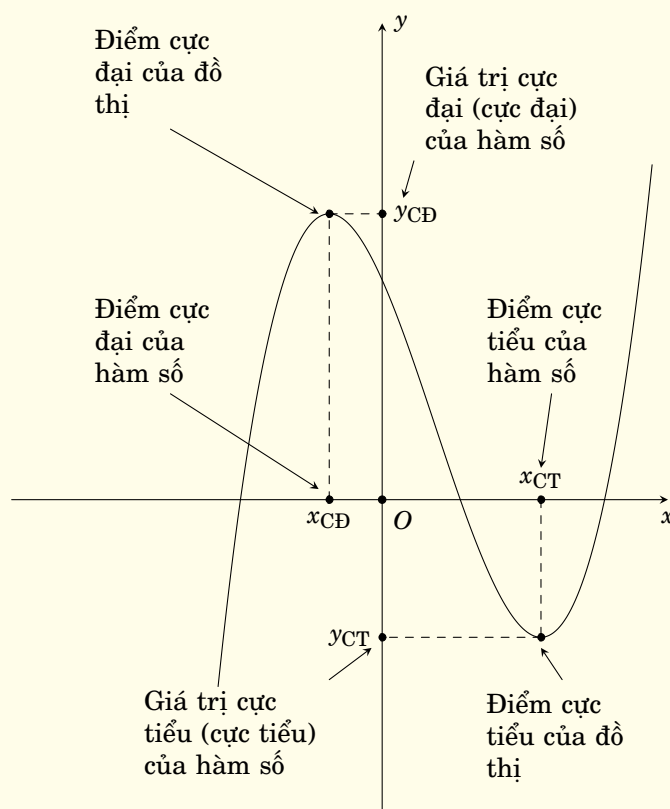
- Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của hàm số.



$f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) của hàm số, kí hiệu là f_{CD} (f_{CT}). Điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của đồ thị hàm số.

- Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) còn gọi là cực đại (cực tiểu) và được gọi chung là cực trị của hàm số.

2 MINH HỌA ĐỒ THỊ



3 ĐIỀU KIỆN CẦN ĐỂ HÀM SỐ ĐẠT CỰC TRỊ

Định lý: Giả sử hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 . Khi đó nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Chú ý:

- Giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ của hàm số $y = f(x)$ nói chung không phải là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định của nó.
- Hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại các điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc hàm số không có đạo hàm. Ngược lại, đạo hàm có thể bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số không đạt cực trị tại điểm x_0 .

4 QUY TẮC TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Quy tắc 1:

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2: Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 3: Lập bảng biến thiên.

Bước 4: Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

Quy tắc 2:

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2: Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và ký hiệu x_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) là các nghiệm của nó.

Bước 3: Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.

Bước 4: Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i .

— Nếu $f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu.

— Nếu $f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm cực trị của hàm số cho bởi biểu thức

Dựa vào các quy tắc và bảng biến thiên để tìm cực đại, cực tiểu.

 **Ví dụ 1.** Tìm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 2.** Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 5$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 3.** Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 - 3$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 4.** Tìm cực trị của hàm số $y = x^4 + 4x^2 + 1$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 5.** Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 6. Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{x^2 - x + 2}{x - 2}$.

Lời giải:

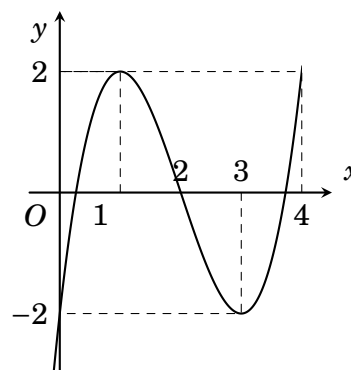
📁 Dạng 2. Tìm cực trị của hàm số biết bảng biến thiên hoặc đồ thị

Phương pháp giải: Dựa vào bảng biến thiên hoặc đồ thị hàm số nhận biết việc đổi dấu của đạo hàm $f'(x)$ để kết luận

- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm x_0 thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.
- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua điểm x_0 thì x_0 là điểm cực đại của hàm số.

✍ Ví dụ 1.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Xác định số điểm cực trị của hàm số.



Lời giải:

✍ Ví dụ 2.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Xác định số điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$.

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	1	5	1	$+\infty$

Lời giải:

Dạng 3. Tìm m để hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0

- Bước 1: Giải phương trình $f'(x_0) = 0$ tìm m .
- Bước 2: Thay m vào biểu thức $f''(x_0)$ kiểm tra:

$$\begin{cases} f''(x_0) > 0 \Rightarrow \text{Hàm số đạt cực tiểu tại } x_0 \\ f''(x_0) < 0 \Rightarrow \text{Hàm số đạt cực đại tại } x_0 \end{cases}$$

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3mx^2 + (m-1)x + 2$. Tìm m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Lời giải:

Ví dụ 2. Xác định m để hàm số $y = -x^4 - mx^2 - 2m^2$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

Lời giải:

Dạng 4. Tìm m để hàm số có n cực trị

- Hàm số có n cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có n nghiệm phân biệt.
- Xét hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
 - + Hàm số có hai điểm cực trị khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$.
 - + Hàm số không có cực trị khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$.
- Xét hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$.
 - + Hàm số có ba cực trị khi $ab < 0$.
 - + Hàm số có 1 cực trị khi $ab \geq 0$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Tìm phần tử của S .

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 2. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số có 3 cực trị.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

TRẮC NGHIỆM

- 🔥 Câu 1.** Điểm cực tiểu của hàm số $y = -x^3 + 3x + 4$ là
A. $x = -1$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = -3$. **D.** $x = 3$.
- 🔥 Câu 2.** Hàm số nào sau đây đạt cực đại tại $x = 1$?
A. $y = x^5 - 5x^2 + 5x - 13$. **B.** $y = x^4 - 4x + 3$.
C. $y = x + \frac{1}{x}$. **D.** $y = 2\sqrt{x} - x$.
- 🔥 Câu 3.** Hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ đạt cực đại tại x bằng:
A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** -1.
- 🔥 Câu 4.** Tìm giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 5$
A. -4. **B.** -5. **C.** -2. **D.** -6.
- 🔥 Câu 5.** Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ có bao nhiêu điểm cực trị?
A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.
- 🔥 Câu 6.** Đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$ có tọa độ điểm cực tiểu là
A. (3; 1). **B.** (-1; -1). **C.** $\left(\frac{1}{3}; \frac{85}{27}\right)$. **D.** (1; 3).
- 🔥 Câu 7.** Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 5x - 17$. Gọi hoành độ 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là x_1, x_2 . Khi đó, tích số $x_1 x_2$ có giá trị là:
A. 5. **B.** -5. **C.** -4. **D.** 4.
- 🔥 Câu 8.** Cho hàm số $y = 3x^4 - 4x^3 + 2$. Khẳng định nào sau đây là đúng:
A. Hàm số không có cực trị. **B.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.
C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$. **D.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

- 🔥 Câu 9.** Hàm số $y = a \sin 2x + b \cos 3x - 2x$ ($0 < x < 2\pi$) đạt cực trị tại $x = \frac{\pi}{2}; x = \pi$. Khi đó, giá trị của biểu thức $P = a + 3b - 3ab$ là:
 A. 3. B. -1. C. 1. D. -3.
- 🔥 Câu 10.** Đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ có tọa độ điểm cực đại là:
 A. (3;0). B. (1;3). C. (1;4). D. (3;1).
- 🔥 Câu 11.** Cho hàm số $y = (m-1)x^3 - 3x^2 - (m+1)x + 3m^2 - m + 2$. Để hàm số có cực đại, cực tiểu thì:
 A. $m = 1$. B. $m \neq 1$. C. $m > 1$. D. m tùy ý.
- 🔥 Câu 12.** Hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 2m + 3$ có đúng 1 điểm cực trị thì giá trị của m là:
 A. $m \geq 2$. B. $m < 2$. C. $m > 2$. D. $m = 2$.
- 🔥 Câu 13.** Giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 5$ là
 A. 5. B. 4. C. 0. D. 1.
- 🔥 Câu 14.** Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 4x - 7$. Gọi hoành độ 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là x_1, x_2 . Khi đó, giá trị của tổng $x_1 + x_2$ là:
 A. -6. B. -4. C. 6. D. 4.
- 🔥 Câu 15.** Hiệu số giữa giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ là
 A. -4. B. -2. C. 2. D. 4.
- 🔥 Câu 16.** Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Nếu đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị là gốc tọa độ và điểm $A(-1; -1)$ thì hàm số có phương trình là
 A. $y = 2x^3 - 3x^2$. B. $y = -2x^3 - 3x^2$. C. $y = x^3 + 3x^2 + 3x$. D. $y = x^3 - 3x - 1$.
- 🔥 Câu 17.** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (4m-1)x - 3$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?
 A. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $m < \frac{1}{2}$. B. Với mọi m , hàm số luôn có cực trị.
 C. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $m \neq \frac{1}{2}$. D. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $m > 1$.
- 🔥 Câu 18.** Hàm số $y = -x^4 + 4x^2 + 3$ có giá trị cực đại là:
 A. 2. B. 3. C. 0. D. 7.
- 🔥 Câu 19.** Điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \sqrt{1+4x-x^4}$ có tọa độ là:
 A. (1;2). B. (0;1). C. (2;3). D. (3;4).
- 🔥 Câu 20.** Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + ax + b$ có điểm cực trị là $A(1;3)$. Khi đó giá trị của $4a - b$ là:
 A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- 🔥 Câu 21.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 2$. Gọi a, b lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số đó. Giá trị của $2a^2 + b$ là:
 A. -8. B. -2. C. 2. D. 4.
- 🔥 Câu 22.** Cho hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 3$ đạt cực trị tại x_1, x_2, x_3 . Khi đó, giá trị của tích $x_1 x_2 x_3$ là
 A. 0. B. 5. C. 1. D. 3.
- 🔥 Câu 23.** Gọi M, n lần lượt là giá trị cực đại, giá trị cực tiểu của hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$. Khi đó giá trị của biểu thức $M^2 - 2n$ bằng:
 A. 8. B. 7. C. 9. D. 6.
- 🔥 Câu 24.** Cho hàm số $y = x^3 + 17x^2 - 24x + 8$. Kết luận nào sau đây là đúng?
 A. $x_{CD} = 1$. B. $x_{CD} = \frac{2}{3}$. C. $x_{CD} = -3$. D. $x_{CD} = -12$.

🔹 **Câu 25.** Cho hàm số $y = 3x^4 - 6x^2 + 1$. Kết luận nào sau đây là đúng?

- A. $y_{CD} = -2$. B. $y_{CD} = 1$. C. $y_{CD} = -1$. D. $y_{CD} = 2$.

🔹 **Câu 26.** Trong các hàm số sau, hàm số nào đạt cực đại tại $x = \frac{3}{2}$?

- A. $y = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + x^2 - 3x$. B. $y = \sqrt{-x^2 + 3x - 2}$.
C. $y = \sqrt{4x^2 - 12x - 8}$. D. $y = \frac{x-1}{x+2}$.

🔹 **Câu 27.** Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào có đúng 2 cực trị?

- A. $y = x^4 + 3x^2 + 2$. B. $y = x^3 - 5x^2 + 7$.
C. $y = \frac{2x^2 - 1}{3x}$. D. $y = 2017x^6 + 2016x^4$.

🔹 **Câu 28.** Khẳng định nào là đúng trong các khẳng định sau:

- A. Hàm số trùng phương có thể có 2 điểm cực trị.
B. Hàm số bậc 3 có thể có 3 cực trị.
C. Hàm số trùng phương luôn có cực trị.
D. Hàm phân thức không thể có cực trị.

🔹 **Câu 29.** Hàm số $y = -4x^3 - 6x^2 - 3x + 2$ có mấy điểm cực trị?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

🔹 **Câu 30.** Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{4x+7}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.

🔹 **Câu 31.** Hàm số nào sau đây có cực trị?

- A. $y = x^3 + 1$. B. $y = x^4 + 3x^2 + 2$. C. $y = 3x + 4$. D. $y = \frac{2x-1}{3x+2}$.

🔹 **Câu 32.** Đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 5$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

🔹 **Câu 33.** Cho hàm số $y = -3x^4 + 4x^2 - 2017$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số có 1 điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.
B. Hàm số không có cực trị.
C. Hàm số có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.
D. Hàm số có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

🔹 **Câu 34.** Hàm số nào sau đây không có cực trị?

- A. $y = x^3 + 3x^2$. B. $y = x^3 - x$. C. $y = x^4 - 3x^2 + 2$. D. $y = x^3$.

🔹 **Câu 35.** Hàm số nào dưới đây có cực trị?

- A. $y = x^4 + 1$. B. $y = x^3 + x^2 + 2x - 1$.
C. $y = 2x - 1$. D. $y = \frac{x+1}{2x-1}$.

🔹 **Câu 36.** Điều kiện để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có 3 điểm cực trị là

- A. $ab < 0$. B. $ab > 0$. C. $b = 0$. D. $c = 0$.

🔹 **Câu 37.** Hàm số nào sau đây có đúng hai điểm cực trị?

- A. $y = x + \frac{1}{x+1}$. B. $y = x^3 + 3x^2 + 7x - 2$.
C. $y = -x^4 - 2x^2 + 3$. D. $y = x - \frac{2}{x+1}$.

🔹 **Câu 38.** Hàm số nào sau đây không có cực trị?

- A. $y = 2x + \frac{2}{x+1}$. B. $y = x^3 + 3x^2$. C. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$. D. $y = \frac{x+1}{x-2}$.

Câu 39. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Khẳng định nào sau đây đúng:

- A. Hàm số có cực đại, cực tiểu. B. Hàm số không có cực trị.
C. Hàm số có cực đại, không có cực tiểu. D. Hàm số có cực tiểu không có cực đại.

Câu 40. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = mx^4 - (m+1)x^2 + 2m - 1$ có 3 điểm cực trị?

- A. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 0 \end{cases}$. B. $m < -1$. C. $-1 < m < 0$. D. $m > -1$.

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m+3)x - 1$ không có cực trị?

- A. $m \geq -\frac{8}{3}$. B. $m > -\frac{5}{3}$. C. $m \geq -\frac{5}{3}$. D. $m \leq -\frac{8}{3}$.

Câu 42. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 2$ đạt cực tiểu tại $x = 2$ khi?

- A. $m > 0$. B. $m \neq 0$. C. $m = 0$. D. $m < 0$.

Câu 43. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m-3)x - 3$ đạt cực đại tại $x = 1$.

- A. $m = 3$. B. $m > 3$. C. $m \leq 3$. D. $m < 3$.

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+1)x - 1$ đạt cực đại tại $x = -2$?

- A. Không tồn tại m . B. -1 . C. 2 . D. 3 .

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m+6)x + m$ có cực đại và cực tiểu.

- A. $-2 < m < 3$. B. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 3 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 3 \end{cases}$. D. $-2 \leq m \leq 3$.

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx - 6$ có 2 cực trị?

- A. $m \in (-3; 1) \setminus \{-2\}$. B. $m \in (-3; 1)$.
C. $m \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$. D. $m \in [-3; 1]$.

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+3)x^2 + 4(m+3)x + m^3 - m$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2$

- A. $-\frac{7}{2} < m < -2$. B. $-3 < m < 1$. C. $\begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \end{cases}$. D. $-\frac{7}{2} < m < -3$.

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m^2 - m + 2)x^2 + (3m^2 + 1)x$ đạt cực tiểu tại $x = -2$.

- A. $\begin{cases} m = 3 \\ m = 1 \end{cases}$. B. $m = 3$. C. $m = 1$. D. $\begin{cases} m = -3 \\ m = -1 \end{cases}$.

Câu 49. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + m$ chỉ có đúng một cực trị.

- A. $0 < m \leq 1$. B. $\begin{cases} m < 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$. D. $0 \leq m \leq 1$.

Câu 50. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 4m + 3)x^2 + 2m - 1$ có ba điểm cực trị.

- A. $m \in (-\infty; 0)$. B. $m \in (0; 1) \cup (3; +\infty)$.
C. $m \in (-\infty; 0) \cup (1; 3)$. D. $m \in (1; 3)$.

Câu 51. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$ có 3 điểm cực trị.

- A. $\begin{cases} 0 < m < 3 \\ m < -3 \end{cases}$. B. $m < -3$. C. $0 < m \leq 3$. D. $\begin{cases} 0 < m < 3 \\ m \leq -3 \end{cases}$.

Câu 52. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m + 1)x^4 - mx^2 + \frac{3}{2}$ chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

- A. $m < -1$. B. $-1 \leq m \leq 0$. C. $m > 1$. D. $-1 \leq m < 0$.

Câu 53. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 2$ đạt cực tiểu tại $x = 2$ khi :

- A. $m > 0$. B. $m = 0$. C. $m < 0$. D. $m \neq 0$.

Câu 54. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực đại tại $x = 1$.

- A. $m = 2$. B. $m = 3$. C. $m = -1$. D. $m = 0$.

Câu 55. Tìm tất cả các giá trị nào của tham số m để hàm số $y = mx^3 + x^2 + (m^2 - 6)x + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

- A. $m = 1$. B. $m = -4$. C. $m = -2$. D. $m = 2$.

Câu 56. Tìm tất cả các giá trị nào của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực tiểu tại $x = 3$.

- A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $m = 5$. D. $m = -7$.

Câu 57. Trong các hàm số sau, hàm số nào chỉ có cực đại mà không có cực tiểu?

- A. $y = -10x^4 - 5x^2 + 7$. B. $y = -17x^3 + 2x^2 + x + 5$.
C. $y = \frac{x-2}{x+1}$. D. $y = \frac{x^2+x+1}{x-1}$.

Câu 58. Cho hàm số $y = \frac{3x^2 + 13x + 19}{x + 3}$. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình là:

- A. $5x - 2y + 13 = 0$. B. $y = 3x + 13$. C. $y = 6x + 13$. D. $2x + 4y - 1 = 0$.

Câu 59. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x}$. Khẳng định nào sau đây là đúng

- A. Hàm số có hai điểm cực trị. B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.
C. Hàm số đạt cực đại $x = 2$. D. Hàm số không có cực trị.

Câu 60. Cho hàm số $y = x^7 - x^5$. Khẳng định nào sau đây là đúng

- A. Hàm số có đúng 1 điểm cực trị. B. Hàm số có đúng 3 điểm cực trị.
C. Hàm số có đúng hai điểm cực trị. D. Hàm số có đúng 4 điểm cực trị.

Câu 61. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x + 1)(x - 2)^2(x - 3)^3(x + 5)^4$. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có mấy điểm cực trị?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 62. Cho hàm số $y = (x^2 - 2x)^{\frac{1}{3}}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$. B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.
C. Hàm số không có điểm cực trị. D. Hàm số có đúng 2 điểm cực trị.

Câu 63. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 6x$. Hàm số đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 . Khi đó giá trị của biểu thức $S = x_1^2 + x_2^2$ bằng:

- A. -10. B. -8. C. 10. D. 8.

Câu 64. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có hai điểm cực trị A, B. Khi đó phương trình đường thẳng AB là:

- A. $y = x - 2$. B. $y = 2x - 1$. C. $y = -2x + 1$. D. $y = -x + 2$.

Câu 65. Khoảng cách giữa 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ là

- A. $4\sqrt{5}$. B. 2. C. $2\sqrt{5}$. D. 4.

Câu 66. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB?

- A. $M(0; -1)$. B. $N(1; -10)$. C. $P(1; 0)$. D. $Q(-1; 10)$.

Câu 67. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (2m - 1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

- A. $m = \frac{3}{2}$. B. $m = \frac{3}{4}$. C. $m = -\frac{1}{2}$. D. $m = \frac{1}{4}$.

Câu 68. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = (2m - 1)x + m + 3$ song song với đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$

- A. $m = \frac{3}{4}$. B. $m = \frac{1}{2}$. C. $m = -\frac{3}{4}$. D. $m = -\frac{1}{2}$.

Câu 69. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có hai điểm cực trị A, B. Khi đó phương trình đường thẳng AB là

- A. $y = 2x - 1$. B. $y = -2x + 1$. C. $y = -x + 2$. D. $y = x - 2$.

Câu 70. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	+	-	0	+
y	$-\infty$	2	-3	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số chỉ có giá trị nhỏ nhất không có giá trị lớn nhất.
 B. Hàm số có một điểm cực trị.
 C. Hàm số có hai điểm cực trị.
 D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3.

Câu 71. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

x	$-\infty$	2	6	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y			6			$+\infty$
	$-\infty$			1		

- A. Hàm số có giá trị cực đại bằng 2. B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.
 C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2) \cup (6; +\infty)$. D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Câu 72. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$+\infty$
y'	+		-	0	+	0	+
y	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	y_1	y_2	y_3	$+\infty$

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Câu 73. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	$f(-2)$	$f(0)$	$+\infty$	

A. 3.

B. 1.

C. 0.

D. 2.

Câu 74.

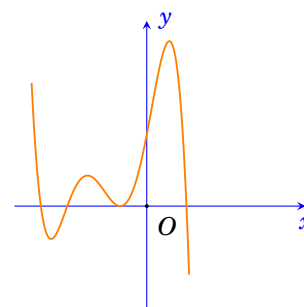
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường cong ở hình bên. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6.

B. 5.

C. 4.

D. 3.



Câu 75.

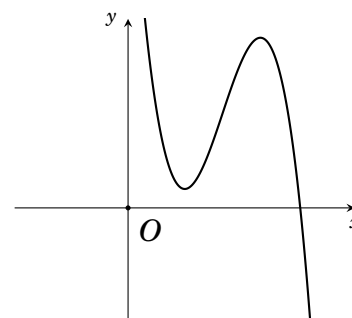
Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

A. 3.

B. 1.

C. 0.

D. 2.



Câu 76. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-1	3	$-\infty$	

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 0.

B. -1.

C. 2.

D. 3.

Câu 77. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$		-4	-3	-4	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

- A. -4 . B. 0 . C. 1 . D. -3 .

Câu 78. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		
y	$-\infty$		2		1		2		$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho

- A. 3 . B. 2 . C. 1 . D. 4 .

Câu 79. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$		-2	$+\infty$	2	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

- A. 2 . B. -3 . C. -1 . D. -2 .

Câu 80. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	1	$\frac{4}{3}$	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	0	$\frac{4}{27}$	0	$+\infty$	

Hàm số đạt cực đại tại

- A. $\frac{4}{27}$. B. $\frac{4}{3}$. C. 2 . D. 0 .

Câu 81. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số đạt cực tiểu tại

A. $x = -1$.

B. $x = 0$.

C. $x = 1$.

D. $x = 2$.

Câu 82. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	0	-1	$+\infty$	

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số có đúng một cực trị.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1 .

D. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

Câu 83.

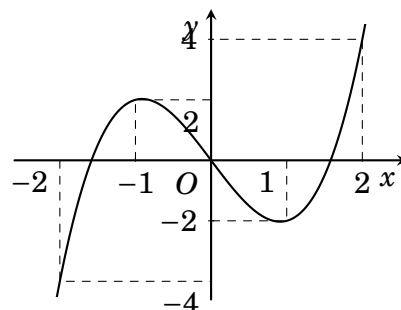
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

A. $x = -2$.

B. $x = -1$.

C. $x = 1$.

D. $x = 2$.



Câu 84.

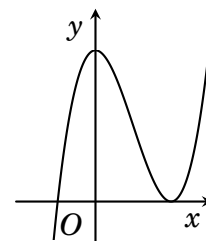
Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.



Câu 85.

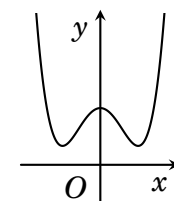
Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

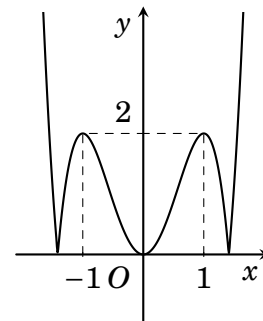
D. 0.



Câu 86.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực tiểu?

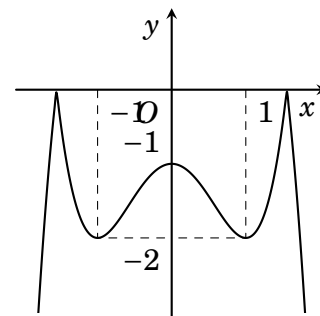
- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.



Câu 87.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

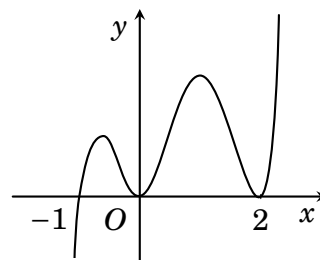
- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.



Câu 88.

Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ trên khoảng K như hình bên. Hỏi hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

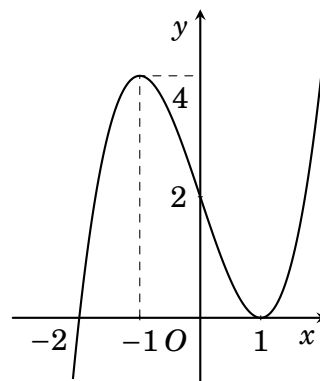
- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.



Câu 89.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$. Biết rằng hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = -1$.
 B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = -2$.
 C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.
 D. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -2$.



Câu 90. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$

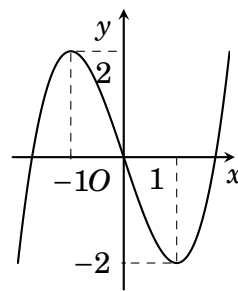
Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 3.

Câu 91.

Cho hàm số $y = f(x)$ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

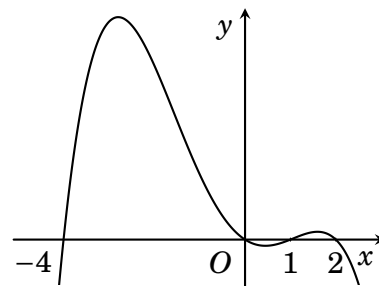
- A. $f(0)$. B. $f(1)$. C. $f(2)$. D. $f(-1)$.



🔥 Câu 92.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

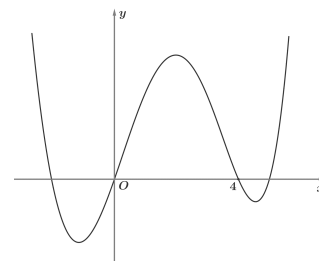
- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.



🔥 Câu 93.

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ là

- A. 5. B. 3. C. 7. D. 11.



🔥 Câu 94. Cho hàm số $y = f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		2		$+\infty$
		-3		-1	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ là

- A. 9. B. 3. C. 7. D. 5.

🔥 Câu 95. Cho hàm số $y = f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		2		$+\infty$
		-3		-1	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(4x^2 + 4x)$ là

- A. 5. B. 9. C. 7. D. 3.

Câu 96.

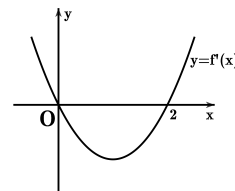
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(-x^2 + x)$ là

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.



BÀI 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

- ① Số M được gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathcal{D}$ nếu

$$\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in \mathcal{D} \\ \exists x_0 \in \mathcal{D}, f(x_0) = M. \end{cases}$$

Kí hiệu: $M = \max_{x \in \mathcal{D}} f(x)$.

- ② Số m được gọi là **giá trị nhỏ nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathcal{D}$ nếu

$$\begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in \mathcal{D} \\ \exists x_0 \in \mathcal{D}, f(x_0) = m. \end{cases}$$

Kí hiệu: $m = \min_{x \in \mathcal{D}} f(x)$.

2 PHƯƠNG PHÁP TÌM GTLN, GTNN

- ① **Tìm GTLN, GTNN của hàm số bằng cách khảo sát trực tiếp**

- Tính $f'(x)$ và tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{D}$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc hàm số không có đạo hàm.
- Lập bảng biến thiên và từ đó suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

- ② **Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một đoạn**

- Hàm số đã cho $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$.
- Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ trên khoảng $(a; b)$, tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.
- Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$.
- Khi đó
 - $\max_{x \in [a; b]} f(x) = \max\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}.$
 - $\min_{x \in [a; b]} f(x) = \min\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}.$

- ③ **Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một khoảng**

- Tính đạo hàm $f'(x)$.
- Tìm tất cả các nghiệm $x_i \in (a; b)$ của phương trình $f'(x) = 0$ và tất cả các điểm $\alpha_i \in (a; b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.
- Tính $A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), B = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(x_i), f(\alpha_i)$.
- So sánh các giá trị và kết luận $M = \max_{x \in (a; b)} f(x), m = \min_{x \in (a; b)} f(x)$.

Lưu ý: Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì ta kết luận hàm số không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).



- Nếu $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì $\min_{x \in [a; b]} f(x) = f(a)$ và $\max_{x \in [a; b]} f(x) = f(b)$.
- Nếu $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì $\min_{x \in [a; b]} f(x) = f(b)$ và $\max_{x \in [a; b]} f(x) = f(a)$.
- Hàm số liên tục trên một khoảng **có thể** không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó.
- Ngoài phương pháp dùng đạo hàm, ta có thể dùng phương pháp MGT, BĐT, ...

B CÁC DẠNG TOÁN

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = x^2 + 6x - 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1; 5]$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$ trên đoạn $[0; 3]$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

C TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trên đoạn $[-1; 2]$, hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm
 A. $x = 2$. B. $x = 0$. C. $x = -1$. D. $x = 1$.

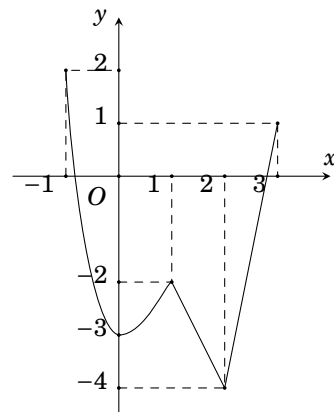
Câu 2. Trên đoạn $[0; 3]$, hàm số $y = x^3 - 3x + 4$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm
 A. $x = 1$. B. $x = 0$. C. $x = 3$. D. $x = 2$.

Câu 3. Trên đoạn $[0; 3]$, hàm số $y = -x^3 + 3x$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm
 A. $x = 0$. B. $x = 3$. C. $x = 1$. D. $x = 2$.

Câu 4. Trên đoạn $[-2; 1]$, hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm
 A. $x = -2$. B. $x = 0$. C. $x = -1$. D. $x = 1$.

Câu 5.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của $M - m$ là



- A. 2. B. 4. C. 6. D. 5.

❖ Câu 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 4$ trên đoạn $[0; 2]$.

- A. $\min y = 2.$ B. $\min y = 0.$ C. $\min y = 1.$ D. $\min y = 4.$

❖ Câu 7. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 18$ trên đoạn $[-1; 3]$ bằng

- A. 2. B. 11. C. 27. D. 1.

❖ Câu 8. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[0; 2]$ là

- A. $\min y = 0.$ B. $\min y = 3.$ C. $\min y = 5.$ D. $\min y = 7.$

❖ Câu 9. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4; 4]$ là

- A. $\min f(x) = -50.$ B. $\min f(x) = 0.$ C. $\min f(x) = -41.$ D. $\min f(x) = 15.$

❖ Câu 10. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 9$ trên đoạn $[1; 3]$ là

- A. $\max f(x) = 0.$ B. $\max f(x) = \frac{13}{27}.$ C. $\max f(x) = -6.$ D. $\max f(x) = 5.$

❖ Câu 11. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ trên đoạn $[0; 2]$ là

- A. $\max f(x) = 64.$ B. $\max f(x) = 1.$ C. $\max f(x) = 0.$ D. $\max f(x) = 9.$

❖ Câu 12. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x(x + 2)(x + 4)(x + 6) + 5$ trên nửa khoảng $[-4; +\infty)$ là

- A. $\min y = -8.$ B. $\min y = -11.$ C. $\min y = -17.$ D. $\min y = -9.$

❖ Câu 13. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$ là

- A. $\min y = -3.$ B. $\min y = \frac{1}{2}.$ C. $\min y = -1.$ D. $\min y = 1.$

❖ Câu 14. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{9}{x}$ trên đoạn $[2; 4]$ là

- A. $\min y = 6.$ B. $\min y = \frac{13}{2}.$ C. $\min y = -6.$ D. $\min y = \frac{25}{4}.$

❖ Câu 15. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ trên khoảng $(1; \infty)$ là

- A. $\min y = -1.$ B. $\min y = 3.$ C. $\min y = 5.$ D. $\min y = \frac{-7}{3}.$

❖ Câu 16. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 1}$ là

- A. $\max y = -1.$ B. $\max y = 1.$ C. $\max y = 9.$ D. $\max y = 10.$

❖ Câu 17. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{5 - 4x}$ trên đoạn $[-1; 1]$ là

- A. $\max y = \sqrt{5}$ và $\min y = 0.$ B. $\max y = 1$ và $\min y = -3.$ C. $\max y = 3$ và $\min y = 1.$ D. $\max y = 0$ và $\min y = -\sqrt{5}.$

Câu 18. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ trên đoạn $[1;5]$ là
 A. $\frac{8}{3}$. B. $\frac{10}{3}$. C. -4 . D. $-\frac{10}{3}$.

Câu 19. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ trên đoạn $[0;2]$ là
 A. $\frac{1}{4}$. B. 2 . C. $-\frac{1}{2}$. D. 0 .

Câu 20. Cho hàm số $y = \frac{x^2-3}{x-2}$. Khẳng định nào sau đây đúng về giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[3;4]$:

- A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{2}$.
 B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 .
 C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 6 .
 D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng $\frac{13}{2}$ và giá trị nhỏ nhất bằng 6 .

Câu 21. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 4x^2 + \frac{1}{x} - 2$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng
 A. $\frac{29}{2}$. B. 1 . C. 3 . D. Không tồn tại.

Câu 22. Hàm số $y = x^2 + 2x + 1$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;1]$ lần lượt là $y_1; y_2$. Khi đó tích $y_1 \cdot y_2$ bằng:
 A. 5 . B. -1 . C. 4 . D. 1 .

Câu 23. Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 1$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1;3]$ tại điểm có hoành độ lần lượt là $x_1; x_2$. Khi đó tổng $x_1 + x_2$ bằng
 A. 2 . B. 5 . C. 4 . D. 3 .

Câu 24. Hàm số $y = \sqrt{4-x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x . Giá trị của x là
 A. $x = 3$. B. $x = 0$ hoặc $x = 2$. C. $x = 0$. D. $x = -2$ hoặc $x = 2$.

Câu 25. Hàm số $y = (x-1)^2 + (x+3)^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng:
 A. 3 . B. -1 . C. 10 . D. 8 .

Câu 26. Hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2}}$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3;0]$ lần lượt tại $x_1; x_2$. Khi đó $x_1 \cdot x_2$ bằng
 A. 2 . B. 0 . C. 6 . D. $\sqrt{2}$.

Câu 27. Hàm số $y = \sqrt{x^2+1} + x^2$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ lần lượt là
 A. $\sqrt{2}-1; 0$. B. $\sqrt{2}+1; 0$. C. $1; -1$. D. $1; 0$.

Câu 28. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2\sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x$ trên $[0;\pi]$ là
 A. $\max_{[0;\pi]} y = 2$. B. $\max_{[0;\pi]} y = \frac{2}{3}$. C. $\max_{[0;\pi]} y = 0$. D. $\max_{[0;\pi]} y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 29. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{2}\cos 2x + 4\sin x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là
 A. $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y = 4 - \sqrt{2}$. B. $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y = 2\sqrt{2}$. C. $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y = \sqrt{2}$. D. $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y = 0$.

Câu 30. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 5\cos x - \cos 5x$ với $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ là

- A. $\min_{\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]} y = 4.$ B. $\min_{\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]} y = 3\sqrt{2}.$ C. $\min_{\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]} y = 3\sqrt{3}.$ D. $\min_{\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]} y = -1.$

🔥 **Câu 31.** Hàm số $y = \sin x + 1$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ bằng

- A. 2. B. $\frac{\pi}{2}.$ C. 0. D. 1.

🔥 **Câu 32.** Hàm số $y = \cos 2x - 3$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; \pi]$ bằng

- A. -4. B. -3. C. -2. D. 0.

🔥 **Câu 33.** Hàm số $y = \tan x + x$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ tại điểm có hoành độ bằng

- A. 0. B. $\frac{\pi}{4}.$ C. $1 + \frac{\pi}{4}.$ D. 1.

🔥 **Câu 34.** Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi 16 cm, hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng

- A. 64 cm². B. 4 cm². C. 16 cm². D. 8 cm².

🔥 **Câu 35.** Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích 48 cm², hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng

- A. $16\sqrt{3}$ cm. B. $4\sqrt{3}$ cm. C. 24 cm. D. $8\sqrt{3}$ cm.

🔥 **Câu 36.** Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S = 6t^2 - t^3$, vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (s) bằng

- A. 2 (s). B. 12 (s). C. 6 (s). D. 4 (s).

🔥 **Câu 37.** Tam giác vuông có diện tích lớn nhất là bao nhiêu nếu tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số a ($a > 0$)?

- A. $\frac{a^2}{6\sqrt{3}}.$ B. $\frac{a^2}{9}.$ C. $\frac{2a^2}{9}.$ D. $\frac{a^2}{3\sqrt{3}}.$

🔥 **Câu 38.** Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều gam cá nhất?

- A. 12. B. 24. C. 6. D. 32.

🔥 **Câu 39.** Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0.025x^2(30 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất bằng

- A. 100 mg. B. 20 mg. C. 30 mg. D. 0 mg.

🔥 **Câu 40.** Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$, $t = 0, 1, 2, \dots, 25$. Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0; 25]$ thì đạo hàm $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất?

- A. Ngày thứ 19. B. Ngày thứ 5. C. Ngày thứ 16. D. Ngày thứ 15.

🔥 **Câu 41.** Giá trị lớn nhất M , giá trị nhỏ nhất m của hàm số: $y = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$ là

- A. $M = -1; m = \frac{-3}{2}.$ B. $M = 3; m = -1.$ C. $M = 3; m = \frac{-3}{2}.$ D. $M = \frac{3}{2}; m = -3.$

🔥 **Câu 42.** Giá trị lớn nhất M , giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 2\cos 2x + 2\sin x$ là

- A. $M = \frac{9}{4}; m = -4.$ B. $M = 4; m = 0.$ C. $M = 0; m = -\frac{9}{4}.$ D. $M = 4; m = -\frac{9}{4}.$

🔥 **Câu 43.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x + 3)\sqrt{-x^2 - 2x + 3}$ là

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

 **Câu 44.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ là

A. -2.

B. 2.

C. 3.

D. -3.

BÀI 4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ

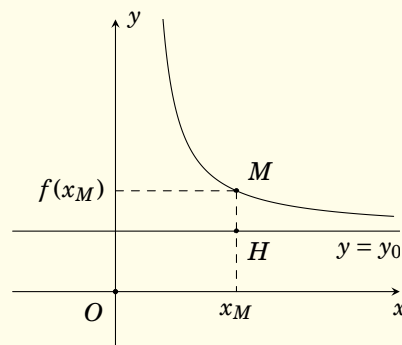
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$).

Đường thẳng $y = y_0$ là **đường tiệm cận ngang** (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

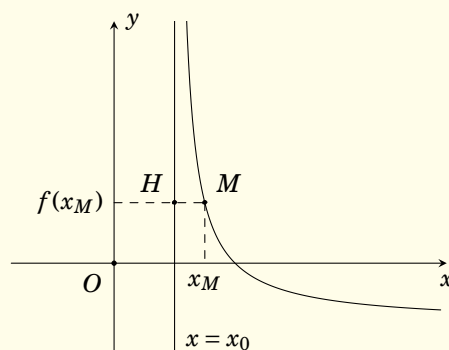
- ✓ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$.
- ✓ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$.



2 ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỨNG

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là **đường tiệm cận đứng** (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn:

- ✓ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$.
- ✓ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$.
- ✓ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$.
- ✓ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$.



Với đồ thị hàm phân thức dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0; ad - bc \neq 0$) luôn có

- ! ✓ Tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{a}{c}$.
- ✓ Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\frac{d}{c}$.

B CÁC DẠNG TOÁN**Dạng 1. Xác định các đường tiệm cận của hàm phân thức**

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng dạng $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$. Đường thẳng $y = y_0$ là đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0.$$

Nếu có ít nhất một trong các giới hạn sau xảy ra thì đường thẳng $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

✓ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty.$

✓ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty.$

✓ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty.$

✓ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty.$

Ví dụ 1. Tìm phương trình đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-2}{2x-1}$.

Lời giải:

.....

Ví dụ 2. Tìm các đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$.

Lời giải:

.....

Dạng 2. Đọc phương trình đường tiệm cận đứng, ngang của đồ thị hàm số từ bảng biến thiên

① Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ quan sát khi x dần tiến về $+\infty$ hoặc $-\infty$ thì y tiến đến một giá trị y_0 . Khi đó, ta khẳng định $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

② Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ quan sát khi x tiến đến x_0 từ phía bên phải ($x \rightarrow x_0^+$) hoặc x tiến đến x_0 từ phía bên trái ($x \rightarrow x_0^-$) thấy y tiến đến $-\infty$ hoặc $+\infty$ ta khẳng định $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

🔪 Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	-		-
y	-1	$+\infty$	-1

Tìm tiệm cận đứng và tìm cận ngang của đồ thị hàm số?

Lời giải:

🔪 Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	-2	$+\infty$	-2

Tìm tiệm cận đứng và tìm cận ngang của đồ thị hàm số?

Lời giải:

🕒 TRẮC NGHIỆM

🔥 Câu 1. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là

- A. $x = 1$ và $y = -3$. B. $x = 2$ và $y = 1$. C. $x = 1$ và $y = 2$. D. $x = -1$ và $y = 2$.

🔥 Câu 2. Đồ thị hàm số $y = \frac{1-3x}{x+2}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là

- A. $x = -2$ và $y = -3$. B. $x = -2$ và $y = 1$. C. $x = -2$ và $y = 3$. D. $x = 2$ và $y = 1$.

🔥 Câu 3. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x^2-3x+2}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là

- A. $x = 1, x = 2$ và $y = 0$. B. $x = 1, x = 2$ và $y = 2$.
C. $x = 1$ và $y = 0$. D. $x = 1, x = 2$ và $y = -3$.

Câu 4. Đồ thị hàm số $y = \frac{1-3x^2}{x^2-6x+9}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là

- A. $x = 3$ và $y = -3$. B. $x = 3$ và $y = 0$. C. $x = 3$ và $y = 1$. D. $y = 3$ và $x = -3$.

Câu 5. Đồ thị hàm số $y = \frac{3x^2+x+2}{x^3-8}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là

- A. $y = 2$ và $x = 0$. B. $x = 2$ và $y = 0$. C. $x = 2$ và $y = 3$. D. $y = 2$ và $x = 3$.

Câu 6. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{1-x}{3+2x}$ là

- A. 4. B. 1. C. 0. D. 2.

Câu 7. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3x+2}$ là

- A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.

Câu 8. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2-4}$ là

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 9. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x^2-3x-4} + x$ là

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 5.

Câu 10. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-3}$ khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 3$.
B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 1$.
D. Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là $I(3;1)$.

Câu 11. Đồ thị hàm số nào sau đây có ba đường tiệm cận?

- A. $y = \frac{1-2x}{1+x}$. B. $y = \frac{1}{4-x^2}$. C. $y = \frac{x+3}{5x-1}$. D. $y = \frac{x}{x^2-x+9}$.

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{x-9x^4}{(3x^2-3)^2}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang.
B. Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng, có 1 tiệm cận ngang $y = -3$.
C. Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng, có 1 tiệm cận ngang $y = -1$.
D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng, có tiệm cận ngang.

Câu 13. Đồ thị hàm số nào sau đây không có tiệm cận đứng:

- A. $y = \frac{3x-1}{x^2+1}$. B. $y = \frac{-1}{x}$. C. $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x+2}$. D. $y = \frac{1}{x^2-2x+1}$.

Câu 14. Đồ thị hàm số nào sau đây không có tiệm cận ngang:

- A. $y = \frac{2x-3}{x+1}$. B. $y = \frac{\sqrt{x^4+3x^2+7}}{2x-1}$. C. $y = \frac{3}{x^2-1}$. D. $y = \frac{3}{x-2} + 1$.

Câu 15. Đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{3x+2}$ có đường tiệm cận ngang là

- A. $x = 3$. B. $x = 1$. C. $y = 3$. D. $y = 1$.

Câu 16. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 17. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+x+1}{-5x^2-2x+3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

- 🔥 **Câu 18.** Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?
 A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.
- 🔥 **Câu 19.** Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 1}{x^2 + 1}$.
 A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.
- 🔥 **Câu 20.** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 1}{x^2 - 3x + 2}$ là
 A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.
- 🔥 **Câu 21.** Tìm tất cả các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 1}}$
 A. $y = \pm 1$. B. $x = 1$. C. $y = 1$. D. $y = -1$.
- 🔥 **Câu 22.** Với giá trị nào của m thì đồ thị (C): $y = \frac{mx - 1}{2x + m}$ có tiệm cận đứng đi qua điểm $M(-1; \sqrt{2})$?
 A. $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $m = 0$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = 2$.
- 🔥 **Câu 23.** Cho hàm số $y = \frac{mx + n}{x - 1}$ có đồ thị (C). Biết tiệm cận ngang của (C) đi qua điểm $A(-1; 2)$ đồng thời điểm $I(2; 1)$ thuộc (C). Khi đó giá trị của $m + n$ là
 A. $m + n = -1$. B. $m + n = 1$. C. $m + n = -3$. D. $m + n = 3$.
- 🔥 **Câu 24.** Xác định m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - (2m + 3)x + 2(m - 1)}{x - 2}$ không có tiệm cận đứng.
 A. $m = -2$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = 1$.
- 🔥 **Câu 25.** Xác định m để đồ thị hàm số $y = \frac{3}{4x^2 + 2(2m + 3)x + m^2 - 1}$ có đúng hai tiệm cận đứng.
 A. $m < -\frac{13}{12}$. B. $-1 < m < 1$. C. $m > -\frac{3}{2}$. D. $m > -\frac{13}{12}$.
- 🔥 **Câu 26.** Xác định m để đồ thị hàm số $y = \frac{x - 1}{x^2 + 2(m - 1)x + m^2 - 2}$ có đúng hai tiệm cận đứng.
 A. $m < \frac{3}{2}; m \neq 1; m \neq -3$. B. $m > -\frac{3}{2}; m \neq 1$.
 C. $m > -\frac{3}{2}$. D. $m < \frac{3}{2}$.
- 🔥 **Câu 27.** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 1}}$ là
 A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.
- 🔥 **Câu 28.** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x - 2}$ là
 A. 0. B. 1. C. 3. D. 3.
- 🔥 **Câu 29.** Đồ thị hàm số $y = x - \sqrt{x^2 - 4x + 2}$ có tiệm cận ngang là
 A. $y = 2$. B. $y = -2$. C. $y = \sqrt{2}$. D. $x = -2$.
- 🔥 **Câu 30.** Cho hàm số $y = \frac{x + 2}{x - 3}$ (C). Có tất cả bao nhiêu điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang bằng 5 lần khoảng cách từ điểm M đến tiệm cận đứng.
 A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.
- 🔥 **Câu 31.** Đồ thị hàm số $y = \frac{x + 2}{3x + 9}$ có đường tiệm cận đứng là $x = a$ và đường tiệm cận ngang là $y = b$. Giá trị của số nguyên m nhỏ nhất thỏa mãn $m \geq a + b$ là
 A. 0. B. -3. C. -1. D. -2.

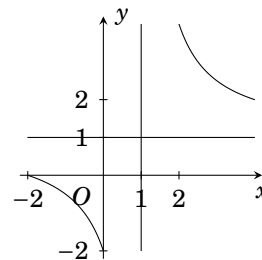
Câu 32. Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$ (C). Gọi M là điểm bất kỳ trên (C), d là tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của đồ thị (C). Giá trị nhỏ nhất của d là

- A. 5. B. 10. C. 6. D. 2.

Câu 33.

Đồ thị như hình vẽ là của hàm số nào sau đây:

- A. $y = \frac{x-1}{x+1}$. B. $y = \frac{3-x}{x-1}$. C. $y = \frac{x+2}{x-1}$. D. $y = \frac{x-2}{x-1}$.



Câu 34. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{5x^2+x+1}}{\sqrt{2x-1}-x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang?

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới. Hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y	+	-	0	+	
y'	$-\infty$	$\nearrow$ 1	$+\infty$	$\searrow$ -2 $\nearrow$ $+\infty$	$-\infty$

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.

Câu 36. Đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 37. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{-x^2+2x}}{x-1}$ là

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 38. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ là

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 39. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}}$ bằng

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 1.

Câu 40. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$ là

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 41. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

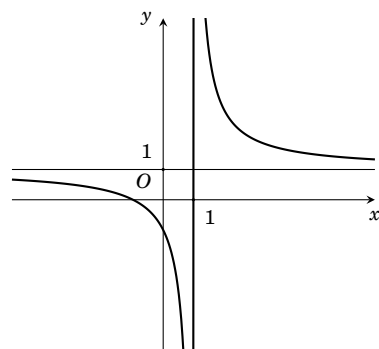
Câu 42. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-1}+1}{x^2-4x-5}$ có tổng số bao nhiêu đường tiệm cận ngang và đứng?

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 43.

Cho đồ thị có hình vẽ như hình dưới đây Đồ thị hàm số đã cho là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = \frac{2x+1}{x-1}$. B. $y = \frac{x-3}{x-1}$. C. $y = \frac{x-1}{x+1}$. D. $y = \frac{x+1}{x-1}$.



Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y	-	+	0	-
y'	$+\infty$ ↘ -1	$-\infty$ ↗ 2 ↘ $-\infty$		

Hỏi đồ thị hàm số trên có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

BÀI 5. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

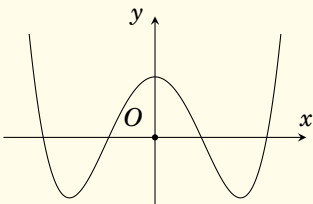
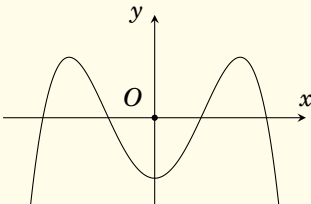
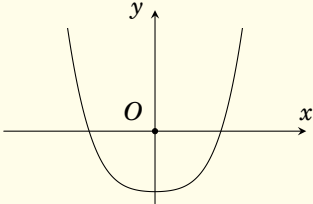
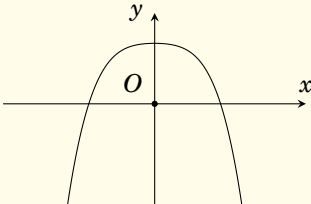
1 HÀM SỐ BẬC BA $Y = AX^3 + BX^2 + CX + D$ ($A \neq 0$)

- ☑ Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- ☑ Tính y' và cho $y' = 0$ ($y' = 0$ hoặc có 2 nghiệm, hoặc có nghiệm kép, hoặc vô nghiệm).
- ☑ Tính các giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- ☑ Lập bảng biến thiên.
- ☑ Kết luận
 - Tính chất đơn điệu của hàm số.
 - Cực trị của hàm số.
- ☑ Tính y'' và cho $y'' = 0$. Suy ra điểm uốn.
- ☑ Chọn hai điểm đặc biệt của đồ thị.
- ☑ Vẽ đồ thị: Đồ thị có 6 dạng và luôn luôn nhận điểm uốn làm tâm đối xứng.

$y' = 0$	$a > 0$	$a < 0$
Có 2 nghiệm		
Có nghiệm kép		
Vô nghiệm		

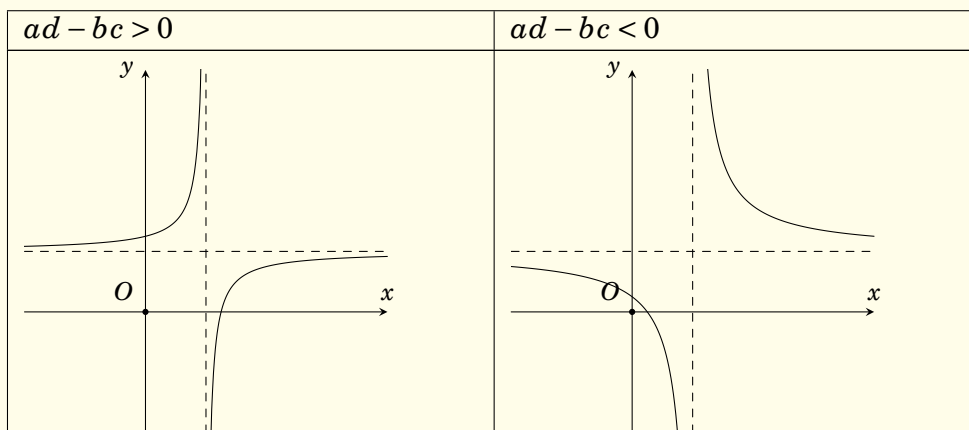
2 HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG $Y = AX^4 + BX^2 + C$ ($A \neq 0$)

- ✓ Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- ✓ Tính y' và cho $y' = 0$ ($y' = 0$ hoặc có 3 nghiệm, hoặc có 1 nghiệm và luôn có nghiệm $x = 0$).
- ✓ Tính các giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- ✓ Lập bảng biến thiên: “Bên phải bảng biến thiên, dấu y' luôn luôn cùng dấu với a ”
- ✓ Kết luận
 - Tính chất đơn điệu của hàm số.
 - Cực trị của hàm số.
- ✓ Chọn hai điểm đặc biệt của đồ thị.
- ✓ Vẽ đồ thị: Đồ thị có 4 dạng và luôn luôn nhận trục tung làm trục đối xứng.

$y' = 0$	$a > 0$	$a < 0$
Có 3 nghiệm		
Có 1 nghiệm		

3 HÀM SỐ NHẤT BIẾN $Y = \frac{AX+B}{CX+D}$ ($C \neq 0, AD - BC \neq 0$)

- ✓ Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$.
- ✓ Tính $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$ (y' hoặc luôn dương, hoặc luôn âm $\forall x \in \mathcal{D}$)
- ✓ Đường tiệm cận:
 - Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\frac{d}{c}$ vì $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{d}{c}\right)^+} y = \dots$ và $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{d}{c}\right)^-} y = \dots$
 - Tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{a}{c}$ vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \frac{a}{c}$.
- ✓ Lập bảng biến thiên: Nhớ: Khi $x \rightarrow \pm\infty$ thì $y \rightarrow \frac{a}{c}$.
 “Nghĩa là hai đầu bảng biến thiên là giá trị của tiệm cận ngang”
- ✓ Kết luận
 - Hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định hoặc luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định.
 - Hàm số không có cực trị.
- ✓ Chọn ít nhất 4 điểm đặc biệt của đồ thị và phải có tọa độ giao điểm của đồ thị với 2 trục tọa độ.
- ✓ Vẽ đồ thị: Đồ thị có 2 dạng và luôn luôn nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.



4 ĐỒ THỊ (C') : $Y = F(|X|)$

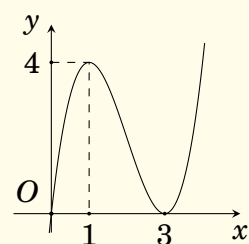
Từ đồ thị (C) : $y = f(x)$ suy ra đồ thị (C') : $y = f(|x|)$.

$$\text{Ta có } y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

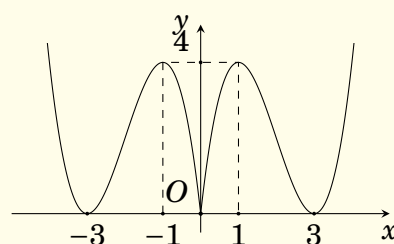
và $y = f(|x|)$ là *hàm chẵn* nên đồ thị (C') nhận Oy làm trục đối xứng.

□ **Cách vẽ (C') từ (C) :**

- Giữ nguyên phần đồ thị bên phải Oy của đồ thị (C) : $y = f(x)$.
- Bỏ phần đồ thị bên trái Oy của (C) , **lấy đối xứng phần đồ thị** được giữ qua Oy .



$$(C): y = x^3 - 6x + 9x$$



$$(C'): y = |x|^3 - 6x^2 + 9|x|$$

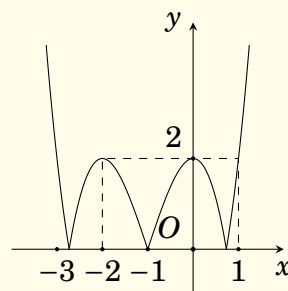
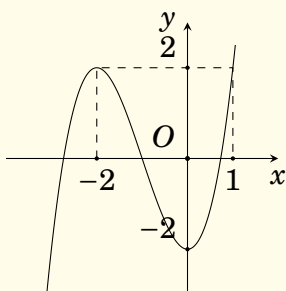
5 ĐỒ THỊ (C') : $Y = |F(X)|$

Từ đồ thị (C) : $y = f(x)$ suy ra đồ thị (C') : $y = |f(x)|$.

$$\text{Ta có } y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

□ **Cách vẽ (C') từ (C) :**

- Giữ nguyên phần đồ thị phía trên Ox của đồ thị (C) : $y = f(x)$.
- Bỏ phần đồ thị phía dưới Ox của (C) , **lấy đối xứng phần đồ thị** bị bỏ qua Ox .



$$(C): y = x^3 + 3x^2 - 2$$

$$(C'): y = |x^3 + 3x^2 - 2|$$



Với dạng $y = |f(|x|)|$ ta lần lượt biến đổi 2 đồ thị $y = f(|x|)$ và $y = |f(x)|$.

6 MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) , hãy suy ra đồ thị (C') của hàm số.

STT	ĐỒ THỊ	CÁCH VẼ
1	$y = f(-x)$	Lấy đối xứng (C) qua trục Oy .
2	$y = -f(x)$	Lấy đối xứng (C) qua trục Ox .
3	$y = f(x)$	— Giữ nguyên phần đồ thị bên phải Oy. — Bỏ phần đồ thị bên trái Oy của (C), lấy đối xứng đồ thị được giữ qua Oy.
4	$y = f(x) $	— Giữ nguyên phần đồ thị phía trên Ox của đồ thị (C). — Bỏ phần đồ thị phía dưới Ox của (C), lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.
5	$y = f(x) $	Ta lần lượt biến đổi 2 đồ thị $y = f(x)$ và $y = f(x) $.
6	$y = u(x) \cdot v(x)$ với $(C): y = u(x) \cdot v(x)$	— Giữ nguyên phần đồ thị trên miền $u(x) \geq 0$ của đồ thị (C). — Bỏ phần đồ thị trên miền $u(x) < 0$ của (C), lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.
7	$y = f(x) + p, p > 0$	Tịnh tiến đồ thị (C) lên trên p đơn vị.
8	$y = f(x) - p, p > 0$	Tịnh tiến đồ thị (C) xuống dưới p đơn vị.
9	$y = f(x + q), q > 0$	Tịnh tiến đồ thị (C) sang trái q đơn vị.
10	$y = f(x - q), q > 0$	Tịnh tiến đồ thị (C) sang phải q đơn vị.
11	$y = f(kx), k > 1$	Co đồ thị (C) theo chiều ngang hệ số k .
12	$y = f(kx), 0 < k < 1$	Giãn đồ thị (C) theo chiều ngang hệ số $\frac{1}{k}$.
13	$y = kf(x), k > 1$	Giãn đồ thị (C) theo chiều dọc hệ số k .
14	$y = kf(x), 0 < k < 1$	Co đồ thị (C) theo chiều dọc hệ số $\frac{1}{k}$.

15	$y = f(x) + m$	— Vẽ đồ thị $y = f(x) $. — Tịnh tiến đồ thị lên hoặc xuống m đơn vị.
16	$y = f(x + m) $	— Tịnh tiến đồ thị sang phải hoặc sang trái m đơn vị. — Sau đó vẽ như cách vẽ đồ thị $y = f(x) $.
17	$y = f(x + m) $	— Tịnh tiến đồ thị sang phải hoặc sang trái m đơn vị. — Sau đó vẽ như cách vẽ đồ thị $y = f(x)$.
18	$y = f(x + m) $	— Vẽ đồ thị $y = f(x) $. — Tịnh tiến đồ thị sang phải hoặc sang trái m đơn vị.

7 TIẾP TUYẾN

Cho hàm số $y = f(x)$, có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C)$ có dạng

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

Trong đó điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C)$ được gọi là tiếp điểm với $y_0 = f(x_0)$ và $k = f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến.

8 TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) và $y = g(x)$ có đồ thị (C_2) .

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là $f(x) = g(x)$ (1). Khi đó

- ① Số giao điểm của (C_1) và (C_2) bằng số nghiệm của phương trình (1).
- ② Nghiệm x_0 của phương trình (1) chính là hoành độ x_0 của giao điểm.
- ③ Để tính tung độ y_0 của giao điểm, ta thay hoành độ x_0 vào $y = f(x)$ hoặc $y = g(x)$.
- ④ Điểm $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của (C_1) và (C_2) .

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số thường gặp

 **Ví dụ 1.** Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = -x^4 - x^2 + 2$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 2.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 3.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x + 1}{x - 2}$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 2. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0)$

- ① *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ bằng số a .*
- *Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.*
 - *Ta có $x_0 = a$.*
 - *Thế $x = a$ vào phương trình $y = f(x)$ tìm được y_0 .*
 - *Tính $f'(x)$ từ đó tính $f'(x_0)$.*
 - *Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M có dạng*

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

- ② *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có tung độ bằng số b .*
- *Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.*
 - *Ta có $y_0 = b$.*
 - *Thế $y = b$ vào phương trình $y = f(x)$ từ đó tìm được x_0 .*
 - *Tính $f'(x)$, từ đó tính được $f'(x_0)$.*
 - *Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M có dạng*

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(1; 4)$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{2x-1}$ tại điểm có tung độ bằng 1.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

📁 Dạng 3. Tiếp tuyến của đồ thị (C) biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng k

- Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.
- Hệ số góc tiếp tuyến bằng k nên $f'(x_0) = k$. Giải phương trình này ta tìm được x_0 .
- Thế x_0 vào phương trình $y = f(x)$ tìm được y_0 .
- Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M có dạng

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

🔪 **Ví dụ 1.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết hệ số góc của tiếp tuyến đó bằng 9.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

📁 Dạng 4. Tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = ax + b$

- Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.
- Tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = ax + b \Rightarrow f'(x_0) = a$. Giải phương trình này tìm được x_0 .
- Thế x_0 vào phương trình $y = f(x)$ tìm được y_0 .
- Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M có dạng

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

! Nhớ kiểm tra tính song song của tiếp tuyến cần tìm để loại bỏ đáp án.

🔪 **Ví dụ 1.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 + x^2 - 2$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = -36x + 5$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 5. Tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y = ax + b$

- Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.
- Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y = ax + b \Rightarrow f'(x_0) = -\frac{1}{a}$. Giải phương trình này tìm được x_0 .
- Thế x_0 vào phương trình $y = f(x)$ tìm được y_0 .
- Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M có dạng

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ví dụ 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-2}{x+2}$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -6x + 1$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

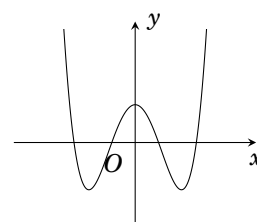
TRẮC NGHIỆM

===== ĐỒ THỊ HÀM SỐ =====

🔥 Câu 1.

Đường cong hình bên là đồ thị của một trong các hàm số sau, hỏi đó là hàm số nào?

- A. $y = -x^4 + 3x^2 + 1$. B. $y = x^3 - 3x^2 + 1$.
 C. $y = x^4 + 3x^2 + 1$. D. $y = x^4 - 3x^2 + 1$.



🔥 Câu 2.

Hàm số nào trong bốn hàm số sau có bảng biến thiên như hình vẽ sau?

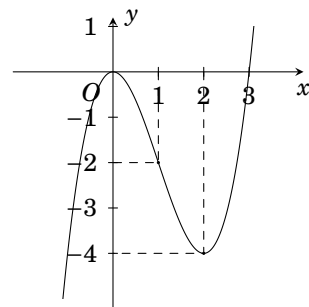
- A. $y = x^3 + 3x^2 - 1$. B. $y = x^3 - 3x + 2$.
 C. $y = x^3 - 3x^2 + 2$. D. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y			2		$+\infty$	
	$-\infty$			-2		

🔥 Câu 3.

Đồ thị hàm số nào sau đây có hình dạng như hình vẽ bên dưới?

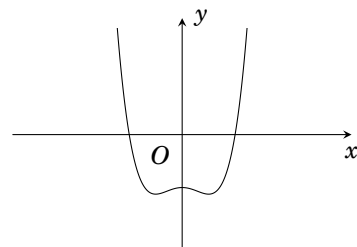
- A. $y = x^3 + 3x$.
 B. $y = x^3 - 3x^2$.
 C. $y = x^3 - 3x$.
 D. $y = x^3 + 3x^2$.



Câu 4.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

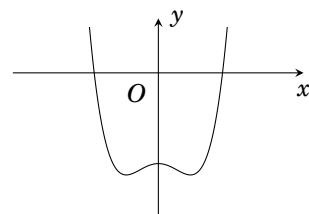
- A. $y = 2x^4 - x^2 - 1$.
 B. $y = -x^4 + x^2 - 1$.
 C. $y = x^3 - x^2 - 1$.
 D. $y = -3x^3 + x^2 - 1$.



Câu 5.

Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong số bốn hàm số sau đây?

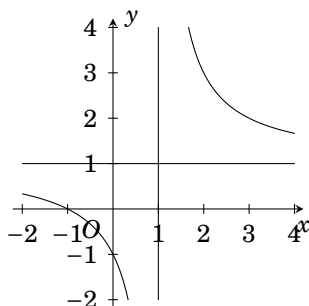
- A. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.
 B. $y = -x^4 + 2x^2 + 2$.
 C. $y = -2x^3 + 3x^2 - 1$.
 D. $y = x^4 - 2x^2 - 2$.



Câu 6.

Đường cong trong hình dưới là đồ thị của hàm số nào sau đây?

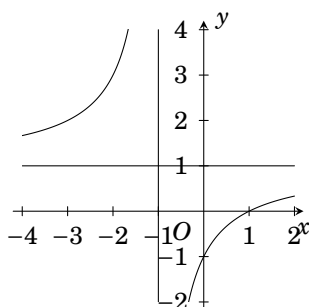
- A. $y = \frac{x+1}{x-1}$.
 B. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.
 C. $y = x^3 - 3x + 2$.
 D. $y = \frac{x-1}{x+1}$.



Câu 7.

Đường cong hình dưới là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- A. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.
 B. $y = \frac{x+1}{x-1}$.
 C. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.
 D. $y = \frac{x-1}{x+1}$.



Câu 8.

Biết rằng bảng biến thiên sau là bảng biến thiên của một hàm số trong các hàm số được liệt kê ở các phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \frac{2x+5}{x+2}$.
 B. $y = \frac{x-3}{x-2}$.
 C. $y = \frac{x+1}{x-2}$.
 D. $y = \frac{2x-1}{x+2}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$
y	1	$+\infty$	1

Câu 9.

Bảng biến thiên ở hình dưới là của một trong bốn hàm số được liệt kê dưới đây. Hãy tìm hàm số đó.

A. $y = \frac{-2x-3}{x-1}$.

B. $y = \frac{-x+1}{x-1}$.

C. $y = \frac{x-1}{2x-3}$.

D. $y = \frac{x-2}{2x+3}$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		$+$	$+$
y	2	$+\infty$	2
		$-\infty$	

Câu 10.

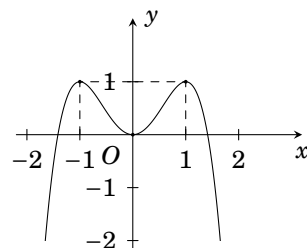
Đường cong trong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số nào sau đây?

A. $y = x^3 + 2x^2 - x - 1$.

B. $y = -x^4 + 2x^2$.

C. $y = x^4 - 2x^2$.

D. $y = -x^2 + 2x$.



Câu 11.

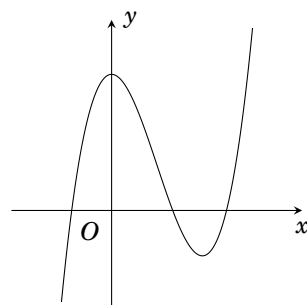
Đường cong như hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

A. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2$.

B. $y = x^3 - 3x^2 + 3$.

C. $y = 2x^3 + 3x + 2$.

D. $y = -3x^3 + 2x^2 + 2$.



Câu 12.

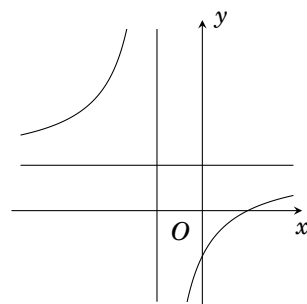
Hình bên là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

B. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

C. $y = \frac{x+2}{x+1}$.

D. $y = \frac{x-1}{x+1}$.



Câu 13.

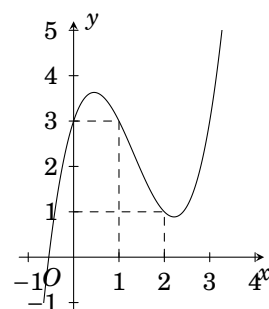
Biết rằng đồ thị cho ở hình vẽ dưới đây là đồ thị của một trong 4 hàm số cho trong 4 phương án A, B, C, D. Đó là hàm số nào?

A. $y = 2x^3 + 9x^2 - 11x + 3$.

B. $y = x^3 - 4x^2 + 3x + 3$.

C. $y = 2x^3 - 6x^2 + 4x + 3$.

D. $y = x^3 - 5x^2 + 4x + 3$.



Câu 14.

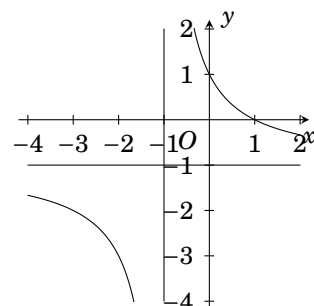
Đồ thị hình dưới đây là của hàm số nào?

A. $y = \frac{-x+2}{x+1}$.

B. $y = \frac{-x}{x+1}$.

C. $y = \frac{-x+1}{x+1}$.

D. $y = \frac{-2x+1}{2x+1}$.



🔥 Câu 15.

Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình vẽ

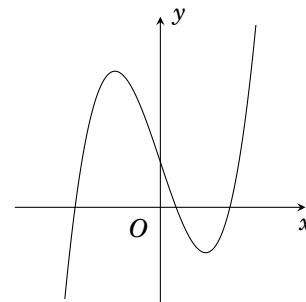
- A. $y = \frac{2x-5}{x-2}$. B. $y = \frac{2x-1}{x-2}$.
C. $y = \frac{x-2}{2x-3}$. D. $y = \frac{x+3}{x-2}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	-		-
y	2	$+\infty$	2

🔥 Câu 16.

Đường cong trong hình vẽ dưới đây là đồ thị hàm số nào?

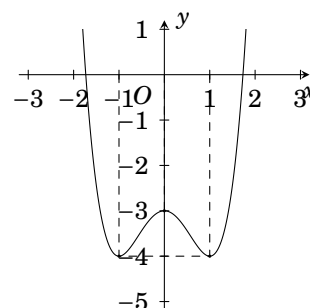
- A. $y = -x^4 - 4x^2 + 1$. B. $y = x^3 + 3x + 1$.
C. $y = -x^3 + 3x - 1$. D. $y = x^3 - 3x + 1$.



🔥 Câu 17.

Đường cong trong hình sau là đồ thị của hàm số nào?

- A. $y = x^4 + 2x^2 - 3$. B. $y = x^4 - 2x^2 - 3$.
C. $y = -x^4 - 2x^2 + 3$. D. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.



🔥 Câu 18.

Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình vẽ

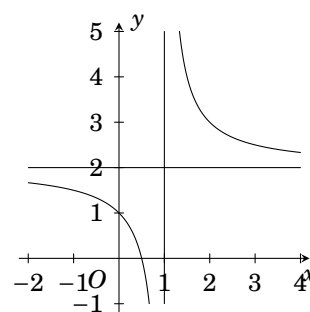
- A. $y = x^3 - 3x^2 + 2$. B. $y = x^3 - 3x^2 - 2$.
C. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$. D. $y = x^3 + 3x^2 - 1$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

🔥 Câu 19.

Xác định a, b, c để hàm số $y = \frac{ax-1}{bx+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn đáp án đúng?

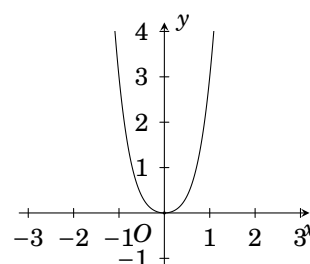
- A. $a = 2, b = 1, c = -1$. B. $a = 2, b = 1, c = 1$.
C. $a = 2, b = 2, c = -1$. D. $a = 2, b = -1, c = 1$.



🔥 Câu 20.

Đường cong hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

- A. $y = -x^4 + 4x^2$. B. $y = 3x^4 - x^2 + 1$.
C. $y = 2x^4 + x^2$. D. $y = x^2$.



🔥 Câu 21.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây.

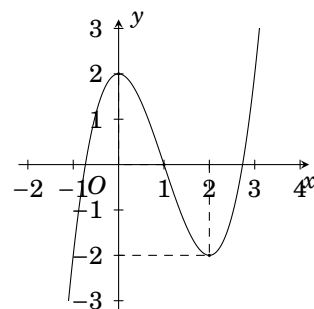
Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = -x^3 + 3x^2 + 2$.

B. $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

C. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

D. $y = x^3 + 3x^2 + 2$.



Câu 22.

Bảng biến thiên sau là của hàm số nào?

A. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

B. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.

C. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

D. $y = x^4 - x^2 - 1$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-2	-1	-2	$+\infty$

Câu 23.

Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào?

A. $y = -x^3 + 6x - 2$.

B. $y = -3x^3 + 9x^2 - 2$.

C. $y = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 2$.

D. $y = -2x^3 + 6x^2 - 2$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0
y	$+\infty$	-2	6	$-\infty$

Câu 24.

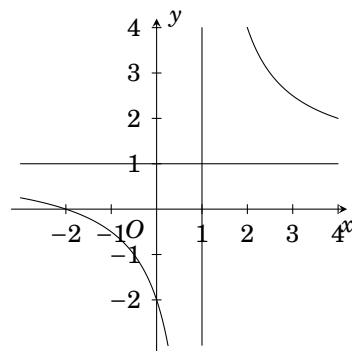
Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $b < 0 < a$.

B. $a < b < 0$.

C. $a < 0; b < 0$.

D. $0 < b < a$.



Câu 25.

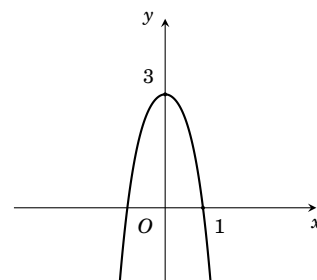
Hàm số nào dưới đây có đồ thị như hình vẽ bên.

A. $y = x^2 + 3$.

B. $y = -x^2 + 3$.

C. $y = -x^4 - 2x^2 + 3$.

D. $y = -x^4 + 3$.



Câu 26.

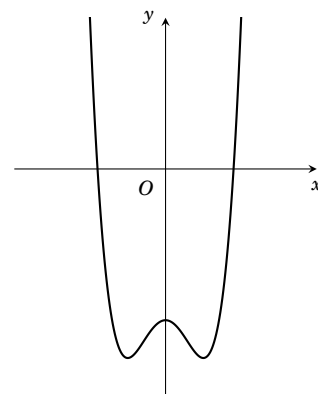
Hàm số trùng phương nào dưới đây có đồ thị như hình vẽ bên.

A. $y = x^4 + 2x^2 - 4$.

B. $y = x^4 - 2x^2 - 4$.

C. $y = x^4 + 2x^2 + 4$.

D. $y = -x^4 - 2x^2 - 4$.



Câu 27.

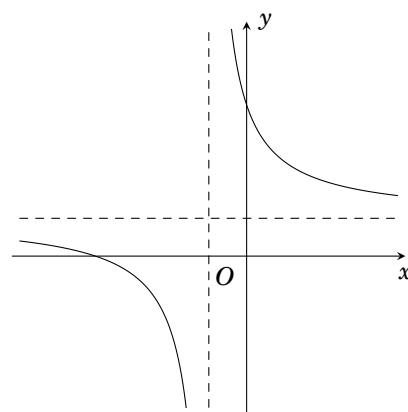
Đường cong bên dưới là đồ thị của hàm số nhất biến nào dưới đây?

A. $y = \frac{x-4}{x-1}$.

B. $y = \frac{x+4}{x+1}$.

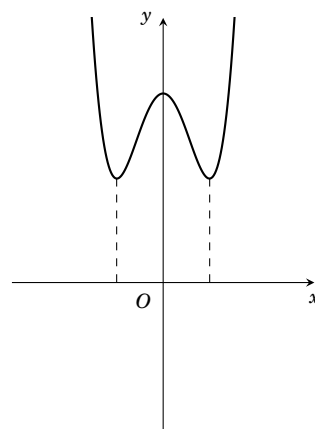
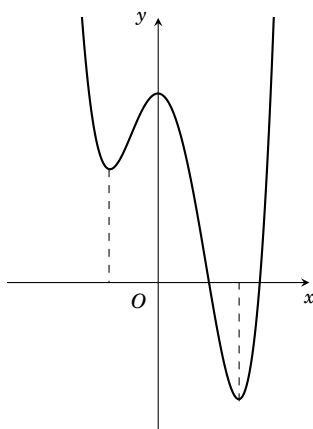
C. $y = \frac{x+2}{x+3}$.

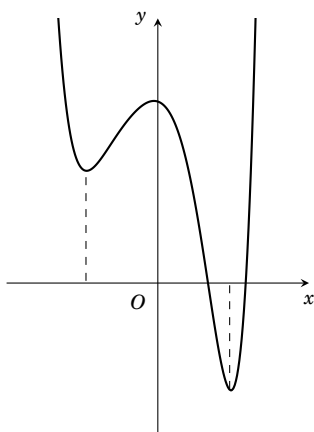
D. $y = \frac{-2x+4}{x+3}$.



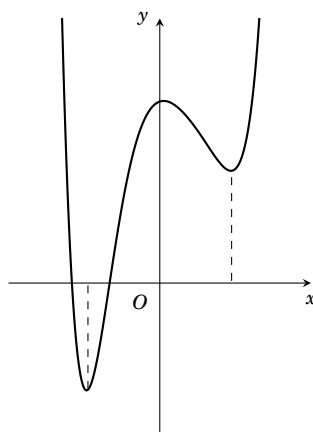
Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = f(x)$?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	3	5	-3	$+\infty$





C.

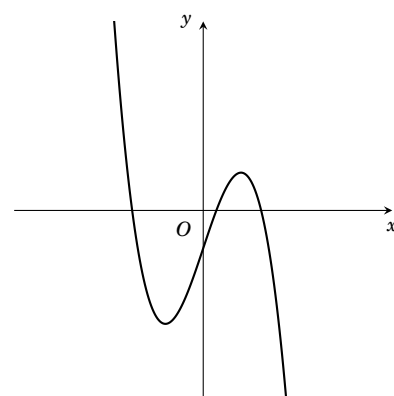


D.

Câu 29.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng:

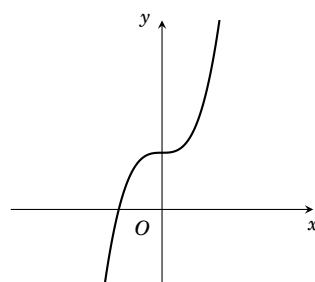
- A. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$. B. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.
C. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$. D. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.



Câu 30.

Cho hàm số $y = x^3 + bx^2 + d$ ($b, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

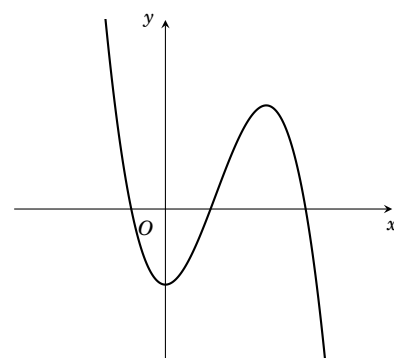
- A. $b < 0, d > 0$. B. $b > 0, d > 0$. C. $b = 0, d > 0$. D. $b > 0, d = 0$.



Câu 31.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

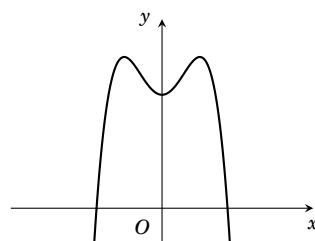
- A. $\begin{cases} b^2 - 3ac > 0 \\ ac > 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} b^2 - 3ac < 0 \\ ac > 0 \end{cases}$.
C. $\begin{cases} b^2 - 3ac < 0 \\ ac = 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} b^2 - 3ac > 0 \\ ac = 0 \end{cases}$.



Câu 32.

Cho hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng.

- A. $a > 0, b > 0, c > 0$. B. $a < 0, b < 0, c < 0$.
C. $a < 0, b > 0, c > 0$. D. $a < 0, b < 0, c > 0$.

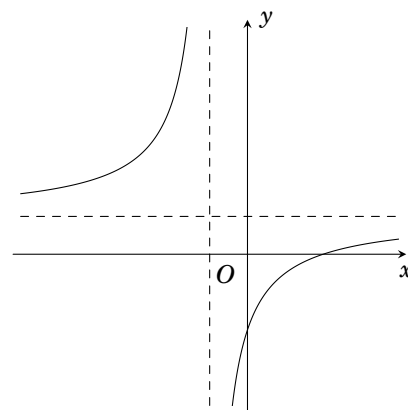


Câu 33.

Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên.

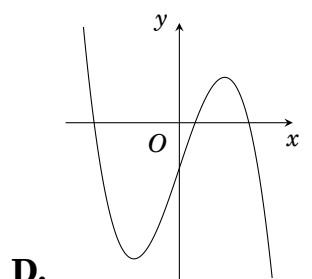
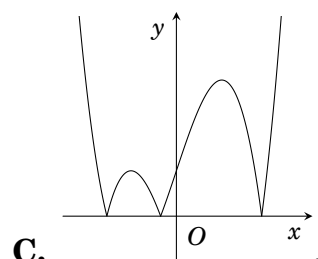
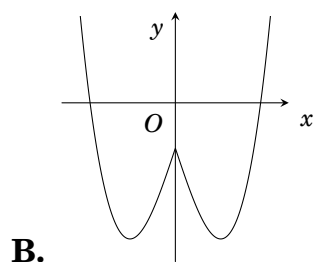
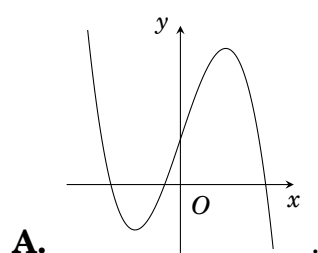
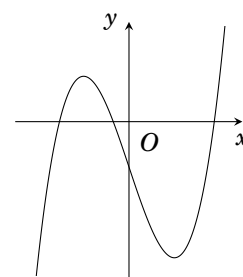
Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.
 B. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.
 C. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
 D. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.



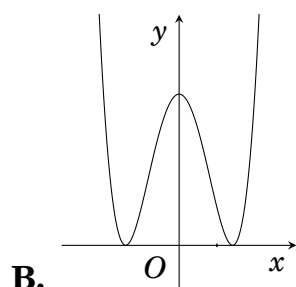
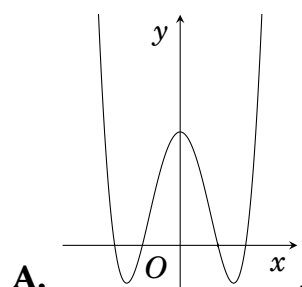
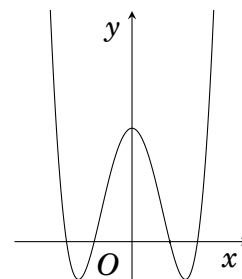
🔥 Câu 34.

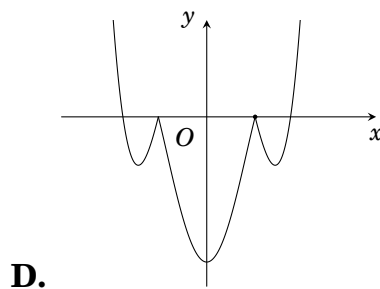
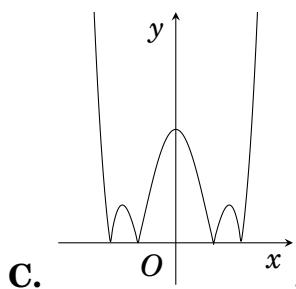
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Đồ thị nào dưới đây là đồ thị hàm số $y = f(|x|)$?



🔥 Câu 35.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$?





=====TIẾP TUYẾN=====

🔥 **Câu 36.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ tại điểm $A(3; 1)$ là

- A. $y = -9x - 26$. B. $y = 9x - 26$. C. $y = -9x - 3$. D. $y = 9x - 2$.

🔥 **Câu 37.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 1$ tại điểm $B(1; -2)$ là

- A. $y = 4x + 6$. B. $y = 4x + 2$. C. $y = -4x + 6$. D. $y = -4x + 2$.

🔥 **Câu 38.** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ tại điểm D có hoành độ bằng 2 có phương trình là

- A. $y = -9x + 14$. B. $y = 9x + 14$. C. $y = -9x + 22$. D. $y = 9x + 22$.

🔥 **Câu 39.** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 8x^2$ tại điểm E có hoành độ bằng -3 có phương trình là

- A. $y = 60x + 171$. B. $y = -60x + 171$. C. $y = 60x + 189$. D. $y = -60x + 189$.

🔥 **Câu 40.** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3x^2$ tại điểm G có tung độ bằng 5 có phương trình là

- A. $y = 12x - 7$. B. $y = -12x - 7$. C. $y = 12x + 17$. D. $y = -12x + 17$.

🔥 **Câu 41.** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 3$ tại điểm H có tung độ bằng 21 có phương trình là

- A. $\begin{cases} y = 40x - 101 \\ y = -40x - 59 \end{cases}$. B. $\begin{cases} y = 40x - 59 \\ y = -40x - 101 \end{cases}$. C. $\begin{cases} y = 40x + 59 \\ y = -40x + 101 \end{cases}$. D. $\begin{cases} y = -40x - 59 \\ y = 40x + 101 \end{cases}$.

🔥 **Câu 42.** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 2$ có hệ số góc $k = -3$ có phương trình là

- A. $y = -3x - 7$. B. $y = -3x + 7$. C. $y = -3x + 1$. D. $y = -3x - 1$.

🔥 **Câu 43.** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2$ có hệ số góc bằng -48 có phương trình là

- A. $y = -48x + 192$. B. $y = -48x + 160$. C. $y = -48x - 160$. D. $y = -48x - 192$.

🔥 **Câu 44.** Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2$ song song với đường thẳng $y = x$?

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

🔥 **Câu 45.** Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = -36x + 5$ của đồ thị hàm số $y = x^4 + x^2 - 2$ có phương trình là

- A. $y = -36x - 54$. B. $y = -36x + 54$. C. $y = -36x - 90$. D. $y = -36x + 90$.

🔥 **Câu 46.** Cho hàm $y = 2x^3 - 3x - 1$ có đồ thị là (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) vuông góc với đường thẳng $x + 21y - 2 = 0$ có phương trình là:

- A. $\begin{cases} y = \frac{1}{21}x - 33 \\ y = \frac{1}{21}x + 31 \end{cases}$. B. $\begin{cases} y = -21x - 33 \\ y = -21x + 31 \end{cases}$. C. $\begin{cases} y = 21x - 33 \\ y = 21x + 31 \end{cases}$. D. $\begin{cases} y = -\frac{1}{21}x - 33 \\ y = -\frac{1}{21}x + 31 \end{cases}$.

🔹 **Câu 47.** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^4 - 2x^2 + 3$ vuông góc với đường thẳng $x - 8y + 2017 = 0$ có phương trình là

- A. $y = -\frac{1}{8}x + 8$. B. $y = 8x + 8$. C. $y = -8x + 8$. D. $y = \frac{1}{8}x - 8$.

🔹 **Câu 48.** Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2$ tại giao điểm của đồ thị với trục Ox ?

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

🔹 **Câu 49.** Tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = -x^3 + 3x - 2$ tại giao điểm của (C) với trục hoành có phương trình là

- A. $y = -9x - 18$. B. $\begin{cases} y = 0 \\ y = -9x - 18 \end{cases}$. C. $y = -9x + 18$. D. $\begin{cases} y = 0 \\ y = -9x + 18 \end{cases}$.

🔹 **Câu 50.** Tại giao điểm của đồ thị hàm số (C): $y = 2x^3 - 6x + 1$ và trục Oy ta lập được tiếp tuyến có phương trình là

- A. $y = 6x - 1$. B. $y = -6x - 1$. C. $y = 6x + 1$. D. $y = -6x + 1$.

🔹 **Câu 51.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C): $y = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^2 - 2$ tại giao điểm M của (C) với trục tung là

- A. $\begin{cases} y = -2 \\ y = 2 \end{cases}$. B. $y = 2$. C. $y = -2$. D. $\begin{cases} y = -2 \\ y = 0 \end{cases}$.

🔹 **Câu 52.** Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C): $y = \frac{2x+1}{x-3}$ tại giao điểm A của (C) và trục tung. Khi đó, phương trình của đường thẳng d là

- A. $y = \frac{7}{9}x - \frac{1}{3}$. B. $y = -\frac{7}{9}x + \frac{1}{3}$. C. $y = -\frac{7}{9}x - \frac{1}{3}$. D. $y = \frac{7}{9}x + \frac{1}{3}$.

🔹 **Câu 53.** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C): $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ song song với đường thẳng $y = 3x + 2016$ có phương trình là

- A. $\begin{cases} y = 3x - \frac{2}{3} \\ y = 3x - 8 \end{cases}$. B. $\begin{cases} y = 3x - \frac{2}{3} \\ y = 3x + 8 \end{cases}$. C. $\begin{cases} y = 3x - 8 \\ y = 3x + \frac{2}{3} \end{cases}$. D. $\begin{cases} y = 3x + \frac{2}{3} \\ y = 3x + 8 \end{cases}$.

🔹 **Câu 54.** Tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x - 5$ sẽ

- A. song song với đường thẳng $x = 1$. B. song song với trục hoành.
C. có hệ số góc dương. D. có hệ số góc bằng 0.

🔹 **Câu 55.** Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$ tại điểm có tung độ bằng 3 là

- A. $x - 2y - 7 = 0$. B. $x + y - 8 = 0$. C. $2x - y - 9 = 0$. D. $x + 2y - 9 = 0$.

🔹 **Câu 56.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 1$ có đồ thị (C). Trong các tiếp tuyến của (C), tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất có phương trình là

- A. $y = -3x + 2$. B. $y = 3x + 2$. C. $y = -3x + 8$. D. $y = 3x + 8$.

🔹 **Câu 57.** Cho hàm số $y = -x^3 + 6x^2 + 3x - 1$ có đồ thị (C). Trong các tiếp tuyến của (C), tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất có phương trình là

- A. $y = 15x + 55$. B. $y = -15x - 5$. C. $y = 15x - 5$. D. $y = -15x + 55$.

🔹 **Câu 58.** Cho hàm số $y = x^3 - x^2 + 2x + 5$ có đồ thị (C). Trong các tiếp tuyến của (C), tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất, thì hệ số góc của tiếp tuyến đó là

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{5}{3}$.

===== TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ =====

- 🔥 **Câu 59.** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 1$ với trục Ox là
 A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.
- 🔥 **Câu 60.** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = (x+3)(x^2+3x+2)$ với trục Ox là
 A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.
- 🔥 **Câu 61.** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x - 12$ và trục Ox là
 A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.
- 🔥 **Câu 62.** Đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại các điểm có tọa độ là
 A. (0;2). B. (-1;0);(2;1). C. (0;-1);(2;1). D. (1;2).
- 🔥 **Câu 63.** Đồ thị (C): $y = \frac{2x-1}{x+1}$ cắt đường thẳng $d: y = 2x - 3$ tại các điểm có tọa độ là
 A. (2; -1); $(-\frac{1}{2}; -2)$. B. (2; 1); $(-\frac{1}{2}; -4)$. C. (-1; -5); $(\frac{3}{2}; 0)$. D. $(\frac{1}{2}; -2)$.
- 🔥 **Câu 64.** Đồ thị hàm số $y = 2x^4 + x^3 + x^2$ cắt trục hoành tại mấy điểm?
 A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.
- 🔥 **Câu 65.** Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = x - 1$. Số giao điểm của (C) và d là
 A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.
- 🔥 **Câu 66.** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x+2}$ và trục hoành là
 A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.
- 🔥 **Câu 67.** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = (x-1)(x^2 - 3x + 2)$ và trục hoành là
 A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.
- 🔥 **Câu 68.** Giao điểm giữa đồ thị (C): $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x-1}$ và đường thẳng (d): $y = x + 1$ là
 A. A(2;-1). B. A(0;-1). C. A(-1;2). D. A(-1;0).
- 🔥 **Câu 69.** Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 - 2$ có đồ thị (C) và đồ thị (P): $y = 1 - x^2$. Số giao điểm của (P) và đồ thị (C) là
 A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- 🔥 **Câu 70.** Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = 2x - 3$. Số giao điểm của (C) và d là
 A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.
- 🔥 **Câu 71.** Tọa độ giao điểm giữa đồ thị (C): $y = \frac{2x-1}{x+2}$ và đường thẳng $d: y = x - 2$ là
 A. A(-1;-3); B(3;1). B. A(1;-1); B(0;-2).
 C. A(-1;-3); B(0;-2). D. A(1;-1); B(3;1).
- 🔥 **Câu 72.** Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = 2x - 3$. Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm A và B. Khi đó hoành độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là
 A. $x_I = \frac{4}{3}$. B. $x_I = -\frac{3}{4}$. C. $x_I = \frac{3}{4}$. D. $x_I = -\frac{4}{3}$.
- 🔥 **Câu 73.** Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN với M,N là giao điểm của đường thẳng $d: y = x + 1$ và đồ thị hàm số (C): $y = \frac{2x+2}{x-1}$ là
 A. I(-1;-2). B. I(-1;2). C. I(1;-2). D. I(1;2).

Câu 74. Gọi M, N là hai giao điểm của đường thẳng $d: y = x + 1$ và $(C): y = \frac{2x+4}{x-1}$. Hoàn chỉnh trung điểm I của đoạn thẳng MN là

- A. 2. B. 1. C. $\frac{5}{2}$. D. $-\frac{5}{2}$.

Câu 75. Đồ thị hàm số $y = 2x^4 - x^2 + 2$ cắt đường thẳng $y = 6$ tại bao nhiêu điểm?

- A. 2. B. 0. C. 4. D. 3.

Câu 76. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $(H): y = \frac{x+2}{x+1}$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = 2x^4 - x^2$ tại các điểm có tọa độ là

- A. $(1; 1); (-1; 1)$. B. $(1; 1)$. C. $(-1; 1)$. D. $(0; 1)$.

Câu 77. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt thì tất cả các giá trị tham số m thỏa mãn là

- A. $m > 1$. B. $-3 \leq m \leq 1$. C. $-3 < m < 1$. D. $m < -3$.

Câu 78. Đường thẳng $y = m$ không cắt đồ thị hàm số $y = -2x^4 + 4x^2 + 2$ thì tất cả các giá trị tham số m là

- A. $m > 4$. B. $m \geq 4$. C. $m \leq 2$. D. $2 < m < 4$.

Câu 79. Với tất cả giá trị nào của tham số m thì phương trình $x^4 - 2x^2 = m + 3$ có bốn nghiệm phân biệt?

- A. $m \in (-4; -3)$. B. $m = -3$ hoặc $m = -4$.
C. $m \in (-3; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; -4)$.

Câu 80. Tất cả giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x - m + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt là

- A. $-1 < m < 3$. B. $-1 \leq m \leq 3$.
C. $m = 1$. D. $m < -1$ hoặc $m > 3$.

Câu 81. Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $d: y = m$ tại ba điểm phân biệt là

- A. $-2 < m < 0$. B. $-2 < m < 2$. C. $0 < m < 1$. D. $1 < m < 2$.

Câu 82. Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị $(C): y = x^4 - 2x^2 - 3$ cắt đường thẳng $d: y = m$ tại bốn điểm phân biệt là

- A. $-4 < m < -3$. B. $m < -4$. C. $m > -3$. D. $-4 < m < -\frac{7}{2}$.

Câu 83. Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 - 2$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = m$. Tất cả các giá trị của tham số m để d cắt (C) tại bốn điểm phân biệt là

- A. $-6 \leq m \leq -2$. B. $2 < m < 6$. C. $-6 < m < -2$. D. $2 \leq m \leq 6$.

Câu 84. Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 3x^2 + m = 0$ có bốn nghiệm phân biệt là

- A. $1 < m < \frac{13}{4}$. B. $0 < m < \frac{9}{4}$. C. $-\frac{9}{4} < m < 0$. D. $-1 < m < \frac{13}{4}$.

Câu 85. Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + m$. Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ít nhất ba điểm phân biệt là

- A. $0 < m < 1$. B. $-1 < m \leq 0$. C. $-1 < m < 0$. D. $-1 \leq m < 0$.

Câu 86. Tất cả giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2x^2 - m + 3 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt là

- A. $2 < m < 3$. B. $2 \leq m \leq 3$. C. $m \geq 2$. D. $m > 2$.

Câu 87. Tất cả giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2x^2 - m + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là

- A. $m > 3$. B. $m \geq 3$. C. $m > 3$ hoặc $m = 2$. D. $m = 3$ hoặc $m = 2$.

Câu 88. Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = -2x^4 + 2x^2 + 1$ cắt đường thẳng $y = 3m$ tại ba điểm phân biệt là

- A. $\frac{1}{3} \leq m \leq \frac{1}{2}$. B. $m = \frac{1}{2}$. C. $m \leq \frac{1}{3}$. D. $m = \frac{1}{3}$.

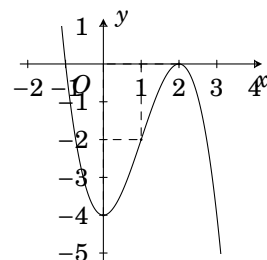
Câu 89. Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (C): $y = -2x^3 + 3x^2 + 2m - 1$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt là

- A. $\frac{1}{4} \leq m < \frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$. C. $0 < m < \frac{1}{2}$. D. $0 \leq m \leq \frac{1}{2}$.

Câu 90.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 + 4 + m = 0$ có nghiệm duy nhất lớn hơn 2. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ là hình bên.

- A. $m > 0$. B. $m \leq -4$.
C. $m < -4$. D. $m \leq -4$ hoặc $m \geq 0$.



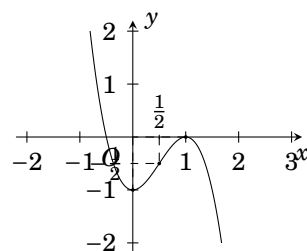
Câu 91. Tất cả giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x - m + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt, trong đó có hai nghiệm dương là

- A. $-1 \leq m \leq 1$. B. $-1 < m \leq 1$. C. $-1 < m < 3$. D. $-1 < m < 1$.

Câu 92.

Cho hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 - 1$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Dùng đồ thị (C) suy ra tất cả giá trị tham số m để phương trình $2x^3 - 3x^2 + 2m = 0$ (1) có ba nghiệm phân biệt là

- A. $0 < m < \frac{1}{2}$. B. $-1 < m < 0$. C. $0 \leq m \leq -1$. D. $-1 \leq m \leq 0$.



Câu 93. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			-3			$+\infty$	
		-4			-4			

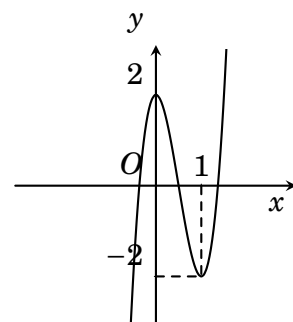
Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) + 10 = 0$ là

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 94.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) + 1 = 0$ là

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.



Câu 95. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

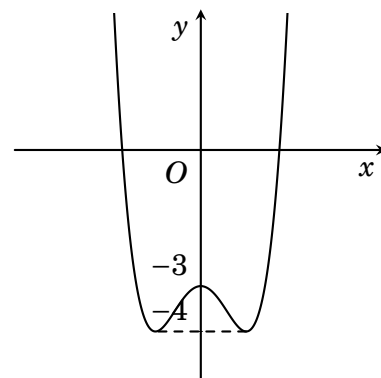
Số nghiệm của phương trình $3f(x) - e = 0$ là

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 96.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $f(x) - m + 1 = 0$ với $m > 4$ là

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 1.



Câu 97. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-3	$+\infty$	2	$+\infty$	

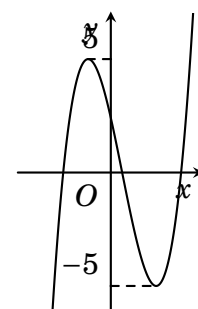
Số nghiệm của phương trình $|f(x)| - 3 = 0$ là

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 98.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như sau. Số nghiệm của phương trình $|f(x)| - 2m + 1 = 0$ với $\frac{1}{2} < m < 3$ là

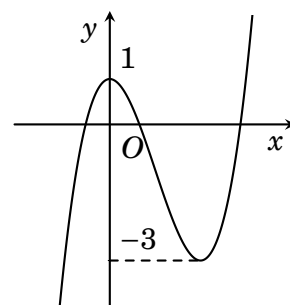
- A. 5. B. 4. C. 6. D. 3.



Câu 99.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình $3f(|x|) = 2$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.



Câu 100. Cho hàm số: $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	0	$\frac{4}{3}$	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			2		$\frac{22}{27}$		$+\infty$
	$-\infty$						

Số nghiệm của phương trình $2f(|x|) - 1 = 0$ là

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 0.

Câu 101.

Cho hàm số: $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình

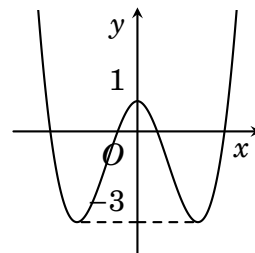
$$\frac{1+f(x)}{3+2f(x)} = 2 \text{ là}$$

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 5.



Câu 102. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			2		-2		$+\infty$

Tìm số nghiệm của phương trình $\frac{|f(x)| - 1}{|f(x)| + 1} = \frac{1}{4}$.

A. 6.

B. 5.

C. 4.

D. 7.

Câu 103. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			9		-3		$+\infty$
	$-\infty$						

Số nghiệm của phương trình $f^2(x) - 9 = 0$ là

A. 4.

B. $I = 3$.

C. 5.

D. 6.

CHƯƠNG 2

HÀM SỐ LŨY THỪA. HÀM SỐ MŨ -
HÀM SỐ LOGARIT

BÀI 1. LŨY THỪA

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ NGUYÊN

- ① Lũy thừa với số mũ nguyên dương: Cho $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ thừa số}}$.
- ② Lũy thừa với số mũ nguyên âm: Cho $a \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ và $a^0 = 1$.
- ③ Lưu ý: 0^0 và 0^{-n} với $n \in \mathbb{N}^*$ không có nghĩa.

2 LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ HỮU TỈ

Cho $a > 0$ và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$; trong đó $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Khi đó: $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

3 LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ VÔ TỈ

Cho $a > 0, \alpha \in \mathbb{R}, (r_n)$ là dãy số hữu tỉ sao cho $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \alpha$. Khi đó: $a^\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n}$.

4 CÁC TÍNH CHẤT CỦA LŨY THỪA

Cho a, b là các số thực dương, x, y là các số thực tùy ý.

- ① $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ và $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
- ② $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$; $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$ và $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$.
- ③ Nếu $a > 1$ thì $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$.
- ④ Nếu $0 < a < 1$ thì $a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$.

5 MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA CĂN BẬC N

- ① Với $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$\begin{aligned} & \text{— } \sqrt[n]{a^{2n}} = |a|, \forall a \in \mathbb{R}. \\ & \text{— } \sqrt[n+1]{a^{2n+1}} = a, \forall a \in \mathbb{R}. \\ & \text{— } \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \forall a, b \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{— } \sqrt[n+1]{ab} = \sqrt[n+1]{a} \cdot \sqrt[n+1]{b}, \forall a, b. \\ & \text{— } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \forall a \geq 0, b > 0. \\ & \text{— } \sqrt[n+1]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n+1]{a}}{\sqrt[n+1]{b}}, \forall a, \forall b \neq 0. \end{aligned}$$

- ② Với $a, b \in \mathbb{R}$, ta có:

- $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m, \forall a > 0, n$ nguyên dương, m nguyên.
 - $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}, \forall a \geq 0, n, m$ nguyên dương.
 - Nếu $\frac{p}{n} = \frac{q}{m}$ thì $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}, \forall a > 0, m, n$ nguyên dương, p, q nguyên.
- Đặc biệt: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^m}$.

B DẠNG TOÁN

Dạng 1. Rút gọn và tính giá trị biểu thức chứa lũy thừa

Sử dụng phối hợp linh hoạt các tính chất của lũy thừa.

Cho a, b là các số thực dương, x, y là các số thực tùy ý, ta có:

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ và $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$.
- $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x; \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$ và $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$.
- Nếu $a > 1$ thì $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì $a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$.

 **Ví dụ 1.** Tính giá trị biểu thức $\left(5^{-\frac{2}{3}}\right)^{-3} + \left((0,2)^{\frac{3}{5}}\right)^{-5}$.

Lời giải:

Ta có: $\left(5^{-\frac{2}{3}}\right)^{-3} + \left((0,2)^{\frac{3}{5}}\right)^{-5} = 5^2 + (0,2)^{-3} = 5^2 + 5^3 = 150$.

 **Ví dụ 2.** Tính giá trị biểu thức $\sqrt{\sqrt{5} \cdot \left(\sqrt[4]{\sqrt{5}} : \sqrt[5]{\sqrt{5}}\right)^{10}}$.

Lời giải:

Ta có: $\sqrt{\sqrt{5} \cdot \left(\sqrt[4]{\sqrt{5}} : \sqrt[5]{\sqrt{5}}\right)^{10}} = \sqrt{5^{\frac{1}{2}} \left(5^{\frac{1}{8}} : 5^{\frac{1}{10}}\right)^{10}} = \sqrt{5^{\frac{1}{2}} \left(5^{\frac{1}{40}}\right)^{10}} = \sqrt{5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{4}}} = \sqrt{5^{\frac{3}{4}}} = 5^{\frac{3}{8}}$.

 **Ví dụ 3.** Cho số thực dương a . Hãy rút gọn biểu thức $P = \frac{a^{\frac{4}{3}} \left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)}$.

Lời giải:

Ta có: $P = \frac{a^{\frac{4}{3}} \left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)} = \frac{a + a^2}{a + 1} = \frac{a(a+1)}{a+1} = a$.

Dạng 2. So sánh các biểu thức chứa lũy thừa

Cách 1. Đưa về cùng cơ số

Cho $a \in \mathbb{R}; m, n \in \mathbb{Z}$. Khi đó

- ① Với $a > 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m > n$;
 ② Với $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m < n$.

Cách 2. Đưa về cùng số mũ

Với $0 < a < b$ và m là số nguyên thì

- ① $a^m < b^m$ khi và chỉ khi $m > 0$;
 ② $a^m > b^m$ khi và chỉ khi $m < 0$.

Ví dụ 1. So sánh các số:

- a) $(\sqrt{2}-1)^{2019}$ và $(\sqrt{2}-1)^{2020}$.
 b) π^{1015} và $3,14^{1015}$.

Lời giải:

.....

TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Viết lại biểu thức $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x^5}$, ($x > 0$) dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ.

- A. $x^{\frac{5}{3}}$. B. $x^{\frac{5}{2}}$. C. $x^{\frac{7}{3}}$. D. $x^{\frac{2}{3}}$.

Câu 2. Cho a là số thực dương. Giá trị rút gọn của biểu thức $P = a^{\frac{4}{3}} \sqrt{a}$, bằng

- A. $a^{\frac{7}{3}}$. B. $a^{\frac{5}{6}}$. C. $a^{\frac{11}{6}}$. D. $a^{\frac{10}{3}}$.

Câu 3. Cho biểu thức $P = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $P = x^{\frac{2}{3}}$. B. $P = x^{\frac{1}{2}}$. C. $P = x^{\frac{13}{24}}$. D. $P = x^{\frac{1}{4}}$.

Câu 4. Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[3]{x}$ với $x > 0$.

- A. $P = x^{\frac{1}{8}}$. B. $P = \sqrt{x}$. C. $P = x^{\frac{2}{9}}$. D. $P = x^2$.

Câu 5. Biểu thức $P = \sqrt[3]{x^5 \sqrt{x^2} \sqrt{x}} = x^\alpha$ (với $x > 0$), giá trị của α là

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{5}{2}$. C. $\frac{9}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 6. Cho biểu thức $P = \sqrt[5]{x^3 \sqrt[3]{x^2} \sqrt{x}}$ với $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $P = x^{\frac{23}{30}}$. B. $P = x^{\frac{37}{15}}$. C. $P = x^{\frac{53}{30}}$. D. $P = x^{\frac{31}{10}}$.

Câu 7. Cho số thực $a > 1$ và các số thực α, β . Kết luận nào sau đây đúng?

- A. $\frac{1}{a^\alpha} < 0, \alpha \in \mathbb{R}$. B. $a^\alpha < 1, \alpha \in \mathbb{R}$. C. $a^\alpha > 1, \alpha \in \mathbb{R}$. D. $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$.

Câu 8. Cho $9^x + 9^{-x} = 14$; $\frac{6 + 3(3^x + 3^{-x})}{2 - 3^{x+1} - 3^{1-x}} = \frac{a}{b}$, $\left(\frac{a}{b}\right)$ là phân số tối giản). Tính $P = a \cdot b$.

- A. $P = 10$. B. $P = -10$. C. $P = -45$. D. $P = 45$.

Câu 9. Rút gọn biểu thức $K = (\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} + 1)(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)$.

- A. $K = x^2 + 1$. B. $K = x^2 - 1$. C. $K = x^2 - x + 1$. D. $K = x^2 + x + 1$.

🔥 **Câu 10.** Nếu $(7 + 4\sqrt{3})^{a-1} < 7 - 4\sqrt{3}$ thì

- A. $a < 1$. B. $a > 1$. C. $a > 0$. D. $a < 0$.

🔥 **Câu 11.** Cho $(\sqrt{5} - 2)^a > (\sqrt{5} - 2)^b$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $a > b$. B. $a < b$. C. $a \leq b$. D. $a \geq b$.

🔥 **Câu 12.** Phát biểu nào sau đây là **sai**?

- A. $e^3 > e^2$. B. $0,5^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^2$. C. $(\sqrt{3})^2 < (\sqrt{3})^3$. D. $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 < \left(\frac{\pi}{2}\right)^3$.

🔥 **Câu 13.** Điều nào sau đây đúng?

- A. $a^m < a^n \Leftrightarrow m < n$. B. Nếu $a < b$ thì $a^m < a^n \Leftrightarrow m > 0$.
C. $a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$. D. $0 < a < 1, a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$.

🔥 **Câu 14.** Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. $(5^x)^y = (5^y)^x$. B. $4^{\frac{x}{y}} = \frac{4^x}{4^y}$. C. $(2.7)^x = 2^x.7^x$. D. $3^x.3^y = 3^{x+y}$.

🔥 **Câu 15.** Cho a là số thực dương. Hãy biểu diễn biểu thức $P = a^2 \cdot \sqrt[3]{a}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ.

- A. $P = a^{\frac{4}{3}}$. B. $P = a^{\frac{7}{3}}$. C. $P = a^{\frac{5}{3}}$. D. $P = a^{\frac{2}{3}}$.

🔥 **Câu 16.** Trong các biểu thức sau, biểu thức nào không có nghĩa?

- A. $\left(-\frac{3}{4}\right)^0$. B. $(-4)^{-\frac{1}{3}}$. C. $(-3)^{-4}$. D. $1^{-\sqrt{2}}$.

🔥 **Câu 17.** Cho a, b là hai số thực dương và m, n là hai số thực tùy ý. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$. B. $a^m \cdot a^n = a^{mn}$. C. $(a^m)^n = a^{mn}$. D. $\left(\frac{1}{b}\right)^{-n} = b^n$.

🔥 **Câu 18.** Cho 4 số thực a, b, x, y với a, b là các số dương và khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$. B. $(a^x)^y = a^{x+y}$. C. $a^x \cdot a^y = a^{x \cdot y}$. D. $(a \cdot b)^x = a \cdot b^x$.

🔥 **Câu 19.** Tính giá trị của biểu thức $P = \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$.

- A. $P = 16$. B. $P = 18$. C. $P = 12$. D. $P = 24$.

🔥 **Câu 20.** Biểu thức $2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 8$ viết dưới dạng lũy thừa cơ số 2 với số mũ hữu tỉ là

- A. $2^{\frac{7}{2}}$. B. $2^{\frac{5}{2}}$. C. $2^{\frac{11}{2}}$. D. $2^{\frac{9}{2}}$.

🔥 **Câu 21.** Tìm tất cả các giá trị của a thỏa mãn $\sqrt[15]{a^7} > \sqrt[5]{2}$.

- A. $a = 0$. B. $a > 1$. C. $a < 0$. D. $0 < a < 1$.

🔥 **Câu 22.** Tìm tất cả các giá trị của a thỏa mãn $\sqrt[5]{a^3} < \sqrt[7]{a^4}$.

- A. $a > 1$. B. $a = 0$. C. $a < 0$. D. $0 < a < 1$.

🔥 **Câu 23.** Tìm tất cả các giá trị của a thỏa mãn $(a-1)^{-\frac{2}{3}} < (a-1)^{-\frac{1}{3}}$.

- A. $a > 2$. B. $a > 1$. C. $< 1a < 2$. D. $0 < a < 1$.

🔥 **Câu 24.** Cho $(a^2 - 2a + 1)^{\frac{1}{2}} < (a^2 - 2a + 1)^{-\frac{3}{2}}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a \in (0; 2) \setminus \{1\}$. B. $a \in (0; 2)$. C. $a \in (0; 2) \setminus \{2\}$. D. $a < 0$ hoặc $a > 2$.

🔥 **Câu 25.** Cho $(-2a + 1)^{\frac{5}{2}} < (-2a + 1)^{\frac{3}{2}}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a < \frac{1}{2}$. B. $0 < a < \frac{1}{2}$. C. $a < \frac{1}{2}$. D. $a < 0$ hoặc $a > \frac{1}{2}$.

🔥 **Câu 26.** Với giá trị nào của x thì $(x^2 + 4)^{x-5} > (x^2 + 4)^{5x-3}$

- A. $x > -\frac{1}{2}$. B. $x < \frac{1}{2}$. C. $x < -\frac{1}{2}$. D. $x > \frac{1}{2}$.

BÀI 2. HÀM SỐ LŨY THỪA

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ NGUYÊN

Định nghĩa 1. Cho n là một số nguyên dương. Với a là số thực tùy ý, lũy thừa bậc n của a là tích của n thừa số a .

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ thừa số}}$$

với a là cơ số, n là số mũ.

Định nghĩa 2 (Căn bậc n).

- Cho số thực b và số nguyên dương $n \geq 2$. Số a được gọi là căn bậc n của số b nếu $a^n = b$.
- Với n lẻ, $b \in \mathbb{R}$ thì phương trình có duy nhất một căn bậc n của b , ký hiệu: $\sqrt[n]{b}$.
- Với n chẵn:
 - ① $b < 0$: Không tồn tại căn bậc n của b .
 - ② $b = 0$: Có một căn bậc n của b là số 0.
 - ③ $b > 0$: Có hai căn bậc n của b là $-\sqrt[n]{b}$ và $\sqrt[n]{b}$.

Tính chất 1 (Tính chất căn bậc n).

- ① $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.
- ② $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.
- ③ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$.
- ④ $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.
- ⑤ $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} -a & \text{khi } n \text{ lẻ} \\ a & \text{khi } n \text{ chẵn} \end{cases}$.

2 LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ HỮU TỈ, VÔ TỈ

Định nghĩa 3 (Lũy thừa với số mũ hữu tỉ). Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$, trong đó $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Lũy thừa của a với số mũ r là a^r được xác định bởi

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Định nghĩa 4 (Lũy thừa với số mũ vô tỉ). Cho a là một số dương, α là một số vô tỉ. Ta thừa nhận rằng luôn có một dãy số hữu tỉ (r_n) có giới hạn bằng α và dãy số ứng (a^{r_n}) có giới hạn không phụ thuộc vào việc chọn dãy số (r_n) .

Ta gọi giới hạn của dãy số (a^{r_n}) là lũy thừa của a với số mũ α . Ký hiệu là a^α .

$$a^\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} a^{r_n}$$

với $\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} r_n$.

Tính chất 2 (Lũy thừa với số mũ thực).

- ① $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$.
- ② $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$.
- ③ $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}$.
- ④ $(a \cdot b)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$.
- ⑤ $\frac{a^\alpha}{b^\alpha} = \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^{-\alpha}$.
- ⑥ Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$.
- ⑦ Nếu $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

3 KHẢO SÁT HÀM SỐ LŨY THỪA

Định nghĩa 5 (Khảo sát hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$). — Tập xác định của hàm số lũy thừa luôn chứa khoảng $\mathcal{D} = (0; +\infty)$.

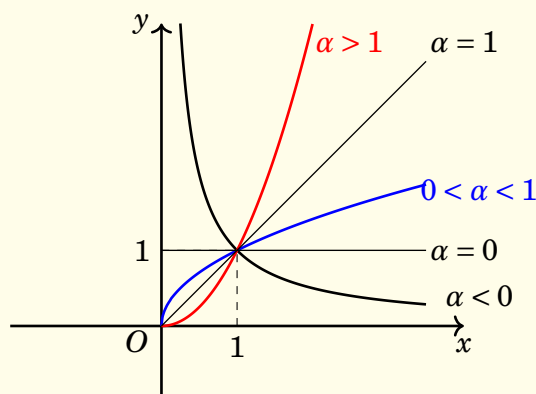
— Trong trường hợp tổng quát, ta khảo sát hàm số $y = x^\alpha$ trên khoảng này, ta có bảng tóm tắt sau:

	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
Đạo hàm	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$
Chiều biến thiên	Hàm số luôn đồng biến	Hàm số luôn nghịch biến
Tiệm cận	Không có	Tiệm cận ngang là trục Ox Tiệm cận đứng là trục Oy
Đồ thị	Đồ thị luôn đi qua điểm $(1; 1)$	Đồ thị luôn đi qua điểm $(1; 1)$

— Bảng biến thiên

$\alpha > 0$			$\alpha < 0$		
x	0	$+\infty$	x	0	$+\infty$
y'	+		y'	-	
y	0	$+\infty$	y	$+\infty$	0

— Đồ thị



B DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số lũy thừa

Điều kiện xác định của hàm số $y = x^\alpha$

- Nếu α nguyên dương thì $x \in \mathbb{R}$.
- Nếu $\alpha = 0$ hoặc α nguyên âm thì $x \neq 0$.
- Nếu α không nguyên thì $x > 0$.

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của hàm số $y = (2x - 1)^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải:

 **Ví dụ 2.** Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^2 + x - 2)^{-3}$.

Lời giải:

 **Ví dụ 3.** Tìm tập xác định của hàm số $y = (\sqrt{x^2 - 1} + 2)^{2019}$.

Lời giải:

Dạng 2. Đạo hàm của hàm số lũy thừa

Sử dụng công thức

① $y = x^\alpha$ thì $y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

② $y = u^\alpha$ thì $y' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$.

 **Ví dụ 1.** Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x^2 \sqrt{x^3}}$.

Lời giải:

 **Ví dụ 2.** Tìm đạo hàm của hàm số $y = (3 - x^2)^{-\frac{4}{3}}$.

Lời giải:

Dạng 3. Tính chất, đồ thị của hàm số lũy thừa

Khảo sát hàm số lũy thừa với số mũ cụ thể ta phải xét hàm số trên toàn tập xác định.

— Tìm tập xác định. Tập xác định của hàm lũy thừa phụ thuộc vào giá trị của α .

— Sự biến thiên.

☑ Tìm đạo hàm y' . Xét dấu y' và kết luận về chiều biến thiên của hàm số.

☑ Tìm tiệm cận (nếu có).

☑ Lập bảng biến thiên.

— Đồ thị: Đồ thị của hàm số luôn đi qua điểm $(1;1)$.

TRẮC NGHIỆM

🔥 Câu 1. Tìm x để biểu thức $(x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$ có nghĩa:

A. $\forall x \in (-\infty; 1] \cup [1; +\infty)$.

B. $\forall x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

C. $\forall x \in (-1; 1)$.

D. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

🔥 Câu 2. Tìm x để biểu thức $(x^2 + x + 1)^{-\frac{2}{3}}$ có nghĩa:

A. $\forall x \in \mathbb{R}$.

B. Không tồn tại x .

C. $\forall x > 1$.

D. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

🔥 Câu 3. Tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 3x + 2)^{\pi}$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

B. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

C. $(1; 2)$.

D. $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

🔥 Câu 4. Tìm tập xác định của hàm số $y = (4 - 3x - x^2)^{2017}$.

A. $(-4; 1)$.

B. $(-\infty; -4)$ và $(1; +\infty)$.

C. $\mathbb{R}$.

D. $[-4; 1]$.

🔥 Câu 5. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = (x - 5)^{\sqrt{3}}$.

A. $\mathcal{D} = (-\infty; 5)$.

B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{5\}$.

C. $\mathcal{D} = [5; +\infty)$.

D. $\mathcal{D} = (5; +\infty)$.

🔥 Câu 6. Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 1)^{-2}$.

A. $[-1; 1]$.

B. $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

C. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

D. $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

🔥 Câu 7. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = (3x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$.

A. $\mathcal{D} = \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$.

B. $\mathcal{D} = \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$.

C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

🔥 Câu 8. Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 3)^{-2}$.

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.

B. $\mathcal{D} = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$.

C. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}\}$.

🔥 Câu 9. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = (x^2 - x - 2)^{-3}$.

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

B. $\mathcal{D} = (0; \infty)$.

C. $\mathcal{D} = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

🔥 Câu 10. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = (x^2 - 3x + 2)^{-2016}$.

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

C. $\mathcal{D} = (1; 2)$.

D. $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

🔥 Câu 11. Tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = (x^2 - 1)^{-3}$ là

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

C. $\mathcal{D} = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

D. $\mathcal{D} = \emptyset$.

🔥 Câu 12. Tìm tập xác định của hàm số $y = (-x^2 + 7x - 10)^{\frac{1}{3}}$.

A. $\mathbb{R}$.

B. $(2; 5)$.

C. $\mathbb{R} \setminus \{2; 5\}$.

D. $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$.

🔥 **Câu 13.** Tập xác định của hàm số $y = (x^2 - x - 6)^{-4}$ là:

- A. $\mathcal{D} = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$.
C. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

🔥 **Câu 14.** Tập xác định của hàm số $y = (1 - x^2)^{\frac{2}{3}}$ là

- A. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. B. $[-1; 1]$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(-1; 1)$.

🔥 **Câu 15.** Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = (x^2 - 1)^{-12}$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. B. $\mathcal{D} = (-1, 1)$.
C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. D. $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

🔥 **Câu 16.** Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = (3x^2 - 1)^{-2}$

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$. B. $\mathcal{D} = \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$.
C. $\mathcal{D} = \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty \right)$. D. $\mathcal{D} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$.

🔥 **Câu 17.** Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = (x^2 + 2x - 3)^{\sqrt{2}}$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. B. $\mathcal{D} = (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.
C. $\mathcal{D} = (0; +\infty)$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$.

🔥 **Câu 18.** Hàm số $y = (x - 1)^{-4}$ có tập xác định là

- A. $\mathbb{R}$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

🔥 **Câu 19.** Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 2x + 2)^{\frac{1}{2}}$ là:

- A. $y' = (x^2 - 2x + 2)^{\frac{1}{2}} \cdot (2x - 2)$. B. $y' = \frac{1}{2} (x^2 - 2x + 2)^{-\frac{1}{2}}$.
C. $y' = \frac{1}{2} (2x - 2) \cdot (x^2 - 2x + 2)^{-\frac{1}{2}}$. D. $y' = (x - 1) \cdot (x^2 - 2x + 2)^{\frac{1}{2}}$.

🔥 **Câu 20.** Đạo hàm của hàm số $y = (3 - x^2)^{-\frac{4}{3}}$ là

- A. $y' = \frac{8}{3} x (3 - x^2)^{-\frac{7}{3}}$. B. $y' = -\frac{8}{3} x (3 - x^2)^{-\frac{7}{3}}$. C. $y' = \frac{4}{3} 2x (3 - x^2)^{-\frac{7}{3}}$. D. $y' = \frac{4}{3} x (3 - x^2)^{-\frac{7}{3}}$.

🔥 **Câu 21.** Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$ là:

- A. $y' = \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^2 + 1}}$. B. $y' = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$. C. $y' = 2x\sqrt[3]{x^2 + 1}$. D. $y' = 4x\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}$.

🔥 **Câu 22.** Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 3x + 2)^{\sqrt{3}}$.

- A. $y' = \frac{1}{\sqrt{3}} (2x - 3)(x^2 - 3x + 2)^{\sqrt{3}-1}$. B. $y' = \sqrt{3} (2x - 3)(x^2 - 3x + 2)^{\sqrt{3}+1}$.
C. $y' = \frac{1}{\sqrt{3}} (2x - 3)(x^2 - 3x + 2)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$. D. $y' = \sqrt{3} (2x - 3)(x^2 - 3x + 2)^{\sqrt{3}-1}$.

🔥 **Câu 23.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x^3}}$, với $x > 0$.

- A. $y' = \frac{4}{3} \sqrt[3]{x}$. B. $y' = \frac{7}{6} \sqrt[6]{x}$. C. $y' = \frac{6}{7\sqrt[7]{x}}$. D. $y' = \sqrt[9]{x}$.

🔥 **Câu 24.** Hàm số $g(x) = (2x^2 + 1)^{-\frac{2}{3}}$ có đạo hàm là

- A. $g'(x) = -\frac{8}{3} x (2x^2 + 1)^{-\frac{1}{3}}$. B. $g'(x) = -\frac{2}{3} (2x^2 + 1)^{-\frac{5}{3}}$.
C. $g'(x) = -\frac{8}{3} x (2x^2 + 1)^{-\frac{5}{3}}$. D. $g'(x) = -\frac{2}{3} (2x^2 + 1)^{-\frac{1}{3}}$.

🔥 **Câu 25.** Tìm đạo hàm số của hàm số $y = \sqrt[4]{x+2}$ với $x > -2$.

- A. $y' = \frac{1}{4\sqrt[4]{(x+2)^3}}$. B. $y' = \frac{1}{4\sqrt[4]{x+2}}$. C. $y' = \frac{1}{2\sqrt[4]{(x+2)^3}}$. D. $y' = 4\sqrt[4]{x+2}$.

🔗 **Câu 26.** Cho hàm số $y = x^{-\sqrt{2}}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.
- B. Đồ thị hàm số có một tiệm ngang và không tiệm cận đứng.
- C. Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang và một tiệm cận đứng.
- D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang và có một tiệm cận đứng.

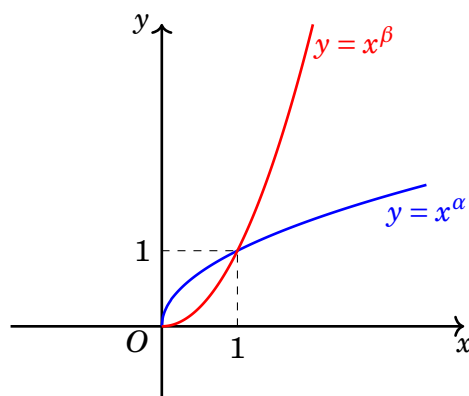
🔗 **Câu 27.** Cho hàm số $y = x^{-3}$. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.
- B. Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang và một tiệm cận đứng.
- C. Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1; 1)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

🔗 **Câu 28.** Hàm số nào sau đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

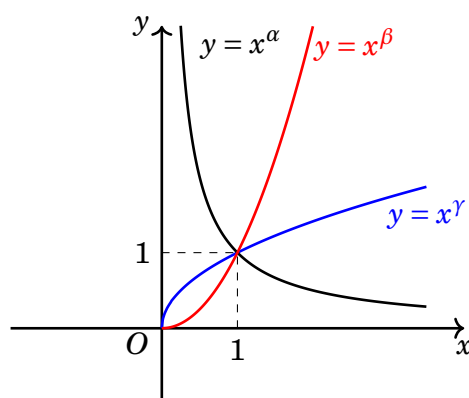
- A. $y = x^2$.
- B. $y = x^4$.
- C. $y = x^{\frac{5}{2}}$.
- D. $y = x^{-\frac{5}{2}}$.

🔗 **Câu 29.** Hình vẽ sau là đồ thị của ba hàm số $y = x^\alpha, y = x^\beta$ với $x > 0$ và α, β là các số thực cho trước. Mệnh đề nào dưới đây là đúng.



- A. $0 < \alpha < 1 < \beta$.
- B. $\beta < 0 < 1 < \alpha$.
- C. $\alpha < 0 < \beta < 1$.
- D. $0 < \alpha < \beta < 1$.

🔗 **Câu 30.** Hình vẽ sau là đồ thị của ba hàm số $y = x^\alpha, y = x^\beta, y = x^\gamma$ với $x > 0$ và α, β, γ là các số thực cho trước. mệnh đề nào dưới đây là đúng.



- A. $\gamma > \beta > \alpha$.
- B. $\beta > \alpha > \gamma$.
- C. $\alpha > \beta > \gamma$.
- D. $\beta > \gamma > \alpha$.

BÀI 3. LOGARIT

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT

Định nghĩa 1. Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$.

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b, (a, b > 0; a \neq 1).$$

Tính chất 1. Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$, ta có tính chất sau:

① $\log_a 1 = 0$.

② $\log_a a = 1$.

2 CÁC QUY TẮC TÍNH LÔGARIT

Cho ba số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có các quy tắc sau:

① $\log_a b_1 b_2 = \log_a b_1 + \log_a b_2$;

② $\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$. Đặc biệt, với $a, b > 0, a \neq 1$ thì $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$.

③ $\log_a b^n = n \log_a b$. Đặc biệt: $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$.

④ $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

3 CÔNG THỨC ĐỔI CƠ SỐ

Cho ba số dương a, b, c và $a \neq 1, c \neq 1$, ta có $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Đặc biệt: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, với $b \neq 1$; $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$, với $\alpha \neq 0$.

4 LÔGARIT THẬP PHÂN VÀ LÔGARIT TỰ NHIÊN

① Lôgarit cơ số 10 gọi là lôgarit thập phân, $\log_{10} N$, ($N > 0$) thường được gọi là $\lg N$ hay $\log N$.

② Lôgarit cơ số e gọi là lôgarit tự nhiên, $\log_e N$, ($N > 0$), được viết là $\ln N$.

B DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính giá trị của biểu thức chứa logarit

Sử dụng các định nghĩa, tính chất và qui tắc tính lôgarit để tính một biểu thức chứa lôgarit.

 **Ví dụ 1.** Tính giá trị của biểu thức

$$P = \log_2 8 + \log_3 27 - \log_5 5^3$$

Lời giải:

.....

.....

.....

 **Ví dụ 2.** Tính giá trị của biểu thức

$$P = \ln(2e) - \log 100$$

Lời giải:

.....

.....

.....

Dạng 2. Biểu diễn logarit theo các tham số

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi các biểu thức logarit phụ thuộc vào tham số a và b về dạng logarit với cơ số và đối số là tích các số nguyên tố.

Bước 2: Đặt các biểu thức logarit của các số nguyên tố là các ẩn $x, y, z, \dots$. Từ đó ta thu được phương trình hoặc hệ phương trình với các ẩn là $x, y, z, \dots$ ta tìm các ẩn này theo a, b .

Bước 3: Giải hệ tìm được tìm $x, y, z, \dots$ theo a, b . Từ đó tính được biểu thức theo các tham số a, b .

Các công thức nền tảng là $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ và $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$.

 **Ví dụ 1.** Cho a, b, c, d là các số thực dương tùy ý. Rút gọn biểu thức:

$$P = \log \frac{a}{b} + \log \frac{b}{c} + \log \frac{c}{d} - \log \frac{a}{d}$$

Lời giải:

.....

.....

.....

 **Ví dụ 2.** Cho a, b là các số thực dương và a khác 1. Rút gọn biểu thức:

$$P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$$

Lời giải:

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Cho $a = \log_2 m$ với $0 < m \neq 1$. Tính $A = \log_m 16m$ theo a .

Lời giải:

.....

.....

.....

Ví dụ 4. Cho $\log_2 5 = a; \log_3 5 = b$. Tính $\log_5 6$ tính theo a và b .

Lời giải:

.....

.....

.....

© TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Biết $\log 3 = m, \log 5 = n$, tìm $\log_9 45$ theo m, n .

- A. $1 - \frac{n}{2m}$. B. $1 + \frac{n}{m}$. C. $2 + \frac{n}{2m}$. D. $1 + \frac{n}{2m}$.

Câu 2. Biết $\log_6 a = 2$ ($0 < a \neq 1$). Tính $I = \log_a 6$.

- A. $I = 36$. B. $I = \frac{1}{2}$. C. $I = 64$. D. $I = \frac{1}{4}$.

Câu 3. Tính giá trị của biểu thức $I = a \cdot \log_2 \sqrt{8}$.

- A. $I = \frac{2}{3}$. B. $I = \frac{3a}{2}$. C. $I = \frac{2a}{3}$. D. $I = \frac{3}{2}$.

Câu 4. Tính giá trị của biểu thức $A = \log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20$.

- A. 1. B. $\frac{4}{3}$. C. 2. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 5. Cho $a > 0$ và $a \neq 1$. Giá trị của $a^{\log_{\sqrt{a}} 3}$ bằng

- A. 9. B. $\sqrt{3}$. C. 6. D. 3.

Câu 6. Giá trị của biểu thức $\log_4 25 + \log_2 1,6$ bằng

- A. 5. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 7. Cho $a = \log_3 15, b = \log_3 10$. Tính $\log_{\sqrt{3}} 50$ theo a và b .

- A. $\log_{\sqrt{3}} 50 = 2(a + b - 1)$. B. $\log_{\sqrt{3}} 50 = 4(a + b + 1)$.
C. $\log_{\sqrt{3}} 50 = a + b - 1$. D. $\log_{\sqrt{3}} 50 = 3(a + b + 1)$.

Câu 8. Cho $\log_2 6 = a; \log_2 7 = b$. Tính $\log_3 7$ theo a và b .

- A. $\log_3 7 = \frac{b}{a-1}$. B. $\log_3 7 = \frac{a}{b-1}$. C. $\log_3 7 = \frac{b}{1-a}$. D. $\log_3 7 = \frac{a}{1-b}$.

🔹 **Câu 9.** Nếu $a = \log_{30} 3$ và $b = \log_{30} 5$ thì

- A. $\log_{30} 1350 = a + 2b + 1$. B. $\log_{30} 1350 = 2a + b + 1$.
C. $\log_{30} 1350 = a + 2b + 2$. D. $\log_{30} 1350 = 2a + b + 2$.

🔹 **Câu 10.** Cho $\log_2 7 = a$, $\log_3 7 = b$ khi đó $\log_6 7$ bằng

- A. $\frac{1}{a+b}$. B. $a^2 + b^2$. C. $a + b$. D. $\frac{ab}{a+b}$.

🔹 **Câu 11.** Biết rằng $\log 7 = a$ và $\log_5 100 = b$. Hãy biểu diễn $\log_{25} 56$ theo a và b .

- A. $\frac{ab+3b+6}{4}$. B. $\frac{ab+b-6}{4}$. C. $\frac{ab+3b-6}{4}$. D. $\frac{ab-3b-6}{4}$.

🔹 **Câu 12.** Đặt $a = \log_2 3$; $b = \log_3 5$. Biểu diễn $\log_{20} 12$ theo a, b .

- A. $\log_{20} 12 = \frac{ab+1}{b-2}$. B. $\log_{20} 12 = \frac{a+b}{b+2}$. C. $\log_{20} 12 = \frac{a+2}{ab+2}$. D. $\log_{20} 12 = \frac{a+1}{b-2}$.

🔹 **Câu 13.** Đặt $a = \ln 3$, $b = \ln 5$. Tính $I = \ln \frac{3}{4} + \ln \frac{4}{5} + \ln \frac{5}{6} + \dots + \ln \frac{124}{125}$ theo a và b .

- A. $I = a + 3b$. B. $I = a - 2b$. C. $I = a + 2b$. D. $I = a - 3b$.

🔹 **Câu 14.** Biết $\log_2 x = a$, tính theo a giá trị của biểu thức $P = \log_2 4x^2$.

- A. $P = 2 + a$. B. $P = 4 + 2a$. C. $P = 4 + a$. D. $P = 2 + 2a$.

🔹 **Câu 15.** Cho $\log_a x = -1$ và $\log_a y = 4$. Tính giá trị của $P = \log_a (x^2 y^3)$.

- A. $P = -14$. B. $P = 3$. C. $P = 10$. D. $P = 65$.

🔹 **Câu 16.** Cho a, b là các số hữu tỉ thỏa mãn $\log_2 \sqrt[6]{360} = \frac{1}{2} + a \log_2 3 + b \log_2 5$. Khi đó tổng $a + b$ có giá trị là

- A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{18}$. D. $\frac{1}{2}$.

🔹 **Câu 17.** Tìm n biết $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_{2^2} x} + \frac{1}{\log_{2^3} x} + \dots + \frac{1}{\log_{2^n} x} = \frac{465}{\log_2 x}$ luôn đúng với mọi $x > 0$, $x \neq 1$.

- A. $n = 31$. B. không tồn tại n . C. $n = 30$. D. $n = -31$.

🔹 **Câu 18.** Cho số thực $0 < a \neq 1$. Với mọi số thực dương x, y . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$. B. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x + \log_a y$.
C. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a (x - y)$. D. $\log_a \frac{x}{y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}$.

🔹 **Câu 19.** Cho a là số thực dương khác 1. Mệnh đề nào sau đây đúng với mọi số dương x, y ?

- A. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x + \log_a y$. B. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a (x - y)$.
C. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$. D. $\log_a \frac{x}{y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}$.

🔹 **Câu 20.** Cho các số thực dương a, b, c và khác 1. Hãy chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

- A. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$. B. $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$.
C. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$. D. $\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b}$.

🔹 **Câu 21.** Cho a là số thực dương khác 1. Khẳng định nào dưới đây là sai?

- A. $\log_a 2 \cdot \log_2 a = 1$. B. $\log_a 1 = 0$. C. $\log_a a = 1$. D. $\log_a 2 = \frac{1}{\log_a 2}$.

🔹 **Câu 22.** Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. B. $\ln \frac{a}{b} = \ln b - \ln a$. C. $\ln(ab) = \ln a \cdot \ln b$. D. $\ln \frac{a}{b} = \frac{\ln a}{\ln b}$.

Câu 23. Cho $0 < a \neq 1$ và $x > 0, y > 0$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $\log_a(x+y) = \log_a x \log_a y$.

B. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

C. $\log_a(xy) = \log_a x \log_a y$.

D. $\log_a(x+y) = \log_a x + \log_a y$.

Câu 24. Nếu $\log_a b = p$ thì $\log_a a^2 b^4$ bằng

A. $4p+2$.

B. $4p+2a$.

C. $a^2 p^4$.

D. p^4+2a .

Câu 25. Cho $a, b, c > 0, c \neq 1$ và đặt $\log_c a = m, \log_c b = n, T = \log_{\sqrt{c}} \left(\frac{a^3}{\sqrt[4]{b^3}} \right)$. Tính T theo m, n .

A. $T = \frac{3}{2}m - \frac{3}{8}n$.

B. $T = 6n - \frac{3}{2}m$.

C. $T = \frac{3}{2}m + \frac{3}{8}n$.

D. $T = 6m - \frac{3}{2}n$.

Câu 26. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn: $a^{\log_3 7} = 27, b^{\log_7 11} = 49, c^{\log_{11} 25} = \sqrt{11}$. Giá trị của biểu thức $A = a^{(\log_3 7)^2} + b^{(\log_7 11)^2} + c^{(\log_{11} 25)^2}$ là:

A. 519.

B. 729.

C. 469.

D. 129.

Câu 27. Cho $\log_2 x = \sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_2^2 x + \log_1 x + \log_4 x$.

A. $P = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

B. $P = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $P = 2\sqrt{2}$.

D. $P = \frac{4-\sqrt{2}}{2}$.

Câu 28. Giả sử p, q là các số thực dương sao cho $\log_9 p = \log_{12} q = \log_{16}(p+q)$. Tìm giá trị của $\frac{p}{q}$.

A. $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$.

B. $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $\frac{8}{5}$.

Câu 29. Cho a, b là các số thực dương khác 1, thỏa $\log_{a^2} b + \log_{b^2} a = 1$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $a = \frac{1}{b}$.

B. $a = b$.

C. $a = \frac{1}{b^2}$.

D. $a = b^2$.

Câu 30. Cho a, b là các số thực dương và $ab \neq 1$ thỏa mãn $\log_{ab} a^2 = 3$ thì giá trị của $\log_{ab} \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ bằng:

A. $\frac{3}{8}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{8}{3}$.

D. $\frac{2}{3}$.

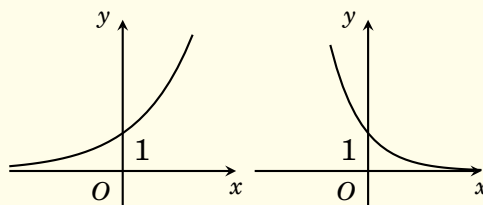
BÀI 4. HÀM SỐ MŨ - HÀM SỐ LOGARIT

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 HÀM SỐ MŨ

Hàm số $y = a^x$ ($a > 0$) có

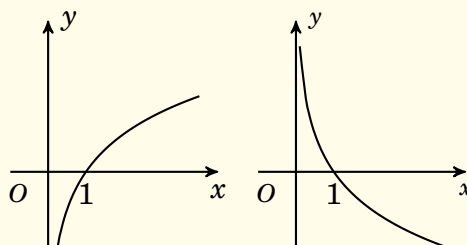
- Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- $y' = a^x \ln a, \forall x \in \mathbb{R}$
- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a > 1$, nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $0 < a < 1$.
- Đồ thị



2 HÀM SỐ LOGARIT

Hàm số $y = \log_a x$ có

- Tập xác định $\mathcal{D} = (0; +\infty)$.
- $y' = \frac{1}{x \ln a}, \forall x \in (0; +\infty)$.
- Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $a > 1$, nghịch biến trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $0 < a < 1$.
- Đồ thị



B DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tập xác định của hàm số mũ và hàm số logarit

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của hàm số $y = \log_2(2x - x^2)$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của hàm số $y = 2x + \frac{5}{\log_2 x - 3}$.

Lời giải:

Dạng 2. Các bài toán liên quan đến đạo hàm hàm số mũ và hàm số logarit*Sử dụng các công thức sau*

— $(a^x)' = a^x \ln a$ và $(a^{u(x)})' = u'(x)a^{u(x)} \ln a$.

— $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ và $(\log_a u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x) \ln a}$.

✍ Ví dụ 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{x^2+2}$.**Lời giải:****✍ Ví dụ 2.** Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + 2x)e^x$.**Lời giải:****Dạng 3. Max-min của hàm số mũ và hàm số logarit****✍ Ví dụ 1.** Cho hàm số $y = \ln x - \frac{1}{2}x^2 + 1$. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số đã cho trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.**Lời giải:**

Dạng 4. Bài toán thực tế

- 1) **Lãi đơn:** Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi đơn r / kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là $S_n = A + nAr = A(1 + nr)$.
- 2) **Lãi kép:** Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép r / kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là $S_n = A(1 + r)^n$. Từ đó ta có thể tìm các giá trị: $r = \sqrt[n]{\frac{S_n}{A}} - 1$, $A = \frac{S_n}{(1 + r)^n}$, $n = \log_{(1+r)} \left(\frac{S_n}{A} \right)$.
- 3) **Bài toán tăng trưởng dân số:** Công thức tính tăng trưởng dân số

$$X_m = X_n(1 + r)^{m-n}, (m, n \in \mathbb{Z}^+, m \geq n)$$

trong đó:

r là tỉ lệ tăng dân số từ năm n đến năm m .

X_m là dân số năm m .

X_n là dân số năm n .

Từ đó ta có công thức tính tỉ lệ tăng dân số là $r = \sqrt[m-n]{\frac{X_m}{X_n}} - 1$.

- 4) **Vay vốn trả góp:** Vay ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất r / tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, mỗi lần hoàn nợ số tiền là X đồng. Ta có công thức tính số tiền còn lại sau n tháng:

$$S_n = A(1 + r)^n - X \frac{(1 + r)^n - 1}{r}.$$

- 5) **Tiền gửi hàng tháng:** Đầu mỗi tháng khách hàng gửi vào ngân hàng số tiền A đồng với lãi kép r / tháng thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n tháng ($n \in \mathbb{N}^*$) (nhận tiền cuối tháng, khi ngân hàng đã tính lãi) là S_n là $S_n = \frac{A}{r} [(1 + r)^n - 1](1 + r)$. Từ đó ta có $n = \log_{(1+r)} \left(\frac{S_n \cdot r}{A(1 + r)} + 1 \right)$, $A = \frac{S_n \cdot r}{(1 + r)[(1 + r)^n - 1]}$.

 **Ví dụ 1.** Để dự báo dân số của một quốc gia, người ta sử dụng công thức $S = A \cdot e^{nr}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Năm 2017, dân số Việt Nam là 93.671.600 người (Tổng cục Thống kê, Niên giám thống kê 2017, Nhà xuất bản Thống kê, Tr. 79). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là 0,81%, dự báo dân số Việt Nam năm 2035 là bao nhiêu người (kết quả làm tròn đến chữ số hàng trăm)?

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

TRẮC NGHIỆM

 **Câu 1.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x + 2)$.

A. $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

B. $\mathcal{D} = (1; 2)$.

C. $\mathcal{D} = (2; +\infty)$.

D. $\mathcal{D} = (-\infty; 1)$.

🔹 **Câu 2.** Tập xác định của hàm số $y = \log_3(4 - x)$ là:

A. $\mathcal{D} = [4; +\infty)$.

B. $\mathcal{D} = (-\infty; 4]$.

C. $\mathcal{D} = (4; +\infty)$.

D. $\mathcal{D} = (-\infty; 4)$.

🔹 **Câu 3.** Tìm tất cả các giá trị thực của a để biểu thức $B = \log_3(2 - a)$ có nghĩa.

A. $a > 2$.

B. $a = 3$.

C. $a \leq 2$.

D. $a < 2$.

🔹 **Câu 4.** Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = e^{x^2 - 2x}$.

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

B. $\mathcal{D} = [0; 2]$.

C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$.

D. $\mathcal{D} = \emptyset$.

🔹 **Câu 5.** Trong các biểu thức sau, biểu thức nào **không** có nghĩa?

A. $(-4)^{-\frac{1}{3}}$.

B. $\left(-\frac{3}{4}\right)^0$.

C. $(-3)^{-4}$.

D. $1^{-\sqrt{2}}$.

🔹 **Câu 6.** Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \log_{2017}(9 - x^2) + (2x - 3)^{-2018}$.

A. $\mathcal{D} = \left(\frac{3}{2}; 3\right)$.

B. $\mathcal{D} = (-3; 3)$.

C. $\mathcal{D} = \left[-3; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 3\right]$.

D. $\mathcal{D} = \left(-3; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 3\right)$.

🔹 **Câu 7.** Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \log_3(-x^2 + 3x)$.

A. $\mathcal{D} = (0; 3)$.

B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$.

C. $\mathcal{D} = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

🔹 **Câu 8.** Tập xác định của hàm số $y = \log_2(10 - 2x)$ là gì?

A. $(-\infty; 2)$.

B. $(5; +\infty)$.

C. $(-\infty; 10)$.

D. $(-\infty; 5)$.

🔹 **Câu 9.** Tập xác định của $y = \ln(-x^2 + 5x - 6)$ là

A. $[2; 3]$.

B. $(2; 3)$.

C. $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

D. $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

🔹 **Câu 10.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \log_{\sqrt{5}} \frac{1}{6 - x}$.

A. $\mathcal{D} = (-\infty; 6)$.

B. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

C. $\mathcal{D} = (0; +\infty)$.

D. $\mathcal{D} = (6; +\infty)$.

🔹 **Câu 11.** Tập xác định của hàm số $y = \log_2(3 - 2x - x^2)$ là

A. $\mathcal{D} = (-1; 1)$.

B. $\mathcal{D} = (-1; 3)$.

C. $\mathcal{D} = (-3; 1)$.

D. $\mathcal{D} = (0; 1)$.

🔹 **Câu 12.** Tập xác định của hàm số $y = \log_2(x^2 - 2x - 3)$ là

A. $(-1; 3)$.

B. $[-1; 3]$.

C. $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

D. $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

🔹 **Câu 13.** Tìm tập xác định của hàm số: $y = 2^{\sqrt{x}} + \log(3 - x)$

A. $\mathcal{D} = [0; +\infty)$.

B. $\mathcal{D} = (0; 3)$.

C. $\mathcal{D} = (-\infty; 3)$.

D. $\mathcal{D} = [0; 3)$.

🔹 **Câu 14.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m \leq 2$.

B. $m > 2$.

C. $m \geq 0$.

D. $m < 0$.

🔹 **Câu 15.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2x + m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $0 < m < 3$.

B. $m < -1$ hoặc $m > 0$.

C. $m > 0$.

D. $m = 0$.

🔹 **Câu 16.** Hàm số $y = \ln(x^2 + mx + 1)$ xác định với mọi giá trị của x khi.

A. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$.

B. $m > 2$.

C. $-2 < m < 2$.

D. $m < 2$.

🔹 **Câu 17.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 4x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m > -4$.

B. $m < 0$.

C. $m < -4$.

D. $m < -3$.

- 🔹 **Câu 18.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên $[-2018; 2018]$ để hàm số $y = \ln(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?
- A. 2019. B. 2017. C. 2018. D. 1009.
- 🔹 **Câu 19.** Hàm số $y = 2^{x^2-x}$ có đạo hàm là
- A. $2^{x^2-x} \cdot \ln 2$. B. $(2x-1) \cdot 2^{x^2-x} \cdot \ln 2$. C. $(x^2-x) \cdot 2^{x^2-x-1}$. D. $(2x-1) \cdot 2^{x^2-x}$.
- 🔹 **Câu 20.** Hàm số $y = 3^{x^2-x}$ có đạo hàm là
- A. $(2x-1) \cdot 3^{x^2-x}$. B. $(x^2-x) \cdot 3^{x^2-x-1}$. C. $(2x-1) \cdot 3^{x^2-x} \cdot \ln 3$. D. $3^{x^2-x} \cdot \ln 3$.
- 🔹 **Câu 21.** Hàm số $f(x) = \log_2(x^2 - 2x)$ có đạo hàm
- A. $f'(x) = \frac{\ln 2}{x^2 - 2x}$. B. $f'(x) = \frac{1}{(x^2 - 2x) \ln 2}$. C. $f'(x) = \frac{(2x-2) \ln 2}{x^2 - 2x}$. D. $f'(x) = \frac{2x-2}{(x^2 - 2x) \ln 2}$.
- 🔹 **Câu 22.** Đạo hàm của hàm số $y = e^{1-2x}$ là
- A. $y' = 2e^{1-2x}$. B. $y' = -2e^{1-2x}$. C. $y' = -\frac{e^{1-2x}}{2}$. D. $y' = e^{1-2x}$.
- 🔹 **Câu 23.** Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(x^2 + x + 1)$ là
- A. $y' = \frac{(2x+1) \ln 3}{x^2 + x + 1}$. B. $y' = \frac{2x+1}{(x^2 + x + 1) \ln 3}$.
C. $y' = \frac{2x+1}{x^2 + x + 1}$. D. $y' = \frac{1}{(x^2 + x + 1) \ln 3}$.
- 🔹 **Câu 24.** Tính đạo hàm của hàm số $y = e^{x^2+x}$.
- A. $(2x+1)e^x$. B. $(2x+1)e^{x^2+x}$. C. $(2x+1)e^{2x+1}$. D. $(x^2+x)e^{2x+1}$.
- 🔹 **Câu 25.** Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{2x+3}$.
- A. $y' = 2^{2x+2} \ln 2$. B. $y' = 2^{2x+2} \ln 16$. C. $y' = 2^{2x+3} \ln 2$. D. $y' = 4^{x+2} \ln 4$.
- 🔹 **Câu 26.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_5(x^2 + 2)$.
- A. $y' = \frac{1}{(x^2+2) \ln 5}$. B. $y' = \frac{2x}{(x^2+2)}$. C. $y' = \frac{2x \ln 5}{(x^2+2)}$. D. $y' = \frac{2x}{(x^2+2) \ln 5}$.
- 🔹 **Câu 27.** Đẳng thức nào sau đây đúng với mọi số dương x ?
- A. $(\log x)' = \frac{1}{x \cdot \ln 10}$. B. $(\log x)' = \frac{\ln 10}{x}$. C. $(\log x)' = x \ln 10$. D. $(\log x)' = \frac{x}{\ln 10}$.
- 🔹 **Câu 28.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_2(x+1)$.
- A. $y' = \frac{1}{(x+1) \ln 2}$. B. $y' = \frac{1}{x+1}$. C. $y' = \frac{x}{(x+1) \ln 2}$. D. $y' = 0$.
- 🔹 **Câu 29.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_3(3x+1)$.
- A. $y' = \frac{3}{3x+1}$. B. $y' = \frac{1}{3x+1}$. C. $y' = \frac{3}{(3x+1) \ln 3}$. D. $y' = \frac{1}{(3x+1) \ln 3}$.
- 🔹 **Câu 30.** Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(4x+1)$ là
- A. $y' = \frac{1}{(4x+1) \ln 3}$. B. $y' = \frac{4}{(4x+1) \ln 3}$. C. $y' = \frac{\ln 3}{4x+1}$. D. $y' = \frac{4 \ln 3}{4x+1}$.
- 🔹 **Câu 31.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_{2017}(x^2 + 1)$.
- A. $y' = \frac{2x}{2017}$. B. $y' = \frac{2x}{(x^2+1) \ln 2017}$.
C. $y' = \frac{1}{(x^2+1) \ln 2017}$. D. $y' = \frac{1}{(x^2+1)}$.
- 🔹 **Câu 32.** Cho hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$, mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $2y' + xy'' = -\frac{1}{x^2}$. B. $y' + xy'' = \frac{1}{x^2}$. C. $y' + xy'' = -\frac{1}{x^2}$. D. $2y' + xy'' = \frac{1}{x^2}$.

Câu 33. Cho hàm số $y = \frac{\ln^2 x}{x}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **không đúng**?

- A. Đạo hàm của hàm số là $y' = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}$.
 B. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[1; e^3]$ là 0.
 C. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 D. Tập xác định của hàm số là $(0; +\infty)$.

Câu 34. Gọi M, N lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 \cdot e^{-x}$ trên đoạn $[-1; 1]$. Tính tổng $M + N$.

- A. $M + N = 3e$. B. $M + N = e$. C. $M + N = 2e - 1$. D. $M + N = 2e + 1$.

Câu 35. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + e^{2x}$ trên đoạn $[0; 1]$.

- A. $\max_{x \in [0; 1]} y = 2e$. B. $\max_{x \in [0; 1]} y = e^2 + 1$. C. $\max_{x \in [0; 1]} y = e^2$. D. $\max_{x \in [0; 1]} y = 1$.

Câu 36. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = (x - 2)^2 e^x$ trên $[1; 3]$ là

- A. e^3 . B. e . C. 0. D. e^4 .

Câu 37. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[1; e]$ là

- A. 0. B. 1. C. $-\frac{1}{e}$. D. e .

Câu 38. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1; e^3]$.

- A. 0. B. $\frac{4}{e^2}$. C. $\frac{9}{e^2}$. D. $\frac{9}{e^3}$.

Câu 39. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; e\right]$ lần lượt là

- A. 1 và $e - 1$. B. 1 và e . C. $\frac{1}{2} + \ln 2$ và $e - 1$. D. 1 và $\frac{1}{2} + \ln 2$.

Câu 40. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = e^x$ trên đoạn $[-1; 1]$ là

- A. 0. B. $\frac{1}{e}$. C. 1. D. e .

Câu 41. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên tập xác định?

- A. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$. B. $y = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} x$. C. $y = \ln x$. D. $y = \pi^x$.

Câu 42. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = \left(\frac{2}{\pi}\right)^x$. B. $y = (\sqrt{\pi})^x$. C. $y = \left(\frac{\pi}{2}\right)^x$. D. $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$.

Câu 43. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$?

- A. $y = \left(\frac{2}{e}\right)^x$. B. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. C. $y = \log_{\frac{\pi}{4}} (2x^2 + 1)$. D. $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$.

Câu 44. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = (\sqrt{3} - 1)^x$. B. $y = (\pi - e)^x$. C. $y = \pi^x$. D. $y = (e - 2)^x$.

Câu 45. Cho các số thực x, y và a thỏa mãn $x > y, a > 1$. Khi đó, điều nào sau đây là đúng?

- A. $a^x < a^y$. B. $a^x \leq a^y$. C. $a^x > a^y$. D. $a^x \geq a^y$.

Câu 46. Cho p, q là các số thực thỏa mãn $m = \left(\frac{1}{e}\right)^{2p-q}, n = e^{p-2q}$. Biết $m > n$, so sánh p và q .

- A. $p \geq q$. B. $p > q$. C. $p \leq q$. D. $p < q$.

Câu 47. Cho hàm số $y = (\sqrt{2} - 1)^x$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- C. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là trục tung.
- D. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là trục hoành.

Câu 48. Cho hàm số $y = \log_{\sqrt{3}} x$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề sai?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên tập xác định.
- B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
- C. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng là trục Oy .
- D. Hàm số đã cho có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Câu 49. Cho hàm số $y = \log_2 x$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. Đạo hàm của hàm số là $y' = \frac{1}{x \ln 2}$.
- B. Đồ thị hàm số nhận trục Oy làm tiệm cận đứng.
- C. Tập xác định của hàm số là $(-\infty; +\infty)$.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 50. Cho hàm số $y = \log_{\frac{1}{5}} x$. Khẳng định nào sau đây sai

- A. Hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- B. $y' = \frac{-1}{x \ln 5}$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng xác định.
- D. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là trục Oy .

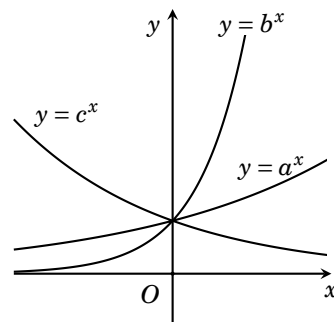
Câu 51. Cho hàm số $y = x^2 e^{x-1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số chỉ có một cực đại.
- B. Hàm số không có cực trị.
- C. Hàm số có một cực đại và một cực tiểu.
- D. Hàm số chỉ có một cực tiểu.

Câu 52.

Hình bên là đồ thị của ba hàm số $y = a^x, y = b^x, y = c^x$, trong đó a, b, c là các số thực dương khác 1, được vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ. Khẳng định nào sau đây là đúng?

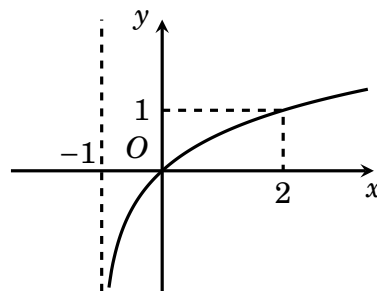
- A. $a > b > c$.
- B. $b > a > c$.
- C. $a > c > b$.
- D. $c > b > a$.



Câu 53.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào bên dưới

- A. $y = \log_3(x + 1)$.
- B. $y = \log_3 x + 1$.
- C. $y = \log_2(x + 1)$.
- D. $y = \log_2 x$.



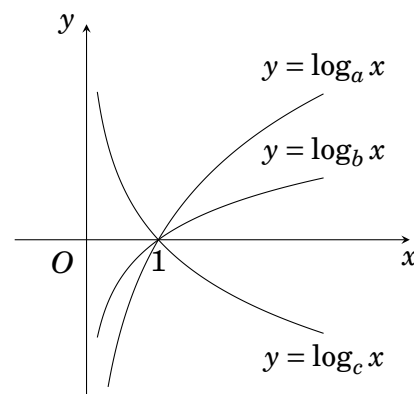
Câu 54. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

- A. $y = \frac{2x}{x-1}$.
- B. $y = \frac{\pi}{x^2 - x + 1}$.
- C. $y = e^x$.
- D. $y = \log_2(x^2 + 1)$.

Câu 55.

Cho a, b, c là ba số thực dương và khác 1. Đồ thị các hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

- A. $a < b < c$.
- B. $c < a < b$.
- C. $c < b < a$.
- D. $b < c < a$.



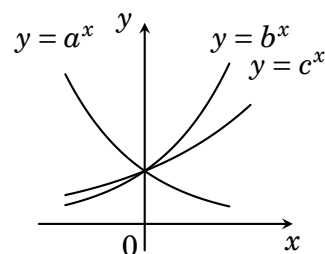
Câu 56. Cho hàm số $y = a^x$, $0 < a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

- A. Hàm số $y = a^x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và có tập giá trị là $(0; +\infty)$.
- B. Đồ thị hàm số $y = a^x$ có đường tiệm cận ngang là trục hoành.
- C. Đồ thị hàm số $y = a^x$ có đường tiệm cận đứng là trục tung.
- D. Hàm số $y = a^x$ đồng biến trên tập xác định của nó khi $a > 1$.

Câu 57.

Cho ba số $a, b, c > 0$ và khác 1. Đồ thị của các hàm $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ được cho trong hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a < b < c$.
- B. $b < c < a$.
- C. $c < a < b$.
- D. $a < c < b$.



Câu 58. Cho biết rằng sự tỉ lệ tăng dân số thế giới hàng năm là 1,32%, nếu tỉ lệ tăng dân số không thay đổi thì dân số sau N năm được tính theo công thức tăng trưởng liên tục $S = A \cdot e^{Nr}$ trong đó A là dân số tại thời điểm mốc, S là số dân sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Năm 2013 dân số thế giới vào khoảng 7095 triệu người. Biết năm 2020 dân số thế giới gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 7879 triệu người.
- B. 7680 triệu người.
- C. 7782 triệu người.
- D. 7777 triệu người.

Câu 59. Sinh nhật của An vào ngày 1 tháng 5. Bạn An muốn mua một chiếc máy ảnh giá khoảng 600.000 đồng để làm quà sinh nhật cho chính mình. Bạn ấy quyết định bỏ ống tiết kiệm 10000 đồng vào ngày 1 tháng 1 của năm đó, sau đó cứ tiếp tục những ngày sau, mỗi ngày bạn bỏ ống tiết kiệm 5.000 đồng. Biết trong năm đó, tháng 1 có 31 ngày, tháng 2 có 28 ngày, tháng 3 có 31 ngày và tháng 4 có 30 ngày. Gọi a (đồng) là số tiền An có được đến sinh nhật của mình (ngày sinh nhật An không bỏ tiền vào ống). Khi đó ta có:

- A. $a \in [610000; 615000)$.
- B. $a \in [605000; 610000)$.
- C. $a \in [600000; 605000)$.
- D. $a \in [595000; 600000)$.

Câu 60. Một người gửi vào ngân hàng 50 triệu đồng thời hạn 15 tháng, lãi suất 0,6%/tháng (lãi kép). Hỏi hết kì hạn thì tổng số tiền người đó có được là bao nhiêu?

- A. 55,664 triệu đồng.
- B. 54,694 triệu đồng.
- C. 55,022 triệu đồng.
- D. 54,368 triệu đồng.

Câu 61. Tỉ lệ tăng dân số hàng năm ở Việt Nam được duy trì ở mức 1,05%. Biết rằng, dân số của Việt Nam ngày 1 tháng 4 năm 2014 là 90.728.900 người. Với tốc độ tăng dân số như thế thì vào ngày 1 tháng 4 năm 2030 thì dân số của Việt Nam là

- A. 106.118.331 người.
- B. 198.049.810 người.
- C. 107.232.574 người.
- D. 107.323.573 người.

Câu 62. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A \cdot e^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Đầu

năm 2010 dân số tỉnh Bắc Ninh là 1.038.229 người tính đến đầu năm 2015 dân số của tỉnh là 1.153.600 người. Hỏi nếu tỉ lệ tăng dân số hằng năm giữ nguyên thì đầu năm 2020 dân số của tỉnh nằm trong khoảng nào?

- A. (1.281.600; 1.281.700). B. (1.281.700; 1.281.800).
C. (1.281.800; 1.281.900). D. (1.281.900; 1.282.000).

 **Câu 63.** Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $S(t) = S(0) \cdot 2^t$, trong đó $S(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $S(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con?

- A. 19 phút. B. 48 phút. C. 12 phút. D. 7 phút.

 **Câu 64.** Anh Nam gửi 500 triệu vào ngân hàng theo hình thức lãi kép kỳ hạn 1 năm với lãi suất không thay đổi hàng năm là 7,5 % năm. Sau 5 năm thì anh Nam nhận được số tiền cả vốn lẫn lãi là

- A. 685755000 đồng. B. 717815000 đồng. C. 667735000 đồng. D. 707645000 đồng.

BÀI 5. PHƯƠNG TRÌNH MŨ - PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 PHƯƠNG TRÌNH MŨ CƠ BẢN

Định nghĩa 1. Phương trình mũ cơ bản có dạng

$$a^x = b \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Để giải phương trình trên, chúng ta sử dụng định nghĩa lôgarit.

- ① Với $b > 0$, ta có $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$.
- ② Với $b \leq 0$, phương trình vô nghiệm.

2 PHƯƠNG TRÌNH LÔ-GA-RÍT CƠ BẢN

Định nghĩa 2. Phương trình lô-ga-rít cơ bản có dạng

$$\log_a x = b \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Phương trình trên luôn có nghiệm duy nhất $x = a^b$.

B CÁC DẠNG TOÁN

1 PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Dạng 1. Đưa về phương trình mũ cơ bản

Phương trình $a^x = b$ với $0 < a \neq 1$.
 Nếu $b > 0$, ta có $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$.
 Nếu $b \leq 0$, phương trình vô nghiệm.

 **Ví dụ 1.** Giải phương trình $2^{x^2+3x} = 1$.

Lời giải:

.....

Dạng 2. Đưa về cùng cơ số

Với $a > 0, a \neq 1$ ta có $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

 **Ví dụ 1.** Tìm tập nghiệm S của phương trình $\left(\frac{4}{7}\right)^x \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{3x-1} - \frac{16}{49} = 0$.

Lời giải:

.....

Dạng 3. Phương pháp lô-ga-rít hóa

Với $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$: $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot \log_a b$.

Đặc biệt $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$.

 **Ví dụ 1.** Phương trình $27^{\frac{x-1}{x}} \cdot 2^x = 72$ có một nghiệm viết dưới dạng $x = -\log_a b$, với a, b là các số nguyên dương. Tính tổng $a + b$.

Lời giải:

.....

Dạng 4. Đặt một ẩn phụ

$$P(a^{f(x)}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{f(x)}, t > 0 \\ P(t) = 0 \end{cases}$$

 **Ví dụ 1.** Giải phương trình $3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 1 = 0$.

Lời giải:

.....

Dạng 5. Đặt ẩn phụ với phương trình đẳng cấp

$$\alpha \cdot a^{2f(x)} + \beta \cdot (ab)^{f(x)} + \gamma \cdot b^{2f(x)} = 0$$

Phương pháp: chia hai vế phương trình cho $b^{2f(x)}$ rồi đặt $t = \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} > 0$.

Trong thực hành ta thường chia cho cơ số nhỏ nhất hoặc cơ số lớn nhất.

 **Ví dụ 1.** Giải phương trình $6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 6. Đặt ẩn phụ khi tích hai cơ số bằng 1

$$a^{f(x)} + b^{f(x)} = c \text{ với } a.b = 1$$

Phương pháp:

$$\text{Đặt } t = a^{f(x)} > 0 \text{ suy ra } b^{f(x)} = \frac{1}{t}.$$

 **Ví dụ 1.** Giải phương trình $(\sqrt{2} - 1)^x + (\sqrt{2} + 1)^x - 2\sqrt{2} = 0$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

2 PHƯƠNG TRÌNH LÔ-GA-RÍT

Dạng 7. Phương trình logarit cơ bản

Phương trình $\log_a x = b$, với $a > 0$ và $a \neq 1$, luôn có nghiệm duy nhất $x = a^b$ với mọi b .

 **Ví dụ 1.** Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x + 4) = 4$.

Lời giải:

.....

.....

.....

📁 Dạng 8. Phương pháp đưa về cùng cơ số

Cho $1 \neq a > 0$. Với điều kiện các biểu thức $f(x)$ và $g(x)$ xác định, ta thường đưa các phương trình logarit về các dạng cơ bản sau:

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^b. \end{cases}$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

🔪 **Ví dụ 1.** Tìm tất cả các giá trị thực của x thỏa mãn đẳng thức

$$\log_3 x = 3\log_3 2 + \log_9 25 - \log_{\sqrt{3}} 3$$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

📁 Dạng 9. Đặt một ẩn phụ

Giải phương trình $f[\log_a g(x)] = 0$ ($0 < a \neq 1$).

☑ **Bước 1:** Đặt $t = \log_a g(x)$ (*)

☑ **Bước 2:** Tìm điều kiện của t (nếu có).

☑ **Bước 3:** Đưa về giải phương trình $f(t) = 0$ đã biết cách giải.

☑ **Bước 4:** Thay vào (*) để tìm x .



- $\log_a f^2(x) = 2\log_a |f(x)|.$
- $\log_a f^{2k} x = 2k \log_a |f(x)|.$
- $\log_a f^{2k+1} x = (2k+1)\log_a |f(x)|.$
- $\log_a (f(x)g(x)) = \log_a |f(x)| + \log_a |g(x)|.$

🔪 **Ví dụ 1.** Phương trình $\log^2 x - \log x - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

TRẮC NGHIỆM

- Câu 1.** Giải phương trình $2^{x^2+3x} = 1$.
 A. $x = 0, x = 3$. B. $x = 1, x = -3$. C. $x = 1, x = 2$. D. $x = 0, x = -3$.
- Câu 2.** Phương trình $2^{3-4x} = \frac{1}{32}$ có nghiệm là bao nhiêu?
 A. $x = -3$. B. $x = -2$. C. $x = 2$. D. $x = 3$.
- Câu 3.** Hỏi phương trình $2^{2x^2-5x-1} = \frac{1}{8}$ có bao nhiêu nghiệm?
 A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.
- Câu 4.** Giải phương trình $2^x = 3$.
 A. $x = 2^{\sqrt{3}}$. B. $x = \log_2 3$. C. $x = \log_3 2$. D. $x = 3^{\sqrt{2}}$.
- Câu 5.** Tìm nghiệm của phương trình $2^x = (\sqrt{3})^x$.
 A. $x = 0$. B. $x = -1$. C. $x = 2$. D. $x = 1$.
- Câu 6.** Tập nghiệm S của phương trình $\left(\frac{4}{7}\right)^x \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{3x-1} - \frac{16}{49} = 0$ là
 A. $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. B. $S = \{2\}$. C. $S = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$. D. $S = \left\{-\frac{1}{2}; 2\right\}$.
- Câu 7.** Tìm số nghiệm của phương trình $2^{2x^2-7x+5} = 1$.
 A. 1. B. Vô số. C. 0. D. 2.
- Câu 8.** Phương trình $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x-1}$ có bao nhiêu nghiệm?
 A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.
- Câu 9.** Cho phương trình $5^{x^2-3} = \frac{1}{25^x}$. Khi đó, tổng các nghiệm của phương trình có giá trị là
 A. 4. B. -4. C. 2. D. -2.
- Câu 10.** Gọi a, b ($a < b$) là các nghiệm của phương trình $6^x + 6 = 2^{x+1} + 3^{x+1}$. Tính giá trị biểu thức $P = 3^a + 2^b$.
 A. $P = 17$. B. $P = 7$. C. $P = 31$. D. $P = 5$.
- Câu 11.** Phương trình $27^{\frac{x-1}{x}} \cdot 2^x = 72$ có một nghiệm viết dưới dạng $x = -\log_a b$, với a, b là các số nguyên dương. Khi đó tổng $a + b$ có giá trị là
 A. 4. B. 5. C. 6. D. 8.
- Câu 12.** Biết phương trình $3^x \cdot 5^{\frac{2x-1}{x}} = 15$ có hai nghiệm thực phân biệt $x_1; x_2$. Tính tích $x_1 \cdot x_2$.
 A. $x_1 \cdot x_2 = \log_3 5$. B. $x_1 \cdot x_2 = -\log_3 5$. C. $x_1 \cdot x_2 = 1 + \log_3 5$. D. $x_1 \cdot x_2 = 1 - \log_3 5$.
- Câu 13.** Xác định số nghiệm của phương trình $3^{(x-1)(x^2+2)} = 2^{x-1}$.
 A. 1. B. 3. C. Vô nghiệm. D. 2.
- Câu 14.** Tính tích các nghiệm của phương trình $2^{x^2-4} = 5^{x-2}$.
 A. $2 + 2\log_2 5$. B. 2. C. $4 + \log_2 5$. D. $-4 + \log_2 25$.
- Câu 15.** Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2^x = 3^{x^2}$. Tính $S = x_1 + x_2$.
 A. $S = \log_3 2$. B. $S = 5$. C. $S = 0$. D. $S = \log_2 3$.
- Câu 16.** Cho phương trình $9^x - 6 \cdot 3^{x-1} - 3 = 0$. Khi đặt $t = 3^x$, ta được phương trình nào sau đây?
 A. $2t^2 - 3 = 0$. B. $t^2 - 2t - 3 = 0$. C. $t^2 - t - 3 = 0$. D. $t^2 - 6t - 3 = 0$.

Câu 17. Phương trình $3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 trong đó $x_1 < x_2$, chọn phát biểu đúng.

- A. $x_1 x_2 = -1$. B. $2x_1 + x_2 = 0$. C. $x_1 + 2x_2 = -1$. D. $x_1 + x_2 = -2$.

Câu 18. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$. Biết $x_1 < x_2$, tìm x_1 .

- A. $x_1 = 0$. B. $x_1 = 1$. C. $x_1 = -1$. D. $x_1 = 2$.

Câu 19. Tích tất cả các nghiệm của phương trình $5^{x-1} + 5^{3-x} = 26$ là

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 8.

Câu 20. Phương trình $2^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = 4 \cdot 3^{\sin^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $[-2017; 2017]$.

- A. 1284. B. 4034. C. 1285. D. 4035.

Câu 21. Số nghiệm của phương trình $6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$ là

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 22. Phương trình $9^x + 6^x = 2 \cdot 4^x$ có nghiệm

- A. $x = 2$. B. $x = 0$. C. $x = 3$. D. $x = 1$.

Câu 23. Tính tổng T tất cả các nghiệm của phương trình $4 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 9 \cdot 4^x = 0$.

- A. $T = 2$. B. $T = 3$. C. $T = \frac{13}{4}$. D. $T = \frac{1}{4}$.

Câu 24. Tìm tích tất cả các nghiệm của phương trình $4 \cdot 3^{\log(100x^2)} + 9 \cdot 4^{\log(10x)} = 13 \cdot 6^{1+\log x}$.

- A. 1. B. 0,1. C. 100. D. 10.

Câu 25. Cho phương trình $(3 + 2\sqrt{2})^x - 2(\sqrt{2} - 1)^x = 3$. Đặt $t = (\sqrt{2} - 1)^x$ ta thu được phương trình nào sau đây?

- A. $t^3 - 3t - 2 = 0$. B. $2t^3 + 3t^2 - 1 = 0$. C. $2t^3 + 3t - 1 = 0$. D. $2t^2 + 3t - 1 = 0$.

Câu 26. Từ phương trình

$$(3 + 2\sqrt{2})^x - 2(\sqrt{2} - 1)^x = 3$$

đặt $t = (\sqrt{2} - 1)^x$ ta thu được phương trình nào sau đây?

- A. $t^3 - 3t - 2 = 0$. B. $2t^3 + 3t^2 - 1 = 0$. C. $2t^3 + 3t - 1 = 0$. D. $2t^2 + 3t - 1 = 0$.

Câu 27. Phương trình $(\sqrt{2} + 1)^{x-1} + (\sqrt{2} - 1)^{x-1} = 2$ có bao nhiêu nghiệm thực.

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 28. Bất phương trình $(2 + \sqrt{3})^x + (7 + 4\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^x \leq 4(2 + \sqrt{3})$ có tập nghiệm là đoạn $[a; b]$. Khi đó $b - a$ bằng

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 29. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $3^x = m$ có nghiệm thực.

- A. $m \geq 1$. B. $m \geq 0$. C. $m > 0$. D. $m \neq 0$.

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = m - 1$ có nghiệm thực.

- A. $m > 1$. B. $m \geq 1$. C. $m < 1$. D. $m \neq 1$.

Câu 31. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x - m2^{x+1} + (2m^2 - 5) = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

- A. 1. B. 5. C. 2. D. 4.

Câu 32. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình $4^x - m2^{x+1} + 3m - 3 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

- A. $(-\infty; 2)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(1; 2)$. D. $(0; 2)$.

- Câu 33.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $9^x - 2 \cdot 6^x + (m-2) \cdot 4^x = 0$ có nghiệm dương?
- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.
- Câu 34.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tập nghiệm của phương trình $(7+3\sqrt{5})^x + m(7-3\sqrt{5})^x = 2^{x+3}$ có đúng hai phần tử?
- A. 15. B. 16. C. 17. D. 14.
- Câu 35.** Cơ số x bằng bao nhiêu để $\log_x \sqrt[10]{3} = -0,1$.
- A. $x = -3$. B. $x = -\frac{1}{3}$. C. $x = \frac{1}{3}$. D. $x = 3$.
- Câu 36.** Cho hàm số $f(x) = \log_3(x^2 - 2x)$. Tập nghiệm S của phương trình $f'(x) = 0$ là
- A. $S = \emptyset$. B. $S = \{1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}\}$.
C. $S = \{0; 2\}$. D. $S = \{1\}$.
- Câu 37.** Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_4(x-2) = 2$.
- A. $S = \{16\}$. B. $S = \{18\}$. C. $S = \{10\}$. D. $S = \{14\}$.
- Câu 38.** Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(x-1) = 3$.
- A. $x = 9$. B. $x = 7$. C. $x = 8$. D. $x = 10$.
- Câu 39.** Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x+4) = 4$.
- A. $S = \{-4; 12\}$. B. $S = \{4\}$. C. $S = \{4; 8\}$. D. $S = \{12\}$.
- Câu 40.** Nghiệm của phương trình $\log_2 x = 3$ là
- A. $x = 9$. B. $x = 6$. C. $x = 8$. D. $x = 5$.
- Câu 41.** Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2(x-5) = 4$.
- A. $x = 21$. B. $x = 3$. C. $x = 11$. D. $x = 13$.
- Câu 42.** Tìm nghiệm của phương trình $\log_3(3x-2) = 3$.
- A. $x = \frac{29}{3}$. B. $x = \frac{11}{3}$. C. $x = \frac{25}{3}$. D. $x = 87$.
- Câu 43.** Phương trình $\log_2 x + \log_2(x-1) = 1$ có tập nghiệm là
- A. $\{-1; 3\}$. B. $\{1; 3\}$. C. $\{2\}$. D. $\{1\}$.
- Câu 44.** Tìm tất cả các giá trị thực của x thỏa mãn đẳng thức $\log_3 x = 3\log_3 2 + \log_9 25 - \log_{\sqrt{3}} 3$.
- A. $\frac{20}{3}$. B. $\frac{40}{9}$. C. $\frac{25}{9}$. D. $\frac{28}{3}$.
- Câu 45.** Số nghiệm của phương trình $\log_2 x \cdot \log_3(2x-1) = 2\log_2 x$ là
- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.
- Câu 46.** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $\log_1(x^2 - 5x + 7) = 0$ bằng
- A. 6. B. 5. C. 13. D. 7.
- Câu 47.** Tổng các nghiệm của phương trình $\log_4 x^2 - \log_2 3 = 1$ là
- A. 6. B. 5. C. 4. D. 0.
- Câu 48.** Số nghiệm của phương trình $(x+3)\log_2(5-x^2) = 0$.
- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.
- Câu 49.** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $(2x^2 - 5x + 2)[\log_x(7x-6) - 2] = 0$ bằng
- A. $\frac{17}{2}$. B. 9. C. 8. D. $\frac{19}{2}$.

Câu 50. Gọi T là tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3(\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x) = \log_3\left(\frac{2}{3}\right)$. Khi đó $T - 9$ bằng

- A. $\frac{82}{9}$. B. $\frac{80}{9}$. C. 9. D. $\frac{1}{9}$.

Câu 51. Cho phương trình $2\log_3(x^3 + 1) = \log_3(2x - 1)^2 + \log_{\sqrt{3}}(x + 1)$. Tổng các nghiệm của phương trình là

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 1.

Câu 52. Phương trình $\log^2 x - \log x - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 53. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2 x + 3\log_x 2 = 4$.

- A. $S = \{2; 8\}$. B. $S = \{3; 4\}$. C. $S = \{4; 16\}$. D. $S = \emptyset$.

Câu 54. Tìm tập nghiệm của phương trình $\log_3 x + \frac{1}{\log_9 x} = 3$.

- A. $\{1; 2\}$. B. $\left\{\frac{1}{3}; 3\right\}$. C. $\left\{\frac{1}{3}; 9\right\}$. D. $\{3; 9\}$.

Câu 55. Tính tổng các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$.

- A. 4. B. 2. C. 8. D. 6.

Câu 56. Tích các nghiệm của phương trình $\log_x(125x)\log_{25}^2 x = 1$ bằng

- A. $\frac{7}{25}$. B. $\frac{630}{625}$. C. $\frac{1}{125}$. D. 630.

Câu 57. Cho a, b là các số dương thỏa $\log_4 a = \log_{25} b = \log \frac{4b - a}{2}$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ là

- A. $6 - 2\sqrt{5}$. B. $\frac{3 + \sqrt{5}}{8}$. C. $6 + 2\sqrt{5}$. D. $\frac{3 - \sqrt{5}}{8}$.

Câu 58. Tìm nghiệm của phương trình $\log_2 2018x = 3$.

- A. $x = 3 + \log_2 2018$. B. $x = \frac{4}{1009}$. C. $x = 3 - \log_2 2018$. D. $x = \frac{3^2}{2018}$.

Câu 59. Số nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - x + 3) = 2$ là

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 60. Tính tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_4(3 \cdot 2^x - 1) = x - 1$.

- A. -6. B. 5. C. 12. D. 2.

Câu 61. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2(3 \cdot 2^x - 1) = 2x + 1$ bằng

- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. -1. D. 0.

Câu 62. Gọi P là tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2(3 \cdot 2^x - 1) = 2x + 1$. Tính P .

- A. $P = 0$. B. $P = -1$. C. $P = \frac{3}{2}$. D. $P = \frac{1}{2}$.

Câu 63. Tìm tập nghiệm của phương trình $\log_2 x = -x + 6$.

- A. $\{4\}$. B. $\{2; 5\}$. C. $\{3\}$. D. $\emptyset$.

Câu 64. Tính tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2\left(\frac{1}{2x} + x\right) + 2^{\frac{1}{2x} + x} = 5$.

- A. 1. B. 0. C. 2. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 65. Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x - 1) = \log_2(mx - 8)$ có hai nghiệm thực phân biệt là:

- A. 3. B. 4. C. 5. D. Vô số.

🔥 Câu 66. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong đoạn $[-2017; 2017]$ để phương trình $\log_3 m + \log_3 x = 2\log_3(x+1)$ luôn có hai nghiệm phân biệt?

- A. 4015. B. 2010. C. 2018. D. 2013.

🔥 Câu 67. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_2^2 x - 2m \log_2 x + 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 < 64$.

- A. $m \in (-\infty; 6)$. B. $m \in (-\infty; 3)$. C. $m \in (-\infty; 6) \setminus \{1\}$. D. $m \in (-\infty; 3) \setminus \{1\}$.

🔥 Câu 68. Để phương trình $\log_2^2 x - 2m \log_2 x + 3m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt thì giá trị của m là

- A. $\begin{cases} m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$. B. $m < 1$. C. $m > 2$. D. $1 < m < 2$.

🔥 Câu 69. Tất cả các giá trị của m để phương trình $\log_3^2 x - (m+2)\log_3 x + 3m - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 x_2 = 27$.

- A. $m = \frac{28}{3}$. B. $m = \frac{4}{3}$. C. $m = 25$. D. $m = 1$.

🔥 Câu 70. Tìm tất cả giá trị của m để phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1; 3^{\sqrt{3}}]$.

- A. $1 \leq m \leq 16$. B. $4 \leq m \leq 8$. C. $3 \leq m \leq 8$. D. $0 \leq m \leq 2$.

BÀI 6. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ - BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ CƠ BẢN

Bất phương trình mũ cơ bản **có dạng** $a^x > b$ (hoặc $a^x \geq b$, $a^x < b$, $a^x \leq b$) với $a > 0$, $a \neq 1$.

① Xét bất phương trình dạng $a^x > b$ (dạng $a^x \geq b$ giải tương tự)

— Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.

— Nếu $b > 0$, khi đó

Với $a > 1$, ta có $a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b$.

Với $0 < a < 1$, ta có $a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b$.

② Xét bất phương trình dạng $a^x \leq b$ (dạng $a^x < b$ giải tương tự)

— Nếu $b \leq 0$, bất phương trình vô nghiệm.

— Nếu $b > 0$, khi đó

Với $a > 1$, ta có $a^x \leq b \Leftrightarrow x \leq \log_a b$.

Với $0 < a < 1$, ta có $a^x \leq b \Leftrightarrow x \geq \log_a b$.

2 BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

① Bất phương trình logarit cơ bản Bất phương trình logarit cơ bản **có dạng** $\log_a x > b$ (hoặc $\log_a x \geq b$, $\log_a x < b$, $\log_a x \leq b$) với $a > 0$, $a \neq 1$.

Xét bất phương trình $\log_a x > b$.

(1)

— Trường hợp $a > 1$: $(1) \Leftrightarrow x > a^b$.

— Trường hợp $0 < a < 1$: $(1) \Leftrightarrow 0 < x < a^b$.

② Một số bất phương trình logarit đơn giản

Một số cách giải bất phương trình logarit đơn giản.

— Đưa về bất phương trình logarit cơ bản.

— Đặt ẩn phụ.

— Mũ hóa.

— Sử dụng tính đơn điệu của hàm số, đánh giá, bất đẳng thức.

B CÁC DẠNG TOÁN

1 BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ.

☐ Dạng 1. Bất phương trình mũ cơ bản

- ① Xét bất phương trình dạng $a^x > b$ (dạng $a^x \geq b$ giải tương tự)
- Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.
 - Nếu $b > 0$, khi đó
Với $a > 1$, ta có $a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b$.
Với $0 < a < 1$, ta có $a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b$.
- ② Xét bất phương trình dạng $a^x \leq b$ (dạng $a^x < b$ giải tương tự)
- Nếu $b \leq 0$, bất phương trình vô nghiệm.
 - Nếu $b > 0$, khi đó
Với $a > 1$, ta có $a^x \leq b \Leftrightarrow x \leq \log_a b$.
Với $0 < a < 1$, ta có $a^x \leq b \Leftrightarrow x \geq \log_a b$.

🔪 **Ví dụ 1.** Tìm nghiệm của bất phương trình $3^x < 9$.

Lời giải:

.....

☐ Dạng 2. Phương pháp đưa về cùng cơ số

- ① Với $a > 1$, $a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$.
② Với $0 < a < 1$, $a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$.

🔪 **Ví dụ 1.** Tìm nghiệm của bất phương trình $3^{x-2} \leq 243$

Lời giải:

.....

☐ Dạng 3. Bất phương trình mũ bằng phương pháp đặt ẩn phụ

Đặt $t = a^x (t > 0)$.

🔪 **Ví dụ 1.** Tìm tập nghiệm của bất phương trình $9^x - 3^x - 6 > 0$.

Lời giải:

.....

.....

.....

☐ Dạng 4. Phân tích thành nhân tử

- Biến đổi một vế của bất phương trình về dạng tích, vế còn lại bằng 0 hoặc hằng số.
- Dùng kiến thức đã học để giải quyết bài toán.

 **Ví dụ 1.** Cho hàm số $y = x \cdot e^{-x}$. Tìm nghiệm của bất phương trình $y' > 0$.

Lời giải:

.....

.....

.....

2 BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

Dạng 5. Giải bất phương trình logarit dạng cơ bản

$$\begin{aligned} \text{— } \log_a u < b &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < u < a^b & \text{nếu } a > 1 \\ u > a^b & \text{nếu } 0 < a < 1. \end{cases} \\ \text{— } \log_a u > b &\Leftrightarrow \begin{cases} u > a^b & \text{nếu } a > 1 \\ 0 < u < a^b & \text{nếu } 0 < a < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

 **Ví dụ 1.** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_3(2x - 3) > 1$.

Lời giải:

.....

.....

.....

Dạng 6. Giải bất phương trình logarit bằng cách đưa về cùng cơ số

Dùng biến đổi logarit để đưa về cùng cơ số.

$$\log_a u < \log_a v \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < u < v & \text{nếu } a > 1 \\ u > v > 0 & \text{nếu } 0 < a < 1. \end{cases}$$

 **Ví dụ 1.** Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2x - 8) \geq -4$.

Lời giải:

.....

.....

.....

Dạng 7. Phương pháp đặt ẩn phụ trong bất phương trình logarit

Tìm một $\log_a f(x)$ chung, đặt làm ẩn phụ t để đưa bất phương trình về bất phương trình theo ẩn t , giải bất phương trình này tìm t sau đó tìm x .

Chú ý: Nếu đặt $t = \log_a x$ thì $\log_{\frac{1}{a}} x = -t$, $\log_{a^2} x = \frac{1}{2}t$, $\log_a^2 x = (\log_a x)^2 = t^2$, $\log_x a = \frac{1}{t}$.

Ví dụ 1. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 > 0$.

Lời giải:

.....

TRẮC NGHIỆM

- Câu 1.** Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} > \left(\frac{3}{4}\right)^{-x+3}$.
 A. $(2; +\infty)$. B. $(-\infty; 2)$. C. $[2; +\infty)$. D. $(-\infty; 2]$.
- Câu 2.** Giải bất phương trình $(\sqrt{10}-3)^x > \sqrt{10}+3$ ta được kết quả nào sau đây?
 A. $x < 1$. B. $x > 1$. C. $x < -1$. D. $x > -1$.
- Câu 3.** Bất phương trình $3^x < 9$ có nghiệm là
 A. $x < 2$. B. $x < 3$. C. $0 < x < 2$. D. $0 < x < 3$.
- Câu 4.** Tập nghiệm của bất phương trình $3^x > 9$ là
 A. $(2; +\infty)$. B. $(0; 2)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(-2; +\infty)$.
- Câu 5.** Nghiệm của bất phương trình $3^{x-2} \leq 243$ là
 A. $x < 7$. B. $x \leq 7$. C. $x \geq 7$. D. $2 \leq x \leq 7$.
- Câu 6.** Giải bất phương trình $\log_3(x-1) > 2$.
 A. $0 < x < 10$. B. $x \geq 10$. C. $x < 10$. D. $x > 10$.
- Câu 7.** Tập nghiệm của phương trình $2^{x+2} < \left(\frac{1}{4}\right)^{-x}$ là
 A. $S = (-\infty; 2)$. B. $S = (1; +\infty)$. C. $S = (2; +\infty)$. D. $S = (-\infty; 1)$.
- Câu 8.** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x+2} < \left(\frac{1}{4}\right)^x$ là
 A. $(-\infty; 0)$. B. $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$. C. $(0; +\infty) \setminus \{1\}$. D. $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$.
- Câu 9.** Tập nghiệm của bất phương trình $8 \cdot 4^{x+1} - 18 \cdot 2^x + 1 < 0$ là
 A. $(2; 4)$. B. $(1; 4)$. C. $(-4; -1)$. D. $\left(\frac{1}{16}; \frac{1}{2}\right)$.
- Câu 10.** Bất phương trình $9^x - 3^x - 6 > 0$ có tập nghiệm là
 A. $(-\infty; -1)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-1; 1)$. D. $(-\infty; 1)$.

🔹 **Câu 11.** Tập nghiệm của bất phương trình $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 \leq 0$ có dạng $S = [a; b]$. Tính giá trị của biểu thức $b - a$.

A. $\frac{3}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{5}{2}$.

D. 2.

🔹 **Câu 12.** Tập nghiệm của bất phương trình $2^x + 2^{x+1} \leq 3^x + 3^{x-1}$

A. $x \in [2; +\infty)$.

B. $x \in (2; +\infty)$.

C. $x \in (-\infty; 2)$.

D. $(2; +\infty)$.

🔹 **Câu 13.** Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{9}\right)^x > 3^{\frac{2x}{x+1}}$ là:

A. $x < -2$.

B. $-1 < x < 0$.

C. $-1 \leq x < 0$.

D. $\begin{cases} x < -2 \\ -1 < x < 0 \end{cases}$.

🔹 **Câu 14.** Tập nghiệm của bất phương trình $16^x - 4^x - 6 \leq 0$ là

A. $x \leq \log_4 3$.

B. $x > \log_4 3$.

C. $x \geq 1$.

D. $x \geq 3$.

🔹 **Câu 15.** Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{3^x}{3^x - 2} < 3$ là:

A. $x > \log_3 2$.

B. $x < 1$.

C. $\log_3 2 < x < 1$.

D. $\begin{cases} x > 1 \\ x < \log_3 2 \end{cases}$.

🔹 **Câu 16.** Tập nghiệm của bất phương trình $11^{\sqrt{x+6}} \geq 11^x$ là:

A. $x < -6$.

B. $-6 \leq x \leq 3$.

C. $x > 3$.

D. $\emptyset$.

🔹 **Câu 17.** Cho bất phương trình $\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1}$, tập nghiệm của bất phương trình có dạng $S = (a; b)$. Giá trị của biểu thức $A = b - a$ nhận giá trị nào sau đây?

A. -1.

B. 2.

C. 1.

D. -2.

🔹 **Câu 18.** Tập nghiệm của bất phương trình $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 > 0$ là:

A. $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

B. $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

C. $x \in (0; 1)$.

D. $x \in (1; 2)$.

🔹 **Câu 19.** Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^x \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^3$ là:

A. $\left[0; \frac{1}{3}\right]$.

B. $\left(0; \frac{1}{3}\right)$.

C. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$.

D. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup (0; +\infty)$.

🔹 **Câu 20.** Cho $f(x) = x^2 e^{-x}$, bất phương trình $f'(x) \geq 0$ có tập nghiệm là

A. $(2; +\infty)$.

B. $[0; 2]$.

C. $(-2; 4]$.

D. $(4; +\infty)$.

🔹 **Câu 21.** Cho bất phương trình $2^{x^2+x} + 2x \leq 2^{3-x} - x^2 + 3$ có tập nghiệm là $[a; b]$, $a < b$. Giá trị của $T = 2a + b$ là

A. $T = 1$.

B. $T = -5$.

C. $T = 3$.

D. $T = -2$.

🔹 **Câu 22.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $4^{x+1} - m(2^x + 1) > 0$ có nghiệm với $\forall x \in \mathbb{R}$.

A. $m \in (-\infty; 0]$.

B. $m \in (-\infty; 0)$.

C. $m \in (-\infty; 1)$.

D. $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

🔹 **Câu 23.** Tất cả các giá trị của m để bất phương trình $(3m + 1) \cdot 18^x + (2 - m) \cdot 6^x + 2^x < 0$ có nghiệm đúng $\forall x > 0$ là

A. $(-\infty; 2)$.

B. $\left(-2; -\frac{1}{3}\right)$.

C. $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$.

D. $(-\infty; -2]$.

🔹 **Câu 24.** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_3(2x - 3) > 1$.

A. $S = (1; +\infty)$.

B. $S = \left(\frac{1}{6}; +\infty\right)$.

C. $S = (2; +\infty)$.

D. $S = (3; +\infty)$.

- Câu 25.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log x \geq 1$ là
 A. $(10; +\infty)$. B. $(0; +\infty)$. C. $[10; +\infty)$. D. $(-\infty; 10)$.
- Câu 26.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(13 - x^2) \geq 2$ là
 A. $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. B. $(-\infty; 2]$.
 C. $(0; 2]$. D. $[-2; 2]$.
- Câu 27.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(36 - x^2) \geq 3$ là
 A. $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$. B. $(-\infty; 3]$. C. $[-3; 3]$. D. $(0; 3]$.
- Câu 28.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(18 - x^2) \geq 2$ là
 A. $(-\infty; 3]$. B. $(0; 3]$. C. $[-3; 3]$. D. $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.
- Câu 29.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) < 1$ là
 A. $(0; 1)$. B. $\left(\frac{1}{8}; 1\right)$. C. $(1; 8)$. D. $\left(\frac{1}{8}; 3\right)$.
- Câu 30.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x^2 - 2x + 3) > 1$ là
 A. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. B. $\mathbb{R}$. C. $\{1\}$. D. $\emptyset$.
- Câu 31.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 1) > -1$ là
 A. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. B. $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. C. $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. D. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.
- Câu 32.** Giải bất phương trình $\log_{\frac{3}{4}}(2x - 1) > 2$ ta được
 A. $\frac{1}{2} < x < \frac{25}{32}$. B. $x > \frac{25}{32}$. C. $x < \frac{1}{2}$ hoặc $x > \frac{25}{32}$. D. $x > \frac{1}{2}$.
- Câu 33.** Tập nghiệm của bất phương trình $3 < \log_2 x < 4$ là
 A. $(8; 16)$. B. $(0; 16)$. C. $(8; +\infty)$. D. $\mathbb{R}$.
- Câu 34.** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{0,5}(2x - 1) > -2$
 A. $S = \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$. B. $S = \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$. C. $S = \left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$. D. $S = \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.
- Câu 35.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} x^2 \geq -1$ là
 A. $[\sqrt{2}; +\infty)$. B. $[-\sqrt{2}; 0) \cup (0; \sqrt{2}]$. C. $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. D. $(0; \sqrt{2}]$.
- Câu 36.** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{x-1} > 2$.
 A. $S = (1; 1 + \sqrt{2})$. B. $S = (1; 9)$. C. $S = (1 + \sqrt{2}; +\infty)$. D. $S = (9; +\infty)$.
- Câu 37.** Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x + 2) \geq -1$.
 A. $(-\infty; 1)$. B. $[0; 1) \cup (2; 3]$. C. $[0; 2) \cup (3; 7]$. D. $[0; 2)$.
- Câu 38.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) \geq 0$ là
 A. $(1; 2)$. B. $(1; 2]$. C. $(-\infty; 2]$. D. $[2; +\infty)$.
- Câu 39.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3 \frac{4x+6}{x} \leq 0$ là
 A. $S = \left[-2; -\frac{3}{2}\right)$. B. $S = [-2; 0)$. C. $S = (-\infty; 2]$. D. $S = \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{3}{2}; 0\right]$.
- Câu 40.** Bất phương trình $\log_{\frac{2}{3}}(2x^2 - x + 1) < 0$ có tập nghiệm là
 A. $S = \left(0; \frac{3}{2}\right)$. B. $S = \left(-1; \frac{3}{2}\right)$.
 C. $S = (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $S = (-\infty; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

🔥 **Câu 41.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(2x-1)) > 0$ là

- A. $S = \left(1; \frac{3}{2}\right)$. B. $S = \left(0; \frac{3}{2}\right)$. C. $S = (0; 1)$. D. $S = \left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

🔥 **Câu 42.** Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

- A. $\log x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. B. $\log_5 x \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$.
C. $\log_{\frac{1}{5}} a > \log_{\frac{1}{5}} b \Leftrightarrow a > b > 0$. D. $\log_{\frac{1}{5}} a = \log_{\frac{1}{5}} b \Leftrightarrow a = b > 0$.

🔥 **Câu 43.** Tìm tất cả các giá trị thực của x để đồ thị hàm số $y = \log_{0,5} x$ nằm phía trên đường thẳng $y = 2$.

- A. $x \geq \frac{1}{4}$. B. $0 < x \leq \frac{1}{4}$. C. $0 < x < \frac{1}{4}$. D. $x > \frac{1}{4}$.

🔥 **Câu 44.** Bất phương trình $\log_{\frac{1}{5}} f(x) > \log_{\frac{1}{5}} g(x)$ tương đương với điều nào sau đây?

- A. $f(x) < g(x)$. B. $g(x) > f(x) \geq 0$. C. $g(x) > f(x) > 0$. D. $f(x) > g(x)$.

🔥 **Câu 45.** Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(2x-1) > 1$.

- A. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. B. $(-\infty; 2)$. C. $(2; +\infty)$. D. $[1; +\infty)$.

🔥 **Câu 46.** Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2x - 8) \geq -4$.

- A. $(-4; 2)$. B. $[-6; 4)$. C. $[-6; -4] \cup [2; 4]$. D. $[-6; -4) \cup (2; 4]$.

🔥 **Câu 47.** Tìm tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{4}}(x^2 - 3x) < \log_{\frac{\pi}{4}}(x + 4)$ là

- A. $2 - 2\sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$. B. $2 - 2\sqrt{2} < x < 0$.
C. $\begin{cases} -4 < x < 2 - 2\sqrt{2} \\ x > 2 + 2\sqrt{2} \end{cases}$. D. $\begin{cases} x < 2 - 2\sqrt{2} \\ x > 2 + 2\sqrt{2} \end{cases}$.

🔥 **Câu 48.** Bất phương trình $\log_4(x+7) > \log_2(x+1)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

🔥 **Câu 49.** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_3(11-2x) \geq 0$.

- A. $S = (1; 4]$. B. $S = (-\infty; 4]$. C. $S = \left(3; \frac{11}{2}\right)$. D. $S = (1; 4)$.

🔥 **Câu 50.** Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 > 0$.

- A. $(1; 8)$. B. $(-\infty; 1) \cup (8; +\infty)$. C. $(8; +\infty)$. D. $(0; 2) \cup (8; +\infty)$.

🔥 **Câu 51.** Khi đặt $t = \log_5 x$ thì bất phương trình $\log_5^2(5x) - 3\log_{\sqrt{5}} x - 5 \leq 0$ tương đương với bất phương trình nào sau đây?

- A. $t^2 - 6t - 4 \leq 0$. B. $t^2 - 6t - 5 \leq 0$. C. $t^2 - 4t - 4 \leq 0$. D. $t^2 - 3t - 5 \leq 0$.

🔥 **Câu 52.** Cho bất phương trình $12 \cdot 9^x - 35 \cdot 6^x + 18 \cdot 4^x > 0$. Nếu đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ với $t > 0$ thì bất phương trình đã cho trở thành bất phương trình nào trong các bất phương trình dưới đây?

- A. $12t^2 - 35t + 18 > 0$. B. $18t^2 - 35t + 12 > 0$. C. $12t^2 - 35t + 18 < 0$. D. $18t^2 - 35t + 12 < 0$.

🔥 **Câu 53.** Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{0,8}(15x+2) > \log_{0,8}(13x+8)$ là

- A. Vô số. B. 4. C. 2. D. 3.

🔥 **Câu 54.** Giải bất phương trình $\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x)$ được tập nghiệm là $(a; b)$. Hãy tính tổng $S = a + b$.

- A. $S = \frac{26}{5}$. B. $S = \frac{11}{5}$. C. $S = \frac{28}{15}$. D. $S = \frac{8}{3}$.

🔥 **Câu 55.** Có tất cả bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn bất phương trình $\log_1 \left[\log_2(2-x^2) \right] > \frac{0?}{2}$

- A. Vô số. B. 1. C. 0. D. 2.

 **Câu 56.** Bất phương trình $\log_4(x+7) > \log_2(x+1)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

 **Câu 57.** Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2x - 8) \geq -4$ là

- A. 6. B. Vô số. C. 4. D. 5.

 **Câu 58.** Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-3x-7} > 3^{2x-21}$ là

- A. 7. B. 6. C. vô số. D. 8.

CHƯƠNG 3

NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

BÀI 1. NGUYÊN HÀM

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA NGUYÊN HÀM.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{K}$. Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{K}$ nếu $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{K}$.

2 TÍNH CHẤT CỦA NGUYÊN HÀM.

- ☑ $\int f'(x) dx = f(x) + C$.
- ☑ $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$ với $k \neq 0$.
- ☑ $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$.

3 BẢNG NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

Nguyên hàm	Nguyên hàm mở rộng
① $\int 0 dx = C$	$\int k dx = k \cdot x + C$
② $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
③ $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{dx}{(ax+b)^2} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C$
④ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{1}{m} \cdot \frac{a^{mx+n}}{\ln a} + C$
⑤ $\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$
⑥ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$
⑦ $\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
⑧ $\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
⑨ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
⑩ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$

B CÁC DẠNG TOÁN.**Dạng 1. Tính nguyên hàm bằng bảng nguyên hàm***Phương pháp giải*

- ☑ Tích của đa thức hoặc lũy thừa $\xrightarrow{PP}$ khai triển.
- ☑ Tích các hàm mũ $\xrightarrow{PP}$ khai triển theo công thức mũ.
- ☑ Chứa căn $\xrightarrow{PP}$ chuyển về lũy thừa.
- ☑ Tích lượng giác bậc một của sin và cosin $\xrightarrow{PP}$ Sử dụng công thức tích thành tổng.

$$\text{— } \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)].$$

$$\text{— } \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)].$$

$$\text{— } \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)].$$

- ☑ Bậc chẵn của sin và cosin $\Rightarrow$ Hạ bậc: $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$, $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$.

- ☑ Nguyên hàm của hàm số hữu tỷ $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, với $P(x)$, $Q(x)$ là các đa thức.

- Nếu bậc của tử số $P(x) \geq$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{PP}$ Chia đa thức.
- Nếu bậc của tử số $P(x) <$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{PP}$ Phân tích mẫu số $Q(x)$ thành tích số, rồi sử dụng đồng nhất thức đưa về dạng tổng của các phân số (**PP che**).

$$\bigcirc \frac{1}{(x-m)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-m} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}, \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac.$$

$$\bigcirc \frac{1}{(x-a)^2(x-b)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b} + \frac{D}{(x-b)^2}.$$

Nhận xét. Nếu mẫu không phân tích được thành tích sẽ tìm hiểu ở phần đổi biến.

✍ Ví dụ 1. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ (giả sử điều kiện được xác định), biết

① $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{3}x$

② $f(x) = (x^2 - 3x)(x + 1)$

③ $f(x) = 3x^3 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$

④ $f(x) = (2x + 3)^5 + e^{2x+3}$

⑤ $f(x) = (5x - 1)^3 + \frac{4}{5x - 2}$

⑥ $f(x) = \frac{3}{3x - 1} + \frac{5}{(2x + 3)^2}$

⑦ $f(x) = \sin(2x + 3) - 2 \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$

⑧ $f(x) = \sin(-7x + \pi) + 5 \cos\left(\frac{\pi}{12} - x\right)$

⑨ $f(x) = \frac{5}{\sin^2(2x)} + \frac{3}{\cos^2(6x)}$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- ✍ Ví dụ 2.** Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $F(x_0) = k$.
- ① Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 1$ thỏa mãn $F(-2) = 3$
 - ② Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = -5x^4 + 4x^2 - 6$ thỏa mãn $F(3) = 1$. Tính $F(-3)$
 - ③ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = (1-x)^9$ thỏa $10F(2) = 9$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1 PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

📁 Dạng 2. Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số

Định lí 1. Cho $\int f(u)du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f[u(x)]u'(x)dx = F[u(x)] + C.$$

Một số dạng đổi biến thường gặp

- $I = \int f(ax+b)^n \cdot x dx \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = ax+b \Rightarrow dt = a dx.$
- ☑ $I = \int f\left(\frac{x^n}{ax^{n+1}+1}\right)^m dx \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = ax^{n+1}+1 \Rightarrow dt = a(n+1)x^n dx, \text{ với } m, n \in \mathbb{Z}.$
- $I = \int f(ax^2+b)^n \cdot x dx \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = ax^2+b \Rightarrow dt = 2ax dx.$
- ☑ $I = \int \sqrt[n]{f(x)} \cdot f'(x) dx \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = \sqrt[n]{f(x)} \Rightarrow t^n = f(x) \Rightarrow nt^{n-1} dt = f'(x) dx.$
- ☑ $I = \int f(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx.$
- $I = \int f(a+b \ln x) \cdot \frac{1}{x} dx \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = a+b \ln x \Rightarrow dt = \frac{b}{x} dx.$
- ☑ $I = \int f(e^x) \cdot e^x dx \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx.$
- $I = \int f(a+be^x) \cdot e^x dx \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = a+be^x \Rightarrow dt = be^x dx$
- ☑ $I = \int f(\cos x) \cdot \sin x dx \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx.$
- $I = \int f(a+b \cos x) \cdot \sin x dx \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = a+b \cos x \Rightarrow dt = -b \sin x dx.$
- ☑ $I = \int f(\sin x) \cdot \cos x dx \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx.$
- $I = \int f(a+b \sin x) \cdot \cos x dx \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = a+b \sin x \Rightarrow dt = b \cos x dx.$
- ☑ $I = \int f(\tan x) \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (1 + \tan^2 x) dx.$
- ☑ $I = \int f(\cot x) \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = \cot x \Rightarrow dt = -\frac{1}{\sin^2 x} dx = -(1 + \cot^2 x) dx.$
- ☑ $I = \int f(\sin^2 x; \cos^2 x) \cdot \sin 2x dx \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } \begin{cases} t = \sin^2 x \Rightarrow dt = \sin 2x dx; \\ t = \cos^2 x \Rightarrow dt = -\sin 2x dx. \end{cases}$
- ☑ $I = \int f(\sin x \pm \cos x) \cdot (\sin x \mp \cos x) dx \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = \sin x \pm \cos x \Rightarrow dt = (\cos x \mp \sin x) dx.$

! Sau khi đổi biến và tính nguyên hàm xong, ta cần trả lại biến cũ ban đầu là x .

🔪 **Ví dụ 1.** Tìm nguyên hàm của các hàm số sau

① $I = \int x(1+x)^{2017} dx.$

② $I = \int \frac{e^x dx}{e^x - 1}$

③ $I = \int \frac{\ln x}{x} dx.$

④ $I = \int \tan x dx.$

⑤ $I = \int \sin^3 x dx.$

⑥ $I = \int \cos^{2017} x \cdot \sin x dx$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2 PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN

☐ Dạng 3. Nguyên hàm từng phần

Định lí 2. Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm và liên tục trên K thì

$$I = \int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx$$

hay

$$I = \int u dv - \int v du.$$

Vận dụng giải toán:

☑ Nhận dạng: Tích hai hàm khác loại nhau. Ví dụ: $\int e^x \sin x dx$, $\int x \ln x dx$, ...

☑ Đặt: $\begin{cases} u = \dots & \xrightarrow{\text{vi phân}} du = \dots dx \\ dv = \dots dx & \xrightarrow{\text{nguyên hàm}} v = \dots \end{cases}$ Suy ra: $I = \int u dv = uv - \int v du.$

☑ Thứ tự ưu tiên chọn u : **nhất** log, **nhì** đa, **tam** lượng, **tứ** mũ và $dv = \text{phần còn lại}.$

☑ Lưu ý rằng bậc của đa thức và bậc của ln tương ứng với số lần lấy nguyên hàm.

☑ Dạng mũ nhân lượng giác là dạng nguyên hàm từng phần luân hồi.

🔪 **Ví dụ 1.** Tìm nguyên hàm của các hàm số sau

① $I = \int \ln x \, dx$

② $I = \int x \ln x \, dx$

③ $I = \int x \sin x \, dx$

④ $I = \int (x+1) \sin 2x \, dx$

⑤ $I = \int x e^x \, dx$

⑥ $I = \int (1-2x) e^x \, dx$

⑦ $I = \int (x^2 + 2x) e^2 x \, dx$

⑧ $I = \int e^x \sin x \, dx$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

TRẮC NGHIỆM

❖ Câu 1. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 3x + 2$ là hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x + C.$

B. $F(x) = \frac{x^4}{3} + 3x^2 + 2x + C.$

C. $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x + C.$

D. $F(x) = 3x^2 + 3x + C.$

❖ Câu 2. Hàm số $F(x) = 5x^3 + 4x^2 - 7x + 120 + C$ là họ nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = 15x^2 + 8x - 7.$

B. $f(x) = 5x^2 + 4x + 7.$

C. $f(x) = \frac{5x^2}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{7x^2}{2}.$

D. $f(x) = 5x^2 + 4x - 7.$

❖ Câu 3. Họ nguyên hàm của hàm số: $y = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ là

A. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + \ln x + C.$

B. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + \ln|x| + C.$

C. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + \ln x + C.$

D. $F(x) = 2x - 3 - \frac{1}{x^2} + C.$

❖ Câu 4. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x+1)(x+2)$

A. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^2 + 2x + C.$

B. $F(x) = 2x + 3 + C.$

C. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C.$

D. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x^2 + 2x + C.$

Câu 5. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{2}{5-2x} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$ là hàm số nào?

- A. $F(x) = -\ln|5-2x| + 2\ln|x| - \frac{3}{x} + C.$ B. $F(x) = -\ln|5-2x| + 2\ln|x| + \frac{3}{x} + C.$
 C. $F(x) = \ln|5-2x| + 2\ln|x| - \frac{3}{x} + C.$ D. $F(x) = -\ln|5-2x| - 2\ln|x| + \frac{3}{x} + C.$

Câu 6. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$

- A. $\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C.$ B. $\int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \cos 2x + C.$
 C. $\int \sin 2x dx = \cos 2x + C.$ D. $\int \sin 2x dx = -\cos 2x + C.$

Câu 7. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right).$

- A. $\int f(x) \cdot dx = \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C.$ B. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C.$
 C. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C.$ D. $\int f(x) dx = \frac{1}{6} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C.$

Câu 8. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 + \tan^2 \frac{x}{2}.$

- A. $\int f(x) dx = \tan \frac{x}{2} + C.$ B. $\int f(x) dx = 2 \tan \frac{x}{2} + C.$
 C. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + C.$ D. $\int f(x) dx = -2 \tan \frac{x}{2} + C.$

Câu 9. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}.$

- A. $\int f(x) dx = -\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C.$ B. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C.$
 C. $\int f(x) dx = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C.$ D. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C.$

Câu 10. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x.$

- A. $\int f(x) dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$ B. $\int f(x) dx = -\frac{\sin^4 x}{4} + C.$
 C. $\int f(x) dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$ D. $\int f(x) dx = -\frac{\sin^2 x}{2} + C.$

Câu 11. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - e^{-x}.$

- A. $\int f(x) dx = -e^x + e^{-x} + C.$ B. $\int f(x) dx = e^x + e^{-x} + C.$
 C. $\int f(x) dx = e^x - e^{-x} + C.$ D. $\int f(x) dx = -e^x - e^{-x} + C.$

Câu 12. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x \cdot 3^{-2x}.$

- A. $\int f(x) dx = \left(\frac{2}{9}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 - \ln 9} + C.$ B. $\int f(x) dx = \left(\frac{9}{2}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 - \ln 9} + C.$
 C. $\int f(x) dx = \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 - \ln 9} + C.$ D. $\int f(x) dx = \left(\frac{2}{9}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 + \ln 9} + C.$

Câu 13. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x(3 + e^{-x})$ là

- A. $F(x) = 3e^x + x + C.$ B. $F(x) = 3e^x + e^x \ln e^x + C.$
 C. $F(x) = 3e^x - \frac{1}{e^x} + C.$ D. $F(x) = 3e^x - x + C.$

Câu 14. Hàm số $F(x) = 7e^x - \tan x$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

- A. $f(x) = 7e^x + \frac{1}{\cos^2 x}.$ B. $f(x) = 7e^x + \tan^2 x - 1.$
 C. $f(x) = 7\left(e^x - \frac{1}{\cos^2 x}\right).$ D. $f(x) = e^x \left(7 - \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right).$

❖ **Câu 15.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{e^{4x-2}}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}e^{2x-1} + C.$

B. $\int f(x)dx = e^{2x-1} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}e^{4x-2} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{e^{2x-1}} + C.$

❖ **Câu 16.** Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ là

A. $\int f(x)dx = 2\sqrt{2x-1} + C.$

B. $\int f(x)dx = \sqrt{2x-1} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{\sqrt{2x-1}}{2} + C.$

D. $\int f(x)dx = -2\sqrt{2x-1} + C.$

❖ **Câu 17.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$.

A. $\int f(x)dx = -2\sqrt{3-x} + C.$

B. $\int f(x)dx = -\sqrt{3-x} + C.$

C. $\int f(x)dx = 2\sqrt{3-x} + C.$

D. $\int f(x)dx = -3\sqrt{3-x} + C.$

❖ **Câu 18.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+1}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$

C. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x+1} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C.$

❖ **Câu 19.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{5-3x}$.

A. $\int f(x)dx = -\frac{2}{9}(5-3x)\sqrt{5-3x} + C.$

B. $\int f(x)dx = -\frac{2}{3}(5-3x)\sqrt{5-3x}.$

C. $\int f(x)dx = \frac{2}{9}(5-3x)\sqrt{5-3x}.$

D. $\int f(x)dx = -\frac{2}{3}\sqrt{5-3x} + C.$

❖ **Câu 20.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{3}{4}(x-2)\sqrt[3]{x-2} + C.$

B. $\int f(x)dx = -\frac{3}{4}(x-2)\sqrt[3]{x-2} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x-2}.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}} + C.$

❖ **Câu 21.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{1-3x}$.

A. $\int f(x)dx = -\frac{3}{4}(1-3x)\sqrt[3]{1-3x} + C.$

B. $\int f(x)dx = -\frac{1}{4}(1-3x)\sqrt[3]{1-3x} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{4}(1-3x)\sqrt[3]{1-3x} + C.$

D. $\int f(x)dx = -(1-3x)^{-\frac{2}{3}} + C.$

❖ **Câu 22.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{e^{3x}}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{3}{2\sqrt{e^{3x}}} + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{2\sqrt{e^{3x}}}{3} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{3\sqrt{e^{3x}}}{2} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{2e^{\frac{2}{3x+2}}}{3x+2} + C.$

❖ **Câu 23.** Hàm số $F(x) = (x+1)^2\sqrt{x+1} + 2016$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = \frac{5}{2}(x+1)\sqrt{x+1} + C.$

B. $f(x) = \frac{2}{5}(x+1)\sqrt{x+1}.$

C. $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} + C.$

D. $f(x) = \frac{5}{2}(x+1)\sqrt{x+1}.$

Câu 24. Biết một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-3x}} + 1$ là hàm số $F(x)$ thỏa mãn $F(-1) = \frac{2}{3}$. Khi đó $F(x)$ là hàm số nào sau đây?

A. $F(x) = x - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x} + 3$.

B. $F(x) = x - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x} - 3$.

C. $F(x) = x - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x} + 1$.

D. $F(x) = 4 - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x}$.

Câu 25. Biết $F(x) = 6\sqrt{1-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{a}{\sqrt{1-x}}$. Khi đó giá trị của a bằng

A. -3 .

B. 3 .

C. 6 .

D. $\frac{1}{6}$.

Câu 26. Tính $F(x) = \int x \sin x dx$ bằng

A. $F(x) = x \sin x - \cos x + C$.

B. $F(x) = \sin x + x \cos x + C$.

C. $F(x) = \sin x - x \cos x + C$.

D. $F(x) = x \sin x + \cos x + C$.

Câu 27. Tính $\int x \ln^2 x dx$. Chọn kết quả đúng:

A. $\frac{1}{4}x^2(2\ln^2 x - 2\ln x + 1) + C$.

B. $\frac{1}{2}x^2(2\ln^2 x - 2\ln x + 1) + C$.

C. $\frac{1}{4}x^2(2\ln^2 x + 2\ln x + 1) + C$.

D. $\frac{1}{2}x^2(2\ln^2 x + 2\ln x + 1) + C$.

Câu 28. Tính $F(x) = \int x \sin x \cos x dx$. Chọn kết quả đúng:

A. $F(x) = \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{x}{4} \cos 2x + C$.

B. $F(x) = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{x}{2} \sin 2x + C$.

C. $F(x) = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{8} \cos 2x + C$.

D. $F(x) = \frac{-1}{4} \sin 2x - \frac{x}{8} \cos 2x + C$.

Câu 29. Tính $F(x) = \int x e^{\frac{x}{3}} dx$. Chọn kết quả đúng

A. $F(x) = 3(x-3)e^{\frac{x}{3}} + C$.

B. $F(x) = (x+3)e^{\frac{x}{3}} + C$.

C. $F(x) = \frac{x-3}{3}e^{\frac{x}{3}} + C$.

D. $F(x) = \frac{x+3}{3}e^{\frac{x}{3}} + C$.

Câu 30. Tính $F(x) = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx$. Chọn kết quả đúng

A. $F(x) = x \tan x + \ln |\cos x| + C$.

B. $F(x) = -x \cot x + \ln |\cos x| + C$.

C. $F(x) = -x \tan x + \ln |\cos x| + C$.

D. $F(x) = -x \cot x - \ln |\cos x| + C$.

Câu 31. Tính $F(x) = \int x^2 \cos x dx$. Chọn kết quả đúng

A. $F(x) = 2x^2 \sin x - x \cos x + \sin x + C$.

B. $F(x) = x^2 \sin x - 2x \cos x + 2 \sin x + C$.

C. $F(x) = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C$.

D. $F(x) = (2x + x^2) \cos x - x \sin x + C$.

Câu 32. Tính $F(x) = \int x \sin 2x dx$. Chọn kết quả đúng

A. $F(x) = -\frac{1}{4}(2x \cos 2x - \sin 2x) + C$.

B. $F(x) = \frac{1}{4}(2x \cos 2x - \sin 2x) + C$.

C. $F(x) = -\frac{1}{4}(2x \cos 2x + \sin 2x) + C$.

D. $F(x) = \frac{1}{4}(2x \cos 2x + \sin 2x) + C$.

Câu 33. Hàm số $F(x) = x \sin x + \cos x + 2017$ là một nguyên hàm của hàm số nào?

A. $f(x) = x \sin x$.

B. $f(x) = x \cos x$.

C. $f(x) = -x \cos x$.

D. $f(x) = -x \sin x$.

Câu 34. Hãy chọn mệnh đề đúng

A. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (0 < a \neq 1)$.

B. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

$$\text{C. } \int f(x) \cdot g(x) dx = \int f(x) dx \int g(x) dx. \quad \text{D. } \int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{\int f(x) dx}{\int g(x) dx}.$$

🔥 **Câu 35.** Mệnh đề nào sau đây **sai**?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \int \sin x dx = \cos x + C. & \text{B. } \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, x \neq 0. \\ \text{C. } \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (0 < a \neq 1). & \text{D. } \int e^x dx = e^x + C. \end{array}$$

🔥 **Câu 36.** Hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + 3 + \frac{1}{x}$ có nguyên hàm là

$$\begin{array}{ll} \text{A. } F(x) = x^4 - \frac{x^3}{3} + 3x + \ln|x| + C. & \text{B. } F(x) = 3x^2 - 2x - \frac{1}{x^2} + C. \\ \text{C. } F(x) = x^4 - x^3 + 3x + \ln|x| + C. & \text{D. } F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 3x + \ln|x| + C. \end{array}$$

🔥 **Câu 37.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^2 x$ là

$$\begin{array}{ll} \text{A. } F(x) = \tan x - x + C. & \text{B. } F(x) = -\tan x + x + C. \\ \text{C. } F(x) = \tan x + x + C. & \text{D. } F(x) = -\tan x - x + C. \end{array}$$

🔥 **Câu 38.** Hàm số $F(x) = 7 \sin x - \cos x + 1$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } f(x) = \sin x + 7 \cos x. & \text{B. } f(x) = -\sin x + 7 \cos x. \\ \text{C. } f(x) = \sin x - 7 \cos x. & \text{D. } f(x) = -\sin x - 7 \cos x. \end{array}$$

🔥 **Câu 39.** Kết quả tính $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ là

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \tan x - \cot x + C. & \text{B. } \cot 2x + C. & \text{C. } \tan 2x - x + C. & \text{D. } -\tan x + \cot x + C. \end{array}$$

🔥 **Câu 40.** Hàm số $F(x) = 3x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} - 1$ có một nguyên hàm là

$$\begin{array}{ll} \text{A. } f(x) = x^3 - 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} - x. & \text{B. } f(x) = x^3 - \sqrt{x} - \frac{1}{x} - x. \\ \text{C. } f(x) = x^3 - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}. & \text{D. } f(x) = x^3 - \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{x} - x. \end{array}$$

🔥 **Câu 41.** Hàm số $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^5 x}$ có một nguyên hàm $F(x)$ bằng

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \frac{1}{4\sin^4 x}. & \text{B. } \frac{4}{\sin^4 x}. & \text{C. } \frac{-4}{\sin^4 x}. & \text{D. } \frac{1}{4\sin^4 x}. \end{array}$$

🔥 **Câu 42.** Kết quả tính $\int 2x\sqrt{5-4x^2} dx$ bằng

$$\begin{array}{ll} \text{A. } -\frac{3}{8}\sqrt{(5-4x^2)} + C. & \text{B. } \frac{1}{6}\sqrt{(5-4x^2)^3} + C. \\ \text{C. } -\frac{1}{12}\sqrt{(5-4x^2)^3} + C. & \text{D. } -\frac{1}{6}\sqrt{(5-4x^2)^3} + C. \end{array}$$

🔥 **Câu 43.** Kết quả $\int e^{\sin x} \cos x dx$ bằng

$$\begin{array}{llll} \text{A. } e^{\sin x} + C. & \text{B. } \cos x \cdot e^{\sin x} + C. & \text{C. } e^{\cos x} + C. & \text{D. } e^{-\sin x} + C. \end{array}$$

🔥 **Câu 44.** Tính $\int \tan x dx$ bằng

$$\begin{array}{llll} \text{A. } -\ln|\cos x| + C. & \text{B. } \ln|\cos x| + C. & \text{C. } \frac{1}{\cos^2 x} + C. & \text{D. } \frac{-1}{\cos^2 x} + C. \end{array}$$

🔥 **Câu 45.** Tính $\int \cot x dx$ bằng

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \ln|\sin x| + C. & \text{B. } -\ln|\sin x| + C. & \text{C. } \frac{-1}{\sin^2 x} + C. & \text{D. } \frac{1}{\sin^2 x} - C. \end{array}$$

Câu 46. Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{x^3}{x-1}$ là

- A. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x+1| + C.$ B. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1| + C.$
 C. $\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1| + C.$ D. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + x + \ln|x-1| + C.$

Câu 47. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x+1}$ là

- A. $\frac{x^2}{2} + 3x + 6\ln|x+1|.$ B. $\frac{x^2}{2} - 3x + 6\ln|x+1|.$
 C. $\frac{x^2}{2} + 3x - 6\ln|x+1|.$ D. $\frac{x^2}{2} - 3x + 6\ln(x+1).$

Câu 48. Kết quả tính $\int \frac{1}{x(x+3)} dx$ bằng

- A. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right| + C.$ B. $-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right| + C.$ C. $\frac{2}{3}\ln\left|\frac{x+3}{x}\right| + C.$ D. $\frac{2}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right| + C.$

Câu 49. Kết quả tính $\int \frac{1}{x(x-3)} dx$ bằng

- A. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-3}{x}\right| + C.$ B. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+3}{x}\right| + C.$ C. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right| + C.$ D. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x-3}\right| + C.$

Câu 50. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$ là

- A. $F(x) = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right| + C.$ B. $F(x) = \ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C.$
 C. $F(x) = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C.$ D. $F(x) = \ln|x^2 + x - 2| + C.$

Câu 51. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^2$ là

- A. $F(x) = -\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + C.$ B. $F(x) = \frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + C.$
 C. $F(x) = -\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + C.$ D. $F(x) = -\frac{1}{x} - 2\ln|x| - x + C.$

Câu 52. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{8-x^2}}$ thỏa mãn $F(2) = 0$. Khi đó phương trình $F(x) = x$ có nghiệm là

- A. $x = 1.$ B. $x = -1.$ C. $x = 1 - \sqrt{3}.$ D. $x = 0.$

Câu 53. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$ thì $F(3)$ bằng

- A. $\ln 2 + 1.$ B. $\ln \frac{3}{2}.$ C. $\ln 2.$ D. $\frac{1}{2}.$

Câu 54. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{\ln^2 x + 1} \cdot \frac{\ln x}{x}$ thỏa mãn $F(1) = \frac{1}{3}$. Giá trị của $F^2(e)$ là

- A. $\frac{8}{9}.$ B. $\frac{1}{9}.$ C. $\frac{8}{3}.$ D. $\frac{1}{3}.$

Câu 55. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{\sin^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ là

- A. $\cot x - x^2 + \frac{\pi^2}{16}.$ B. $-\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}.$ C. $-\cot x + x^2.$ D. $\cot x - x^2 - \frac{\pi^2}{16}.$

Câu 56. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^2 x \cdot \sin x.$

- A. $\int f(x) dx = \frac{\cos^3 x}{3} + C.$ B. $\int f(x) dx = -\frac{\sin^2 x}{2} + C.$

$$\text{C. } \int f(x)dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

$$\text{D. } \int f(x)dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

🔥 **Câu 57.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x - 1}$.

$$\text{A. } \int f(x)dx = -\ln|\sin x| + C.$$

$$\text{B. } \int f(x)dx = \ln|\cos 2x - 1| + C.$$

$$\text{C. } \int f(x)dx = \ln|\sin 2x| + C.$$

$$\text{D. } \int f(x)dx = \ln|\sin x| + C.$$

🔥 **Câu 58.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x \cdot \cos 2x \cdot dx$.

$$\text{A. } \int f(x)dx = \frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{2}\sin x + C.$$

$$\text{B. } \int f(x)dx = \frac{\cos^3 x}{3} + \cos x + C.$$

$$\text{C. } \int f(x)dx = \frac{-2\cos^3 x}{3} + \cos x + C.$$

$$\text{D. } \int f(x)dx = \frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\sin x + C.$$

🔥 **Câu 59.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\sin x \cdot \cos 3x$.

$$\text{A. } \int f(x)dx = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\cos 4x + C.$$

$$\text{B. } \int f(x)dx = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos 4x + C.$$

$$\text{C. } \int f(x)dx = 2\cos^4 x + 3\cos^2 x + C.$$

$$\text{D. } \int f(x)dx = 3\cos^4 x - 3\cos^2 x + C.$$

🔥 **Câu 60.** Hàm số $f(x) = 3^x - 2^x \cdot 3^x$ có nguyên hàm bằng

$$\text{A. } 3^x \ln 3(1 + 2^x \ln 2) + C.$$

$$\text{B. } \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{3^x \cdot 2^x}{\ln 6} + C.$$

$$\text{C. } \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{6^x}{\ln 6} + C.$$

$$\text{D. } \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{6^x}{\ln 3 \cdot \ln 2} + C.$$

🔥 **Câu 61.** Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = (e^{-x} + e^x)^2$ thỏa mãn điều kiện $F(0) = 1$ là

$$\text{A. } F(x) = -2e^{-2x} + 2e^{2x} + 2x + 1.$$

$$\text{B. } F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{2x} + 2x + 1.$$

$$\text{C. } F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{2x} + 2x.$$

$$\text{D. } F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - 1.$$

🔥 **Câu 62.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$.

$$\text{A. } F(x) = 2x - 3\ln|x+1| + C.$$

$$\text{B. } F(x) = 2x + 3\ln|x+1| + C.$$

$$\text{C. } F(x) = 2x - \ln|x+1| + C.$$

$$\text{D. } F(x) = 2x + \ln|x+1| + C.$$

🔥 **Câu 63.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x^2 + 2x + 3}{2x + 1}$.

$$\text{A. } F(x) = \frac{1}{8}(2x+1)^2 + \frac{5}{4}\ln|2x+1| + C.$$

$$\text{B. } F(x) = \frac{1}{8}(2x+1)^2 + 5\ln|2x+1| + C.$$

$$\text{C. } F(x) = (2x+1)^2 + \ln|2x+1| + C.$$

$$\text{D. } F(x) = (2x+1)^2 - \ln|2x+1| + C.$$

🔥 **Câu 64.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$.

$$\text{A. } F(x) = \frac{x^2}{2} - \ln(x^2 + 1) + C.$$

$$\text{B. } F(x) = \frac{x^2}{2} + \ln(x^2 + 1) + C.$$

$$\text{C. } F(x) = x^2 - \ln(x^2 + 1) + C.$$

$$\text{D. } F(x) = x^2 + \ln(x^2 + 1) + C.$$

🔥 **Câu 65.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x \ln x + x}$.

$$\text{A. } F(x) = \ln|\ln x + 1| + C.$$

$$\text{B. } F(x) = \ln|\ln x - 1| + C.$$

$$\text{C. } F(x) = \ln|x+1| + C.$$

$$\text{D. } F(x) = \ln x + 1 + C.$$

- 🔥 Câu 66.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng
A. $2 + \ln 15$. **B.** $3 + \ln 15$. **C.** $\ln 15$. **D.** $4 + \ln 15$.
- 🔥 Câu 67.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ thỏa mãn $F(e+1) = 4$. Tìm $F(x)$.
A. $2\ln(x-1) + 2$. **B.** $\ln(x-1) + 3$. **C.** $4\ln(x-1)$. **D.** $\ln(x-1) - 3$.
- 🔥 Câu 68.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-2}$ biết $F(1) = 2$. Giá trị của $F(0)$ bằng
A. $2 + \ln 2$. **B.** $\ln 2$. **C.** $2 + \ln(-2)$. **D.** $\ln(-2)$.
- 🔥 Câu 69.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \frac{1}{2x+1}$; biết $F(0) = 2$. Tính $F(1)$.
A. $F(1) = \frac{1}{2}\ln 3 - 2$. **B.** $F(1) = \ln 3 + 2$. **C.** $F(1) = 2\ln 3 - 2$. **D.** $F(1) = \frac{1}{2}\ln 3 + 2$.
- 🔥 Câu 70.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.
A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$. **B.** $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$. **C.** $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$. **D.** $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$.
- 🔥 Câu 71.** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = 0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng
A. 2. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.
- 🔥 Câu 72.** Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = 2e^{2x} + 1$, $\forall x, f(0) = 2$. Hàm $f(x)$ là
A. $f(x) = 2e^x + 2x$. **B.** $f(x) = 2e^x + 2$. **C.** $f(x) = e^{2x} + x + 2$. **D.** $f(x) = e^{2x} + x + 1$.
- 🔥 Câu 73.** Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.
A. $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$. **B.** $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$.
C. $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$. **D.** $F(x) = \cos x - \sin x + 3$.
- 🔥 Câu 74.** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5\sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
A. $f(x) = 3x - 5\cos x + 15$. **B.** $f(x) = 3x - 5\cos x + 2$.
C. $f(x) = 3x + 5\cos x + 5$. **D.** $f(x) = 3x + 5\cos x + 2$.
- 🔥 Câu 75.** Biết $\int \frac{x+1}{(x-1)(2-x)} dx = a \ln|x-1| + b \ln|x-2| + C$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị biểu thức $a+b$.
A. $a+b = 1$. **B.** $a+b = 5$. **C.** $a+b = -5$. **D.** $a+b = -1$.
- 🔥 Câu 76.** Biết rằng $\int \frac{x-3}{x^2-2x+1} dx = a \ln|x-1| + \frac{b}{x-1} + C$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Chọn khẳng định đúng.
A. $\frac{a}{2b} = -\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{b}{a} = 2$. **C.** $\frac{2a}{b} = -1$. **D.** $a = 2b$.
- 🔥 Câu 77.** Biết $\int \frac{2x+3}{2x^2-x-1} dx = a \ln|bx+1| + c \ln|x-1| + C$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khi đó $a+b+c$ bằng
A. 0. **B.** 1. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 2.
- 🔥 Câu 78.** Cho biết $\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx = a \ln|x+1| + b \ln|x-2| + C$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $a+2b = 8$. **B.** $a+b = 8$. **C.** $2a-b = 8$. **D.** $a-b = 8$.

 **Câu 79.** Cho biết $\int \frac{4x+11}{x^2+5x+6} dx = a \ln|x+2| + b \ln|x+3| + C$. Tính giá trị biểu thức: $P = a^2 + ab + b^2$.

A. 12.

B. 13.

C. 14.

D. 15.

BÀI 2. TÍCH PHÂN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên K và $a, b \in K$. Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân của $f(x)$ từ a đến b và được kí hiệu $\int_a^b f(x) dx$.

Khi đó
$$I = \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Đối với biến số lấy tích phân, có thể chọn bất kì một chữ khác nhau thay cho x , nghĩa là

!
$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \dots = F(b) - F(a) \text{ (không phụ thuộc biến mà phụ thuộc cận).}$$

Tính chất 1 (Tính chất tích phân).

① $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$

② $\int_a^a f(x) dx = 0.$

③ $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$

④ $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

⑤ $\int_a^b f'(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a)$

⑥ $\int_a^b f''(x) dx = f'(x) \Big|_a^b = f'(b) - f'(a).$

2 PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

$$\int_a^b [f(x)] u'(x) dx = F[u(x)] \Big|_a^b = F[u(b)] - F[u(a)].$$

— **Bước 1:** Biến đổi để chọn phép đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) dx$.

— **Bước 2:** Đổi cận $\begin{cases} x = b \Rightarrow t = u(b) \\ x = a \Rightarrow t = u(a) \end{cases}$.

— **Bước 3:** Đưa về dạng $I = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt$ đơn giản hơn và dễ tính toán.

3 PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN

Định lý: Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì

$$I = \int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)] \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx \text{ hay } I = \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Thực hành:

— **Nhận dạng:** Tích hai hàm khác loại nhân nhau, chẳng hạn: mũ nhân lượng giác, ...

— **Đặt:** $\begin{cases} u = \dots \xrightarrow{VP} du = \dots dx \\ dv = \dots dx \xrightarrow{NH} v = \dots \end{cases}$. Suy ra $I = \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$.

— **Thứ tự ưu tiên chọn u :** **Nhất log - nhì đa - tam lượng - tứ mũ** và $dv = \text{phần còn lại}$.

— **Lưu ý:** rằng bậc của đa thức và bậc của ln tương ứng với số lần lấy nguyên hàm.

— Dạng **mũ nhân lượng giác** là dạng nguyên hàm từng phần luân hồi.

B CÁC DẠNG TOÁN.

📁 Dạng 1. Tích phân cơ bản và tính chất tích phân

Dùng định nghĩa tích phân và các tính chất để giải bài toán.

🔪 **Ví dụ 1.** Tính các tích phân sau

a) $\int_1^3 (3x^2 - 4x + 5) dx.$

b) $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^3}.$

Lời giải:

.....

📁 Dạng 2. Tích phân hàm số phân thức hữu tỉ

Phương pháp giải: Chú ý nguyên hàm của một số hàm phân thức hữu tỉ thường gặp.

① $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C, \text{ với } a \neq 0.$

② $\int \frac{1}{(ax+b)^n} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{-1}{(n-1)(ax+b)^{n-1}} + C, \text{ với } a \neq 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$

③ $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{b-a} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right| + C, \text{ với } a \neq b.$

 **Ví dụ 1.** Tính các tích phân sau

① Tính $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2} dx$.

② $\int_0^1 \frac{x}{(x+2)^3} dx$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 3. Tính chất của tích phân

Phương pháp giải: Các tính chất

① $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$

② $\int_a^b f(x) dx = f(x)|_a^b = f(b) - f(a), \int_a^b f''(x) dx = f'(x)|_a^b = f'(b) - f'(a), \dots$

 **Ví dụ 1.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x) dx = 7$ và $\int_2^6 f(x) dx =$

3. Tính $\int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx.$

Lời giải:

.....

.....

.....

Dạng 4. Tích phân sử dụng phương pháp đổi biến

$I_1 = \int_m^n f(ax+b)^n x dx \rightarrow \text{Đặt } t = ax+b \Rightarrow dt = a dx.$

$I_2 = \int_m^n \left(\frac{x^n}{x^{n+1}+1} \right)^m dx \rightarrow \text{Đặt } t = x^{n+1}+1 \Rightarrow dt = (n+1)x^n dx.$

$I_3 = \int_m^n f(ax^2+b)^n x dx \rightarrow \text{Đặt } t = ax^2+b \Rightarrow dt = 2ax dx.$

 **Ví dụ 1.** Tính tích phân $I = \int_0^1 x(1-x)^{19} dx$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 2.** Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

Dạng 5. Tích phân sử dụng phương pháp đổi biến

$$I = \int_a^b \sqrt[n]{f(x)} f'(x) dx \longrightarrow \text{Đặt } t = \sqrt[n]{f(x)} \Rightarrow t^n = f(x) \Rightarrow n t^{n-1} dt = f'(x) dx.$$

 **Ví dụ 1.** Tính tích phân $I = \int_1^9 x \sqrt[3]{1-x} dx$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

Dạng 6. Đổi biến biểu thức chứa $\ln, e^x$ hoặc lượng giác trong dấu căn

Phương pháp giải: Đặt t là căn thức chứa lôgarit hoặc căn thức chứa mũ hoặc căn thức chứa lượng giác.

 **Ví dụ 1.** Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx.$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

 Dạng 7. Đổi biến biểu thức chứa hàm $\ln$ không nằm trong căn

$$I = \int_a^b f(\ln x) \frac{1}{x} dx.$$

Phương pháp giải:
$$\begin{cases} t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx \\ t = m + n \ln x \Rightarrow dt = \frac{n}{x} dx. \end{cases}$$

 **Ví dụ 1.** Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx.$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

 **Dạng 8. Tính $\int_a^b f(\sin x) \cos x dx$ hoặc $I = \int_a^b f(\cos x) \sin x dx.$**

Đặt
$$\begin{cases} t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx \\ t = m + n \sin x \Rightarrow dt = n \cos x dx. \end{cases}$$

Đặt
$$\begin{cases} t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx. \\ t = m + n \cos x \Rightarrow dt = -n \sin x dx. \end{cases}$$

 **Ví dụ 1.** Tính $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cot x dx.$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

Dạng 9. Tính $I = \int_a^b f(\tan x) \frac{1}{\cos^2 x} dx$ hoặc $I = \int_a^b f(\cot x) \frac{1}{\sin^2 x} dx$.

Phương pháp giải: Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (1 + \tan^2 x) dx$.

Phương pháp giải: Đặt $t = \cot x \Rightarrow dt = -\frac{1}{\sin^2 x} dx = -(1 + \cot^2 x) dx$.

Ví dụ 1. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \tan x)^2}{\cos^2 x} dx$.

Lời giải:

.....

.....

.....

Dạng 10.

Cho hàm số f liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[a; b]$. Giả sử hàm số $x = \varphi(t)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$ (*) sao cho $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ và $a \leq \varphi(t) \leq b$ với mọi $t \in [\alpha; \beta]$. Khi đó:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Một số phương pháp đổi biến: Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có dạng

— $\sqrt{a^2 - x^2}$: đặt $x = |a| \sin t$; $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

— $\sqrt{x^2 - a^2}$: đặt $x = \frac{|a|}{\sin t}$; $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$.

— $\sqrt{x^2 + a^2}$: $x = |a| \tan t$; $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

— $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$: đặt $x = a \cdot \cos 2t$.

— $\frac{1}{x^2 + a^2}$: đặt $x = a \tan t$.

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau:

$$\text{a) } I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$\text{b) } I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

Lời giải:

Dạng 11. Phương pháp từng phần

Áp dụng phương pháp như trong tính nguyên hàm.

 **Ví dụ 1.** Tính $I = \int_0^1 (x-3)e^x dx$.

Lời giải:

 **Ví dụ 2.** Tính $I = \int_0^1 (x^2 + 2x)e^x dx$.

Lời giải:

 **Ví dụ 3.** Tính $I = \int_0^\pi e^x \cos x dx$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hai hàm số f, g liên tục trên đoạn $[a; b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$ B. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$
- C. $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$ D. $\int_a^b xf(x) dx = x \int_a^b f(x) dx.$

Câu 2. Tích phân $\int_0^1 dx$ có giá trị bằng

- A. -1. B. 1. C. 0. D. 2.

Câu 3. Cho số thực a thỏa mãn $\int_{-1}^a e^{x+1} dx = e^2 - 1$, khi đó a có giá trị bằng

- A. 1. B. -1. C. 0. D. 2.

Câu 4. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào có tích phân trên đoạn $[0; \pi]$ đạt giá trị bằng 0?

- A. $f(x) = \cos 3x.$ B. $f(x) = \sin 3x.$ C. $f(x) = \cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right).$ D. $f(x) = \sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right).$

Câu 5. Trong các tích phân sau, tích phân nào có giá trị khác 2?

- A. $\int_1^{e^2} \ln x dx.$ B. $\int_0^1 2 dx.$ C. $\int_0^{\pi} \sin x dx.$ D. $\int_0^2 x dx.$

Câu 6. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào thỏa mãn $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-2}^2 f(x) dx$?

- A. $f(x) = e^x.$ B. $f(x) = \cos x.$ C. $f(x) = \sin x.$ D. $f(x) = x + 1.$

Câu 7. Tích phân $I = \int_2^5 \frac{dx}{x}$ có giá trị bằng

- A. $3 \ln 3.$ B. $\frac{1}{3} \ln 3.$ C. $\ln \frac{5}{2}.$ D. $\ln \frac{2}{5}.$

Câu 8. Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$ có giá trị bằng

- A. $\frac{1}{2} \ln \frac{1}{3}.$ B. $2 \ln 3.$ C. $\frac{1}{2} \ln 3.$ D. $2 \ln \frac{1}{3}.$

Câu 9. Nếu $\int_{-2}^0 (4 - e^{-x/2}) dx = K - 2e$ thì giá trị của K là

- A. 12,5. B. 9. C. 11. D. 10.

Câu 10. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 2} dx$ có giá trị bằng

- A. $\frac{2\ln 2}{3}$. B. $-\frac{2\ln 2}{3}$. C. $-2\ln 2$. D. $2\ln 2$.

Câu 11. Cho hàm số f và g liên tục trên đoạn $[1;5]$ sao cho $\int_1^5 f(x) dx = 2$ và $\int_1^5 g(x) dx = -4$.

Giá trị của $\int_1^5 [g(x) - f(x)] dx$ là

- A. -6. B. 6. C. 2. D. -2.

Câu 12. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0;3]$. Nếu $\int_0^3 f(x) dx = 2$ thì tích phân $\int_0^3 [x - 2f(x)] dx$ có giá trị bằng

- A. 7. B. $\frac{5}{2}$. C. 5. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 13. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0;6]$. Nếu $\int_1^5 f(x) dx = 2$ và $\int_1^3 f(x) dx = 7$ thì $\int_3^5 f(x) dx$ có giá trị bằng

- A. 5. B. -5. C. 9. D. -9.

Câu 14. Nếu $\int_1^2 f(x) dx = -2$ và $\int_2^3 f(x) dx = 1$ thì $\int_1^3 f(x) dx$ bằng

- A. -3. B. -1. C. 1. D. 3.

Câu 15. Nếu $\int_0^4 f(x) dx = 4$ và $\int_4^{10} f(x) dx = 5$ thì $\int_0^{10} f(x) dx$ bằng

- A. -1. B. 9. C. 1. D. 3.

Câu 16. Cho $\int_{-1}^1 f(x) dx = -5$ và $\int_{-1}^5 f(x) dx = 10$, khi đó $\int_1^5 f(t) dt$ bằng

- A. 8. B. 5. C. 15. D. -15.

Câu 17. Cho $\int_1^6 f(x) dx = 5$, $\int_2^6 f(t) dt = 4$. Tính $I = \int_1^2 f(y) dy$.

- A. $I = 5$. B. $I = -1$. C. $I = 9$. D. $I = 1$.

Câu 18. Cho $\int_0^4 f(x) dx = 8$ và $\int_2^4 2f(x) dx = 12$ khi đó $I = \int_{-1}^1 f(x+1) dx$ bằng

- A. 4. B. 2. C. 14. D. -2.

🔥 **Câu 19.** Cho $\int_0^5 f(x)dx = 10$ và $\int_0^5 g(x)dx = 5$. Giá trị của $\int_0^5 [2f(x) - 3g(x)]dx$ bằng

A. 1. B. 5. C. 7. D. -7.

🔥 **Câu 20.** Cho $\int_1^4 g(x)dx = \int_1^0 g(x)dx = 3$. Khi đó $\int_0^4 (g(x) + 1)dx$ bằng

A. 4. B. 9. C. 14. D. 6.

🔥 **Câu 21.** Cho $\int_{-1}^3 f(x)dx = -3$ và $\int_{-1}^3 3g(x)dx = 9$. Khi đó $\int_{-1}^3 (f(x) - g(x))dx$ bằng

A. 4. B. 9. C. -9. D. -6.

🔥 **Câu 22.** Cho $\int_1^3 f(x)dx = 2$ và $\int_1^3 [2f(x) + 3g(x)]dx = 16$, khi đó $\int_1^3 g(x)dx$ bằng

A. 18. B. 10. C. 4. D. 8.

🔥 **Câu 23.** Cho $\int_0^1 f(x)dx = 3$, $\int_0^1 g(x)dx = -1$ thì $\int_0^1 [2f(x) + g(x) + e^x]dx$ bằng

A. $6 + e$. B. $5 + e$. C. $4 - e$. D. $4 + e$.

🔥 **Câu 24.** Cho $\int_1^2 f(x)dx = 3$, $\int_1^2 2g(x)dx = 9$ thì $\int_1^2 [2f(x) + 4g(x)]dx$ bằng

A. 15. B. 18. C. 27. D. 24.

🔥 **Câu 25.** Cho f, g là hai hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa $\int_1^2 [f(x) - g(x)]dx = -1$, $\int_1^2 [f(x) + 5g(x)]dx = 17$. Tính $\int_1^2 [f(x) + g(x)]dx$.

A. 6. B. 5. C. 12. D. 8.

🔥 **Câu 26.** Cho f, g là hai hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa $\int_0^2 [f(x) - g(x)]dx = -4$, $\int_0^2 [2f(x) + g(x)]dx = -2$. Tính $\int_0^2 [f(x) + 2g(x)]dx$.

A. 7. B. 6. C. 2. D. 4.

🔥 **Câu 27.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;8]$ và $\int_0^8 f(x)dx = 16$; $\int_2^5 f(x)dx = 6$. Tính $P = \int_0^2 f(x)dx + \int_5^8 f(x)dx$.

A. $P = 4$. B. $P = 10$. C. $P = 7$. D. $P = -4$.

🔥 **Câu 28.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ và $\int_0^{10} f(x)dx = 10$; $\int_2^4 f(2x)dx = 6$. Tính $P = \int_0^4 f(x)dx + \int_8^{10} f(x)dx$.

A. $P = 4$. B. $P = 10$. C. $P = 7$. D. $P = -2$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(2) = 4$ và $f(-2) = 0$. Tính $I = \int_{-2}^2 f'(x) dx$.

A. $I = 4$. B. $I = 3$. C. $I = 0$. D. $I = -4$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có một nguyên hàm là $F(x)$, biết $F(3) = 12$, $F(0) = 0$ khi đó $\int_0^1 f(3x) dx$ bằng

A. -5 . B. 12 . C. 4 . D. -9 .

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có một nguyên hàm là $F(x)$, biết $F(4) = 12$, $F(2) = 3$. Khi đó $\int_1^2 f(2x) dx$ bằng

A. $\frac{9}{4}$. B. 9 . C. $\frac{9}{2}$. D. -9 .

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(3x) = 3f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng $\int_0^1 f(x) dx =$

1. Tính tích phân $I = \int_1^3 f(x) dx$.

A. $I = 8$. B. $I = 6$. C. $I = 3$. D. $I = 2$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên đoạn $[1; 2]$, biết tích phân $\int_1^2 f(x) dx = 4$ và $f(1) = 2$. Tính $f(2)$.

A. $f(2) = 6$. B. $f(2) = 1$. C. $f(2) = 3$. D. $f(2) = -16$.

Câu 34. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$ có một nguyên hàm là hàm F trên đoạn $[a; b]$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

A. $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

B. $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in (a; b)$.

C. $\int_a^b f(x) dx = f(b) - f(a)$.

D. Hàm số G cho bởi $G(x) = F(x) + 5$ cũng thỏa mãn $\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$.

Câu 35. Xét hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và các số thực a, b, c tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int_a^b f(x) dx = \int_c^b f(x) dx - \int_c^a f(x) dx$.

B. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

C. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$.

D. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_a^b f(x) dx$.

Câu 36. Tích phân $\int_0^3 x(x-1) dx$ có giá trị bằng với giá trị của tích phân nào trong các tích phân dưới đây?

A. $\int_0^2 (x^2 + x - 3) dx$. B. $3 \int_0^{3\pi} \sin x dx$. C. $\int_0^{\ln \sqrt{10}} e^{2x} dx$. D. $\int_0^{\pi} \cos(3x + \pi) dx$.

🔥 Câu 37. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{x dx}{(x+1)^3}$ bằng

A. $-\frac{1}{7}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{8}$. D. 12.

🔥 Câu 38. Tích phân $\int_0^1 \frac{x^7}{(1+x^2)^5} dx$ bằng

A. $\frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^5} dt$. B. $\int_1^3 \frac{(t-1)^3}{t^5} dt$. C. $\frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^4} dt$. D. $\frac{3}{2} \int_1^4 \frac{(t-1)^3}{t^4} dt$.

🔥 Câu 39. Tích phân $I = \int_1^{\sqrt[4]{3}} \frac{1}{x(x^4+1)} dx$ bằng

A. $\ln \frac{3}{2}$. B. $\frac{1}{3} \ln \frac{3}{2}$. C. $\frac{1}{5} \ln \frac{3}{2}$. D. $\frac{1}{4} \ln \frac{3}{2}$.

🔥 Câu 40. Cho hai tích phân $I = \int_0^2 x^3 dx$, $J = \int_0^2 x dx$. Tìm mối quan hệ giữa I và J

A. $I \cdot J = 8$. B. $I \cdot J = \frac{32}{5}$. C. $I - J = \frac{128}{7}$. D. $I + J = \frac{64}{9}$.

🔥 Câu 41. Cho số thực a thỏa mãn $\int_1^a e^{x+1} dx = e^4 - e^2$, khi đó a có giá trị bằng

A. -1. B. 3. C. 0. D. 2.

🔥 Câu 42. Tích phân $\int_0^2 k e^x dx$ (với k là hằng số) có giá trị bằng

A. $k(e^2 - 1)$. B. $e^2 - 1$. C. $k(e^2 - e)$. D. $e^2 - e$.

🔥 Câu 43. Với hằng số k , tích phân nào sau đây có giá trị khác với các tích phân còn lại?

A. $\int_0^1 k(e^2 - 1) dx$. B. $\int_0^2 k e^x dx$. C. $\int_0^{\frac{2}{3}} 3k e^{3x} dx$. D. $\int_0^{\frac{2}{3}} k e^{2x} dx$.

🔥 Câu 44. Cho hàm số f và g liên tục trên đoạn $[1; 5]$ sao cho $\int_1^5 f(x) dx = -7$ và $\int_1^5 g(x) dx = 5$

và $\int_1^5 [g(x) - k f(x)] dx = 19$ Giá trị của k là:

A. 2. B. 6. C. 2. D. -2.

🔥 Câu 45. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$. Nếu $\int_1^5 2f(x) dx = 2$ và $\int_1^3 f(x) dx = 7$ thì $\int_3^5 f(x) dx$ có giá trị bằng:

A. 5. B. -6. C. 9. D. -9.

Câu 46. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0; 3]$. Nếu $\int_1^2 f(x)dx = 4$ và tích phân $\int_1^2 [kx - f(x)]dx = -1$ giá trị k bằng

- A. 7. B. $\frac{5}{2}$. C. 5. D. 2.

Câu 47. Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cos 2x dx$ có giá trị bằng

- A. $-\frac{5\pi}{8}$. B. $\frac{\pi}{2}$. C. $\frac{3\pi}{8}$. D. $\frac{\pi}{8}$.

Câu 48. Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \tan x dx$ có giá trị bằng

- A. $\ln 3 - \frac{3}{5}$. B. $\ln 2 - 2$. C. $\ln 2 - \frac{3}{4}$. D. $\ln 2 - \frac{3}{8}$.

Câu 49. Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+3\cos x} \cdot \sin x dx$. Đặt $u = \sqrt{3\cos x + 1}$. Khi đó I bằng

- A. $\frac{2}{3} \int_1^3 u^2 du$. B. $\frac{2}{3} \int_0^2 u^2 du$. C. $\frac{2}{9} u^3 \Big|_1^2$. D. $\int_1^3 u^2 du$.

Câu 50. Tích phân $I = \int_1^e \frac{\sqrt{8\ln x + 1}}{x} dx$ bằng

- A. -2. B. $\frac{13}{6}$. C. $\ln 2 - \frac{3}{4}$. D. $\ln 3 - \frac{3}{5}$.

Câu 51. Tích phân $\int_{-1}^5 |x^2 - 2x - 3| dx$ có giá trị bằng

- A. 0. B. $\frac{64}{3}$. C. 7. D. 12,5.

Câu 52. Tìm a để $\int_1^2 (3 - ax) dx = -3$?

- A. 2. B. 9. C. 7. D. 4.

Câu 53. Nếu $\int_2^5 k^2 (5 - x^3) dx = -549$ thì giá trị của k là:

- A. ± 2 . B. 2. C. -2. D. 5.

Câu 54. Tích phân $\int_2^3 \frac{x^2 - x + 4}{x + 1} dx$ bằng

- A. $\frac{1}{3} + 6\ln \frac{4}{3}$. B. $\frac{1}{2} + 6\ln \frac{4}{3}$. C. $\frac{1}{2} - \ln \frac{4}{3}$. D. $\frac{1}{2} + \ln \frac{4}{3}$.

Câu 55. Giá trị của tích phân $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ là

- A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{3}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

🔥 **Câu 56.** Giá trị của tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ là

- A. $I = \frac{\pi}{2}$. B. $I = \frac{3\pi}{4}$. C. $I = \frac{\pi}{4}$. D. $I = \frac{5\pi}{4}$.

🔥 **Câu 57.** Giá trị của tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{x^2+2x+2}$ là

- A. $I = \frac{5\pi}{12}$. B. $I = \frac{\pi}{6}$. C. $I = \frac{3\pi}{12}$. D. $I = \frac{\pi}{12}$.

🔥 **Câu 58.** Tích phân $I = \int_0^1 x^2 \sqrt{x^3+5} dx$ có giá trị là

- A. $\frac{4}{3}\sqrt{6} - \frac{10}{9}\sqrt{3}$. B. $\frac{4}{3}\sqrt{7} - \frac{10}{9}\sqrt{5}$. C. $\frac{4}{3}\sqrt{6} - \frac{10}{9}\sqrt{5}$. D. $\frac{2}{3}\sqrt{6} - \frac{10}{9}\sqrt{5}$.

🔥 **Câu 59.** Tích phân $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$ có giá trị là

- A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{\pi}{2}$. C. $\frac{\pi}{3}$. D. π .

🔥 **Câu 60.** Tích phân $I = \int_0^1 x \sqrt{x^2+1} dx$ có giá trị là

- A. $\frac{3\sqrt{2}-1}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{2}-1}{2}$. D. $\frac{3\sqrt{2}-1}{2}$.

🔥 **Câu 61.** Tích phân $I = \int_{-1}^0 x \sqrt[3]{x+1} dx$ có giá trị là

- A. $-\frac{9}{28}$. B. $-\frac{3}{28}$. C. $\frac{3}{28}$. D. $\frac{9}{28}$.

🔥 **Câu 62.** Giá trị của tích phân $I = 2 \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x+1)\sqrt{x+1}}$ là

- A. $\frac{16-10\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{16-11\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{16-10\sqrt{2}}{4}$. D. $\frac{16-11\sqrt{2}}{3}$.

🔥 **Câu 63.** Giá trị của tích phân $I = \int_0^1 x^5 (1-x^3)^6 dx$ là

- A. $\frac{1}{167}$. B. $\frac{1}{168}$. C. $\frac{1}{166}$. D. $\frac{1}{165}$.

🔥 **Câu 64.** Giá trị của tích phân $\int_1^2 \frac{dx}{(2x-1)^2}$ là

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{2}{3}$.

🔥 **Câu 65.** Giá trị của tích phân $I = \int_0^1 \frac{(7x-1)^{99}}{(2x+1)^{101}} dx$ là

- A. $\frac{1}{900}[2^{100}-1]$. B. $\frac{1}{900}[2^{101}-1]$. C. $\frac{1}{900}[2^{99}-1]$. D. $\frac{1}{900}[2^{98}-1]$.

Câu 66. Giá trị của tích phân $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right) dx$ là

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 67. Giá trị của tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cos 2x dx$ là

- A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{8}$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 68. Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 6$, $\int_0^1 x f'(x) dx =$

5. Hãy tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

- A. $I = 1$. B. $I = -1$. C. $I = 11$. D. $I = 3$.

Câu 69. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0; 2]$ và $f(2) = 3$, $\int_0^2 f(x) dx = 3$. Tính

$$\int_0^2 x \cdot f'(x) dx.$$

- A. -3 . B. 3 . C. 0 . D. 6 .

Câu 70. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và $f(1) = 2$. Biết

$$\int_0^1 f(x) dx = 1, \text{ tính tích phân } I = \int_0^1 x \cdot f'(x) dx.$$

- A. $I = 1$. B. $I = -1$. C. $I = 3$. D. $I = -3$.

Câu 71. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1) f'(x) dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $I =$

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

- A. $I = 8$. B. $I = -8$. C. $I = 4$. D. $I = -4$.

Câu 72. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 5]$ và $f(5) = 10$, $\int_0^5 x f'(x) dx = 30$.

$$\text{Tính } \int_0^5 f(x) dx.$$

- A. 20 . B. -30 . C. -20 . D. 70 .

BÀI 3. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

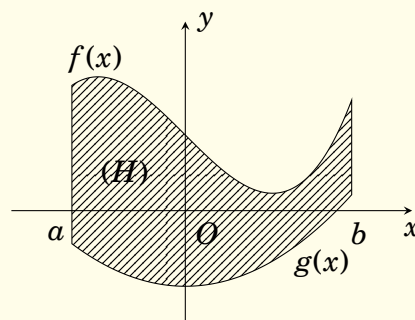
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

Định lý 1. Hình phẳng (H) giới hạn bởi

$\begin{cases} (C_1): y = f(x) \\ (C_2): y = g(x) \end{cases}$ thì diện tích của (H) được xác định bởi
 $x = a, x = b (a < b)$
 công thức

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$



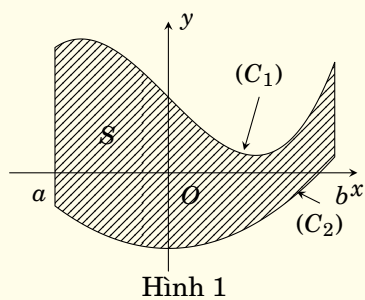
Phương pháp 1. Phương pháp đại số (phương pháp tự luận)

- Giải phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$ tìm nghiệm $x_i \in [a; b]$.
- Lập bảng xét dấu $f(x) - g(x)$, chẳng hạn

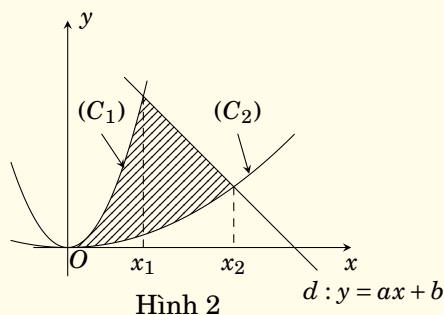
x	a	x_1	x_2	b	
$f(x) - g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \int_a^{x_1} [f(x) - g(x)] dx + \int_{x_1}^{x_2} [g(x) - f(x)] dx + \int_{x_2}^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Phương pháp 2. Phương pháp hình học (nếu 3 đường ta nên sử dụng hình học)



Hình 1



Hình 2

Hình 1 do (C_1) nằm trên (C_2) nên $S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx$.

Hình 2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi ba đường, trong $[0; x_1]$ thì (C_1) nằm trên (C_2) nằm dưới nên $S_1 = \int_0^{x_1} [f_1(x) - f_2(x)] dx$ và trong $[x_1; x_2]$ thì đường d nằm trên và (C_2) nằm dưới nên $S_2 = \int_{x_1}^{x_2} [ax + b - f_2(x)] dx$. Khi đó diện tích hình 2 là $S = S_1 + S_2$ là phần gạch sọc như hình.

Ví dụ 4. Tính diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường sau

$$(H): \{y = x^3 + 11x - 6, y = 6x^2, x = 0, x = 2\}.$$

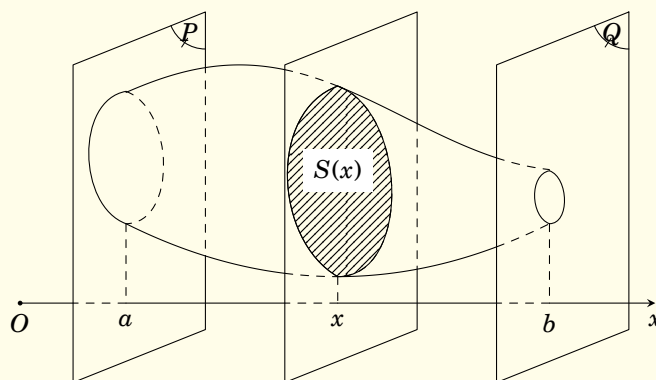
Lời giải:

2 THỂ TÍCH VẬT THỂ

1. Thể tích vật thể

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b , $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x , ($a \leq x \leq b$). Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, thể tích của vật

thể B được xác định: $V = \int_a^b S(x) dx$.



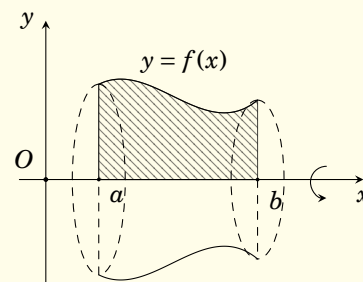
2. Thể tích khối tròn xoay

a)

Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox :

$$\begin{cases} (C): y = f(x) \\ Ox: y = 0 \\ x = a \\ x = b. \end{cases}$$

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

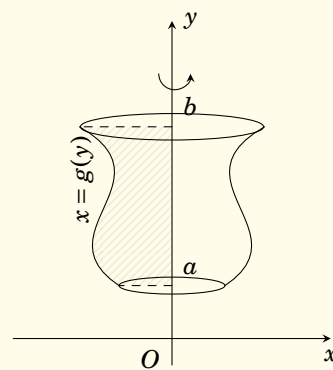


b)

Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục tung và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục Oy :

$$\begin{cases} (C): x = g(y) \\ Oy: x = 0 \\ y = c \\ y = d. \end{cases}$$

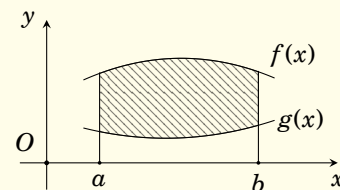
$$V_{Oy} = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy.$$



c)

Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ (cùng nằm một phía so với Ox) và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox :

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$$



✍ Ví dụ 5. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 3$, có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 3$) là một hình chữ nhật có hai kích thước bằng $3x$ và $2\sqrt{3x^2 - 2}$.

Lời giải:

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 6. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

Lời giải:

.....

.....

.....

B TRẮC NGHIỆM

🔗 Câu 1. Công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$) là:

A. $S = \pi \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$

B. $S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$

$$\text{C. } S = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx.$$

$$\text{D. } S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Câu 2. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, liên tục trên $[a; b]$ trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$) cho bởi công thức:

$$\text{A. } S = \int_a^b |f(x)| dx.$$

$$\text{B. } S = \int_a^b f(x) dx.$$

$$\text{C. } S = \pi \int_a^b |f(x)| dx.$$

$$\text{D. } S = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Câu 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 + 11x - 6, y = 6x^2, x = 0, x = 2$.

$$\text{A. } \frac{4}{3}.$$

$$\text{B. } \frac{5}{2}.$$

$$\text{C. } \frac{8}{3}.$$

$$\text{D. } \frac{18}{23}.$$

Câu 4. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^3, y = 4x$ là:

$$\text{A. } 8.$$

$$\text{B. } 9.$$

$$\text{C. } 12.$$

$$\text{D. } 13.$$

Câu 5. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x^2 + x - 2, y = x + 2$ và hai đường thẳng $x = -2; x = 3$. Diện tích của (H) bằng

$$\text{A. } \frac{87}{5}.$$

$$\text{B. } \frac{87}{4}.$$

$$\text{C. } \frac{87}{3}.$$

$$\text{D. } \frac{87}{5}.$$

Câu 6. Gọi (H) là hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = (1 + e^x)x, y = (1 + e)x$. Diện tích của (H) bằng

$$\text{A. } \frac{e-1}{2}.$$

$$\text{B. } \frac{e-2}{2}.$$

$$\text{C. } \frac{e+2}{2}.$$

$$\text{D. } \frac{e+1}{2}.$$

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính theo công thức

$$\text{A. } S = \int_a^b f(x) dx.$$

$$\text{B. } S = - \int_a^b f(x) dx.$$

$$\text{C. } S = - \int_a^b f^2(x) dx.$$

$$\text{D. } S = \int_a^b f^2(x) dx.$$

Câu 8. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính theo công thức

$$\text{A. } S = \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx.$$

$$\text{B. } S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

$$\text{C. } S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

$$\text{D. } S = \pi \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx.$$

Câu 9. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 3$ là

$$\text{A. } 19.$$

$$\text{B. } 18.$$

$$\text{C. } 20.$$

$$\text{D. } 21.$$

Câu 10. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 4$ là

$$\text{A. } 4.$$

$$\text{B. } \frac{14}{5}.$$

$$\text{C. } \frac{13}{3}.$$

$$\text{D. } \frac{14}{3}.$$

Câu 11. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt[3]{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 8$ là

$$\text{A. } \frac{45}{2}.$$

$$\text{B. } \frac{45}{4}.$$

$$\text{C. } \frac{45}{7}.$$

$$\text{D. } \frac{45}{8}.$$

Câu 12. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = \pi, x = \frac{3\pi}{2}$ là

$$\text{A. } 1.$$

$$\text{B. } \frac{1}{2}.$$

$$\text{C. } 2.$$

$$\text{D. } \frac{3}{2}.$$

Câu 13. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \tan x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{4}$ là

- A. $\ln \frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\ln \frac{\sqrt{6}}{3}$. C. $-\ln \frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $-\ln \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 14. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^{2x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3$ là

- A. $\frac{e^6}{2} + \frac{1}{2}$. B. $\frac{e^6}{2} - \frac{1}{2}$. C. $\frac{e^6}{3} + \frac{1}{3}$. D. $\frac{e^6}{3} - \frac{1}{3}$.

Câu 15. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 4$ là

- A. $\frac{53}{4}$. B. $\frac{51}{4}$. C. $\frac{49}{4}$. D. $\frac{25}{2}$.

Câu 16. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 4$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3$ là

- A. $\frac{142}{5}$. B. $\frac{143}{5}$. C. $\frac{144}{5}$. D. $\frac{141}{5}$.

Câu 17. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$, trục hoành và đường thẳng $x = 2$ là

- A. $3 + 2\ln 2$. B. $3 - \ln 2$. C. $3 - 2\ln 2$. D. $3 + \ln 2$.

Câu 18. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi parabol $y = 2 - x^2$ và đường thẳng $y = -x$ là

- A. $\frac{7}{2}$. B. $\frac{9}{4}$. C. 3. D. $\frac{9}{2}$.

Câu 19. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \cos 2x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ là

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Câu 20. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ và $y = \sqrt[3]{x}$ là

- A. $\frac{1}{12}$. B. $\frac{1}{13}$. C. $\frac{1}{14}$. D. $\frac{1}{15}$.

Câu 21. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ và $y = x^3 - 4x^2 + 2x + 1$ là

- A. $\frac{37}{13}$. B. $\frac{37}{12}$. C. 3. D. 4.

Câu 22. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4$, đường thẳng $x = 3$, trục tung và trục hoành là

- A. $\frac{22}{3}$. B. $\frac{32}{3}$. C. $\frac{25}{3}$. D. $\frac{23}{3}$.

Câu 23. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x \ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = e$ là

- A. $\frac{e^2 - 1}{2}$. B. $\frac{e^2 + 1}{2}$. C. $\frac{e^2 - 1}{4}$. D. $\frac{e^2 + 1}{4}$.

Câu 24. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x^2 + x - 2$, $y = x + 2$ và hai đường thẳng $x = -2$, $x = 3$. Diện tích của (H) bằng

- A. $\frac{87}{5}$. B. $\frac{87}{4}$. C. $\frac{87}{3}$. D. $\frac{87}{5}$.

Câu 25. Gọi (H) là hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = (1 + e^x)x$, $y = (1 + e)x$. Diện tích của (H) bằng

- A. $\frac{e - 1}{2}$. B. $\frac{e - 2}{2}$. C. $\frac{e - 2}{2}$. D. $\frac{e + 1}{2}$.

Câu 26. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = |x^2 - 1|$, $y = |x| + 5$. Diện tích của (H) bằng

- A. $\frac{71}{3}$. B. $\frac{73}{3}$. C. $\frac{70}{3}$. D. $\frac{74}{3}$.

Câu 27. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$, $y = x + 3$. Diện tích của (H) bằng

- A. $\frac{108}{5}$. B. $\frac{109}{5}$. C. $\frac{109}{6}$. D. $\frac{119}{6}$.

Câu 28. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P): $y = x^2 + 3$, tiếp tuyến của (P) tại điểm có hoành độ $x = 2$ và trục tung bằng

- A. $\frac{8}{3}$. B. $\frac{4}{3}$. C. 2. D. $\frac{7}{3}$.

Câu 29. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y^2 - 2y + x = 0$, $x + y = 0$ là

- A. $\frac{9}{4}$. B. $\frac{9}{2}$. C. $\frac{7}{2}$. D. $\frac{11}{2}$.

Câu 30. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^2$; $y = \frac{1}{27}x^2$; $y = \frac{27}{x}$ bằng

- A. $27\ln 2$. B. $27\ln 3$. C. $28\ln 3$. D. $29\ln 3$.

Câu 31. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = 1$, $y = x$ và đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{4}$ trong miền $x \geq 0, y \leq 1$ là $\frac{a}{b}$. Khi đó $b - a$ bằng

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 32. Diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 + 2x + 1$, trục hoành, $x = 1$ và $x = 2$ là

- A. $S = \frac{31}{4}$. B. $S = \frac{49}{4}$. C. $S = \frac{21}{4}$. D. $S = \frac{39}{4}$.

Câu 33. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4$, đường thẳng $x = 3$, trục tung và trục hoành là

- A. $\frac{22}{3}$. B. $\frac{32}{3}$. C. $\frac{25}{3}$. D. $\frac{23}{3}$.

Câu 34. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 8$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 8$) chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 . Tìm k để $S_1 = S_2$.

- A. $k = \ln \frac{9}{2}$. B. $k = \ln 4$. C. $k = \frac{2}{3} \ln 4$. D. $k = \ln 5$.

Câu 35. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 2$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$.

- A. $S = \frac{10}{3}$. B. $S = \frac{8}{3}$. C. $S = \frac{13}{3}$. D. $S = \frac{5}{3}$.

Câu 36. Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{4}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$ quanh trục Ox là

- A. 6π . B. 6π . C. 12π . D. 6π .

Câu 37. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \cos 4x$, Ox , $x = 0$; $x = \frac{\pi}{8}$ quay xung quanh trục Ox . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng

- A. $\frac{\pi^2}{2}$. B. $\frac{\pi^2}{16}$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. $\left(\frac{\pi+1}{16}\right).\pi$.

Câu 38. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, Ox , $x = a$, $x = b$ quay xung quanh trục Ox . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

- A. $V = \pi^2 \int_a^b f(x) dx$. B. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. C. $V = \int_a^b \pi^2 \cdot f^2(x) dx$. D. $V = \int_a^b f^2(x) dx$.

🔥 **Câu 39.** Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x-1}$; trục Ox và đường thẳng $x = 3$ quay xung quanh trục Ox . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

- A. $\frac{3}{2}\pi$. B. 3π . C. 2π . D. π .

🔥 **Câu 40.** Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ quay xung quanh trục Ox . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

- A. $\frac{79\pi}{63}$. B. $\frac{23\pi}{14}$. C. $\frac{5\pi}{4}$. D. 9π .

🔥 **Câu 41.** Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y^2 = x$, $x = a$, $x = b$, ($0 < a < b$) quay xung quanh trục Ox . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

- A. $V = \pi^2 \int_a^b x dx$. B. $V = \pi \int_a^b \sqrt{x} dx$. C. $V = \pi \int_a^b x dx$. D. $V = \pi^2 \int_a^b \sqrt{x} dx$.

🔥 **Câu 42.** Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = -x^2 + 2x$, $y = 0$ quay xung quanh trục Ox . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

- A. $\frac{496\pi}{15}$. B. $\frac{4\pi}{3}$. C. $\frac{64\pi}{15}$. D. $\frac{16\pi}{15}$.

🔥 **Câu 43.** Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = 0$ quay xung quanh trục Ox . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

- A. $\frac{3\pi}{2}$. B. $\frac{2\pi}{3}$. C. $\frac{\pi}{2}$. D. $\frac{4}{3}\pi$.

🔥 **Câu 44.** Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \tan x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ quay xung quanh trục Ox . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

- A. $V = \pi \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right)$. B. $V = \pi \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right)$. C. $V = \pi \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right)$. D. $V = \pi \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right)$.

🔥 **Câu 45.** Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 1 + \sqrt{x}$, Ox , $x = 0$, $x = 4$ quay xung quanh trục Ox . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

- A. $\frac{28\pi^2}{3}$. B. $\frac{68\pi}{3}$. C. $\frac{28\pi}{3}$. D. $\frac{68\pi^2}{3}$.

🔥 **Câu 46.** Ký hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x - x^2$ và $y = 0$. Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra bởi hình phẳng (H) khi nó quay xung quanh trục Ox .

- A. $\frac{16\pi}{15}$. B. $\frac{17\pi}{15}$. C. $\frac{18\pi}{15}$. D. $\frac{19\pi}{15}$.

🔥 **Câu 47.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$). Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

- A. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. B. $V = \pi^2 \int_a^b f^2(x) dx$. C. $V = \pi^2 \int_a^b f(x) dx$. D. $V = 2\pi \int_a^b f^2(x) dx$.

🔥 **Câu 48.** Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 1$; $x = 4$ khi quay quanh trục hoành được tính bởi công thức nào?

- A. $V = \pi \int_1^4 x dx$. B. $V = \int_1^4 |\sqrt{x}| dx$. C. $V = \pi^2 \int_1^4 x dx$. D. $V = \pi \int_1^4 \sqrt{x} dx$.

🔥 **Câu 49.** Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{\tan x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ quanh trục hoành là

- A. $V = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$. B. $V = \frac{\pi \ln 2}{2}$. C. $V = \frac{\pi^2}{4}$. D. $V = \frac{\pi}{4}$.

Câu 50. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0, x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là

- A. $\frac{\pi}{2}(e^2 - 1)$. B. $\pi(e^2 + 1)$. C. $\frac{\pi}{2}(e^2 + 1)$. D. $\pi(e^2 - 1)$.

Câu 51. Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = (x - 2)^2, y = 0, x = 0, x = 2$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- A. $V = \frac{32}{5}$. B. $V = \frac{32\pi}{5}$. C. $V = \frac{32}{5\pi}$. D. $V = 32\pi$.

Câu 52. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$ và các đường thẳng $y = 0, x = 0$ và $x = 1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

- A. $V = \int_0^1 e^{2x} dx$. B. $V = \pi \int_0^1 e^{x^2} dx$. C. $V = \int_0^1 e^{x^2} dx$. D. $V = \pi \int_0^1 e^{2x} dx$.

Câu 53. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$), xung quanh trục Ox .

- A. $V = \pi \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2$. B. $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.
C. $V = \int_a^b [f(x)]^2 dx$. D. $V = \int_a^b |f(x)| dx$.

Câu 54. Cho hình (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$. Quay hình (H) quanh trục hoành ta được vật thể có thể tích bằng:

- A. $\frac{9\pi}{2}$. B. $\frac{7\pi}{3}$. C. $\frac{5\pi}{31}$. D. $\frac{31\pi}{5}$.

Câu 55. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = 0, x = -1, x = 1$. Thể tích vật thể tròn xoay được tạo ra khi cho hình (H) quay quanh trục hoành bằng

- A. $\frac{e^2 - e^{-2}}{2}$. B. $\frac{(e^2 + e^{-2})\pi}{2}$. C. $\frac{e^4\pi}{2}$. D. $\frac{(e^2 - e^{-2})\pi}{2}$.

Câu 56. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 0, x = 2$ quanh trục hoành là:

- A. $V = 4\pi$. B. $V = 2$. C. $V = 4$. D. $V = 2\pi$.

Câu 57. Cho $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = a$ và $x = b$ quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích V . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$. B. $V = \pi \int_a^b |f(x)| dx$. C. $V = \int_a^b |f(x)| dx$. D. $V = \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

Câu 58. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$), xung quanh trục Ox .

- A. $V = \int_a^b f^2(x) dx$. B. $V = \pi \int_a^b f(x) dx$. C. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. D. $V = \int_a^b |f(x)| dx$.

Câu 59. Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2 - 1}$, trục hoành và đường thẳng $x = 3$. Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox .

- A. $V = \frac{22\pi}{3}$. B. $V = \frac{20}{3}$. C. $V = \frac{20\pi}{3}$. D. $V = \frac{16\pi}{3}$.

Câu 60. Cho hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = \tan x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{4}$. Tính thể tích V khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng này xung quanh trục Ox .

- A. $V = \pi \left(2 - \frac{\pi}{4}\right)$. B. $V = \pi \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$. C. $V = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$. D. $V = -\pi \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 61. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \cos x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 2\pi$. Tính thể tích V của khối nón tròn xoay sinh bởi (H) quay quanh trục hoành.

- A. $V = \pi$. B. $V = \pi^2$. C. $V = \pi^2 + \frac{\pi}{4}$. D. $V = 2\pi^2$.

Câu 62. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 2$ quanh trục hoành là:

- A. $V = 2$. B. $V = 4\pi$. C. $V = 2\pi$. D. $V = 4$.

Câu 63. Tích phân $\pi \int_2^3 (4 - x^2)^2 dx$ dùng để tính một trong bốn đại lượng sau, đó là đại lượng nào?

- A. Thể tích khối tròn xoay khi quay hình (H) giới hạn bởi các đường $y = 4 - x^2$; $y = 0$; $x = 3$ quanh trục Ox .
 B. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = (4 - x^2)^2$; $x = 2$; $x = 3$.
 C. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = (4 - x^2)^2$; $x = 3$; $y = 0$.
 D. Thể tích khối tròn xoay khi quay hình (H) giới hạn bởi các đường $y = 4 - x^2$; $y = 0$; $x = 3$; $x = 2$ quanh trục Ox .

Câu 64. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $x = 1$ và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh bởi hình (H) quay quanh trục Ox .

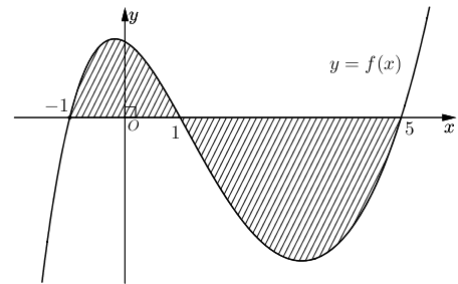
- A. $\frac{\pi}{3}$. B. $\frac{\pi}{2}$. C. π . D. $\sqrt{\pi}$.

Câu 65. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 3$. Quay (H) xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích là.

- A. $V = \int_1^3 |x^2 - 4x + 3| dx$. B. $V = \int_1^3 |x^2 - 4x + 3|^2 dx$.
 C. $V = \pi \int_1^3 (x^2 - 4x + 3)^2 dx$. D. $V = \pi \int_1^3 |x^2 - 4x + 3| dx$.

Câu 66.

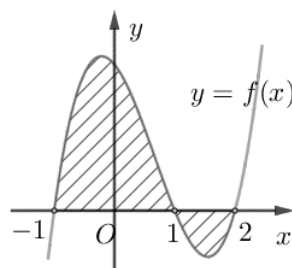
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 5$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào sau đây đúng?



- A. $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^5 f(x) dx$. B. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx$.
 C. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^5 f(x) dx$. D. $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx$.

Câu 67.

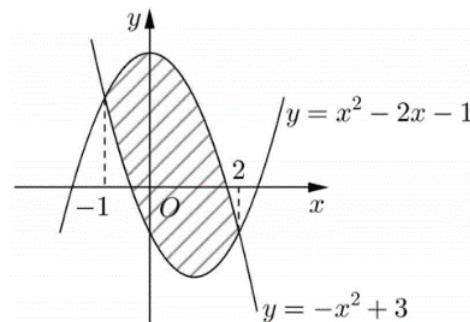
Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $S = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx.$ B. $S = -\int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx.$
 C. $S = -\int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx.$ D. $S = \int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx.$

Câu 68.

Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?

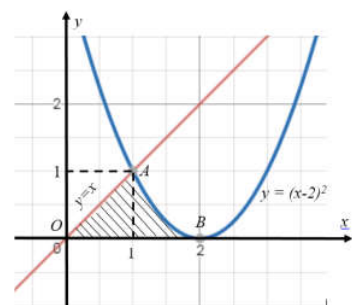


- A. $\int_{-1}^2 (-2x + 2)dx.$ B. $\int_{-1}^2 (2x - 2)dx.$
 C. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4)dx.$ D. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4)dx.$

Câu 69.

Tính diện tích phần hình phẳng gạch chéo (tam giác cong OAB) trong hình vẽ bên.

- A. $\frac{5}{6}.$ B. $\frac{5\pi}{6}.$ C. $\frac{8}{15}.$ D. $\frac{8\pi}{15}.$

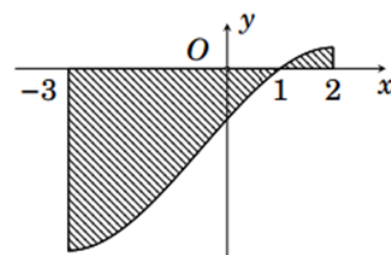


Câu 70.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -3$, $x = 2$ (như hình vẽ bên).

Đặt $a = \int_{-3}^1 f(x)dx$, $b = \int_1^2 f(x)dx$. Mệnh đề nào sau đây là đúng.

- A. $S = a + b.$ B. $S = a - b.$ C. $S = -a - b.$ D. $S = b - a.$



CHƯƠNG 4 SỐ PHỨC

BÀI 1. SỐ PHỨC - CÁC PHÉP TOÁN TRÊN SỐ PHỨC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa 1. Mỗi biểu thức dạng $a + bi$, trong đó $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$ được gọi là một **số phức**.

Đối với số phức $z = a + bi$, ta nói a là **phần thực**, b là **phần ảo** của z , i gọi là đơn vị ảo. Tập số phức $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$. Tập số thực $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Đặc biệt



- Khi phần ảo $b = 0 \Leftrightarrow z = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z$ là số thực.
- Khi phần thực $a = 0 \Leftrightarrow z = bi \Leftrightarrow z$ là số thuần ảo.
- Số $0 = 0 + 0i$ vừa là số thực, vừa là số ảo.

Ví dụ 7. Số phức $z = 3 - 2i$ có phần thực là phần ảo là

2 HAI SỐ PHỨC BẰNG NHAU

Hai số phức là bằng nhau nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}, \text{ với } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 8. Tìm các số thực x, y biết rằng $(2x + 1) + (3y - 2)i = (x + 2) + (y + 4)i$.

Lời giải:

.....

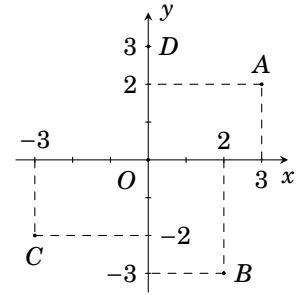
3 BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC

Điểm $M(a; b)$ trong hệ trục tọa độ vuông góc của mặt phẳng được gọi là điểm biểu diễn của số phức $z = a + bi$.

❖ Ví dụ 9.

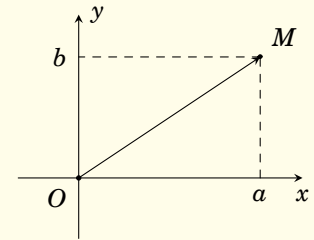
Quan sát hình vẽ bên cạnh, ta có

- ① Điểm A biểu diễn cho số phức
- ② Điểm B biểu diễn cho số phức
- ③ Điểm C biểu diễn cho số phức
- ④ Điểm D biểu diễn cho số phức

**4 MÔ-ĐUN CỦA SỐ PHỨC**

Giả sử số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ trên mặt phẳng tọa độ.

- ① Độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là mô-đun của số phức z và được ký hiệu là $|z|$. Khi đó, $|z| = |\overrightarrow{OM}| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- ② Kết quả, với mọi số phức z ta có
 - ☑ $|z| \geq 0$ và $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
 - ☑ $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.
 - ☑ $|z| = |\bar{z}|$.
 - ☑ $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
 - ☑ $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

**❖ Ví dụ 10.** Tìm mô-đun của các số phức sau

- ① $z = 3 - 2i \Rightarrow |z| = |3 - 2i| = \sqrt{\dots\dots\dots} = \dots\dots$
- ② $z = 1 + i\sqrt{3} \Rightarrow |z| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{\dots\dots\dots} = \dots\dots$

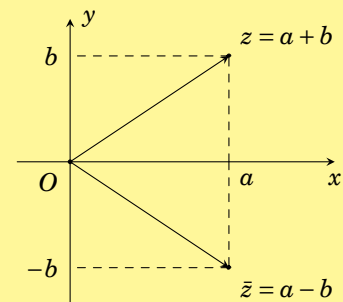
5 SỐ PHỨC LIÊN HỢP

Định nghĩa 2. Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$). Ta gọi $a - bi$ là số phức liên hợp của z và được ký hiệu là $\bar{z} = a - bi$.

Đặc biệt

- Trên mặt phẳng tọa độ, các điểm biểu diễn z và $\bar{z}$ đối xứng với nhau qua trục Ox .
- Từ định nghĩa ta có các kết quả sau

- ① $\bar{\bar{z}} = z$; $|\bar{z}| = |z|$.
- ② $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$.
- ③ $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.
- ④ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.
- ⑤ z là số thực $\Leftrightarrow z = \bar{z}$.
- ⑥ z là số thuần ảo $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$.



✎ Ví dụ 11.

- ① Cho $z = -3 - 2i \Rightarrow \bar{z} = \dots\dots\dots$
 ② Cho $\bar{z} = 4 + 3i \Rightarrow z = \dots\dots\dots$

6 CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA SỐ PHỨC

Cho hai số phức $z_1 = a + bi$ và $z_2 = c + di$.

- ① **Phép cộng** và **phép trừ** hai số phức được thực hiện theo quy tắc cộng, trừ đa thức.
 — **Phép cộng:** $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.
 — **Phép trừ:** $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.
 — Số phức đối của của số phức $z = a + bi$ là $-z = -a - bi$. Do đó, $z + (-z) = (-z) + z = 0$.
 ② **Phép nhân** số phức được thực hiện theo quy tắc nhân đa thức, rồi thay $i^2 = -1$ trong kết quả nhận được. Cụ thể, $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$.
 ③ **Phép chia:** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i, (z_2 \neq 0)$.
 ④ Số phức nghịch đảo của $z = a + bi \neq 0$ là $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$.

✎ Ví dụ 12. Cho hai số phức $z_1 = 5 + 2i$ và $z_2 = 3 + 7i$. Tìm phần thực, phần ảo và mô-đun của số phức $w = z_1 + z_2$ và số phức $w' = z_2 - z_1$.

Lời giải:

.....

✎ Ví dụ 13. Cho hai số phức $z_1 = 5 + 2i$ và $z_2 = 4 + 3i$. Hãy tính

- $w = z_1 \cdot z_2 = \dots\dots\dots$
- $z_1 \cdot \bar{z}_2 = \dots\dots\dots$
- $r = \frac{z_1}{z_2} = \dots\dots\dots$

B TRẮC NGHIỆM

🔥 Câu 1. Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i, z_2 = -4 - 5i$. Số phức $z = z_1 + z_2$ là

- A. $z = 2 + 2i$. B. $z = -2 - 2i$. C. $z = 2 - 2i$. D. $z = -2 + 2i$.

🔥 Câu 2. Biết $\frac{1}{3 + 4i} = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Tính ab .

- A. $\frac{12}{625}$. B. $-\frac{12}{625}$. C. $-\frac{12}{25}$. D. $\frac{12}{25}$.

🔥 Câu 3. Cho hai số phức $z_1 = 1 - 2i, z_2 = -2 + i$. Tìm số phức $z = z_1 z_2$.

- A. $z = 5i$. B. $z = -5i$. C. $z = 4 - 5i$. D. $z = -4 + 5i$.

🔥 Câu 4. Gọi a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức

$$z = |1 - \sqrt{3}i|(1 + 2i) + |3 - 4i|(2 + 3i).$$

Giá trị của $a - b$ là

- A. 7. B. -7. C. 31. D. -31.

Câu 5. Cho số phức $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 6 + 5i$. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = 6z_1 + 5z_2$

- A. $\bar{z} = 51 + 40i$. B. $\bar{z} = 51 - 40i$. C. $\bar{z} = 48 + 37i$. D. $\bar{z} = 48 - 37i$.

Câu 6. Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - 3i$. Xác định phần thực, phần ảo của số phức $z = z_1 + z_2$.

- A. Phần thực bằng 3; phần ảo bằng -5. B. Phần thực bằng 5; phần ảo bằng 5.
C. Phần thực bằng 3; phần ảo bằng 1. D. Phần thực bằng 3; phần ảo bằng -1.

Câu 7. Số phức liên hợp của số phức $z = 2 + i$ có điểm biểu diễn là:

- A. $A(1; 2)$. B. $B(-1; 2)$. C. $E(2; -1)$. D. $F(-2; 1)$.

Câu 8. Họa độ điểm $M(3; -1)$ là điểm biểu diễn số phức nào sau đây?

- A. $z = -1 + 3i$. B. $z = 1 - 3i$. C. $z = 3 - i$. D. $z = -3 + i$.

Câu 9. Số phức liên hợp của số phức $z = i(1 - 2i)$ có điểm biểu diễn là điểm nào dưới đây?

- A. $E(2; -1)$. B. $B(-1; 2)$. C. $A(1; 2)$. D. $F(-2; 1)$.

Câu 10. Cho số phức $z = -4 + 5i$. Biểu diễn hình học của z là điểm có tọa độ

- A. $(-4; 5)$. B. $(-4; -5)$. C. $(4; -5)$. D. $(4; 5)$.

Câu 11. Tìm tọa độ điểm M là điểm biểu diễn số phức z biết z thỏa mãn phương trình $(1 + i)\bar{z} = 3 - 5i$.

- A. $M(-1; 4)$. B. $M(-1; -4)$. C. $M(1; 4)$. D. $M(1; -4)$.

Câu 12. Tìm tọa độ điểm M là điểm biểu diễn số phức $z = 3 - 4i$.

- A. $M(3; -4)$. B. $M(-3; 4)$. C. $M(-3; -4)$. D. $M(3; 4)$.

Câu 13. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(2 + i)z + \frac{1 - i}{1 + i} = 5 - i$. Mô-đun của số phức $w = 1 + 2z + z^2$ có giá trị là

- A. 10. B. -10. C. 100. D. -100.

Câu 14. Cho số phức z thỏa $z = 2i - 2$. Mô-đun của số phức z^{2020} là

- A. 2^{4040} . B. 2^{2020} . C. 2^{6060} . D. 2^{3030} .

Câu 15. Gọi A là điểm biểu diễn của số phức $z = 2 + 5i$ và B là điểm biểu diễn của số phức $z = -2 + 5i$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua trục hoành.
B. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua trục tung.
C. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua gốc tọa độ O .
D. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.

Câu 16. Cho số phức $z = -2 + i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = iz$ trên mặt phẳng tọa độ?

- A. $P(-2; 1)$. B. $N(2; 1)$. C. $Q(1; 2)$. D. $M(-1; -2)$.

Câu 17. Cho số phức z thỏa mãn $(2z - 1)(1 + i) + (\bar{z} + 1)(1 - i) = 2 - 2i$. Giá trị của $|z|$ là

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 18. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 1.

Câu 19. Tìm số phức z thỏa mãn hệ thức $|z - (2 + i)| = \sqrt{10}$ và $z \cdot \bar{z} = 25$.

- A. $z = 3 + 4i; z = 5$. B. $z = 3 + 4i; z = -5$. C. $z = -3 + 4i; z = 5$. D. $z = 3 - 4i; z = -5$.

- Câu 20.** Cho số phức $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $7a + 4 + 2bi = -10 + (6 - 5a)i$. Tính $P = (a + b)|z|$
- A. $P = \frac{-4\sqrt{29}}{7}$. B. $P = 24\sqrt{17}$. C. $P = 12\sqrt{17}$. D. $P = \frac{72\sqrt{2}}{49}$.
- Câu 21.** Cho số phức $z_1 = 1 - 2i, z_2 = 2 + i$. Mô-đun của số phức $w = z_1 - 2z_2 + 3$ là
- A. $|w| = \sqrt{5}$. B. $|w| = 5$. C. $|w| = 4$. D. $|w| = \sqrt{13}$.
- Câu 22.** Cho hai số phức $z_1 = 2 - 2i, z_2 = -3 + 3i$. Khi đó số phức $z_1 - z_2$ là
- A. $-5 + 5i$. B. $-5i$. C. $5 - 5i$. D. $-1 + i$.
- Câu 23.** Tìm số phức z thỏa mãn $(2 - i)(1 + i) + \bar{z} = 4 - 2i$.
- A. $z = -1 - 3i$. B. $z = -1 + 3i$. C. $z = 1 - 3i$. D. $z = 1 + 3i$.
- Câu 24.** Cho số phức $z = -2 + 3i$. Tìm số phức $w = 2iz - \bar{z}$.
- A. $w = -4 - i$. B. $w = -4 - 7i$. C. $w = 8 - 7i$. D. $w = 8 - i$.
- Câu 25.** Cho số phức $z = 1 + i$. Khi đó $|z^3|$ bằng
- A. $\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{2}$. C. 4. D. 1.
- Câu 26.** Tính $A = 3 + 2i + (6 + i)(5 + i)$.
- A. $30 + 10i$. B. $32 + 13i$. C. $33 + 13i$. D. $33 + 12i$.
- Câu 27.** Cho số phức $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ tùy ý. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. Mô-đun của z là một số thực dương.
- B. $z^2 = |z|^2$.
- C. Số phức liên hợp của z có mô-đun bằng mô-đun của iz .
- D. Điểm $M(-a; b)$ là điểm biểu diễn của $\bar{z}$.
- Câu 28.** Nếu $z = 2 - 3i$ thì z^3 bằng:
- A. $-46 - 9i$. B. $46 + 9i$. C. $54 - 27i$. D. $27 + 24i$.
- Câu 29.** Số $\frac{1}{1+i}$ bằng
- A. $1 - i$. B. $1 + i$. C. $\frac{1}{2}(1 - i)$. D. i .
- Câu 30.** Số phức $z = (1 + 2i)(2 - 3i)$ bằng
- A. $8 - i$. B. 8. C. $8 + i$. D. $-4 + i$.
- Câu 31.** Cho hai số phức $z_1 = 1 - 2i, z_2 = x - 4 + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Tìm cặp $(x; y)$ để $z_2 = 2\bar{z}_1$.
- A. $(x; y) = (4; 6)$. B. $(x; y) = (5; -4)$. C. $(x; y) = (6; -4)$. D. $(x; y) = (6; 4)$.
- Câu 32.** Cho i là đơn vị ảo. Với $a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0$ thì số phức $a + bi$ có nghịch đảo là
- A. $\frac{1}{a+b}i$. B. $\frac{a-bi}{a+b}$. C. $\frac{a-bi}{a^2+b^2}$. D. $\frac{a+bi}{a^2+b^2}$.
- Câu 33.** Thu gọn số phức $z = i + (2 - 4i) - (3 - 2i)$ ta được?
- A. $z = -1 - i$. B. $z = 1 - i$. C. $z = -1 - 2i$. D. $z = 1 + i$.
- Câu 34.** Cho hai số phức $z_1 = 5 - 7i, z_2 = 2 - i$. Tính mô-đun của hiệu hai số phức đã cho
- A. $|z_1 - z_2| = 3\sqrt{5}$. B. $|z_1 - z_2| = 45$.
- C. $|z_1 - z_2| = \sqrt{113}$. D. $|z_1 - z_2| = \sqrt{74} - \sqrt{5}$.
- Câu 35.** Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i, z_2 = 3 - i$. Tìm số phức $z = \frac{z_2}{z_1}$.
- A. $z = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$. B. $z = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$. C. $z = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$. D. $z = -\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$.

❖ Câu 36. Rút gọn số phức $z = \frac{3-2i}{1-i} - \frac{1+i}{3+2i}$ ta được

- A. $z = \frac{55}{26} + \frac{15}{26}i$. B. $z = \frac{75}{26} + \frac{11}{26}i$. C. $z = \frac{75}{26} + \frac{15}{26}i$. D. $z = \frac{55}{26} + \frac{11}{26}i$.

❖ Câu 37. Tính $z = \frac{2-i}{1-i^{2017}}$.

- A. $z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$. B. $z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$. C. $z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$. D. $z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$.

❖ Câu 38. Tìm nghịch đảo $\frac{1}{z}$ của số phức $z = (-1+4i)^2$

- A. $\frac{1}{z} = \frac{-15}{289} + \frac{8i}{289}$. B. $\frac{1}{z} = \frac{15}{289} + \frac{8i}{289}$. C. $\frac{1}{z} = \frac{15}{289} - \frac{8i}{289}$. D. $\frac{1}{z} = \frac{-15}{289} - \frac{8i}{289}$.

❖ Câu 39. Cho số phức $z = 1 + \sqrt{3}i$ Khi đó.

- A. $\frac{1}{z} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. B. $\frac{1}{z} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$. C. $\frac{1}{z} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. D. $\frac{1}{z} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

❖ Câu 40. Số phức $z = \frac{1}{3-4i}$ là số phức nào dưới đây?

- A. $\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$. B. $-\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$. C. $\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$. D. $-\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$.

❖ Câu 41. Cho hai số phức: $z_1 = 2+5i$, $z_2 = 3-4i$. Tìm số phức $z = z_1 \cdot z_2$.

- A. $z = 26-7i$. B. $z = 6-20i$. C. $z = 26+7i$. D. $z = 6+20i$.

❖ Câu 42. Cho số phức $z = 2+4i$. Tìm số phức $w = iz + \bar{z}$.

- A. $w = 2+2i$. B. $w = -2-2i$. C. $w = 2-2i$. D. $w = -2+2i$.

❖ Câu 43. Thu gọn số phức $z = \frac{3+2i}{1-i} + \frac{1-i}{3+2i}$ ta được.

- A. $z = \frac{15}{26} + \frac{55}{26}i$. B. $z = \frac{23}{26} + \frac{63}{26}i$. C. $z = \frac{2}{13} + \frac{6}{13}i$. D. $z = \frac{21}{26} + \frac{61}{26}i$.

❖ Câu 44. Tính $z = (1+2i)^3 + (3-i)^2$ ta được:

- A. $z = 3-8i$. B. $z = -3+8i$. C. $z = 3+8i$. D. $z = -3-8i$.

❖ Câu 45. Cho hai số phức: $z_1 = 2+5i$, $z_1 = 2+5i$; $z_2 = 3-4i$. Tìm số phức $z = z_1 \cdot z_2$.

- A. $z = 26-7i$. B. $z = 6-20i$. C. $z = 26+7i$. D. $z = 6+20i$.

❖ Câu 46. Tính $z = \frac{3+2i}{1-i} + \frac{1-i}{3+2i}$?

- A. $z = \frac{2}{13} + \frac{6}{13}i$. B. $z = \frac{23}{26} + \frac{61}{26}i$. C. $z = \frac{23}{26} + \frac{63}{26}i$. D. $z = \frac{15}{26} + \frac{55}{26}i$.

❖ Câu 47. Cho số phức $z = 2+3i$. Tìm số phức $w = iz - \bar{z}$.

- A. $w = -3+5i$. B. $z = 5-5i$. C. $z = 5+3i$. D. $z = -5+5i$.

❖ Câu 48. Xác định số phức liên hợp $\bar{z}$ của số phức z biết $\frac{(i-1)z+2}{1-2i} = 2+3i$.

- A. $\bar{z} = \frac{7}{2} - \frac{5}{2}i$. B. $\bar{z} = \frac{7}{2} + \frac{5}{2}i$. C. $\bar{z} = -\frac{7}{2} - \frac{5}{2}i$. D. $\bar{z} = -\frac{7}{2} + \frac{5}{2}i$.

❖ Câu 49. Cho số phức $z = 1-3i$ Tìm số phức $w = iz + \bar{z}$

- A. $w = -4-4i$. B. $w = -4+4i$. C. $w = 4+4i$. D. $w = 4-4i$.

❖ Câu 50. Cho số phức $z = 3-2i$. Tìm số phức $w = \frac{5z}{2-i} - 2\bar{z}$?

- A. $w = -2-5i$. B. $w = -2+5i$. C. $w = 2-5i$. D. $w = 2+5i$.

❖ Câu 51. Cho số phức $\bar{z} = 3+2i$. Tìm số phức $w = 2i \cdot \bar{z} + z$.

- A. $w = 4-7i$. B. $w = -1+4i$. C. $w = 9-2i$. D. $w = 4+7i$.

❖ Câu 52. Cho số phức $z = 5+2i$. Tìm số phức $w = i\bar{z} - z$

- A. $w = -3+3i$. B. $w = 3-3i$. C. $w = -3-3i$. D. $w = 3+3i$.

🔥 **Câu 53.** Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm số phức $w = iz + 2\bar{z}i$.

- A. $w = -3 + 6i$. B. $w = -3 - 2i$. C. $w = 9 - 6i$. D. $w = 9 + 6i$.

🔥 **Câu 54.** Cho số phức $u = -1 + 2\sqrt{2}i$. Nếu $z^2 = u$ thì ta có.

- A. $\begin{cases} z = \sqrt{2} + i \\ z = 2\sqrt{2} - i \end{cases}$. B. $\begin{cases} z = 1 + \sqrt{2}i \\ z = -1 - \sqrt{2}i \end{cases}$. C. $\begin{cases} z = 1 + 2i \\ z = 2 - i \end{cases}$. D. $\begin{cases} z = \sqrt{2} + 2i \\ z = \sqrt{2} - i \end{cases}$.

🔥 **Câu 55.** Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 - 2i$. Tích $z_1 \cdot z_2$ bằng:

- A. $-5i$. B. $6 - 6i$. C. $5i$. D. $12 + 5i$.

🔥 **Câu 56.** Số phức nghịch đảo z^{-1} của số phức $z = 2 - 2i$ là

- A. $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$. B. $-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$. C. $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$. D. $-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$.

🔥 **Câu 57.** Nếu 2 số thực x, y thỏa: $x(3 + 2i) + y(1 - 4i) = 1 + 24i$ thì $x + y$ bằng:

- A. 4. B. 3. C. 2. D. -3.

🔥 **Câu 58.** Nếu số phức z có số phức nghịch đảo và số phức liên hợp bằng nhau thì

- A. $|z| = 1$. B. z là số ảo. C. z là số thực. D. $z = 1$.

🔥 **Câu 59.** Tính $S = 1 + i + i^2 + \dots + i^{2017} + i^{2018}$

- A. $S = -i$. B. $S = 1 + i$. C. $S = 1 - i$. D. $S = i$.

🔥 **Câu 60.** Tính $P = \left|1 + \sqrt{3}i\right|^{2018} + \left|1 - \sqrt{3}i\right|^{2018}$.

- A. $P = 2$. B. $P = 2^{1010}$. C. $P = 2^{2019}$. D. $P = 4$.

🔥 **Câu 61.** Cho số phức $z = 4 + 6i$. Tìm số phức $w = i\bar{z} + z$

- A. $w = 10 - 10i$. B. $w = -10 + 10i$. C. $w = 10 + 10i$. D. $w = -2 + 10i$.

🔥 **Câu 62.** Cho số phức $z = 3 + 2i$. Tìm số phức $w = z(1 + i)^2 - \bar{z}$.

- A. $w = 7 - 8i$. B. $w = -7 + 8i$. C. $w = 3 + 5i$. D. $w = -3 + 5i$.

🔥 **Câu 63.** Cho số phức $z = 1 - \frac{1}{3}i$. Tính số phức $w = i\bar{z} + 3z$.

- A. $w = \frac{8}{3}$. B. $w = \frac{8}{3} + i$. C. $w = \frac{10}{3} + i$. D. $\frac{10}{3}$.

🔥 **Câu 64.** Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 - 6z + 13 = 0$. Tìm số phức $w = z_0 + \frac{6}{z_0 + i}$.

- A. $w = -\frac{24}{5} + \frac{7}{5}i$. B. $w = -\frac{24}{5} - \frac{7}{5}i$. C. $w = \frac{24}{5} - \frac{7}{5}i$. D. $w = \frac{24}{5} + \frac{7}{5}i$.

🔥 **Câu 65.** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(1 + i)^2 \cdot \bar{z} + 4 - 5i = -1 + 6i$. Tính $S = a + b$

- A. $S = -3$. B. $S = 8$. C. $S = 6$. D. $S = 3$.

🔥 **Câu 66.** Cho các số phức $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 + 4i$. Tìm số phức liên hợp với số phức $z_1 \cdot z_2$.

- A. $-14 - 5i$. B. $-10 - 5i$. C. $-10 + 5i$. D. $14 - 5i$.

🔥 **Câu 67.** Cho số phức $z = 2 + 5i$. Số phức $w = iz + \bar{z}$ là:

- A. $w = 7 - 3i$. B. $w = -3 - 3i$. C. $w = 3 + 7i$. D. $w = -7 - 7i$.

🔥 **Câu 68.** Với hai số phức bất kỳ z_1, z_2 . Khẳng định nào sau đây đúng

- A. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. B. $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.
C. $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| + |z_1 - z_2|$. D. $|z_1 + z_2| \geq |z_1| + |z_2|$.

🔥 **Câu 69.** Số phức nghịch đảo của số phức $z = 1 + 3i$ là

- A. $\frac{1}{10}(1 + 3i)$. B. $\frac{1}{10}(1 - 3i)$. C. $1 - 3i$. D. $\frac{1}{\sqrt{10}}(1 + 3i)$.

- 🔹 **Câu 70.** Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - 3i$. Tổng của hai số phức z_1 và z_2 là
 A. $3 - 5i$. B. $3 + 5i$. C. $3 - i$. D. $3 + i$.
- 🔹 **Câu 71.** Căn bậc hai của số phức $z = -5 + 12i$ là
 A. $2 + 3i$. B. $-2 - 3i$. C. $2 - 3i, -2 + 3i$. D. $2 + 3i, -2 - 3i$.
- 🔹 **Câu 72.** Kết quả của phép tính $\frac{(2-i)^2(2i)^4}{1-i}$ là:
 A. $7 - i$. B. $56 - 8i$. C. $7 + i$. D. $56 + 8i$.
- 🔹 **Câu 73.** Cho số phức $z = 3 + 2i$. Tìm số phức $w = z(1+i)^2 - \bar{z}$
 A. $w = 3 + 5i$. B. $w = 7 - 8i$. C. $w = -3 + 5i$. D. $w = -7 + 8i$.
- 🔹 **Câu 74.** Rút gọn số phức $z = \frac{3-2i}{1-i} - \frac{1+i}{3+2i}$ ta được
 A. $z = \frac{55}{26} + \frac{15}{26}i$. B. $z = \frac{75}{26} + \frac{15}{26}i$. C. $z = \frac{75}{26} + \frac{11}{26}i$. D. $z = \frac{55}{26} + \frac{11}{26}i$.
- 🔹 **Câu 75.** Tính $z = \frac{2-i}{1-i^{2017}}$
 A. $z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$. B. $z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$. C. $z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$. D. $z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$.
- 🔹 **Câu 76.** Cho i là đơn vị ảo. Giá trị của biểu thức $z = (i^5 + i^4 + i^3 + i^2 + i + 1)^{20}$ là
 A. $-1024i$. B. -1024 . C. 1024 . D. $1024i$.
- 🔹 **Câu 77.** Cho số phức $z = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^9$. Khi đó
 A. $z = i$. B. $z = 1 - i$. C. $z = 1 + i$. D. $z = 1$.
- 🔹 **Câu 78.** Cho hai số phức $z_1 = m - 1 + 3i$ và $z_2 = 2 - mi$ ($m \in \mathbb{R}$). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $z_1 \cdot z_2$ là số thực.
 A. $m \in \{-2; -3\}$. B. $m = \frac{2}{5}$. C. $m \in \{3; -2\}$. D. $m \in \{-3; 2\}$.
- 🔹 **Câu 79.** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $7a + 4 + 2bi = -10 + (6 - 5a)i$. Tính $P = (a + b)|z|$.
 A. $P = 12\sqrt{17}$. B. $P = \frac{72\sqrt{2}}{49}$. C. $P = \frac{-4\sqrt{29}}{7}$. D. $P = 24\sqrt{17}$.
- 🔹 **Câu 80.** Phần thực của số phức $z = (3 - i)(1 - 4i)$ là:
 A. -1 . B. 13 . C. 1 . D. -13 .
- 🔹 **Câu 81.** Rút gọn biểu thức $M = (1 - i)^{2018}$ ta được
 A. $M = 2^{1009}$. B. $M = -2^{1009}$. C. $M = 2^{1009}i$. D. $M = -2^{1009}i$.
- 🔹 **Câu 82.** Cho số phức $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Số phức $1 + z + z^2$ bằng.
 A. $2 - \sqrt{3}i$. B. 0 . C. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. D. 1 .
- 🔹 **Câu 83.** Cho số phức $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$. Tính $z^5 + z^6 + z^7 + z^8$.
 A. -2 . B. 0 . C. $4i$. D. 4 .
- 🔹 **Câu 84.** Biểu diễn về dạng $z = a + bi$ của số phức $z = \frac{i^{2016}}{(1+2i)^2}$ là số phức nào?
 A. $\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$. B. $\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$. C. $\frac{-3}{25} - \frac{4}{25}i$. D. $\frac{-3}{25} + \frac{4}{25}i$.
- 🔹 **Câu 85.** Cho $z = (1 + i)^{2017}$. Tìm z .
 A. $z = -2^{1008} - 2^{1008}i$. B. $z = -2^{1008}i^{1008}$.
 C. $z = 2^{1008} + 2^{1008}i$. D. $z = 2^{1008}i^{1008}$.

🔥 Câu 86. Gọi x, x, y là hai số thực thỏa mãn biểu thức $\frac{x+yi}{1-i} = 3+2i$. Khi đó, tích số $x.y$ bằng:

A. $x.y = 1$.

B. $x.y = 5$.

C. $x.y = -1$.

D. $x.y = -5$.

🔥 Câu 87. Nếu $z = 2i + 3$ thì $\frac{z}{\bar{z}}$ bằng:

A. $\frac{5+6i}{11} - 2i$.

B. $\frac{5-12i}{13}$.

C. $\frac{5+12i}{13}$.

D. $\frac{3-4i}{7}$.

🔥 Câu 88. Cho số phức z thỏa mãn $(1+i\sqrt{3}).z = 4i$. Tính z^{2017} .

A. $8^{672}(\sqrt{3}.i - 1)$.

B. $-8^{672}(\sqrt{3} + i)$.

C. $8^{672}(1 - \sqrt{3}.i)$.

D. $8^{672}(\sqrt{3} + i)$.

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HỆ SỐ THỰC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC

Căn bậc hai của số phức $z = x + yi$ là một số phức $w = a + bi$ và tìm như sau

$$a + bi \Leftrightarrow x + yi = (a + bi)^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + (2ab) \cdot i = x + yi \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y \end{cases}$$

Giải hệ này ta tìm được a, b . Từ đó tìm được căn bậc hai của số phức z .

! Ta có thể làm tương tự đối với các trường hợp căn bậc ba, bậc bốn.

Ví dụ 14. Tìm căn bậc hai của số phức $z = 3 + 4i$.

Lời giải:

.....

.....

.....

2 PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ PHỨC

Xét phương trình bậc hai $az^2 + bz + c = 0$ (1) với $a \neq 0$ có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

— Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$.

— Nếu $\Delta \neq 0$ và gọi δ là căn bậc hai của Δ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ và $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$.

Ví dụ 15. Biết z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 4 = 0$. Tính $|z_1| + |z_2|$.

Lời giải:

.....

.....

.....

B TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong $\mathbb{C}$, phương trình $2x^2 + x + 1 = 0$ có nghiệm là:

A. $x_1 = \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{7}i); x_2 = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{7}i).$

B. $x_1 = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{7}i); x_2 = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{7}i).$

C. $x_1 = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{7}i); x_2 = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{7}i).$

D. $x_1 = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{7}i); x_2 = \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{7}i).$

Câu 2. Khai căn bậc hai số phức $z = -3 + 4i$ có kết quả:

A. $z_1 = 1 + 2i; z_2 = -1 - 2i.$

B. $z_1 = 1 + 2i; z_2 = 1 - 2i.$

C. $z_1 = 1 + 2i; z_2 = -1 + 2i.$

D. $z_1 = -1 + 2i; z_2 = -1 - 2i.$

Câu 3. Trong $\mathbb{C}$, nghiệm của phương trình $z^3 - 8 = 0$ là

A. $z_1 = 2; z_2 = 1 + \sqrt{3}i; z_3 = 1 - \sqrt{3}i.$

B. $z_1 = 2; z_2 = -1 + \sqrt{3}i; z_3 = -1 - \sqrt{3}i.$

C. $z_1 = -2; z_2 = -1 + \sqrt{3}i; z_3 = -1 - \sqrt{3}i.$

D. $z_1 = -2; z_2 = 1 + \sqrt{3}i; z_3 = 1 - \sqrt{3}i.$

Câu 4. Trong $\mathbb{C}$, phương trình $|z| + z = 2 + 4i$ có nghiệm là

A. $z = -3 + 4i.$

B. $z = -2 + 4i.$

C. $z = -4 + 4i.$

D. $z = -5 + 4i.$

Câu 5. Hai giá trị $x_1 = a + bi; x_2 = a - bi$ là hai nghiệm của phương trình:

A. $x^2 + 2ax + a^2 + b^2 = 0.$

B. $x^2 + 2ax + a^2 - b^2 = 0.$

C. $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0.$

D. $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0.$

Câu 6. Trong $\mathbb{C}$, phương trình $z^2 + 3iz + 4 = 0$ có nghiệm là:

A. $\begin{cases} z = 3i \\ z = 4i \end{cases}$

B. $\begin{cases} z = i \\ z = -4i \end{cases}$

C. $\begin{cases} z = 1 + i \\ z = -3i \end{cases}$

D. $\begin{cases} z = 2 - 3i \\ z = 1 + i \end{cases}$

Câu 7. Trong $\mathbb{C}$, phương trình $z^2 - z + 1 = 0$ có nghiệm là:

A. $\begin{cases} z = 3 + 5i \\ z = 3 - 5i \end{cases}$

B. $\begin{cases} z = \frac{2 + \sqrt{3}i}{2} \\ z = \frac{2 - \sqrt{3}i}{2} \end{cases}$

C. $\begin{cases} z = \frac{1 + \sqrt{5}i}{2} \\ z = \frac{1 - \sqrt{5}i}{2} \end{cases}$

D. $\begin{cases} z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \\ z = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \end{cases}$

Câu 8. Tính căn bậc hai của số phức $z = 8 + 6i$ ra kết quả:

A. $\begin{cases} z = 3 - i \\ z = 3 + i \end{cases}$

B. $\begin{cases} z = 3 + i \\ z = -3 - i \end{cases}$

C. $\begin{cases} z = -3 + i \\ z = 3 - i \end{cases}$

D. $\begin{cases} z = 3 - i \\ z = -3 - i \end{cases}$

Câu 9. Trong $\mathbb{C}$, nghiệm của phương trình $z^2 + \sqrt{5} = 0$ là:

A. $\begin{cases} z = \sqrt{5} \\ z = -\sqrt{5} \end{cases}$

B. $\begin{cases} z = \sqrt[4]{5}i \\ z = -\sqrt[4]{5}i \end{cases}$

C. $\sqrt{5}i.$

D. $-\sqrt{5}i.$

Câu 10. Trong $\mathbb{C}$, nghiệm của phương trình $z^2 = -5 + 12i$ là:

A. $\begin{cases} z = 2 + 3i \\ z = -2 - 3i \end{cases}$

B. $z = 2 + 3i.$

C. $z = 2 - 3i.$

D. $\begin{cases} z = 2 - 3i \\ z = -2 + 3i \end{cases}$

Câu 11. Trong $\mathbb{C}$, nghiệm của phương trình $z^2 + 4z + 5 = 0$ là:

A. $z = 2 - i.$

B. $z = -2 - i.$

C. $\begin{cases} z = -2 - i \\ z = -2 + i \end{cases}$

D. $z = -2 + i.$

Câu 12. Trong $\mathbb{C}$, nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 1 - 2i = 0$ là

A. $\begin{cases} z_1 = 2 - i \\ z_2 = -i \end{cases}$

B. $\begin{cases} z_1 = i - 2 \\ z_2 = -i \end{cases}$

C. $\begin{cases} z_1 = 2 + i \\ z_2 = 2 - i \end{cases}$

D. $\begin{cases} z_1 = 2 + i \\ z_2 = -i \end{cases}$

Câu 13. Cho $z = 3 + 4i$. Tìm căn bậc hai của z .

A. $-2 + i$ và $2 - i.$

B. $2 + i$ và $2 - i.$

C. $2 + i$ và $-2 - i.$

D. $\sqrt{3} + 2i$ và $-\sqrt{3} - 2i.$

Câu 14. Trong $\mathbb{C}$, phương trình $z^4 - 6z^2 + 25 = 0$ có nghiệm là:

A. $\pm 8, \pm 5i.$

B. $\pm 3, \pm 4i.$

C. $\pm 5, \pm 2i.$

D. $\pm(2 + i), \pm(2 - i).$

🔥 **Câu 15.** Trong $\mathbb{C}$, phương trình $z + \frac{1}{z} = 2i$ có nghiệm là:

- A. $(1 \pm \sqrt{3})i$. B. $(5 \pm \sqrt{2})i$. C. $(1 \pm \sqrt{2})i$. D. $(2 \pm \sqrt{5})i$.

🔥 **Câu 16.** Trong $\mathbb{C}$, phương trình $z^3 + 1 = 0$ có nghiệm là:

- A. $-1; \frac{2 \pm i\sqrt{3}}{2}$. B. $-1; \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. C. $-1; \frac{1 \pm i\sqrt{5}}{4}$. D. $-1; \frac{5 \pm i\sqrt{3}}{4}$.

🔥 **Câu 17.** Trong $\mathbb{C}$, phương trình $z^4 - 1 = 0$ có nghiệm là:

- A. $\pm 1, \pm 2i$. B. $\pm 2, \pm 2i$. C. $\pm 3, \pm 4i$. D. $\pm 1, \pm i$.

🔥 **Câu 18.** Trong $\mathbb{C}$, căn bậc hai của -121 là:

- A. $-11i$. B. $11i$. C. -11 . D. $11i$ và $-11i$.

🔥 **Câu 19.** Phương trình $8z^2 - 4z + 1 = 0$ có nghiệm là:

- A. $z_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i; z_2 = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}i$. B. $z_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i; z_2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}i$.
C. $z_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i; z_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$. D. $z_1 = \frac{2}{4} + \frac{1}{4}i; z_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$.

🔥 **Câu 20.** Biết $z_1; z_2$ là hai nghiệm của phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$. Khi đó giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ là:

- A. $\frac{9}{4}$. B. 9. C. 4. D. $-\frac{9}{4}$.

🔥 **Câu 21.** Phương trình $z^2 + az + b = 0$ có một nghiệm phức là $z = 1 + 2i$. Tổng 2 số a và b bằng:

- A. 0. B. -3. C. 3. D. -4.

🔥 **Câu 22.** Gọi $z_1; z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Khi đó phần thực của $z_1^2 + z_2^2$ là:

- A. 5. B. 6. C. 4. D. 7.

🔥 **Câu 23.** Gọi $z_1; z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 4 = 0$. Khi đó $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$ có giá trị là

- A. -7. B. -8. C. -4. D. 8.

🔥 **Câu 24.** Phương trình $z^3 = 8$ có bao nhiêu nghiệm phức với phần ảo âm?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

🔥 **Câu 25.** Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $2z^2 - 6z + 5 = 0$. Tìm iz_0 ?

- A. $iz_0 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$. B. $iz_0 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$. C. $iz_0 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$. D. $iz_0 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$.

🔥 **Câu 26.** Tìm nghiệm phức của phương trình: $x^2 + 2x + 2 = 0$.

- A. $x_1 = 2 - i; x_2 = 2 + i$. B. $x_1 = -1 - i; x_2 = -1 + i$.
C. $x_1 = 1 - i; x_2 = 1 + i$. D. $x_1 = -2 - i; x_2 = -2 + i$.

🔥 **Câu 27.** Cho các số phức $z_1 = 3 + 2i, z_2 = 3 - 2i$. Phương trình bậc hai có hai nghiệm z_1 và z_2 là

- A. $z^2 + 6z - 13 = 0$. B. $z^2 - 6z - 13 = 0$. C. $z^2 - 6z + 13 = 0$. D. $z^2 + 6z + 13 = 0$.

🔥 **Câu 28.** Phương trình $2x^2 - 5x + 4 = 0$ có nghiệm trên tập số phức là

- A. $x_1 = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i; x_2 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i$. B. $x_1 = -\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i; x_2 = -\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i$.
C. $x_1 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{7}}{4}i; x_2 = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{7}}{4}i$. D. $x_1 = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i; x_2 = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i$.

🔥 **Câu 29.** Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 6z + 13 = 0$ trong đó z_1 là số phức có phần ảo âm. Tìm số phức $\omega = z_1 + 2z_2$.

- A. $\omega = -9 - 2i$. B. $\omega = 9 - 2i$. C. $\omega = 9 + 2i$. D. $\omega = -9 + 2i$.

Câu 30. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn số phức $\frac{7-4i}{z_1}$ trên mặt phẳng phức?

- A. $M(1;2)$. B. $N(1;-2)$. C. $Q(3;-2)$. D. $P(3;2)$.

Câu 31. Biết z là một nghiệm của phương trình $z + \frac{1}{z} = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = z^3 + \frac{1}{z^3}$.

- A. $P = \frac{7}{4}$. B. $P = -2$. C. $P = 0$. D. .

Câu 32. Biết z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$. Khi đó giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ là:

- A. 4. B. $\frac{9}{4}$. C. 9. D. $-\frac{9}{4}$.

Câu 33. Phương trình sau có mấy nghiệm thực: $z^2 + 2z + 2 = 0$

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số nghiệm.

Câu 34. Tìm các căn bậc hai của -9 .

- A. $\pm 3i$. B. 3. C. $3i$. D. -3 .

Câu 35. Trong $\mathbb{C}$, phương trình $z^4 + 4 = 0$ có nghiệm là:

- A. $\pm(1-4i); \pm(1+4i)$. B. $\pm(1-2i); \pm(1+2i)$. C. $\pm(1-3i); \pm(1+3i)$. D. $\pm(1-i); \pm(1+i)$.

Câu 36. Giải phương trình $z^2 - 2z + 7 = 0$ trên tập số phức ta được nghiệm là:

- A. $z = 1 \pm 2\sqrt{2}i$. B. $z = 1 \pm \sqrt{6}i$. C. $z = 1 \pm \sqrt{2}i$. D. $z = 1 \pm \sqrt{7}i$.

Câu 37. Căn bậc hai của số phức $4 + 6\sqrt{5}i$ là:

- A. $-(3 + \sqrt{5}i)$. B. $(3 + \sqrt{5}i)$. C. $\pm(3 + \sqrt{5}i)$. D. 2.

Câu 38. Gọi z là căn bậc hai có phần ảo âm của $33 - 56i$. Phần thực của z là:

- A. 6. B. 7. C. 4. D. -4 .

Câu 39. Tập nghiệm trong $\mathbb{C}$ của phương trình $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ là:

- A. $\{-i; i; 1; -1\}$. B. $\{-i; i; 1\}$. C. $\{-i; -1\}$. D. $\{-i; i; -1\}$.

Câu 40. Trên tập số phức, phương trình bậc hai có hai nghiệm $\alpha = 4 + 3i; \beta = -2 + i$ là:

- A. $z^2 + (2+4i)z - (11+2i) = 0$. B. $z^2 - (2+4i)z - (11+2i) = 0$.
C. $z^2 - (2+4i)z + (11+2i) = 0$. D. $z^2 + (2+4i)z + (11+2i) = 0$.

Câu 41. Có bao nhiêu số phức thỏa mãn điều kiện $z^2 = |z|^2 + \bar{z}$?

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 42. Phương trình $(2+i)z^2 + az + b = 0 (a, b \in \mathbb{C})$ có hai nghiệm là $3+i$ và $1-2i$. Khi đó $a = ?$

- A. $-9-2i$. B. $15+5i$. C. $9+2i$. D. $15-5i$.

Câu 43. Cho số phức z thỏa mãn $z^2 - 6z + 13 = 0$. Tính $\left| z + \frac{6}{z+i} \right|$

- A. $\sqrt{17}$ và 4. B. $\sqrt{17}$ và 5. C. $\sqrt{17}$ và 3. D. $\sqrt{17}$ và 2.

Câu 44. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 + (1-3i)z - 2(1+i) = 0$. Khi đó $w = z_1^2 + z_2^2 - 3z_1z_2$ là số phức có môđun là:

- A. 2. B. $\sqrt{13}$. C. $2\sqrt{13}$. D. $\sqrt{20}$.

Câu 45. Số nghiệm của phương trình với ẩn số phức z : $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$ là:

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

Câu 46. Tìm số phức z để $z - \bar{z} = z^2$.

- A. $z = 0; z = 1-i$. B. $z = 0; z = 1+i$.
C. $z = 0; z = 1+i; z = 1-i$. D. $z = 1+i; z = 1-i$.

🔹 **Câu 47.** Với mọi số ảo z , số $z^2 + |z|^2$ là:

- A. Số thực âm. B. Số 0. C. Số thực dương. D. Số ảo khác 0.

🔹 **Câu 48.** Trong trường số phức phương trình $z^3 + 1 = 0$ có mấy nghiệm?

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

🔹 **Câu 49.** Giá trị của các số thực b, c để phương trình $z^2 + bz + c = 0$ nhận số phức $z = 1 + i$ làm một nghiệm là:

- A. $\begin{cases} b = 2 \\ c = -2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} b = -2 \\ c = -2 \end{cases}$. C. $\begin{cases} b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$. D. $\begin{cases} b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$.

🔹 **Câu 50.** Trên tập hợp số phức, phương trình $z^2 + 7z + 15 = 0$ có hai nghiệm z_1, z_2 . Giá trị biểu thức $z_1 + z_2 + z_1 z_2$ là:

- A. -7. B. 8. C. 15. D. 22.

🔹 **Câu 51.** Tìm số nguyên x, y sao cho số phức $z = x + yi$ thỏa mãn $z^3 = 18 + 26i$

- A. $\begin{cases} x = 3 \\ y = \pm 1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = -3 \\ y = \pm 1 \end{cases}$.

🔹 **Câu 52.** Phương trình $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$ có bao nhiêu nghiệm trên tập số phức?

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 6.

🔹 **Câu 53.** Giả sử z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$ và A, B là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 . Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là:

- A. $I(1; 1)$. B. $I(-1; 0)$. C. $I(0; 1)$. D. $I(1; 0)$.

🔹 **Câu 54.** Cho phương trình $z^2 + mz - 6i = 0$. Để phương trình có tổng bình phương hai nghiệm bằng 5 thì m có dạng $m = \pm(a + bi)$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Giá trị $a + 2b$ là:

- A. 0. B. 1. C. -2. D. -1.

🔹 **Câu 55.** Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là các nghiệm phức của phương trình $\left(\frac{z-1}{2z-i}\right)^4 = 1$. Giá trị của $P = (z_1^2 + 1)(z_2^2 + 1)(z_3^2 + 1)(z_4^2 + 1)$ là:

- A. $\frac{17}{8}$. B. $\frac{17}{9}$. C. $\frac{9}{17}$. D. $\frac{17i}{9}$.

🔹 **Câu 56.** Trong tập số phức, giá trị của m để phương trình bậc hai $z^2 + mz + i = 0$ có tổng bình phương hai nghiệm bằng $-4i$ là:

- A. $\pm(1 - i)$. B. $(1 - i)$. C. $\pm(1 + i)$. D. $-1 - i$.

🔹 **Câu 57.** Cho phương trình $z^2 - mz + 2m - 1 = 0$ trong đó m là tham số phức. Giá trị của m để phương trình có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1^2 + z_2^2 = -10$ là:

- A. $m = 2 \pm 2\sqrt{2}i$. B. $m = 2 + 2\sqrt{2}i$. C. $m = 2 - 2\sqrt{2}i$. D. $m = -2 - 2\sqrt{2}i$.

🔹 **Câu 58.** Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 8 = 0$, trong đó z_1 có phần ảo dương. Giá trị của số phức $w = (2z_1 + z_2)\overline{z_1}$ là:

- A. $12 + 6i$. B. 10. C. 8. D. $12 - 6i$.

🔹 **Câu 59.** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $z^4 - 1 = 0$ trên tập số phức là bao nhiêu?

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.

🔹 **Câu 60.** Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 6 = 0$. Trong đó z_1 có phần ảo âm. Giá trị biểu thức $M = |z_1| + |3z_1 - z_2|$ là:

- A. $\sqrt{6} - 2\sqrt{21}$. B. $\sqrt{6} + 2\sqrt{21}$. C. $\sqrt{6} + 4\sqrt{21}$. D. $\sqrt{6} - 4\sqrt{21}$.



HÌNH HỌC

CHƯƠNG 1

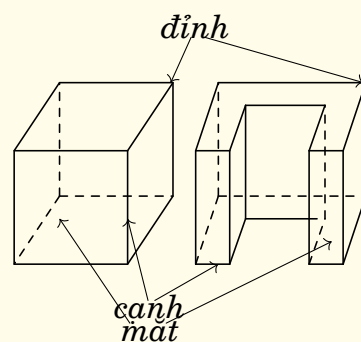
KHỐI ĐA DIỆN

BÀI 1. KHÁI NIỆM VỀ HÌNH ĐA DIỆN VÀ KHỐI ĐA DIỆN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

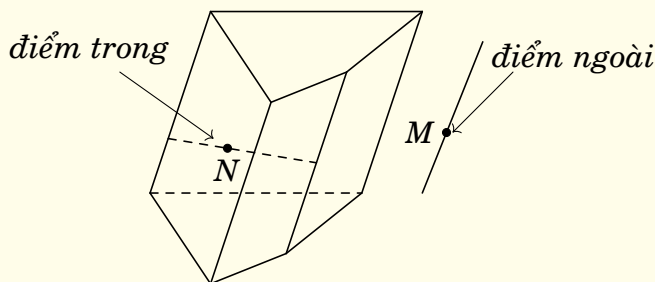
1 KHÁI NIỆM VỀ HÌNH ĐA DIỆN

- ① Hình đa diện (gọi tắt là đa diện) là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn hai tính chất:
 - Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.
 - Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.
- ② Mỗi đa giác gọi là một mặt của hình đa diện. Các đỉnh, cạnh của các đa giác ấy theo thứ tự được gọi là các đỉnh, cạnh của hình đa diện.



2 KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

- Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.
- Những điểm không thuộc khối đa diện được gọi là điểm ngoài của khối đa diện.
- Những điểm thuộc khối đa diện nhưng không thuộc hình đa diện đó được gọi là điểm trong của khối đa diện. Tập hợp các điểm trong được gọi là miền trong, tập hợp những điểm ngoài được gọi là miền ngoài của khối đa diện.
- Mỗi hình đa diện chia các điểm còn lại của không gian thành hai miền không giao nhau là miền trong và miền ngoài của hình đa diện, trong đó chỉ có miền ngoài là chứa hoàn toàn một đường thẳng nào đó.

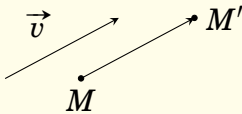


3 HAI ĐA DIỆN BẰNG NHAU

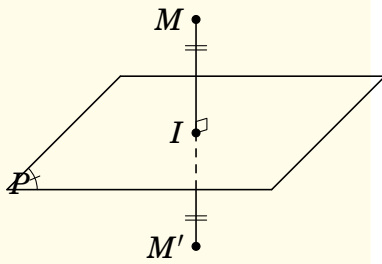
Phép dời hình trong không gian. Trong không gian, quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' xác định duy nhất được gọi là một phép biến hình trong không gian. Phép biến hình trong không gian được gọi là phép dời hình nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm tùy ý.

* Một số phép dời hình trong không gian:

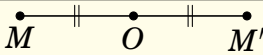
① Phép tịnh tiến

Nội dung	Hình vẽ
Là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.	

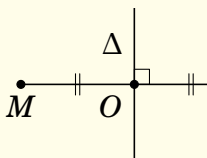
② Phép đối xứng qua mặt phẳng

Nội dung	Hình vẽ
Là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của MM' .	
Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến hình H thành chính nó thì (P) được gọi là mặt phẳng đối xứng của H .	

③ Phép đối xứng qua tâm O.

Nội dung	Hình vẽ
Là phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho O là trung điểm MM' . Nếu phép đối xứng tâm O biến hình (H) thành chính nó thì O được gọi là tâm đối xứng của (H) .	

④ Phép đối xứng trục

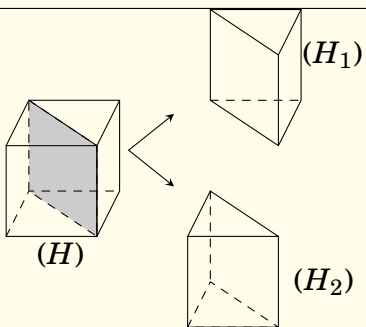
Nội dung	Hình vẽ
Là phép biến hình biến mọi điểm thuộc đường thẳng Δ thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc Δ thành điểm M' sao cho Δ là đường trung trực của MM' .	
Nếu phép đối xứng trục Δ biến hình (H) thành chính nó thì Δ được gọi là trục đối xứng của (H) .	



- Thực hiện liên tiếp các phép dời hình sẽ được một phép dời hình.
- Phép dời hình biến đa diện (H) thành đa diện (H') , biến đỉnh, cạnh, mặt của (H) thành đỉnh, cạnh, mặt tương ứng của (H') .

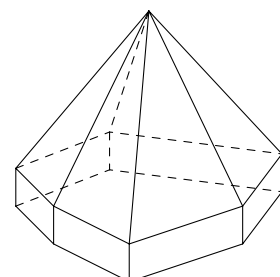
Hai hình bằng nhau: Hai hình đa diện được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

4 PHÂN CHIA VÀ LẮP GHÉP CÁC KHỐI ĐA DIỆN

Nội dung	Hình vẽ
Nếu khối đa diện (H) là hợp của hai khối đa diện (H_1), (H_2) sao cho (H_1) và (H_2) không có chung điểm trong nào thì ta nói có thể chia được khối đa diện (H) thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2), hay có thể lắp ghép hai khối đa diện (H_1) và (H_2) với nhau để được khối đa diện (H).	

B TRẮC NGHIỆM

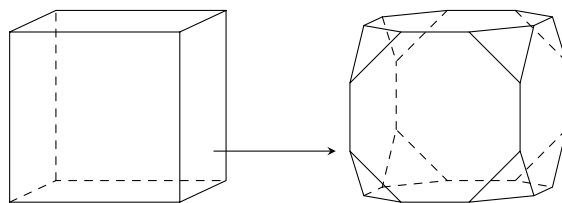
- 🔥 **Câu 1.** Hình bát diện đều có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?
 A. 9. B. 8. C. 5. D. 6.
- 🔥 **Câu 2.** Hình nào dưới đây không có trục đối xứng?
 A. Hình bình hành. B. Hình thang cân. C. Hình elip. D. Tam giác cân.
- 🔥 **Câu 3.** Một hình hộp chữ nhật có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?
 A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.
- 🔥 **Câu 4.** Hình đa diện nào sau đây không có mặt đối xứng?
 A. Hình chóp tứ giác đều. B. Hình lập phương.
 C. Hình lăng trụ lục giác đều. D. Hình lăng trụ tam giác.
- 🔥 **Câu 5.** Hình nào sau đây không có trục đối xứng?
 A. Hình tròn. B. Đường thẳng. C. Hình hộp xiên. D. Tam giác đều.
- 🔥 **Câu 6.** Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?
 A. 8. B. 4. C. 2. D. 6.
- 🔥 **Câu 7.** Hình lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?
 A. 3. B. 5. C. 6. D. 4.
- 🔥 **Câu 8.** Số mặt phẳng đối xứng của khối tứ diện đều là
 A. 7. B. 8. C. 9. D. 6.
- 🔥 **Câu 9.** Tổng số đỉnh, số cạnh và số mặt của hình lập phương là
 A. 16. B. 26. C. 8. D. 24.
- 🔥 **Câu 10.** Khối lăng trụ ngũ giác có bao nhiêu mặt?
 A. 6 mặt. B. 5 mặt. C. 7 mặt. D. 9 mặt.
- 🔥 **Câu 11.** Mỗi đỉnh của một hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất
 A. bốn mặt. B. hai mặt. C. ba mặt. D. năm mặt.
- 🔥 **Câu 12.** Hình đa diện bên có bao nhiêu mặt?
 A. 13. B. 9. C. 11. D. 12.



Câu 13.

Một hình lập phương được cắt đi 8 góc như hình vẽ bên. Hỏi hình mới nhận được có bao nhiêu mặt?

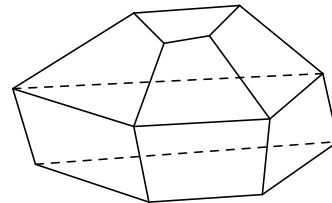
- A. 12. B. 10. C. 14. D. 16.



Câu 14.

Hình đa diện trong hình vẽ bên có bao nhiêu cạnh?

- A. 16. B. 20. C. 12. D. 8.



Câu 15. Một hình chóp có tất cả 2018 mặt. Hỏi hình chóp đó có bao nhiêu đỉnh?

- A. 1009. B. 2018. C. 2017. D. 1008.

Câu 16. Phát biểu nào sau đây đúng?

- A. Trong một khối đa diện, số đỉnh luôn lớn hơn số cạnh.
B. Trong một khối đa diện, mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt.
C. Tồn tại khối đa diện mà có cạnh là cạnh chung của ba mặt.
D. Trong một khối đa diện, số mặt luôn bằng số đỉnh.

Câu 17. Gọi a, b lần lượt là số cạnh và số mặt của hình chóp tứ giác. Tính hiệu $T = a - b$.

- A. $T = 7$. B. $T = 5$. C. $T = 4$. D. $T = 3$.

Câu 18. Mặt phẳng nào sau đây chia khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thành hai khối lăng trụ?

- A. $(A'BC')$. B. (ABC') . C. $(AB'C)$. D. $(A'BD)$.

Câu 19. Khẳng định nào sau đây đúng? Cắt khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bởi mp($A'BC$) ta được

- A. Một khối chóp tam giác và một khối chóp ngũ giác.
B. Hai khối chóp tứ giác.
C. Một khối chóp tam giác và một khối chóp tứ giác.
D. Hai khối chóp tam giác.

Câu 20. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(BDD'B')$ chia khối lập phương thành

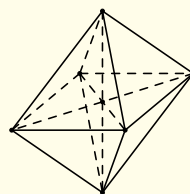
- A. Hai khối lăng trụ tam giác. B. Hai khối tứ diện.
C. Hai khối lăng trụ tứ giác. D. Hai khối chóp tứ giác.

BÀI 2. KHỐI ĐA DIỆN LỖI, KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

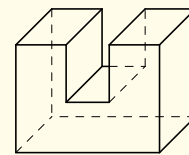
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 KHỐI ĐA DIỆN LỖI

Một khối đa diện được gọi là khối đa diện lồi nếu với bất kì hai điểm A và B nào của nó thì mọi điểm của đoạn AB cũng thuộc khối đó.



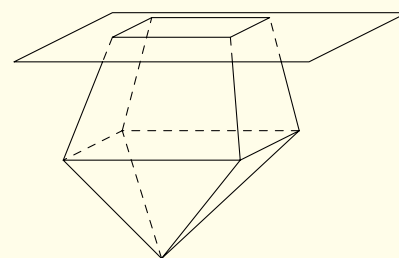
Khối đa diện lồi



Khối đa diện không lồi



- ① Một khối đa diện là khối đa diện lồi khi và chỉ khi miền trong của nó luôn nằm một phía đối với mỗi mặt phẳng đi qua một mặt của nó.
- ② **Công thức Ô-le:** Trong một khối đa diện lồi nếu gọi D là số đỉnh, C là số cạnh, M là số mặt thì ta luôn có $D + M = C + 2$.



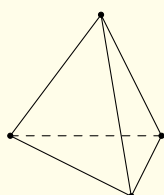
2 KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

Định nghĩa 1. ① Khối đa diện đều là một khối đa diện lồi có hai tính chất sau đây
 — Các mặt là những đa giác đều p cạnh.
 — Mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng q cạnh.
 ② Khối đa diện đều như vậy gọi là khối đa diện đều loại $\{p; q\}$.

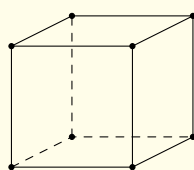
Định lí 1. Chỉ có năm khối đa diện đều. Đó là:

- Loại $\{3; 3\}$: khối tứ diện đều.
- Loại $\{4; 3\}$: khối lập phương.
- Loại $\{3; 4\}$: khối bát diện đều.
- Loại $\{5; 3\}$: khối mười hai mặt đều.
- Loại $\{3; 5\}$: khối hai mươi mặt đều.

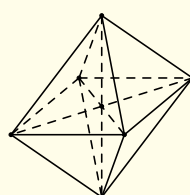
Tham khảo hình biểu diễn của năm loại khối đa diện.



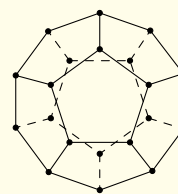
Khối tứ diện đều



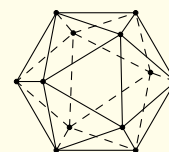
Khối lập phương



Khối bát diện đều



Khối mười hai mặt
đều



Khối hai mươi mặt
đều

Bảng tóm tắt của năm loại khối đa diện đều:

Đa diện đều cạnh a	Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt	Thể tích V	Bán kính cầu ngoại tiếp R
Tứ diện đều $\{3;3\}$	4	6	4	$\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$	$\frac{a\sqrt{6}}{4}$
Lập phương $\{4;3\}$	8	12	6	a^3	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$
Bát diện đều $\{3;4\}$	6	12	8	$\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$
Mười hai mặt đều $\{5;3\}$	20	30	12	$\frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$	$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}a$
Hai mươi mặt đều $\{3;5\}$	12	30	20	$\frac{15+5\sqrt{5}}{12}a^3$	$\frac{\sqrt{10}+\sqrt{20}}{4}a$

Giả sử khối đa diện đều loại $\{p;q\}$ có D đỉnh, C cạnh và M mặt thì ta luôn có

$$q \cdot D = 2C = p \cdot M$$

B TRẮC NGHIỆM

🔥 **Câu 1.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Số đỉnh và số mặt của một hình đa diện luôn bằng nhau.
- B. Tồn tại hình đa diện có số đỉnh và số mặt bằng nhau.
- C. Tồn tại một hình đa diện có số cạnh bằng số đỉnh.
- D. Tồn tại một hình đa diện có số cạnh và mặt bằng nhau.

🔥 **Câu 2.** Số các đỉnh hoặc số các mặt của bất kì hình đa diện nào cũng:

- A. Lớn hơn hoặc bằng 4.
- B. Lớn hơn 4.
- C. Lớn hơn hoặc bằng 5.
- D. Lớn hơn 5.

🔥 **Câu 3.** Số các cạnh của hình đa diện luôn luôn:

- A. Lớn hơn hoặc bằng 6.
- B. Lớn hơn 6.
- C. Lớn hơn 7.
- D. Lớn hơn hoặc bằng 8.

🔥 **Câu 4.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. Khối tứ diện là khối đa diện lồi.
- B. Lắp ghép hai khối hộp được một khối đa diện lồi.
- C. Khối lăng trụ tam giác là khối đa diện lồi.
- D. Khối hộp là khối đa diện lồi.

🔥 **Câu 5.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. Hai khối chóp có diện tích đáy và chiều cao tương ứng bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.
- B. Hai khối hộp chữ nhật có diện tích toàn phần bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.
- C. Hai khối lăng trụ có diện tích đáy và chiều cao tương ứng bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.
- D. Hai khối lập phương có diện tích toàn phần bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.

🔥 **Câu 6.** Cho một hình đa diện. Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

- A. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất 3 mặt.
- B. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất 3 cạnh.

C. Mỗi cạnh là cạnh chung của ít nhất 3 mặt.

D. Mỗi mặt có ít nhất 3 cạnh.

Câu 7. Hãy chọn cụm từ (hoặc từ) dưới đây điền vào chỗ trống để mệnh đề sau trở thành mệnh đề đúng: “Số cạnh của một hình đa diện luôn số mặt của hình đa diện đó.”

A. nhỏ hơn hoặc bằng.

B. lớn hơn.

C. bằng.

D. nhỏ hơn.

Câu 8. Mặt phẳng $(AB'C')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành các khối đa diện nào?

A. Hai khối chóp tứ giác.

B. Hai khối chóp tam giác.

C. Một khối chóp tam giác và một khối chóp ngũ giác.

D. Một khối chóp tam giác và một khối chóp tứ giác.

Câu 9. Cho khối đa diện đều loại $\{p; q\}$, chỉ số p là:

A. Số cạnh của mỗi mặt.

B. Số mặt của đa diện.

C. Số cạnh của đa diện.

D. Số đỉnh của đa diện.

Câu 10. Cho khối đa diện đều loại $\{p; q\}$, chỉ số q là:

A. Số đỉnh của đa diện.

B. Số cạnh của đa diện.

C. Số mặt của đa diện.

D. Số mặt ở mỗi đỉnh.

Câu 11. Số cạnh của một hình bát diện đều là:

A. 8.

B. 10.

C. 12.

D. 16.

Câu 12. Hình đa diện nào dưới đây không có tâm đối xứng?

A. Tứ diện đều.

B. Bát diện đều.

C. Hình lập phương.

D. Lăng trụ lục giác đều.

Câu 13. Hình lăng trụ tam giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 14. Hình bát diện đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4.

B. 9.

C. 6.

D. 12.

Câu 15. Hình lập phương có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 8.

B. 9.

C. 10.

D. 12.

Câu 16. Hình tứ diện đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4.

B. 6.

C. 8.

D. 10.

Câu 17. Một hình hộp đứng có đáy là hình thoi (không phải là hình vuông) có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 18. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước đôi một khác nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4.

B. 9.

C. 3.

D. 6.

Câu 19. Cho hình bát diện đều cạnh a . Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình bát diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = 2\sqrt{3}a^2$.

B. $S = 4\sqrt{3}a^2$.

C. $S = 8a^2$.

D. $S = \sqrt{3}a^2$.

Câu 20. Số cạnh của tứ diện đều là

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Câu 21. Khối đa diện đều loại $\{4; 3\}$ có bao nhiêu mặt

A. 6.

B. 12.

C. 5.

D. 8.

🔥 **Câu 22.** Khối lập phương là khối đa diện đều loại:

- A. $\{5;3\}$. B. $\{3;4\}$. C. $\{4;3\}$. D. $\{3;5\}$.

🔥 **Câu 23.** Khối đa diện đều loại $\{5;3\}$ có số mặt là:

- A. 14. B. 12. C. 10. D. 8.

🔥 **Câu 24.** Có bao nhiêu loại khối đa diện đều?

- A. 3. B. 5. C. 20. D. Vô số.

🔥 **Câu 25.** Khối đa diện đều nào sau đây có mặt không phải là tam giác đều?

- A. Thập nhị diện đều. B. Nhị thập diện đều.
C. Bát diện đều. D. Tứ diện đều.

🔥 **Câu 26.** Số cạnh của một bát diện đều là:

- A. 12. B. 8. C. 10. D. 16.

🔥 **Câu 27.** Mỗi đỉnh của bát diện đều là đỉnh chung của bao nhiêu cạnh?

- A. 3. B. 5. C. 8. D. 4.

🔥 **Câu 28.** Mỗi đỉnh của nhị thập diện đều là đỉnh chung của bao nhiêu cạnh?

- A. 20. B. 12. C. 8. D. 5.

🔥 **Câu 29.** Khối mười hai mặt đều thuộc loại

- A. $\{5;3\}$. B. $\{3;5\}$. C. $\{4;3\}$. D. $\{3;4\}$.

🔥 **Câu 30.** Khối đa diện đều loại $\{3;4\}$ có số cạnh là:

- A. 14. B. 12. C. 10. D. 8.

🔥 **Câu 31.** Khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ có số đỉnh là:

- A. 4. B. 6. C. 8. D. 10.

🔥 **Câu 32.** Số cạnh và số mặt của một hình bát diện đều là:

- A. Tám. B. Mười. C. Hai mươi. D. Mười sáu.

🔥 **Câu 33.** Hình bát diện đều có bao nhiêu đỉnh

- A. 8. B. 6. C. 9. D. 7.

🔥 **Câu 34.** Hình mười hai mặt đều thuộc loại khối đa diện nào sau đây ?

- A. $\{3;3\}$. B. $\{4;3\}$. C. $\{3;5\}$. D. $\{5;3\}$.

🔥 **Câu 35.** Số đỉnh của hình mười hai mặt đều là:

- A. Mười hai. B. Mười sáu. C. Hai mươi. D. Ba mươi.

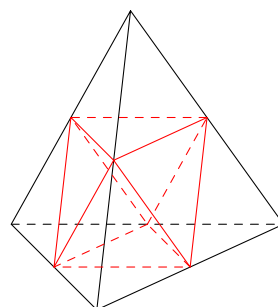
🔥 **Câu 36.** Số cạnh của hình mười hai mặt đều là:

- A. Mười hai. B. Mười sáu. C. Hai mươi. D. Ba mươi.

🔥 **Câu 37.**

Cho khối tứ diện đều (H). Gọi (H_1) là khối đa diện có các đỉnh là trung điểm của các cạnh khối tứ diện (H). Hỏi (H_1) là khối đa diện đều loại nào?

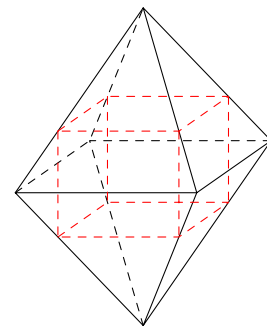
- A. $\{3;3\}$. B. $\{3;4\}$. C. $\{4;3\}$. D. $\{3;5\}$.



🔥 **Câu 38.**

Cho khối bát diện đều (H). Gọi (H_1) là khối đa diện có đỉnh là trọng tâm các mặt của (H). Khi đó (H) là khối đa diện đều loại

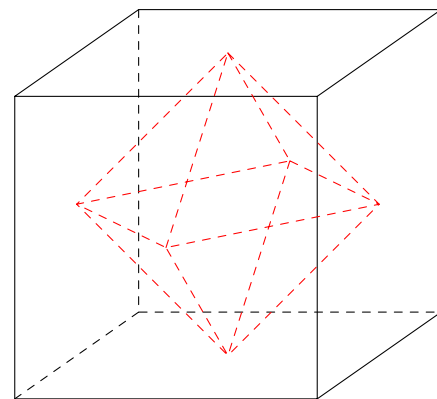
- A. $\{3;3\}$. B. $\{3;4\}$. C. $\{4;3\}$. D. $\{3;5\}$.



🔥 Câu 39.

Cho khối lập phương (H). Gọi (H_1) là khối đa diện đều đỉnh là tâm các mặt của (H). Hỏi (H_1) là khối đa diện đều loại nào?

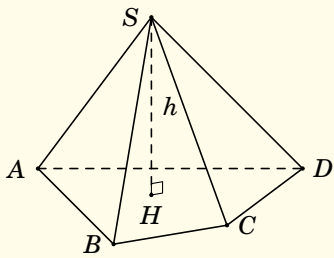
- A. $\{3;4\}$. B. $\{4;3\}$. C. $\{3;3\}$. D. $\{5;3\}$.



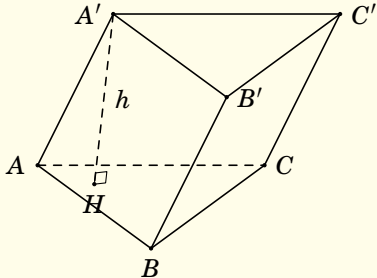
BÀI 3. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

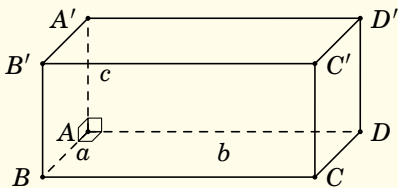
1 THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

Nội dung	Hình vẽ
$V_{\text{Chóp}} = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} \cdot h$ Trong đó $\begin{cases} S_{\text{đáy}} \text{ là diện tích mặt đáy} \\ h \text{ là chiều cao khối chóp.} \end{cases}$ $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot d(S, (ABCD))$	

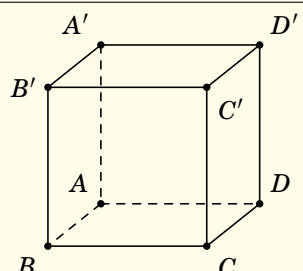
2 THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

Nội dung	Hình vẽ
$V_{\text{Lăng trụ}} = S_{\text{đáy}} \cdot h$ Trong đó $\begin{cases} S_{\text{đáy}} \text{ là diện tích mặt đáy} \\ h \text{ là chiều cao lăng trụ.} \end{cases}$! Lăng trụ đứng có chiều cao chính là độ dài cạnh bên.	

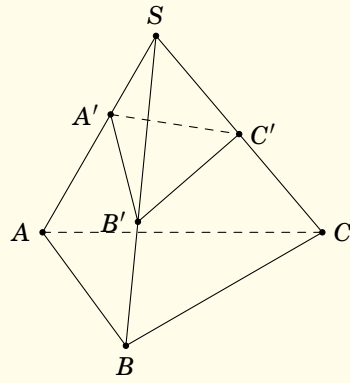
3 THỂ TÍCH KHỐI HỘP CHỮ NHẬT

Nội dung	Hình vẽ
$V_{\text{Hộp chữ nhật}} = abc$ Trong đó a, b, c là độ dài các cạnh khối hộp chữ nhật.	

4 THỂ TÍCH KHỐI LẬP PHƯƠNG

Nội dung	Hình vẽ
$V = a^3$	

5 TỈ SỐ THỂ TÍCH

Nội dung	Hình vẽ
$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$ Thể tích khối chóp cắt $ABC.A'B'C'$ $V = \frac{h}{3} (B + B' + \sqrt{BB'})$ Với B, B', h là diện tích hai đáy và chiều cao	

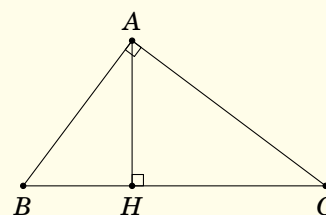
6 MỘT SỐ CHÚ Ý VỀ ĐỘ DÀI CÁC ĐƯỜNG ĐẶC BIỆT

- Đường chéo của hình vuông cạnh a là $a\sqrt{2}$.
- Đường chéo của hình lập phương cạnh a là $a\sqrt{3}$.
- Đường chéo của hình hộp chữ nhật có 3 kích thước a, b, c là $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
- Đường cao của tam giác đều cạnh a là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

7 HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

① Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH

- $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
- $AB^2 = BH \cdot BC$.
- $AC^2 = CH \cdot BC$.
- $AH \cdot BC = AB \cdot AC$.
- $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.



$$— AB = BC \cdot \sin C = BC \cos B = AC \tan C = AC \cot B.$$

- ② Cho $\triangle ABC$ có độ dài ba cạnh là a, b, c , độ dài các đường trung tuyến là m_a, m_b, m_c ; bán kính đường tròn ngoại tiếp R ; bán kính đường tròn nội tiếp r ; nửa chu vi là p

— Định lí hàm số **côsin**

$$\checkmark a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

$$\checkmark b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B.$$

$$\checkmark c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

$$— \text{Định lí hàm số } \sin: \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

— Độ dài trung tuyến

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}, \quad m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}, \quad m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}.$$

8 CÁC CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH

- ① Tam giác

$$— S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c.$$

$$— S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C.$$

$$— S = \frac{abc}{4R}.$$

$$— S = pr.$$

$$— S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$— \triangle ABC \text{ vuông tại } A: S = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{BC \cdot AH}{2}.$$

$$— \triangle ABC \text{ đều, cạnh } a: AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

- ② Hình vuông

$$— S = a^2 \quad (a \text{ là cạnh hình vuông})$$

- ③ Hình chữ nhật

$$— S = a \cdot b \quad (a, b \text{ là hai kích thước})$$

- ④ Hình bình hành

$$— S = \text{đáy} \times \text{cao} = AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD}$$

- ⑤ Hình thoi

$$— S = AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \quad (a, b \text{ là hai kích thước})$$

- ⑥ Hình thang

$$— S = \frac{1}{2}(a + b)h \quad (a, b \text{ là hai đáy, } h \text{ là chiều cao})$$

- ⑦ Tứ giác có hai đường chéo vuông góc AC và BD

$$— S = \frac{1}{2}AC \cdot BD$$

B TRẮC NGHIỆM

===== CÔNG THỨC =====

Câu 1. Một khối chóp có diện tích mặt đáy bằng S , chiều cao bằng h , thể tích của khối chóp đó là:

A. $V = S.h$. B. $V = \frac{1}{3}.S.h^2$. C. $V = \frac{1}{2}.S.h$. D. $V = \frac{1}{3}.S.h$.

Câu 2. Một khối lăng trụ có diện tích một mặt đáy bằng B , chiều cao bằng h . Thể tích của khối lăng trụ là:

A. $V = S.h$. B. $V = \frac{1}{3}B.h$. C. $V = B.h$. D. $V = B^2.h$.

Câu 3. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $8(cm)$, chiều cao SH bằng $3(cm)$. Tính thể tích khối chóp?

A. $V = 16(cm^3)$. B. $V = 24(cm^3)$. C. $V = 48(cm^3)$. D. $V = 64(cm^3)$.

===== **KHỐI CHÓP CÓ CẠNH BÊN VUÔNG GÓC ĐÁY** =====

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SC vuông góc với mặt đáy (ABC) . Thể tích khối chóp $S.ABC$ tính được theo công thức nào sau đây?

A. $V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA$. B. $V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SB$. C. $V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SC$. D. $V = S_{\Delta ABC}.SC$.

Câu 5. Khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , cạnh $AB = 1$, $AC = 2$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) và $SA = 3$. Thể tích của khối chóp đó bằng:

A. 1. B. 2. C. 3. D. 6.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh $AB = a$, $BC = 2a$. Cạnh SA vuông góc với $mp(ABCD)$. Cạnh $SC = 3a$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng:

A. $\frac{2\sqrt{5}a^3}{3}$. B. $2\sqrt{3}a^3$. C. $\frac{4}{3}a^3$. D. $6a^3$.

Câu 7. Cho hình tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA , OB , OC đôi một vuông góc. Thể tích của khối tứ diện đó được tính theo công thức nào sau đây?

A. $V = \frac{1}{6}OA.OB.OC$. B. $V = \frac{1}{3}OA.OB.OC$. C. $V = OA.OB.OC$. D. $V = \frac{1}{2}OA.OB.OC$.

Câu 8. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Biết SA vuông góc với $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $\frac{a^3}{4}$. B. $a^3\sqrt{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 9. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{4a^3}{3}$. B. $2a^3$. C. $\frac{a^3}{3}$. D. $\frac{2a^3}{3}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $a^3\sqrt{2}$. C. $2a^3\sqrt{2}$. D. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy và có độ dài bằng $2a$. Thể tích khối tứ diện $S.BCD$ là:

A. $\frac{a^3}{4}$. B. $\frac{a^3}{8}$. C. $\frac{a^3}{6}$. D. $\frac{a^3}{3}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh $2a$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABO$.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. D. $\frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$. Biết $SA = 6a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $8a^3$. B. $6\sqrt{3}a^3$. C. $12\sqrt{3}a^3$. D. $24a^3$.

Câu 14. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ với SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

- A. $\frac{1}{2}a^3$. B. $\frac{1}{6}a^3$. C. $\frac{2}{3}a^3$. D. $\frac{1}{3}a^3$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy và có độ dài là a . Thể tích khối tứ diện $S.BCD$ bằng.

- A. $\frac{a^3}{6}$. B. $\frac{a^3}{8}$. C. $\frac{a^3}{3}$. D. $\frac{a^3}{4}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $2a^3\sqrt{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $a^3\sqrt{3}$. D. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 17. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau tại O và $OA = 2, OB = 4, OC = 6$. Thể tích khối tứ diện đó bằng.

- A. 24. B. 16. C. 8. D. 48.

Câu 18. Thể tích của tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc, $OA = a, OB = 2a, OC = 3a$ là

- A. $3a^3$. B. $2a^3$. C. $4a^3$. D. a^3 .

Câu 19. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

- A. $V_{S.ABC} = a^2$ (đvtt). B. $V_{S.ABC} = a^3$ (đvtt).
C. $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{2}$ (đvtt). D. $V_{S.ABC} = 3a^3$ (đvtt).

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a, BC = 2a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = 3a$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{1}{6}a^3$. B. a^3 . C. $\frac{1}{3}a^3$. D. $3a^3$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ có giá trị là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a^3}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. D. $a^3\sqrt{3}$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là.

- A. $\frac{3a^3}{6}$. B. $\frac{a^3}{4}$. C. $\frac{3a^3}{4}$. D. $\frac{3a^3}{8}$.

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$ có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Biết đáy ABC là tam giác vuông tại B và $AD = 5, AB = 5, BC = 12$. Tính thể tích V của tứ diện $ABCD$.

- A. $V = 50$. B. $V = 120$. C. $V = 150$. D. $V = \frac{325}{16}$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông cạnh a ; SA vuông góc mặt đáy, góc giữa SC và mặt đáy của hình chóp bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{a^3}{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh a và SA vuông góc đáy $ABCD$ và mặt bên (SCD) hợp với đáy một góc 60° . Tính thể tích hình chóp $S.ABCD$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $a^3\sqrt{3}$. D. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AB = a$, $AD = 3a$, $BC = a$. Biết $SA = a\sqrt{3}$, tính thể tích khối chóp $S.BCD$ theo a .

- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. B. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. D. $2\sqrt{3}a^3$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy. Tam giác ABC vuông cân tại B , biết $SA = AC = 2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

- A. $\frac{2}{3}a^3$. B. $\frac{1}{3}a^3$. C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$. D. $\frac{4}{3}a^3$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . SA vuông góc với đáy và tạo với đường thẳng SB một góc 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$; góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{9}$. B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. C. $3\sqrt{2}a^3$. D. $3a^3$.

Câu 31. Hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B , $AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, SA vuông góc với mặt đáy. Góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy bằng 45° . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

- A. $\frac{a^3}{16}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{48}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{48}$. D. $\frac{a^3}{48}$.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a , cạnh bên SB vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SB = 2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a^3}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{3a^3}{4}$.

Câu 33. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$, biết rằng $SB = a\sqrt{5}$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. B. $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 34. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng 45° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. C. $a^3\sqrt{2}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, $SA \perp (ABC)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 30° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ là.

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C , $AB = a\sqrt{5}$, $AC = a$. Cạnh bên $SA = 3a$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng:

- A. $\frac{a^3\sqrt{5}}{3}$. B. a^3 . C. $2a^3$. D. $3a^3$.

Câu 37. Cho khối chóp tam giác $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC có độ dài 3 cạnh là $AB = 5a$; $BC = 8a$; $AC = 7a$, góc giữa SB và (ABC) là 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

- A. $\frac{50}{3}a^3$. B. $\frac{50\sqrt{7}}{3}a^3$. C. $50\sqrt{3}a^3$. D. $\frac{50\sqrt{3}}{3}a^3$.

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AB = AD = a$, $SA = CD = 3a$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng.

- A. $\frac{1}{3}a^3$. B. $2a^3$. C. $6a^3$. D. $\frac{1}{6}a^3$.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, góc giữa SB và (ABC) bằng 60° ; tam giác ABC đều cạnh a . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. a^3 . B. $\sqrt{3}a^3$. C. $\frac{1}{4}a^3$. D. $\frac{1}{2}a^3$.

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bằng SA vuông góc với đáy $(ABCD)$. Biết $AB = a$, $BC = 2a$ và $SC = 3a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

- A. $\frac{4}{3}a^3$. B. $\frac{2\sqrt{5}}{3}a^3$. C. $2a^3$. D. a^3 .

Câu 41. Cho tứ diện $S.ABC$ có SAB , SCB là các tam giác cân tại S và SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Biết $BA = a\sqrt{2}$, thể tích V của tứ diện $S.ABC$ là.

- A. $V = \frac{a^3}{6}$. B. $V = \frac{a^3}{2}$. C. $V = 2a^3\sqrt{2}$. D. $V = a^3$.

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $BC = 2a$, $SA = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ tính theo a .

- A. $\frac{8a^3}{3}$. B. $\frac{4a^3}{3}$. C. $\frac{6a^3}{3}$. D. $4a^3$.

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bằng $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy, tam giác SBD là tam giác đều. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $a^3\sqrt{2}$. B. $2a^3\sqrt{2}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Cạnh bằng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC = \sqrt{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{\sqrt{15}}{3}$. B. $V = \sqrt{3}$. C. $V = \frac{\sqrt{3}}{6}$. D. $V = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 45. Hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABCD)$, góc giữa SC và đáy bằng 60° . Thể tích hình chóp $S.ABCD$ bằng:

- A. $\sqrt{6}a^3$. B. $3a^3$. C. $3\sqrt{2}a$. D. $\sqrt{2}a^3$.

Câu 46. hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$, $AC = a\sqrt{2}$. Khi đó thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , $BC = 2a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, biết $SA \perp (ABC)$ và mặt phẳng (SBC) hợp với đáy một góc bằng 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

- A. $a^3\sqrt{2}$. B. $\frac{a^3}{9}$. C. $\frac{a^3}{2}$. D. $\frac{a^3}{3}$.

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SA \perp (ABCD)$. Biết rằng khoảng cách từ A đến cạnh SC bằng a . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $a^3\sqrt{3}$.

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy, biết diện tích đáy bằng m . Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là:

- A. $V = \frac{1}{3}m.SD$. B. $V = \frac{1}{3}m.SB$. C. $V = \frac{1}{3}m.SC$. D. $V = \frac{1}{3}m.SA$.

===== KHỐI CHÓP CÓ MẶT BÊN VUÔNG GÓC ĐÁY =====

Câu 50. Hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình chữ nhật có $AB = 2a\sqrt{3}$; $AD = 2a$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối chóp $S.ABD$ là:

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$. B. $4\sqrt{3}a^3$. C. $4a^3$. D. $2\sqrt{3}a^3$.

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a ; hình chiếu của S trên $(ABCD)$ trùng với trung điểm của cạnh AB ; cạnh bên $SD = \frac{3a}{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ tính theo a bằng:

- A. $\frac{a^3\sqrt{5}}{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{7}}{3}$. D. $\frac{a^3}{3}$.

Câu 52. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $(SAD) \perp (ABCD)$, $SA = SD$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ biết $SC = \frac{a\sqrt{21}}{2}$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{7}}{2}$. B. $V = 2a^3$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{7}}{6}$. D. $V = \frac{2a^3}{3}$.

Câu 53. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác vuông cân tại C và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABD) , tam giác ABD là tam giác đều và có cạnh bằng $2a$. Tính thể tích của khối tứ diện $ABCD$.

- A. $a^3\sqrt{2}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $a^3\sqrt{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

Câu 54. Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh $3a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$, biết góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng 60° .

- A. $V = 18a^3\sqrt{15}$. B. $V = 18a^3\sqrt{3}$. C. $V = \frac{9a^3\sqrt{15}}{2}$. D. $V = 9a^3\sqrt{3}$.

Câu 55. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , có $BC = a$. Mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt đáy, các mặt bên còn lại đều tạo với mặt đáy một góc 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

- A. $\frac{a^3}{12}$. B. $\frac{a^3}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 56. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác SAB đều cạnh a , tam giác ABC cân tại C hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AB , đường thẳng SC tạo với mặt đáy một góc 30° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$

- A. $V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^3$. B. $V = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^3$. C. $V = \frac{\sqrt{3}}{8}a^3$. D. $V = \frac{\sqrt{3}}{2}a^3$.

Câu 57. Khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 1, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Thể tích khối chóp trên gần số nào sau đây nhất?

- A. 0,4. B. 0,3. C. 0,2. D. 0,5.

Câu 58. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mp đáy. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

- A. $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{3}$. D. $V_{S.ABCD} = a^3\sqrt{3}$.

❖ Câu 59. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a, AD = a\sqrt{2}$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích V của hình chóp $S.ABCD$ là:

A. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. C. $V = \frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. D. $V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$.

❖ Câu 60. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 2a, AD = a$. Tam giác SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 45° . Khi đó thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $2a^3$. B. $\frac{2}{3}a^3$. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$. D. $\frac{1}{3}a^3$.

❖ Câu 61. Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh $3a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng 60° .

A. $V_{S.ABCD} = 18a^3\sqrt{3}$. B. $V_{S.ABCD} = 9a^3\sqrt{15}$.
C. $V_{S.ABCD} = \frac{9a^3\sqrt{15}}{2}$. D. $V_{S.ABCD} = 18a^3\sqrt{3}$.

❖ Câu 62. Cho khối chóp $S.ABC$ có SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) , $AB = 2a$ và tam giác ABC có diện tích bằng $3a^2$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng.

A. $3a^3$. B. $6a^3$. C. a^3 . D. $2a^3\sqrt{3}$.

❖ Câu 63. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{2}a$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD) .

A. $h = \frac{2}{3}a$. B. $h = \frac{3}{4}a$. C. $h = \frac{8}{3}a$. D. $h = \frac{4}{3}a$.

===== KHỐI CHÓP ĐỀU =====

❖ Câu 64. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a . Các cạnh bên tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích khối chóp đó.

A. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

❖ Câu 65. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên tạo với đáy một góc 60° . Thể tích của hình chóp đều đó là:

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

❖ Câu 66. Thể tích khối tứ diện đều có cạnh bằng a là:

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. D. $\frac{5a^3\sqrt{2}}{12}$.

❖ Câu 67. Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a , cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính thể tích V của khối chóp tứ giác đó cho.

A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$. C. $\frac{\sqrt{14}a^3}{6}$. D. $\frac{\sqrt{14}a^3}{2}$.

❖ Câu 68. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp đó theo a .

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $V = \frac{a^3}{2}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{10}}{6}$.

Câu 69. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau, đường cao của một mặt bên là $a\sqrt{3}$. Thể tích V của khối chóp đó là:

- A. $V = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3$. B. $V = \frac{\sqrt{2}}{9}a^3$. C. $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$. D. $V = \frac{4\sqrt{2}}{3}a^3$.

Câu 70. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng $\sqrt{2}a$. Tính thể tích của khối tứ diện đó.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $V = \frac{a^3}{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu 71. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp đều $S.ABCD$ bằng?

- A. $4a^3\sqrt{3}$. B. $a^3\sqrt{3}$. C. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 72. Cho khối chóp đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng a và các mặt bên hợp với đáy một góc 45° . Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a .

- A. $\frac{a^3\sqrt{15}}{25}$. B. $\frac{a^3\sqrt{5}}{25}$. C. $\frac{a^3}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{15}}{5}$.

Câu 73. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau, đường cao của một mặt bên là $a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp đó.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}$. B. $V = 4a^3\sqrt{2}$. C. $V = \frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu 74. Cho hình chóp tam giác đều cạnh đáy bằng a và các mặt bên đều tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 75. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích khối chóp là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 76. Cho (H) là khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $2a$. Thể tích của (H) bằng:

- A. $\frac{4}{5}a^3$. B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}a^3$. C. $\frac{4\sqrt{2}}{3}a^3$. D. $\frac{4}{3}a^3$.

===== TỈ SỐ THỂ TÍCH =====

Câu 77. Khi chiều cao của một hình chóp đều tăng lên n lần nhưng mỗi cạnh đáy giảm đi n lần thì thể tích của nó.

- A. Không thay đổi. B. Tăng lên n lần.
C. Tăng lên $n - 1$ lần. D. Giảm đi n lần.

Câu 78. Cho khối chóp $S.ABCD$. Nếu thể tích khối chóp $S.ABD$ bằng V thì khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng bao nhiêu?

- A. $3V$. B. $4V$. C. $2V$. D. $\frac{3}{2}V$.

Câu 79. Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 1 và có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD$. Tính thể tích khối chóp $S.AOD$.

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 80. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh $2a$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABO$.

- A. $\frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 81. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a, SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng:

- A. $a^3\sqrt{3}$. B. $2a^3\sqrt{3}$. C. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 82. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy và có độ dài bằng a . Tính thể tích khối tứ diện $S.BCD$.

- A. $\frac{a^3}{2}$. B. $\frac{a^3}{4}$. C. $\frac{a^3}{6}$. D. $\frac{a^3}{3}$.

Câu 83. Cho khối tứ diện $OABC$ với OA, OB, OC vuông góc từng đôi một và $OA = a, OB = 2a, OC = 3a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AC, BC . Thể tích của khối tứ diện $OCMN$ tính theo a bằng

- A. $\frac{a^3}{4}$. B. $\frac{3a^3}{4}$. C. a^3 . D. $\frac{2a^3}{3}$.

Câu 84. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh BA, BC, BD đôi một vuông góc với nhau: $BA = 3a, BC = BD = 2a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AD . Tính thể tích khối chóp $C.BDNM$.

- A. $V = \frac{3a^3}{2}$. B. $V = a^3$. C. $V = \frac{2a^3}{3}$. D. $V = 8a^3$.

Câu 85. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA = a, AB = 2a, BC = 4a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD . Thể tích của khối chóp $S.MNC$ là

- A. $\frac{a^3}{5}$. B. $\frac{a^3}{2}$. C. $\frac{a^3}{4}$. D. $\frac{a^3}{3}$.

Câu 86. Cho khối tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a, M là trung điểm BC . Thể tích V của khối chóp $M.ABC$ bằng bao nhiêu?

- A. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{24}$. B. $V = \frac{a^3}{2}$. C. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}$. D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{24}$.

Câu 87. Cho khối chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết cạnh bên bằng a là:

- A. $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{4}$. B. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. C. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{12}$.

Câu 88. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên hợp với đáy một góc 60° . Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 89. Thể tích của khối chóp tứ giác đều có chiều cao bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ và cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$ bằng:

- A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{3a^3\sqrt{6}}{2}$.

Câu 90. Cho khối chóp $S.ABC$, M là trung điểm của cạnh BC . Thể tích của khối chóp $S.MAB$ là $2a^3$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng.

- A. $2a^3$. B. $4a^3$. C. $\frac{a^3}{4}$. D. $\frac{1}{2}a^3$.

Câu 91. Cho tứ diện $ABCD$ có $DA = 1, DA \perp (ABC)$. $\triangle ABC$ là tam giác đều, có cạnh bằng 1. Trên ba cạnh DA, DB, DC lấy điểm M, N, P mà $\frac{DM}{DA} = \frac{1}{2}, \frac{DN}{DB} = \frac{1}{3}, \frac{DP}{DC} = \frac{3}{4}$. Thể tích V của tứ diện $MNPD$ bằng

- A. $V = \frac{\sqrt{2}}{96}$. B. $V = \frac{\sqrt{3}}{12}$. C. $V = \frac{\sqrt{3}}{96}$. D. $V = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

Câu 92. Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích là a^3 . Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC, SD . Thể tích khối chóp $S.MNPQ$ là

- A. $\frac{a^3}{16}$. B. $\frac{a^3}{8}$. C. $\frac{a^2}{4}$. D. $\frac{a^3}{6}$.

Câu 93. Cho khối chóp $S.ABC$. Gọi A', B' lần lượt là trung điểm của SA và SB . Khi đó tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C$ và $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 94. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD . Tỉ số thể tích của khối chóp $S.MNPQ$ và khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{1}{8}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{16}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 95. Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 48, đáy $ABCD$ hình thoi. Các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc SA, SB, SC, SD thỏa $SA = 2SM, SB = 3SN, SC = 4SP, SD = 5SQ$. Thể tích khối chóp $S.MNPQ$ là

- A. $\frac{4}{5}$. B. $\frac{6}{5}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $\frac{8}{5}$.

Câu 96. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , cạnh SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{ACB} = 60^\circ$, $BC = a$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của SB . Tính thể tích V của khối tứ diện $MABC$.

- A. $V = \frac{a^3}{6}$. B. $V = \frac{a^3}{4}$. C. $V = \frac{a^3}{3}$. D. $V = \frac{a^3}{2}$.

Câu 97. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi B' và C' lần lượt là trung điểm của AB, AC . Khi đó tỉ số thể tích của khối tứ diện $AB'C'D$ và khối $ABCD$ bằng:

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{1}{8}$.

Câu 98. Cho tứ diện $MNPQ$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm các cạnh MN, MP, MQ . Tính tỉ số thể tích $\frac{V_{MIJK}}{V_{MNPQ}}$.

- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{8}$.

Câu 99. Cho khối tứ diện $OABC$ với OA, OB, OC vuông góc từng đôi một và $OA = a, OB = 2a, OC = 3a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AC, BC . Thể tích của khối tứ diện $OCMN$ tính theo a bằng

- A. $\frac{3a^3}{4}$. B. a^3 . C. $\frac{2a^3}{3}$. D. $\frac{a^3}{4}$.

Câu 100. Cho khối chóp $S.ABC$, M là trung điểm của cạnh SA . Tỉ số thể tích của khối chóp $S.MBC$ và thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng.

- A. 1. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

===== KHỐI HỘP CHỮ NHẬT VÀ LẬP PHƯƠNG =====

Câu 101. Một hình hộp chữ nhật có ba kích thước là x, y, z . Thể tích khối hộp chữ nhật bằng

- A. $x.y.z$. B. $\frac{1}{3}x.y.z$. C. $(x+y).z$. D. $(x+z).y$.

Câu 102. Thể tích của một khối lập phương có cạnh bằng $1m$ là

- A. $V = 3m$. B. $V = 1m^3$. C. $V = \frac{1}{3}m^3$. D. $V = 1m^2$.

🔥 **Câu 103.** Thể tích của hình lập phương có cạnh bằng 2 là bao nhiêu?

- A. $V = 6$. B. $V = 8$. C. $V = 4$. D. $V = 16$.

🔥 **Câu 104.** Cho hình lập phương có cạnh bằng 1. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương đó bằng

- A. 3π . B. 12π . C. π . D. 6π .

🔥 **Câu 105.** Thể tích hình lập phương cạnh $\sqrt{3}$ là:

- A. $\sqrt{3}$. B. 3. C. $6\sqrt{3}$. D. $3\sqrt{3}$.

🔥 **Câu 106.** Tính thể tích của khối lập phương có cạnh bằng a .

- A. $V = \frac{a^3}{3}$. B. $V = a^3$. C. $V = \frac{2a^3}{3}$. D. $V = \frac{a^3}{6}$.

🔥 **Câu 107.** Cho hình lập phương có thể tích bằng 8. Diện tích toàn phần của hình lập phương là

- A. 36. B. 48. C. 16. D. 24.

🔥 **Câu 108.** Một khối lập phương có độ dài cạnh bằng 5, thể tích khối lập phương đã cho bằng

- A. 243. B. 25. C. 81. D. 125.

🔥 **Câu 109.** Thể tích khối lập phương có cạnh bằng 10 cm là

- A. $V = 1000 \text{ cm}^3$. B. $V = 500 \text{ cm}^3$. C. $V = \frac{1000}{3} \text{ cm}^3$. D. $V = 100 \text{ cm}^3$.

🔥 **Câu 110.** Khối lập phương có đường chéo bằng $2a$ thì có thể tích là

- A. $\frac{8}{3\sqrt{3}}a^3$. B. $8a^3$. C. a^3 . D. $2\sqrt{2}a^3$.

🔥 **Câu 111.** Cho (H) là khối lập phương có độ dài cạnh bằng $3(\text{cm})$. Thể tích của (H) bằng

- A. $27(\text{cm}^2)$. B. $3(\text{cm}^3)$. C. $9(\text{cm}^3)$. D. $27(\text{cm}^3)$.

🔥 **Câu 112.** Gọi V là thể tích của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, V_1 là thể tích của tứ diện $A'ABD$. Hệ thức nào sau đây là đúng?

- A. $V = 2V_1$. B. $V = 3V_1$. C. $V = 6V_1$. D. $V = 4V_1$.

🔥 **Câu 113.** Tính theo a thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AC' = a$.

- A. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{9}$. B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. C. $V = 3\sqrt{3}a^3$. D. $V = \frac{a^3}{27}$.

🔥 **Câu 114.** Tính thể tích của khối lập phương $ABCD.ABCD$ biết $AD = 2a$.

- A. $V = a^3$. B. $V = 2\sqrt{2}a^3$. C. $V = 8a^3$. D. $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$.

🔥 **Câu 115.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có diện tích mặt chéo $ACC'A'$ bằng $2\sqrt{2}a^2$. Thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là.

- A. a^3 . B. $8a^3$. C. $2a^3$. D. $2\sqrt{2}a^3$.

🔥 **Câu 116.** Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC' = a\sqrt{3}$.

- A. $V = \frac{1}{3}a^3$. B. $V = 3\sqrt{3}a^3$. C. $V = \frac{3\sqrt{6}a^3}{4}$. D. $V = a^3$.

🔥 **Câu 117.** Cho khối hộp chữ nhật có ba kích thước lần lượt bằng 2, 3, 5. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

- A. 30. B. 15. C. 10. D. 60.

🔥 **Câu 118.** Cho khối lập phương có đường chéo của mặt bên bằng $5\sqrt{2}$. Thể tích của khối lập phương đã cho bằng

- A. 125. B. $250\sqrt{2}$. C. $\frac{125}{3}$. D. $125\sqrt{2}$.

🔹 Câu 119. Cho khối lập phương có đường chéo bằng $3\sqrt{3}$. Thể tích của khối lập phương đã cho bằng

- A. 27. B. $81\sqrt{3}$. C. 9. D. $27\sqrt{3}$.

=====KHỐI LĂNG TRỤ ĐỨNG=====

🔹 Câu 120. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Thể tích khối lăng trụ tính được theo công thức nào sau đây?

- A. $V = S_{\Delta ABC} \cdot CC'$. B. $V = S_{\Delta ABC} \cdot A'H$. C. $V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot A'A$. D. $V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot A'H$.

🔹 Câu 121. Hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , cạnh $AB = a$, cạnh $BC = a\sqrt{3}$, cạnh bên $AA' = 2a\sqrt{5}$. Thể tích của khối lăng trụ đó bằng:

- A. $2a^3\sqrt{15}$. B. $a^3\sqrt{15}$. C. $\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$. D. $a^3\sqrt{10}$.

🔹 Câu 122. Cho hình lăng trụ đứng có diện tích đáy là $3a^2$, độ dài cạnh bên bằng $2a$. Thể tích khối lăng trụ này bằng

- A. $2a^3$. B. a^3 . C. $3a^3$. D. $6a^3$.

🔹 Câu 123. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy bằng a^2 và khoảng cách giữa hai đáy bằng $3a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{3}{2}a^3$. B. $V = 3a^3$. C. $V = a^3$. D. $V = 9a^3$.

🔹 Câu 124. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = a$ và $AA' = a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

- A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $3a^3\sqrt{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

🔹 Câu 125. Cho hình lăng trụ đứng có diện tích đáy là $\sqrt{3}a^2$. Độ dài cạnh bên là $a\sqrt{2}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ là:

- A. $\sqrt{6}a^3$. B. $\sqrt{3}a^3$. C. $\sqrt{2}a^3$. D. $\frac{\sqrt{6}a^3}{3}$.

🔹 Câu 126. Khối lăng trụ có diện tích đáy bằng $3a^2$, chiều cao bằng a có thể tích bằng

- A. a^3 . B. $3a^3$. C. $\frac{1}{2}a^3$. D. $\frac{3}{2}a^3$.

🔹 Câu 127. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ biết tam giác ABC vuông cân tại A , $AB = 2AA' = a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho là:

- A. $\frac{a^3}{2}$. B. $\frac{a^3}{12}$. C. $\frac{a^3}{4}$. D. a^3 .

🔹 Câu 128. Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB = 3a$, $AC = 5a$, $A_1B = 4a$. Tính thể tích V của lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$?

- A. $V = 6\sqrt{7}a^3$. B. $V = 2\sqrt{7}a^3$. C. $V = 30a^3$. D. $V = 12\sqrt{7}a^3$.

🔹 Câu 129. Cho $ABC.A'B'C'$ là khối lăng trụ đứng có $A'B = a\sqrt{5}$, $AB = a$ đáy ABC có diện tích bằng $3a^2$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng.

- A. a^3 . B. $6a^3$. C. $4a^3$. D. $2a^3$.

🔹 Câu 130. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên $AA' = h$ và diện tích tam giác ABC bằng S . Thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng:

- A. $V = \frac{1}{3}Sh$. B. $V = \frac{2}{3}Sh$. C. $V = Sh$. D. $V = 2Sh$.

🔹 Câu 131. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Biết rằng $AB = 3$, $AC = 4$, $AA' = 5$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

- A. 30. B. 60. C. 10. D. 20.

Câu 132. Khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a , đường cao bằng $a\sqrt{3}$ có thể tích bằng

- A. $a^3\sqrt{3}$. B. $2a^3\sqrt{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 133. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi, biết $AA' = 4a$, $AC = 2a$, $BD = a$. Thể tích của khối lăng trụ là

- A. $2a^3$. B. $8a^3$. C. $\frac{8a^3}{3}$. D. $4a^3$.

Câu 134. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $CC' = 2a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = a^3$. B. $V = \frac{a^3}{2}$. C. $V = 2a^3$. D. $V = \frac{a^3}{3}$.

Câu 135. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$ góc giữa BC' và $(AA'C)$ bằng 30° . Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $V = a^3\sqrt{6}$. B. $V = \frac{2a^3}{\sqrt{6}}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Câu 136. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC vuông tại A , $AB = AA' = a$, $AC = 2a$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

- A. $\frac{a^3}{3}$. B. $\frac{2a^3}{3}$. C. a^3 . D. $2a^3$.

Câu 137. Lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B . Biết $AC = a\sqrt{2}$, $AA' = 2a$. Khi đó thể tích của lăng trụ đó bằng.

- A. a^3 . B. $\frac{a^3}{3}$. C. $4a^3$. D. $\frac{4a^3}{3}$.

Câu 138. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $B'B = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{a^3}{3}$. B. $V = a^3$. C. $V = \frac{a^3}{6}$. D. $V = \frac{a^3}{2}$.

Câu 139. Trong hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AA' = a$, $BC = 2a$, $AC = a\sqrt{5}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$ có số đo bằng 45° .
B. Hai mặt phẳng $(AA'B'B)$ và $(BB'C)$ vuông góc với nhau.
C. $AC' = 2a\sqrt{2}$.
D. Đáy ABC là tam giác vuông.

Câu 140. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{a^3}{6}$. B. $V = \frac{a^3}{3}$. C. $V = \frac{a^3}{2}$. D. $V = a^3$.

Câu 141. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = a$ và $AA' = a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

- A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $3a^3\sqrt{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 142. Tính thể tích V của khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C , $AB = 2a$, $AC = a$ và $BC' = 2a$

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $V = \frac{4a^3}{3}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $V = 4a^3$.

❖ Câu 143. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng 30° . Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng:

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{18}$. B. $\frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

❖ Câu 144. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân ABC với $AB = AC = a$, góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$, mặt phẳng $(A'B'C')$ tạo với đáy một góc 30° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{a^3}{6}$. B. $V = \frac{a^3}{8}$. C. $V = \frac{3a^3}{8}$. D. $V = \frac{9a^3}{8}$.

❖ Câu 145. Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B . Biết $AC = a\sqrt{2}$, $A'C = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $\frac{a^3}{2}$. B. $\frac{a^3}{6}$. C. $\frac{2a^3}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

❖ Câu 146. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh bằng 1, $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ADD'A')$ bằng 30° . Tính thể tích khối lăng trụ.

- A. $V = \sqrt{6}$. B. $V = \frac{\sqrt{6}}{6}$. C. $V = \frac{\sqrt{6}}{2}$. D. $V = \sqrt{3}$.

❖ Câu 147. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông ABC vuông tại A , $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng $(A'C'CA)$ góc 30° . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

- A. $2\sqrt{3}a^3$. B. $a^3\sqrt{6}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

❖ Câu 148. Tính theo a thể tích khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a , góc $\widehat{BAD}$ bằng 60° và cạnh bên AA' bằng a .

- A. $\frac{9}{2}a^3$. B. $\frac{1}{2}a^3$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$. D. $\sqrt{3}a^3$.

❖ Câu 149. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{a^3}{2}$. B. $V = \frac{a^3}{6}$. C. $V = \frac{a^3}{3}$. D. $V = a^3$.

❖ Câu 150. Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA = BC = a$, biết $A'B$ hợp với mặt phẳng (ABC) một góc 60° . Thể tích lăng trụ là:

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $a^3\sqrt{3}$.

❖ Câu 151. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Đường chéo BC' của mặt bên $(BCC'B')$ tạo với mặt phẳng $(AA'C'C)$ một góc 30° . Tính thể tích của khối lăng trụ theo a .

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$. D. $a^3\sqrt{6}$.

❖ Câu 152. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Thể tích V của khối lăng trụ đã cho là:

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

❖ Câu 153. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân tại A , $AB = AC = 2a$; $\widehat{CAB} = 120^\circ$. Góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là 45° . Thể tích khối lăng trụ là.

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $2a^3\sqrt{3}$. C. $a^3\sqrt{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

❖ Câu 154. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A ; $BC = 2a$; $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Biết cạnh bên của lăng trụ bằng $2a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ là.

- A. $3a^3$. B. $3a^3$. C. $6a^3$. D. $2a^3\sqrt{3}$.

❖ Câu 155. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , $AB = AC = 2a$, $\widehat{CAB} = 120^\circ$. Góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là 45° . Tính thể tích V của khối lăng trụ.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $V = a^3\sqrt{3}$. C. $V = a^3$. D. $V = 2a^3$.

❖ Câu 156. Tính thể tích V của khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C , $AB = 2a$, $AC = a$ và $BC' = 2a$.

- A. $V = \frac{4a^3}{3}$. B. $V = 4a^3$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

❖ Câu 157. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = a\sqrt{5}$. Góc giữa cạnh $A'B$ và mặt đáy là 60° . Tính thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $15a^3\sqrt{5}$. B. $15a^3\sqrt{3}$. C. $\frac{5a^3\sqrt{15}}{2}$. D. $5a^3\sqrt{3}$.

❖ Câu 158. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông với $AB = AC = a$, góc giữa BC' và (ABC) bằng 45° . Tính thể tích khối lăng trụ.

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. C. $a^3\sqrt{2}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

❖ Câu 159. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $BC = 2a$ và $AA' = 2a$. Tính thể tích V của hình lăng trụ đã cho.

- A. $V = 2a^3$. B. $V = \frac{2a^3}{3}$. C. $V = a^3$. D. $V = 3a^3$.

❖ Câu 160. Tính thể tích V của khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C , $AB = 2a$, $AC = a$ và $BC' = 2a$.

- A. $V = \frac{4a^3}{3}$. B. $V = 4a^3$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

❖ Câu 161. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Đường chéo BC' của mặt bên $(BCC'B')$ tạo với mặt phẳng $(AA'C'C)$ một góc 30° . Thể tích của khối lăng trụ theo a là.

- A. $\frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. C. $a^3\sqrt{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

❖ Câu 162. Cho khối lăng trụ đứng có cạnh bên bằng 5, đáy là hình vuông có cạnh bằng 4. Hỏi thể tích khối lăng trụ là:

- A. 100. B. 20. C. 64. D. 80.

❖ Câu 163. Lăng trụ tam giác đều có độ dài tất cả các cạnh bằng 3. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{27\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

❖ Câu 164. Thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên bằng a là

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $V = a^3\sqrt{3}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

❖ Câu 165. Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a .

- A. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. B. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{4}$. C. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

🔥 Câu 166. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Thể tích của khối lăng trụ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. B. $\frac{3a^3}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

🔥 Câu 167. Cho (H) là khối lăng trụ đứng tam giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a . Thể tích của (H) bằng:

- A. $\frac{a^3}{2}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

🔥 Câu 168. Cho lăng trụ đứng tam giác $MNP.M'N'P'$ có đáy MNP là tam giác đều cạnh a , đường chéo MP' tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng 60° . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $MNP.M'N'P'$.

- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. C. $\frac{3a^3}{4}$. D. $\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$.

🔥 Câu 169. Thể tích của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a là.

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$. C. $\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$. D. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$.

🔥 Câu 170. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của lăng trụ.

- A. $V = 2a^3$. B. $V = a^3\sqrt{3}$. C. $V = 3a^3$. D. $V = 2a^3\sqrt{3}$.

🔥 Câu 171. Cho hình lăng trụ tam giác đều có các cạnh đều bằng $2a$. Thể tích khối lăng trụ đều là:

- A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $2a^3\sqrt{3}$. C. $\frac{a^3}{3}$. D. $\frac{2a^3}{3}$.

CHƯƠNG 2

MẶT NÓN - MẶT TRỤ - MẶT CẦU

BÀI 1. KHÁI NIỆM VỀ MẶT TRÒN XOAY

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

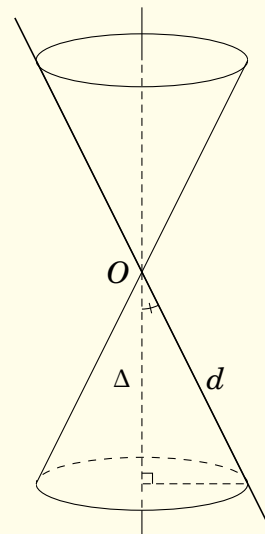
1 MẶT NÓN

Định nghĩa 1.

Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng d và Δ cắt nhau tại điểm O và tạo với nhau một góc β với $0^\circ < \beta < 90^\circ$. Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng d sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là *mặt nón tròn xoay* đỉnh O .

Người ta thường gọi tắt mặt nón tròn xoay là *mặt nón*.

Đường thẳng Δ gọi là *trục*, đường thẳng d gọi là *đường sinh* và góc 2β gọi là *góc ở đỉnh* của mặt nón đó.

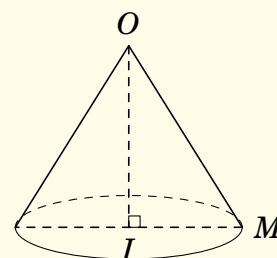
**Định nghĩa 2.**

Cho tam giác OIM vuông tại I . Khi quay tam giác đó xung quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình gọi là *hình nón tròn xoay*, gọi tắt là *hình nón*.

Đường thẳng OI gọi là *trục*, O gọi là *đỉnh*, OI gọi là *đường cao* và OM gọi là *đường sinh* của hình nón.

Hình tròn tâm I , bán kính $r = IM$ gọi là *đáy* của hình nón.

Phần mặt tròn xoay được sinh ra bởi các điểm trên cạnh OM khi quay quanh OI được gọi là *mặt xung quanh* của hình nón đó.

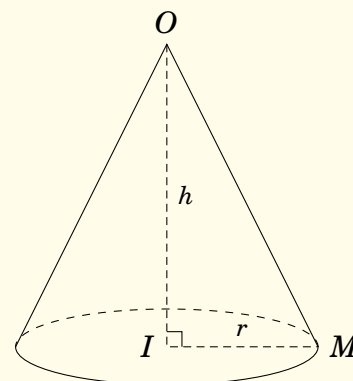
**Định nghĩa 3.**

Khối nón tròn xoay là phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay, kể cả hình nón đó. Người ta còn gọi tắt khối nón tròn xoay là *khối nón*.

Những điểm không thuộc khối nón được gọi là những *điểm ngoài* của khối nón.

Những điểm thuộc khối nón nhưng không thuộc hình nón ứng với khối nón ấy được gọi là những *điểm trong* của khối nón.

Ta gọi đỉnh, mặt, đáy, đường sinh của một hình nón theo thứ tự là *đỉnh*, *mặt*, *đáy*, *đường sinh* của khối nón tương ứng.



Tính chất 1. Gọi h là chiều cao, l là độ dài đường sinh và r là bán kính đáy của hình nón, ta có

— Diện tích xung quanh của hình nón $S_{xq} = \pi r l$.

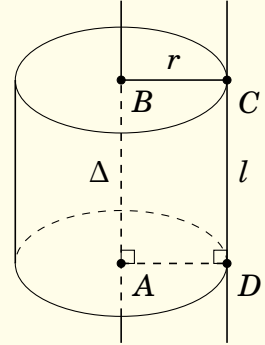
— Thể tích của khối nón $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ (S là diện tích đáy).

2 MẶT TRỤ

Định nghĩa 4.

Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng Δ và l song song nhau, cách nhau một khoảng r . Khi quay (P) quanh trục cố định Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt nón tròn xoay được gọi là *mặt trụ tròn xoay* hay gọi tắt là *mặt trụ*.

Đường thẳng Δ gọi là *trục*, đường thẳng l gọi là *đường sinh* và khoảng cách r gọi là *bán kính* của mặt trụ.



Định nghĩa 5. Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh AB thì đường gấp khúc $ABCD$ tạo thành một hình được gọi là *hình trụ tròn xoay* hay gọi tắt là *hình trụ*.

Đường thẳng AB gọi là *trục*, đoạn thẳng CD gọi là *đường sinh*, độ dài $AB = CD$ gọi là *chiều cao*, hai hình tròn $(A; AD)$ và $(B; BC)$ gọi là hai *đáy* của hình trụ.

Khối trụ tròn xoay, gọi tắt là *khối trụ* là phần không gian giới hạn bởi hình trụ tròn xoay, kể cả hình trụ.

Tính chất 2. Gọi h là chiều cao và r là bán kính đáy của hình trụ, ta có

— Diện tích xung quanh của hình trụ $S_{xq} = 2\pi rh$.

— Thể tích khối trụ $V = Sh = \pi r^2 h$ (S là diện tích đáy).

B TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tam giác ABC vuông tại A . Khi quay tam giác ABC (kể cả các điểm trong) quanh cạnh AC ta được

- A. Mặt nón. B. Khối nón. C. Khối trụ. D. Khối cầu.

Câu 2. Cho hình nón tròn xoay có bán kính đường tròn đáy r , chiều cao h và đường sinh l . Kết luận nào sau đây **sai**?

- A. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. B. $S_{tp} = \pi rl + \pi r^2$. C. $h^2 = r^2 + l^2$. D. $S_{xq} = \pi rl$.

Câu 3. Gọi l , h , R lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình nón. Đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

- A. $l^2 = h^2 + R^2$. B. $\frac{1}{l^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{R^2}$. C. $R^2 = h^2 + l^2$. D. $l^2 = hR$.

Câu 4. Cho hình nón có đường sinh bằng $4a$, diện tích xung quanh bằng $8\pi a^2$. Tính chiều cao của hình nón đó theo a .

- A. $2a$. B. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. C. $a\sqrt{3}$. D. $2a\sqrt{3}$.

Câu 5. Cho hình nón có diện tích xung quanh là S_{xq} và bán kính đáy là r . Công thức nào dưới đây dùng để tính đường sinh l của hình nón đã cho.

- A. $l = \frac{S_{xq}}{\pi r}$. B. $l = \frac{2S_{xq}}{\pi r}$. C. $l = 2\pi S_{xq} r$. D. $l = \frac{S_{xq}}{2\pi r}$.

Câu 6. Cho hình nón có độ dài đường sinh bằng 6cm , góc ở đỉnh bằng 60° . Thể tích khối nón là:

- A. $27\pi\text{cm}^3$. B. $9\pi\text{cm}^3$. C. $9\sqrt{3}\pi\text{cm}^3$. D. 27cm^3 .

Câu 7. Cho hình nón có bán kính đường tròn đáy bằng R , chiều cao bằng h , độ dài đường sinh bằng l . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $l = \sqrt{R^2 - h^2}$. B. $R = l^2 + h^2$. C. $h = \sqrt{R^2 - l^2}$. D. $l = \sqrt{R^2 + h^2}$.

Câu 8. Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 3a$ và $AC = 4a$. Độ dài đường sinh l của hình nón nhận được khi quay $\triangle ABC$ xung quanh trục AC bằng

- A. $l = a$. B. $l = \sqrt{2}a$. C. $l = \sqrt{3}a$. D. $l = 5a$.

Câu 9. Tìm bán kính r của mặt nón biết diện tích toàn phần của mặt nón bằng 4π và độ dài đường sinh $l = 3$.

- A. $r = \frac{2}{3}$. B. $r = 2$. C. $r = \frac{4}{3}$. D. $r = 1$.

Câu 10. Một khối nón có diện tích xung quanh bằng $2\pi\text{ cm}^2$ và bán kính đáy $r = \frac{1}{2}$. Khi đó độ dài đường sinh là

- A. 3 cm . B. 1 cm . C. 2 cm . D. 4 cm .

Câu 11. Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = a$ và $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Tính độ dài đường sinh l của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AC .

- A. $l = \frac{2a}{\sqrt{2}}$. B. $l = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. C. $l = \frac{a}{\sqrt{2}}$. D. $l = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Câu 12. Cho hình nón có diện tích đáy bằng 9π , đường sinh tạo với mặt đáy một góc bằng 45° . Tính độ dài đường sinh.

- A. 2 . B. 3 . C. $3\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{2}$.

Câu 13. Cho hình nón có bán kính đáy là $r = \sqrt{3}$ và độ dài đường sinh $l = 4$. Tính diện tích xung quanh S của hình nón đã cho.

- A. $S = 8\sqrt{3}\pi$. B. $S = 24\pi$. C. $S = 16\sqrt{3}\pi$. D. $S = 4\sqrt{3}\pi$.

Câu 14. Cho hình nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và độ dài đường sinh $l = 4$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đã cho.

- A. $S_{xq} = 12\pi$. B. $S_{xq} = 4\sqrt{3}\pi$. C. $S_{xq} = \sqrt{39}\pi$. D. $S_{xq} = 8\sqrt{3}\pi$.

Câu 15. Cho hình nón có bán kính đáy $r = \sqrt{2}$ và độ dài đường sinh $l = 3$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đã cho.

- A. $S_{xq} = 6\pi\sqrt{2}$. B. $S_{xq} = 3\pi\sqrt{2}$. C. $S_{xq} = 6\pi$. D. $S_{xq} = 2\pi$.

Câu 16. Tính diện tích toàn phần của hình nón có bán kính đáy bằng $4a$, chiều cao bằng $3a$.

- A. $20\pi a^2$. B. $15\pi a^2$. C. $24\pi a^2$. D. $36\pi a^2$.

Câu 17. Tính diện tích xung quanh của một hình nón có bán kính đường tròn đáy là 4 cm và độ dài đường sinh là 5 cm .

- A. $15\pi\text{ cm}^2$. B. $20\pi\text{ cm}^2$. C. $9\pi\sqrt{3}\text{ cm}^2$. D. $12\pi\text{ cm}^2$.

Câu 18. Một khối trụ có độ dài đường sinh bằng 10 , biết thể tích của khối trụ bằng 90π . Tính diện tích xung quanh của khối trụ.

- A. 60π . B. 78π . C. 81π . D. 90π .

Câu 19. Tính diện tích xung quanh S của hình trụ có bán kính đáy bằng 5 và chiều cao bằng 3 .

- A. 15π . B. 32π . C. 16π . D. 30π .

🔥 **Câu 20.** Cho hình nón đỉnh S , đáy là đường tròn tâm O và thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh a . Tính thể tích hình nón.

- A. $\frac{a^3\pi\sqrt{3}}{24}$. B. $\frac{a^3\pi\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{a^3\pi\sqrt{3}}{12}$. D. $\frac{a^3\pi\sqrt{3}}{36}$.

🔥 **Câu 21.** Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh bằng $2a$. Tính thể tích của khối nón.

- A. $\sqrt{3}\pi a^3$. B. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{6}$. D. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$.

🔥 **Câu 22.** Cho hình nón có chiều cao bằng 3 cm, góc giữa trục và đường sinh bằng 60° . Thể tích của khối nón là:

- A. $V = 9\pi \text{ (cm}^3\text{)}$. B. $V = 54\pi \text{ (cm}^3\text{)}$. C. $V = 27\pi \text{ (cm}^3\text{)}$. D. $V = 18\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

🔥 **Câu 23.** Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = a$, $AC = 2a$. Quay tam giác ABC (kể cả các điểm bên trong tam giác) quanh BC , ta thu được khối tròn xoay. Tính diện tích bề mặt của khối tròn xoay đó.

- A. $\frac{6\pi a^2}{\sqrt{5}}$. B. $\frac{3\pi a^2}{\sqrt{5}}$. C. $4\pi a^2$. D. $2\pi a^2$.

🔥 **Câu 24.** Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 3a$, $AC = 4a$. Gọi M là trung điểm của AC . Khi quay quanh AB , các đường gấp khúc AMB , ACB sinh ra các hình nón có diện tích xung quanh lần lượt là S_1 , S_2 . Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

- A. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\sqrt{13}}{10}$. B. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4}$. C. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\sqrt{2}}{5}$. D. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2}$.

🔥 **Câu 25.** Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $2\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón là

- A. $\pi\sqrt{3}$. B. $3\pi\sqrt{3}$. C. 3π . D. $3\pi\sqrt{2}$.

🔥 **Câu 26.** Một hình nón có bán kính đáy bằng 1 và có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân. Tính diện tích xung quanh của hình nón.

- A. π . B. $\sqrt{2}\pi$. C. $2\sqrt{2}\pi$. D. $\frac{1}{\sqrt{2}}\pi$.

🔥 **Câu 27.** Một hình nón có bán kính đáy bằng 2 và có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân. Tính diện tích xung quanh của hình nón.

- A. π . B. $2\sqrt{2}\pi$. C. $\frac{1}{\sqrt{2}}\pi$. D. $4\sqrt{2}\pi$.

🔥 **Câu 28.** Cho hình nón đỉnh S có chiều cao bằng bán kính đáy và bằng $2a$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại A, B sao cho $AB = 2\sqrt{3}a$. Tính khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến (P) .

- A. $\frac{a}{\sqrt{5}}$. B. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. C. a . D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

🔥 **Câu 29.** Cho hình nón tròn xoay có chiều cao $h = 20 \text{ cm}$, bán kính $r = 25 \text{ cm}$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12 cm. Tính diện tích của thiết diện đó.

- A. $S = 500 \text{ cm}^2$. B. $S = 400 \text{ cm}^2$. C. $S = 300 \text{ cm}^2$. D. $S = 406 \text{ cm}^2$.

🔥 **Câu 30.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a và cạnh bên bằng $2a$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón có đỉnh là tâm O của hình vuông $A'B'C'D'$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$.

- A. $S_{xq} = \pi a^2 \sqrt{17}$. B. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{17}}{2}$. C. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{17}}{4}$. D. $S_{xq} = 2\pi a^2 \sqrt{17}$.

Câu 31. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và $\widehat{SAB} = 60^\circ$. Tính thể tích V của khối nón đỉnh S và đáy là đường tròn ngoại tiếp mặt đáy hình chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{12}$. B. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{12}$. C. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{6}$. D. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{6}$.

Câu 32. Một hình trụ có chiều cao bằng 5 cm và bán kính đáy bằng 2 cm. Tính thể tích V của hình trụ.

A. $V = 20\pi$. B. $V = 10\pi$. C. $V = 18\pi$. D. $V = 9\pi$.

Câu 33. Cho hình trụ có trục OO' và có chiều cao bằng ba lần bán kính đáy. Trên hai đường tròn đáy (O) và (O') lần lượt lấy hai điểm A và B sao cho $OA \perp O'B$. Gọi φ là góc giữa AB và trục OO' của hình trụ. Tính $\tan \varphi$.

A. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{3}$. B. $\tan \varphi = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. C. $\tan \varphi = \frac{1}{3}$. D. $\tan \varphi = 3$.

Câu 34. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Một mặt phẳng vuông góc với trục của mặt trụ thì cắt mặt trụ theo giao tuyến là một đường tròn.
- B. Mọi mặt phẳng song song với trục của hình trụ thì cắt hình trụ theo thiết diện là một hình chữ nhật.
- C. Một mặt phẳng đi qua một điểm nằm ngoài hình trụ và một điểm nằm trong hình trụ thì cắt hình trụ tại hai điểm phân biệt.
- D. Mọi hình trụ đều nội tiếp được hình lăng trụ có đáy là một hình thang cân cho trước.

Câu 35. Một hình trụ có bán kính đáy R và có thiết diện qua trục là một hình vuông. Diện tích xung quanh và thể tích khối trụ đó bằng

A. $S_{xq} = 4\pi R^2, V = 2\pi R^3$. B. $S_{xq} = 2\pi R^2, V = 2\pi R^3$.
C. $S_{xq} = 4\pi R^2, V = 3\pi R^3$. D. $S_{xq} = 2\pi R^2, V = \pi R^3$.

Câu 36. Cho khối trụ có thể tích bằng 64π và có độ dài chiều cao h bằng bán kính r của đường tròn đáy. Tính chiều cao h của khối trụ.

A. $h = 4$. B. $h = \frac{4}{3}$. C. $h = 8$. D. $h = \frac{8}{3}$.

Câu 37. Một hình trụ có bán kính đáy $r = 2\sqrt{3}$ cm và thể tích $V = 24\pi \text{ cm}^3$. Tính chiều cao của hình trụ.

A. 2 cm. B. 6 cm. C. $2\sqrt{3}$ cm. D. 1 cm.

Câu 38. Gọi l , h và R lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình trụ. Đẳng thức luôn đúng là

A. $l = h$. B. $r = h$. C. $l^2 = h^2 + R^2$. D. $R^2 = h^2 + l^2$.

Câu 39. Một hình trụ có bán kính đáy bằng với chiều cao của nó. Biết thể tích của khối trụ đó bằng 8π , tính chiều cao h của hình trụ.

A. $h = \sqrt[3]{4}$. B. $h = 2$. C. $h = 2\sqrt{2}$. D. $h = \sqrt[3]{32}$.

Câu 40. Tính diện tích xung quanh S của hình trụ có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao bằng 4.

A. $S = 24\pi$. B. $S = 12\pi$. C. $S = 6\pi$. D. $S = 8\pi$.

Câu 41. Tính diện tích xung quanh của khối trụ có bán kính đáy $r = 2$ và độ dài đường sinh $l = 2\sqrt{5}$.

A. $8\sqrt{5}\pi$. B. $2\sqrt{5}\pi$. C. 2π . D. $4\sqrt{5}\pi$.

Câu 42. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 3 cm, độ dài đường cao bằng 4 cm. Tính diện tích xung quanh của hình trụ này.

A. $24\pi \text{ (cm}^2\text{)}$. B. $22\pi \text{ (cm}^2\text{)}$. C. $26\pi \text{ (cm}^2\text{)}$. D. $20\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

🔹 **Câu 43.** Cho hình trụ (T) được sinh ra khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh AB . Biết $AC = 2\sqrt{3}a$ và góc $\widehat{ACB} = 45^\circ$. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ (T).

- A. $S_{tp} = 12\pi a^2$. B. $S_{tp} = 8\pi a^2$. C. $S_{tp} = 24\pi a^2$. D. $S_{tp} = 16\pi a^2$.

🔹 **Câu 44.** Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$ và $AD = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN , ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đó.

- A. $S_{tp} = \frac{4\pi}{3}$. B. $S_{tp} = 4\pi$. C. $S_{tp} = 6\pi$. D. $S_{tp} = 3\pi$.

🔹 **Câu 45.** Cho hình trụ có bán kính đáy $r = \sqrt{2}$ cm và khoảng cách giữa hai đáy bằng $2\sqrt{3}$ cm. Diện tích xung quanh của hình trụ là

- A. $S_{xq} = 2\sqrt{5}\pi \text{ cm}^2$. B. $S_{xq} = 2\sqrt{6}\pi \text{ cm}^2$. C. $S_{xq} = 4\sqrt{5}\pi \text{ cm}^2$. D. $S_{xq} = 4\sqrt{6}\pi \text{ cm}^2$.

🔹 **Câu 46.** Một khối trụ có bán kính đáy bằng 5 và khoảng cách giữa hai đáy bằng 7. Thể tích khối trụ bằng

- A. 35π . B. 125π . C. 175π . D. 70π .

🔹 **Câu 47.** Tính thể tích khối nón có bán kính đáy 3 cm và độ dài đường sinh 5 cm.

- A. $12\pi \text{ cm}^3$. B. $15\pi \text{ cm}^3$. C. $36\pi \text{ cm}^3$. D. $45\pi \text{ cm}^3$.

🔹 **Câu 48.** Cho hình lập phương có cạnh là a và một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương. Gọi S_1 là diện tích 6 mặt của hình lập phương, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Hãy tính tỉ số $\frac{S_2}{S_1}$.

- A. $\frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{2}$. B. $\frac{S_2}{S_1} = \frac{\pi}{2}$. C. $\frac{S_2}{S_1} = \pi$. D. $\frac{S_2}{S_1} = \frac{\pi}{6}$.

🔹 **Câu 49.** Hình trụ tròn xoay có đường kính đáy là $2a$, chiều cao là $h = 2a$ có thể tích là

- A. $V = 2\pi a^3$. B. $V = \pi a^3$. C. $V = 2\pi a^2$. D. $V = 2\pi a^2 h$.

🔹 **Câu 50.** Công thức tính thể tích khối trụ có bán kính đáy R và chiều cao bằng h là

- A. $V = \pi R h$. B. $V = \pi R^2 h$. C. $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$. D. $V = \pi R h^2$.

🔹 **Câu 51.** Tính thể tích khối trụ có bán kính $R = 3$, chiều cao $h = 5$.

- A. $V = 45\pi$. B. $V = 45$. C. $V = 15\pi$. D. $V = 90\pi$.

🔹 **Câu 52.** Một hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AD = \pi$, đáy nhỏ $AB = \pi$, đáy lớn $CD = 2\pi$. Cho hình thang đó quay quanh CD ta được khối tròn xoay có thể tích V bằng bao nhiêu?

- A. $V = 2\pi^4$. B. $V = \frac{4}{3}\pi^4$. C. $V = \frac{4}{3}\pi^3$. D. $V = \frac{4}{3}\pi^2$.

🔹 **Câu 53.** Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ $AB = 1$, đáy lớn $CD = 3$, cạnh bên $BC = DA = \sqrt{2}$. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay hình thang đó quay quanh AB .

- A. $V = \frac{4\pi}{3}$. B. $V = \frac{5\pi}{3}$. C. $V = \frac{2\pi}{3}$. D. $V = \frac{7\pi}{3}$.

🔹 **Câu 54.** Mặt phẳng đi qua trục hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh a . Thể tích của khối trụ đó bằng bao nhiêu?

- A. $V = \frac{\pi a^3}{2}$. B. $V = \frac{\pi a^3}{8}$. C. $V = \frac{\pi a^3}{4}$. D. $V = \pi a^3$.

🔹 **Câu 55.** Một khối trụ có bán kính đáy bằng 5 và khoảng cách giữa hai đáy bằng 7. Thể tích khối trụ bằng

- A. 35π . B. 125π . C. 175π . D. 70π .

🔹 **Câu 56.** Mặt phẳng đi qua trục của một hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh $4R$. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đã cho.

- A. $20\pi R^2$. B. $24\pi R^2$. C. $16\pi R^2$. D. $4\pi R^2$.

Câu 57. Cho khối trụ (T) có O và O' là tâm hai đường tròn đáy. Gọi $ABB'A'$ là thiết diện song song với trục OO' (A, B thuộc đường tròn tâm O ; A', B' thuộc đường tròn tâm O'). Biết $AB = 8$, $AA' = 6$ và thể tích của khối trụ (T) bằng 150π . Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng ($AA'BB'$).

- A. $d = 5$. B. $d = 2$. C. $d = 3$. D. $d = 4$.

Câu 58. Một hình trụ có bán kính đáy bằng 2 cm, thiết diện qua trục là một hình vuông. Tính thể tích V của khối trụ.

- A. $V = 12\pi \text{ cm}^3$. B. $V = 16\pi \text{ cm}^3$. C. $V = 20\pi \text{ cm}^3$. D. $V = 24\pi \text{ cm}^3$.

Câu 59. Một hình trụ có bán kính mặt đáy bằng 5 cm. Thiết diện qua trục của hình trụ có diện tích bằng 40 cm^2 . Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

- A. $S_{xq} = 30\pi \text{ cm}^2$. B. $S_{xq} = 45\pi \text{ cm}^2$. C. $S_{xq} = 40\pi \text{ cm}^2$. D. $S_{xq} = 15\pi \text{ cm}^2$.

Câu 60. Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng $36a^2\pi$. Tính thể tích V của lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ.

- A. $V = 27a^3\sqrt{3}$. B. $V = 81a^3\sqrt{3}$. C. $V = 24a^3\sqrt{3}$. D. $V = 36a^3\sqrt{3}$.

Câu 61. Một khối trụ có hai đáy là hai hình tròn ngoại tiếp hai mặt của một hình lập phương cạnh a . Tính theo a thể tích V của khối trụ đó.

- A. $V = \frac{\pi a^3}{8}$. B. $V = \frac{\pi a^3}{4}$. C. $V = \pi a^3$. D. $V = \frac{\pi a^3}{2}$.

Câu 62. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 6. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có một đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và chiều cao bằng chiều cao của tứ diện $ABCD$.

- A. $S_{xq} = 12\sqrt{2}\pi$. B. $S_{xq} = 24\sqrt{3}\pi$. C. $S_{xq} = 24\sqrt{2}\pi$. D. $S_{xq} = 12\sqrt{3}\pi$.

Câu 63. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có góc giữa hai mặt phẳng ($A'BC$) và (ABC) bằng 45° , diện tích tam giác $A'BC$ bằng $a^2\sqrt{6}$. Tính diện tích xung quanh hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $\frac{4\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. B. $4\pi a^2$. C. $2\pi a^2$. D. $\frac{8\pi a^2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 64. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $2a$. Gọi S là diện tích xung quanh của hình trụ có hai đường tròn đáy ngoại tiếp hai hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Tính diện tích S .

- A. $S = 4\pi a^2\sqrt{2}$. B. $S = \pi a^2\sqrt{2}$. C. $S = \pi a^2\sqrt{3}$. D. $S = \pi a^2$.

Câu 65. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a và chiều cao h . Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều tam giác đều nội tiếp hình trụ đã cho.

- A. $V = \frac{\sqrt{3}a^2h}{4}$. B. $V = \frac{3\sqrt{3}a^2h}{4}$.
C. $V = \frac{\pi}{3} \left(h^2 + \frac{4a^2}{3} \right) \sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{a^2}{3}}$. D. $V = \frac{3\sqrt{3}\pi a^2h}{4}$.

Câu 66. Một khối trụ có hai đáy là hai hình tròn ngoại tiếp hai mặt của một hình lập phương cạnh $a\sqrt{2}$. Tính theo a thể tích V của khối trụ đó.

- A. $V = \frac{\pi a^3}{8}$. B. $V = \frac{\pi a^3}{4}$. C. $V = \pi a^3$. D. $V = \frac{\pi a^3}{2}$.

Câu 67. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 9. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có một đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và chiều cao bằng chiều cao của tứ diện $ABCD$.

- A. $S_{xq} = 27\sqrt{3}\pi$. B. $S_{xq} = 54\sqrt{3}\pi$. C. $S_{xq} = 54\sqrt{2}\pi$. D. $S_{xq} = 27\sqrt{2}\pi$.

🔥 Câu 68. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h . Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{\pi a^2 h}{9}$. B. $V = \frac{\pi a^2 h}{9}$. C. $V = \frac{\pi a^2 h}{3}$. D. $V = 3\pi a^2 h$.

🔥 Câu 69. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h .

- A. $V = \frac{\pi a^2 h}{9}$. B. $V = \frac{\pi a^2 h}{3}$. C. $V = 3\pi a^2 h$. D. $V = \pi a^2 h$.

BÀI 2. MẶT CẦU

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

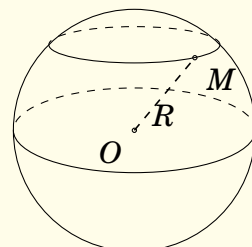
Định nghĩa 1.

Tập hợp các điểm M trong không gian cách điểm O cố định một khoảng R gọi là *mặt cầu* tâm O , bán kính R , kí hiệu là $S(O; R)$.

Khi đó, $S(O; R) = \{M | OM = R\}$.

Với hai điểm $C, D \in S(O; R)$ thì đoạn thẳng CD gọi là *dây cung* của mặt cầu.

Dây cung đi qua tâm gọi là *đường kính* của mặt cầu. Khi đó, độ dài đường kính bằng $2R$.

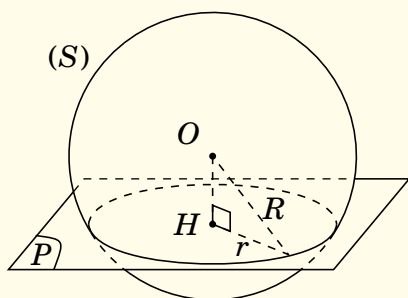
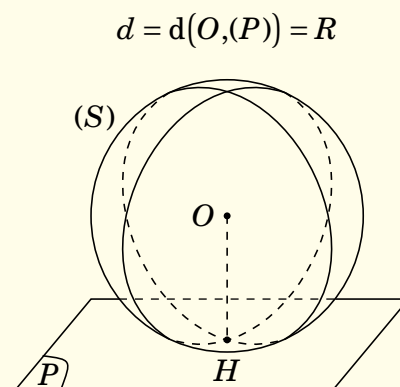
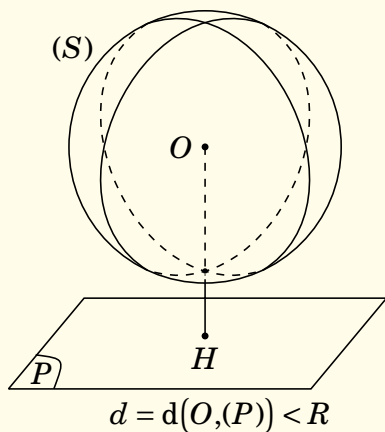


Định nghĩa 2. Cho mặt cầu tâm O bán kính R và A là một điểm bất kì trong không gian.

- Nếu $OA = R$ thì ta nói điểm A *nằm trên* mặt cầu $S(O; R)$.
- Nếu $OA < R$ thì ta nói điểm A *nằm trong* mặt cầu $S(O; R)$.
- Nếu $OA > R$ thì ta nói điểm A *nằm ngoài* mặt cầu $S(O; R)$.

Tập hợp các điểm thuộc mặt cầu $S(O; R)$ cùng với các điểm nằm trong mặt cầu đó gọi là *khối cầu* hoặc *hình cầu* tâm O bán kính R .

2 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT CẦU VÀ MẶT PHẪNG



$$R^2 = r^2 + d^2$$

Tính chất 1. Cho mặt cầu $S(O; R)$ và mặt phẳng (P) . Gọi d là khoảng cách từ tâm O của mặt cầu đến mặt phẳng (P) . Ta có:

- Nếu $d > R$ thì mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu $S(O; R)$.
- Nếu $d = R$ thì mặt phẳng (P) và mặt cầu $S(O; R)$ có một điểm chung duy nhất. Khi đó, ta nói mặt phẳng (P) *tiếp xúc* với mặt cầu $S(O; R)$. Điểm tiếp xúc gọi là *tiếp điểm*, (P) gọi là *mặt phẳng tiếp xúc* hay *tiếp diện* của mặt cầu.
- Nếu $d < R$ thì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu $S(O; R)$ theo một đường tròn bán kính $R' = \sqrt{R^2 - d^2}$. Đặc biệt, khi $d = 0$ thì tâm O thuộc mặt phẳng (P) , giao tuyến của (P) và $S(O; R)$ là đường tròn tâm O bán kính R . Đường tròn này gọi là *đường tròn lớn*.

! Điều kiện cần và đủ để mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $S(O; R)$ là (P) vuông góc với bán kính tại tiếp điểm.

Tính chất 2. Cho mặt cầu $S(O; R)$ và đường thẳng Δ . Gọi d là khoảng cách O đến đường thẳng Δ . Khi đó,

- $d > R \Leftrightarrow \Delta$ không cắt mặt cầu $S(O; R)$.
- $d < R \Leftrightarrow \Delta$ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.
- $d = R \Leftrightarrow \Delta$ và mặt cầu $S(O; R)$ tiếp xúc nhau. Do đó, điều kiện cần và đủ để Δ tiếp xúc với mặt cầu $S(O; R)$ là $d = R$.

Định lý 1. Cho mặt cầu $S(O; R)$ và điểm A nằm ngoài mặt cầu. Khi đó,

- Qua A có vô số tiếp tuyến với mặt cầu.
- Tập hợp các tiếp tuyến này tạo thành một mặt nón đỉnh A .
- Độ dài các đoạn thẳng nối A với các tiếp điểm đều bằng nhau.

Định lý 2. Cho mặt cầu $S(O; R)$ và điểm A nằm trên mặt cầu. Khi đó,

- Qua A có vô số tiếp tuyến với mặt cầu.
- Tất cả các tiếp tuyến này đều vuông góc với bán kính của mặt cầu tại A và nằm trên mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại A .

! Người ta nói mặt cầu nội tiếp hình đa diện nếu mặt cầu đó tiếp xúc với tất cả các mặt của hình đa diện, nói mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện nếu tất cả các đỉnh của hình đa diện đó đều nằm trên mặt cầu.

Tính chất 3. Cho mặt cầu bán kính R . Khi đó,

- Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2$.
- Thể tích khối cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

! — Diện tích S của mặt cầu bán kính R bằng 4 lần diện tích hình tròn lớn của mặt cầu đó.
— Thể tích V của khối cầu bán kính R bằng thể tích khối chóp có diện tích đáy bằng diện tích mặt cầu và có chiều cao bằng bán kính của khối cầu đó.

B TRẮC NGHIỆM

🔥 **Câu 1.** Cho khối cầu có bán kính $r = 2$. Thể tích của khối cầu đã cho bằng

- A. 16π . B. $\frac{32\pi}{3}$. C. 32π . D. $\frac{8\pi}{3}$.

🔥 **Câu 2.** Thể tích khối cầu có đường kính $2a$ bằng

A. $\frac{4\pi a^3}{3}$. B. $4\pi a^3$. C. $\frac{\pi a^3}{3}$. D. $2\pi a^3$.

Câu 3. Cho mặt cầu có diện tích bằng $\frac{8\pi a^2}{3}$. Tính bán kính r của mặt cầu.

A. $r = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. B. $r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $r = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. D. $r = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 4. Cho hình hộp chữ nhật có ba kích thước a, b, c . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp của hình hộp chữ nhật đó bằng

A. $\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{3}$. B. $2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. C. $\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$. D. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Câu 5. Một mặt cầu có diện tích là 16π . Tính bán kính R của mặt cầu.

A. $R = 2\pi$. B. $R = 2$. C. $R = 4$. D. $R = 4\pi$.

Câu 6. Công thức tính diện tích mặt cầu bán kính R .

A. $S = \frac{4\pi R^3}{3}$. B. $S = \pi R^2$. C. $S = \frac{3\pi R^2}{4}$. D. $S = 4\pi R^2$.

Câu 7. Diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương cạnh bằng 2 là

A. 12π . B. $2\pi\sqrt{3}$. C. $8\pi\sqrt{3}$. D. 48π .

Câu 8. Cho khối cầu S có thể tích bằng 36π (cm^3). Diện tích mặt cầu 1 bằng bao nhiêu?

A. 36π (cm^2). B. 27π (cm^2). C. 4. D. 18π (cm^2).

Câu 9. Cho mặt cầu (S_1) bán kính R_1 , mặt cầu (S_2) bán kính R_2 . Biết rằng $R_2 = 2R_1$, tính tỉ số diện tích mặt cầu (S_2) và mặt cầu (S_1).

A. 3. B. 2. C. 4. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 10. Bán kính R của khối cầu có thể tích $V = \frac{32\pi a^3}{3}$ là:

A. $\sqrt[3]{7}a$. B. $R = 2a$. C. $R = 2\sqrt{2}a$. D. $\sqrt{2}a$.

Câu 11. Một mặt cầu có bán kính $R\sqrt{3}$ có diện tích bằng

A. $4\pi R^2\sqrt{3}$. B. $8\pi R^2$. C. $4\pi R^2$. D. $12\pi R^2$.

Câu 12. Khối cầu có thể tích là 36π . Diện tích của mặt cầu là

A. $S = 9\pi$. B. $S = 18\pi$. C. $S = 36\pi$. D. $S = 27\pi$.

Câu 13. Diện tích của mặt cầu có bán kính $r = 5a$ là

A. $40\pi a^2$. B. $100\pi a^2$. C. $25\pi a^2$. D. $\frac{100\pi a^2}{3}$.

Câu 14. Tính diện tích S của mặt cầu có đường kính bằng $2a$.

A. $S = 4\pi a^2$. B. $S = 2\pi a^2$. C. $S = \pi a^2$. D. $S = 16\pi a^2$.

Câu 15. Công thức tính diện tích mặt cầu là

A. $S = 3\pi R^2$. B. $S = \frac{4}{3}\pi R^3$. C. $S = \pi R^2$. D. $S = 4\pi R^2$.

Câu 16. Khối cầu bán kính $R = 6$ có thể tích bằng bao nhiêu?

A. 72π . B. 48π . C. 288π . D. 144π .

Câu 17. Thể tích V của một khối cầu có bán kính R là

A. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. B. $V = \frac{1}{3}\pi R^3$. C. $V = \frac{4}{3}\pi R^2$. D. $V = 4\pi R^3$.

Câu 18. Khối cầu (S) có bán kính bằng r và thể tích bằng V . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. B. $V = \frac{4}{3}\pi^2 r^2$. C. $V = \frac{4}{3}\pi^2 r^3$. D. $V = \frac{4}{3}\pi r$.

🔥 **Câu 19.** Tính thể tích V của khối cầu có đường kính bằng 3 cm.

- A. $V = 36\pi \text{ cm}^3$. B. $V = \frac{9\pi}{8} \text{ cm}^3$. C. $V = \frac{9\pi}{2} \text{ cm}^3$. D. $V = 9\pi \text{ cm}^3$.

🔥 **Câu 20.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = 2a, AA' = 3a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ACB'D'$.

- A. $R = \frac{a\sqrt{14}}{2}$. B. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $R = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

🔥 **Câu 21.** Cho hình cầu đường kính $2a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) cắt hình cầu theo thiết diện là hình tròn có bán kính bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ tâm hình cầu đến mặt phẳng (P) .

- A. a . B. $a\sqrt{10}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

🔥 **Câu 22.** Cho mặt phẳng (P) cắt mặt cầu $S(I;R)$ theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r = 3 \text{ cm}$, khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) bằng 2 cm. Diện tích của mặt cầu $S(I;R)$ bằng

- A. $52\pi \text{ cm}^2$. B. $13\pi \text{ cm}^2$. C. $4\sqrt{13}\pi \text{ cm}^2$. D. $4\sqrt{5}\pi \text{ cm}^2$.

🔥 **Câu 23.** Cho mặt cầu (S) có tâm I , bán kính R . Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (α) , $IH < R$. Gọi r là bán kính đường tròn cắt bởi mặt phẳng (α) và (S) . Mệnh đề nào sau đây là mệnh đúng?

- A. $r = \sqrt{R^2 + IH^2}$. B. $R = \sqrt{IH^2 - r^2}$. C. $R = \sqrt{IH^2 + r^2}$. D. $IH = \sqrt{R^2 + r^2}$.

🔥 **Câu 24.** Hình trụ có bán kính đáy r . Gọi O và O' là tâm của hai đường tròn đáy, với $OO' = 2r$. Một mặt cầu (S) tiếp xúc với hai đáy của hình trụ tại O và O' . Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích mặt cầu và diện tích toàn phần của hình trụ trên. Khi đó

- A. $S_1 = \frac{2S_2}{3}$. B. $S_1 = S_2$. C. $S_1 = \frac{3S_2}{4}$. D. $S_1 = \frac{S_2}{2}$.

🔥 **Câu 25.** Cho hình trụ có hai đáy là hai đường tròn (O,R) và (O',R) , chiều cao là $R\sqrt{3}$ và hình nón có đỉnh là O' và đáy là đường tròn (O,R) . Tính tỉ số giữa diện tích xung quanh của hình trụ và diện tích xung quanh của hình nón.

- A. $\sqrt{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. 3. D. 2.

🔥 **Câu 26.** Gọi (S) là khối cầu bán kính R , (N) là khối nón có bán kính đáy R và chiều cao h . Biết rằng thể tích của khối cầu (S) và khối nón (N) bằng nhau, tính tỉ số $\frac{h}{R}$.

- A. 1. B. $\frac{4}{3}$. C. 12. D. 4.

🔥 **Câu 27.** Trong mặt phẳng cho góc xOy . Một mặt phẳng (P) thay đổi và vuông góc với đường phân giác trong của góc xOy cắt Ox, Oy lần lượt tại A, B . Trong (P) lấy điểm M sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. M chạy trên một mặt cầu. B. M chạy trên một mặt nón.
C. M chạy trên một mặt trụ. D. M chạy trên một đường tròn.

🔥 **Câu 28.** Trong không gian cho hai điểm A, B cố định, phân biệt và điểm M thay đổi sao cho diện tích tam giác MAB không thay đổi. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Tập hợp các điểm M là một mặt phẳng. B. Tập hợp các điểm M là một mặt trụ.
C. Tập hợp các điểm M là một mặt nón. D. Tập hợp các điểm M là một mặt cầu.

🔥 **Câu 29.** Một hình trụ có bán kính đáy bằng r và khoảng cách giữa hai đáy là $r\sqrt{3}$. Một hình nón có đỉnh là tâm của mặt đáy này và đáy trùng với đáy kia của hình trụ. Tính tỉ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón.

- A. $\sqrt{3}$. B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. C. $\frac{1}{3}$. D. 3.

🔥 **Câu 30.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính theo a diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

- A. $8\pi a^2$. B. $a^2\sqrt{2}$. C. $2\pi a^2$. D. $2a^2$.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với đáy, tam giác ABC vuông tại B . Biết $SB = \sqrt{5}a, BC = \sqrt{3}a$. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

- A. $S = 4\sqrt{2}\pi a^2$. B. $S = 8\pi a^2$. C. $S = 2\pi a^2$. D. $S = 4\pi a^2$.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , tam giác ABC vuông tại B , $SA = 2a, AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

- A. $R = a$. B. $R = 2a$. C. $R = a\sqrt{2}$. D. $R = 2a\sqrt{2}$.

Câu 33. Cho chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , SA vuông góc với đáy, cho $SC = 2a$. Tính diện tích và thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

- A. $\frac{4}{3}\pi a^3$. B. $\frac{8}{3}\pi a^3$. C. $\frac{4}{3}\pi^2 a^3$. D. $\frac{4}{3}\sqrt{3}\pi a^3$.

Câu 34. Cho chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt đáy và $SC = 2a$. Tính diện tích và thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

- A. $S_{mc} = 4\pi R^2 = 4\pi a^2$ và $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8}{3}\pi a^3$. B. $S_{mc} = 4\pi R^2 = 4\pi a^2$ và $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi a^3$.
C. $S_{mc} = 4\pi R^2 = 3\pi a^2$ và $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi a^3$. D. $S_{mc} = 4\pi R^2 = 4\pi a^2$ và $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi a^2$.

Câu 35. Cho chóp $S.ABCD$ có cạnh SA vuông góc với đáy. $ABCD$ là hình chữ nhật có đường chéo $a\sqrt{5}, SA = 2a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

- A. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{3a}{2}$. D. $\frac{5a}{2}$.

Câu 36. Cho chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt đáy, ABC là tam giác đều cạnh bằng a , $SA = 2a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a, BC = 2a$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{16\pi a^2}{3}$. B. $\frac{8\pi a^2}{3}$. C. $\frac{16\pi a^2}{9}$. D. $\frac{4\pi a^2}{3}$.

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = \frac{2a\sqrt{6}}{3}, (SAB) \perp (ABCD)$ và $SA = SB = a$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

- A. $4\pi a^3$. B. $\frac{4\pi a^3}{3}$. C. $\frac{3\pi a^3}{4}$. D. $3\pi a^3$.

Câu 39. Cho chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, đáy ABC là tam giác cân tại A và $AB = a, \hat{A} = 120^\circ, SA = 2a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

- A. $R = 3a\sqrt{2}$. B. $R = 2a\sqrt{2}$. C. $R = a\sqrt{3}$. D. $R = a\sqrt{2}$.

Câu 40. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Khẳng định nào đúng?

- A. Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trùng với đỉnh S .
B. Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là tâm của mặt đáy $ABCD$.
C. Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trung điểm của đoạn thẳng nối S với tâm của mặt đáy $ABCD$.
D. Tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là trọng tâm của tam giác SAC .

Câu 41. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy là $2a$, cạnh bên là $a\sqrt{6}$. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

- A. $V = \frac{9a^3}{2}$. B. $V = \frac{9a^3\pi}{2}$. C. $V = \frac{81a^3\pi}{32}$. D. $V = \frac{3a^3\pi}{2}$.

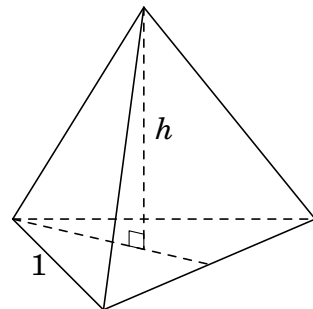
Câu 42. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Tính a biết mặt cầu ngoại tiếp tứ diện có bán kính bằng 1.

- A. $a = \frac{2\sqrt{3}}{7}$. B. $a = \frac{2\sqrt{5}}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$. D. $a = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Câu 43.

Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng 1 và chiều cao $h = \sqrt{3}$ (hình vẽ). Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là

- A. $\frac{100\pi}{3}$. B. $\frac{25\pi}{3}$. C. $\frac{100\pi}{27}$. D. 100π .



Câu 44. Cho chóp tam giác đều $S.ABC$, có $AB = a$ và cạnh $SA = 2a$. Xác định bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

- A. $\frac{3\sqrt{33}}{11}a$. B. $\frac{\sqrt{33}}{11}a$. C. $\frac{2\sqrt{33}}{11}a$. D. $\frac{2\sqrt{3}}{11}a$.

Câu 45. Cho chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có $AB = a$ cạnh $SA = 2a$. Xác định bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

- A. $\frac{2\sqrt{14}a}{7}$. B. $\frac{\sqrt{14}a}{7}$. C. $\frac{3\sqrt{14}a}{7}$. D. $\frac{4\sqrt{14}a}{7}$.

Câu 46. Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{18}$. B. $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$. C. $V = \frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$. D. $V = \frac{5\pi}{3}$.

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a, SB = b, SC = c$ và đôi một vuông góc. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

- A. $\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$. B. $\pi(a^2+b^2+c^2)$. C. $\frac{\pi\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$. D. $\frac{\pi(a^2+b^2+c^2)}{2}$.

Câu 48. Cho chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp.

- A. $\frac{a\sqrt{21}}{6}$. B. $\frac{5a\sqrt{21}}{6}$. C. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{7}}{6}$.

Câu 49. Cho hình hộp chữ nhật có ba kích thước a, b, c . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp của hình hộp chữ nhật đó bằng

- A. $\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{3}$. B. $2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. C. $\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$. D. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Câu 50. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AB = 3, BB' = 4, B'C' = 12$.

- A. 19. B. $\frac{13}{2}$. C. $\frac{19}{2}$. D. 13.

Câu 51. Một hình hộp chữ nhật có ba kích thước là 2, 3, 4 nội tiếp trong một mặt cầu. Tính diện tích của mặt cầu đó.

- A. $\sqrt{29}$. B. $29\sqrt{29}\pi$. C. $\frac{29}{2}\pi$. D. 29π .

Câu 52. Một mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có kích thước $AB = 4a, AD = 5a, AA' = 3a$. Mặt cầu trên có bán kính bằng bao nhiêu?

- A. $2\sqrt{3}a$. B. $6a$. C. $\frac{5\sqrt{2}a}{2}$. D. $\frac{3\sqrt{2}a}{2}$.

Câu 53. Cho hình lăng trụ tam giác đều có chín cạnh đều bằng a . Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đó là

- A. $\frac{7\pi a^3 \sqrt{21}}{54}$. B. $\frac{7\pi a^3 \sqrt{21}}{18}$. C. $\frac{7\pi a^3 \sqrt{3}}{54}$. D. $\frac{7\pi a^3 \sqrt{7}}{54}$.

Câu 54. Cho khối lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $AA' = 2a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ đó.

- A. $R = 2a\sqrt{2}$. B. $R = a$. C. $R = a\sqrt{2}$. D. $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 55. Tính đường kính mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng $a\sqrt{3}$.

- A. $6a$. B. $\frac{3a}{2}$. C. $a\sqrt{3}$. D. $3a$.

Câu 56. Tính bán kính R mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng $2a$.

- A. $R = a$. B. $R = 2a\sqrt{3}$. C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $R = a\sqrt{3}$.

Câu 57. Trong không gian mặt cầu (S) tiếp xúc với sáu mặt của một hình lập phương cạnh a . Tính thể tích V của khối cầu tương ứng.

- A. $V = \frac{\pi a^3}{24}$. B. $V = \frac{\pi a^3}{3}$. C. $V = \frac{\pi a^3}{6}$. D. $V = \frac{4\pi a^3}{3}$.

Câu 58. Cho hình lăng trụ tam giác đều có cạnh a cạnh bên bằng b . Tính thể tích của khối cầu qua các đỉnh của lăng trụ.

- A. $\frac{1}{18\sqrt{3}} \sqrt{(4a^2 + 3b^2)^3}$. B. $\frac{\pi}{18\sqrt{3}} \sqrt{(4a^2 + 3b^2)^3}$.
C. $\frac{\pi}{18\sqrt{3}} \sqrt{(4a^2 + b^2)^3}$. D. $\frac{1}{18\sqrt{2}} \sqrt{(4a^2 + 3b^2)^3}$.

CHƯƠNG 3

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

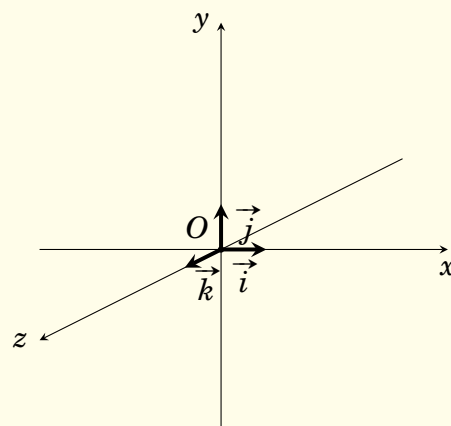
1 TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM VÀ VÉC-TƠ

Hệ trục tọa độ

- Điểm O gọi là gốc tọa độ.
- Trục Ox gọi là trục hoành; Trục Oy gọi là trục tung; Trục Oz gọi là trục cao.
- Các mặt phẳng chứa hai trục tọa độ gọi là các mặt phẳng tọa độ. Ta kí hiệu chúng lần lượt là (Oxy) , (Oyz) , (Ozx) .
- véc-tơ đơn vị của trục Ox , Oy , Oz lần lượt là: $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.
- Các véc-tơ đơn vị đôi một vuông góc với nhau và có độ dài bằng 1:

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$$

$$\text{và } \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0.$$



Tọa độ của điểm

① Định nghĩa

Trong không gian $Oxyz$ cho điểm M tùy ý. Vì ba véc-tơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ không đồng phẳng nên có một bộ số duy nhất $(x; y; z)$ sao cho:

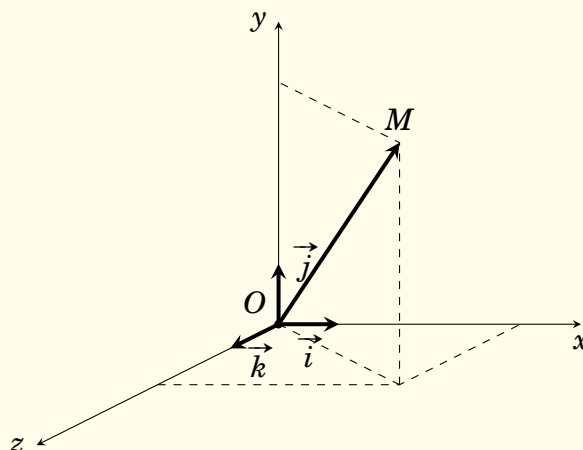
$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

Ta gọi bộ ba số $(x; y; z)$ là tọa độ của điểm M . Kí hiệu:

$$M(x; y; z) \text{ hoặc } M = (x; y; z)$$

Đặc biệt:

- Gốc $O(0; 0; 0)$.
- M thuộc $Ox \Leftrightarrow M(x_M; 0; 0)$.
- M thuộc $Oy \Leftrightarrow M(0; y_M; 0)$.
- M thuộc $Oz \Leftrightarrow M(0; 0; z_M)$.
- M thuộc $(Oxy) \Leftrightarrow M(x_M; y_M; 0)$.
- M thuộc $(Oyz) \Leftrightarrow M(0; y_M; z_M)$.
- M thuộc $(Oxz) \Leftrightarrow M(x_M; 0; z_M)$.



② **Tính chất:** Cho $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$.

— $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

— $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Tọa độ của véc-tơ

Trong không gian $Oxyz$ cho điểm véc-tơ $\vec{a}$. Khi đó luôn tồn tại duy nhất bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ sao cho:

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k}$$

Ta gọi bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ là tọa độ của véc-tơ $\vec{a}$. Ký hiệu: $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$.

— Trong hệ tọa độ $Oxyz$, tọa độ của điểm M cũng chính là tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{OM}$.

— $\vec{i} = (1; 0; 0); \vec{j} = (0; 1; 0); \vec{k} = (0; 0; 1)$.

2 BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VÉC-TƠ

Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Khi đó

Định lý 1.

— $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$.

— $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$.

— $k \cdot \vec{a} = (k \cdot a_1; k \cdot a_2; k \cdot a_3)$ (k là số thực).

Hệ quả 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ khi đó

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

— Với hai điểm $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$ thì tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$$

— véc-tơ $\vec{0} = (0; 0; 0)$.

— véc-tơ $\vec{u}$ được gọi là biểu diễn (hoặc phân tích) theo ba véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nếu có hai số x, y, z sao cho $\vec{u} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}$.

— $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0} \\ \exists k \neq 0: \vec{a} = k \cdot \vec{b} \end{cases}$ hay $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ (với $\vec{b} \neq \vec{0}$).

— A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$.

— Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right).$$

— Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$

— Tọa độ trọng tâm G của tứ diện $ABCD$ là

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$$

3 TÍCH VÔ HƯỚNG

Biểu thức tọa độ tích vô hướng

Định lý 2. Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ và $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Khi đó tích vô hướng của hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ là:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

hay

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Ứng dụng

① Độ dài của véc-tơ $\vec{a}$ là:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

② Khoảng cách giữa hai điểm A và B:

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

③ Góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

④ $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$.

4 TÍCH CÓ HƯỚNG VÀ ỨNG DỤNG

Định nghĩa Trong không gian $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Kí hiệu là $[\vec{a}, \vec{b}]$, được xác định bởi

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1).$$



Tích có hướng của hai vectơ là một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ là một số.

Ứng dụng của tích có hướng

- Điều kiện đồng phẳng của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$.
- Diện tích hình bình hành $ABCD$: $S_{ABCD} = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]|$.
- Diện tích tam giác ABC : $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|$.
- Thể tích khối hộp $ABC.A'B'C'$: $V_{ABCD.A'B'C'D} = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \cdot \overrightarrow{AA'}|$.
- Thể tích tứ diện $ABCD$: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}|$.

- ✓ Tích vô hướng của hai vectơ thường sử dụng để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, tính góc giữa hai đường thẳng.
- ✓ Tích có hướng của hai vectơ thường sử dụng để tính diện tích tam giác; tính thể tích khối tứ diện, thể tích hình hộp; chứng minh các vectơ đồng phẳng – không đồng phẳng, chứng minh các vectơ cùng phương.

- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.
- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$.

5 PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ bán kính R là:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, có bán kính là $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

6 MỘT SỐ YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC

Xét tam giác ABC , ta có:

- ① H là chân đường cao hạ từ A của $\Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} = k \cdot \overrightarrow{BC} \end{cases}$
- ② AD là đường phân giác trong của $\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{DC}$
- ③ AE là đường phân giác ngoài của $\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{EB} = \frac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{EC}$
- ④ H là trực tâm của $\Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \end{cases}$
- ⑤ I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases} |\overrightarrow{IA}| = |\overrightarrow{IB}| \\ |\overrightarrow{IA}| = |\overrightarrow{IC}| \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AI} = 0 \end{cases}$

B TRẮC NGHIỆM

🔥 **Câu 1.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba véc-tơ $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{u} = 4\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + 3\vec{c}$ là

- A. $\vec{u} = \left(11; \frac{5}{3}; \frac{53}{3}\right)$. B. $\vec{u} = \left(5; -\frac{121}{3}; \frac{17}{3}\right)$. C. $\vec{u} = \left(11; \frac{1}{3}; \frac{55}{3}\right)$. D. $\vec{u} = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 18\right)$.

🔥 **Câu 2.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; -2; 0)$, $B(1; 0; -1)$, $C(0; -1; 2)$, $D(0; m; k)$. Tìm hệ thức giữa m và k để bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng.

- A. $m + k = 1$. B. $m + 2k = 3$. C. $2m - 3k = 0$. D. $2m + k = 0$.

Câu 3. Cho ba điểm $A(2; -1; 5)$, $B(5; -5; 7)$ và điểm $M(x; y; 1)$. Với giá trị nào của x, y thì A, B, M thẳng hàng?

- A. $x = 4, y = -7$. B. $x = 4, y = 7$. C. $x = -4, y = -7$. D. $x = -4, y = 7$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; -2)$ và $N(-1; -2; 3)$. Tọa độ $\vec{u} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$ là

- A. $\vec{u} = (-1; 3; -1)$. B. $\vec{u} = (1; -3; 1)$. C. $\vec{u} = (3; 1; -5)$. D. $\vec{u} = (-3; -1; 5)$.

Câu 5. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(3; 3; 2)$, $B(-1; 2; 0)$, $C(1; 1; -2)$. Gọi $G(x_0; y_0; z_0)$ là trọng tâm của tam giác đó. Tổng $x_0 + y_0 + z_0$ bằng

- A. 9. B. $-\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. 3.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ điểm đối xứng với điểm $A(4; 1; -2)$ qua mặt phẳng (Ozx) .

- A. $(4; -1; -2)$. B. $(4; -1; 2)$. C. $(-4; -1; 2)$. D. $(4; 1; 2)$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $M(1; 2; 3)$ trên trục Ox .

- A. $(0; 0; 3)$. B. $(0; 0; 0)$. C. $(0; 2; 0)$. D. $(1; 0; 0)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 1)$. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

- A. $M(0; -1; 0)$. B. $Q(0; 0; 1)$. C. $N(3; 0; 0)$. D. $P(0; -1; 1)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 4)$. Hình chiếu vuông góc của A trên trục Oy là điểm nào dưới đây?

- A. $N(0; -2; 0)$. B. $M(0; -2; 4)$. C. $Q(1; 0; 0)$. D. $P(0; 0; 4)$.

Câu 10. Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$, khi đó $\cos \varphi$ bằng

- A. $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$. B. $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$. C. $\frac{-\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$. D. $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Câu 11. Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a} = (1; 2; 0)$ và $\vec{b} = (2; 0; -1)$, khi đó $\cos \varphi$ bằng

- A. 0. B. $\frac{2}{5}$. C. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. D. $-\frac{2}{5}$.

Câu 12. Cho vectơ $\vec{a} = (1; 3; 4)$, tìm vectơ $\vec{b}$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$

- A. $\vec{b} = (-2; -6; -8)$. B. $\vec{b} = (-2; -6; 8)$. C. $\vec{b} = (-2; 6; 8)$. D. $\vec{b} = (2; -6; -8)$.

Câu 13. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (-2; 2; 5)$, $\vec{b} = (0; 1; 2)$ trong không gian bằng

- A. 10. B. 13. C. 12. D. 14.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -2)$ và $B(2; 2; 1)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- A. $(-1; -1; -3)$. B. $(3; 1; 1)$. C. $(1; 1; 3)$. D. $(3; 3; -1)$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -1)$ và $B(2; 3; 2)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- A. $(1; 2; 3)$. B. $(-1; -2; 3)$. C. $(3; 5; 1)$. D. $(3; 4; 1)$.

Câu 16. Cho vectơ $\vec{a} = (1; -1; 2)$, độ dài vectơ $\vec{a}$ là

- A. $\sqrt{6}$. B. 2. C. $-\sqrt{6}$. D. 4.

Câu 17. Trong không gian cho hai điểm $A(-1; 2; 3)$, $B(0; 1; 1)$, độ dài đoạn AB bằng

- A. $\sqrt{6}$. B. $\sqrt{8}$. C. $\sqrt{10}$. D. $\sqrt{12}$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị, khi đó với $M(x; y; z)$ thì $\overrightarrow{OM}$ bằng

- A. $-x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$. B. $x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$. C. $x\vec{j} + y\vec{i} + z\vec{k}$. D. $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Câu 19. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ là một vectơ, kí hiệu $[\vec{a}, \vec{b}]$, được xác định bằng tọa độ

- A. $(a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$. B. $(a_2b_3 + a_3b_2; a_3b_1 + a_1b_3; a_1b_2 + a_2b_1)$.
C. $(a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 + a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$. D. $(a_2b_2 - a_3b_3; a_3b_3 - a_1b_1; a_1b_1 - a_2b_2)$.

Câu 20. Cho các vectơ $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ và $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ khi và chỉ khi

- A. $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 1$. B. $u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + u_3 + v_3 = 0$.
C. $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$. D. $u_1v_2 + u_2v_3 + u_3v_1 = -1$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M nằm trên trục Ox sao cho M không trùng với gốc tọa độ, khi đó tọa độ điểm M có dạng

- A. $M(a; 0; 0), a \neq 0$. B. $M(0; b; 0), b \neq 0$. C. $M(0; 0; c), c \neq 0$. D. $M(a; 1; 1), a \neq 0$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M nằm trên mặt phẳng (Oxy) sao cho M không trùng với gốc tọa độ và không nằm trên hai trục Ox, Oy , khi đó tọa độ điểm M là $(a, b, c \neq 0)$

- A. $(0; b; a)$. B. $(a; b; 0)$. C. $(0; 0; c)$. D. $(a; 1; 1)$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (0; 3; 4)$ và $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$, khi đó tọa độ vectơ $\vec{b}$ có thể là

- A. $(0; 3; 4)$. B. $(4; 0; 3)$. C. $(2; 0; 1)$. D. $(-8; 0; -6)$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, khi đó $|\vec{u}, \vec{v}|$ bằng

- A. $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})$. B. $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$.
C. $\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$. D. $\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (1; -1; 2), \vec{b} = (3; 0; -1), \vec{c} = (-2; 5; 1)$, vectơ $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ có tọa độ là

- A. $(6; 0; -6)$. B. $(-6; 6; 0)$. C. $(6; -6; 0)$. D. $(0; 6; -6)$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; -3), B(2; 4; -1), C(2; -2; 0)$. Độ dài các cạnh AB, AC, BC của tam giác ABC lần lượt là

- A. $\sqrt{21}, \sqrt{13}, \sqrt{37}$. B. $\sqrt{11}, \sqrt{14}, \sqrt{37}$. C. $\sqrt{21}, \sqrt{14}, \sqrt{37}$. D. $\sqrt{21}, \sqrt{13}, \sqrt{35}$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; -3), B(2; 4; -1), C(2; -2; 0)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

- A. $\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. B. $\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$. C. $(5; 2; 4)$. D. $\left(\frac{5}{2}; 1; -2\right)$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 0), B(-1; 1; 3), C(0; -2; 5)$. Để 4 điểm A, B, C, D đồng phẳng thì tọa độ điểm D là

- A. $D(-2; 5; 0)$. B. $D(1; 2; 3)$. C. $D(1; -1; 6)$. D. $D(0; 0; 2)$.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (1; 2; 3), \vec{b} = (-2; 0; 1), \vec{c} = (-1; 0; 1)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c} - 3\vec{i}$

- A. $\vec{n} = (6; 2; 6)$. B. $\vec{n} = (6; 2; -6)$. C. $\vec{n} = (0; 2; 6)$. D. $\vec{n} = (-6; 2; 6)$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 0; 2), B(-2; 1; 3), C(3; 2; 4)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC

- A. $G\left(\frac{2}{3}; 1; 3\right)$. B. $G(2; 3; 9)$. C. $G(-6; 0; 24)$. D. $G\left(2; \frac{1}{3}; 3\right)$.

Câu 31. Cho 3 điểm $M(2; 0; 0), N(0; -3; 0), P(0; 0; 4)$. Nếu $MNPQ$ là hình bình hành thì tọa độ của điểm Q là

- A. $Q(-2; -3; 4)$. B. $Q(2; 3; 4)$. C. $Q(3; 4; 2)$. D. $Q(-2; -3; -4)$.

- Câu 32.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;1;1), N(2;3;4), P(7;7;5)$. Để tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành thì tọa độ điểm Q là
A. $Q(-6;5;2)$. **B.** $Q(6;5;2)$. **C.** $Q(6;-5;2)$. **D.** $Q(-6;-5;-2)$.
- Câu 33.** Cho 3 điểm $A(1;2;0), B(1;0;-1), C(0;-1;2)$. Tam giác ABC là
A. tam giác có ba góc nhọn. **B.** tam giác cân đỉnh A .
C. tam giác vuông đỉnh A . **D.** tam giác đều.
- Câu 34.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1;2;2), B(0;1;3), C(-3;4;0)$. Để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm D là
A. $D(-4;5;-1)$. **B.** $D(4;5;-1)$. **C.** $D(-4;-5;-1)$. **D.** $D(4;-5;1)$.
- Câu 35.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau góc 60° và $|\vec{a}| = 2; |\vec{b}| = 4$. Khi đó $|\vec{a} + \vec{b}|$ bằng
A. $\sqrt{8\sqrt{3} + 20}$. **B.** $2\sqrt{7}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** 2.
- Câu 36.** Cho điểm $M(1;2;-3)$, khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (Oxy) bằng
A. 2. **B.** -3. **C.** 1. **D.** 3.
- Câu 37.** Cho điểm $M(-2;5;0)$, hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Oy là điểm
A. $M'(2;5;0)$. **B.** $M'(0;-5;0)$. **C.** $M'(0;5;0)$. **D.** $M'(-2;0;0)$.
- Câu 38.** Cho điểm $M(1;2;-3)$, hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (Oxy) là điểm
A. $M'(1;2;0)$. **B.** $M'(1;0;-3)$. **C.** $M'(0;2;-3)$. **D.** $M'(1;2;3)$.
- Câu 39.** Cho điểm $M(-2;5;1)$, khoảng cách từ điểm M đến trục Ox bằng
A. $\sqrt{29}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 2. **D.** $\sqrt{26}$.
- Câu 40.** Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ với I là trọng tâm của đáy ABC . Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức đúng
A. $\vec{IA} = \vec{IB} + \vec{IC}$. **B.** $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{CI} = \vec{0}$. **C.** $\vec{IA} + \vec{BI} + \vec{IC} = \vec{0}$. **D.** $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$.
- Câu 41.** Trong không gian $Oxyz$, cho 3 vectơ $\vec{a} = (-1;1;0); \vec{b} = (1;1;0); \vec{c} = (1;1;1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**:
A. $\vec{b} \perp \vec{c}$. **B.** $|\vec{a}| = \sqrt{2}$. **C.** $|\vec{c}| = \sqrt{3}$. **D.** $\vec{a} \perp \vec{b}$.
- Câu 42.** Cho điểm $M(3;2;-1)$, điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (Oxy) là điểm
A. $M'(3;-2;1)$. **B.** $M'(3;-2;-1)$. **C.** $M'(3;2;1)$. **D.** $M'(3;2;0)$.
- Câu 43.** Cho điểm $M(3;2;-1)$, điểm $M'(a;b;c)$ đối xứng của M qua trục Oy , khi đó $a + b + c$ bằng
A. 6. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 2.
- Câu 44.** Trong không gian $Oxyz$ cho 2 véc tơ $\vec{a} = (2;1;-1); \vec{b} = (1;3;m)$. Tìm m để $(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$.
A. $m = -5$. **B.** $m = 5$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -2$.
- Câu 45.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = (2;-1;1)$ và $\vec{v} = (0;-3;-m)$. Tìm số thực m sao cho tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.
A. $m = 4$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = -2$.
- Câu 46.** Cho $\vec{u} = (1;1;1)$ và $\vec{v} = (0;1;m)$. Để góc giữa hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ có số đo bằng 45° thì m bằng
A. $\pm\sqrt{3}$. **B.** $2 \pm \sqrt{3}$. **C.** $1 \pm \sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.
- Câu 47.** Cho $A(1;-2;0), B(3;3;2), C(-1;2;2), D(3;3;1)$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng
A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

❖ Câu 48. Trong không gian $Oxyz$ cho tứ diện $ABCD$. Độ dài đường cao vẽ từ D của tứ diện $ABCD$ cho bởi công thức nào sau đây:

A. $h = \frac{1}{3} \frac{|[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}|}{|\vec{AB} \cdot \vec{AC}|}$.
 B. $h = \frac{1}{3} \frac{|[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}|}{|\vec{AB} \cdot \vec{AC}|}$.
 C. $h = \frac{|[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}|}{|\vec{AB} \cdot \vec{AC}|}$.
 D. $h = \frac{|[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}|}{|\vec{AB} \cdot \vec{AC}|}$.

❖ Câu 49. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; -2; 0), B(3; 3; 2), C(-1; 2; 2), D(3; 3; 1)$. Độ dài đường cao của tứ diện $ABCD$ hạ từ đỉnh D xuống mặt phẳng (ABC) là

A. $\frac{9}{7\sqrt{2}}$.
 B. $\frac{9}{7}$.
 C. $\frac{9}{\sqrt{2}}$.
 D. $\frac{9}{14}$.

❖ Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(1; 0; 2), B(-2; 1; 3), C(3; 2; 4), D(6; 9; -5)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tứ diện $ABCD$

A. $G(-9; \frac{18}{4}; -30)$.
 B. $G(8; 12; 4)$.
 C. $G(3; 3; \frac{14}{4})$.
 D. $G(2; 3; 1)$.

❖ Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 1), B(2; -1; 2)$. Điểm M trên trục Ox và cách đều hai điểm A, B có tọa độ là

A. $M(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2})$.
 B. $M(\frac{1}{2}; 0; 0)$.
 C. $M(\frac{3}{2}; 0; 0)$.
 D. $M(0; \frac{1}{2}; \frac{3}{2})$.

❖ Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 1), B(3; -1; 2)$. Điểm M trên trục Oz và cách đều hai điểm A, B có tọa độ là

A. $M(0; 0; 4)$.
 B. $M(0; 0; -4)$.
 C. $M(0; 0; \frac{3}{2})$.
 D. $M(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2})$.

❖ Câu 53. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1; -2; 3), B(0; 3; 1), C(4; 2; 2)$. Cosin của góc $\widehat{BAC}$ là

A. $\frac{9}{2\sqrt{35}}$.
 B. $\frac{9}{\sqrt{35}}$.
 C. $-\frac{9}{2\sqrt{35}}$.
 D. $-\frac{9}{\sqrt{35}}$.

❖ Câu 54. Tọa độ của vectơ $\vec{n}$ vuông góc với hai vectơ $\vec{a} = (2; -1; 2), \vec{b} = (3; -2; 1)$ là

A. $\vec{n} = (3; 4; 1)$.
 B. $\vec{n} = (3; 4; -1)$.
 C. $\vec{n} = (-3; 4; -1)$.
 D. $\vec{n} = (3; -4; -1)$.

❖ Câu 55. Cho $\vec{u} = (2; -1; 1), \vec{v} = (m; 3; -1), \vec{w} = (1; 2; 1)$. Với giá trị nào của m thì ba vectơ trên đồng phẳng

A. $\frac{3}{8}$.
 B. $-\frac{3}{8}$.
 C. $\frac{8}{3}$.
 D. $-\frac{8}{3}$.

❖ Câu 56. Cho hai vectơ $\vec{a} = (1; \log_3 5; m), \vec{b} = (3; \log_5 3; 4)$. Với giá trị nào của m thì $\vec{a} \perp \vec{b}$

A. $m = 1; m = -1$.
 B. $m = 1$.
 C. $m = -1$.
 D. $m = 2; m = -2$.

❖ Câu 57. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1), D(-2; 1; -1)$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{3}{2}$.
 B. 3.
 C. 1.
 D. $\frac{1}{2}$.

❖ Câu 58. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(2; 5; 3), B(3; 7; 4), C(x; y; 6)$. Giá trị của x, y để ba điểm A, B, C thẳng hàng là

A. $x = 5; y = 11$.
 B. $x = -5; y = 11$.
 C. $x = -11; y = -5$.
 D. $x = 11; y = 5$.

❖ Câu 59. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; 0; 0), B(0; 0; 1), C(2; 1; 1)$. Tam giác ABC là

A. tam giác vuông tại A .
 B. tam giác cân tại A .
 C. tam giác vuông cân tại A .
 D. Tam giác đều.

🔥 Câu 60. Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC có $A(1;0;0), B(0;0;1), C(2;1;1)$. Tam giác ABC có diện tích bằng

- A. $\sqrt{6}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

🔥 Câu 61. Ba đỉnh của một hình bình hành có tọa độ là $(1;1;1), (2;3;4), (7;7;5)$. Diện tích của hình bình hành đó bằng

- A. $2\sqrt{83}$. B. $\sqrt{83}$. C. 83. D. $\frac{\sqrt{83}}{2}$.

🔥 Câu 62. Cho 3 vectơ $\vec{a} = (1;2;1); \vec{b} = (-1;1;2)$ và $\vec{c} = (x;3x;x+2)$. Tìm x để 3 vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng

- A. 2. B. -1. C. -2. D. 1.

🔥 Câu 63. Trong không gian $Oxyz$ cho ba vectơ $\vec{a} = (3;-2;4), \vec{b} = (5;1;6), \vec{c} = (-3;0;2)$. Tìm vectơ $\vec{x}$ sao cho vectơ $\vec{x}$ đồng thời vuông góc với $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

- A. $(1;0;0)$. B. $(0;0;1)$. C. $(0;1;0)$. D. $(0;0;0)$.

🔥 Câu 64. Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu?

- A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$. B. $x^2 + y^2 - z^2 + 2x - y + 1 = 0$.
C. $2x^2 + 2y^2 = (x+y)^2 - z^2 + 2x - 1$. D. $(x+y)^2 = 2xy - z^2 - 1$.

🔥 Câu 65. Phương trình nào sau đây không phải là phương trình mặt cầu?

- A. $(x-1)^2 + (2y-1)^2 + (z-1)^2 = 6$. B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 6$.
C. $(2x-1)^2 + (2y-1)^2 + (2z+1)^2 = 6$. D. $(x+y)^2 = 2xy - z^2 + 3 - 6x$.

🔥 Câu 66. Cho các phương trình sau:

$$(C_1): (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

$$(C_2): x^2 + (2y-1)^2 + z^2 = 4;$$

$$(C_3): x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0;$$

$$(C_4): (2x+1)^2 + (2y-1)^2 + 4z^2 = 16.$$

Số phương trình là phương trình mặt cầu là:

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

🔥 Câu 67. Mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 9$ có tâm là:

- A. $I(1;-2;0)$. B. $I(-1;2;0)$. C. $I(1;2;0)$. D. $I(-1;-2;0)$.

🔥 Câu 68. Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$ có tâm là:

- A. $I(8;-2;0)$. B. $I(-4;1;0)$. C. $I(-8;2;0)$. D. $I(4;-1;0)$.

🔥 Câu 69. Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 1 = 0$ có tọa độ tâm và bán kính R là:

- A. $I(2;0;0), R = \sqrt{3}$. B. $I(2;0;0), R = 3$. C. $I(0;2;0), R = \sqrt{3}$. D. $I(-2;0;0), R = \sqrt{3}$.

🔥 Câu 70. Phương trình mặt cầu có tâm $I(-1;2;-3)$, bán kính $R = 3$ là:

- A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$. B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 3$.
C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$. D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$.

🔥 Câu 71. Mặt cầu $(S): (x+y)^2 = 2xy - z^2 + 1 - 4x$ có tâm là:

- A. $I(-2;0;0)$. B. $I(4;0;0)$. C. $I(-4;0;0)$. D. $I(2;0;0)$.

🔥 Câu 72. Đường kính của mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$ bằng:

- A. 4. B. 2. C. 8. D. 16.

🔥 Câu 73. Mặt cầu có phương trình nào sau đây có tâm là $I(-1;1;0)$?

- A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y = 0$. B. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 1 = 0$.
C. $2x^2 + 2y^2 = (x+y)^2 - z^2 + 2x - 1 - 2xy$. D. $(x+y)^2 = 2xy - z^2 + 1 - 4x$.

🔥 Câu 74. Mặt cầu $(S): 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 12y + 2 = 0$ có bán kính bằng:

- A. $\frac{\sqrt{7}}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{21}}{3}$. D. $\sqrt{\frac{13}{3}}$.

Câu 75. Gọi I là tâm mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$. Độ dài $|\overrightarrow{OI}|$ (O là gốc tọa độ) bằng:

- A. 2. B. 4. C. 1. D. $\sqrt{2}$.

Câu 76. Phương trình mặt cầu có bán kính bằng 3 và tâm là giao điểm của ba trục tọa độ?

- A. $x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 0$. B. $x^2 + y^2 + z^2 - 6y = 0$.
C. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. D. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0$.

Câu 77. Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 10y + 3z + 1 = 0$ đi qua điểm có tọa độ nào sau đây?

- A. $(2; 1; 9)$. B. $(3; -2; -4)$. C. $(4; -1; 0)$. D. $(-1; 3; -1)$.

Câu 78. Mặt cầu tâm $I(-1; 2; -3)$ và đi qua điểm $A(2; 0; 0)$ có phương trình:

- A. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 22$. B. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 11$.
C. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 22$. D. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 22$.

Câu 79. Cho hai điểm $A(1; 0; -3)$ và $B(3; 2; 1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là:

- A. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z = 0$. B. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z = 0$.
C. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y + z - 6 = 0$. D. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z + 6 = 0$.

Câu 80. Nếu mặt cầu (S) đi qua bốn điểm $M(2; 2; 2), N(4; 0; 2), P(4; 2; 0)$ và $Q(4; 2; 2)$ thì tâm I của (S) có tọa độ là:

- A. $(-1; -1; 0)$. B. $(3; 1; 1)$. C. $(1; 1; 1)$. D. $(1; 2; 1)$.

Câu 81. Bán kính mặt cầu đi qua bốn điểm $M(1; 0; 1), N(1; 0; 0), P(2; 1; 0)$ và $Q(1; 1; 1)$ bằng:

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. 1. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 82. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ và 4 điểm $M(1; 2; 0), N(0; 1; 0), P(1; 1; 1), Q(1; -1; 2)$. Trong bốn điểm đó, có bao nhiêu điểm không nằm trên mặt cầu (S) ?

- A. 2 điểm. B. 4 điểm. C. 1 điểm. D. 3 điểm.

Câu 83. Mặt cầu (S) tâm $I(-1; 2; -3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z + 1 = 0$ có phương trình:

- A. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = \frac{4}{9}$. B. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = \frac{4}{9}$.
C. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = \frac{4}{3}$. D. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = \frac{16}{3}$.

Câu 84. Phương trình mặt cầu nào dưới đây có tâm $I(2; 1; 3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z + 2 = 0$?

- A. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 16$. B. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 4$.
C. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 25$. D. $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 9$.

Câu 85. Mặt cầu (S) tâm $I(3; -3; 1)$ và đi qua $A(5; -2; 1)$ có phương trình:

- A. $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 5$. B. $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 5$.
C. $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = \sqrt{5}$. D. $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = \sqrt{5}$.

Câu 86. Phương trình mặt cầu có đường kính AB với $A(1; 3; 2), B(3; 5; 0)$ là:

- A. $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 1)^2 = 3$. B. $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 1)^2 = 2$.
C. $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 + (z + 1)^2 = 2$. D. $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 + (z + 1)^2 = 3$.

Câu 87. Cho $I(1; 2; 4)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z - 1 = 0$. Mặt cầu tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) , có phương trình là:

- A. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 4$. B. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 4)^2 = 1$.
C. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = 4$. D. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = 3$.

Câu 88. Cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 1}{-1}$ và điểm $A(5; 4; -2)$. Phương trình mặt cầu đi qua điểm A và có tâm là giao điểm của d với mặt phẳng (Oxy) là:

- A. $(S): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 64$. B. $(S): (x + 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 9$.
C. $(S): (x + 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 65$. D. $(S): (x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 65$.

Câu 89. Cho ba điểm $A(6; -2; 3)$, $B(0; 1; 6)$, $C(2; 0; -1)$, $D(4; 1; 0)$. Khi đó mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có phương trình là:

- A. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 3 = 0$.
 B. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z - 3 = 0$.
 C. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y - 3z - 3 = 0$.
 D. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - y + 3z - 3 = 0$.

Câu 90. Cho ba điểm $A(2; 0; 1)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 2 = 0$. Phương trình mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng (P) là:

- A. $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2z + 1 = 0$.
 B. $x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y + 1 = 0$.
 C. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 1 = 0$.
 D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0$.

Câu 91. Phương trình mặt cầu tâm $I(1; -2; 3)$ và tiếp xúc với trục Oy là:

- A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.
 B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$.
 C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 8$.
 D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10$.

Câu 92. Cho các điểm $A(-2; 4; 1)$, $B(2; 0; 3)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$. Gọi (S) là mặt cầu

đi qua A, B và có tâm thuộc đường thẳng d . Bán kính mặt cầu (S) bằng:

- A. $3\sqrt{3}$.
 B. $\sqrt{6}$.
 C. 3.
 D. $2\sqrt{3}$.

Câu 93. Cho điểm $A(1; -2; 3)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$. Phương trình mặt cầu tâm A , tiếp xúc với d là:

- A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{50}$.
 B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 5$.
 C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 50$.
 D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 50$.

Câu 94. Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 2 = 0$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường thẳng d có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với (P) và đi qua điểm $A(1; -1; 1)$ là:

- A. $(x+2)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 1$.
 B. $(x-4)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.
 C. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1$.
 D. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.

Câu 95. Phương trình mặt cầu có tâm $I(1; 2; 3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) là:

- A. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z - 10 = 0$.
 B. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 10 = 0$.
 C. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 10 = 0$.
 D. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z - 10 = 0$.

Câu 96. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu tâm $I(1; -3; 2)$ tại điểm $M(7; -1; 5)$ có phương trình là:

- A. $6x + 2y + 3z + 55 = 0$.
 B. $3x + y + z - 22 = 0$.
 C. $6x + 2y + 3z - 55 = 0$.
 D. $3x + y + z + 22 = 0$.

Câu 97. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha): 4x + 3y - 12z + 10 = 0$. Mặt phẳng tiếp xúc với (S) và song song với (α) có phương trình là:

- A. $4x + 3y - 12z + 78 = 0$.
 B. $4x + 3y - 12z - 78 = 0$ hoặc $4x + 3y - 12z + 26 = 0$.
 C. $4x + 3y - 12z - 26 = 0$.
 D. $4x + 3y - 12z + 78 = 0$ hoặc $4x + 3y - 12z - 26 = 0$.

Câu 98. Cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 14$. Mặt cầu (S) cắt trục Oz tại A và B ($z_A < 0$). Phương trình nào sau đây là phương trình tiếp diện của (S) tại B :

- A. $2x - y - 3z + 9 = 0$.
 B. $2x - y - 3z - 9 = 0$.
 C. $x - 2y - z - 3 = 0$.
 D. $x - 2y + z + 3 = 0$.

Câu 99. Cho 4 điểm $A(3; -2; -2)$, $B(3; 2; 0)$, $C(0; 2; 1)$ và $D(-1; 1; 2)$. Mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCD) có phương trình là:

- A. $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = \sqrt{14}$.
 B. $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 14$.
 C. $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \sqrt{14}$.
 D. $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 14$.

❖ Câu 100. Cho mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z - 2 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc trục Oz , bán kính bằng $\frac{2}{\sqrt{14}}$ và tiếp xúc mặt phẳng (P) có phương trình:

- A. $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = \frac{2}{7}$ hoặc $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = \frac{2}{7}$.
 B. $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = \frac{2}{7}$ hoặc $x^2 + y^2 + (z + 2)^2 = \frac{2}{7}$.
 C. $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{2}{7}$ hoặc $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = \frac{2}{7}$.
 D. $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{2}{7}$ hoặc $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = \frac{2}{7}$.

❖ Câu 101. Cho đường thẳng $d: \frac{x+5}{2} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z}{1}$ và điểm $I(4;1;6)$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tâm I tại hai điểm A, B sao cho $AB = 6$. Phương trình của mặt cầu (S) là:

- A. $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 + (z - 6)^2 = 18$.
 B. $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 + (z - 6)^2 = 12$.
 C. $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 + (z - 6)^2 = 16$.
 D. $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 + (z - 6)^2 = 9$.

❖ Câu 102. Cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có phương trình lần lượt là $(P): 2x + 2y + z - m^2 + 4m - 5 = 0$; $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 6 = 0$. Giá trị của m để (P) tiếp xúc (S) là:

- A. $m = -1$ hoặc $m = 5$.
 B. $m = 1$ hoặc $m = -5$.
 C. $m = -1$.
 D. $m = 5$.

❖ Câu 103. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$ và mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 4 = 0$. Phương trình đường thẳng d tiếp xúc với mặt cầu (S) tại $A(3; -1; 1)$ và song song với mặt phẳng (P) là:

- A. $\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = -1 + 6t \\ z = 1 + t \end{cases}$.
 B. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -2 - 6t \\ z = -1 - t \end{cases}$.
 C. $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -1 - 6t \\ z = 1 - t \end{cases}$.
 D. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

❖ Câu 104. Cho hai mặt phẳng $(P): 2x + 3y - z + 2 = 0$, $(Q): 2x - y - z + 2 = 0$. Phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm $A(1; -1; 1)$ và có tâm thuộc mặt phẳng (Q) là:

- A. $(S): (x + 3)^2 + (y + 7)^2 + (z - 3)^2 = 56$.
 B. $(S): (x - 3)^2 + (y - 7)^2 + (z + 3)^2 = 56$.
 C. $(S): (x + 3)^2 + (y + 7)^2 + (z - 3)^2 = 14$.
 D. $(S): (x - 3)^2 + (y - 7)^2 + (z + 3)^2 = 14$.

❖ Câu 105. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 21 = 0$. Số giao điểm của (Δ) và (S) là:

- A. 2.
 B. 1.
 C. 0.
 D. 3.

❖ Câu 106. Cho đường thẳng $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{2}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 9$. Tọa độ giao điểm của (Δ) và (S) là:

- A. $A(0; 0; 2), B(-2; 2; -3)$.
 B. $A(2; 3; 2)$.
 C. $A(-2; 2; -3)$.
 D. (Δ) và (S) không cắt nhau.

❖ Câu 107. Cho đường thẳng $(\Delta): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = -4 + 7t \end{cases}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 67 = 0$.

Giao điểm của (Δ) và (S) là các điểm có tọa độ:

- A. (Δ) và (S) không cắt nhau.
 B. $A(1; 2; 5), B(-2; 0; 4)$.
 C. $A(2; -2; 5), B(4; 0; 3)$.
 D. $A(1; 2; -4), B(2; 2; 3)$.

❖ Câu 108. Cho điểm $I(1; 0; 0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho $AB = 4$ là:

- A. $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 9$.
 B. $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 3$.
 C. $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 3$.
 D. $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Câu 109. Cho điểm $I(1;1;-2)$ đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$ Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho $AB = 6$ là:

- A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 27$.
 B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 27$.
 C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 24$.
 D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 54$.

Câu 110. Phương trình mặt cầu có tâm $I(3;\sqrt{3};-7)$ và tiếp xúc trục tung là:

- A. $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 + (z+7)^2 = 61$.
 B. $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 + (z+7)^2 = 58$.
 C. $(x+3)^2 + (y+\sqrt{3})^2 + (z-7)^2 = 58$.
 D. $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 + (z+7)^2 = 12$.

Câu 111. Phương trình mặt cầu có tâm $I(\sqrt{5};3;9)$ và tiếp xúc trục hoành là:

- A. $(x+\sqrt{5})^2 + (y+3)^2 + (z+9)^2 = 86$.
 B. $(x-\sqrt{5})^2 + (y-3)^2 + (z-9)^2 = 14$.
 C. $(x-\sqrt{5})^2 + (y-3)^2 + (z-9)^2 = 90$.
 D. $(x+\sqrt{5})^2 + (y+3)^2 + (z+9)^2 = 90$.

Câu 112. Phương trình mặt cầu có tâm $I(-\sqrt{6};-\sqrt{3};\sqrt{2}-1)$ và tiếp xúc trục Oz là:

- A. $(x+\sqrt{6})^2 + (y+\sqrt{3})^2 + (z-\sqrt{2}+1)^2 = 9$.
 B. $(x+\sqrt{6})^2 + (y+\sqrt{3})^2 + (z-\sqrt{2}-1)^2 = 9$.
 C. $(x+\sqrt{6})^2 + (y+\sqrt{3})^2 + (z-\sqrt{2}-1)^2 = 3$.
 D. $(x+\sqrt{6})^2 + (y+\sqrt{3})^2 + (z-\sqrt{2}+1)^2 = 3$.

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 VECTƠ PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẪNG

Định nghĩa 1. Cho mặt phẳng (α) . Nếu $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (α) thì $\vec{n}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của (α) .

! Nếu $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của một mặt phẳng thì $k\vec{n}$ với $k \neq 0$, cũng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng đó.

Khái niệm. Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương được gọi là một cặp vectơ chỉ phương của (α) nếu giá của chúng song song hoặc nằm trên (α) .

Khái niệm. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Khi đó vectơ $\vec{n} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$ được gọi là tích có hướng (hay tích vectơ) của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ hoặc $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

2 PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẪNG

Định nghĩa 2. Phương trình có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$ trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0 được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

- ! ① Nếu mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là $Ax + By + Cz + D = 0$ thì nó có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$.
- ② Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nhận vectơ $\vec{n} = (A; B; C)$ khác $\vec{0}$ làm vectơ pháp tuyến là $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Các trường hợp riêng: Xét phương trình mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

- Nếu $D = 0$ thì mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ O .
- Nếu $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Ox .
- Nếu $A \neq 0, B = 0, C \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Oy .
- Nếu $A \neq 0, B \neq 0, C = 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Oz .
- Nếu $A = B = 0, C \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oxy) .
- Nếu $A = C = 0, B \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oxz) .
- Nếu $B = C = 0, A \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oyz) .

- ! ① Nếu trong phương trình (α) không chứa ẩn nào thì (α) song song hoặc chứa trục tương ứng.
- ② Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn $(\alpha): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Ở đây (α) cắt các trục tọa độ tại các điểm $(a; 0; 0), (0; b; 0), (0; 0; c)$ với $abc \neq 0$.

3 KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẪNG

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng α được tính:

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

4 GÓC CỦA HAI MẶT PHẪNG

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Góc giữa α và β bằng hoặc bù với góc giữa hai VTPT $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$. Tức là

$$\cos((\alpha), (\beta)) = |\cos(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta)| = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| |\vec{n}_\beta|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

5 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT PHẪNG

Cho hai mặt phẳng $(P_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(P_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Khi đó ta có ba trường hợp

1. $(P_1) \equiv (P_2) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$.
2. $(P_1) \parallel (P_2) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$.
3. (P_1) cắt $(P_2) \Leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$.

! $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0 \Leftrightarrow (P_1) \perp (P_2)$.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB cho trước

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng là mặt phẳng đi qua trung điểm và vuông góc với đoạn thẳng đó. Do đó ta có

$$(P): \begin{cases} \text{Đi qua } I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right) \\ \text{VTPT } \vec{n}_P = \vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A). \end{cases}$$

 **Ví dụ 1.** Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB .

- ① $A(2; 0; 1), B(0; -2; 3)$
- ② $A(1; 3; -4), B(-1; 2; 2)$

Lời giải:

.....

Dạng 2. Viết phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và có cặp véc-tơ chỉ phương cho trước.

Mặt phẳng cần tìm có véc-tơ pháp tuyến chính là tích có hướng của cặp véc-tơ chỉ phương. Do đó ta có

$$(P): \begin{cases} \text{Đi qua điểm } M \text{ cho trước} \\ VTPT \vec{n}_P = [\vec{a}; \vec{b}] \end{cases}$$

Ví dụ 1. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm M và có cặp véc-tơ chỉ phương sau:

- ① $M(1; 2; -3), \vec{a} = (2; 1; 2), \vec{b} = (3; 2; -1)$
- ② $M(1; -2; 3), \vec{a} = (3; -1; -2), \vec{b} = (0; 3; 4)$

Lời giải:

Ví dụ 2. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B, C sau:

- ① $A(2; -5; 1), B(3; 4; -2), C(0; 0; -1)$
- ② $A(1; -2; 4), B(3; 2; -1), C(-2; 1; -3)$
- ③ $A(3; -5; 2), B(1; -2; 0), C(0; -3; 7)$

Lời giải:

□ **Dạng 3. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với đường thẳng d đi qua hai điểm A và B**

$$\text{Mặt phẳng (P): } \begin{cases} \text{Đi qua M} \\ \text{VTPT: } \vec{n}_P = \vec{u}_d = \overrightarrow{AB} \end{cases}$$

✍ **Ví dụ 1.** Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(-1;2;3)$ và vuông góc với đường thẳng d biết d đi qua hai điểm $A(2;-4;3)$, $B(4;5;6)$.

Lời giải:

.....

.....

.....

□ **Dạng 4. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B và vuông góc với mặt phẳng (Q)**

$$\text{Mặt phẳng (P): } \begin{cases} \text{Đi qua A} \\ \text{VTPT: } \vec{n}_P = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}_Q] \end{cases}$$

✍ **Ví dụ 1.** Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(1;2;-2)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q): $2x - y + 3z + 13 = 0$.

Lời giải:

.....

.....

.....

□ **Dạng 5. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và chứa đường thẳng Δ**

$$\begin{aligned} &\text{Xác định điểm } A \in \Delta \text{ và VTCP } \vec{u}_\Delta. \\ &\text{Khi đó mặt phẳng (P): } \begin{cases} \text{Đi qua M} \\ \text{VTPT: } \vec{n}_P = [\overrightarrow{AM}, \vec{u}_\Delta] \end{cases} \end{aligned}$$

✍ **Ví dụ 1.** Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;-3;1)$ và chứa đường thẳng Δ có phương trình

$$\Delta: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Lời giải:

.....

Dạng 6. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng song song Δ_1 và Δ_2

$$\text{Mặt phẳng (P)}: \begin{cases} \text{Đi qua } A \in \Delta_1 \text{ và } B \in \Delta_2 \\ \text{VTPT: } \vec{n}_P = [\vec{AB}, \vec{u}_{\Delta_1}] \end{cases}$$

Ví dụ 1. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 với

$$\Delta_1: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ và } \Delta_2: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{1}.$$

Lời giải:

Dạng 7. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau Δ_1 và Δ_2

$$\text{Mặt phẳng (P)}: \begin{cases} \text{Đi qua } M \in \Delta_1 \\ \text{VTPT: } \vec{n}_P = [\vec{u}_{\Delta_1}, \vec{u}_{\Delta_2}] \end{cases}$$

Ví dụ 1. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng có phương trình

$$\Delta_1: \begin{cases} x = -t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ và } \Delta_2: \begin{cases} x = t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = 4 + 5t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R}).$$

Lời giải:

Dạng 8. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 và song song với đường thẳng Δ_2 với Δ_1 và Δ_2 chéo nhau

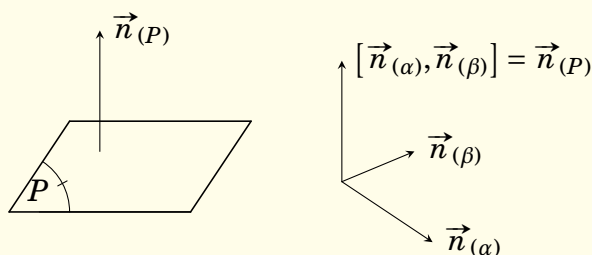
$$\text{Mặt phẳng } (P): \begin{cases} \text{Đi qua } M \in \Delta_1 \\ \text{VTPT: } \vec{n}_P = [\vec{u}_{\Delta_1}, \vec{u}_{\Delta_2}] \end{cases}$$

Ví dụ 1. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 và song song với đường thẳng Δ_2 với

$$\Delta_1: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = -2 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{và} \quad \Delta_2: \begin{cases} x = 2t' \\ y = 1 + t' \\ z = 3 - 2t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R}).$$

Lời giải:

Dạng 9. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng (α) và (β)



Phương pháp giải:

Vì (P) vuông góc với hai mặt phẳng (α) và (β) nên $\begin{cases} \vec{n}_{(P)} \perp \vec{n}_{(\alpha)} \\ \vec{n}_{(P)} \perp \vec{n}_{(\beta)} \end{cases}$

Do vậy $\vec{n}_{(P)} = [\vec{n}_{(\alpha)}, \vec{n}_{(\beta)}]$.

Khi đó ta viết phương trình mặt phẳng (P): $\begin{cases} \text{đi qua điểm } M \\ \text{có véc-tơ pháp tuyến là } \vec{n}_{(P)}. \end{cases}$

Ví dụ 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1; -3; 2)$ và $(\alpha): x + 2y - 5z + 1 = 0$, $(\beta): 2x - 3y - z + 4 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng (α) và (β) .

Lời giải:

TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y - 5 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) ?

- A. $\vec{n} = (2; 1; 0)$. B. $\vec{n} = (2; 1; -5)$. C. $\vec{n} = (2; -1; 0)$. D. $\vec{n} = (2; 1; 5)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua ba điểm $M(1; 0; 1)$, $N(1; 3; 0)$, $P(0; 2; 1)$ có một vectơ pháp tuyến là

- A. $\vec{n} = (2; 1; -3)$. B. $\vec{n} = (2; 1; 3)$. C. $\vec{n} = (-2; 1; 3)$. D. $\vec{n} = (2; -1; 3)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(2; 1; -3)$ và nhận $\vec{n} = (1; 2; -2)$ làm vectơ pháp tuyến là

- A. $2x + y - 3z - 10 = 0$. B. $x + 2y - 2z + 2 = 0$. C. $2x + y - 3z - 14 = 0$. D. $x + 2y - 2z - 10 = 0$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 2; -3)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; 3)$.

- A. $x - 2y + 3z + 12 = 0$. B. $x - 2y - 3z - 6 = 0$.
C. $x - 2y + 3z - 12 = 0$. D. $x - 2y - 3z + 6 = 0$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 1; 1)$ và $B(1; 2; 3)$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB .

- A. $x + y + 2z - 3 = 0$. B. $x + y + 2z - 6 = 0$.
C. $x + 3y + 4z - 7 = 0$. D. $x + 3y + 4z - 26 = 0$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; 4)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 2y + z + 1 = 0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (P) là

- A. $2x - 2y + 4z - 21 = 0$. B. $2x - 2y + 4z + 21 = 0$.
C. $3x - 2y + z - 12 = 0$. D. $3x - 2y + z + 12 = 0$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3; -1; -2)$ và mặt phẳng $(P): 3x - y + 2z + 4 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua M và song song với (P) ?

- A. $(Q): 3x - y + 2z - 6 = 0$. B. $(Q): 3x + y - 2z - 14 = 0$.
C. $(Q): 3x - y + 2z + 6 = 0$. D. $(Q): 3x - y - 2z - 6 = 0$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$ và $C(0; 0; -2)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là:

- A. $\frac{x}{3} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1$. B. $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{-2} = 1$. C. $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$. D. $\frac{x}{-3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(1; 0; 0)$, $N(0; 2; 0)$, $P(0; 0; 3)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là:

- A. $6x + 3y + 2z - 6 = 0$. B. $6x + 3y + 2z + 1 = 0$.
C. $6x + 3y + 2z - 1 = 0$. D. $x + y + z - 6 = 0$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Gọi A , B , C lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm M lên các trục Ox , Oy , Oz . Viết phương trình mặt phẳng (ABC) .

- A. $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$. B. $\frac{x}{1} - \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$. C. $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 0$. D. $-\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 6 = 0$. Điểm nào dưới đây không thuộc (α) ?

- A. $Q(3; 3; 0)$. B. $N(2; 2; 2)$. C. $P(1; 2; 3)$. D. $M(1; -1; 1)$.

🔥 Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 5 = 0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P) ?

- A. $P(0;0;-5)$. B. $M(1;1;6)$. C. $Q(2;-1;5)$. D. $N(-5;0;0)$.

🔥 Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào dưới đây đi qua gốc tọa độ?

- A. $x + 20 = 0$. B. $x - 2019 = 0$. C. $y + 5 = 0$. D. $2x + 5y - 8z = 0$.

🔥 Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + 4y + 2z + 4 = 0$ và điểm $A(1;-2;3)$. Tính khoảng cách d từ A đến (P) .

- A. $d = \frac{5}{9}$. B. $d = \frac{5}{29}$. C. $d = \frac{5}{\sqrt{29}}$. D. $d = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

🔥 Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(1;2;3)$ đến mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z - 5 = 0$ bằng.

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{4}{9}$. C. $-\frac{4}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

🔥 Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách từ $M(1;2;-3)$ đến mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 10 = 0$.

- A. $\frac{11}{3}$. B. 3. C. $\frac{7}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

🔥 Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z - 1 = 0$. Khoảng cách từ điểm $M(-1;2;0)$ đến mặt phẳng (P) bằng

- A. 5. B. 2. C. $\frac{5}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

🔥 Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;-1)$ là

- A. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-1} = 0$. B. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{1} = -1$. C. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-1} = 1$. D. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-1} = -1$.

🔥 Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 5 = 0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P) ?

- A. $M(1;1;6)$. B. $N(-5;0;0)$. C. $E(0;0;-5)$. D. $Q(2;-1;5)$.

🔥 Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) chứa trục Ox và đi qua $M(3;1;4)$ có phương trình là

- A. $4y - z = 0$. B. $4y + z = 0$. C. $4x - 3z = 0$. D. $x - 3y = 0$.

🔥 Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB biết $A(2;-1;0)$, $B(-4;3;2)$ là

- A. $-3x + y + z - 5 = 0$. B. $-3x + 2y + z - 6 = 0$.
C. $-x + y + z - 5 = 0$. D. $-x + y + z - 6 = 0$.

🔥 Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;0)$ và $B(3;0;2)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

- A. $x + y + z - 3 = 0$. B. $2x - y + z + 2 = 0$. C. $2x + y + z - 4 = 0$. D. $2x - y + z - 2 = 0$.

🔥 Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$. Tìm khẳng định **sai** trong các mệnh đề sau:

- A. $A = 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$ khi và chỉ khi (α) song song với trục Ox .
B. $D = 0$ khi và chỉ khi (α) đi qua gốc tọa độ.
C. $A \neq 0, B = 0, C \neq 0, D = 0$ khi và chỉ khi (α) song song với mặt phẳng (Oyz) .
D. $A = 0, B = 0, C \neq 0, D \neq 0$ khi và chỉ khi (α) song song với mặt phẳng (Oxy) .

🔥 Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, $(abc \neq 0)$. Khi đó phương trình mặt phẳng (ABC) là

- A. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. B. $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} + \frac{z}{c} = 1$. C. $\frac{x}{a} + \frac{y}{c} + \frac{z}{b} = 1$. D. $\frac{x}{c} + \frac{y}{b} + \frac{z}{a} = 1$.

❖ Câu 25. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x - z = 0$. Tìm khẳng định đúng trong các mệnh đề sau:

- A. $(\alpha) // Ox$. B. $(\alpha) // (xOz)$. C. $(\alpha) // Oy$. D. $(\alpha) \supset Oy$.

❖ Câu 26. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$. Mặt phẳng (P) là $-x + 3z - 2 = 0$ có phương trình song song với:

- A. Trục Oy . B. Trục Oz . C. Mặt phẳng Oxy . D. Trục Ox .

❖ Câu 27. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $3x + 2y - z + 1 = 0$. Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là:

- A. $\vec{n}(3; 2; 1)$. B. $\vec{n}(-2; 3; 1)$. C. $\vec{n}(3; 2; -1)$. D. $\vec{n}(3; -2; -1)$.

❖ Câu 28. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $-2x + 2y - z - 3 = 0$. Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là:

- A. $\vec{n}(4; -4; 2)$. B. $\vec{n}(-2; 2; -3)$. C. $\vec{n}(-4; 4; 2)$. D. $\vec{n}(0; 0; -3)$.

❖ Câu 29. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -2; 1)$, $B(-1; 3; 3)$, $C(2; -4; 2)$. Một vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng (ABC) là:

- A. $\vec{n} = (9; 4; -1)$. B. $\vec{n} = (9; 4; 1)$. C. $\vec{n} = (4; 9; -1)$. D. $\vec{n} = (-1; 9; 4)$.

❖ Câu 30. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(-1; 2; 0)$ và nhận $\vec{n}(-1; 0; 2)$ là vectơ pháp tuyến có phương trình là:

- A. $-x + 2y - 5 = 0$. B. $-x + 2z - 5 = 0$. C. $-x + 2y - 5 = 0$. D. $-x + 2z - 1 = 0$.

❖ Câu 31. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; -2; -2)$, $B(3; 2; 0)$, $C(0; 2; 1)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là:

- A. $2x - 3y + 6z = 0$. B. $4y + 2z - 3 = 0$. C. $3x + 2y + 1 = 0$. D. $2y + z - 3 = 0$.

❖ Câu 32. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 0; 1)$, $B(-2; 1; 1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là:

- A. $x - y - 2 = 0$. B. $x - y + 1 = 0$. C. $x - y + 2 = 0$. D. $-x + y + 2 = 0$.

❖ Câu 33. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$. Mặt phẳng (P) đi qua các điểm $A(-1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; -2)$ có phương trình là:

- A. $-2x + y + z - 2 = 0$. B. $-2x - y - z + 2 = 0$. C. $-2x + y - z - 2 = 0$. D. $-2x + y - z + 2 = 0$.

❖ Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(-2; 1; 0)$, $B(0; -1; 3)$, $C(2; 0; -1)$ là:

- A. $5x + 14y + 6z - 4 = 0$. B. $-x + 14y + 6z - 16 = 0$.
C. $5x + 10y + 6z = 0$. D. $5x + 14y + 10z - 4 = 0$.

❖ Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm $N(3; -1; 1)$, $M(2; 0; -1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + z - 1 = 0$ là

- A. $x + 3y + z - 1 = 0$. B. $-x + 3y + z + 1 = 0$. C. $2x - 3y + z - 1 = 0$. D. $2x + 3y + z - 1 = 0$.

❖ Câu 36. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1; 2; 1)$ và hai mặt phẳng $(\alpha): 2x + 4y - 6z - 5 = 0$ và $(\beta): x + 2y - 3z = 0$. Tìm khẳng định đúng?

- A. Mặt phẳng (β) đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (α) .
B. Mặt phẳng (β) đi qua điểm A và không song song với mặt phẳng (α) .
C. Mặt phẳng (β) không đi qua điểm A và không song song với mặt phẳng (α) .
D. Mặt phẳng (β) không đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (α) .

❖ Câu 37. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; 3)$ và các mặt phẳng: $(\alpha): x - 2 = 0$, $(\beta): y + 1 = 0$, $(\gamma): z - 3 = 0$. Tìm khẳng định sai.

- A. $(\alpha) // Ox$. B. (β) đi qua M . C. $(\gamma) // (xOy)$. D. $(\beta) \perp (\gamma)$.

❖ Câu 38. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$. Phương trình mặt phẳng qua $A(2; 5; 1)$ và song song với mặt phẳng (Oxy) là:

- A. $2x + 5y + z = 0$. B. $x - 2 = 0$. C. $y - 5 = 0$. D. $z - 1 = 0$.

Câu 39. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Mặt phẳng đi qua $M(1;4;3)$ và vuông góc với trục Oy có phương trình là:

- A. $y - 4 = 0$. B. $x - 1 = 0$. C. $z - 3 = 0$. D. $x + 4y + 3z = 0$.

Câu 40. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Biết A, B, C là số thực khác 0, mặt phẳng chứa trục Oz có phương trình là:

- A. $Ax + Bz + C = 0$. B. $Ax + By = 0$. C. $By + Az + C = 0$. D. $Ax + By + C = 0$.

Câu 41. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(5;1;3), B(1;2;6), C(5;0;4), D(4;0;6)$. Viết phương trình mặt phẳng qua D và song song với mặt phẳng (ABC) .

- A. $x + y + z - 10 = 0$. B. $x + y + z - 9 = 0$. C. $x + y + z - 8 = 0$. D. $x + 2y + z - 10 = 0$.

Câu 42. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(5;1;3), B(1;2;6), C(5;0;4), D(4;0;6)$. Viết phương trình mặt phẳng chứa AB và song song với CD .

- A. $2x + 5y + z - 18 = 0$. B. $2x - y + 3z + 6 = 0$.
C. $2x - y + z + 4 = 0$. D. $x + y + z - 9 = 0$.

Câu 43. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Ox và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x + y + z - 3 = 0$. Phương trình mặt phẳng (P) là:

- A. $y + z = 0$. B. $y - z = 0$. C. $y - z - 1 = 0$. D. $y - 2z = 0$.

Câu 44. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Phương trình của mặt phẳng chứa trục Ox và qua điểm $I(2;-3;1)$ là:

- A. $3y + z = 0$. B. $3x + y = 0$. C. $y - 3z = 0$. D. $y + 3z = 0$.

Câu 45. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;1), B(1;0;4)$ và $C(0;-2;-1)$. Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC là:

- A. $2x + y + 2z - 5 = 0$. B. $x - 2y + 3z - 7 = 0$. C. $x + 2y + 5z - 5 = 0$. D. $x + 2y + 5z + 5 = 0$.

Câu 46. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua $A(2;-1;4), B(3;2;-1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x + y + 2z - 3 = 0$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

- A. $5x + 3y - 4z + 9 = 0$. B. $x + 3y - 5z + 21 = 0$.
C. $x + y + 2z - 3 = 0$. D. $5x + 3y - 4z = 0$.

Câu 47. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;-1); B(-1;0;1)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - z + 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng Q qua A, B và vuông góc với (P)

- A. $Q: 2x - y + 3 = 0$. B. $Q: x + z = 0$. C. $Q: -x + y + z = 0$. D. $Q: 3x - y + z = 0$.

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1), B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 5 = 0$. Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) .

- A. $2y + 3z - 11 = 0$. B. $2x - 3y - 11 = 0$. C. $x - 3y + 2z - 5 = 0$. D. $3y + 2z - 11 = 0$.

Câu 49. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;4;1); B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $P: x - 3y + 2z - 5 = 0$. Một mặt phẳng Q đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng P có dạng $ax + by + cz - 11 = 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $a + b + c = 5$. B. $a + b + c = 15$. C. $a + b + c = -5$. D. $a + b + c = -15$.

Câu 50. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua $M(0;-2;3)$, song song với đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-3} = z$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): x + y - z = 0$ có phương trình:

- A. $2x - 3y - 5z - 9 = 0$. B. $2x - 3y + 5z - 9 = 0$.
C. $2x + 3y + 5z + 9 = 0$. D. $2x + 3y + 5z - 9 = 0$.

Câu 51. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Tọa độ giao điểm M của mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z - 4 = 0$ với trục Ox là

- A. $M(0,0,4)$. B. $M\left(0, \frac{4}{3}, 0\right)$. C. $M(3,0,0)$. D. $M(2,0,0)$.

❖ Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng qua các hình chiếu của $A(5;4;3)$ lên các trục tọa độ. Phương trình của mặt phẳng (α) là:

- A. $12x + 15y + 20z - 60 = 0$. B. $12x + 15y + 20z + 60 = 0$.
C. $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 0$. D. $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} - 60 = 0$.

❖ Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(5;-2;0)$, $B(-3;4;1)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{a}(1;1;1)$. Phương trình của mặt phẳng (α) là:

- A. $5x + 9y - 14z = 0$. B. $x - y - 7 = 0$.
C. $5x + 9y - 14z - 7 = 0$. D. $-5x - 9y - 14z + 7 = 0$.

❖ Câu 54. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu mặt phẳng song song với mặt phẳng $(P): x + y + z - 6 = 0$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 12$?

- A. 2. B. Không có. C. 1. D. 3.

❖ Câu 55. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 mặt phẳng $(P): x - 2y + 4z - 3 = 0$, $(Q): -2x + 4y - 8z + 5 = 0$, $(R): 3x - 6y + 12z - 10 = 0$, $(W): 4x - 8y + 8z - 12 = 0$. Có bao nhiêu cặp mặt phẳng song song với nhau.

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

❖ Câu 56. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x + (m-1)y + 4z - 2 = 0$, $(\beta): nx + (m+2)y + 2z + 4 = 0$. Với giá trị thực của m, n bằng bao nhiêu để (α) song song (β)

- A. $m = 3; n = -6$. B. $m = 3; n = 6$. C. $m = -3; n = 6$. D. $m = -3; n = -6$.

❖ Câu 57. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + my + (m-1)z + 2 = 0$, $(Q): 2x - y + 3z - 4 = 0$. Giá trị số thực m để hai mặt phẳng $(P), (Q)$ vuông góc

- A. $m = 1$. B. $m = -\frac{1}{2}$. C. $m = 2$. D. $m = \frac{1}{2}$.

❖ Câu 58. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Cho hai mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 2z - 3 = 0$, $(\beta): x - 2y + 2z - 8 = 0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ là bao nhiêu?

- A. $d((\alpha), (\beta)) = \frac{5}{3}$. B. $d((\alpha), (\beta)) = \frac{11}{3}$. C. $d((\alpha), (\beta)) = 5$. D. $d((\alpha), (\beta)) = \frac{4}{3}$.

❖ Câu 59. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, (α) là mặt phẳng đi qua điểm $A(2;-1;5)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(P): 3x - 2y + z + 7 = 0$ và $(Q): 5x - 4y + 3z + 1 = 0$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

- A. $x + 2y + z - 5 = 0$. B. $2x - 4y - 2z - 10 = 0$.
C. $2x + 4y + 2z + 10 = 0$. D. $x + 2y - z + 5 = 0$.

❖ Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tọa độ điểm M nằm trên trục Oy và cách đều hai mặt phẳng: $(P): x + y - z + 1 = 0$ và $(Q): x - y + z - 5 = 0$ là:

- A. $M(0;-3;0)$. B. $M(0;3;0)$. C. $M(0;-2;0)$. D. $M(0;1;0)$.

❖ Câu 61. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng qua $G(1;2;3)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác gốc O) sao cho G là trọng tâm của tam giác ABC . Khi đó mặt phẳng (α) có phương trình:

- A. $3x + 6y + 2z + 18 = 0$. B. $6x + 3y + 2z - 18 = 0$.
C. $2x + y + 3z - 9 = 0$. D. $6x + 3y + 2z + 9 = 0$.

❖ Câu 62. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng song song với mặt phẳng $(\beta): 2x - 4y + 4z + 3 = 0$ và cách điểm $A(2;-3;4)$ một khoảng $k = 3$. Phương trình của mặt phẳng (α) là:

- A. $2x - 4y + 4z - 5 = 0$ hoặc $2x - 4y + 4z - 13 = 0$.
B. $x - 2y + 2z - 25 = 0$.
C. $x - 2y + 2z - 7 = 0$.
D. $x - 2y + 2z - 25 = 0$ hoặc $x - 2y + 2z - 7 = 0$.

🔥 Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương trình $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$, $d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{4}$. Phương trình mặt phẳng (α) cách đều hai đường thẳng d_1, d_2 là:

A. $7x - 2y - 4z = 0$.

B. $7x - 2y - 4z + 3 = 0$.

C. $2x + y + 3z + 3 = 0$.

D. $14x - 4y - 8z + 3 = 0$.

🔥 Câu 64. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, ($b > 0, c > 0$) và mặt phẳng $(P): y - z + 1 = 0$. Xác định b và c biết mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) và khoảng cách từ O đến (ABC) bằng $\frac{1}{3}$.

A. $b = \frac{1}{\sqrt{2}}, c = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

B. $b = 1, c = \frac{1}{2}$.

C. $b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{2}$.

D. $b = \frac{1}{2}, c = 1$.

🔥 Câu 65. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(5;4;3)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz các đoạn bằng nhau có phương trình là:

A. $x + y + z - 12 = 0$.

B. $x + y + z = 0$.

C. $5x + 4y + 3z - 50 = 0$.

D. $x - y + z = 0$.

🔥 Câu 66. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Oy và tạo với mặt phẳng $y + z + 1 = 0$ góc 60° . Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $\begin{cases} x - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x - 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$.

🔥 Câu 67. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$. Phương trình mặt phẳng (α) chứa trục Oz và tiếp xúc với (S)

A. $(\alpha): 4x - 3y + 2 = 0$.

B. $(\alpha): 3x + 4y = 0$.

C. $(\alpha): 3x - 4y = 0$.

D. $(\alpha): 4x - 3y = 0$.

🔥 Câu 68. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$. Phương trình mặt phẳng (α) chứa Oy cắt hình cầu (S) theo thiết diện là đường tròn có chu vi bằng 8π

A. $(\alpha): 3x - z = 0$.

B. $(\alpha): 3x + z = 0$.

C. $(\alpha): 3x + z + 2 = 0$.

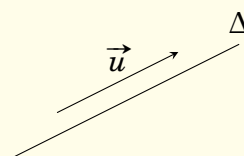
D. $(\alpha): x - 3z = 0$.

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 VÉC-TƠ CHỈ PHƯƠNG

Trong không gian $Oxyz$, véc-tơ $\vec{u}$ được gọi là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ khi và chỉ khi $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của véc-tơ $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ .



- Một đường thẳng có vô số véc-tơ chỉ phương và các véc-tơ ấy cùng phương với nhau.
- Một đường thẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm đi qua và một véc-tơ chỉ phương của nó.

2 PHƯƠNG TRÌNH CỦA ĐƯỜNG THẲNG

- ① Phương trình tham số của đường thẳng Δ qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương

$$\vec{u} = (a; b; c) \text{ là } \Delta: \begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + ct. \end{cases}$$

- ② Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương

$$\vec{u} = (a; b; c) \text{ là } \Delta: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \text{ với } abc \neq 0.$$

3 GÓC

- ① **Góc của hai đường thẳng**

— Cho đường thẳng Δ_1 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1$ và đường thẳng Δ_2 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2$.

— Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 . Ta có $\cos \varphi = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$.

- ② **Góc của đường thẳng và mặt phẳng**

— Cho đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta$ và mặt phẳng α có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha$.

— Gọi φ là góc của Δ và α thì $\sin \varphi = \frac{|\vec{u}_\Delta \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{u}_\Delta| \cdot |\vec{n}_\alpha|}$

4 KHOẢNG CÁCH

① Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ .

— Cho điểm M và đường thẳng Δ qua điểm M_0 và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta$.

— Ta có khoảng cách từ M đến Δ là
$$d(M, \Delta) = \frac{|\left[\vec{u}_\Delta, \overrightarrow{M_0M}\right]|}{|\vec{u}_\Delta|}$$

② Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

— Cho Δ_1 đi qua điểm M và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1$, Δ_2 đi qua điểm N và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2$

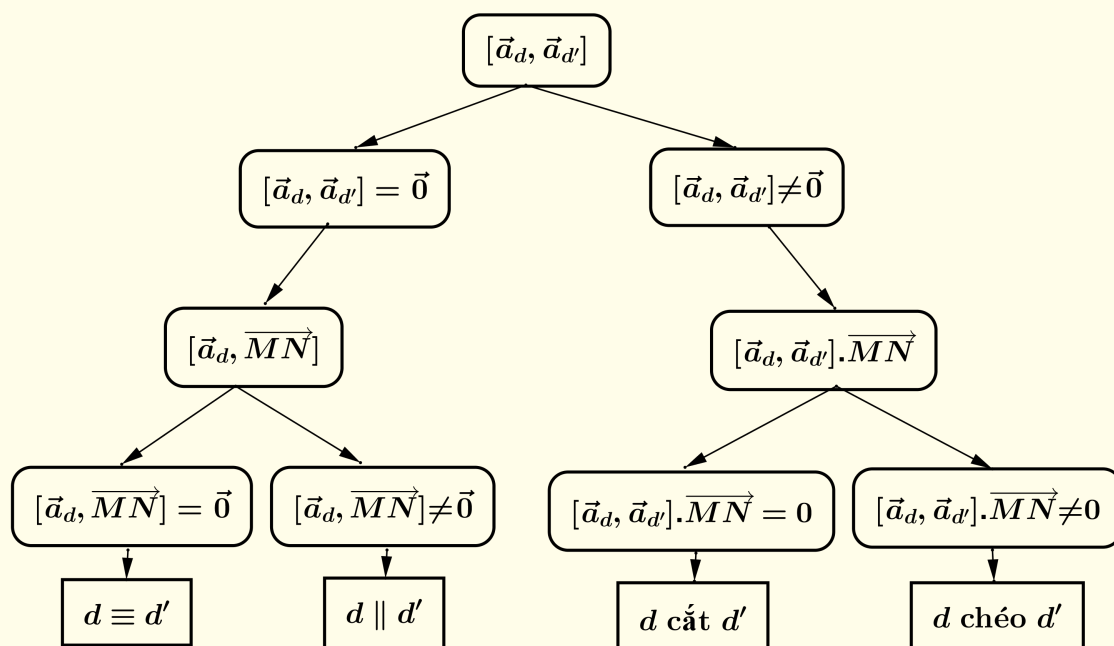
— Khoảng cách của Δ_1 và Δ_2 là
$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|\left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right] \cdot \overrightarrow{MN}|}{|\left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right]|}$$

5 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Cho 2 đường thẳng: $d: \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$ qua M , có VTCP $\vec{a}_d$ và

$d': \begin{cases} x = x'_0 + a'_1t' \\ y = y'_0 + a'_2t' \\ z = z'_0 + a'_3t' \end{cases}$ qua N , có VTCP $\vec{a}_{d'}$.

— Cách 1:



— Cách 2: Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} x_0 + a_1t = x'_0 + a'_1t' \\ y_0 + a_2t = y'_0 + a'_2t' \quad (*) \\ z_0 + a_3t = z'_0 + a'_3t' \end{cases}$$

- Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow d$ và d' cắt nhau.
- Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow d$ và d' song song hoặc chéo nhau.
- Hệ vô số nghiệm $\Leftrightarrow d$ và d' trùng nhau.



Chỉ sử dụng cách này khi cần xác định giao điểm của d và d' .



- ① d song song $d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}_d = k \vec{a}_{d'} \\ M \notin d' \end{cases}$
- ② d trùng $d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}_d = k \vec{a}_{d'} \\ M \in d' \end{cases}$
- ③ d cắt $d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}_d \text{ không cùng phương với } \vec{a}_{d'} \\ [\vec{a}, \vec{a}'] \cdot \vec{MN} = 0 \end{cases}$
- ④ d chéo $d' \Leftrightarrow [\vec{a}_d, \vec{a}_{d'}] \cdot \vec{MN} \neq 0$.

6 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

Cho đường thẳng: $d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$ và mp $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$.

Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t & (1) \\ y = y_0 + a_2 t & (2) \\ z = z_0 + a_3 t & (3) \\ Ax + By + Cz + D = 0 & (4) \end{cases} (*)$$

- (*) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow d$ cắt (α) .
- (*) có vô nghiệm $\Leftrightarrow d \parallel (\alpha)$.
- (*) vô số nghiệm $\Leftrightarrow d \subset (\alpha)$

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm vec-tơ chỉ phương, điểm thuộc đường thẳng

Đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$ hoặc $\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$ có một vec-tơ chỉ phương là

$$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3).$$

Ứng với mỗi giá trị của $t \in \mathbb{R}$ sẽ cho tọa độ một điểm thuộc Δ .

Ví dụ 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một vec-tơ chỉ phương của đường thẳng $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{5}$ là

- A. $\vec{u} = (-3; 1; -4)$. B. $\vec{u} = (2; 3; 5)$. C. $\vec{u} = (3; -1; 4)$. D. $\vec{u} = (-2; 3; 5)$.

✍ Ví dụ 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-2}$ và các điểm $A(1; -1; 2)$, $B(3; 2; 0)$, $C(-1; -4; 4)$. Trong các điểm A, B, C có bao nhiêu điểm thuộc đường thẳng Δ ?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

□ Dạng 2. Đường thẳng đi qua một điểm và véc-tơ chỉ phương cho trước.

Ở dạng này véc-tơ chỉ phương có thể được cho trước hoặc ẩn trong các đặc điểm tương ứng của đường thẳng

- Đường thẳng (d) đi qua hai điểm A, B , khi đó véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là một chỉ phương của (d) .
- Đường thẳng (d) song song với đường thẳng (l) , khi đó véc-tơ chỉ phương của (l) cũng là một chỉ phương của (d) .
- Đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng (α) , khi đó véc-tơ pháp tuyến của (α) là một chỉ phương của (d) .

✍ Ví dụ 1. Viết phương trình đường thẳng (d) khi biết (d) đi qua điểm $M(1; 2; -3)$ và nhận véc-tơ $\vec{u} = (-1; 3; 5)$ làm một véc-tơ chỉ phương.

Lời giải:

.....

.....

✍ Ví dụ 2. Viết phương tham số của đường thẳng (d) biết (d) đi qua hai điểm $A(2; 3; -1)$ và $B(1; 2; 4)$.

Lời giải:

.....

.....

✍ Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số đường thẳng đi qua điểm $M(1; -2; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oxy) .

Lời giải:

.....

.....

✍ Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và song song với trục Oz .

Lời giải:

.....

.....

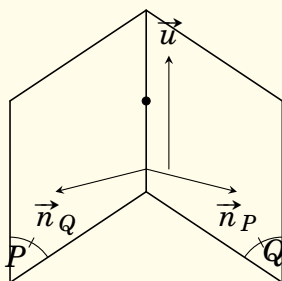
Dạng 3. Đường thẳng d đi qua điểm M và song song với hai mặt phẳng cắt nhau (P) và (Q)

Phương pháp. VTPT của (P) , (Q) lần lượt là $\vec{n}_1, \vec{n}_2$. Lúc này ta được vec-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $[\vec{n}_1, \vec{n}_2]$.

Ví dụ 1. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(1; -1; 1)$ và song song với hai mặt phẳng $(P): x + y - 3z - 1 = 0$ và $(Q): -2x + y - 4z + 1 = 0$.

Lời giải:

Dạng 4. Viết phương trình đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng



Cho hai mặt phẳng $(P): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, mặt phẳng $(Q): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ để viết phương trình đường thẳng (d) là giao tuyến chung của hai mặt phẳng trên ta cần xác định hai yếu tố:

- Vec-tơ chỉ phương của (d) , $\vec{u} = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q]$.
- Điểm M mà (d) đi qua, tìm được bằng cách cho $z = z_0$ và khi đó x, y tìm từ hệ phương trình của (P) , (Q) .

! Đối với dạng này ta có thể tìm phương trình (d) bằng cách giải hệ phương trình $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$, nghiệm của hệ được viết ở dạng tham số là phương trình tham số của đường thẳng (d) .

Ví dụ 1. Viết phương trình đường thẳng (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): 6x + 2y + 2z + 3 = 0$ và $(Q): 3x - 5y - 2z - 1 = 0$.

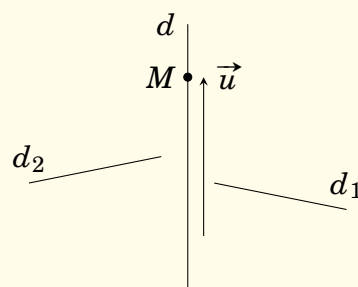
Lời giải:

□ **Dạng 5. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với hai đường thẳng cho trước.**

Thực hiện theo các bước sau:

- ① Xác định véc tơ chỉ phương $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ của các đường thẳng $(d_1), (d_2)$
- ② Gọi $\vec{u}$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng (d) ta có:

$$\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{u}_1 \\ \vec{u} \perp \vec{u}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = [\vec{u}_1; \vec{u}_2]$$
- ③ Viết phương trình (d) đi qua M và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}$



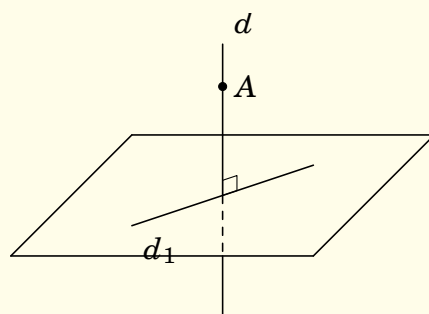
✍ **Ví dụ 1.** Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $M(1;0;5)$ và vuông góc với

$$(d_1): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}.$$

Lời giải:

□ **Dạng 6. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A , vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_1**

- ① Gọi $M \in d \cap d_1$.
- ② Vì $d \perp d_1$ nên ta có $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}_{d_1} = 0$. Từ đây tìm được tọa độ điểm M .
- ③ Viết phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm A và M .



✍ **Ví dụ 1.** Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $M(1;2;-2)$, vuông góc và cắt

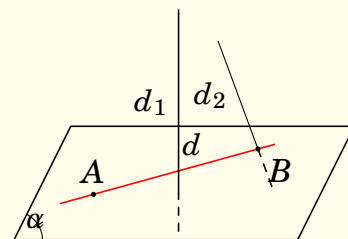
$$\text{đường thẳng } (l): \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$$

Lời giải:

Dạng 7. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2

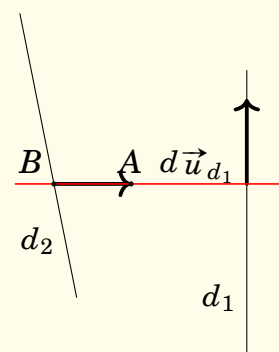
Cách 1:

- Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A và vuông góc đường thẳng d_1 .
- Tìm giao điểm $B = (\alpha) \cap d_2$.
- Đường thẳng cần tìm đi qua A và B.



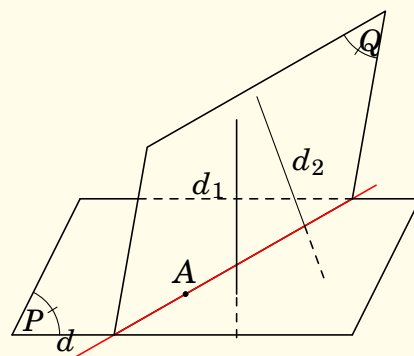
Cách 2:

- Gọi B là giao điểm của d và d_2 .
- Vì AB vuông góc d_1 nên $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_{d_1} = 0 \Rightarrow$ tọa độ B.
- Đường thẳng cần tìm đi qua điểm A, B.



Cách 3:

- Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc đường thẳng d_1 .
- Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và chứa đường thẳng d_2 .
- Đường thẳng cần tìm là giao tuyến của (P) và (Q).



Ví dụ 1. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $M(0;1;1)$ vuông góc với

$$(d_1): \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1} \text{ và cắt } (d_2): \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = 1+t. \end{cases}$$

Lời giải:

.....

.....

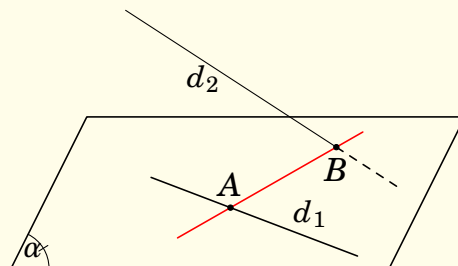
.....

.....

Dạng 8. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2

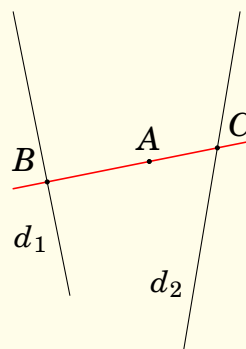
Cách 1:

- Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A và chứa đường thẳng d_1 .
- Tìm giao điểm $B = (\alpha) \cap d_2$.
- Đường thẳng cần tìm đi qua A và B .



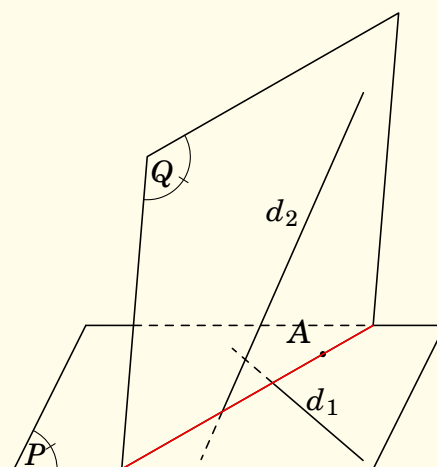
Cách 2:

- Gọi B, C lần lượt là hai điểm thuộc d_1, d_2 .
- Ba điểm A, B, C thẳng hàng suy ra tọa độ B, C .
- Đường thẳng cần tìm đi qua ba điểm A, B, C .



Cách 3:

- Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và chứa đường thẳng d_1 .
- Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và chứa đường thẳng d_2 .
- Đường thẳng cần tìm là giao tuyến của (P) và (Q) .



Ví dụ 1. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm M và cắt hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$.

Với $M(1;0;5)$, $(d_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{1}$ và $(d_2): \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-3}$.

Lời giải:

.....

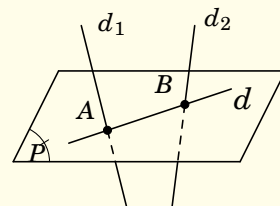
.....

.....

.....

☐ Dạng 9. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2

- ① Trường hợp trong hai đường thẳng d_1, d_2 có đường thẳng song song với (P) thì không tồn tại đường thẳng d .
- ② Trường hợp d_1 và d_2 đều không nằm trên (P) và cắt (P) :
 - (a) Gọi giao điểm của d_1, d_2 với (P) lần lượt là A và B . Từ đó tìm được tọa độ A và B .
 - (b) Viết phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm A và B .
- ③ Trường hợp có đường thẳng nằm trên (P) , giả sử $d_1 \subset (P)$:
 - (a) Nếu $d_2 \subset (P)$ thì với mỗi điểm M nằm trên (P) ta sẽ lập được vô số đường thẳng d qua M , đồng thời cắt d_1 và d_2 .
 - (b) Nếu $d_2 \not\subset (P)$, d_2 cắt (P) thì ta tìm giao điểm M của d_2 và (P) . Như vậy, cũng có vô số đường thẳng d qua M và cắt d_1 .



🔪 **Ví dụ 1.** Viết phương trình đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng $(P): y + 2z = 0$ cắt cả hai đường thẳng (d_1): $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$ và (d_2): $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 4 + 2t \\ z = 1. \end{cases}$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

🕒 TRẮC NGHIỆM

🔪 **Câu 1.** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\vec{n}_3 = (1; 2; -1)$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d ?

- A. $\vec{u}_1 = (2; 1; 1)$. B. $\vec{u}_2 = (1; 2; -3)$. C. $\vec{u}_3 = (1; -2; -1)$. D. $\vec{u}_4 = (2; 1; -3)$.

🔪 **Câu 2.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - 2z + 3 = 0$. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $A(2; 1; -5)$ và vuông góc với mặt phẳng (α) là

- A. $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 5 - 2t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -2 - 5t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -5 - 2t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -5 - 2t \end{cases}$.

🔪 **Câu 3.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng d có phương trình tham số

$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d là?

- A. $x - 2 = y = z + 1$. B. $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z+1}{5}$. C. $\frac{x+2}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-5}$. D. $\frac{x+2}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{5}$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình chính tắc $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{1}$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là?

- A. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3 - t \\ z = t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = t \end{cases}$

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$. Vectơ nào dưới đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng d ?

- A. $\vec{u} = (1; 0; -1)$. B. $\vec{u} = (0; 0; 2)$. C. $\vec{u} = (0; 1; 2)$. D. $\vec{u} = (0; 1; -1)$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 3 = 0$ và điểm $A(1; -2; 1)$. Phương trình đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) là:

- A. $\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ B. $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ C. $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$ D. $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 4t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, tìm một vectơ chỉ phương của đường thẳng $d: \frac{x-4}{7} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+7}{-5}$.

- A. $\vec{u} = (7; -4; -5)$. B. $\vec{u} = (5; -4; -7)$. C. $\vec{u} = (4; 5; -7)$. D. $\vec{u} = (7; 4; -5)$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{3}$ đi qua những điểm nào sau đây?

- A. $A(-2; 2; 0)$. B. $B(2; 2; 0)$. C. $C(-3; 0; 3)$. D. $D(3; 0; 3)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{2}$. Điểm nào sau đây không thuộc đường thẳng d ?

- A. $Q(-1; 0; -5)$. B. $M(-2; 1; 3)$. C. $N(2; -1; -3)$. D. $P(5; -2; -1)$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 1; 1); B(-1; 1; 0); C(1; 3; 2)$. Đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC nhận vectơ $\vec{a}$ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương?

- A. $\vec{a} = (-1; 1; 0)$. B. $\vec{a} = (-2; 2; 2)$. C. $\vec{a} = (-1; 2; 1)$. D. $\vec{a} = (1; 1; 0)$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 3; -1), B(1; 2; 4)$. Phương trình đường thẳng nào được cho dưới đây không phải là phương trình đường thẳng AB .

- A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{-5}$. B. $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$ D. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{-5}$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{2}$. Điểm nào dưới đây không thuộc d ?

- A. $N(1; 0; 1)$. B. $F(3; -4; 5)$. C. $M(0; 2; 1)$. D. $E(2; -2; 3)$.

Câu 13. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{2-z}{1}$. Vectơ nào sau đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng (d) ?

- A. $\vec{u}_d = (-2; 3; 1)$. B. $\vec{u}_d = (-1; 1; 2)$. C. $\vec{u}_d = (2; -3; 1)$. D. $\vec{u}_d = (-2; -3; -1)$.

❖ Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d là:

- A. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$. B. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{2}$.
C. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{2}$. D. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$.

❖ Câu 15. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng (d) có phương trình chính tắc là $\frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-6}{2}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng (d) ?

- A. $\vec{u} = (5; -1; 6)$. B. $\vec{u} = (3; -4; 2)$. C. $\vec{u} = (-5; 1; -6)$. D. $\vec{u} = (3; 4; 2)$.

❖ Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Vectơ nào dưới đây là vectơ chỉ phương của d ?

- A. $\vec{n} = (1; -2; 1)$. B. $\vec{n} = (1; 2; 1)$. C. $\vec{n} = (-1; -2; 1)$. D. $\vec{n} = (-1; 2; 1)$.

❖ Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases}$. Tìm một vectơ chỉ phương của đường thẳng d .

- A. $\vec{u} = (0; 1; 1)$. B. $\vec{u} = (0; 1; -1)$. C. $\vec{u} = (0; 2; -1)$. D. $\vec{u} = (0; 2; 0)$.

❖ Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$. Điểm nào trong các điểm dưới đây nằm trên đường thẳng d ?

- A. $N(1; -1; 2)$. B. $M(3; 2; 2)$. C. $P(5; 2; 4)$. D. $Q(1; 0; 0)$.

❖ Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d) : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 \end{cases}$. Một vectơ chỉ phương của d là

- A. $\vec{u} = (-1; 2; 2)$. B. $\vec{u} = (1; -2; 0)$. C. $\vec{u} = (3; 1; 2)$. D. $\vec{u} = (1; -2; 2)$.

❖ Câu 20. Cho hai điểm $A(4; 1; 0)$, $B(2; -1; 2)$. Trong các vectơ sau, tìm một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB .

- A. $\vec{u} = (6; 0; 2)$. B. $\vec{u} = (2; 2; 0)$. C. $\vec{u} = (1; 1; -1)$. D. $\vec{u} = (3; 0; -1)$.

❖ Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x+8}{4} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z}{1}$. Khi đó vectơ chỉ phương của đường thẳng d có tọa độ là:

- A. $(4; 2; 1)$. B. $(4; 2; -1)$. C. $(4; -2; -1)$. D. $(4; -2; 1)$.

❖ Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng d có phương trình $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = z-3$. Vectơ nào dưới đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng d ?

- A. $\vec{u} = (3; 2; 3)$. B. $\vec{u} = (1; 2; 3)$. C. $\vec{u} = (3; 2; 0)$. D. $\vec{u} = (3; 2; 1)$.

❖ Câu 23. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; -1; -2)$ và $B(2; 2; 2)$. Vectơ $\vec{a}$ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB ?

- A. $\vec{a} = (2; 1; 0)$. B. $\vec{a} = (2; 3; 4)$. C. $\vec{a} = (-2; 1; 0)$. D. $\vec{a} = (2; 3; 0)$.

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;2)$, $B(3;-2;0)$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là:

- A. $\vec{u} = (2;-4;2)$. B. $\vec{u} = (2;4;-2)$. C. $\vec{u} = (-1;2;1)$. D. $\vec{u} = (1;2;-1)$.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$. Gọi Δ là một đường thẳng chứa trong (P) , cắt và vuông góc với d . Vectơ $\vec{u} = (a; 1; b)$ là một vectơ chỉ phương của Δ . Tính tổng $S = a + b$.

- A. $S = 2$. B. $S = 4$. C. $S = 1$. D. $S = 0$.

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x + y - z - 1 = 0$ và $(Q): x - 2y + z - 5 = 0$. Khi đó, giao tuyến của (P) và (Q) có một vectơ chỉ phương là

- A. $\vec{u} = (-1;3;-5)$. B. $\vec{u} = (1;3;5)$. C. $\vec{u} = (1;-2;1)$. D. $\vec{u} = (2;1;-1)$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y - 3z - 2 = 0$. Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) có một vectơ chỉ phương là

- A. $\vec{u}_3 = (1;-3;-2)$. B. $\vec{u}_1 = (1;-2;-2)$. C. $\vec{u}_2 = (1;-2;-3)$. D. $\vec{u}_4 = (1;2;3)$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, vectơ chỉ phương của đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1;2;4)$, $B(-2;3;5)$, $C(-9;7;6)$ có tọa độ là:

- A. $(3;4;5)$. B. $(-3;4;-5)$. C. $(3;-4;5)$. D. $(3;4;-5)$.

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ vectơ nào dưới đây là vectơ chỉ phương của Oz ?

- A. $\vec{i} = (1;0;0)$. B. $\vec{m} = (1;1;1)$. C. $\vec{k} = (0;0;1)$. D. $\vec{j} = (0;1;0)$.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(4;-2;3)$, $\Delta: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 \\ z = 1 - t \end{cases}$, đường thẳng d

đi qua A cắt và vuông góc với Δ có một vectơ chỉ phương là.

- A. $\vec{a} = (5;2;15)$. B. $\vec{a} = (1;0;3)$. C. $\vec{a} = (4;3;12)$. D. $\vec{a} = (-2;15;-6)$.

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$. Phương trình tham số của đường thẳng d là?

- A. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = -1 + t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = -1 - t \end{cases}$
C. $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 - t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = -1 - t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 - t \end{cases}$

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{4}$. Điểm nào sau đây không thuộc đường thẳng d ?

- A. $M(1;-1;-3)$. B. $N(3;-2;-1)$. C. $P(1;-1;-5)$. D. $Q(5;-3;3)$.

Câu 33. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;2;-1)$, $B(3;1;-2)$, $C(2;3;-3)$ và G là trọng tâm tam giác ABC . Xác định vectơ chỉ phương của đường thẳng OG .

- A. $\vec{u} = (2;2;-2)$. B. $\vec{u} = (1;2;-1)$. C. $\vec{u} = (2;1;-2)$. D. $\vec{u} = (1;2;-2)$.

Câu 34. Đường thẳng $(\Delta): \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}$ không đi qua điểm nào dưới đây?

- A. $(1;-2;0)$. B. $A(-1;2;0)$. C. $(-1;-3;1)$. D. $(3;-1;-1)$.

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$ và mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 1 = 0$. Gọi d là đường thẳng nằm trên (α) đồng thời cắt đường thẳng Δ và trục Oz . Một vectơ chỉ phương của d là:

- A. $\vec{u} = (1; 1; -2)$. B. $\vec{u} = (1; 2; -3)$. C. $\vec{u} = (1; -2; 1)$. D. $\vec{u} = (2; -1; -1)$.

❖ Câu 36. -2017] Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(P): 4x - z + 3 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d .

- A. $\vec{u} = (4; 1; -1)$. B. $\vec{u} = (4; -1; 3)$. C. $\vec{u} = (4; 1; 3)$. D. $\vec{u} = (4; 0; -1)$.

❖ Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$ và mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$. Tìm một vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ' là hình chiếu của đường thẳng Δ lên mặt phẳng (P) .

- A. $\vec{u} = (1; 1; -2)$. B. $\vec{u} = (1; -1; 0)$. C. $\vec{u} = (1; 0; -1)$. D. $\vec{u} = (1; -2; 1)$.

❖ Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; -3; 1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 3y - z + 2 = 0$. Đường thẳng d qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình là

- A. $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$. B. $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$. C. $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$. D. $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 - 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

❖ Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(3; -2; 4)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; 6)$ có phương trình

- A. $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-4}{6}$. B. $\frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{6}$.
C. $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{6}$. D. $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-6}{4}$.

❖ Câu 40. Đường thẳng d đi qua $M(2; 0; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (4; -6; 2)$ có phương trình

- A. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -6t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -3t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

❖ Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(-2; 4; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng $2x - 3y + 6z + 19 = 0$ có phương trình là

- A. $\frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+6}{3}$. B. $\frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{6}$.
C. $\frac{x+2}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-6}{3}$. D. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z+3}{6}$.

❖ Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $B(2; -1; 3)$ và mặt phẳng $(P): 2x - 3y + 3z - 4 = 0$. Đường thẳng Δ đi qua điểm B và vuông góc $mp(P)$ có phương trình là

- A. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{1}$. B. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-3}{1}$.
C. $\frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+3}{1}$. D. $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{-1}$.

❖ Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình chính tắc của đường thẳng qua $A(1; 4; -7)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z = 0$ là

- A. $\frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+7}{-2}$. B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+7}{-2}$.
C. $\frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+7}{-2}$. D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-7}{2}$.

❖ Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1; -3; 2)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y - 3z - 4 = 0$. Đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là

- A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-3}$. B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-3}$.
C. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{3}$. D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{-3}$.

Câu 45. Cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 + t \end{cases}$. Viết phương trình chính

tắc của đường thẳng d .

A. $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

B. $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{1}$.

C. $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

D. $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{1}$.

Câu 46. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;2;-3)$, $B(2;-3;1)$.

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 5t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 5t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 5t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -8 + 5t \\ z = 5 - 4t \end{cases}$

Câu 47. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z = 0$. Đường thẳng d đi qua $M(1;-1;2)$ và vuông góc với (P) có phương trình

A. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 - t \\ z = 5 - 2t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(5;-3;2)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 1 = 0$. Tìm phương trình đường thẳng d đi qua điểm M và vuông góc (P) .

A. $\frac{x-5}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}$.

B. $\frac{x-6}{1} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-3}{1}$.

C. $\frac{x+5}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{1}$.

D. $\frac{x+5}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}$.

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 1 = 0$ và điểm $M(1;1;2)$. Đường thẳng d đi qua M và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là:

A. $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}$.

B. $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$.

C. $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$.

D. $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$.

Câu 50. Cho đường thẳng d đi qua điểm $A(1;4;-7)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - 2z - 3 = 0$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d là:

A. $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+7}{2}$.

B. $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+7}{2}$.

C. $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+7}{1}$.

D. $d: \frac{x-1}{4} = y + 4 = \frac{z+7}{2}$.

Câu 51. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho d là đường thẳng đi qua $A(1;-2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): 3x - 4y - 5z + 1 = 0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d .

A. $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{-5}$.

B. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{5}$.

C. $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+3}{-5}$.

D. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-3}{-5}$.

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm $M(1;-1;2)$ và nhận $\vec{u} = (2;1;3)$ làm vectơ chỉ phương.

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3}$.

B. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{3}$.

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}$.

❖ Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -1 - 4t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

Viết phương trình đường thẳng đi qua M và song song với Δ .

- A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$.
 B. $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}$.
 C. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{-4}$.
 D. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-8}$.

❖ Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(1;4;-7)$ và vuông góc với mặt phẳng $x+2y-2z-3=0$ có phương trình là

- A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-7}{-2}$.
 B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+4}{4} = \frac{z-7}{-7}$.
 C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+7}{-2}$.
 D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+7}{-2}$.

❖ Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;5)$ có hình chiếu vuông góc trên các trục Ox, Oy, Oz là B, C, D . Gọi H là trực tâm tam giác BCD . Phương trình chính tắc của đường thẳng OH là

- A. $\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{6}$.
 B. $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{5}$.
 C. $\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{6}$.
 D. $\frac{x}{15} = \frac{y}{-10} = \frac{z}{6}$.

❖ Câu 56. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(3;0;-4)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(5;1;-2)$ có phương trình::

- A. $\frac{x+3}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-2}$.
 B. $\frac{x+3}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z+4}{-2}$.
 C. $\frac{x-3}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z+4}{-2}$.
 D. $\frac{x-3}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-2}$.

❖ Câu 57. Cho đường thẳng d đi qua điểm $A(1;2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 4x+3y+7z+1=0$. Phương trình tham số của d là

- A. $\begin{cases} x = -1 + 8t \\ y = -2 + 6t \\ z = -3 - 14t \end{cases}$.
 B. $\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = -2 + 3t \\ z = -3 - 7t \end{cases}$.
 C. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 - 7t \end{cases}$.
 D. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - 7t \end{cases}$.

❖ Câu 58. Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (4;-6;2)$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

- A. $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases}$.
 B. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$.
 C. $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -6t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.
 D. $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -3t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

❖ Câu 59. Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{2}$. Đường thẳng nào sau đây song song với d ?

- A. $\Delta: \frac{x-2}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$.
 B. $\Delta: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$.
 C. $\Delta: \frac{x-3}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-5}{-2}$.
 D. $\Delta: \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$.

❖ Câu 60. Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;2;-3)$ và $B(3;-1;1)$?

- A. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-3}$.
 B. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{1}$.
 C. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-3}{4}$.
 D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{4}$.

❖ Câu 61. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $M(-1;2;0)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x-3z-5=0$. Viết phương trình đường thẳng qua M và vuông góc với mặt phẳng (α) ?

- A. $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = -5 \end{cases}$.
 B. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 \\ z = -3t \end{cases}$.
 C. $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 2 \\ z = 3t \end{cases}$.
 D. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = -5t \end{cases}$.

Câu 62. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $4x + 3y - 7z + 1 = 0$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

A. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 - 7t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -1 + 8t \\ y = -2 + 6t \\ z = -3 - 14t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = -2 + 3t \\ z = -3 - 7t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - 7t \end{cases}$

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;-3), B(-1;4;1)$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB và song song với d ?

A. $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$. B. $d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{2}$.
C. $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$. D. $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$.

Câu 64. Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{a} = (4;-6;2)$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

A. $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -6t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -3t \\ z = 2 + t \end{cases}$

Câu 65. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{3-z}{4}$. Một véc tơ chỉ phương của (d) là:

A. $(1;2;3)$. B. $(2;3;4)$. C. $(-1;-2;-3)$. D. $(-2;-3;4)$.

Câu 66. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình của đường thẳng d đi qua hai điểm $E(9;-8;8)$ và $F(-10;6;8)$.

A. $d: \begin{cases} x = 9 - 19t \\ y = -8 + 14t \\ z = 8 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. B. $d: \begin{cases} x = -10 - 19t \\ y = 6 + 14t \\ z = 8 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.
C. $d: \begin{cases} x = -10 - 19t \\ y = 6 + 14t \\ z = 8 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. D. $d: \begin{cases} x = 9 - 19t \\ y = -8 + 14t \\ z = 0 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Câu 67. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình đường thẳng qua gốc tọa độ, vuông góc với mặt phẳng $(P): 2xy + 3z + 2 = 0$ là

A. $\begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + 6t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = -3t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = 3t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t \\ z = -3t \end{cases}$

Câu 68. Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có vec-tơ chỉ phương $\vec{a} = (4;-6;2)$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là.

A. $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -6t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -3t \\ z = 2 + t \end{cases}$

Câu 69. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 1 = 0$. Đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}$. B. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{2}$.
C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}$. D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{3}$.

❖ Câu 70. Phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm $M(1; -1; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): 2x + y + 3z - 19 = 0$ là

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$.

B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3}$.

C. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{3}$.

D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3}$.

❖ Câu 71. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; -3; 4)$, $B(-2; -5; -7)$, $C(6; -3; -1)$. Phương trình đường trung tuyến AM của tam giác là

A. $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -3-t, (t \in \mathbb{R}). \\ z = 4-8t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-3t, (t \in \mathbb{R}). \\ z = 8-4t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -3+4t, (t \in \mathbb{R}). \\ z = 4-t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1-3t \\ y = -3-2t, (t \in \mathbb{R}). \\ z = 4-11t \end{cases}$

❖ Câu 72. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 1; 3)$ và đường thẳng $d': \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$. Gọi d là đường thẳng đi qua A và song song d' . Phương trình nào sau đây không phải là phương trình đường thẳng d ?

A. $\begin{cases} x = 2+3t \\ y = 1+t \\ z = 3+t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -4+3t \\ y = -1+t \\ z = 2+t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = -1+3t \\ y = t \\ z = 2+t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 5-3t \\ y = 2-t \\ z = 4-t \end{cases}$

❖ Câu 73. Phương trình tổng quát của (α) qua $A(2; -1; 4)$, $B(3; 2; -1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): x + y + 2z - 3 = 0$ là

A. $11x + 7y - 2z - 21 = 0$.

B. $11x + 7y + 2z + 21 = 0$.

C. $11x - 7y - 2z - 21 = 0$.

D. $11x - 7y + 2z + 21 = 0$.

❖ Câu 74. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1; 3; 2)$, $B(2; 0; 5)$ và $C(0; -2; 1)$. Phương trình trung tuyến AM của tam giác ABC là.

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z+2}{1}$.

B. $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{-4}$.

C. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-2}{1}$.

D. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-1}{2}$.

❖ Câu 75. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -3)$, $B(-2; 3; 1)$ đường thẳng đi qua $A(1; 2; -3)$ và song song với OB có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2+3t \\ z = -3+t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1-4t \\ y = 2-6t \\ z = -3+2t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2+3t \\ z = -3-t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -2+t \\ y = 3+2t \\ z = 1-3t \end{cases}$

❖ Câu 76. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng chứa trục Oy có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$

❖ Câu 77. Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -3+t (t \in \mathbb{R}). \\ z = 4-t \end{cases}$. Khi đó phương trình chính tắc của d là:

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+4}{-1}$.

B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-1}$.

C. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-5}{1}$.

D. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{4}$.

Câu 78. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;1;-5)$, hai mặt phẳng $(P): x - y + z - 4 = 0$ và $(Q): 2x + y + z + 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A đồng thời Δ song song với hai mặt phẳng (P) và (Q) .

A. $\Delta: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-3}$.

B. $\Delta: \frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{-3}$.

C. $\Delta: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+5}{-3}$.

D. $\Delta: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{3}$.

Câu 79. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 3y + 2z + 2 = 0$ và $(Q): x - 3y + 2z + 1 = 0$. Phương trình đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và song song với hai mặt phẳng (P) , (Q) là

A. $\frac{x}{9} = \frac{y}{-12} = \frac{z}{-2}$.

B. $\frac{x}{12} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-9}$.

C. $\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{-2}$.

D. $\frac{x}{12} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-9}$.

Câu 80. Cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 + 6t \end{cases}$ và $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{3}$. Khẳng định nào sau là đúng?

A. d_1 cắt d_2 .

B. $d_1 \equiv d_2$.

C. d_1, d_2 chéo nhau.

D. $d_1 \parallel d_2$.

Câu 81. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 4t \\ z = -3 + 6t \end{cases}$ và

$d_2: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3t \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. d_1 và d_2 chéo nhau.

B. $d_1 \equiv d_2$.

C. $d_1 \perp d_2$.

D. $d_1 \parallel d_2$.

Câu 82. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 2 - 2t' \\ y = 3 + t' \\ z = 4 + 3t' \end{cases}$. Xét

vị trí tương đối của d và d' .

A. d trùng với d' .

B. d song song với d' .

C. d cắt d' .

D. d chéo d' .

Câu 83. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = -2t' \\ y = -5 + 3t' \\ z = 4 + t' \end{cases}$. Mệnh

đề nào sau đây đúng?

A. $d \perp d'$.

B. $d \parallel d'$.

C. d và d' chéo nhau.

D. $d \equiv d'$.

Câu 84. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-2}$. Hỏi d song song với mặt phẳng nào dưới đây?

A. $2x + y + 2z - 2 = 0$. B. $2x + 2y + 3z - 5 = 0$. C. $4x - y + z + 2 = 0$. D. $5x - y + 2z + 1 = 0$.

Câu 85. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 6 + 2t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$ và mặt

phẳng $(\alpha): x + 2y - z + 2 = 0$. Chọn khẳng định đúng:

A. $d \parallel (\alpha)$.

B. $d \subset (\alpha)$.

C. $d \perp (\alpha)$.

D. d cắt (α) .

Câu 86. Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$; $d_2: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$; $d_3: \frac{x+3}{-3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+5}{8}$. Đường thẳng song song với d_3 , cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-1}{-3} = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{8}$. B. $\frac{x+1}{-3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z}{8}$. C. $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z}{8}$. D. $\frac{x-1}{-3} = \frac{y}{-4} = \frac{z-1}{8}$.

🔹 **Câu 87.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $(d): \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P): x - y - z - 1 = 0$. Viết pt đường thẳng (Δ) đi qua điểm $A(1; 1; -2)$, biết $(\Delta) \parallel (P)$ và (Δ) cắt d .

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{-1}$. B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{3}$.
C. $\frac{x-1}{8} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{5}$. D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{1}$.

🔹 **Câu 88.** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 2t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y +$

$z + 6 = 0$. Phương trình đường thẳng qua điểm $M(0; 2; -1)$ cắt d và song song với (P) là.

A. $\begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = -1 - t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = 1 - t \end{cases}$.

🔹 **Câu 89.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$, mặt phẳng $(P): x + y - z + 3 = 0$ và điểm $A(1; 2; -1)$. Đường thẳng (Δ) đi qua A , cắt (d) và song song với mặt phẳng (P) có phương trình:

A. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$. B. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{1}$.
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{1}$. D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$.

🔹 **Câu 90.** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P): x - y - z - 1 = 0$. Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1; 1; -2)$, song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng d là

A. $\Delta: \frac{x+1}{-2} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{3}$. B. $\Delta: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+2}{3}$.
C. $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{-3}$. D. $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{-3}$.

🔹 **Câu 91.** Cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P): x - y - z - 1 = 0$. Phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm $M(1; 1; -2)$ song song với (P) và vuông góc với d là

A. $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+5}{-3}$. B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{-3}$.
C. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+5}{3}$. D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{3}$.

🔹 **Câu 92.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -3; 4)$, đường thẳng $d: \frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + z - 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M vuông góc với d và song song với (P) .

A. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{2}$. B. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{-2}$.
C. $\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{-2}$. D. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$.

🔹 **Câu 93.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$, mặt phẳng $(P): x + y + 2z + 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng (d) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại $A(3; -1; -3)$ và song song với (P) .

A. $d: \frac{x-3}{-4} = \frac{y+1}{6} = \frac{z+3}{-1}$.
C. $d: \frac{x-3}{0} = \frac{y+1}{6} = \frac{z+3}{-1}$.

B. $d: \frac{x-3}{-4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{-1}$.
D. $d: \frac{x-3}{-4} = \frac{y+1}{6} = \frac{z+3}{3}$.

Câu 94. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; -4; 0), B(3; 0; 0)$. Viết phương trình đường trung trực (Δ) của đoạn AB biết (Δ) nằm trong mặt phẳng $(\alpha): x + y + z = 0$.

A. $\Delta: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = t \end{cases}$. B. $\Delta: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -t \end{cases}$. C. $\Delta: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -t \end{cases}$. D. $\Delta: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 0 \end{cases}$.

Câu 95. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$; $d_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A , vuông góc với d_1 và cắt d_2 .

A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-5}$. B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$.
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-3}{5}$. D. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{5}$.

Câu 96. Cho 2 đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = z-3$; $d_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$ và $A(1; 2; 3)$. Đường thẳng qua A vuông góc d_1 , cắt d_2 có phương trình là:

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-5}$. B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{5}$.
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$. D. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$.

Câu 97. Trong không gian Oxy , cho điểm $M(-1; 1; 2)$ và hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$, $d': \frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua điểm M , cắt d và vuông góc với d' ?

A. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = 2 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -1 - 7t \\ y = 1 + 7t \\ z = 2 + 7t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}$.

Câu 98. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-2}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm A , vuông góc với đường thẳng d và cắt trục hoành. Tìm một vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ .

A. $\vec{u} = (1; -2; 0)$. B. $\vec{u} = (1; 0; 1)$. C. $\vec{u} = (2; 2; 3)$. D. $\vec{u} = (0; 2; 1)$.

Câu 99. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; 1; 0)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$. Viết phương trình của đường thẳng d đi qua điểm M , cắt và vuông góc với Δ .

A. $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{1}$. B. $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{1}$.
C. $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{1}$. D. $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{-2}$.

Câu 100. Cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$; $d_2: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$ và điểm $A(1; 2; 3)$

Đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc với d_1 và cắt d_2 có phương trình là.

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{5}$. B. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-5}$.

❖ **Câu 101.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$ và $d_2 :$

$\begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \\ z=-1+t \end{cases}$. Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;2;3)$, vuông góc với d_1 và cắt d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-5}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-5}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$.

❖ **Câu 102.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A , vuông góc với đường thẳng d và cắt trục Ox .

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$.

B. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{3}$.

C. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$.

D. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{3}$.

❖ **Câu 103.** Cho hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$; $d_2 : \begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \\ z=-1+t \end{cases}$ và điểm $A(1;2;3)$.

Đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc với d_1 và cắt d_2 có phương trình là.

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-5}$.

C. $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$.

D. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$.

❖ **Câu 104.** Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1 : \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$, $(d_2) : \frac{x+1}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+4}{-1}$ và $(d_3) : \frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{6}$. Đường thẳng song song d_3 , cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-3}{-4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-6}$.

B. $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{6}$.

C. $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+4}{6}$.

D. $\frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{6}$.

❖ **Câu 105.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;0)$ và đường thẳng d có phương trình $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$. Phương trình của đường thẳng Δ đi qua điểm M , cắt và vuông góc với đường thẳng d là:

A. $\frac{x-2}{-3} = \frac{-y+1}{-4} = \frac{z}{-2}$.

B. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{-2}$.

C. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{2}$.

D. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{2}$.

❖ **Câu 106.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;3)$ và hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{-2}$, $d_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A , vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2

A. $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{3}$.

B. $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{-1}$.

C. $d : \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{3}$.

D. $d : \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{4}$.

Câu 107. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; -1; 3)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{-2}, d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A , vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2 .

A. $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{-1}$.

B. $d: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{3}$.

C. $d: \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{4}$.

D. $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{3}$.

Câu 108. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(1; 2; 2)$, song song với mặt phẳng $(P): x - y + z + 3 = 0$ đồng thời cắt đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$ có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 3 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 2 \end{cases}$

Câu 109. Trong không gian $Oxyz$, Cho mặt phẳng $(R): x + y - 2z + 2 = 0$ và đường thẳng $\Delta_1: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Đường thẳng Δ_2 nằm trong mặt phẳng (R) đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng Δ_1 có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = t \\ y = -3t \\ z = 1 - t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Câu 110. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3}$ và mặt phẳng $(P): x + 3y + z = 0$. Đường thẳng (Δ) đi qua $M(1; 1; 2)$, song song với mặt phẳng (P) đồng thời cắt đường thẳng (d) có phương trình là

A. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-6}{2}$.

B. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}$.

D. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-9}{2}$.

Câu 111. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(1; 2; 2)$, song song với mặt phẳng $(P): x - y + z + 3 = 0$ đồng thời cắt đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$ có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 3 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 \end{cases}$

Câu 112. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z + 9 = 0$, đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$ và điểm $A(1; 2; -1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A cắt d và song song với mặt phẳng (P) .

A. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$.

D. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$.

Câu 113. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+5}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x - 3y + z - 6 = 0$. Đường thẳng Δ nằm trong (P) cắt và vuông góc với d có phương trình

A. $\frac{x+8}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-7}{11}$.

B. $\frac{x+4}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+5}{-1}$.

C. $\frac{x-8}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+7}{11}$.

D. $\frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-3}{11}$.

❖ Câu 114. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z + 1 = 0$. Đường thẳng nằm trong (P) , cắt và vuông góc với d có phương trình là:

- A. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{1}$.
 B. $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+3}{1}$.
 C. $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-1}$.
 D. $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{1}$.

❖ Câu 115. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 3 = 0$, đồng thời đi qua điểm $M(1;2;0)$ và cắt đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{3}$.

Một véc tơ chỉ phương của Δ là

- A. $\vec{u} = (1;1;-2)$.
 B. $\vec{u} = (1;-1;-2)$.
 C. $\vec{u} = (1;-2;1)$.
 D. $\vec{u} = (1;0;-1)$.

❖ Câu 116. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Cho mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 10 = 0$, điểm $A(1;3;2)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$. Tìm phương trình đường thẳng Δ cắt (P) và d lần

lượt tại hai điểm M và N sao cho A là trung điểm cạnh MN .

- A. $\frac{x-6}{7} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+3}{-1}$.
 B. $\frac{x+6}{7} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{-1}$.
 C. $\frac{x-6}{7} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{-1}$.
 D. $\frac{x+6}{7} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-1}$.

❖ Câu 117. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$, mặt phẳng $(\alpha): x + y - z + 3 = 0$ và điểm $A(1;2;-1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A cắt d và song song với mặt phẳng (α) .

- A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$.
 B. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$.
 C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$.
 D. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{1}$.

❖ Câu 118. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}$ và

$d_2: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}$. Phương trình đường thẳng vuông góc với $(P): 7x + y - 4z = 0$ và cắt hai đường

thẳng d_1, d_2 là

- A. $\frac{x-2}{7} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-4}$.
 B. $\frac{x+2}{-7} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{4}$.
 C. $\frac{x-2}{7} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{4}$.
 D. $\frac{x-7}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+4}{1}$.

❖ Câu 119. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình của đường thẳng d đi qua điểm $A(1; 2; -5)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): 2x + 3y - 4z + 5 = 0$ là

- A. $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = -4 - 5t \end{cases}$.
 B. $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = -5 + 4t \end{cases}$.
 C. $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = -5 - 4t \end{cases}$.
 D. $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$.

❖ Câu 120. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;-1)$ và đường thẳng $d: \frac{x+3}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{-4}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A , vuông góc và cắt đường thẳng d .

- A. $\frac{x}{13} = \frac{y-1}{28} = \frac{z+1}{-20}$.
 B. $\frac{x}{-13} = \frac{y-1}{28} = \frac{z+1}{20}$.
 C. $\frac{x}{13} = \frac{y-1}{28} = \frac{z+1}{20}$.
 D. $\frac{x}{13} = \frac{y-1}{-28} = \frac{z+1}{20}$.

Câu 121. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(0; 2; 0)$ và đường thẳng d :

$$\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$$
. Đường thẳng đi qua M , cắt và vuông góc với d có phương trình là

A. $\frac{x}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$. B. $\frac{x}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{2}$. C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-2}$. D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$.

Câu 122. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x-1}{x} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt d .

A. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$. B. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$.
 C. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$. D. $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$.

Câu 123. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;0)$ và đường thẳng Δ có phương trình $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M , cắt và vuông góc với đường thẳng Δ .

A. $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{1}$. B. $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{1}$.
 C. $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{1}$. D. $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{-2}$.

Câu 124. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt d .

A. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$. B. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$.
 C. $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$. D. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$.

Câu 125. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng d :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$
. Phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt đường thẳng d là

A. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$. B. $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{-3}$.
 C. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$. D. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-2}$.