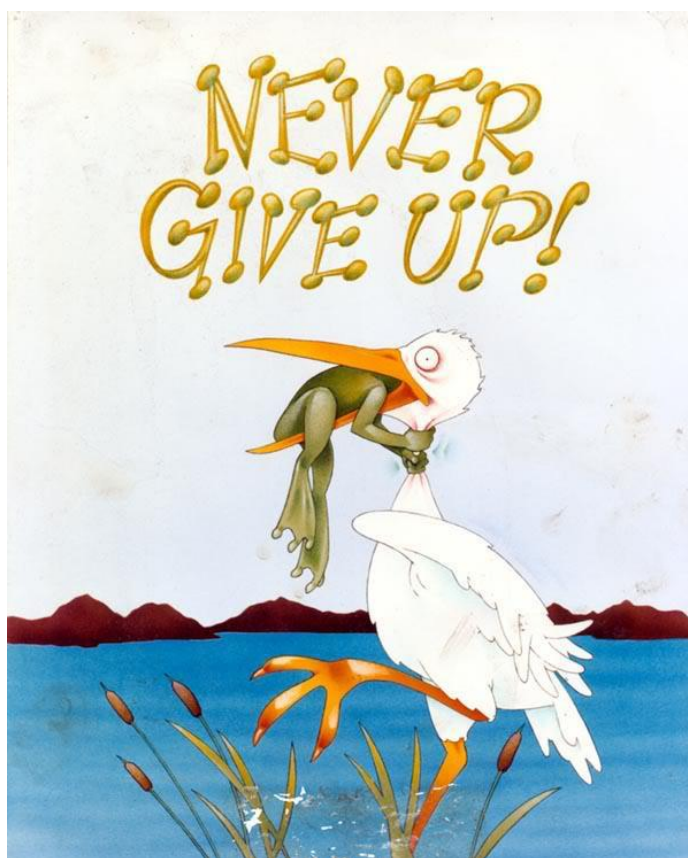
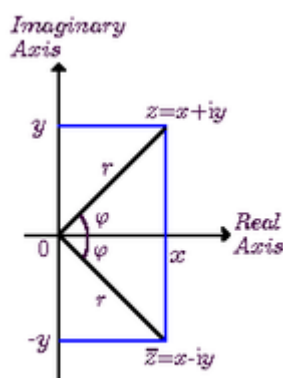


ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT & THI VÀO ĐẠI HỌC

SỐ PHỨC

Giáo viên: Nguyễn Hoàng Việt



Họ tên :

MỤC LỤC

Chương 4.	SỐ PHỨC VÀ CÁC PHÉP TOÁN	1
§1 –	NHẬP MÔN SỐ PHỨC	1
(A)	TÓM TẮT LÝ THUYẾT	1
(B)	CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP	2
	Dạng 1. Xác định số phức bằng các phép toán	3
	Dạng 2. Số phức bằng nhau	4
	Dạng 3. Điểm biểu diễn số phức	5
	Dạng 4. Lũy thừa với đơn vị ảo	7
(C)	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	9
§2 –	PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH	13
(A)	CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP	13
	Dạng 1. Phương trình bậc nhất	13
	Dạng 2. Phương trình bậc hai với hệ số thực	14
	Dạng 3. Xác định số phức bằng cách giải hệ phương trình	15
(B)	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	19
§3 –	TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN SỐ PHỨC	22
(A)	CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP	22
	Dạng 1. Tọa độ điểm biểu diễn của số phức	22
	Dạng 2. Tập hợp điểm biểu diễn số phức là đường thẳng	23
	Dạng 3. Tập hợp điểm biểu diễn số phức là đường tròn	24
	Dạng 4. Tập hợp điểm biểu diễn số phức là đường Elip	27
	Dạng 5. Một số mô hình khác	28
(B)	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	30
§4 –	MAX, MIN CỦA MÔ-ĐUN SỐ PHỨC	34
(A)	CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP	34
	Dạng 1. Tìm max, min bằng phương pháp đại số	34
	Dạng 2. Tìm max, min bằng phương pháp hình học	35
(B)	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	41
§5 –	ĐỀ ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG	45
(A)	ĐỀ ÔN TẬP SỐ 1	45
(B)	ĐỀ ÔN TẬP SỐ 2	47

SỐ PHỨC VÀ CÁC PHÉP TOÁN

BÀI 1. NHẬP MÔN SỐ PHỨC

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Số phức và các khái niệm liên quan

a) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó:

- ☑ a là phần thực, b là phần ảo.
- ☑ i là đơn vị ảo, $i^2 = -1$.
- ☑ Nếu $a = 0$ thì z là số thuần ảo.
- ☑ Nếu $b = 0$ thì z là một số thực.

b) Quan hệ giữa các tập hợp số:

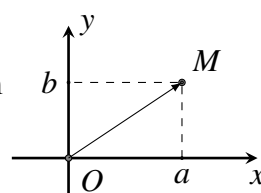
- ☑ Tập số phức kí hiệu là $\mathbb{C}$.
- ☑ Quan hệ các tập hợp số: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

c) Hai số phức bằng nhau: Cho $z_1 = a + bi$ và $z_2 = c + di$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Khi đó:

- ☑ $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$
- ☑ $z_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

d) Biểu diễn hình học của số phức

Mỗi số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi duy nhất một điểm $M(a, b)$ trên mặt phẳng tọa độ.



e) Mô-đun số phức:

- ☑ Độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là mô-đun của số phức z và kí hiệu là $|z|$.
- ☑ Từ định nghĩa, suy ra $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ hay $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Tính chất:

- ☑ $|z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}; |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- ☑ $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$.
- ☑ $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$.
- ☑ $||z| - |z'|| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|$.

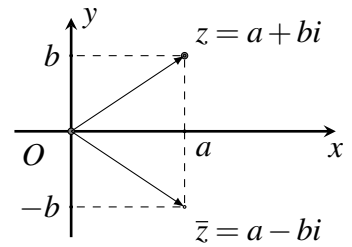
f) Số phức liên hợp: Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

☑ Ta gọi $a - bi$ là số phức liên hợp của z và kí hiệu là $\bar{z}$.

☑ Vậy, $\bar{\bar{z}} = a - bi$ hay $\overline{a + bi} = a - bi$

☑ Chú ý:

- $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$;
- z và $\bar{z}$ có điểm biểu diễn đối xứng nhau qua Ox .



2. Phép toán trên số phức

a) Cộng, trừ hai số phức: Ta cộng (trừ) phần thực theo phần thực, phần ảo theo phần ảo.

☑ $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$. ☑ $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.

b) Phép nhân hai số phức: Ta nhân phân phối, tương tự nhân hai đa thức. Lưu ý: $i^2 = -1$.

c) Phép chia hai số phức: Cho hai số phức $z_1 = a + bi$ và $z_2 = c + di$. Thực hiện phép chia $\frac{z_1}{z_2}$, ta nhân thêm $\bar{z}_2$ ở tử và mẫu.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) - (ad - bc)i}{c^2 + d^2} = m + ni.$$

d) Số phức nghịch đảo của z là $\frac{1}{z}$.

e) Lũy thừa của đơn vị ảo:

- ☑ $i^2 = -1$. ☑ $i^n = i$ nếu n chia 4 dư 1.
- ☑ $i^3 = -i$. ☑ $i^n = -1$ nếu n chia 4 dư 2.
- ☑ $i^n = 1$ nếu n chia hết cho 4. ☑ $i^n = -i$ nếu n chia 4 dư 3.

3. Phương trình bậc hai với hệ số thực

Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, với $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$. Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$, khi đó:

- a) Nếu $\Delta \geq 0$ thì phương trình có nghiệm $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- b) Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình có nghiệm $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.
- c) Định lý Viet: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ và $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

4. Phương trình bậc hai với hệ số phức

Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, với $a, b, c \in \mathbb{C}$ và $a \neq 0$. Đặt $\Delta = b^2 - 4ac = m \pm ni$.

- ① Một căn bậc hai của Δ là $\Phi = \sqrt{\frac{|\Delta| + m}{2}} \pm i\sqrt{\frac{|\Delta| - m}{2}}$, với $|\Delta| = \sqrt{m^2 + n^2}$.
- ② Công thức nghiệm của phương trình là $x_{1,2} = \frac{-b \pm \Phi}{2a}$.

B - CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Xác định số phức bằng các phép toán

a) Thực hiện các phép toán, biến đổi số phức z về dạng $A + Bi$

b) Khi đó:

✔ Phần thực là A ;

✔ Phần ảo là B ;

✔ Số phức liên hợp là $\bar{z} = \overline{A + Bi} = A - Bi$;

✔ Mô - đun là $|z| = \sqrt{A^2 + B^2}$

🔗 **Ví dụ 1.** Xác định phần thực và phần ảo của số phức z , biết:

a) $z = (3 - 2i) + (2 - i)$

b) $z = (3 - 2i)(2 - i)$

c) $z = \frac{4 - 2i}{2 - i}$

d) $(3 + 2i)z + (2 - i)^2 = 4 + i$

 **Lời giải.**

🔗 **Ví dụ 2.** Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} \right)^3$.

 **Lời giải.**

🔗 **Ví dụ 3.** Cho số phức $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Tìm số phức $w = 1 + z + z^2$.

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 4.** Tìm môđun của số phức $w = (1 + z)\bar{z}$ biết rằng số phức z thỏa mãn biểu thức $(3 + 2i)z + (2 - i)^2 = 4 + i$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 5.** Cho hai số phức $z_1 = 2 + 2i$ và $z_2 = a + (a^2 - 6)i$, $a \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị của a để $z_1 + z_2$ là một số thực.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 6.** Tìm phần ảo của số phức $z = m + (3m + 2)i$, (m là tham số thực âm), biết rằng $|z| = 2$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 7.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để số phức $z = \frac{m + 2i}{m - 2i}$ có phần thực dương.

💬 **Lời giải.**

📁 Dạng 2. Số phức bằng nhau

$$\heartsuit \quad a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

$$\heartsuit \quad a + bi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

❖ **Ví dụ 8.** Tìm tất cả các giá trị thực x, y sao cho: $x - 1 - yi = y + (2x - 5)i$.

 Lời giải.

⇒ **Ví dụ 9.** Tìm số phức z thỏa mãn $(3+i)\bar{z} + (1+2i)z = 3-4i$.

 Lời giải.

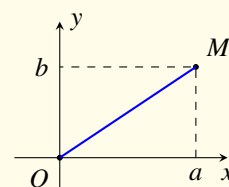
⇒ **Ví dụ 10.** (THPT Quốc Gia 2017) Cho số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $z + 1 + 3i - |z|i = 0$. Tính $S = a + 3b$.

 Lời giải.

Dạng 3. Điểm biểu diễn số phức

Mỗi số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi duy nhất một điểm $M(a, b)$ trên mặt phẳng tọa độ.

☑ $|z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.



◀ Ví dụ 11. Tìm điểm biểu diễn số phức z , biết

a) $z = (2 - i)^2 + \frac{3 + i}{1 - i};$

b) $\overline{iz} = 3 + 4i.$

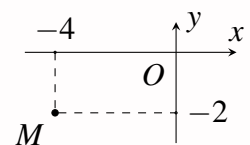
💬 Lời giải.

◀ Ví dụ 12. Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = 2, z_2 = 4i, z_3 = 2 + 4i$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Tính diện tích tam giác ABC .

💬 Lời giải.

◀ Ví dụ 13.

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z . Tính mô-đun của số phức $w = \frac{\overline{iz}(1 - i)^5}{(1 + i)^{10}}.$



💬 Lời giải.

◀ Ví dụ 14.

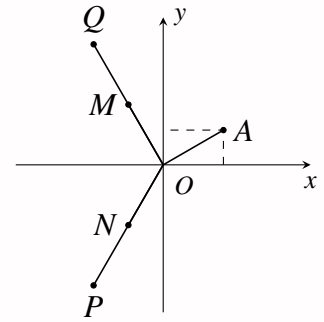
Cho số phức z thỏa mãn $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và điểm A trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của z . Biết rằng trong hình vẽ bên, điểm biểu diễn của số phức $w = \frac{1}{iz}$ là một trong bốn điểm M, N, P, Q . Khi đó điểm biểu diễn của số phức w là

☐ A điểm Q .

☐ B điểm M .

☐ C điểm N .

☐ D điểm P .



Lời giải.

Dạng 4. Lũy thừa với đơn vị ảo

a) Các công thức biến đổi:

☒ $i^2 = -1$.

☒ $i^n = i$ nếu n chia 4 dư 1.

☒ $i^3 = -i$.

☒ $i^n = -1$ nếu n chia 4 dư 2.

☒ $i^n = 1$ nếu n chia hết cho 4.

☒ $i^n = -i$ nếu n chia 4 dư 3.

b) Tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng:

☒ $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$ hoặc $S_n = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d]$, với u_1 là số hạng đầu, d là công sai.

c) Tổng n số hạng đầu của một cấp số nhân:

☒ $S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$, với u_1 là số hạng đầu, q là công bội ($q \neq 1$).

Ví dụ 15. Tìm số phức liên hợp của z , biết $z = \frac{i^{2009} + i^{2010} + i^{2011} + i^{2012} + i^{2013}}{i^{2014} + i^{2015} + i^{2016} + i^{2017} + i^{2018}}$.

Lời giải.

◀ Ví dụ 16. Tính $S = 1 + i + i^2 + \dots + i^{2017} + i^{2018}$.

✔ Đáp số: $S = i$.

💬 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

C – BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Tìm phần thực và phần ảo của số phức liên hợp của số phức $z = 1 + i$.

- (A) Phần thực là 1, phần ảo là -1 . (B) Phần thực là 1, phần ảo là $-i$.
(C) Phần thực là 1, phần ảo là 1. (D) Phần thực là 1, phần ảo là i .

Câu 2. Cho số phức $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 6 + 5i$. Tìm số phức liên hợp của $z = 6z_1 + 5z_2$.

- (A) $\bar{z} = 51 + 40i$. (B) $\bar{z} = 51 - 40i$. (C) $\bar{z} = 48 + 37i$. (D) $\bar{z} = 48 - 37i$.

Câu 3. Tính mô-đun của số phức z , biết rằng z vừa là số thực vừa là số thuần ảo.

- (A) $|z| = 1$. (B) $|z| = 0$.
(C) $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. (D) $|z| = i$.

Câu 4. Tính mô-đun của số phức nghịch đảo của số phức $z = (1 - 2i)^2$.

- (A) $\frac{1}{\sqrt{5}}$. (B) $\frac{1}{25}$. (C) $\sqrt{5}$. (D) $\frac{1}{5}$.

Câu 5. Cho số phức $z = 3 + 2i$. Tính $|z|$.

- (A) $|z| = \sqrt{5}$. (B) $|z| = \sqrt{13}$. (C) $|z| = 5$. (D) $|z| = 13$.

Câu 6. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tính mô-đun của số phức $w = (1 + i)z$.

- (A) $|w| = \sqrt{26}$. (B) $|w| = \sqrt{37}$. (C) $|w| = 5$. (D) $|w| = 4$.

Câu 7. Cho số phức $z = (1 - i)^2(3 + 2i)$. Số phức z có phần ảo là

- (A) 6. (B) $-6i$. (C) -6 . (D) 4.

Câu 8. Tính $P = \left| 1 + \sqrt{3}i \right|^{2018} + \left| 1 - \sqrt{3}i \right|^{2018}$.

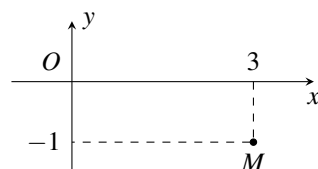
- (A) $P = 2$. (B) $P = 2^{1010}$. (C) $P = 2^{2019}$. (D) $P = 4$.

Câu 9. Nếu mô-đun của số phức z bằng r ($r > 0$) thì mô-đun của số phức $(1 - i)^2 z$ bằng

- (A) $2r$. (B) $4r$. (C) r . (D) $r\sqrt{2}$.

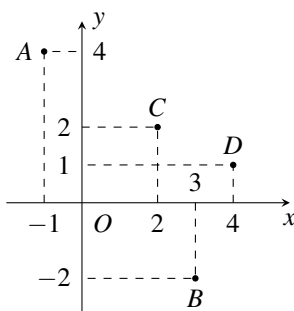
Câu 10. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức

- (A) $z = 1 - 3i$. (B) $z = -1 + 3i$.
(C) $z = 3 + i$. (D) $z = 3 - i$.



Câu 11. Cho bốn số phức z_1, z_2, z_3 và z_4 có điểm biểu diễn trên mặt phẳng Oxy lần lượt là A, B, C, D như hình vẽ bên. Hỏi số phức nào có mô-đun bằng $\sqrt{13}$?

- (A) z_1 . (B) z_2 .
(C) z_3 . (D) z_4 .



Câu 12. Trong mặt phẳng phức cho các điểm $A(-4; 1)$, $B(1; 3)$, $C(-6; 0)$ lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2, z_3 . Trọng tâm G của tam giác ABC là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây?

- (A) $-3 + \frac{4}{3}i$. (B) $3 + \frac{4}{3}i$. (C) $3 - \frac{4}{3}i$. (D) $-3 - \frac{4}{3}i$.

Câu 13. Cho số phức z có điểm biểu diễn trong mặt phẳng tọa độ Oxy là điểm $M(1; -2)$. Tính mô-đun của số phức $w = i\bar{z} - z^2$.

- (A) $\sqrt{6}$. (B) $\sqrt{26}$. (C) 26. (D) 6.

Câu 14. Tìm hai số x và y thỏa mãn $(2x - 3yi) + (3 - i) = 5x - 4i$ với i là đơn vị ảo.

- (A) $x = -1; y = -1$. (B) $x = -1; y = 1$. (C) $x = 1; y = -1$. (D) $x = 1; y = 1$.

Câu 15. Tìm phần ảo của số phức $z = (a + bi)(1 - 2i)$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

- (A) $2a + b$. (B) $2a - b$. (C) $a + 2b$. (D) $b - 2a$.

Câu 16. Cho số phức $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Phần thực của số phức z^2 là

- (A) $2abi$. (B) $a^2 + b^2$. (C) $2ab$. (D) $a^2 - b^2$.

Câu 17. Cho số phức $z = 2018 - 2017i$. Điểm M biểu diễn của số phức liên hợp của z là

- (A) $M(-2018; 2017)$. (B) $M(2018; -2017)$. (C) $M(-2018; -2017)$. (D) $M(2018; 2017)$.

Câu 18. Tìm số phức z thỏa mãn $(1 - 2i)z = 3 + i$.

- (A) $z = 1 - i$. (B) $z = 1 + i$. (C) $z = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$. (D) $z = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$.

Câu 19. Tìm số phức z biết $z = \frac{3 + 4i}{i^{2019}}$

- (A) $z = 4 - 3i$. (B) $z = -4 + 3i$. (C) $z = 3 - 4i$. (D) $z = 3 + 4i$.

Câu 20. Rút gọn biểu thức $P = i^{2000} + i^{2021}$.

- (A) $P = 1 + i$. (B) $P = 1 - i$. (C) $P = -1 + i$. (D) $P = -1 - i$.

Câu 21. Tìm phần thực và ảo của số phức $z = \frac{3 - i}{1 + i} + \frac{2 + i}{i}$.

- (A) Phần thực bằng 2; phần ảo bằng $-4i$. (B) Phần thực bằng 2; phần ảo bằng -4 .
(C) Phần thực bằng 2; phần ảo bằng $4i$. (D) Phần thực bằng -2 ; phần ảo bằng 4 .

Câu 22. Cho số phức $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, ($\varphi \in \mathbb{R}$). Tìm mô-đun của z .

- (A) $|\cos \varphi| + |\sin \varphi|$. (B) 1 . (C) $|\cos \varphi + \sin \varphi|$. (D) $|\cos 2\varphi|$.

Câu 23. Tính mô-đun của số phức z thỏa mãn $3z \cdot \bar{z} + 2017(z - \bar{z}) = 48 - 2016i$

- (A) $|z| = 4$. (B) $|z| = \sqrt{2016}$. (C) $|z| = \sqrt{2017}$. (D) $|z| = 2$.

Câu 24. Cho số phức z thỏa mãn $2(z - 1)(2 - i) = (3 + i)(\bar{z} + 2i)$. Tìm phần thực của số phức z^9 .

- (A) -1 . (B) 1 . (C) -16 . (D) 16 .

Câu 25. Cho các số phức $z_1 = 3i$, $z_2 = -1 - 3i$ và $z_3 = m - 2i$. Tập giá trị của tham số m để số phức z_3 có mô-đun nhỏ nhất trong 3 số phức đã cho là

- (A) $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$. (B) $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$.
(C) $\{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$. (D) $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$.

Câu 26. Tìm số thực m sao cho $m^2 - 1 + (m + 1)i$ là số ảo.

- (A) $m = 0$. (B) $m = 1$. (C) $m = \pm 1$. (D) $m = -1$.

Câu 27. Cho 2 số phức $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - mi$, $m \in \mathbb{R}$. Tìm m để $z_1 \cdot z_2$ là một số thuần ảo.

- (A) $m = -2$. (B) $m = 2$. (C) $m = -1$. (D) $m = 1$.

Câu 28. Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa $(2z - 1)(1 + i) - (\bar{z} + 3i)(1 - i) = 3 - 7i$. Tính $P = a^2 + b$.

- (A) 2 . (B) 13 . (C) 7 . (D) 5 .

Câu 29. Biết rằng số phức z có mô-đun bằng 3 và phần ảo bằng -3 . Tìm phần thực của số phức z .

- (A) 3 . (B) 6 . (C) 0 . (D) $\sqrt{3}$.

Câu 30. Cho hai số phức $z_1 = m + 3i$, $z_2 = 2 - (m + 1)i$, với $m \in \mathbb{R}$. Tìm các giá trị của m để $w = z_1 \cdot z_2$ là số thực.

- (A) $m = 1$ hoặc $m = -2$. (B) $m = 2$ hoặc $m = -1$.
(C) $m = 2$ hoặc $m = -3$. (D) $m = -2$ hoặc $m = -3$.

Câu 31. Cho số phức $z = a + bi$ (a, b là số thực) thỏa mãn $z + |z| - \bar{z} = 5 - 8i$. Giá trị của biểu thức $a^2 + b$ bằng

- (A) -1 . (B) 5 . (C) -7 . (D) 12 .

Câu 32. Tính tổng các giá trị của tham số thực m để số phức $z = \frac{m-1+2(m-1)i}{1-mi}$ là số thực.

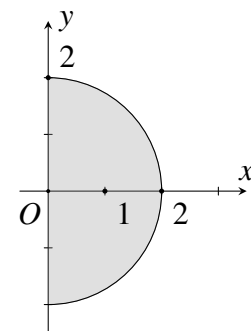
- (A) $S = 2\sqrt{3}$. (B) $S = 15$. (C) $S = -3$. (D) $S = -1$.

Câu 33. Tính tổng $S = 1 + i^3 + i^6 + \dots + i^{2016}$.

- (A) $S = 1$. (B) $S = -1$. (C) $S = i$. (D) $S = -i$.

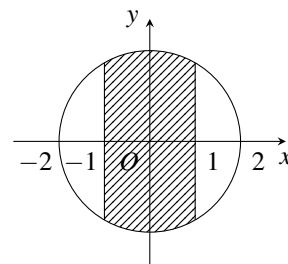
Câu 34. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ là nửa hình tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $R = 2$ (phần tô đậm, kể cả đường giới hạn như hình bên). Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- (A) $x \geq 0$ và $|z| = \sqrt{2}$. (B) $y \geq 0$ và $|z| = 2$.
(C) $x \geq 0$ và $|z| \leq 2$. (D) $y \geq 0$ và $|z| \leq 2$.



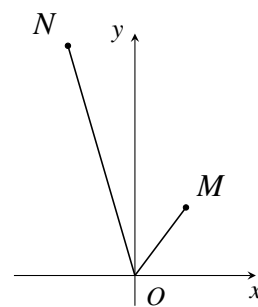
Câu 35. Trong mặt phẳng phức, số phức thỏa mãn điều kiện nào thì có điểm biểu diễn thuộc phần gạch chéo ở hình bên (kể cả biên)?

- (A) Số phức có phần thực nằm trong $(-1; 1)$ và mô-đun nhỏ hơn 2.
(B) Số phức có phần thực nằm trong $[-1; 1]$ và mô-đun nhỏ hơn 2.
(C) Số phức có phần thực nằm trong $[-1; 1]$ và mô-đun không vượt quá 2.
(D) Số phức có phần thực nằm trong $(-1; 1)$ và mô-đun không vượt quá 2.



Câu 36. Trong mặt phẳng tọa độ, cho điểm M và N lần lượt là điểm biểu diễn của số phức z^2 và z^4 (hình vẽ bên). Biết $OM = \frac{16}{45} \cdot ON$. Tính $|z|$.

- (A) $|z| = \frac{16}{45}$. (B) $|z| = \frac{\sqrt{5}}{3}$.
(C) $|z| = \frac{3\sqrt{5}}{4}$. (D) $|z| = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.



Câu 37. Cho số phức z có mô-đun bằng 2018 và w là số phức thỏa mãn biểu thức $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w}$. Mô-đun của số phức w bằng

- (A) 2018. (B) 2019. (C) 2017. (D) $\sqrt{2019}$.

Câu 38. Trong mặt phẳng phức, biết số phức z có điểm biểu diễn nằm trong góc phần tư (I). Hỏi điểm biểu diễn của số phức $w = \frac{1}{iz}$ nằm trong góc phần tư nào?

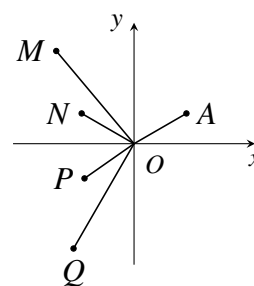
- (A) (I). (B) (II). (C) (III). (D) (IV).

Câu 39. Cho z_1, z_2 là các số phức thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$ và $|z_1 - 2z_2| = \sqrt{6}$. Tính giá trị của biểu thức $P = |2z_1 + z_2|$.

- (A) $P = 2$. (B) $P = \sqrt{3}$. (C) $P = 3$. (D) $P = 1$.

Câu 40. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$ và điểm A trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của z . Biết rằng trong hình vẽ bên, điểm biểu diễn của số phức $w = \frac{1}{iz}$ là một trong bốn điểm M, N, P, Q . Khi đó điểm biểu diễn của số phức w là

- (A) Điểm M . (B) Điểm N . (C) Điểm P . (D) Điểm Q .



—HẾT—

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A – CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Phương trình bậc nhất

Trong chương trình, ta chỉ xét phương trình dạng này với ẩn z bậc nhất.

- ☑ Ta giải tương tự như giải phương trình bậc nhất trên tập số thực;
- ☑ Thực hiện các biến đổi đưa về dạng $z = A + Bi$

⇨ **Ví dụ 1.** Tìm số phức z thỏa mãn:

a) $iz = 1 + i.$

b) $(2 - i)z + 2 - 3i = 0.$

c) $(1 - i)\bar{z} = (1 + i)^5.$

 **Lời giải.**

⇨ **Ví dụ 2.** Cho số phức z thỏa mãn $(2 + i)z + \frac{2(1 + 2i)}{1 + i} = 7 + 8i$ (1). Tìm môđun của số phức $\omega = z + 1 + i$

 **Lời giải.**

⇨ **Ví dụ 3.** Tìm phần thực và phần ảo của số phức z thỏa $(1 + i)^2(2 - i)z = 8 + i + (1 + 2i)z.$

 **Lời giải.**

❖ Ví dụ 4. Xác định số phức z thỏa $\frac{2+3i}{z} + (1+2i) = 4+5i$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 5. Tìm môđun của số phức $w = (1+z)\bar{z}$ biết rằng số phức z thỏa mãn biểu thức $(3+2i)z + (2-i)^2 = 4+i$.
Đáp số: $|w| = \sqrt{10}$

💬 Lời giải.

📁 Dạng 2. Phương trình bậc hai với hệ số thực

Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, với $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$. Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$, khi đó:

- a) Nếu $\Delta \geq 0$ thì phương trình có nghiệm $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- b) Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình có nghiệm $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.
- c) Định lý Viet: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ và $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

❖ Ví dụ 6. Tìm phần thực của số phức $z_1^2 + z_2^2$, biết z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$.
✔️ Đáp số: 6.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 7. Cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$ với $b, c \in \mathbb{R}$. Xác định b và c nếu phương trình nhận $z = 1 - 3i$ làm một nghiệm.
✔️ Đáp số: $b = -2, c = 10$.

💬 Lời giải.

❖ **Ví dụ 8.** Biết phương trình $z^2 + 2017 \cdot 2018z + 2^{2018} = 0$ có hai nghiệm z_1, z_2 . Tính $S = |z_1| + |z_2|$.
 ✔ Đáp số: 2^{1010} .

💬 Lời giải.

❖ **Ví dụ 9.** Tìm tất cả các nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $(z^2 + 9)(z^2 - z + 1) = 0$.

💬 Lời giải.

❖ **Ví dụ 10.** Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phân biệt của phương trình $z^4 + z^2 + 1 = 0$ trên tập số phức. Tính giá trị của biểu thức $P = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2$.
 ✔ Đáp số: 4.

💬 Lời giải.

📁 Dạng 3. Xác định số phức bằng cách giải hệ phương trình

Gọi $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$

a) Nếu đề bài cho dạng hai số phức bằng nhau, ta áp dụng một trong hai công thức sau:

$$\text{✔ } a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

$$\text{✔ } a + bi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

b) Nếu đề bài cho phương trình ẩn z và kèm theo một trong các ẩn $\bar{z}, |z|, \dots$ Ta thay $z = a + bi$ vào điều kiện đề cho, đưa về "hai số phức bằng nhau". Chú ý:

$$\text{✔ } \bar{z} = a - bi$$

$$\text{✔ } z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

$$\text{✔ } |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{✔ } z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

c) Nếu đề cho z thỏa hai điều kiện riêng biệt thì từ 2 điều kiện đó, ta tìm được hệ phương trình liên quan đến a, b . Giải tìm a, b .

↔ **Ví dụ 11.** Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x - 3yi) + (1 - 3i) = x + 6i$, với i là đơn vị ảo.
 ✔ Đáp số: $x = -1; y = -3$.

💬 **Lời giải.**

↔ **Ví dụ 12.** Cho số phức $z = a + bi$ thỏa mãn $z(1 + 2i)^2 + \bar{z} = -20 + 4i$. Tính $a^2 - b^2$.

💬 **Lời giải.**

↔ **Ví dụ 13.** Tính môđun của số phức z thỏa mãn $3z \cdot \bar{z} + 2017(z - \bar{z}) = 48 - 2016i$.

💬 **Lời giải.**

↔ **Ví dụ 14.** Cho số phức $z = a + bi$ (với a, b là số nguyên) thỏa mãn $(1 - 3i)z$ là số thực và $|\bar{z} - 2 + 5i| = 1$. Khi đó $a + b$ bằng

✔ Đáp số: 6.

💬 **Lời giải.**

↔ **Ví dụ 15.** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z - 6 - i) + 2i = (7 - i)z$?

✔ Đáp số: 3.

💬 Lời giải.

↔ **Ví dụ 16.** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 3i| = 3\sqrt{2}$ và $(z + 2i)^2$ là số thuần ảo?

✔ Đáp số: 3.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 17. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $\left| \frac{z-1}{z-i} \right| = 1$ và $\left| \frac{z-3i}{z+i} \right| = 1$. Tính $P = a + b$.
 ✔ Đáp số: $P = 2$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 18. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn: $|z - \bar{z} - 2i| = |z + \bar{z} - 6|$ và $|z - 6 - 2i| = 2\sqrt{2}$.
 ✔ Đáp số: 3.

💬 Lời giải.

B – BÀI TẬP TỰ LUYỆN**Câu 1.** Tìm phần ảo của số phức z , biết $(1+i)z = 3-i$.

- (A) 2. (B) -2. (C) 1. (D) -1.

Câu 2. Tính môđun của số phức z thỏa mãn $(1+i)z + 3 = -2i$.

- (A) $|z| = \frac{5}{2}$. (B) $|z| = \frac{\sqrt{26}}{2}$. (C) $|z| = \sqrt{26}$. (D) $|z| = \sqrt{13}$.

Câu 3. Tìm tọa độ điểm M là điểm biểu diễn số phức z biết z thỏa mãn phương trình $(1+i)\bar{z} = 3-5i$.

- (A) $M(-1; 4)$. (B) $M(-1; -4)$. (C) $M(1; 4)$. (D) $M(1; -4)$.

Câu 4. Tính môđun của số phức thỏa mãn: $z(2-i) + 13i = 1$.

- (A) $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$. (B) $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{2}$. (C) $|z| = 34$. (D) $|z| = \sqrt{34}$.

Câu 5. Tìm số phức z thỏa mãn $(2+3i)(z-2) + 13 - 13i = 0$.

- (A) $z = 3 - 5i$. (B) $z = 5 + 3i$. (C) $z = 3 + 5i$. (D) $z = 5 - 3i$.

Câu 6. Cho số phức z thỏa $(3+2i)z = 7+5i$. Số phức liên hợp $\bar{z}$ của số phức z là

- (A) $\bar{z} = -\frac{31}{5} + \frac{1}{5}i$. (B) $\bar{z} = \frac{31}{5} - \frac{1}{5}i$. (C) $\bar{z} = \frac{31}{13} - \frac{1}{13}i$. (D) $\bar{z} = -\frac{31}{13} + \frac{1}{13}i$.

Câu 7. Tìm số phức $\bar{z}$, biết $(2-5i)z - 3 + 2i = 5 + 7i$.

- (A) $\bar{z} = -\frac{9}{29} + \frac{50}{29}i$. (B) $\bar{z} = -\frac{9}{29} - \frac{50}{29}i$. (C) $\bar{z} = \frac{9}{29} - \frac{50}{29}i$. (D) $\bar{z} = \frac{9}{29} + \frac{50}{29}i$.

Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn $(3+2i)z + (2-i)^2 = 4+i$. Hiệu phần thực và phần ảo của số phức z là

- (A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

Câu 9. Phương trình $z^2 + 3z + 9 = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 . Tính $S = z_1z_2 + z_1 + z_2$.

- (A) -6. (B) 6. (C) 12. (D) -12.

Câu 10. Cho phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$ có hai nghiệm phức là z_1, z_2 . Tính $A = |z_1| + |z_2| + z_1 \cdot z_2$.

- (A) $A = 25 + 2\sqrt{5}$. (B) $A = 0$. (C) $A = 5 - 2\sqrt{5}$. (D) $A = 5 + 2\sqrt{5}$.

Câu 11. Cho a, b là các số thực thỏa phương trình $z^2 + az + b = 0$ có nghiệm $3 - 2i$, tính $S = a + b$.

- (A) $S = 19$. (B) $S = -7$. (C) $S = 7$. (D) $S = -19$.

Câu 12. Trên tập số phức, tích 4 nghiệm của phương trình $x(x^2 - 1)(x + 2) = 24$ bằng

- (A) -24. (B) -12. (C) 12. (D) 24.

Câu 13. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 + 4z + 5 = 0$. Đặt $w = (1 + z_1)^{100} + (1 + z_2)^{100}$. Khi đó

- (A) $w = 2^{50}i$. (B) $w = -2^{51}$. (C) $w = 2^{51}$. (D) $w = -2^{50}i$.

Câu 14. Gọi z_1 và z_2 (z_2 có phần ảo âm) là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2 - 3z + 3 = z$. Giá trị của biểu thức $2018|2z_1| - 2017|2z_2|$ bằng

- (A) $3\sqrt{2}$. (B) $2\sqrt{3}$. (C) 3. (D) $\sqrt{3}$.

Câu 15. Gọi z_1 và z_2 lần lượt là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2019 \cdot 2020z + 2^{2020} = 0$. Tính $|z_1|^2 + |z_2|^2$.

- (A) 2^{2020} . (B) 2^{2021} . (C) 2^{2019} . (D) 2^{2010} .

Câu 16. Phương trình nào sau đây nhận hai số phức $z_1 = 1 + \sqrt{2}i$ và $z_2 = 1 - \sqrt{2}i$ làm nghiệm?

- (A) $z^2 - 2z + 3 = 0$. (B) $z^2 - 2z - 3 = 0$. (C) $z^2 + 2z + 3 = 0$. (D) $z^2 + 2z - 3 = 0$.

Câu 17. Giả sử phương trình $z^2 + az + b = 0$ (với $a, b \in \mathbb{R}$) nhận $z_1 = 1 - i$ làm nghiệm. Tìm nghiệm z_2 còn lại.

- (A) $z_2 = -1 - i$. (B) $z_2 = 1 - i$. (C) $z_2 = -1 + i$. (D) $z_2 = 1 + i$.

Câu 18. Biết phương trình $z^2 + az + b = 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có nghiệm $z = -2 + i$. Tính $a + b$.

- (A) 4. (B) 9. (C) -1. (D) 1.

Câu 19. Với x, y là hai số thực thỏa mãn $x(3 + 5i) + y(1 - 2i)^3 = 9 + 14i$. Giá trị của $2x - 3y$ bằng

- (A) $\frac{205}{109}$. (B) $\frac{172}{61}$. (C) $\frac{353}{61}$. (D) $\frac{94}{109}$.

Câu 20. Gọi x, y là hai số thực thỏa $x(3 - 5i) - y(2 - i)^2 = 4 - 2i$. Tính $M = 2x - y$.

- (A) $M = 1$. (B) $M = 2$. (C) $M = -2$. (D) $M = 0$.

Câu 21. Cho số phức z thỏa $2z + 3\bar{z} = 10 + i$. Tính $|z|$.

- (A) $|z| = 1$. (B) $|z| = 3$. (C) $|z| = \sqrt{3}$. (D) $|z| = \sqrt{5}$.

Câu 22. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(1 + 2i)z + i\bar{z} = 7 + 5i$. Tính $S = 4a + 3b$.

- (A) $S = 7$. (B) $S = 24$. (C) $S = -7$. (D) $S = 0$.

Câu 23. Tìm phần ảo của số phức z biết $z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i$.

- (A) 1. (B) -2. (C) -1. (D) 2.

Câu 24. Cho số phức z thỏa mãn $\frac{\bar{z} + i}{z - 1} = 2 - i$. Tìm số phức $w = 1 + z + z^2$.

- (A) $w = 5 + 2i$. (B) $w = 5 - 2i$. (C) $w = \frac{9}{2} + 2i$. (D) $w = \frac{9}{2} - 2i$.

Câu 25. Biết phương trình $z^2 + 2z + m = 0$ ($m \in \mathbb{R}$) có một nghiệm phức $z_1 = -1 + 3i$ và z_2 là nghiệm phức còn lại. Số phức $z_1 + 2z_2$ là

- (A) $-3 + 3i$. (B) $-3 + 9i$. (C) $-3 - 3i$. (D) $-3 + 9i$.

Câu 26. Cho số phức $z = a + bi$ (a, b là số thực) thỏa mãn $z + |z| - \bar{z} = 5 - 8i$. Giá trị của biểu thức $a^2 + b$ bằng

- (A) -1. (B) 5. (C) -7. (D) 12.

Câu 27. Tìm số phức z biết $|z - 2 - 3i| = \sqrt{10}$ và phần ảo của z gấp đôi phần thực.

- (A) $z = 6 + 3i; z = 2 + i$. (B) $z = 3 + 6i; z = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$.
(C) $z = 3 + 6i; z = 1 + 2i$. (D) $z = 3 - 6i; z = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$.

Câu 28. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 5$ và $|z + 3| = |z + 3 - 10i|$. Tìm số phức $w = z - 4 + 3i$.

- (A) $w = -1 + 7i$. (B) $w = -3 + 8i$. (C) $w = 1 + 3i$. (D) $w = -4 + 8i$.

Câu 29. Biết số phức z có phần ảo khác 0 và thỏa mãn $|z - (2 + i)| = \sqrt{10}$ và $z \cdot \bar{z} = 25$. Điểm nào sau đây biểu diễn số phức z trên?

- (A) $P(4; -3)$. (B) $N(3; -4)$. (C) $M(3; 4)$. (D) $Q(4; 3)$.

Câu 30. Cho số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa $z + 2i + 1 = |z|(1 + i)$ và $|z| > 1$. Tính $P = a - b$.

- (A) $P = -3$. (B) $P = 3$. (C) $P = -1$. (D) $P = 1$.

Câu 31. Tìm mô-đun của số phức z biết $z - 4 = (1 + i)|z| - (4 + 3z)i$.

- (A) $|z| = \frac{1}{2}$. (B) $|z| = 2$. (C) $|z| = 4$. (D) $|z| = 1$.

Câu 32. Cho số phức $z = a + bi$ (a, b là các số thực) thỏa mãn $z \cdot |z| + 2z + i = 0$. Tính giá trị của biểu thức $T = a + b^3 + 5\sqrt{2}$.

- (A) $T = 4$. (B) $T = 5$. (C) $T = 7$. (D) $T = 6$.

Câu 33. Có tất cả bao nhiêu số phức z thỏa $|z + 3 - i| = 2\sqrt{2}$ và z^2 thuần ảo?

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Câu 34. Có tất cả bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 3i| = \sqrt{13}$ và $\frac{z}{z + 2}$ là số thuần ảo?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) Vô số.

Câu 35. Cho số phức $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $(2+i)|z| = \frac{\sqrt{17}}{z} + 1 - 3i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $2 < |z| < 3$. (B) $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$. (C) $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{4}$. (D) $0 < |z| < \frac{1}{2}$.

Câu 36. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z - 3 - i) + 2i = (4 - i)z$?

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 4.

Câu 37. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, a > 0$) thỏa $z \cdot \bar{z} - 12|z| + (z - \bar{z}) = 13 - 10i$. Tính $S = a + b$.

- (A) $S = -17$. (B) $S = 5$. (C) $S = 7$. (D) $S = 17$.

Câu 38. Cho số phức $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $\frac{z-2i}{z-2}$ là số thuần ảo. Khi số phức z có mô-đun lớn nhất, tính giá trị của $P = a + b$.

- (A) 0. (B) 4. (C) $2\sqrt{2}$. (D) $3\sqrt{2} + 1$.

Câu 39. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 2, |z_1 + z_2| = 2\sqrt{3}$. Tính $|z_1 - z_2|$.

- (A) $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$. (B) $|z_1 - z_2| = 2$. (C) $|z_1 - z_2| = 3$. (D) $|z_1 - z_2| = 0$.

Câu 40. Cho z và w là hai số phức liên hợp thỏa mãn $\frac{z}{w^2}$ là số thực và $|z - w| = 2\sqrt{3}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) $|z| < 1$. (B) $3 < |z| < 4$. (C) $|z| > 4$. (D) $1 < |z| < 3$.

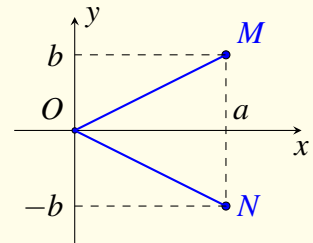
—HẾT—

BÀI 3. TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN SỐ PHỨC

A – CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Tọa độ điểm biểu diễn của số phức

-  Mỗi số phức $z = a + bi$ sẽ được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$.
-  Số phức z và $\bar{z}$ có điểm biểu diễn đối xứng nhau qua trục hoành.
 -  $|z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.
 -  $|z| = |\bar{z}|$.



Các ví dụ sau đây điều xét trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

- ✎ **Ví dụ 1.** Cho số phức $z = 2018 - 2017i$. Điểm M biểu diễn của số phức liên hợp của z là
☐ A $M(-2018; 2017)$. ☐ B $M(2018; -2017)$. ☐ C $M(-2018; -2017)$. ☐ D $M(2018; 2017)$.

 **Lời giải.**

- ✎ **Ví dụ 2.** Cho số phức z có số phức liên hợp là $\bar{z}$. Gọi M và M' tương ứng, lần lượt là điểm biểu diễn hình học của z và $\bar{z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng.

- ☐ A M và M' đối xứng qua trục thực. ☐ B M và M' trùng nhau.
☐ C M và M' đối xứng qua gốc tọa độ. ☐ D M và M' đối xứng qua trục ảo.

 **Lời giải.**

- ✎ **Ví dụ 3.** Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = 2$, $z_2 = 4i$, $z_3 = 2 + 4i$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Tính diện tích tam giác ABC .
☒ Đáp số: $S_{ABC} = 4$

 **Lời giải.**

- ✎ **Ví dụ 4.** Cho số phức $z = a + (a - 5)i$ với $a \in \mathbb{R}$. Tìm a để điểm biểu diễn của số phức nằm trên đường phân giác của góc phần tư thứ hai và thứ tư.

 Lời giải.

🔗 **Ví dụ 5.** Cho điểm M biểu diễn số phức $z = -2 + 3i$. Gọi N là điểm thuộc đường thẳng $y = 3$ sao cho tam giác OMN cân tại O . Điểm N là điểm biểu diễn của số phức nào?

 Lời giải.

Dạng 2. Tập hợp điểm biểu diễn số phức là đường thẳng

 Phương pháp chung của bài toán tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức là

- ① Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$.
- ② Thay vào điều kiện đề bài, ta được một biểu diễn theo hai biến x và y .

Chú ý các công thức



▶ $\bar{z} = x - yi$.

▶ $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

▶ $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$.

▶ $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$.

- ③ Tùy thuộc vào phương trình thu được, ta kết luận tập hợp điểm chạy trên "đối tượng hình" tương ứng.

 Phương trình đường thẳng qua $A(x_0; y_0)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B)$ là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \text{ hay } Ax + By + C = 0$$

 Tập hợp điểm biểu diễn số phức thỏa $|z - (a + bi)| = |z - (c + di)|$ là đường trung trực của đoạn PQ , với $P(a; b)$ và $Q(c; d)$.

🔗 **Ví dụ 6.** Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa $(z - i)(2 + i)$ là một số thuần ảo.

✔ Đáp số: $2x - y + 1 = 0$.

 Lời giải.

🔗 **Ví dụ 7.** Xét các số phức z thỏa mãn $|z - 1| = |\bar{z} - i|$. Tìm quỹ tích các điểm biểu diễn số phức $w = (3 - 4i)z + i$.

✔ Đáp số: $7x - y + 1 = 0$.

💬 Lời giải.

📁 Dạng 3. Tập hợp điểm biểu diễn số phức là đường tròn



Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi

- ✔ $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).
- ✔ $I(a; b)$ là điểm biểu diễn của $z_0 = a + bi$ cho trước ($a, b \in \mathbb{R}$)



Khi đó, ta có các kết quả sau:

- ① $|z| = OM$ (khoảng cách từ gốc O đến điểm M).
- ② $|z - z_0| = IM$ (khoảng cách giữa I và M).
- ③ $|z - z_0| = R \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$: đường tròn tâm $I(a; b)$, bán kính R .
- ④ $|z - z_0| \leq R \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2$: hình tròn tâm $I(a; b)$, bán kính R .

🔗 **Ví dụ 8.** Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z + 1 - 3i| = 5$ là đường tròn. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó.

✔ Đáp số: tâm $I(-1; 3)$, bán kính $R = 5$.

💬 Lời giải.

🔗 **Ví dụ 9.** Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|(1 - i)z - 4 + 2i| = 2$ là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của đường tròn đó.

✔ Đáp số: $I(3; 1), R = \sqrt{2}$

💬 Lời giải.

❖ **Ví dụ 10.** Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z+1| = |1-i-2z|$ là đường tròn (C) . Tính bán kính R của đường tròn (C) .

✔ Đáp số: $R = \frac{\sqrt{10}}{3}$

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 11.** Tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left| \frac{z}{z-1} \right| = 3$.

✔ Đáp số: $x^2 + y^2 - \frac{9}{4}x + \frac{9}{8} = 0$

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 12.** Gọi (H) là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa $1 \leq |z-1| \leq 2$. Tính diện tích hình (H) .

✔ Đáp số: $S_{(H)} 3\pi$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 13.** Cho số phức z có $|z| = 5$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (2+3i)z - 5$ trong mặt phẳng tọa độ là một đường tròn. Xác định tọa độ tâm của đường tròn đó.

✔ Đáp số: $I(-5; 0)$.

3. TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN SỐ PHỨC

Kết nối tri thức với cuộc sống

❖ **Ví dụ 14.** Cho số phức z có $|z| = 9$. Tập hợp các điểm M trong mặt phẳng tọa độ Oxy biểu diễn số phức $w = \bar{z} + 5i$ là một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

✔ Đáp số: $R = 9$.

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 15.** Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (1 + \sqrt{3}i)z + 2$ là một đường tròn. Tính bán kính R của đường tròn đó.

✔ Đáp số: $R = 4$.

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 16.** Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z + 1| = |1 - i - 2z|$ là đường tròn (C) . Tính bán kính R của đường tròn (C) .

✔ Đáp số: $R = \frac{\sqrt{10}}{3}$.

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 17.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để có đúng hai số phức z thỏa mãn $|z - (2m - 1) - i| = 10$ và $|z - 1 + i| = |\bar{z} - 2 + 3i|$.

✔ Đáp số: 41.

💬 Lời giải.

📁 Dạng 4. Tập hợp điểm biểu diễn số phức là đường Elip

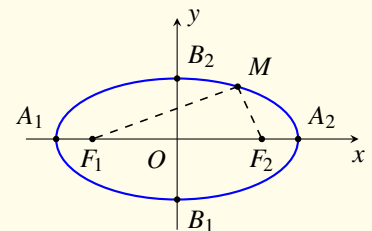
🔗 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho trước 2 điểm $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ và số dương a cho trước. Khi đó:

① Tập hợp tất cả điểm $M(x; y)$ thỏa $MF_1 + MF_2 = 2a$, với $a > c > 0$ là một Elip.

② Phương trình Elip là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, trong đó $b^2 = a^2 - c^2$.

③ Hình dạng Elip và các thông số:

- Trục lớn $A_1A_2 = 2a$; Trục bé $B_1B_2 = 2b$;
- Tiêu cự $F_1F_2 = 2c$ và $a^2 = b^2 + c^2$.
- Tọa độ $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$.
- Diện tích $S_{(E)} = \pi ab$.



🔗 Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa $|z + c| + |z - c| = 2a$ là đường Elip.

❖ **Ví dụ 18.** Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z + 2| + |z - 2| = 8$.

✔ Đáp số: $(E) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

💬 Lời giải.

✧ Ví dụ 19. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 2| + |z + 2| = 10$.

✔ Đáp số: $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$

✧ Ví dụ 20. Gọi (H) là tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ Oxy biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|\bar{z} - 2z| = 6$. Tính diện tích hình (H) .

✔ Đáp số: $S_{(H)} = 12\pi$.

✧ Ví dụ 21. Có tất cả bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + \sqrt{5}| + |z - \sqrt{5}| = 6$, biết z có mô đun bằng $\sqrt{5}$?

✔ Đáp số: 4.

💬 Lời giải.

📁 Dạng 5. Một số mô hình khác

✧ Ví dụ 22. Cho số phức $z = a + a^2i$ với $a \in \mathbb{R}$. Khi đó điểm biểu diễn của số phức liên hợp của z nằm trên đường nào?

✔ Đáp số: Parabol $y = -x^2$

💬 Lời giải.

❖ **Ví dụ 23.** Cho số phức z , biết rằng các điểm biểu diễn hình học của số phức z , iz và $z + iz$ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 18. Tính mô-đun của số phức z .

✔ Đáp số: $|z| = 6$

💬 Lời giải.

❖ **Ví dụ 24.** Gọi (H) là phần mặt phẳng chứa các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\frac{z}{16}$ và $\frac{16}{\bar{z}}$ có phần thực và phần ảo đều thuộc đoạn $[0; 1]$. Tính diện tích S của (H) .

✔ Đáp số: $S = 32(6 - \pi)$

💬 Lời giải.

B – BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Cho số phức $w = 2 + 5i$. Điểm biểu diễn của số phức $(1 - i)\overline{w}$ trong mặt phẳng Oxy là điểm nào trong các điểm sau?

- (A) $(7; 3)$. (B) $(7; -3)$. (C) $(3; 7)$. (D) $(-3; -7)$.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho M, N, P lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $2 + 3i, 1 - 2i$ và $-3 + i$. Tìm tọa độ của điểm Q sao cho tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

- (A) $Q(0; 2)$. (B) $Q(6; 0)$. (C) $Q(-2; 6)$. (D) $Q(-4; -4)$.

Câu 3. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z + 1 - 2i| = 3$.

- (A) Đường tròn tâm $I(-1; 2)$, bán kính $r = 3$. (B) Đường tròn tâm $I(1; -2)$, bán kính $r = 3$.
(C) Đường tròn tâm $I(1; 2)$, bán kính $r = 9$. (D) Đường tròn tâm $I(-1; 2)$, bán kính $r = 9$.

Câu 4. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 4i| = 5$ là

- (A) Một đường tròn. (B) Một đường thẳng. (C) Một đường parabol. (D) Một đường elip.

Câu 5. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|2z - i| = 4$ là một đường tròn có bán kính bằng

- (A) $2\sqrt{2}$. (B) $4\sqrt{2}$. (C) 4. (D) 2.

Câu 6. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 1| = |z + 2i|$ là

- (A) Đường tròn. (B) Đường thẳng. (C) Parabol. (D) Hypebol.

Câu 7. Tìm tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z biết số phức $(z - i)(2 + i)$ là một số thuần ảo.

- (A) Đường thẳng $2x - y + 1 = 0$. (B) Đường thẳng $x + 2y - 2 = 0$.
(C) Đường thẳng $2x + y - 1 = 0$. (D) Đường thẳng $2x - y - 1 = 0$.

Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn $|z + i| = 1$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (3 + 4i)z + 2 + i$ là một đường tròn tâm I . Điểm I có tọa độ là

- (A) $(6; -2)$. (B) $(6; 2)$. (C) $(2; 1)$. (D) $(-2; -1)$.

Câu 9. Trong mặt phẳng Oxy , tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - (2 - 3i)| \leq 2$.

- (A) Một đường thẳng. (B) Một hình tròn. (C) Một đường tròn. (D) Một đường Elip.

Câu 10. Gọi (H) là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa $1 \leq |z - 1| \leq 2$ trong mặt phẳng phức. Tính diện tích hình (H) .

- (A) 2π . (B) 3π . (C) 4π . (D) 5π .

Câu 11. Cho số phức z có $|z| = 9$. Tập hợp các điểm M trong mặt phẳng tọa độ Oxy biểu diễn số phức $w = \bar{z} + 5i$ là một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

- (A) 9. (B) $\frac{9}{5}$. (C) 3. (D) $9\sqrt{2}$.

Câu 12. Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 12$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (8 - 6i)z + 2i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

- (A) $r = 120$. (B) $r = 122$. (C) $r = 12$. (D) $r = 24\sqrt{7}$.

Câu 13. Cho số phức z thỏa mãn $|z + 1 - i| = |z - 1 + 2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Viết phương trình đường thẳng đó.

- (A) $4x + 6y - 3 = 0$. (B) $4x - 6y + 3 = 0$. (C) $4x - 6y - 3 = 0$. (D) $4x + 6y + 3 = 0$.

Câu 14. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{5}$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (2 + i)z - 3i$ là một đường tròn có bán kính bằng r . Tìm bán kính r .

- (A) $r = \sqrt{5}$. (B) $r = 5$. (C) $r = \sqrt{10}$. (D) $r = 25$.

Câu 15. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 3$. Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = z(1 + i)$ là đường tròn nào dưới đây?

- (A) Tâm $I(3; -1)$, $R = 3\sqrt{2}$. (B) Tâm $I(-3; 1)$, $R = 3$.
(C) Tâm $I(-3; 1)$, $R = 3\sqrt{2}$. (D) Tâm $I(3; -1)$, $R = 3$.

Câu 16. Cho số phức w thỏa mãn $|w + 2| \leq 1$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\bar{z} = 2w + 1 - i$ là một hình tròn. Tính diện tích S của hình tròn đó.

- (A) $S = 2\pi$. (B) $S = 4\pi$. (C) 9π . (D) π .

Câu 17. Tập hợp các điểm biểu diễn của z thỏa $|\bar{z} - i| = |z + 2 - 3i|$ là một đường thẳng có phương trình

- (A) $x - 2y + 3 = 0$. (B) $x - 2y - 4 = 0$. (C) $x + 2y + 3 = 0$. (D) $x + 2y + 4 = 0$.

Câu 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $z^2 + (\bar{z})^2 = 0$ là

- (A) Trục hoành và trục tung.
(B) Đường phân giác của góc phần tư thứ nhất và thứ ba.
(C) Trục hoành.
(D) Các đường phân giác của góc tạo bởi hai trục tọa độ.

Câu 19. Xét các số phức z thỏa mãn $\frac{z+2}{z-2i}$ là các số thuần ảo. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng

- (A) 1. (B) $\sqrt{2}$. (C) $2\sqrt{2}$. (D) 2.

Câu 20. Cho số phức z thỏa mãn $(1 + z)^2$ là số thực. Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là

- (A) Hai đường thẳng. (B) Đường thẳng. (C) Parabol. (D) Đường tròn.

Câu 21. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|(1 + i)z - 4 + 2i| = 4\sqrt{2}$ là một đường tròn. Xác định tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn đó.

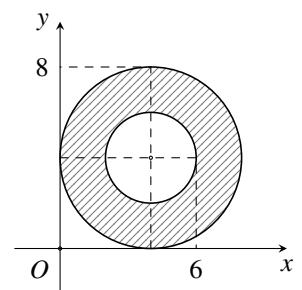
- (A) $I(1; -3)$, $R = 4$. (B) $I(4; -2)$, $R = 4\sqrt{2}$. (C) $I(1; -3)$, $R = 2$. (D) $I(-1; 3)$, $R = 4$.

Câu 22. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z-i}{z+i} \right| = 1$.

- (A) Hai đường thẳng $y = \pm 1$, trừ điểm $(0; -1)$.
(B) Hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng $x = \pm 1, y = \pm 1$.
(C) Đường tròn $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.
(D) Trục Ox .

Câu 23. Phần gạch trong hình vẽ bên là hình biểu diễn của tập hợp các số phức thỏa mãn điều kiện nào trong các điều kiện sau đây

- (A) $6 \leq |z| \leq 8$. (B) $2 \leq |z + 4 + 4i| \leq 4$.
(C) $2 \leq |z - 4 - 4i| \leq 4$. (D) $4 \leq |z - 4 - 4i| \leq 16$.



Câu 24. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $z + \bar{z} = |z|$ là

- (A) hai đường thẳng. (B) một parabol. (C) một đường thẳng. (D) một ê-líp.

Câu 25. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z|^2 + 3z + 3\bar{z} = 0$ là đường tròn có chu vi bằng

- (A) $\frac{3\pi}{2}$. (B) 3π . (C) 9π . (D) $\frac{9\pi}{4}$.

Câu 26. Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z sao cho z^2 là số thuần ảo.

- (A) Trục Ox .
 (B) Hai đường thẳng $y = x$, $y = -x$, bỏ đi điểm $O(0;0)$.
 (C) Hai đường thẳng $y = x$, $y = -x$.
 (D) Trục Oy .

Câu 27. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , gọi (H) là hình biểu diễn tập hợp các số phức z thỏa mãn $|7z - \bar{z}| \leq 10$. Diện tích của hình (H) bằng

- (A) $\frac{5\pi}{2}$. (B) $\frac{25\pi}{12}$. (C) $\frac{7\pi}{2}$. (D) 5π .

Câu 28. Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 2i^{2020}| = |\bar{z} - 1 + 2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 2\bar{z} - 1 + 4i$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Khoảng cách từ $I(2; -3)$ đến đường thẳng đó bằng

- (A) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$. (B) $\frac{18\sqrt{5}}{5}$. (C) $\frac{10\sqrt{5}}{5}$. (D) $\frac{18\sqrt{13}}{13}$.

Câu 29. Cho hai số phức z, w thay đổi thỏa mãn $|z| = 3$, $|z - w| = 1$. Biết tập hợp điểm của số phức w là hình phẳng H . Tính diện tích S của hình H .

- (A) $S = 20\pi$. (B) $S = 16\pi$. (C) $S = 4\pi$. (D) $S = 12\pi$.

Câu 30. Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho với mỗi $m \in S$ có đúng một số phức thỏa mãn $|z - m| = 4$ và $\frac{z}{z-6}$ là số thuần ảo. Tính tổng của các phần tử của tập S .

- (A) 0. (B) 12. (C) 6. (D) 14.

Câu 31. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 2$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (1-i)\bar{z} + 2i$ là

- (A) một đường tròn. (B) một đường thẳng.
 (C) một elip. (D) một hypebol hoặc parabol.

Câu 32. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|2z - i| = 6$ là một đường tròn có bán kính bằng

- (A) 3. (B) $6\sqrt{2}$. (C) 6. (D) $3\sqrt{2}$.

Câu 33. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\left| \frac{(12-5i)z + 17 + 7i}{z - 2 - i} \right| = 13$ có phương trình nào sau đây?

- (A) (d): $6x + 4y - 3 = 0$. (B) (d): $x + 2y - 1 = 0$.
 (C) (C): $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$. (D) (C): $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$.

Câu 34. Cho số phức z thay đổi, thỏa mãn $|z - i| = |z - 1 + 2i|$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $\omega = z + 2i$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Phương trình đường thẳng đó là

- (A) $x - 4y + 3 = 0$. (B) $x + 3y + 4 = 0$. (C) $x - 3y + 4 = 0$. (D) $-x + 3y + 4 = 0$.

Câu 35. Cho số phức z thỏa $|z + 2| + |z - 2| = 4$. Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ là

- (A) một đường elip. (B) một đường parabol. (C) một đoạn thẳng. (D) một đường tròn.

Câu 36. Cho số phức z thỏa $|z + 4| + |z - 4| = 10$. Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ là một đường Elip. Tính diện tích hình Elip đó.

- (A) $S = 14\pi$. (B) $S = 15\pi$. (C) $S = 20\pi$. (D) $S = 12\pi$.

Câu 37. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i|$ là

- (A) Một đường thẳng. (B) Một đường tròn. (C) Một parabol. (D) Một điểm.

Câu 38. Cho số phức z thỏa mãn $\left| \frac{2\bar{z} - z + 3i}{z + i} \right| = 3$. Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức là

- (A) Một Parabol. (B) Một đường thẳng. (C) Một đường tròn. (D) Một Elip.

Câu 39. Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 5 - 3i| = 5$, đồng thời $|z_1 - z_2| = 8$. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w = z_1 + z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình nào dưới đây?

A $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

B $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 36$.

C $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 16$.

D $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 9$.

Câu 40. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 không phải là số thuần thực, thỏa mãn điều kiện $z_1 + z_2 = 4$ và $|z_1 - 2| = |z_2 - 2| = |z_3 - 2| = 1$. Tính giá trị biểu thức $T = |z_3 - z_1|^2 + |z_3 - z_2|^2$.

A $T = 12$.

B $T = 1$.

C $T = 4$.

D $T = 8$.

—HẾT—

BÀI 4. MAX, MIN CỦA MÔ-ĐUN SỐ PHỨC

A – CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Tìm max, min bằng phương pháp đại số

- Biểu diễn vấn đề cần xét max (min) theo một ẩn.
- Khảo sát hàm số, tìm kết quả.

⇨ **Ví dụ 1.** Cho số phức $z = \cos 2\alpha + (\sin \alpha - \cos \alpha)i$ với $\alpha \in \mathbb{R}$. Giá trị lớn nhất của $|z|$ là

A $\frac{4}{3}$.

B $\frac{3}{2}$.

C $\sqrt{2}$.

D 2.

 **Lời giải.**

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

⇨ **Ví dụ 2.** Xét các số phức z thỏa mãn $|z + 2i| = |z - 1 - 2i|$. Gọi w là số phức thỏa mãn điều kiện $w = (1 + i)z + 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |w|$ bằng

A $\frac{1}{3}$.

B $\frac{1}{5}$.

C $\frac{5}{\sqrt{34}}$.

D $\frac{5}{\sqrt{41}}$.

 **Lời giải.**

⇨ **Ví dụ 3.** Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 1 - 2i| = |z - i|$, tìm số phức z có mô-đun nhỏ nhất.

A $z = -1 + i$.

B $z = -1 - i$.

C $z = 1 - i$.

D $z = 1 + i$.

 **Lời giải.**

Dạng 2. Tìm max, min bằng phương pháp hình học

 Giả sử điểm $M(x; y)$ biểu diễn cho số phức $z = x + yi$. Khi đó:

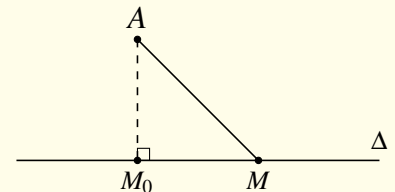
① $|z| = OM$.

② $|z - (x_0 + y_0i)| = AM$, với $A(x_0; y_0)$.

 Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức z là điểm $M(x; y)$ thuộc $\Delta : ax + by + c = 0$. Khi đó

① $|z|_{\min} = d(O, \Delta) = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

② $|z - (x_0 + y_0i)|_{\min} = d(A, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, với $A(x_0; y_0)$.



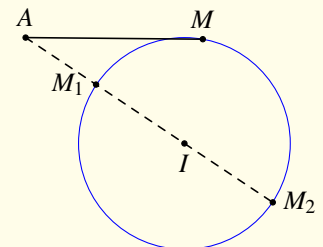
 Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức z là điểm $M(x; y)$ thuộc đường tròn (C) có tâm $I(a; b)$, bán kính R . Khi đó

① $|z|_{\min} = |OI - R|$;

② $|z|_{\max} = OI + R$.

③ $|z - (x_0 + y_0i)|_{\min} = |AI - R|$, với $A(x_0; y_0)$;

④ $|z - (x_0 + y_0i)|_{\max} = AI + R$, với $A(x_0; y_0)$.



❖ Ví dụ 4.

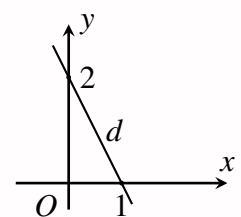
Trên mặt phẳng tọa độ, đường thẳng d trong hình vẽ bên là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z . Khi đó $|z|$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A $\frac{5}{5}$.

B $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

C $\sqrt{5}$.

D $\frac{\sqrt{5}}{2}$.



 Lời giải.

❖ **Ví dụ 5.** Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 1 - 2i| = |z - i|$, tìm số phức z có mô-đun nhỏ nhất.

A $z = -1 + i$.

B $z = -1 - i$.

C $z = 1 - i$.

D $z = 1 + i$.

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 6.** Xét các số phức z thỏa mãn $|z + 4| + |z - 4| = 10$. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$ lần lượt là

A 10 và 4.

B 5 và 4.

C 4 và 3.

D 5 và 3.

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 7.** Cho z là một số phức mà $(z + 1 - 2i)(\bar{z} + 3)$ là một số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất P_0 của biểu thức $P = |z - 3 + 2i|$.

A $P_0 = 4\sqrt{2}$.

B $P_0 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

C $P_0 = \sqrt{2}$.

D $P_0 = 0$.

 **Lời giải.**

🔗 **Ví dụ 8.** Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$ biết rằng z thỏa mãn điều kiện $\left| \frac{-2-3i}{3-2i}z + 1 \right| = 1$.

(A) 2.

(B) 3.

(C) $\sqrt{2}$.

(D) 1.

💬 Lời giải.

🔗 **Ví dụ 9.** Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 3i| = 2$. Giá trị lớn nhất của $|z - i|$ bằng

(A) 7.

(B) 9.

(C) 6.

(D) 8.

💬 Lời giải.



❖ **Ví dụ 10.** Cho hai số phức z, z' thỏa mãn $|z + 5| = 5$ và $|z' + 1 - 3i| = |z' - 3 - 6i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z - z'|$.

(A) $\frac{5}{2}$.

(B) $\frac{5}{4}$.

(C) $\sqrt{10}$.

(D) $3\sqrt{10}$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 11.** Cho z là số phức thỏa mãn điều kiện $\left| \frac{z+3}{1-2i} + 2 \right| = 1$ và w là số thuần ảo. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z - w|$ bằng

(A) $5 - \sqrt{5}$.

(B) $\sqrt{5}$.

(C) $2\sqrt{2}$.

(D) $1 + \sqrt{3}$.

💬 **Lời giải.**

↔ **Ví dụ 12.** Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$. Môđun của số phức $w = M + mi$ là

(A) $|w| = 3\sqrt{137}$.

(B) $|w| = \sqrt{1258}$.

(C) $|w| = 2\sqrt{309}$.

(D) $|w| = 2\sqrt{314}$.

 **Lời giải.**

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

B – BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Trong tất cả các số phức có dạng $z = m - 2 + mi$ ($m \in \mathbb{R}$), hãy tìm phần thực của số phức z có mô-đun nhỏ nhất.

- (A) 1. (B) 2. (C) -1. (D) 0.

Câu 2. Trong các số phức z thỏa mãn $|z - 1 + i| = |\bar{z} + 1 - 2i|$, số phức z có mô-đun nhỏ nhất có phần ảo là

- (A) $\frac{3}{10}$. (B) $\frac{3}{5}$. (C) $-\frac{3}{5}$. (D) $-\frac{3}{10}$.

Câu 3. Cho số phức z thỏa mãn $(z + 3 - i)(\bar{z} + 1 + 3i)$ là một số thực. Tính giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

- (A) $\sqrt{2}$. (B) $3\sqrt{2}$. (C) 4. (D) $2\sqrt{2}$.

Câu 4. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $(z - 1)(\bar{z} + 2i)$ là số thực. Hãy tìm số phức z có mô-đun nhỏ nhất.

- (A) $z = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$. (B) $z = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$. (C) $z = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$. (D) $z = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$.

Câu 5. Xét các số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

- (A) 4. (B) $2\sqrt{2}$. (C) 10. (D) 8.

Câu 6. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 1 - 2i| = |z - i|$, tìm số phức z có mô-đun nhỏ nhất.

- (A) $z = -1 + i$. (B) $z = -1 - i$. (C) $z = 1 - i$. (D) $z = 1 + i$.

Câu 7. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 2i| = |z - 2 + i|$. Đặt $w = z + 2 - 3i$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|w|$.

- (A) $\frac{11}{10}$. (B) $\sqrt{10}$. (C) $\frac{121}{10}$. (D) $\frac{11}{\sqrt{10}}$.

Câu 8. Trong các số phức z thỏa mãn $|2z + \bar{z}| = |z - i|$, tìm số phức có phần thực không âm sao cho $|z^{-1}|$ đạt giá trị lớn nhất.

- (A) $z = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{i}{2}$. (B) $z = \frac{i}{2}$. (C) $z = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{8}$. (D) $z = \frac{\sqrt{6}}{8} + \frac{i}{8}$.

Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn $\frac{z}{1+z}$ là số thuần ảo. Số phức $z^2 + 4$ có mô-đun nhỏ nhất bằng

- (A) $\frac{16\sqrt{17}}{17}$. (B) 4. (C) $\frac{4\sqrt{13}}{13}$. (D) $\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

Câu 10. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z + \frac{4i}{z}\right| = 2$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$. Tính $M + m$.

- (A) 2. (B) $2\sqrt{5}$. (C) $\sqrt{13}$. (D) $\sqrt{5}$.

Câu 11. Cho số phức $z = a + bi$ với $|z| = 5$ và $b > 0$ sao cho $|(1 + 2i)z^3 - z^5|$ là lớn nhất. Đặt $z^4 = c + di$, tính tổng $c + d$.

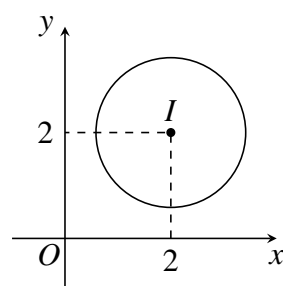
- (A) 100. (B) 85. (C) 125. (D) 52.

Câu 12. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - z_2| = 1$ và $|z_1 + z_2| = 3$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z_1| + |z_2|$.

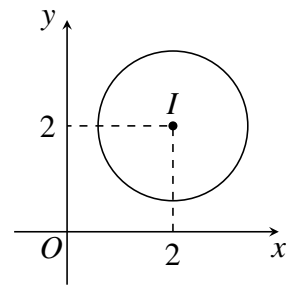
- (A) $T = 8$. (B) $T = 10$. (C) $T = 4$. (D) $T = \sqrt{10}$.

Câu 13. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức z thuộc đường tròn tâm I và bán kính bằng $\sqrt{2}$ như hình bên. Tìm số phức z có mô-đun nhỏ nhất.

- (A) 1. (B) $\sqrt{2}$.
(C) 2. (D) $\sqrt{3}$.



Câu 14. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức z thuộc đường tròn tâm I và bán kính bằng $\sqrt{2}$ như hình bên. Tìm số phức z có mô-đun lớn nhất.



- (A) $3\sqrt{2}$. (B) $2\sqrt{2}$.
(C) 2. (D) $2\sqrt{3}$.

Câu 15. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1| + |z_2|$.

- (A) $\sqrt{26}$. (B) $2\sqrt{13}$. (C) $\sqrt{13}$. (D) $2\sqrt{26}$.

Câu 16. Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) có mô-đun nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện $|z - 4 - 2i| = |z - 2|$. Tính $P = x^2 + y^2$.

- (A) 32. (B) 16. (C) 8. (D) 10.

Câu 17. Trong mặt phẳng tọa độ, hãy tìm số phức z có mô-đun nhỏ nhất, biết rằng số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - 4i| = \sqrt{5}$.

- (A) $z = -1 - 2i$. (B) $z = 1 - 2i$. (C) $z = -1 + 2i$. (D) $z = 1 + 2i$.

Câu 18. Cho số phức z thay đổi thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - 3i| = 3$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $|z + 3 + 2i|$. Tính $S = M^2 + m^2$.

- (A) $S = 36$. (B) $S = 18$. (C) $S = 5$. (D) $S = 118$.

Câu 19. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5}$. Tìm mô-đun lớn nhất của số phức $w = z + 1 + i$.

- (A) $2\sqrt{5}$. (B) $2\sqrt{15}$. (C) $2\sqrt{3}$. (D) $2\sqrt{6}$.

Câu 20. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 2i| = 4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z + 2 + i|$. Tính $S = M^2 + m^2$.

- (A) 34. (B) 82. (C) 68. (D) 36.

Câu 21. Cho hai số phức z và w , biết chúng thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $\left| \frac{(1+i)z}{1-i} + 2 \right| = 1$ và $w = iz$.

Tìm giá trị lớn nhất của $M = |z - w|$.

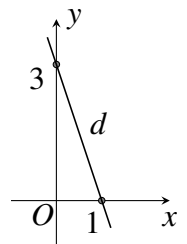
- (A) $M = 3\sqrt{3}$. (B) $M = 3$. (C) $M = 3\sqrt{2}$. (D) $M = 2\sqrt{3}$.

Câu 22. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2| + |z + 2| = 6$. Đặt $m = \min |z|$ và $M = \max |z|$. Tính giá trị biểu thức $T = M^2 + 3m^2$.

- (A) $T = 17$. (B) $T = 32$. (C) $T = 21$. (D) $T = 24$.

Câu 23. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức z thuộc đường thẳng như hình bên. Tìm mô-đun nhỏ nhất của số phức z .

- (A) $\sqrt{10}$. (B) $\frac{3}{\sqrt{10}}$.
(C) $\sqrt{2}$. (D) $\sqrt{3}$.



Câu 24. Cho số phức z có điểm biểu diễn nằm trên đường thẳng $3x - 4y - 3 = 0$. Giá trị $|z|$ nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

- (A) $\frac{1}{5}$. (B) $\frac{3}{5}$. (C) $\frac{4}{5}$. (D) $\frac{2}{5}$.

Câu 25. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng d có phương trình $x - y + 10 = 0$ và hai điểm A, B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z_A = 1 + 3i$, $z_B = -4 + 2i$. Tìm số phức z sao cho điểm biểu diễn M của nó thuộc đường thẳng d và $MA + MB$ bé nhất.

- (A) $z = 9 - i$. (B) $z = -5 + 5i$. (C) $z = -9 + i$. (D) $z = -11 - i$.

Câu 26. Xét số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z - 1 + i|$. Tính $P = m + M$.

- (A) $P = \sqrt{13} + \sqrt{73}$. (B) $P = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$. (C) $P = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}$. (D) $P = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$.

Câu 27. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3| = 2|z|$ và giá trị lớn nhất của $|z - 1 + 2i|$ bằng $a + b\sqrt{2}$ với a, b là các số hữu tỷ. Tính $a + b$.

- (A) 4. (B) $4\sqrt{2}$. (C) 3. (D) $\frac{4}{3}$.

Câu 28. Cho số phức z thỏa mãn $|z| \leq 1$. Đặt $A = \frac{2z - i}{2 + iz}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $|A| < 1$. (B) $|A| \leq 1$. (C) $|A| \geq 1$. (D) $|A| > 1$.

Câu 29. Cho số phức z thỏa mãn $z \cdot \bar{z} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z^3 + 3z + \bar{z}| - |z + \bar{z}|$.

- (A) $\frac{15}{4}$. (B) $\frac{3}{4}$. (C) $\frac{13}{4}$. (D) 3.

Câu 30. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2i| = |z + 2|$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 2i| + |z - 5 + 9i|$.

- (A) $\sqrt{70}$. (B) $4\sqrt{5}$. (C) $\sqrt{74}$. (D) $3\sqrt{10}$.

Câu 31. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$ biết rằng z thỏa mãn điều kiện $\left| \frac{-2 - 3i}{3 - 2i}z + 1 \right| = 1$.

- (A) 2. (B) 3. (C) $\sqrt{2}$. (D) 1.

Câu 32. Cho hai số phức z, z' thỏa mãn $|z + 5| = 5$ và $|z' + 1 - 3i| = |z' - 3 - 6i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z - z'|$.

- (A) $\frac{5}{2}$. (B) $\frac{5}{4}$. (C) $\sqrt{10}$. (D) $3\sqrt{10}$.

Câu 33. Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 3 + 3i| = \sqrt{2}$. Tính $P = a + b$ khi $|z - 1 + 3i| + |z - 3 + 5i|$ đạt giá trị lớn nhất.

- (A) $P = -2$. (B) $P = -8$. (C) $P = 8$. (D) $P = 2$.

Câu 34. Cho z là số phức thỏa mãn điều kiện $\left| \frac{z + 3}{1 - 2i} + 2 \right| = 1$ và w là số thuần ảo. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z - w|$ bằng

- (A) $5 - \sqrt{5}$. (B) $\sqrt{5}$. (C) $2\sqrt{2}$. (D) $1 + \sqrt{3}$.

Câu 35. Trong mặt phẳng Oxy , xét các số phức $z, \bar{z}, z + \bar{z}$ lần lượt có điểm biểu diễn là A, B, C . Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$, biết tứ giác $OACB$ có diện tích bằng 24.

- (A) $2\sqrt{6}$. (B) $2\sqrt{3}$. (C) 3. (D) $4\sqrt{3}$.

Câu 36. Xét hai số phức z và z' thỏa mãn $|z + \bar{z} - 10 - 2i| = |z' + 1 + 2i| = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z + z'|$.

- (A) 1. (B) $\frac{1}{2}$. (C) 4. (D) 2.

Câu 37. Xét các số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z - 3 + i}{\sqrt{3} - i} \right| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = |z - 7 + i| + 2|z - 2 - 3i|$.

- (A) $3\sqrt{5}$. (B) $4\sqrt{5}$. (C) $4\sqrt{3}$. (D) $2\sqrt{3}$.

Câu 38. Xét các số phức z thỏa mãn $|z - 1 - i| = 5$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2|z - 8i| - |z - 7 - 9i|$.

(A) $\sqrt{509}$.

(B) $10\sqrt{2}$.

(C) $5\sqrt{2}$.

(D) $5\sqrt{5}$.

Câu 39. Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa $|z - 3 - 4i| = 2$ và $|z_1 - z_2| = 1$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1|^2 - |z_2|^2$.

(A) $-6 - 2\sqrt{5}$.

(B) -5 .

(C) $-\sqrt{85}$.

(D) -10 .

Câu 40. Cho số phức z thay đổi, thỏa mãn điều kiện $|z + 3 - 4i| \leq |3 - 4i|$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $F = |z + 1 - 2i|^2 - |\bar{z} - 2 + i|^2$. Hãy tính $P = 2M + m$.

(A) $P = -78 + 10\sqrt{10}$.

(B) $P = -52$.

(C) $P = -78 - 10\sqrt{10}$.

(D) $P = 78 + 10\sqrt{10}$.

BÀI 5. ĐỀ ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG

A – ĐỀ ÔN TẬP SỐ 1

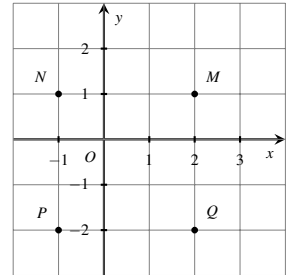
Câu 1. Cho số phức $z = 5 - 3i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$.

- (A) Phần thực là -3 , phần ảo là 5 . (B) Phần thực là 5 , phần ảo là -3 .
(C) Phần thực là 5 , phần ảo là 3 . (D) Phần thực là 5 , phần ảo là $3i$.

Câu 2.

Trong hình bên, điểm nào trong các điểm M, N, P, Q biểu diễn cho số phức có môđun bằng $2\sqrt{2}$?

- (A) Điểm N . (B) Điểm M .
(C) Điểm P . (D) Điểm Q .



Câu 3. Số phức liên hợp của số phức $z = 3 + 2i$ là

- (A) $\bar{z} = 3 - 2i$. (B) $\bar{z} = 2 + 3i$. (C) $\bar{z} = 2 - 3i$. (D) $\bar{z} = -2 + 3i$.

Câu 4. Số nào trong các số sau là số thực?

- (A) $(1 + i\sqrt{3})^2$. (B) $\frac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{2} - i}$.
(C) $2 + i\sqrt{5} + \frac{9}{2 + i\sqrt{5}}$. (D) $(\sqrt{3} + 2i) - (\sqrt{3} - 2i)$.

Câu 5. Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $z_1 = -1 + 3i$, $z_2 = 1 + 5i$, $z_3 = 3 + i$. Tìm số phức có điểm biểu diễn là trọng tâm của tam giác ABC .

- (A) $1 + 3i$. (B) $3 + 9i$. (C) $-1 + 3i$. (D) $1 - 3i$.

Câu 6. Tìm các số thực a, b thỏa mãn $2a + (b + i)i = 1 + 2i$ với i là đơn vị ảo.

- (A) $a = 0, b = 2$. (B) $a = \frac{1}{2}, b = 1$. (C) $a = 0, b = 1$. (D) $a = 1, b = 2$.

Câu 7. Cho số phức $z = 1 - 2i$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- (A) Số phức z là số thuần ảo. (B) Phần ảo của số phức z là $-2i$.
(C) Phần thực của số phức z là 1 . (D) Phần ảo của số phức z là 2 .

Câu 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tọa độ điểm M biểu diễn số phức $z = 4 - i$ là

- (A) $M(4; 1)$. (B) $M(-4; 1)$. (C) $M(4; -1)$. (D) $M(-4; -1)$.

Câu 9. Trên mặt phẳng phức, cho điểm A biểu diễn số phức $-2 + 3i$, điểm B biểu diễn số phức $4 - 5i$. Gọi M là trung điểm của AB . Khi đó, điểm M biểu diễn số phức nào trong các số phức sau

- (A) $3 - 4i$. (B) $3 + 4i$. (C) $1 + i$. (D) $1 - i$.

Câu 10. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z - 1| = |z + \bar{z} + 2|$ trên mặt phẳng tọa độ là một

- (A) đường thẳng. (B) đường tròn. (C) parabol. (D) hypebol.

Câu 11. Tính mô-đun của số phức $z = 3 + 4i$.

- (A) 3 . (B) 5 . (C) 7 . (D) $\sqrt{7}$.

Câu 12. Số phức z nào sau đây thỏa mãn $|z| = \sqrt{5}$ và z là số thuần ảo?

- (A) $z = \sqrt{5}$. (B) $z = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$. (C) $z = 5i$. (D) $z = -\sqrt{5}i$.

Câu 13. Tìm mô-đun của số phức z thỏa mãn $2z(1 + i) + (\bar{z} + 2)(1 - i) = -1 + 5i$.

- (A) 7 . (B) 5 . (C) 12 . (D) 25 .

Câu 14. Biết số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $M = |z + 2|^2 - |z - i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính mô-đun của số phức $z + i$.

- (A) $|z + i| = \sqrt{61}$. (B) $|z + i| = 5\sqrt{2}$. (C) $|z + i| = 3\sqrt{5}$. (D) $|z + i| = 2\sqrt{41}$.

Câu 15. Số phức liên hợp của số phức $z = 4i - 7$ là

- (A) $-7 - 4i$. (B) $-7 + 4i$. (C) $7 + 4i$. (D) $4 + 7i$.

Câu 16. Số phức liên hợp của z thỏa mãn bất đẳng thức $(1 + i)z = -1 + 3i$ là

- (A) $\bar{z} = 1 - 2i$. (B) $\bar{z} = 1 + 2i$. (C) $\bar{z} = -3 + 3i$. (D) $\bar{z} = 3 + 3i$.

Câu 17. Rút gọn biểu thức $P = i^{2000} + i^{2021}$.

- (A) $P = 1 + i$. (B) $P = 1 - i$. (C) $P = -1 + i$. (D) $P = -1 - i$.

Câu 18. Tìm số phức $w = 3z + \bar{z}$ biết $z = 1 + 2i$.

- (A) $w = 4 + 4i$. (B) $w = 4 - 4i$. (C) $w = 2 - 4i$. (D) $w = 2 + 4i$.

Câu 19. Cho số phức $z = 7 - i$. Tìm số phức $w = \frac{1}{z}$.

- (A) $w = \frac{7}{50} - \frac{1}{50}i$. (B) $w = -\frac{1}{50} + \frac{7}{50}i$. (C) $w = \frac{1}{50} + \frac{7}{50}i$. (D) $w = \frac{7}{50} + \frac{1}{50}i$.

Câu 20. Tìm số phức z có phần ảo dương thỏa $z^2 - 2z + 10 = 0$.

- (A) $z = 1 + 3i$. (B) $z = -1 + 3i$. (C) $z = 2 + 6i$. (D) $z = -2 + 6i$.

Câu 21. Kí hiệu z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 6z + 10 = 0$ (z_1 có phần ảo là số âm). Tìm số phức liên hợp của số phức $w = 3z_1^2 - 2z_2^2 + 1$.

- (A) $\bar{w} = 9 + 30i$. (B) $\bar{w} = 9 - 30i$. (C) $\bar{w} = 9 - 10i$. (D) $\bar{w} = 30 - 9i$.

Câu 22. Kí hiệu z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm của phương trình $z^4 + z^2 - 6 = 0$. Tính $S = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$.

- (A) $S = 2\sqrt{3}$. (B) $S = 2(\sqrt{2} - \sqrt{3})$. (C) $S = 2\sqrt{2}$. (D) $S = 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

Câu 23. Biết $z_1 = 2 - i$ là một nghiệm phức của phương trình $z^2 + bz + c = 0$ ($b, c \in \mathbb{R}$), gọi nghiệm còn lại là z_2 . Tìm số phức $w = bz_1 + cz_2$.

- (A) $w = 18 - i$. (B) $w = 18 + i$. (C) $w = 2 - 9i$. (D) $w = 2 + 9i$.

Câu 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z - (8 - 9i)| = 3$ là đường tròn có tọa độ tâm I và bán kính R lần lượt là

- (A) $I(8; -9), R = 3$. (B) $I(8; 9), R = 3$. (C) $I(-8; 9), R = 3$. (D) $I(-8; -9), R = 3$.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để số phức $z = \frac{m + 2i}{m - 2i}$ có phần thực dương.

- (A) $m > 2$. (B) $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$. (C) $-2 < m < 2$. (D) $m < -2$.

B – ĐỀ ÔN TẬP SỐ 2

Câu 1. Cho hai số phức $z_1 = a + bi$ và $z_2 = 3 + 15i$. Điều kiện để $z_1 = z_2$ là

- (A) $a = 3$ và $b = 15$. (B) $a = 6$ và $b = 15$. (C) $a = 15$ và $b = 3$. (D) $a = 3$ và $b = 30$.

Câu 2. Cho số phức $z = -3 + 2i$. Tổng phần thực và phần ảo của số phức z bằng

- (A) -1 . (B) $-i$. (C) -5 . (D) $-5i$.

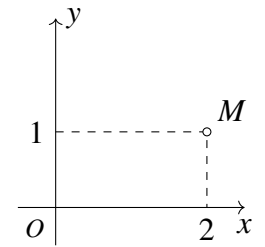
Câu 3. Cho số phức $z = 4 - 2i$ khi đó điểm M biểu diễn số phức z trên mặt phẳng có tọa độ là

- (A) $M(4; -2i)$. (B) $M(4; -2)$. (C) $M(-2; 4)$. (D) $M(-2i; 4)$.

Câu 4.

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z . Tìm phần thực và phần ảo của số phức z .

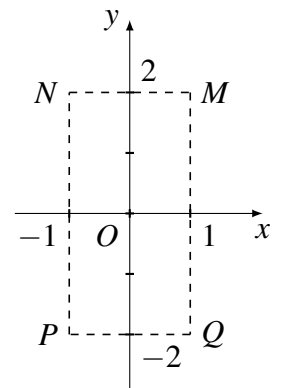
- (A) Phần thực là 1 và phần ảo là 2. (B) Phần thực là 1 và phần ảo là $2i$.
(C) Phần thực là 2 và phần ảo là 1. (D) Phần thực là 2 và phần ảo là i .



Câu 5.

Cho số phức z thỏa mãn $3z = 3 + 6i$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q ở hình dưới đây?

- (A) Điểm Q .
(B) Điểm P .
(C) Điểm M .
(D) Điểm N .



Câu 6. Tính môđun của số phức $z = 4 - 3i$.

- (A) $|z| = 25$. (B) $|z| = 7$. (C) $|z| = \sqrt{7}$. (D) $|z| = 5$.

Câu 7. Nếu môđun của số phức z bằng r ($r > 0$) thì môđun của số phức $(1 - i)^2 z$ bằng

- (A) $r\sqrt{2}$. (B) $2r$. (C) $4r$. (D) r .

Câu 8. Cho số phức $z = 1 + i\sqrt{3}$, số phức liên hợp của số phức z là

- (A) $\bar{z} = -1 + i\sqrt{3}$. (B) $\bar{z} = \sqrt{3} + i$. (C) $\bar{z} = -\sqrt{3} - i$. (D) $\bar{z} = 1 - i\sqrt{3}$.

Câu 9. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = (-2 + 3i)(7 - 8i)$.

- (A) $\bar{z} = 10 - 37i$. (B) $\bar{z} = -10 - 37i$. (C) $\bar{z} = 38 - 37i$. (D) $\bar{z} = -38 - 37i$.

Câu 10. Cho số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $(1 + 2i)z - 4i = 7$. Khi đó $a - b$ là

- (A) -1 . (B) 1 . (C) 3 . (D) 5 .

Câu 11. Tìm môđun của số phức z biết $\bar{z}(1 + 3i) + 5i = 3$

- (A) $|z| = \frac{\sqrt{85}}{5}$. (B) $|z| = \frac{13}{5}$. (C) $|z| = \frac{\sqrt{97}}{5}$. (D) $|z| = \frac{7}{5}$.

Câu 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi M là điểm biểu diễn số phức $z = 3 - 4i$, N là điểm biểu diễn cho số phức $z' = \frac{1+i}{2}z$. Tính diện tích của tam giác OMN .

- (A) $S = \frac{25}{4}$. (B) $S = \frac{25}{2}$. (C) $S = \frac{15}{4}$. (D) $S = \frac{15}{2}$.

Câu 13. Tính môđun của số phức z thỏa $(1 - 2i)z - 3 + 2i = 5$.

- (A) $|z| = \frac{3\sqrt{85}}{5}$. (B) $|z| = \frac{4\sqrt{85}}{5}$. (C) $|z| = \frac{\sqrt{85}}{5}$. (D) $|z| = \frac{2\sqrt{85}}{5}$.

Câu 14. Cho số phức $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = -2 - 2i$. Tìm môđun của số phức $z_1 - z_2$.

- (A) $|z_1 - z_2| = 5$. (B) $|z_1 - z_2| = 1$. (C) $|z_1 - z_2| = \sqrt{17}$. (D) $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{2}$.

Câu 15. Số phức nghịch đảo của số phức $z = 1 + 3i$ là

- (A) $\frac{1}{10}(1 + 3i)$. (B) $\frac{1}{10}(1 - 3i)$. (C) $1 - 3i$. (D) $\frac{1}{\sqrt{10}}(1 + 3i)$.

Câu 16. Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z - 1| = |z + 3 - 2i|$ và $w = z + m + i$ với $m \in \mathbb{R}$ là tham số. Giá trị của m để ta luôn có $|w| \geq 2\sqrt{5}$ là

- (A) $\begin{cases} m \geq 7 \\ m \leq 3 \end{cases}$. (B) $\begin{cases} m \geq 7 \\ m \leq -3 \end{cases}$. (C) $-3 \leq m < 7$. (D) $3 \leq m \leq 7$.

Câu 17. Tìm nghiệm phức của phương trình: $x^2 + 2x + 2 = 0$.

- (A) $x_1 = 2 - i; x_2 = 2 + i$. (B) $x_1 = -1 - i; x_2 = -1 + i$.
(C) $x_1 = 1 - i; x_2 = 1 + i$. (D) $x_1 = -2 - i; x_2 = -2 + i$.

Câu 18. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 3z + 4 = 0$. Tính $w = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + iz_1 z_2$.

- (A) $w = \frac{3}{4} + 2i$. (B) $w = \frac{3}{2} + 2i$. (C) $w = 2 + \frac{3}{2}i$. (D) $w = -\frac{3}{4} + 2i$.

Câu 19. Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $2z^4 - 3z^2 - 2 = 0$. Tổng $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$ bằng?

- (A) $3\sqrt{2}$. (B) $2\sqrt{2}$. (C) 0. (D) $\sqrt{2}(2 + i)$.

Câu 20. Phương trình bậc hai nào sau đây có nghiệm $1 + 2i$?

- (A) $z^2 - 2z + 3 = 0$. (B) $z^2 + 2z + 5 = 0$. (C) $z^2 - 2z + 5 = 0$. (D) $z^2 + 2z + 3 = 0$.

Câu 21. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 2\bar{z} = 6 + i$. Giá trị của biểu thức $a + 2b$ là

- (A) 1. (B) 0. (C) -1. (D) 3.

Câu 22. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(3 + i)\bar{z} = 15 - 5i$. Khi đó phần thực và phần ảo của số phức lần lượt là

- (A) 4 và 3. (B) 4 và $3i$. (C) 4 và $-3i$. (D) 4 và -3.

Câu 23. Số phức $z = a + bi$ thỏa mãn $(1 - 3i)z$ là số thực và $|\bar{z} - 2 + 5i| = 1$. Khi đó $a + b$ là

- (A) 9. (B) 8. (C) 6. (D) 7.

Câu 24. Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là số phức thỏa mãn hai điều kiện $|z - 2|^2 + |z + 2|^2 = 26$ và $\left|z - \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i\right|$ đạt giá trị lớn nhất. Tính tích xy .

- (A) $xy = \frac{9}{4}$. (B) $xy = \frac{13}{2}$. (C) $xy = \frac{16}{9}$. (D) $xy = \frac{9}{2}$.

Câu 25. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 1 - 3i| = 3\sqrt{2}$ và $(z + 2i)^2$ là số thuần ảo?

- (A) 3. (B) 4. (C) 1. (D) 2.

—HẾT—

ĐÁP ÁN THAM KHẢO CÁC BÀI TẬP TỰ LUYỆN**ĐÁP ÁN BTTL BÀI 1**

1. A	2. D	3. B	4. D	5. B	6. A	7. C	8. C	9. A	10. D
11. B	12. A	13. B	14. D	15. D	16. D	17. D	18. C	19. B	20. A
21. B	22. B	23. A	24. D	25. B	26. C	27. A	28. D	29. C	30. C
31. B	32. D	33. A	34. C	35. C	36. C	37. A	38. C	39. A	40. C

ĐÁP ÁN BTTL BÀI 2

1. B	2. B	3. A	4. D	5. C	6. C	7. B	8. D	9. B	10. D
11. C	12. A	13. B	14. D	15. B	16. A	17. D	18. B	19. C	20. C
21. D	22. D	23. C	24. C	25. C	26. B	27. B	28. D	29. C	30. D
31. B	32. C	33. C	34. B	35. B	36. B	37. C	38. B	39. B	40. D

ĐÁP ÁN BTTL BÀI 3

1. D	2. C	3. A	4. A	5. D	6. B	7. A	8. A	9. B	10. B
11. A	12. A	13. C	14. B	15. A	16. B	17. A	18. D	19. B	20. A
21. A	22. D	23. C	24. A	25. B	26. C	27. B	28. C	29. D	30. A
31. A	32. A	33. A	34. C	35. C	36. B	37. C	38. A	39. B	40. C

ĐÁP ÁN BTTL BÀI 4

1. C	2. D	3. D	4. D	5. B	6. A	7. D	8. D	9. A	10. B
11. C	12. D	13. B	14. A	15. D	16. C	17. D	18. D	19. A	20. C
21. C	22. D	23. B	24. B	25. B	26. B	27. A	28. B	29. B	30. D
31. A	32. A	33. D	34. A	35. B	36. D	37. B	38. D	39. D	40. A

ĐÁP ÁN ĐỀ ÔN SỐ 1

1. C	2. D	3. A	4. C	5. A	6. D	7. C	8. C	9. D	10. C
11. B	12. D	13. B	14. A	15. A	16. A	17. A	18. A	19. D	20. A
21. A	22. D	23. D	24. A	25. B					

ĐÁP ÁN ĐỀ ÔN SỐ 2

1. A	2. A	3. B	4. C	5. C	6. D	7. B	8. D	9. A	10. D
11. A	12. A	13. D	14. A	15. B	16. B	17. B	18. A	19. A	20. C
21. B	22. A	23. B	24. D	25. A					