

SỞ GIÁO DỤC – ĐÀO TẠO QUẢNG BÌNH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN VÕ NGUYÊN GIÁP

CHUYÊN ĐỀ

GIẢI BÀI TOÁN CỰC TRỊ SỐ PHỨC
BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

Giáo viên: Nguyễn Hữu Tình
Tổ: Toán

Năm học: 2017 - 2018

MỞ ĐẦU

Trong chương trình Toán THPT, phần Đại số mà cụ thể là phần Số học, ở chương trình lớp 12, học sinh được hoàn thiện hiểu biết của mình về các tập hợp số thông qua việc cung cấp một tập hợp số, gọi là Số phức. Trong chương này, học sinh đã bước đầu làm quen với các phép toán cộng, trừ, nhân, chia, khai căn, lũy thừa; lấy mô đun, ... các số phức. Bằng cách đặt tương ứng mỗi số phức $z = x + yi, (x; y \in \mathbb{R}, i^2 = -1)$ với mỗi điểm $M(x; y)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy , ta thấy giữa Đại số và Hình học có mối liên hệ với nhau khá “gần gũi”. Hơn nữa, nhiều bài toán Đại số bên Số phức, khi chuyển sang Hình học, từ những con số khá trừu tượng, bài toán đã được minh họa một cách rất trực quan, sinh động và cũng giải được bằng Hình học với phương pháp rất đẹp. Đặc biệt, trong các kỳ thi Đại học, Cao đẳng và THPT Quốc gia những năm gần đây, việc sử dụng phương pháp Hình học để giải quyết các bài toán về Số phức là một trong những phương pháp khá hay và hiệu quả, đặc biệt là các bài toán về Cực trị trong số phức. Hơn nữa, với những bài toán Hình học theo phương pháp trắc nghiệm, nếu khi biểu diễn được trên giấy thì qua hình ảnh minh họa, ta có thể lựa chọn đáp án một cách dễ dàng.

Tuy nhiên, trong thực tế giảng dạy, việc chuyển từ bài toán Đại số nói chung và Số phức nói riêng sang bài toán Hình học ở nhiều học sinh nói chung còn khá nhiều lúng túng, vì vậy việc giải các bài toán về Số phức gây ra khá nhiều khó khăn cho học sinh.

Bài toán Cực trị Số phức thông thường thì có khá nhiều cách lựa chọn để giải như dùng Bất đẳng thức, dùng Khảo sát hàm số, ... Qua chuyên đề này, tôi muốn gợi ý cho học sinh một lối tư duy vận dụng linh hoạt các phương pháp chuyển đổi từ bài toán Đại số sang Hình học cho học sinh, giúp các em có cái nhìn cụ thể hơn về việc chuyển đổi đó và vận dụng tư duy này cho những bài toán khác. Với mục tiêu đó, trong chuyên đề này, tôi chỉ tập trung giải quyết bài toán theo hướng Hình học. Không đặt nặng việc so sánh phương pháp nào nhanh hơn, tối ưu hơn phương pháp nào.

II. NỘI DUNG

1. Một số kiến thức, kí hiệu ban đầu

1.1 Các định nghĩa và kí hiệu

a) Số i : Ta thừa nhận có một số mà bình phương của nó bằng -1 . Kí hiệu: i .
Như vậy, $i^2 = -1$.

b) Số phức: Cho $x, y \in \mathbb{R}$, biểu thức $z = x + yi$ gọi là một (dạng đại số) số phức.
 x : Phần thực; y : Phần ảo

c) Với mỗi số phức $z = x + yi$, giá trị biểu thức $\sqrt{x^2 + y^2}$ gọi là mô đun của z . Kí hiệu: $|z|$. Như vậy, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

d) Với mỗi số phức $z = x + yi$. Số phức $z' = x + (-y)i = x - yi$ gọi là số phức liên hợp của số phức z . Kí hiệu $\bar{z}$. Như vậy, $z = x + yi$ thì $\bar{z} = x - yi$.

e) Với mỗi số phức $z = x + yi$. Xác định điểm $M(x; y)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy . Điểm M gọi là biểu diễn hình học của số phức z .

Để cho tiện, trong tập tài liệu này, tôi kí hiệu $M(x; y) = M(z)$ hay đơn giản $M(z)$ để chỉ M là điểm biểu diễn cho số phức $z = x + yi$.

1.2 Các phép toán trên tập hợp số phức

Cho hai số phức $z = x + yi, z' = x' + y'i. (x, y, x', y' \in \mathbb{R}, i^2 = -1)$

+ Phép cộng: $z + z' = (x + x') + (y + y')i$

+ Phép trừ: $z - z' = (x - x') + (y - y')i$

+ Phép nhân: $z.z' = (xx' - yy') + (xy' + x'y)i$

+ Phép chia: $\frac{z}{z'} = \frac{z.z'}{z'.z'}$ với $z' \neq 0 + 0i$.

1.3 Một số kí hiệu chuyển từ số phức sang tọa độ Oxy quen thuộc.

+ Với $M(z)$ thì $|z| = OM$.

+ Với $M = M(z), M' = M'(z')$ thì $|z - z'| = MM'$.

+ Với $A = A(z_A), B = B(z_B)$, trong đó z_A, z_B là hai số phức khác nhau cho trước thì tập hợp các điểm $M = M(z)$ thỏa mãn hệ thức $|z - z_A| = |z - z_B|$ là đường trung trực của đoạn AB .

+ Với $M_0 = M_0(z_0), R > 0$, tập hợp các điểm $M = M(z)$ thỏa mãn hệ thức $|z - z_0| = R$ là đường tròn tâm M_0 , bán kính R .

2. Các bài toán

BÀI TOÁN 1: Cho số phức $z_0 = a_0 + b_0i, a, b \in \mathbb{R}$ và tập hợp các số phức $z = x + yi$ thỏa mãn hệ thức: $|z - z_1| = |z - z_2|$.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z - z_0|$

b) Tìm z để $|z - z_0|$ nhỏ nhất

Nhận xét:

+ Gọi $M = M(z)$, $M_0 = M_0(z_0)$; $A = A(z_1)$; $B = B(z_2)$ thì $|z - z_0| = MM_0$

+ Từ đẳng thức $|z - z_1| = |z - z_2|$. Suy ra, M thuộc trung trực Δ của đoạn AB .

Bài toán chuyển thành:

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của M_0M với $M \in \Delta$.

b) Tìm $M \in \Delta$ sao cho M_0M nhỏ nhất

+ Ta thấy, với mọi điểm $M \in \Delta$ thì $M_0M \geq M_0H$,

trong đó H là hình chiếu của M_0 lên Δ .

Do đó, $\min |z - z_0| = d(M_0; \Delta)$. Và để M_0M nhỏ nhất với $M \in \Delta$ thì $M \equiv H$ hay M là hình chiếu của M_0 lên Δ .

Lời giải

- Từ hệ thức $|z - z_1| = |z - z_2|$, suy ra phương trình đường thẳng Δ .

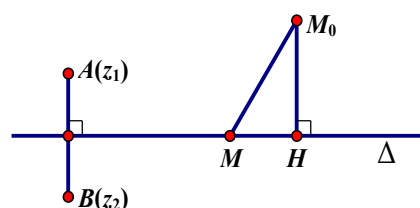
+ Với câu a), ta tính khoảng cách $d(M_0; \Delta)$. Và kết luận, $\min |z - z_0| = d(M_0; \Delta)$.

+ Với câu b),

- Viết phương trình đường thẳng d đi qua M_0 , vuông góc với Δ (hoặc song song với AB).

- Giải hệ gồm hai phương trình: Δ và d suy ra nghiệm $(x; y)$. Kết luận, số phức cần tìm là $z = x + yi$.

Đặc biệt: $|z|_{\min}$ tức là tìm số phức z sao cho mô đun của z là nhỏ nhất.



Ví dụ 1.1. Trong tất cả các số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = |z + 3 - 4i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của mô đun của z .

A. $\frac{5\sqrt{13}}{13}$

B. $2\sqrt{13}$

C. $\sqrt{2}$

D. $\sqrt{26}$

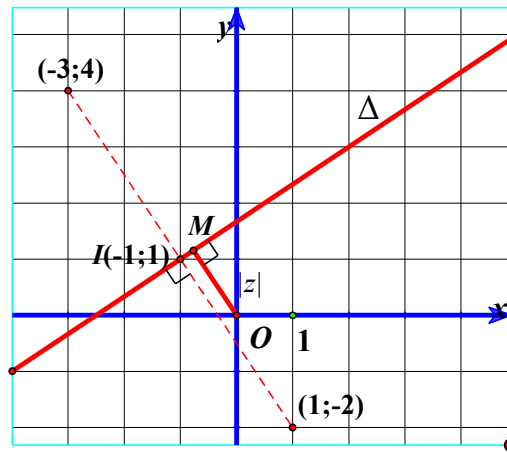
Lời giải.

Đặt $z = x + yi; x, y \in \mathbb{R}$ và $M = M(z) = M(x; y)$.

Ta có: $|z - 1 + 2i| = |z + 3 - 4i| \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = (x + 3)^2 + (y - 4)^2$ hay $M \in \Delta : 2x - 3y + 5 = 0$.

Khoảng cách từ O đến Δ là: $d(O; \Delta) = \frac{5}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{5}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{13}}{13}$.

Vậy, $\min|z| = \frac{5\sqrt{13}}{13}$. Chọn đáp án A.



Bình luận: Hãy thể hiện bài toán trên giấy kẻ ô, rồi đoán đáp án đúng.

Ví dụ 1.2 Trong tất cả các số phức z thỏa mãn hệ thức $|z - 1 + 3i| = |z - 3 - 5i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z + 2 + i|$.

A. $\sqrt{5}$

B. $\sqrt{68}$

C. $\frac{12\sqrt{17}}{17}$

D. $\sqrt{34}$

Lời giải

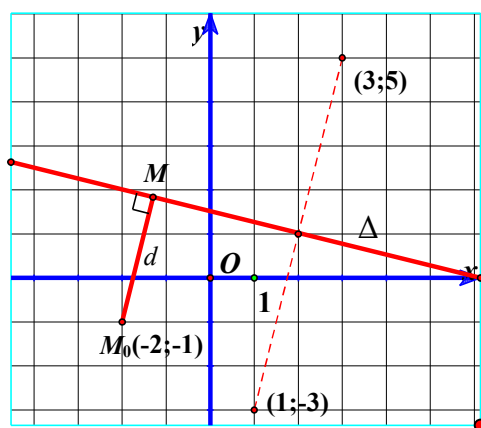
Đặt $z = x + yi; x, y \in \mathbb{R}$ và $M = M(z)$.

Ta có: $|z - 1 + 3i| = |z - 3 - 5i| \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = (x - 3)^2 + (y - 5)^2$ hay $M \in \Delta : x + 4y - 6 = 0$.

$$+ \min|z + 2 + i| = d(M_0; \Delta) = \frac{|-2 + 4 \cdot (-1) - 6|}{\sqrt{1^2 + (4)^2}} = \frac{12}{\sqrt{17}} = \frac{12\sqrt{17}}{17}.$$

(Ở đây, $M_0(-2; -1)$)

Chọn đáp án C



Bình luận: Hãy thể hiện bài toán trên giấy kẻ ô, rồi đoán đáp án đúng.

Ví dụ 1.3 Trong tất cả các số phức $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn hệ thức $|z - 2 + 5i| = |z - i|$. Biết rằng, $|z + 1 - i|$ nhỏ nhất. Tính $P = a.b$.

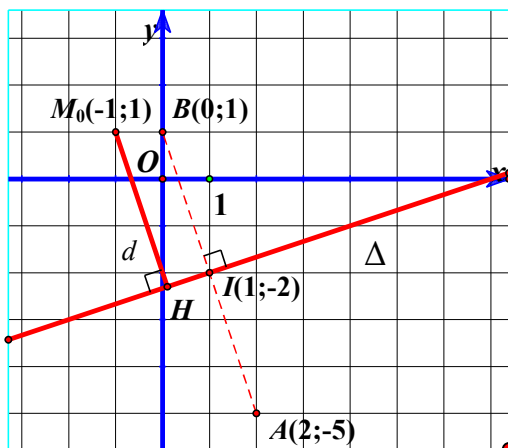
- A. $-\frac{23}{100}$ B. $\frac{13}{100}$ C. $-\frac{5}{16}$ D. $\frac{9}{25}$

Lời giải:

Đặt $M = M(z)$.

Từ hệ thức $|z - 2 + 5i| = |z - i|$, ta được $M \in \Delta : x - 3y - 7 = 0$.

Đặt $M_0(-1;1)$ thì $|z + 1 - i| = M_0M$.



Gọi d là đường thẳng đi qua $M_0(-1;1)$ và vuông góc với Δ thì $d : \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-3}$

hay $d : 3x + y + 2 = 0$.

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x - 3y = 7 \\ 3x + y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{10} \\ y = -\frac{23}{10} \end{cases}$. Vậy, hình chiếu vuông góc của M_0 lên

$$\Delta \text{ là } H\left(\frac{1}{10}; -\frac{23}{10}\right)$$

Vậy, $|z + 1 - i|$ nhỏ nhất khi $z = \frac{1}{10} - \frac{23}{10}i \Rightarrow P = -\frac{23}{100}$. Chọn đáp án A.

Bình luận: Hãy thể hiện bài toán trên giấy kẻ ô, rồi đoán đáp án đúng.

BÀI TOÁN 2: Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $|z - z_0| = R > 0$. Trong đó, $z_0 = a + bi$ cho trước.

a) Tìm giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của $|z - z_1|$, trong đó z_1 là số phức cho trước

b) Tìm số phức z để $|z - z_1|$ đạt giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất)

Nhận xét:

+ Đặt $M = M(z)$, $I = I(z_0)$; $A = A(z_1)$; thì $|z - z_0| = MI$.

+ Từ đẳng thức $|z - z_0| = R$. Suy ra, M thuộc đường tròn (C) tâm I , bán kính R .

Bài toán chuyển thành:

a) Tìm giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của AM với $M \in (C)$.

b) Tìm $M \in (C)$ sao cho AM lớn nhất (hay nhỏ nhất).

+ Gọi M_1, M_2 là giao điểm của đường thẳng AI và (C) (hình minh họa) thì với mọi điểm $M \in (C)$, ta luôn có

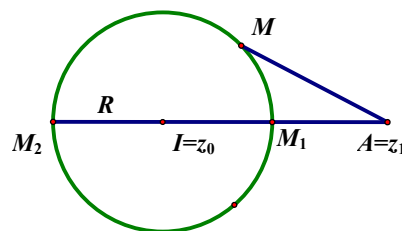
$$AM_1 \leq AM \leq AM_2.$$

$$\text{Do đó: } \min\{AM\} = AM_1 = |AI - R|; \max\{AM\} = AM_2 = AI + R.$$

Lời giải

$$\text{a) } \min|z - z_1| = |z_1 - z_0| - R; \max|z - z_1| = |z_1 - z_0| + R.$$

b) Tìm z .



- + Từ hệ thức $|z - z_0| = R > 0$. Suy ra phương trình đường tròn (C).
- + Viết phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm $A(z_1), I(z_0)$.
- + Giải hệ phương trình gồm phương trình của (C) và d , suy ra các nghiệm $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$.
- + Thử lại để chọn bộ $(x; y)$ thích hợp từ hai bộ trên.

Ví dụ 2.1 Trong tất cả các số phức z thỏa mãn hệ thức $|z - 1 + 3i| = 3$. Tìm $\min|z - 1 - i|$.

- A. 1 B. 3 C. $\sqrt{10}$ D. $\sqrt{2}$

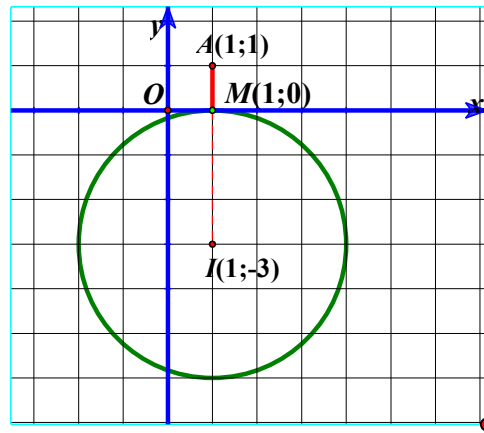
Lời giải

Đặt $M = M(z)$, $I(1; -3), A(1; 1) \Rightarrow AI = 4$ và $|z - 1 - i| = MA$.

Từ hệ thức $|z - 1 + 3i| = 3$. Suy ra $M \in$ đường tròn bán kính $R = 3$.

Vậy, $\min|z - 1 - i| = \min MA = M_1A = |AI - R| = 1$.

Chọn đáp án A.



Bình luận: Hãy thể hiện bài toán trên giấy kẻ ô, rồi đoán đáp án đúng.

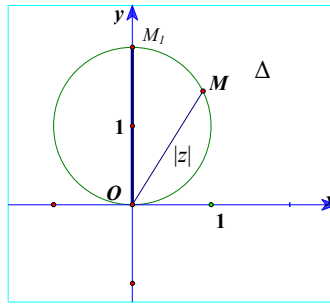
Ví dụ 2.2 Trong tất cả các số phức z thỏa mãn hệ thức $|z - i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$

- A. 2 B. 1 C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{5}$

Lời giải

Ta có: $I(0; 1), A \equiv O(0; 0) \Rightarrow AI = 1$.

$M = M(z)$ với z thỏa mãn hệ thức $|z - i| = 1$. Suy ra $M \in$ đường tròn bán kính $R = 1$. Vậy, $\max|z| = AI + R = 1 + 1 = 2$. Chọn đáp án A.



Bình luận: Hãy thể hiện bài toán trên giấy kẻ ô, rồi đoán đáp án đúng.

Ví dụ 2.3 Trong tất cả các số phức $z = a + bi$ thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 1$, biết rằng $|z + 3 - i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = \frac{a}{b}$

A. $-\frac{1}{7}$

B. $-\frac{9}{13}$

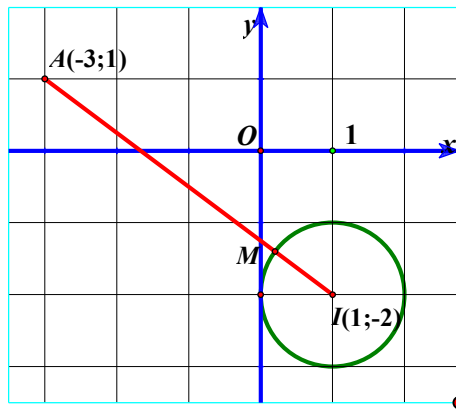
C. $\frac{7}{9}$

D. $-\frac{7}{13}$

Lời giải

Ta có: $I(1; -2), A(-3; 1)$. $M = M(z) \Rightarrow M \in (C): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$.

Đường thẳng $AI: \frac{x - 1}{-4} = \frac{y + 2}{3}$ hay $3x + 4y + 5 = 0$.



$$\text{Xét hệ: } \begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1 \\ 3x + 4y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{5}; y = -\frac{13}{5} \\ x = \frac{1}{5}; y = -\frac{7}{5} \end{cases}$$

Với $x = \frac{9}{5}, y = -\frac{13}{5}$ thì $|z + 3 - i| = 6$

Với $x = \frac{1}{5}, y = -\frac{7}{5}$ thì $|z + 3 - i| = 4$

Vậy $z = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i \Rightarrow P = a/b = -\frac{1}{7}$. Chọn đáp án A

Bình luận: Hãy thể hiện bài toán trên giấy kẻ ô, rồi đoán đáp án đúng.

Ví dụ 2.4 Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $|z - i| = 2$. Biết rằng $|z|$ lớn nhất. Tìm phần ảo của z .

A. 3

B. -1

C. 1

D. -3

Lời giải

Đặt $M(x; y) = M(z)$. Từ hệ thức $|z - i| = 2$ suy ra $M \in (C): x^2 + (y - 1)^2 = 4$.

Đường thẳng d qua $O(0; 0)$ và tâm $I(0; 1)$ của (C) có phương trình: $x = 0$.

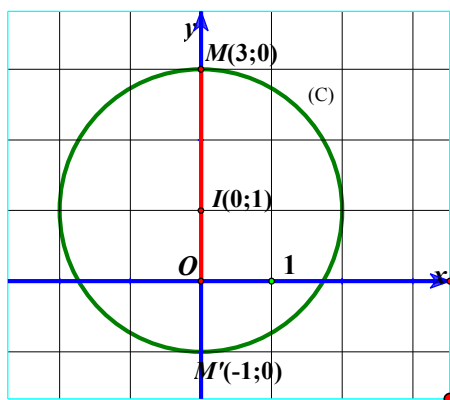
Giao của d và (C) là nghiệm x, y của hệ $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + (y - 1)^2 = 4 \end{cases}$. Giải ra ta được

$$\begin{cases} x = 0, y = -1 \\ x = 0, y = 3 \end{cases}$$

+ Với $x = 0, y = -1$ thì $z = -i \Rightarrow |z| = 1$.

+ Với $x = 0, y = 3 \Rightarrow z = 3i \Rightarrow |z| = 3$.

Vậy, $|z|$ lớn nhất khi $z = 0 + 3i = 3i$. Vậy, phần ảo của số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là 3. Chọn đáp án A.



Bình luận: Hãy thể hiện bài toán trên giấy kẻ ô, rồi đoán đáp án đúng.

BÀI TOÁN 3. Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $|z - z_1| = |z - z_2|$. Với z_1, z_2 là các số phức.

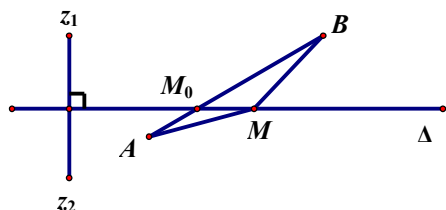
a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z - z_3| + |z - z_4|$. Với z_3, z_4 là các số phức cho trước.

b) Tìm số phức z để $|z - z_3| + |z - z_4|$ nhỏ nhất.

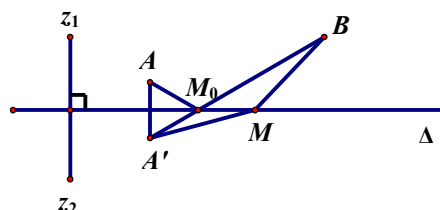
Nhận xét:

- Đặt $M(z), A(z_3), B(z_4)$ thì $|z - z_3| = AM, |z - z_4| = BM$.
- Từ hệ thức $|z - z_1| = |z - z_2|$. Suy ra, M thuộc đường thẳng Δ .

Dẫn đến bài toán: Tìm $M \in \Delta$ sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất



A, B khác phía so với Δ



A, B cùng phía so với Δ

Ta thấy rằng,

+ Nếu A, B nằm về hai phía so với Δ thì với mọi điểm $M \in \Delta, MA + MB \geq AB$.
 Vậy $MA + MB$ nhỏ nhất là $MA + MB = AB$ khi và chỉ khi M, A, B thẳng hàng hay $M = \Delta \cap AB$.

+ Nếu A, B nằm về cùng một phía so với Δ thì gọi A' là điểm đối xứng với A qua Δ . Khi đó, với mọi điểm $M \in \Delta, MA + MB = MA' + MB \geq A'B$. Vậy, $MA + MB$ nhỏ nhất là $MA + MB = A'B$ khi và chỉ khi A', M, B thẳng hàng hay $M = \Delta \cap A'B$.

Lời giải

- Từ hệ thức $|z - z_1| = |z - z_2|$. Suy ra phương trình đường thẳng Δ .
- Thay tọa độ các điểm $A = A(z_3), B = B(z_4)$ vào phương trình Δ để kiểm tra xem A, B nằm cùng phía hay khác phía so với Δ .

- Nếu A, B khác phía với Δ thì

$$+ \min \{|z - z_3| + |z - z_4|\} = |z_3 - z_4|$$

+ Để tìm z thì ta viết phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm A, B .

Giải hệ gồm phương trình Δ và phương trình d . Nghiệm $(x; y)$ suy ra số phức $z = x + yi$ cần tìm.

+ Nếu A, B khác phía so với Δ thì viết phương trình đường thẳng a qua A và vuông góc với Δ . Giải hệ phương trình gồm phương trình của Δ và phương trình của a suy ra nghiệm là tọa độ điểm I là trung điểm của AA' . Từ tọa độ của A, I và công thức tính tọa độ trung điểm suy ra tọa độ A' .

$$+ \min \{|z - z_3| + |z - z_4|\} = |z_3' - z_4| \text{ với } A' = A'(z_3').$$

+ Để tìm z thì ta viết phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm A', B .
 Giải hệ gồm phương trình Δ và phương trình d . Nghiệm $(x; y)$ suy ra số phức $z = x + yi$ cần tìm.

Ví dụ 3.1 Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $|z - 1 + i| = |z - 2 - 3i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 2 - i| + |z - 3 + 2i|$

A. $\frac{13\sqrt{61}}{17}$

B. $\frac{5\sqrt{493}}{17}$

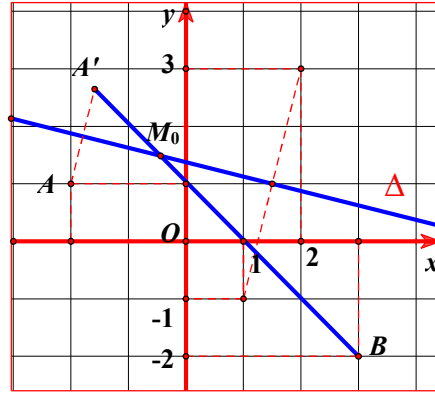
C. $\frac{10\sqrt{251}}{17}$

D. $\frac{\sqrt{71}}{3}$

Lời giải

Đặt $M = M(z)$.

Từ hệ thức $|z - 1 + i| = |z - 2 - 3i|$, suy ra, $M \in \Delta: 2x + 8y - 11 = 0$.



Đặt $A(-2; 1), B(3; -2)$.

Thay A vào phương trình Δ , ta được: $2 \cdot (-2) + 8 \cdot (1) - 11 < 0$

Thay B vào phương trình Δ , ta được: $2 \cdot (3) + 8 \cdot (-2) - 11 < 0$. Vậy A, B nằm cùng phía so với Δ .

Gọi d là đường thẳng qua A và vuông góc với Δ thì $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{4}$ hay $4x - y + 9 = 0$.

Gọi $I = d \cap \Delta$ thì tọa độ của I là nghiệm x, y của hệ:

$$\begin{cases} 2x + 8y = 11 \\ 4x - y = -9 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{61}{34}; y = \frac{31}{17}.$$

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua Δ thì I là trung điểm của AA' nên $A' \left(-\frac{27}{17}; \frac{45}{17} \right)$

$$\text{Suy ra, } \min \{|z + 2 - i| + |z - 3 + 2i|\} = A'B = \frac{5\sqrt{493}}{17}.$$

Chọn đáp án B.

Nhận xét: Nếu ta biểu diễn bài toán trên giấy có ô thì ta cũng có thể chọn đáp án phù hợp với 1 trong 4 đáp án đưa ra.

Đáp án A: $\approx 5,97$; B: $\approx 6,53$; C: $\approx 9,31$; D: $\approx 2,81$

Dựa vào hình minh họa: $A'B \approx \sqrt{4,5^2 + 4,5^2} \approx 6,36$ nên chọn đáp án B.

Ví dụ 3.2 Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $|z - 2i| = |z + i|$. Tìm phần thực của số phức z biết $|z - 1 - 2i| + |z + 4i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $\frac{5}{6}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{2}{3}$

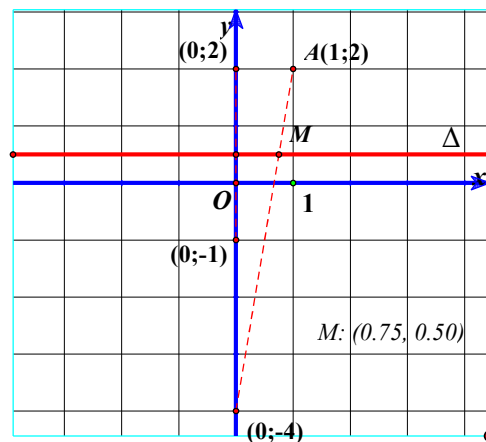
D. $\frac{3}{4}$

Lời giải

Đặt $M = M(z)$. Từ hệ thức $|z - 2i| = |z + i|$, ta được: $M \in \Delta: 2y - 1 = 0$.

Đặt $A(1;2), B(0;-4)$, thì A, B khác phía so với Δ . Đường thẳng

$$AB: \frac{x}{1} = \frac{y+4}{6} \Rightarrow 6x - y - 4 = 0.$$



$$\text{Tọa độ giao điểm của } AB \text{ và } \Delta \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} 2y - 1 = 0 \\ 6x - y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{4} \end{cases}.$$

Vậy, phần thực của số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán là $x = \frac{3}{4}$

Chọn đáp án D.

Bình luận: Hãy thể hiện bài toán trên giấy kẻ ô, rồi đoán đáp án đúng.

Ví dụ 3.3 (Câu 46- Đề minh họa THPT Quốc gia năm 2018)

Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5}$. Tính $P = a + b$ khi $|z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất.

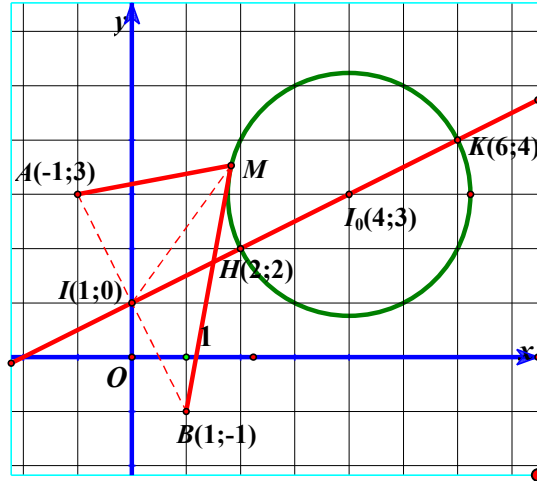
A. $P = 10$

B. $P = 4$

C. $P = 6$

D. $P = 8$

Lời giải



Đặt $M = M(z)$. Từ hệ thức $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5}$, ta được $M \in (C) : (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5$.

Đặt $A(-1;3), B(1;-1)$, I là trung điểm của AB thì $I(1;0)$.

Theo phần lý thuyết ở trên, ta thấy $MA + MB$ lớn nhất, khi MI lớn nhất, khi $M \equiv K$. (Hình minh họa).

Đường thẳng qua I , vuông góc với AB có phương trình: $x - 2y + 2 = 0$

Xét hệ phương trình, $\begin{cases} (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$. Ta được, $\begin{cases} x = 2, y = 2 \\ x = 6, y = 4 \end{cases}$. Tức là

$H(2;2), K(6;4)$. Chọn điểm K (như đã nói trên). Vậy $P = a + b = 4 + 6 = 10$.

Chọn đáp án A.

Nhận xét: Nếu ta có thể thể hiện bài toán trên giấy thì cũng dễ dàng lựa chọn được đáp án là A.

BÀI TOÁN 4. Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $|z - z_1| = |z - z_2|$. Tìm

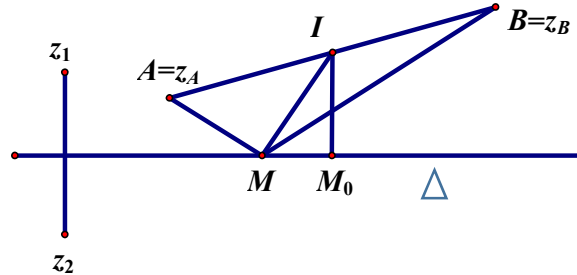
a) Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z - z_A|^2 + |z - z_B|^2$.

b) Tìm số phức z để $|z - z_A|^2 + |z - z_B|^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Ở đây, z_1, z_2, z_A, z_B là các số phức cho trước.

Nhận xét

- Đặt $A = A(z_A), B = B(z_B), M = M(z)$ thì $|z - z_A|^2 + |z - z_B|^2 = MA^2 + MB^2$.
- Từ hệ thức $|z - z_1| = |z - z_2|$. Suy ra M thuộc đường thẳng Δ .

Dẫn đến bài toán, tìm $M \in \Delta$ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất



- Gọi I là trung điểm AB . Khi đó, với mọi điểm $M \in \Delta$, ta có:

$$MI^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$$

$$\text{Suy ra, } MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

Do A, B , cố định nên AB không đổi, do đó $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv M_0$, trong đó M_0 là hình chiếu của I lên đường thẳng Δ . Và giá trị nhỏ nhất của $MA^2 + MB^2$ làm $MA^2 + MB^2 = 2M_0I^2 + \frac{AB^2}{2} = 2d(I, \Delta)^2 + \frac{AB^2}{2}$.

Lời giải

- Từ $|z - z_1| = |z - z_2|$. Suy ra được phương trình đường thẳng Δ .
- Tìm trung điểm I của đoạn thẳng AB .

+ Với câu a): Tính khoảng cách từ I đến Δ , và độ dài đoạn thẳng AB . Kết luận:

$$\min \{MA^2 + MB^2\} = 2d(I, \Delta)^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

+ Với câu b): Viết phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc với Δ . Nghiệm x, y của hệ hai phương trình Δ, d là phần thực và phần ảo của z .

Ví dụ 4.1 Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $|z - 1 + 2i| = |z + 3 + i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z + i|^2 + |z - 2 - i|^2$.

A. $\frac{305}{34}$

B. $\frac{441}{68}$

C. $\frac{169}{34}$

D. 8

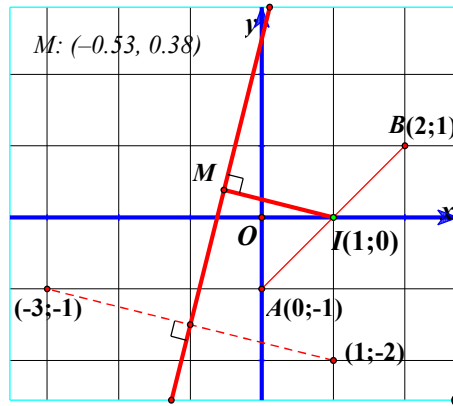
Lời giải

Đặt $M = M(z)$. Từ $|z - 1 + 2i| = |z + 3 + i|$. Ta được, $M \in \Delta: 8x - 2y + 5 = 0$.

Đặt $A(0; -1), B(2; 1)$ và gọi I là trung điểm AB thì $I(1; 0)$. Khoảng cách từ I đến Δ là $d(I, \Delta) = \frac{13}{\sqrt{68}}$, $AB = \sqrt{8}$.

$$\min \{MA^2 + MB^2\} = 2d(I, \Delta)^2 + \frac{AB^2}{2} = 2 \cdot \frac{169}{68} + \frac{8}{2} = \frac{305}{34}.$$

Chọn đáp án A.



Bình luận: Hãy thể hiện bài toán trên giấy kẻ ô, rồi đoán đáp án đúng.

Ví dụ 4.2 Trong tất cả các số phức z thỏa mãn hệ thức $|z - 1 - 3i| = |z - 5 + i|$. Tìm số phức z sao cho $|z + 1 - i|^2 + |z - 3 - i|^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $z = 3 + i$

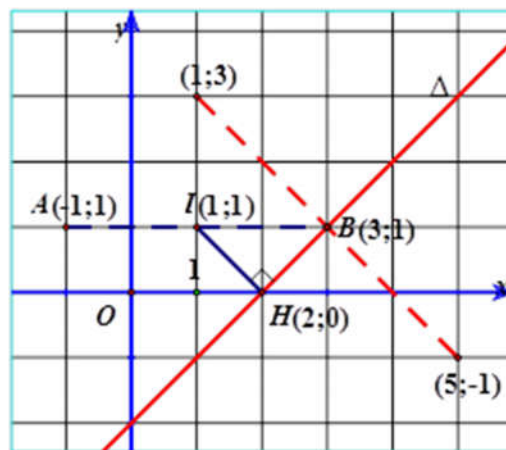
B. $z = 2$

C. $z = 2 + i$

D. $z = 1 - i$

Lời giải

Đặt $M = M(z)$. Từ hệ thức $|z - 1 - 3i| = |z - 5 + i|$. Ta được, $M \in \Delta: x - y - 2 = 0$.



Đặt $A(-1; 1), B(3; 1)$. Gọi I là trung điểm của AB thì $I(1; 1)$.

Đường thẳng qua I , vuông góc với Δ có phương trình: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1}$ hay $x + y - 2 = 0$.

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$. Vậy, số phức thỏa mãn yêu cầu

bài toán là $z = 2$.

Chọn đáp án B.

Bình luận: Hãy thể hiện bài toán trên giấy kẻ ô, rồi đoán đáp án đúng.

Ví dụ 4.3 Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $|z + 7 - 5i| = |z - 1 - 11i|$. Biết rằng, số phức $z = x + yi$ thỏa mãn $|z - 2 - 8i|^2 + |z - 6 - 6i|^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của biểu thức $P = x^2 - y^2$ là

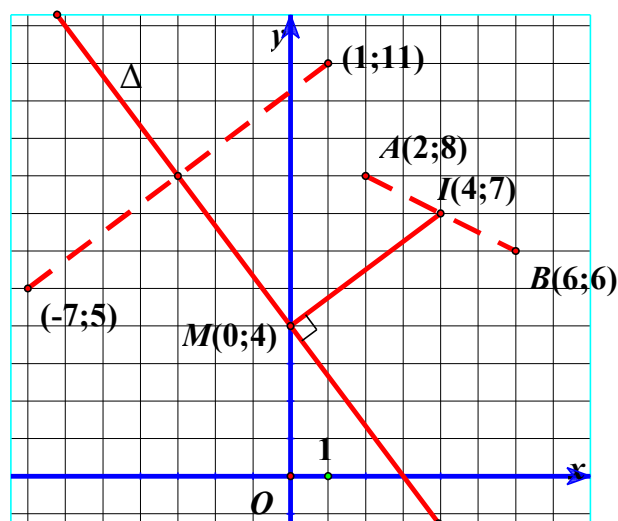
A. -16

B. -4

C. -1

D. 0

Lời giải



Đặt $M(x; y) = M(z)$.

Từ hệ thức $|z + 7 - 5i| = |z - 1 - 11i|$. Ta được, $M \in \Delta: 4x + 3y - 12 = 0$

Đặt $A(2;8), B(6;6), I$ là trung điểm AB thì $I(4;7)$.

Đường thẳng d qua I và vuông góc với Δ có phương trình: $3x - 4y + 16 = 0$.

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} 4x + 3y - 12 = 0 \\ 3x - 4y + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$. Vậy, $P = -16$

Chọn đáp án A.

BÀI TOÁN 5. Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $|z - z_1| = |z - z_2|$

a) Tìm giá trị lớn nhất của $\left| |z - z_A| - |z - z_B| \right|$.

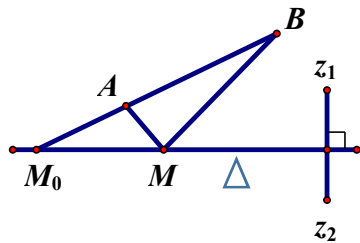
b) Tìm z để $\left| |z - z_A| - |z - z_B| \right|$ đạt giá trị lớn nhất

Nhận xét

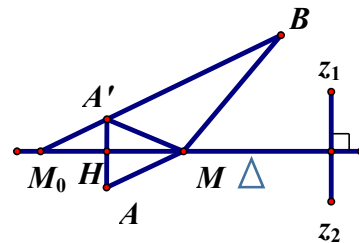
- Đặt $A = A(z_A), B = B(z_B), M = M(z)$ thì $|z - z_A| = MA, |z - z_B| = MB$

- Từ $|z - z_1| = |z - z_2|$. Suy ra, $M \in$ đường thẳng Δ .

Dẫn đến bài toán: Tìm trên đường thẳng Δ cho trước điểm M sao cho $|MA - MB|$ lớn nhất. Tính giá trị đó.



A, B cùng phía so với Δ



A, B khác phía so với Δ

- Với A, B cố định

+ Nếu A, B cùng phía so với Δ thì với mọi điểm $M \in \Delta$, ta luôn có $|MA - MB| \leq AB$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M, A, B thẳng hàng hay $M = \Delta \cap AB$.

+ Với A, B khác phía so với Δ , gọi A' là điểm đối xứng với A qua Δ thì với mọi điểm $M \in \Delta$, ta luôn có $|MA - MB| = |MA' - MB| \leq A'B$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M, A', B thẳng hàng hay $M = \Delta \cap A'B$.

Cách giải:

- Từ hệ thức $|z - z_1| = |z - z_2|$. Suy ra phương trình đường thẳng Δ .

- Thay lần lượt tọa độ điểm A, B vào phương trình Δ để kiểm tra xem A, B cùng phía hay khác phía so với Δ .

+ Nếu A, B cùng phía với Δ .

Với câu a) thì giá trị lớn nhất của $\left| |z - z_A| - |z - z_B| \right|$ là AB .

Với câu b): Viết phương trình đường thẳng AB . Giải hệ gồm phương trình đường thẳng Δ và AB ta được nghiệm x, y là phần thực và phần ảo của z .

+ Nếu A, B khác phía với Δ .

- Viết phương trình đường thẳng d đi qua A , vuông góc với Δ . Giải hệ phương trình gồm phương trình của Δ và d , ta được nghiệm $(x; y)$ là tọa độ điểm H .
- Lấy điểm A' sao cho H là trung điểm của AA' .

Với câu a) thì giá trị lớn nhất của $\|z - z_A\| - \|z - z_B\|$ là $A'B$.

Với câu b): Viết phương trình đường thẳng $A'B$. Giải hệ gồm phương trình đường thẳng Δ và $A'B$ ta được nghiệm x, y là phần thực và phần ảo của z .

Ví dụ 5.1 Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $|z + 5 - i| = |z + 1 - 7i|$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \|z - 4 - i\| - \|z - 2 - 4i\|$

A. $\sqrt{13}$

B. $2\sqrt{10}$

C. $2\sqrt{13}$

D. $\sqrt{5}$

Lời giải

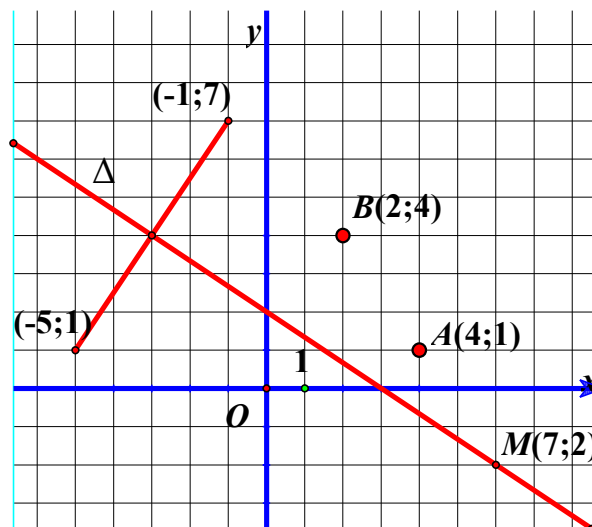
Đặt $M(x; y) = M(z), A(4;1), B(2;4)$.

Từ hệ thức $|z + 5 - i| = |z + 1 - 7i|$, ta được: $M \in \Delta: 2x + 3y - 6 = 0$.

Thế tọa độ điểm A vào phương trình Δ , ta được: $2.4 + 3.1 - 6 > 0$.

Thế tọa độ điểm B vào phương trình Δ , ta được: $2.2 + 3.4 - 6 > 0$.

Vậy, A, B cùng phía với Δ .



Theo phần lý thuyết ở trên, ta được: Giá trị lớn nhất của P là $AB = \sqrt{(2-4)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{13}$.

Chọn đáp án A.

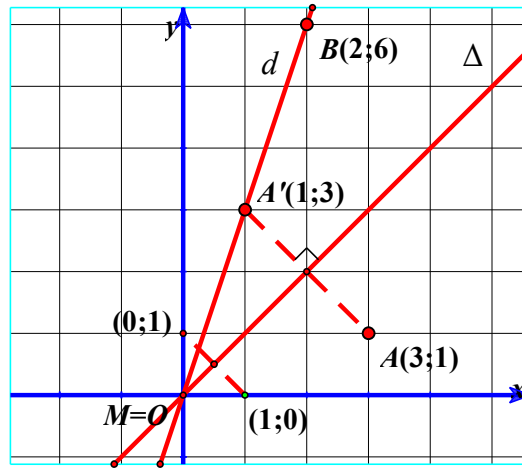
Bình luận: Hãy thể hiện bài toán trên giấy kẻ ô, rồi đoán đáp án đúng.

Ví dụ 5.2 Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $|z - 1| = |z - i|$. Biết rằng, số phức $z = x + yi$ thỏa mãn $\|z - 3 - i\| - \|z - 2 - 6i\|$ đạt giá trị lớn nhất. Giá trị biểu thức $P = x + y$ bằng

A. 0 B. 4 C. 8 D. -2

Lời giải

Đặt $M(x; y) = M(z), A(3;1), B(2;6)$.



Từ hệ thức $|z - 1| = |z - i|$, ta được: $M \in \Delta : x - y = 0$.

Thế tọa độ điểm A vào phương trình Δ , ta được: $3 - 1 > 0$.

Thế tọa độ điểm B vào phương trình Δ , ta được: $2 - 5 < 0$.

Vậy, A, B cùng khác phía so với Δ .

Theo phần lý thuyết ở trên. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua đường thẳng

$\Delta : y = x$ thì ta được $A'(1;3)$. Đường thẳng $A'B : \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{3}$ hay $2x - y + 1 = 0$.

Giao điểm của Δ và $A'B$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = x \\ 3x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Vậy, số phức z thỏa mãn $\|z - 3 - i\| - \|z - 2 - 6i\|$ lớn nhất là $z = 0 + 0i$ nên $P = 0$.

Bình luận: Hãy thể hiện bài toán trên giấy kẻ ô, rồi đoán đáp án đúng.

BÀI TOÁN 6. Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $|z - z_0| = R, (R > 0)$.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z - z_A|^2 + |z - z_B|^2$

b) Tìm số phức z để $|z - z_A|^2 + |z - z_B|^2$ đạt giá trị nhỏ nhất (giá trị lớn nhất).

Nhận xét:

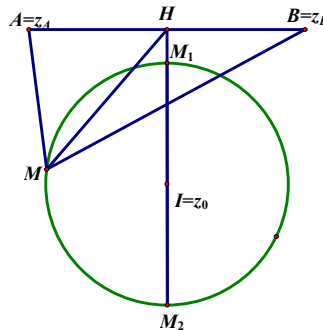
- Đặt $A = A(z_A), B = B(z_B), M = M(z)$ thì $|z - z_A|^2 = MA^2, |z - z_B|^2 = MB^2$.

- Từ $|z - z_0| = R$. Suy ra, $M \in$ đường tròn (C) tâm I , bán kính R .

Dẫn đến bài toán: Với A, B cố định. Tìm $M \in (C)$ để $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất. Tìm giá trị đó.

- Gọi H là trung điểm của AB . Ta có: $MH^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$. Suy ra,

$$MA^2 + MB^2 = 2MH^2 + \frac{AB^2}{2}.$$



Do A, B cố định nên AB không đổi. Vậy

+ $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MH$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv M_1$ (hình minh họa) và min

$$MA^2 + MB^2 = 2|R - IH|^2 + \frac{AB^2}{2}$$

+ $MA^2 + MB^2$ lớn nhất $\Leftrightarrow MH$ lớn nhất $\Leftrightarrow M \equiv M_2$ (hình minh họa) và giá trị lớn

nhất của $MA^2 + MB^2$ là $2(R + IH)^2 + \frac{AB^2}{2}$.

Lời giải

- Từ hệ thức $|z - z_0| = R, (R > 0)$. Suy ra phương trình đường tròn (C), tâm I và bán kính của (C).

- Tìm tọa độ trung điểm H của đoạn AB .

- Nếu yêu cầu tìm $\min\{MA^2 + MB^2\}$ thì $\min\{MA^2 + MB^2\} = 2|R - IH|^2 + \frac{AB^2}{2}$

- Nếu yêu cầu tìm z thì viết phương trình đường thẳng IH . Giải hệ gồm phương trình đường thẳng IH và (C), suy ra hai nghiệm $(x; y)$ của hệ. Thử lại để chọn kết quả phù hợp với đáp án.

- Nếu yêu cầu tìm giá trị lớn nhất của $\{MA^2 + MB^2\}$ thì giá trị lớn nhất của $\{MA^2 + MB^2\}$ là $2(R + IH)^2 + \frac{AB^2}{2}$

- Nếu yêu cầu tìm z thì viết phương trình đường thẳng IH . Giải hệ gồm phương trình đường thẳng IH và (C), suy ra hai nghiệm $(x; y)$ của hệ. Thử lại để chọn kết quả phù hợp với đáp án.

Ví dụ 6.1 Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 5$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $|z - 8 - 6i|^2 + |z - 4 - 10i|^2$ lần lượt là:

A. 66 và 466

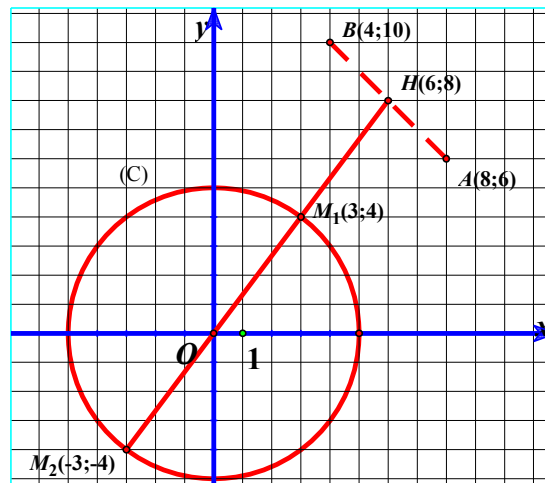
B. 5 và 15

C. 82 và 482

D. 41 và 241

Lời giải

Đặt $M = M(z)$. Từ hệ thức $|z| = 5$. Suy ra, M thuộc đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R = 5$.



Đặt $A(8;6), B(4;10)$. Gọi H là trung điểm AB thì $H(6;8)$, và $OH^2 = 100, AB^2 = 32$

Theo lý thuyết ở trên thì

Giá trị nhỏ nhất của $P = |z - 8 - 6i|^2 + |z - 4 - 10i|^2 = MA^2 + MB^2$ là

$$P_{\min} = 2|R - OH|^2 + \frac{AB^2}{2} = 66.$$

Giá trị lớn nhất của $P = |z - 8 - 6i|^2 + |z - 4 - 10i|^2 = MA^2 + MB^2$ là

$$P_{\max} = 2|R + OH|^2 + \frac{AB^2}{2} = 466.$$

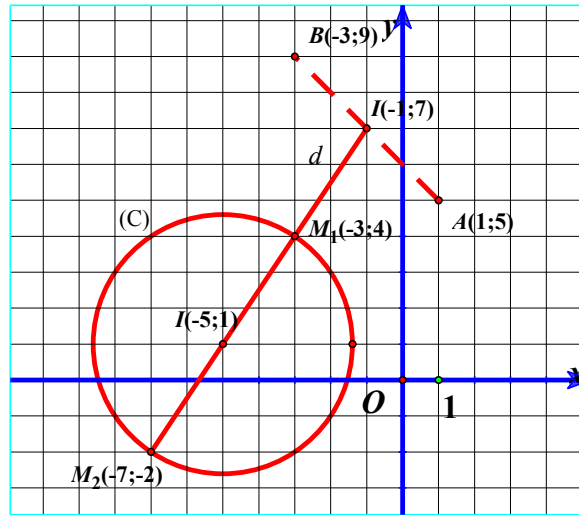
Chọn đáp án A.

Ví dụ 6.2 Trong tất cả các số phức z thỏa mãn $|z + 5 - i| = \sqrt{13}$, tìm số phức z sao cho $|z - 1 - 5i|^2 + |z + 3 - 9i|^2$ nhỏ nhất.

A. $z = -3 + 4i$ B. $z = -2 + 3i$ C. $z = -7 - 2i$ D. $z = -2 - i$

Lời giải

Đặt $M = M(z)$. Từ hệ thức $|z + 5 - i| = \sqrt{13}$. Suy ra, điểm M thuộc đường tròn $(C): (x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 13$. Tâm $I(-5;1)$, bán kính $R = \sqrt{13}$.



Đặt $A(1;5), B(-3;9)$. Gọi H là trung điểm AB thì $H(-1;7)$. Đường thẳng $IH: \frac{x+1}{-4} = \frac{y-7}{-6}$ hay $3x - 2y + 17 = 0$

Tọa độ giao điểm của IH và (C) là nghiệm của hệ: $\begin{cases} (x+5)^2 + (y-1)^2 = 13 \\ 3x - 2y + 17 = 0 \end{cases}$. Giải

ra ta được, $\begin{cases} x = -3; y = 4 \\ x = -7; y = -2 \end{cases}$

Với $x = -3, y = 4$ thì $M_1H = \sqrt{13}$ với $M_1(-3;4)$

Với $x = -7, y = -2$ thì $M_2H = 3\sqrt{14}$ với $M_2(-7;-2)$

Theo phân lý thuyết ở trên, thì $|z - 1 - 5i|^2 + |z + 3 - 9i|^2 = MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv M_1$.

Vậy số phức cần tìm là: $z = -3 + 4i$.

Chọn đáp án A.

BÀI TOÁN 7: Cho hai số phức z, z' thỏa mãn các hệ thức $|z - z_1| = R, |z' - z_2| = |z' - z_3|$. Trong đó, z_1, z_2, z_3 là các số phức cho trước. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z - z'|$.

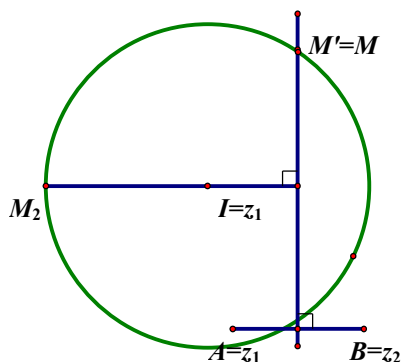
Nhận xét:

- Đặt $M = M(z), M' = M(z')$.

Từ hệ thức $|z - z_1| = R$. Suy ra, M thuộc đường tròn (C) . Từ hệ thức $|z' - z_2| = |z' - z_3|$.

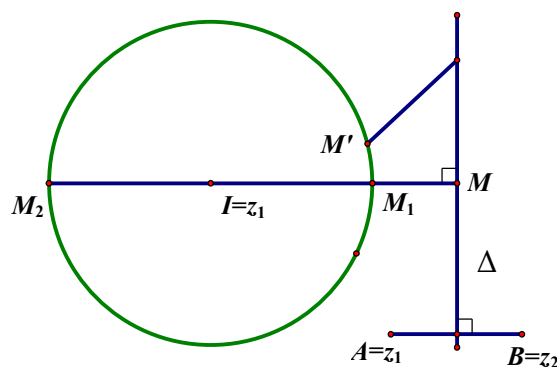
Suy ra, M' thuộc đường thẳng Δ . và $|z - z'| = MM'$.

Dẫn đến bài toán. Tìm điểm $M \in \Delta, M' \in (C)$ sao cho MM' nhỏ nhất.



$$d(I, \Delta) \leq R$$

Δ



$$d(I, \Delta) > R$$

+ Trường hợp $\Delta \cap (C) \neq \emptyset$ thì giá trị nhỏ nhất của $|z - z'|$ bằng 0

+ Trường hợp $\Delta \cap (C) = \emptyset$ thì giá trị nhỏ nhất của $|z - z'|$ là $|z - z'| = d(I, \Delta) - R$.

Lời giải

- Từ hệ thức $|z - z_1| = R$. Suy ra, đường tròn (C) , tâm I , bán kính R của (C) .

- Từ hệ thức $|z' - z_2| = |z' - z_3|$. Suy ra, đường thẳng Δ .

- Tính khoảng cách d từ I đến Δ .

+ Nếu $d \leq R$ thì giá trị nhỏ nhất của $|z - z'|$ là $|z - z'| = 0$. và $z(x; y) = z'(x; y) = d \cap (C)$.

+ Nếu $d > R$ thì giá trị nhỏ nhất của $|z - z'|$ là $|z - z'| = d - R$. $z(x; y) = M(x; y)$ là hình chiếu của I lên Δ . và $z'(x'; y') = M'(x'; y') = a \cap (C)$, trong đó a là đường thẳng qua I và vuông góc với Δ . (Chú ý: Chọn M' là điểm nằm giữa I, M).

Ví dụ 7.1 Cho các số phức z, z' thỏa mãn $|z + 2 - i| = 2$ và $|z' + 5 - 3i| = |z' - 1 - 9i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z - z'|$ gần bằng số nào trong các số sau.

A. 1,6

B. 1,1

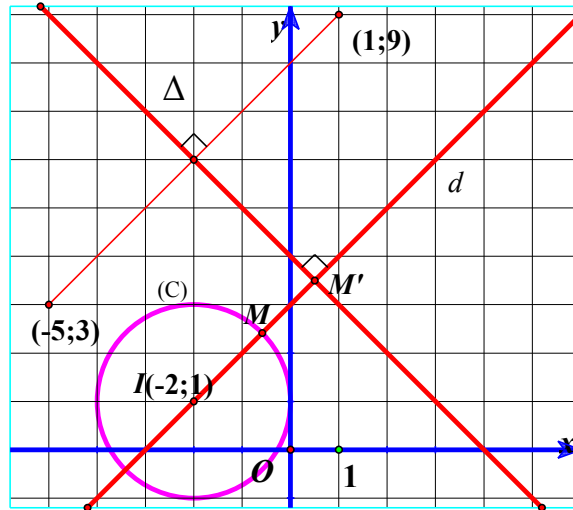
C. 1,7

D. 1,5

Lời giải

Đặt $M = M(z), M' = M'(z')$.

Từ hệ thức $|z + 2 - i| = 2$, suy ra M thuộc đường tròn: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ với tâm $I(-2;1)$, bán kính $R = 2$.



Từ hệ thức $|z + 5 - 3i| = |z - 1 - 9i|$, suy ra M' thuộc đường thẳng $\Delta: x + y - 4 = 0$.

Khoảng cách từ I đến Δ là $d(I, \Delta) = \frac{|-2 + 1 - 4|}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > R$. Vậy, giá trị nhỏ nhất

của biểu thức $P = |z - z'|$ là $\frac{5\sqrt{2}}{2} - 2 \approx 1,54$

Chọn đáp án D.

III. KẾT LUẬN

Trong bài viết, có thể có những sai sót không tránh khỏi, mong quý vị thông cảm.