

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

TRẮC NGHIỆM VD - VDC

NÓN-TRỤ-CẦU

- * CÓ ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT
- * PHÂN LOẠI CÁC DẠNG TOÁN
- * CHIA PHẦN BÀI TẬP VÀ LỜI GIẢI RIÊNG



ÔN THI THPT QUỐC GIA

MỤC LỤC

1. MẶT NÓN TRÒN XOAY VÀ KHỐI NÓN.....	1
2. MẶT TRỤ TRÒN XOAY VÀ KHỐI TRỤ.....	9
3. MẶT CẦU VÀ KHỐI CẦU.....	21
4. ỨNG DỤNG THỰC TẾ	40

NÓN - TRỤ - CẦU

I - MẶT NÓN TRÒN XOAY VÀ KHỐI NÓN

A – LÝ THUYẾT CHUNG

1. Mặt nón tròn xoay

Nội dung	Hình vẽ
Đường thẳng d, Δ cắt nhau tại O và tạo thành góc β với $0^\circ < \beta < 90^\circ$, $mp(P)$ chứa d, Δ. (P) quay quanh trục Δ với góc β không đổi $\Rightarrow$ mặt nón tròn xoay đỉnh O. ☐ Δ gọi là trục. ☐ d được gọi là đường sinh. ☐ Góc 2β gọi là góc ở đỉnh.	

2. Khối nón

Nội dung	Hình vẽ
Là phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay kể cả hình nón đó. Những điểm không thuộc khối nón gọi là những điểm ngoài của khối nón. Những điểm thuộc khối nón nhưng không thuộc hình nón tương ứng gọi là những điểm trong của khối nón. Đỉnh, mặt đáy, đường sinh của một hình nón cũng là đỉnh, mặt đáy, đường sinh của khối nón tương ứng.	

Cho hình nón có chiều cao h , đường sinh l và bán kính đáy r .

- ☐ **Diện tích xung quanh:** của hình nón: $S_{xq} = \pi r l$.
- ☐ **Diện tích đáy (hình tròn):** $S_{đáy} = \pi r^2$.
- ☐ **Diện tích toàn phần:** của hình nón: $S_{tp} = \pi r l + \pi r^2$.
- ☐ **Thể tích khối nón:** $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

3. MỘT SỐ DẠNG TOÁN VÀ CÔNG THỨC GIẢI

3.1. Dạng 1. Thiết diện của hình nón cắt bởi một mặt phẳng

Nội dung	Hình vẽ
Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác cân.	

Thiết diện qua đỉnh của hình nón là những tam giác cân có hai cạnh bên là hai đường sinh của hình nón.	
Thiết diện vuông góc với trục của hình nón là những đường tròn có tâm nằm trên trục của hình nón.	

3.2. Dạng 2. Bài toán liên quan đến thiết diện qua đỉnh của hình nón

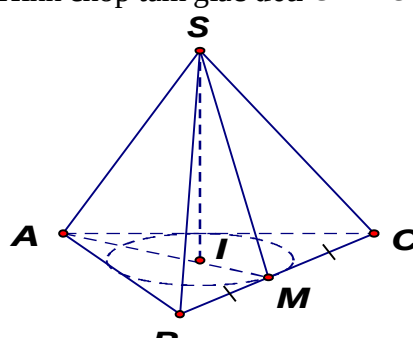
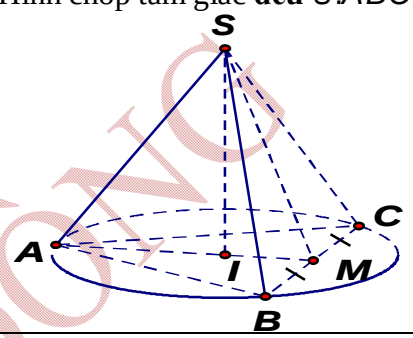
Cho hình nón có chiều cao là h , bán kính đáy r và đường sinh l .

Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là d .

Nội dung	Hình vẽ
Gọi M là trung điểm của AC. Khi đó: ☐ $AC \perp (SMI)$ ☐ Góc giữa (SAC) và (ABC) là góc $\widehat{SMI}$. ☐ Góc giữa (SAC) và SI là góc $\widehat{MSI}$. ☐ $d(I, (SAC)) = IH = d$. Diện tích thiết diện $S_{td} = S_{\triangle SAC} = \frac{1}{2} SM \cdot AC = \frac{1}{2} \sqrt{SI^2 + IM^2} \cdot 2\sqrt{AI^2 - IM^2}$ $= \sqrt{r^2 - \frac{h^2 d^2}{h^2 - d^2}} \cdot \sqrt{h^2 + \frac{h^2 d^2}{h^2 - d^2}}$	

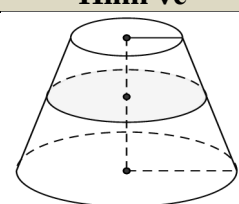
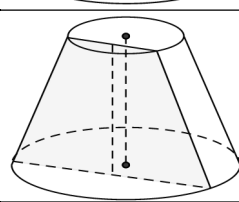
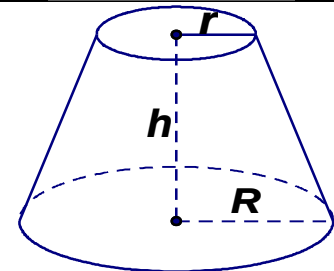
3.3. Dạng 3. Bài toán hình nón ngoại tiếp và nội tiếp hình chóp

Nội dung	Hình vẽ
Hình nón nội tiếp hình chóp $S.ABCD$ đều là hình nón có đỉnh là S, đáy là đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$. Khi đó hình nón có: ☐ Bán kính đáy $r = IM = \frac{AB}{2}$, ☐ Đường cao $h = SI$, đường sinh $l = SM$.	Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$
Hình nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ đều là hình nón có đỉnh là S, đáy là đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$. Khi đó hình nón có: ☐ Bán kính đáy: $r = IA = \frac{AC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2}$. ☐ Chiều cao: $h = SI$. ☐ Đường sinh: $l = SA$.	Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$

Hình nón nội tiếp hình chóp $S.ABC$ đều là hình nón có đỉnh là S, đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó hình nón có - Bán kính đáy: $r = IM = \frac{AM}{3} = \frac{AB\sqrt{3}}{6}$. - Chiều cao: $h = SI$. - Đường sinh: $l = SM$.	Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ 
Hình nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ đều là hình nón có đỉnh là S, đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó hình nón có: - Bán kính đáy: $r = IA = \frac{2AM}{3} = \frac{AB\sqrt{3}}{3}$. - Chiều cao: $h = SI$. - Đường sinh: $l = SA$.	Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ 

3.4. Dạng 4. Bài toán hình nón cắt

Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đáy thì phần mặt phẳng nằm trong hình nón là một hình tròn. Phần hình nón nằm giữa hai mặt phẳng nói trên được gọi là **hình nón cắt**.

Nội dung	Hình vẽ
Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đáy thì được mặt cắt là một hình tròn.	
Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với trục thì được mặt cắt là một hình thang cân.	
Cho hình nón cắt có R, r, h lần lượt là bán kính đáy lớn, bán kính đáy nhỏ và chiều cao. Diện tích xung quanh của hình nón cắt: $S_{xq} = \pi l(R + r).$ Diện tích đáy (hình tròn): $\begin{cases} S_{đáy1} = \pi r^2 \\ S_{đáy2} = \pi R^2 \end{cases} \Rightarrow \sum S_{đáy} = \pi(r^2 + R^2).$ Diện tích toàn phần của hình nón cắt: $S_{tp} = \pi l(R + r) + \pi r^2 + \pi R^2.$ Thể tích khối nón cắt: $V = \frac{1}{3} \pi h(R^2 + r^2 + Rr).$	

3.5. Dạng 5. Bài toán hình nón tạo bởi phần còn lại của hình tròn sau khi cắt bỏ đi hình quạt

Nội dung	Hình vẽ
Từ hình tròn $(O; R)$ cắt bỏ đi hình quạt AmB. Độ dài cung $\widehat{AnB}$ bằng x. Phần còn lại của hình tròn ghép lại được một hình nón. Tìm bán kính, chiều cao và độ dài đường sinh của hình nón đó. Hình nón được tạo thành có $\begin{cases} l = R \\ 2\pi r = x \Rightarrow r = \frac{2\pi}{x} \\ h = \sqrt{l^2 - r^2} \end{cases}$	

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: (CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP 2019 LẦN 2) Cho tứ diện $ABCD$ có DA vuông góc với $mp(ABC)$, $DB \perp BC$, $AD = AB = BC = a$. Kí hiệu V_1, V_2, V_3 lần lượt là thể tích của hình tròn xoay sinh bởi tam giác ABD khi quay quanh AD , tam giác ABC khi quay quanh AB , tam giác DBC khi quay quanh BC . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $V_1 + V_2 = V_3$. B. $V_1 + V_3 = V_2$. C. $V_2 + V_3 = V_1$. D. $V_1 = V_2 = V_3$.

Câu 2: (Chuyên Hưng Yên Lần 3) Cho hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O bán kính R . Trên đường tròn (O) lấy hai điểm A, B sao cho tam giác OAB vuông. Biết diện tích tam giác SAB bằng $R^2\sqrt{2}$. Thể tích hình nón đã cho bằng

- A. $\frac{\pi R^3 \sqrt{14}}{12}$. B. $\frac{\pi R^3 \sqrt{14}}{2}$. C. $\frac{\pi R^3 \sqrt{14}}{6}$. D. $\frac{\pi R^3 \sqrt{14}}{3}$.

Câu 3: (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định Lần 1) Một khối nón có bán kính đáy bằng 2 cm, chiều cao bằng $\sqrt{3}$ cm. Một mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với đáy một góc 60° chia khối nón làm 2 phần. Tính thể tích V phần nhỏ hơn (Tính gần đúng đến hàng phần trăm).

- A. $V \approx 1,42 \text{ cm}^3$. B. $V \approx 2,36 \text{ cm}^3$. C. $V \approx 1,53 \text{ cm}^3$. D. $V \approx 2,47 \text{ cm}^3$.

Câu 4: Cho khối nón tròn xoay có đường cao $h = 20 \text{ cm}$, bán kính đáy $r = 25 \text{ cm}$. Một mặt phẳng (P) đi qua 2 đỉnh của khối nón và có khoảng cách đến tâm O của đáy là 12 cm. Khi đó diện tích thiết diện của (P) với khối nón bằng:

- A. 500 cm^2 B. 475 cm^2 C. 450 cm^2 D. 550 cm^2

Câu 5: (THPT-Yên-Mô-A-Ninh-Bình-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho tam giác ABC cân tại A , biết $AB = 2a$ và góc $\widehat{ABC} = 30^\circ$, cho tam giác ABC (kể cả điểm trong) quay xung quanh đường thẳng AC được khối tròn xoay. Khi đó thể tích khối tròn xoay bằng

- A. $2\pi a^3$. B. $6\pi a^3$. C. $\frac{2\pi a^3}{3}$. D. $2a^3$.

Câu 6: Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{BAD} = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), $AD = a$ và $\widehat{ADB} = 90^\circ$. Quay $ABCD$ quanh AB , ta được vật tròn xoay có thể tích là:

- A. $V = \pi a^3 \sin^2 \alpha$ B. $V = \pi a^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha$

C. $V = \pi a^3 \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$

D. $V = \pi a^3 \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$

Câu 7: Cho hình nón $\mathcal{N}$ có bán kính đáy R , đường cao SO . Gọi (P) mà mặt phẳng vuông góc với SO tại O_1 sao cho $SO_1 = \frac{1}{3}SO$. Một mặt phẳng qua trục hình nón cắt phần khối nón $\mathcal{N}$ nằm giữa (P) và đáy hình nón theo thiết diện là hình tứ giác có hai đường chéo vuông góc. Tính thể tích phần hình nón $\mathcal{N}$ nằm giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng chứa đáy hình nón $\mathcal{N}$.

A. $\frac{7\pi R^3}{9}$

B. $\frac{\pi R^3}{9}$

C. $\frac{26\pi R^3}{81}$

D. $\frac{52\pi R^3}{81}$

Câu 8: (THIT số 3) Một hình thang cân có chiều cao h và độ dài hai đáy là a, b . Tính thể tích vật thể tròn xoay thu được khi quay hình thang này quanh đường trung trục của hai đáy.

A. $\frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2)$.

B. $\frac{1}{6}\pi h(a^2 + ab + b^2)$.

C. $\frac{1}{12}\pi h(a^2 + ab + b^2)$.

D. Cả A, B, C đều sai.

Câu 9: (Hải Hậu Lần 1) Cho hình trụ (T) có chiều cao $h = 2m$, bán kính đáy $r = 3m$. Giả sử (L) là hình lăng trụ đều n cạnh có hai đáy là đa giác đều nội tiếp đường tròn đáy của hình trụ (T) . Khi n tăng lên vô hạn thì tổng diện tích tất cả các mặt của của khối lăng trụ (L) (tính bằng m^2) có giới hạn là:

A. $S = 12$.

B. $S = 20\pi$.

C. 30π .

D. 12π .

Câu 10: (Sở Bắc Ninh) Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, tứ giác $ABCD$ là hình thang vuông với cạnh đáy AD, BC . $AD = 3CB = 3a$, $AB = a$, $SA = a\sqrt{3}$. Điểm I thỏa mãn $\overline{AD} = 3\overline{AI}$, M là trung điểm SD , H là giao điểm của AM và SI . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SC . Tính thể tích V của khối nón có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác EFH và đỉnh thuộc mặt phẳng $(ABCD)$.

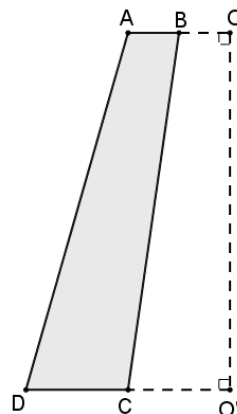
A. $V = \frac{\pi a^3}{5\sqrt{5}}$.

B. $V = \frac{\pi a^3}{2\sqrt{5}}$.

C. $V = \frac{\pi a^3}{\sqrt{5}}$.

D. $V = \frac{\pi a^3}{10\sqrt{5}}$.

Câu 11: Thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang $ABCD$ quanh trục OO' , biết $OO' = 80$, $O'D = 24$, $O'C = 12$, $OA = 12$, $OB = 6$.



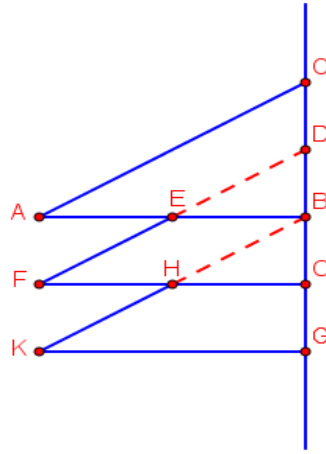
A. $V = 43200\pi$.

B. $V = 21600\pi$.

C. $V = 20160\pi$.

D. $V = 45000\pi$.

Câu 12: Cho ba hình tam giác đều cạnh bằng a chồng lên nhau như hình vẽ (cạnh đáy của tam giác trên đi qua các trung điểm hai cạnh bên của tam giác dưới). Tính theo a thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay chúng xung quanh đường thẳng d .



A. $\frac{13\sqrt{3}\pi a^3}{96}$.

B. $\frac{11\sqrt{3}\pi a^3}{96}$.

C. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{8}$.

D. $\frac{11\sqrt{3}\pi a^3}{8}$.

Câu 13: (Nguyễn Trãi Hải Dương Lần1) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2$, $AD=2\sqrt{3}$ và nằm trong mặt phẳng (P) . Quay (P) một vòng quanh đường thẳng BD . Khối tròn xoay được tạo thành có thể tích bằng

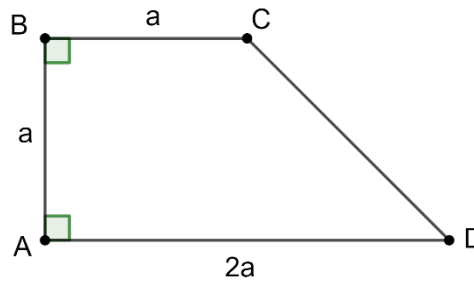
A. $\frac{28\pi}{9}$.

B. $\frac{28\pi}{3}$.

C. $\frac{56\pi}{9}$.

D. $\frac{56\pi}{3}$.

Câu 14: (Cụm 8 trường chuyên lần1) Cho hình thang $ABCD$ có $\hat{A}=\hat{B}=90^\circ$, $AB=BC=a$, $AD=2a$. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình thang $ABCD$ xung quanh trục CD .



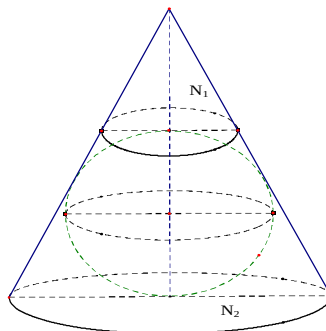
A. $\frac{7\sqrt{2}\pi a^3}{6}$.

B. $\frac{7\sqrt{2}\pi a^3}{12}$.

C. $\frac{7\pi a^3}{6}$.

D. $\frac{7\pi a^3}{12}$.

Câu 15: Một hình nón bị cắt bởi mặt phẳng (P) song song với đáy. Mặt phẳng (P) chia hình nón làm hai phần (N_1) và (N_2) . Cho hình cầu nội tiếp (N_2) như hình vẽ sao cho thể tích hình cầu bằng một nửa thể tích của (N_2) . Một mặt phẳng đi qua trục hình nón và vuông góc với đáy cắt (N_2) theo thiết diện là hình thang cân, tang góc nhọn của hình thang cân là



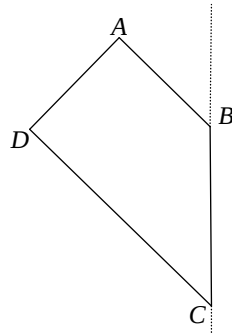
A. 2

B. 4

C. 1

D. $\sqrt{3}$

Câu 16: (CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ HÒA BÌNH LẦN 4 NĂM 2019) Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D có $CD = 2AB = 2AD = 4$. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra bởi hình thang $ABCD$ khi quay xung quanh đường thẳng BC bằng



A. $\frac{28\sqrt{2}}{3}\pi$.

B. $\frac{20\sqrt{2}}{3}\pi$.

C. $\frac{32\sqrt{2}}{3}\pi$.

D. $\frac{10\sqrt{2}}{3}\pi$.

Câu 17: Trong các hình nón tròn xoay cùng có diện tích toàn phần bằng π . Tính thể tích hình nón lớn nhất?

A. $\frac{\pi\sqrt{2}}{9}$.

B. $\frac{\pi\sqrt{2}}{12}$.

C. $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$.

Câu 18: Tìm hình nón có thể tích nhỏ nhất ngoại tiếp mặt cầu bán kính r cho trước có thể tích bằng:

A. $\frac{1}{6}\pi r^3$

B. $\frac{8}{3}\pi r^3$

C. $\frac{2}{3}\pi r^3$

D. $\frac{4}{3}\pi r^3$

Câu 19: Cho một hình nón (N) có đáy là hình tròn tâm O . Đường kính $2a$ và đường cao $SO = a$. Cho điểm H thay đổi trên đoạn thẳng SO . Mặt phẳng (P) vuông góc với SO tại H và cắt hình nón theo đường tròn (C). Khối nón có đỉnh là O và đáy là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2\pi a^3}{81}$.

B. $\frac{4\pi a^3}{81}$.

C. $\frac{7\pi a^3}{81}$.

D. $\frac{8\pi a^3}{81}$.

Câu 20: Cho hình nón có chiều cao h . Tính chiều cao x của khối trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong hình nón theo h .

A. $x = \frac{h}{2}$.

B. $x = \frac{h}{3}$.

C. $x = \frac{2h}{3}$.

D. $x = \frac{h}{\sqrt{3}}$.

Câu 21: Cho hình nón đỉnh S , đáy là hình tròn tâm O , góc ở đỉnh bằng 120° . Trên đường tròn đáy, lấy điểm A cố định và điểm M di động. Có bao nhiêu vị trí điểm của điểm M để diện tích tam giác SAM đạt giá trị lớn nhất?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. vô số.

Câu 22: Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ và điểm C thay đổi trên nửa đường tròn đó, đặt $\alpha = \widehat{CAB}$ và gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB . Tìm α sao cho thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay tam giác ACH quanh trục AB đạt giá trị lớn nhất.

A. $\alpha = 60^\circ$.

B. $\alpha = 45^\circ$.

C. $\arctan \frac{1}{\sqrt{2}}$.

D. $\alpha = 30^\circ$.

Câu 23: Gọi r và h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của một hình nón. Kí hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích hình nón và thể tích hình cầu nội tiếp hình nón. Khi r và h thay đổi, tìm giá trị bé nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$

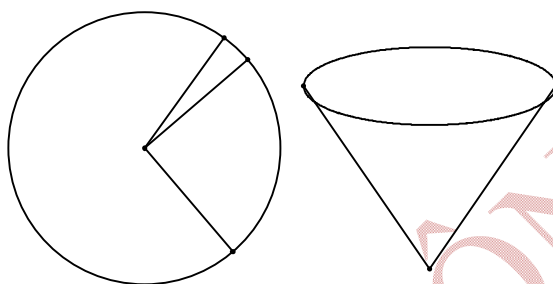
A. $\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{2}$

C. $\frac{1}{3}$

D. 2

Câu 24: Với một miếng tôn hình tròn có bán kính bằng $R=6cm$. Người ta muốn làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của hình tròn này và gấp phần còn lại thành hình nón (Như hình vẽ).



Hình nón có thể tích lớn nhất khi người ta cắt cung tròn của hình quạt bằng:

A. $4\pi\sqrt{6}cm$

B. $6\pi\sqrt{6}cm$

C. $2\pi\sqrt{6}cm$

D. $8\pi\sqrt{6}cm$

Câu 25: Gọi r và h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của một hình nón. Kí hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình nón và thể tích của khối cầu nội tiếp hình nón. Giá trị bé nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là

A. $\frac{5}{4}$.

B. $\frac{4}{3}$.

C. 3.

D. 2.

Câu 26: Cho một miếng tôn hình tròn có bán kính $50cm$. Biết hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích miếng tôn ở trên. Khi đó hình nón có bán kính đáy là

A. $10\sqrt{2}cm$

B. $20cm$

C. $50\sqrt{2}cm$

D. $25cm$

Câu 27: (Chuyên Thái Nguyên) Khi cắt hình nón có chiều cao $16cm$ và đường kính đáy $24cm$ bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện có diện tích lớn nhất gần với giá trị nào sau đây?

A. 170.

B. 260.

C. 294.

D. 208.

Câu 28: (CỤM-CHUYÊN-MÔN-HẢI-PHÒNG) Gọi d là đường thẳng tùy ý đi qua điểm $M(1;1)$ và có hệ số góc âm. Giả sử d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B . Quay tam giác OAB quanh trục Oy thu được một khối tròn xoay có thể tích là V . Giá trị nhỏ nhất của V bằng:

A. 3π .

B. $\frac{9\pi}{4}$.

C. 2π .

D. $\frac{5\pi}{2}$.

II - MẶT TRỤ TRÒN XOAY**A – LÝ THUYẾT CHUNG****1. Mặt trụ**

Nội dung	Hình vẽ
Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng Δ và l song song với nhau, cách nhau một khoảng bằng r. Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay, gọi tắt là mặt trụ. ☐ Đường thẳng Δ gọi là trục. ☐ Đường thẳng l là đường sinh. ☐ r là bán kính của mặt trụ đó.	

2. Hình trụ tròn xoay và khối trụ tròn xoay

Nội dung	Hình vẽ
Ta xét hình chữ nhật ABCD. Khi quay hình chữ nhật ABCD xung quanh đường thẳng chứa một cạnh nào đó, chẳng hạn cạnh AB thì đường gấp khúc ADCB sẽ tạo thành một hình gọi là hình trụ tròn xoay, hay gọi tắt là hình trụ.	

- ☐ Khi quay quanh AB, hai cạnh AD và BC sẽ vạch ra hai hình tròn bằng nhau gọi là hai đáy của hình trụ, bán kính của chúng gọi là bán kính của hình trụ.
- ☐ Độ dài đoạn CD gọi là độ dài đường sinh của hình trụ.
- ☐ Phần mặt tròn xoay được sinh ra bởi các điểm trên cạnh CD khi quay xung quanh AB gọi là mặt xung quanh của hình trụ.
- ☐ Khoảng cách AB giữa hai mặt phẳng song song chứa hai đáy là chiều cao của hình trụ.
- ☐ **Diện tích xung quanh:** $S_{xq} = 2\pi rl$.
- ☐ **Diện tích toàn phần:** $S_{tp} = 2\pi rl + 2\pi r^2$.
- ☐ **Thể tích:** $V = \pi r^2 h$.

3. MỘT SỐ DẠNG TOÁN VÀ CÔNG THỨC GIẢI BÀI TOÁN MẶT TRỤ**3. 1. Dạng 1. Thiết diện của hình trụ cắt bởi một mặt phẳng**

Nội dung	Hình vẽ
----------	---------

Thiết diện vuông góc trục là một đường tròn bán kính R Thiết diện chứa trục là một hình chữ nhật $ABCD$ trong đó $AB = 2R$ và $AD = h$. Nếu thiết diện qua trục là một hình vuông thì $h = 2R$. Thiết diện song song với trục và không chứa trục là hình chữ nhật $BGHC$ có khoảng cách tới trục là: $d(OO'; (BGHC)) = OM$	
--	--

3. 2. Dạng 2. Thể tích khối tứ diện có 2 cạnh là đường kính 2 đáy

Nội dung	Hình vẽ
Nếu như AB và CD là hai đường kính bất kỳ trên hai đáy của hình trụ thì: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot OO' \cdot \sin(\angle AB, CD)$ * Đặc biệt: Nếu AB và CD vuông góc nhau thì: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot OO'.$	

3. 3. Dạng 3. Xác định góc khoảng cách

Nội dung	Hình vẽ
Góc giữa AB và trục OO': $(\widehat{AB, OO'}) = \widehat{A'AB}$	
Khoảng cách giữa AB và trục OO': $d(AB; OO') = OM.$	
Nếu $ABCD$ là một hình vuông nội tiếp trong hình trụ thì đường chéo của hình vuông cũng bằng đường chéo của hình trụ. Nghĩa là cạnh hình vuông: $AB\sqrt{2} = \sqrt{4R^2 + h^2}.$	

3. 4. Dạng 4. Xác định mối liên hệ giữa diện tích xung quanh, toàn phần và thể tích khối trụ trong bài toán tối ưu

Nội dung	Hình vẽ
----------	---------

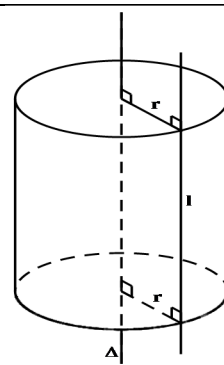
Một khối trụ có thể tích V không đổi.

- Tìm bán kính đáy và chiều cao hình trụ để diện tích toàn phần nhỏ nhất:

$$S_{tp} \min \Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}} \\ h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}} \end{cases}$$

- Tìm bán kính đáy và chiều cao hình trụ để diện tích xung quanh cộng với diện tích 1 đáy và nhỏ nhất:

$$S \min \Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \\ h = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \end{cases}$$



3. 5. Dạng 5. Hình trụ ngoại tiếp, nội tiếp một hình lăng trụ đứng

Cho hình lăng trụ tam giác đều nội tiếp trong một hình trụ. Thể tích khối lăng trụ là V thì thể tích khối trụ là $V_{(T)} = \frac{4\pi V}{9}$

Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ ngoại tiếp trong một hình trụ. Diện tích xung quanh hình trụ là S_{xq} thì diện tích xung quanh của hình lăng trụ là $S_{xq} = \frac{2S}{\pi}$

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O' , bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a . Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A , trên đường đáy tâm O' lấy điểm B sao cho $AB = 2a$. Tính thể tích của khối tứ diện $OO'AB$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

B. $\frac{a^3}{12}$

C. $\frac{5a^3\sqrt{3}}{12}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Câu 2: (KÊNH TRUYỀN HÌNH GIÁO DỤC QUỐC GIA VTV7 –2019) Cho khối trụ (T) , AB và CD lần lượt là hai đường kính trên các mặt đáy của khối (T) . Biết góc giữa AB và CD là 30° , $AB = 6\text{cm}$ và thể tích khối $ABCD$ là 30cm^3 . Khi đó thể tích khối trụ (T) là

A. $90\pi\text{cm}^3$.

B. $30\pi\text{cm}^3$.

C. $45\pi\text{cm}^3$.

D. $\frac{90\pi\sqrt{3}}{270}\text{cm}^3$.

Câu 3: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác có $AB = 5$, $AC = 8$ và góc $(AB, AC) = 60^\circ$. Gọi V, V' lần lượt là thể tích của khối lăng trụ ngoại tiếp và nội tiếp khối lăng trụ đã cho. Tính tỉ số $\frac{V'}{V}$?

A. $\frac{9}{49}$

B. $\frac{9}{4}$

C. $\frac{19}{49}$

D. $\frac{29}{49}$

Câu 4: Cho một khối trụ có bán kính đáy $r=a$ và chiều cao $h=2a$. Mặt phẳng (P) song song với trục OO' của khối trụ chia khối trụ thành 2 phần, gọi V_1 là thể tích phần khối trụ chứa trục OO' , V_2 là thể tích phần còn lại của khối trụ. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$, biết rằng (P) cách OO' một khoảng bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

A. $\frac{3\pi+2}{\pi-2}$

B. $\frac{3\pi-2}{\pi-2}$

C. $\frac{2\pi+3}{\pi-2}$

D. $\frac{2\pi-3}{\pi-2}$

Câu 5: Cho một hình trụ có bán kính đáy $R=5$, chiều cao $h=6$. Một đoạn thẳng AB có độ dài bằng 10 và có hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy. Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và trục của hình trụ?

A. 3

B. 4

C. 2

D. 1

Câu 6: Một hình trụ có bán kính đáy bằng 50cm và có chiều cao là 50cm. Một đoạn thẳng AB có chiều dài là 100cm và có hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy. Tính khoảng cách d từ đoạn thẳng đó đến trục hình trụ.

A. $d=50\text{cm}$

B. $d=50\sqrt{3}\text{cm}$

C. $d=25\text{cm}$

D. $d=25\sqrt{3}\text{cm}$

Câu 7: Cho hình trụ có bán kính đáy R và chiều cao R lấy hai điểm A, B nằm trên hai đường tròn đáy sao cho $AB=2R$. Tính khoảng cách từ AB đến trục hình trụ theo R .

A. $\frac{R}{2}$

B. $\frac{R}{3}$

C. $\frac{R}{5}$

D. $\frac{R}{4}$

Câu 8: (Ba Đình Lần 2) Cho khối trụ có đáy là các đường tròn tâm $(O), (O')$ có bán kính là R và chiều cao $h=R\sqrt{2}$. Gọi A, B lần lượt là các điểm thuộc (O) và (O') sao cho OA vuông góc với $O'B$. Tỉ số thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ với thể tích khối trụ là:

A. $\frac{2}{3\pi}$

B. $\frac{1}{3\pi}$

C. $\frac{1}{6\pi}$

D. $\frac{1}{4\pi}$

Câu 9: (Sở Ninh Bình 2019 lần 2) Cho hình trụ có tâm hai đáy lần lượt là O và O' ; bán kính đáy hình trụ bằng a . Trên hai đường tròn (O) và (O') lần lượt lấy hai điểm A và B sao cho AB tạo với trục của hình trụ một góc 30° và có khoảng cách tới trục của hình trụ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính diện tích toàn phần của hình trụ đã cho

A. $2\pi a^2(\sqrt{3}+1)$

B. $\frac{\pi a^2}{3}(\sqrt{3}+2)$

C. $\pi a^2(\sqrt{3}+2)$

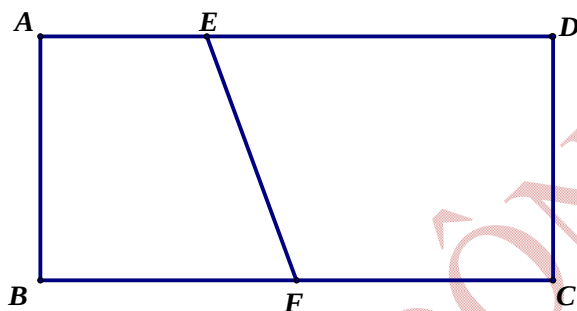
D. $\frac{2\pi a^2}{3}(\sqrt{3}+3)$

Câu 10: (Sở Ninh Bình Lần 1) Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O;R)$ và $(O';R)$. AB là một dây cung của đường tròn $(O;R)$ sao cho tam giác $O'AB$ là tam giác đều và mặt phẳng $(O'AB)$

tạo với mặt phẳng chứa đường tròn $(O; R)$ một góc 60° . Tính theo R thể tích V của khối trụ đã cho.

A. $V = \frac{\pi\sqrt{7}R^3}{7}$. B. $V = \frac{3\pi\sqrt{5}R^3}{5}$. C. $V = \frac{\pi\sqrt{5}R^3}{5}$. D. $V = \frac{3\pi\sqrt{7}R^3}{7}$.

Câu 11: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 2019 – LẦN 1) Có một miếng bìa hình chữ nhật $ABCD$ với $AB=3$ và $AD=6$. Trên cạnh AD lấy điểm E sao cho $AE=2$, trên cạnh BC lấy điểm F là trung điểm BC .



Cuộn miếng bìa lại sao cho cạnh AB và DC trùng nhau để tạo thành mặt xung quanh của một hình trụ. Khi đó tính thể tích V của tứ diện $ABEF$.

A. $V = \frac{\pi}{3}$. B. $V = \frac{9\sqrt{3}}{2\pi^2}$. C. $V = \frac{3\pi^3}{2}$. D. $V = \frac{2}{3\pi^2}$.

Câu 12: (THPT CHUYÊN VINH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O' , bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A , trên đường tròn tâm O' lấy điểm B . Đặt α là góc giữa AB và đáy. Tính $\tan \alpha$ khi thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\tan \alpha = \sqrt{2}$ B. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ C. $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ D. $\tan \alpha = 1$

Câu 13: (THPT CHUYÊN VINH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O' , bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, D sao cho $AD=2\sqrt{3}a$; gọi C là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng chứa đường tròn (O') ; trên đường tròn tâm O' lấy điểm B (AB chéo với CD). Đặt α là góc giữa AB và đáy. Tính $\tan \alpha$ khi thể tích khối tứ diện $CDAB$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\tan \alpha = \sqrt{3}$ B. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ C. $\tan \alpha = 1$ D. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 14: (THPT CHUYÊN VINH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O' , bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, D trên đường tròn tâm O' lấy điểm B, C sao cho $AB \parallel CD$ và AB không cắt OO' . Tính AD để thể tích khối chóp $O'.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $AD = 2\sqrt{2}a$ B. $AD = 4a$ C. $AD = \frac{4\sqrt{3}}{3}a$ D. $AD = \sqrt{2}a$

A. $V_{\max} = 2$ **B.** $V_{\max} = 6$ **C.** $V_{\max} = \frac{1}{2}$ **D.** $V_{\max} = 1$

A. $S = 12\pi$. **B.** $S = 12$. **C.** $S = 20$. **D.** $S = 20\pi$.

A. 1. B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

A diagram of a cylinder. The base is an ellipse. Point A is on the left side of the base, and point B is on the right side. A dashed line segment connects A and B, representing the shortest path on the surface. A solid line segment also connects A and B, representing a different path.

A. $\frac{8(4\pi - 3\sqrt{3})}{3}(cm^2).$

B. $\frac{4(4\pi - \sqrt{3})}{3} (cm^2).$

C. $\frac{4(4\pi - 3\sqrt{3})}{3}(cm^2).$

D. $\frac{8(4\pi - \sqrt{3})}{3}(cm^2).$

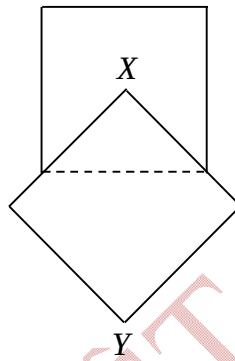
A. $V = \frac{1}{3}\pi a^3\sqrt{3}$ **B.** $V = \pi a^3\sqrt{3}$ **C.** $V = \frac{1}{2}\pi a^3\sqrt{3}$ **D.** $V = \frac{2}{3}\pi a^3\sqrt{3}$

Câu 20: (Sở Quảng NamT) Cho hình trụ có trục OO' , bán kính đáy r và chiều cao $h = \frac{3r}{2}$. Hai điểm

M, N di động trên đường tròn đáy (O) sao cho OMN là tam giác đều. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên $(O'MN)$. Khi M, N di động trên đường tròn (O) thì đoạn thẳng OH tạo thành mặt xung quanh của một hình nón, diện tích S của mặt này.

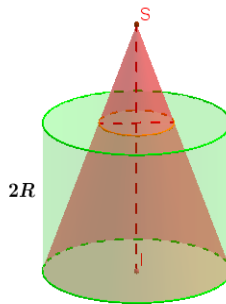
A. $S = \frac{9\sqrt{3}\pi r^2}{32}$. B. $S = \frac{9\sqrt{3}\pi r^2}{16}$. C. $S = \frac{9\pi r^2}{32}$. D. $S = \frac{9\pi r^2}{16}$.

Câu 21: Cho hai hình vuông có cùng cạnh bằng 5 được xếp chồng lên nhau sao cho đỉnh X của một hình vuông là tâm của hình vuông còn lại (như hình vẽ). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên xung quanh trục XY .



A. $V = \frac{125(1 + \sqrt{2})\pi}{6}$. B. $V = \frac{125(5 + 2\sqrt{2})\pi}{12}$.
C. $V = \frac{125(5 + 4\sqrt{2})\pi}{24}$. D. $V = \frac{125(2 + \sqrt{2})\pi}{4}$.

Câu 22: Cho hình nón có độ dài đường kính đáy là $2R$, độ dài đường sinh là $R\sqrt{17}$ và hình trụ có chiều cao và đường kính đáy đều bằng $2R$, lồng vào nhau như hình vẽ.

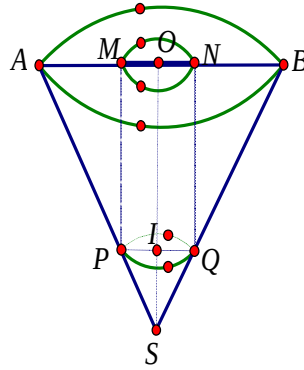


Tính thể tích phần khối trụ không giao với khối nón

A. $\frac{5}{12}\pi R^3$. B. $\frac{1}{3}\pi R^3$. C. $\frac{4}{3}\pi R^3$. D. $\frac{5}{6}\pi R^3$.

Câu 23: Một bình đựng nước dạng hình nón (không đáy) đựng đầy nước. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào đó một khối trụ và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $\frac{16\pi}{9}dm^3$. Biết rằng một mặt của khối trụ nằm trên mặt trên của hình nón, các điểm trên

đường tròn đáy còn lại đều thuộc các đường sinh của hình nón (như hình vẽ) và khối trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón. Diện tích xung quanh S_{xq} của bình nước là:

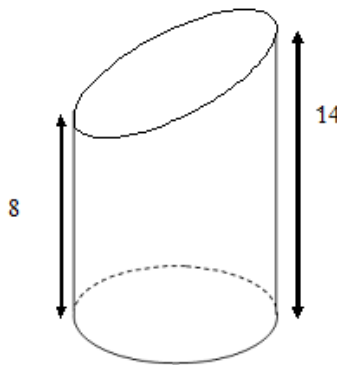


A. $S_{xq} = \frac{9\pi\sqrt{10}}{2} dm^2$. B. $S_{xq} = 4\pi\sqrt{10} dm^2$. C. $S_{xq} = 4\pi dm^2$. D. $S_{xq} = \frac{3\pi}{2} dm^2$.

Câu 24: (CHUYÊN SƯ PHẠM HÀ NỘI LẦN 4 NĂM 2019) Cho hình thang cân $ABCD$, $AB // CD$, $AB = 6 cm$, $CD = 2 cm$, $AD = BC = \sqrt{13} cm$. Quay hình thang $ABCD$ xung quanh đường thẳng AB ta được một khối tròn xoay có thể tích là

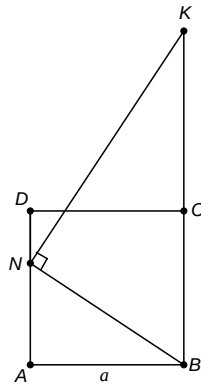
A. $18\pi (cm^3)$. B. $30\pi (cm^3)$. C. $24\pi (cm^3)$. D. $12\pi (cm^3)$.

Câu 25: Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng ta được một khối (H) như hình vẽ bên. Biết rằng thiết diện là một hình elip có độ dài trục lớn bằng 8, khoảng cách từ điểm thuộc thiết diện gần mặt đáy nhất và điểm thuộc thiết diện xa mặt đáy nhất tới mặt đáy lần lượt là 8 và 14 (xem hình vẽ). Tính thể tích của (H) .



A. $V_{(H)} = 192\pi$. B. $V_{(H)} = 275\pi$. C. $V_{(H)} = 704\pi$. D. $V_{(H)} = 176\pi$.

Câu 26: (Chuyên Hưng Yên Lần 3) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi N là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AN = 2ND$. Đường thẳng qua N vuông góc với BN cắt BC tại K . Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay tứ giác $ANKB$ quanh trục BK là



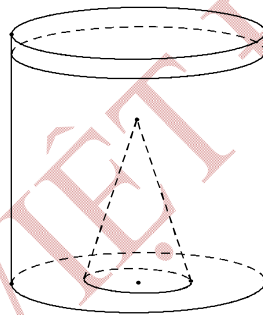
A. $V = \frac{7}{6} \pi a^3$.

B. $V = \frac{9}{14} \pi a^3$.

C. $V = \frac{6}{7} \pi a^3$.

D. $V = \frac{14}{9} \pi a^3$.

Câu 27: (THTT số 3) Một khối nón làm bằng chất liệu không thấm nước, có khối lượng riêng lớn hơn khối lượng riêng của nước, có đường kính đáy bằng a và chiều cao 12, được đặt trong và trên đáy của một cái cốc hình trụ bán kính đáy a như hình vẽ, sao cho đáy của khối nón tiếp xúc với đáy của cốc hình trụ. Đổ nước vào cốc hình trụ đến khi mực nước đạt đến độ cao 12 thì lấy khối nón ra. Hãy tính độ cao của nước trong cốc sau khi đã lấy khối nón ra.



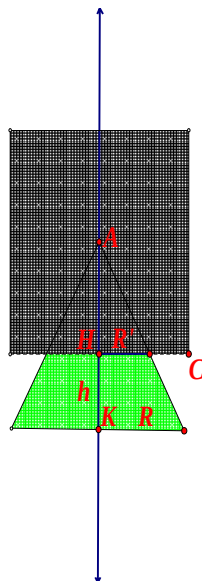
A. 11,37.

B. 11.

C. $6\sqrt{3}$.

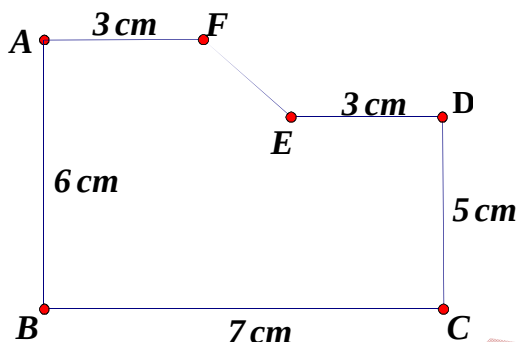
D. $\frac{\pi\sqrt{37}}{2}$.

Câu 28: Cho tam giác đều và hình vuông cùng có cạnh bằng 4 được xếp chồng lên nhau sao cho một đỉnh của tam giác đều trùng với tâm của hình vuông, trục của tam giác đều trùng với trục của hình vuông (như hình vẽ). Thể tích của vật thể tròn xoay sinh bởi hình đã cho khi quay quanh trục AB là



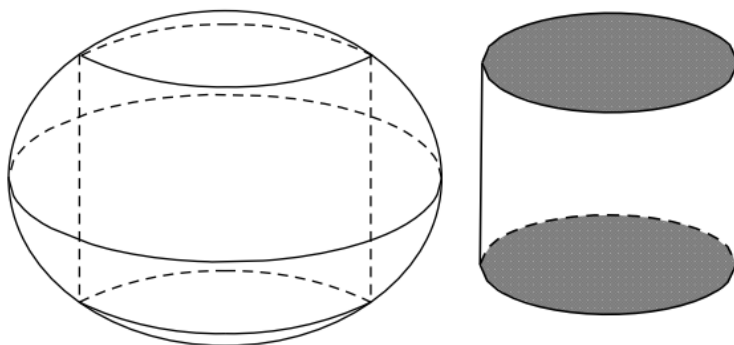
A. $\frac{136\pi + 24\pi\sqrt{3}}{9}$. B. $\frac{48\pi + 7\pi\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{128\pi + 24\pi\sqrt{3}}{9}$. D. $\frac{144\pi + 24\pi\sqrt{3}}{9}$.

Câu 29: Cho hình phẳng (H) được mô tả ở hình vẽ dưới đây. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay được tạo ra khi quay hình phẳng (H) quanh cạnh AB .



A. $V = \frac{772\pi}{3} \text{ cm}^3$. B. $V = \frac{799\pi}{3} \text{ cm}^3$. C. $V = 254\pi \text{ cm}^3$. D. $V = \frac{826\pi}{3} \text{ cm}^3$.

Câu 30: (Thuan-Thanh-Bac-Ninh) Một khối đá có hình là một khối cầu có bán kính R , người thợ thủ công mỹ nghệ cần cắt và gọt viên đá đó thành một viên đá cảnh có hình dạng là một khối trụ. Tính thể tích lớn nhất có thể của viên đá cảnh sau khi đã hoàn thiện?



A. $\frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{9}$. B. $\frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{3}$. C. $\frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{6}$. D. $\frac{3\sqrt{3}\pi R^3}{12}$.

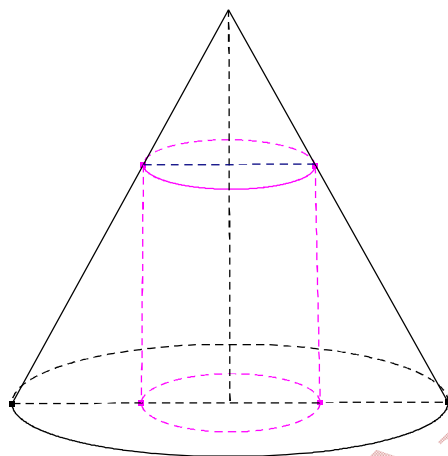
Câu 31: (THẮNG LONG HN LẦN 2 NĂM 2019) Cho mặt cầu (S) có bán kính $\sqrt{3}$. Trong tất cả các khối trụ nội tiếp mặt cầu (S) (hai đáy của khối trụ là những thiết diện của hình cầu cắt bởi hai mặt phẳng song song), khối trụ có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}$. B. 4π . C. 3π . D. $\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$.

Câu 32: Một hình trụ có thể tích V không đổi. Tính mối quan hệ giữa bán kính đáy và chiều cao hình trụ sao cho diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $R = \frac{h}{2}$. B. $R = \frac{h}{3}$. C. $R = \frac{h}{5}$. D. $R = \frac{h}{4}$.

Câu 33: (THPT LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NGÃI) Cho hình nón có bán kính đáy bằng 3 chiều cao bằng 6, một khối trụ có bán kính đáy thay đổi nội tiếp khối nón đã cho (như hình vẽ). Thể tích lớn nhất của khối trụ bằng



- A. 6π . B. 10π . C. 4π . D. 8π .

Câu 34: (NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG LẦN IV NĂM 2019) Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau cắt khối cầu tâm O bán kính R tạo thành hai hình tròn (C_1) và (C_2) cùng bán kính. Xét hình nón có đỉnh trùng với tâm của một trong hai hình tròn, đáy trùng với hình tròn còn lại. Biết diện tích xung quanh của hình nón là lớn nhất, khi đó thể tích khối trụ có hai đáy là hai hình tròn (C_1) và (C_2) bằng

- A. $\frac{4\pi R^3 \sqrt{3}}{9}$. B. $\frac{2\pi R^3 \sqrt{3}}{9}$. C. $\frac{\pi R^3 \sqrt{3}}{9}$. D. $\frac{4\pi R^3 \sqrt{3}}{3}$.

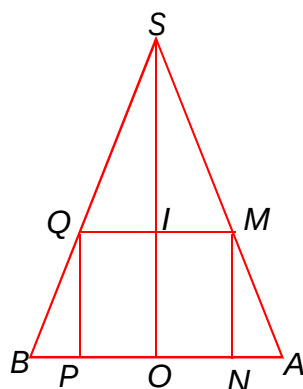
Câu 35: Trong số các hình trụ có diện tích toàn phần đều bằng S thì bán kính R và chiều cao h của khối trụ có thể tích lớn nhất là:

- A. $R = \sqrt{\frac{S}{2\pi}}; h = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{2\pi}}$. B. $R = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}; h = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$.
C. $R = \sqrt{\frac{2S}{3\pi}}; h = 4\sqrt{\frac{2S}{3\pi}}$. D. $R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}; h = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.

Câu 36: Cho hình cầu tâm O , đường kính $2R$ và hình trụ tròn xoay nội tiếp trong hình cầu. Hãy tìm kích thước của hình trụ khi nó có thể tích đạt giá trị lớn nhất.

- A. $r = \frac{R\sqrt{6}}{3}$ B. $r = \frac{2R}{3}$ C. $r = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ D. $r = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

Câu 37: Cho hình vẽ bên. Tam giác SOA vuông tại O có $MN \parallel SO$ với M, N lần lượt nằm trên cạnh SA, OA . Đặt $SO = h$ không đổi. Khi quay hình vẽ quanh SO thì tạo thành một hình trụ nội tiếp hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O bán kính $R = OA$. Tìm độ dài của MN để thể tích khối trụ là lớn nhất.

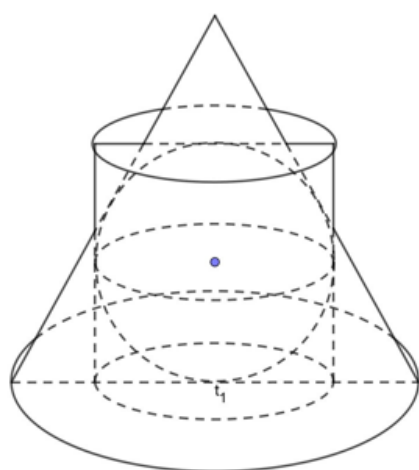


- A. $MN = \frac{h}{2}$ B. $MN = \frac{h}{3}$ C. $MN = \frac{h}{4}$ D. $MN = \frac{h}{6}$

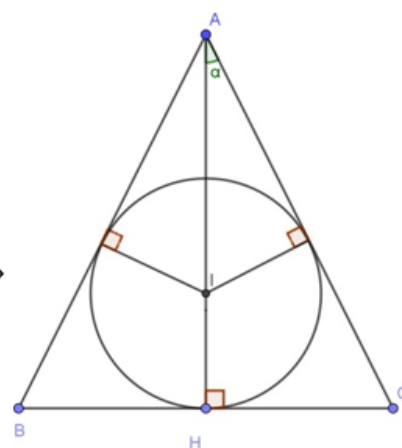
Câu 38: Cho nửa đường tròn đường kính $AB=2R$, hai điểm C, D di động trên nửa đường tròn sao cho $CD \parallel AB$. Kí hiệu $CD=x$, tìm x để vật thể tròn xoay tạo thành khi quay hình thang cân $ACDB$ quanh trục AB lớn nhất.

- A. $x = \frac{R(\sqrt{13}-1)}{3}$ B. $x = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ C. $x = \frac{R(1+2\sqrt{13})}{15}$ D. $x = \frac{R}{\sqrt{3}}$

Câu 39: (SỞ GD&ĐT KIÊN GIANG 2019) Cho một hình cầu nội tiếp hình nón tròn xoay có góc ở đỉnh là 2α , bán kính đáy là R và chiều cao là h . Một hình trụ ngoại tiếp hình cầu đó có đáy dưới nằm trong mặt phẳng đáy của hình nón (tham khảo hình vẽ). Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình nón và hình trụ, biết rằng $V_1 \neq V_2$. Gọi M là giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V_2}{V_1}$. Giá trị của biểu thức $P = 48M + 25$ thuộc khoảng nào dưới đây?



Mặt cắt bởi mặt phẳng
qua trục của hình nón



- A. $(40; 60)$ B. $(60; 80)$ C. $(20; 40)$ D. $(0; 20)$

III - MẶT CẦU – KHỐI CẦU

A – LÝ THUYẾT CHUNG

1. Mặt cầu

Nội dung	Hình vẽ
Cho điểm I cố định và một số thực dương R. Tập hợp tất cả những điểm M trong không gian cách I một khoảng R được gọi là mặt cầu tâm I, bán kính R. Kí hiệu: $S(I; R)$. Khi đó: $S(I; R) = \{M \mid IM = R\}$	

2. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu $S(I; R)$ và mặt phẳng (P) . Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $(P) \Rightarrow d = IH$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) . Khi đó:

$d > R$	$d = R$	$d < R$
Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.	Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu: (P) là mặt phẳng tiếp diện của mặt cầu và H : tiếp điểm .	Mặt phẳng cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm I' và bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$

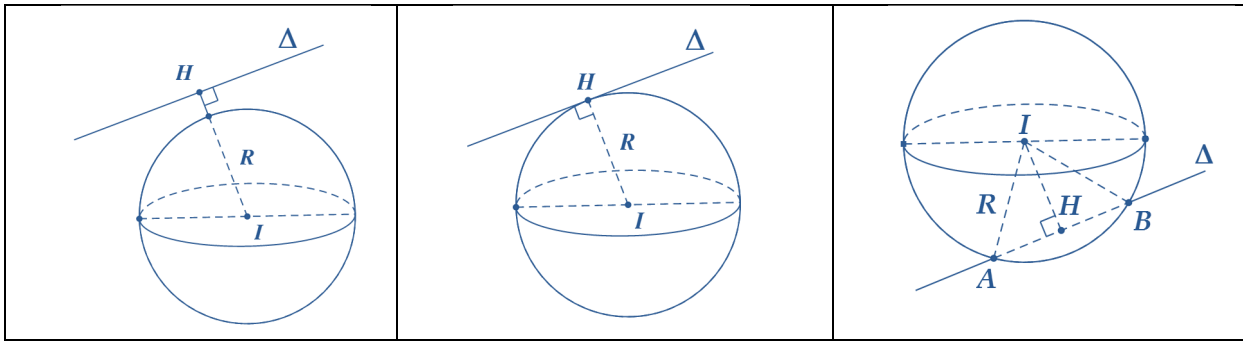
Lưu ý:

Khi mặt phẳng (P) đi qua tâm I của mặt cầu thì mặt phẳng (P) được gọi là **mặt phẳng kính** và thiết diện lúc đó được gọi là **đường tròn lớn**.

3. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

Cho mặt cầu $S(I; R)$ và đường thẳng Δ . Gọi H là hình chiếu của I lên Δ . Khi đó:

$IH > R$	$IH = R$	$IH < R$
Δ không cắt mặt cầu.	Δ tiếp xúc với mặt cầu. Δ : Tiếp tuyến của (S) H : tiếp điểm .	Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.



Lưu ý:

Trong trường hợp Δ cắt (S) tại 2 điểm A, B thì bán kính R của (S) được tính như sau:

$$\begin{cases} d(I; \Delta) = IH \\ R = \sqrt{IH^2 + AH^2} = \sqrt{IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} \end{cases}$$

4. MỘT SỐ DẠNG TOÁN VÀ CÔNG THỨC GIẢI BÀI TOÁN MẶT CẦU

4.1. Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

4.1. Các khái niệm cơ bản

Trục của đa giác đáy: là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác đáy và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác đáy $\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên trục của đa giác thì cách đều các đỉnh của đa giác đó.

Đường trung trực của đoạn thẳng: là đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.

$\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên đường trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.

Mặt trung trực của đoạn thẳng: là mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.

$\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên mặt trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.

4.2. Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp: là điểm cách đều các đỉnh của hình chóp. Hay nói cách khác, nó chính là giao điểm I của trục đường tròn ngoại tiếp mặt phẳng đáy và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên hình chóp.

Bán kính: là khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình chóp.

4.3. Cách xác định tâm và bán kính mặt cầu của một số hình đa diện

4.3.1. Hình hộp chữ nhật, hình lập phương

Nội dung	Hình vẽ
----------	---------

Tâm: trùng với tâm đối xứng của hình hộp chữ nhật (hình lập phương) $\Rightarrow$ Tâm là I, là trung điểm của AC'. Bán kính: bằng nửa độ dài đường chéo hình hộp chữ nhật (hình lập phương). $\Rightarrow$ Bán kính: $R = \frac{AC'}{2}$.	
---	--

4.3.2. Hình lăng trụ đứng có đáy nội tiếp đường tròn

Nội dung	Hình vẽ
Xét hình lăng trụ đứng $A_1A_2A_3...A_n, A'_1A'_2A'_3...A'_n$, trong đó có 2 đáy $A_1A_2A_3...A_n$ và $A'_1A'_2A'_3...A'_n$ nội tiếp đường tròn (O) và (O'). Lúc đó, mặt cầu nội tiếp hình lăng trụ đứng có: Tâm: I với I là trung điểm của OO'. Bán kính: $R = IA_1 = IA_2 = ... = IA'_n$.	

4.3.3. Hình chóp có các đỉnh nhìn đoạn thẳng nối 2 đỉnh còn lại dưới 1 góc vuông

Nội dung	Hình vẽ
Hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = 90^\circ$. Tâm: I là trung điểm của SC. Bán kính: $R = \frac{SC}{2} = IA = IB = IC$. Hình chóp $S.ABCD$ có $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = \widehat{SDC} = 90^\circ$. Tâm: I là trung điểm của SC. Bán kính: $R = \frac{SC}{2} = IA = IB = IC = ID$.	

4.3.4. Hình chóp đều

Nội dung	Hình vẽ
----------	---------

Cho hình chóp đều $S.ABC\dots$

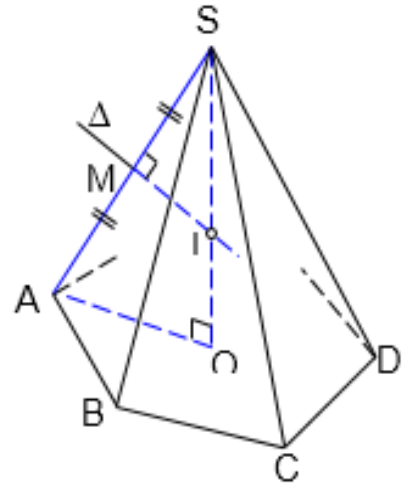
Gọi O là tâm của đáy $\Rightarrow SO$ là trục của đáy.

Trong mặt phẳng xác định bởi SO và một cạnh bên, chẳng hạn như $mp(SAO)$, ta vẽ đường trung trực của cạnh SA là Δ cắt SA tại M và cắt SO tại $I \Rightarrow I$ là tâm của mặt cầu.

Bán kính:

Ta có: $\triangle SMI \sim \triangle SOA \Rightarrow \frac{SM}{SO} = \frac{SI}{SA} \Rightarrow$ Bán kính:

$$R = IS = \frac{SM \cdot SA}{SO} = \frac{SA^2}{2SO} = IA = IB = IC = \dots$$



4.3.5. Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy

Nội dung	Hình vẽ
Cho hình chóp $S.ABC\dots$ có cạnh bên $SA \perp (ABC\dots)$ và đáy $ABC\dots$ nội tiếp được trong đường tròn tâm O. Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC\dots$ được xác định như sau: Từ tâm O ngoại tiếp của đường tròn đáy, ta vẽ đường thẳng d vuông góc với $mp(ABC\dots)$ tại O. Trong $mp(d, SA)$, ta dựng đường trung trực Δ của cạnh SA, cắt SA tại M, cắt d tại $I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và bán kính $R = IA = IB = IC = IS = \dots$ Tìm bán kính Ta có: $MIOB$ là hình chữ nhật. Xét $\triangle MAI$ vuông tại M có: $R = AI = \sqrt{MI^2 + MA^2} = \sqrt{AO^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2}$	

4.3.6. Hình chóp khác

Dựng trục Δ của đáy.

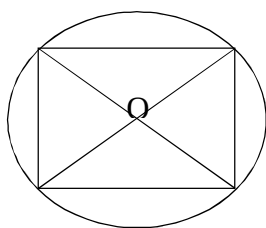
Dựng mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên bất kì.

$(\alpha) \cap \Delta = I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

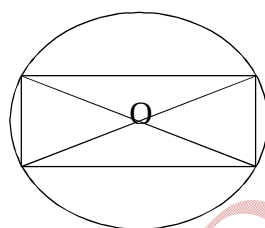
Bán kính: khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình chóp.

4.3.7. Đường tròn ngoại tiếp một số đa giác thường gặp

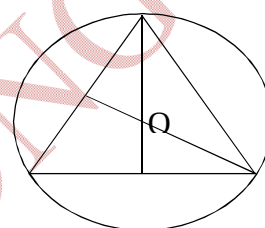
Khi xác định tâm mặt cầu, ta cần xác định trục của mặt phẳng đáy, đó chính là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đáy tại tâm O của đường tròn ngoại tiếp đáy. Do đó, việc xác định tâm ngoại O là yếu tố rất quan trọng của bài toán.



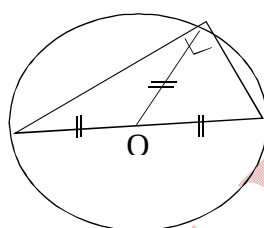
Hình vuông: O là giao điểm 2 đường chéo.



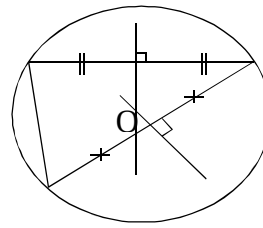
Hình chữ nhật: O là giao điểm của hai đường chéo.



Δ đều: O là giao điểm của 2 đường trung tuyến (trọng tâm).



Δ vuông: O là trung điểm của cạnh huyền



Δ thường: O là giao điểm của hai đường trung trực của hai cạnh Δ .

5.1 Kỹ thuật xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

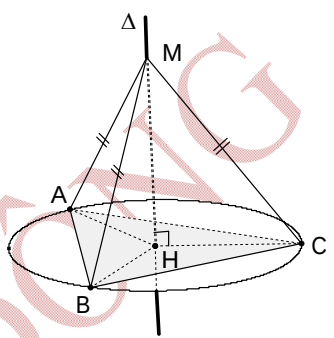
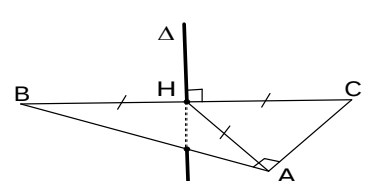
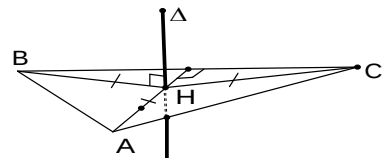
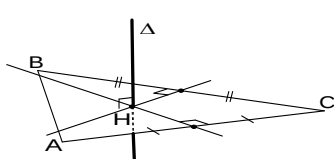
Nội dung	Hình vẽ
Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ (thỏa mãn điều kiện tồn tại mặt cầu ngoại tiếp). Thông thường, để xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta thực hiện theo hai bước: <u>Bước 1:</u> Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. Dựng Δ: trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. <u>Bước 2:</u> Lập mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên. Lúc đó	

Tâm O của mặt cầu: $\Delta \cap mp(\alpha) = \{O\}$

Bán kính: $R = SA (= SO)$. Tùy vào từng trường hợp.

5.2. Kỹ năng xác định trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy

5.2.1. Trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy

Nội dung	Hình vẽ
Định nghĩa Trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp đáy và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính chất $\forall M \in \Delta : MA = MB = MC$ Suy ra: $MA = MB = MC \Leftrightarrow M \in \Delta$ Các bước xác định trục <u>Bước 1:</u> Xác định tâm H của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. <u>Bước 2:</u> Qua H dựng Δ vuông góc với mặt phẳng đáy. Một số trường hợp đặc biệt Đáy là tam giác vuông Đáy là tam giác đều Đáy là tam giác thường	   

5.2.2. Kỹ năng tam giác đồng dạng

Nội dung	Hình vẽ
ΔSMO đồng dạng với $\Delta SIA \Rightarrow \frac{SO}{SA} = \frac{SM}{SI}$.	

5.2.3. Nhận xét quan trọng

$$\exists M, S : \begin{cases} MA = MB = MC \\ SA = SB = SC \end{cases} \Rightarrow SM \text{ là trục đường tròn ngoại tiếp } \Delta ABC.$$

5.3. Kỹ thuật sử dụng hai trục xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp đa diện

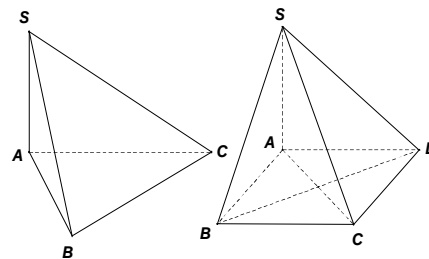
Nội dung	Hình vẽ
Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ (thỏa mãn điều kiện tồn tại mặt cầu ngoại tiếp). Thông thường, để xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta thực hiện theo hai bước: <u>Bước 1:</u> Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. Dựng Δ: trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. <u>Bước 2:</u> Xác định trục d của đường tròn ngoại tiếp một mặt bên (để xác định) của khối chóp. Lúc đó: Tâm I của mặt cầu: $\Delta \cap d = \{I\}$ Bk: $R = IA (= IS)$. Tùy vào từng trường hợp.	

5.4. Tổng kết các dạng tìm tâm và bán kính mặt cầu

5.4.1. Dạng 1

Nội dung	Hình vẽ
----------	---------

Cạnh bên SA vuông góc đáy và $\widehat{ABC} = 90^\circ$ khi đó $R = \frac{SC}{2}$
và tâm là trung điểm SC .



5.4.2. Dạng 2

Nội dung

Cạnh bên SA vuông góc đáy và bất kể đáy là hình gì, chỉ cần tìm được bán kính đường tròn ngoại tiếp của đáy là R_D , khi đó :

$$R^2 = R_D^2 + \frac{SA^2}{4}$$

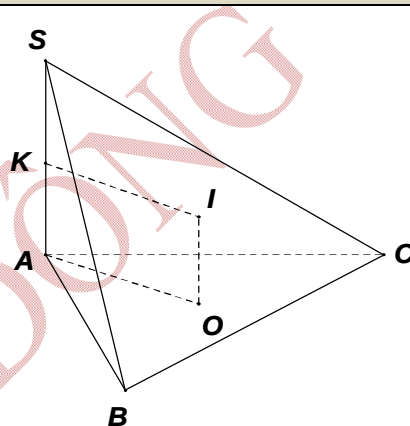
$$R_D = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} \quad (p : \text{nửa chu vi}).$$

Nếu $\triangle ABC$ vuông tại A thì: $R_D = \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2 + AS^2)$.

Đáy là hình vuông cạnh a thì $R_D = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

nếu đáy là tam giác đều cạnh a thì $R_D = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hình vẽ



5.4.3. Dạng 3

Nội dung

Chóp có các cạnh bên bằng nhau: $SA = SB = SC = SD$:

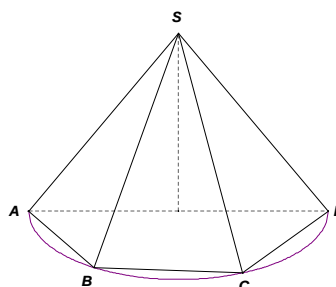
$$R = \frac{SA^2}{2SO}.$$

$ABCD$ là hình vuông, hình chữ nhật, khi đó O là giao hai đường chéo.

$\triangle ABC$ vuông, khi đó O là trung điểm cạnh huyền.

$\triangle ABC$ đều, khi đó O là trọng tâm, trực tâm.

Hình vẽ



5.4.4. Dạng 4

Nội dung	Hình vẽ
Hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) vuông góc với nhau và có giao tuyến AB. Khi đó ta gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác SAB và ABC. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp: $R^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{4}$	

5.4.5. Dạng 5

Chóp $S.ABCD$ có đường cao SH , tâm đường tròn ngoại tiếp đáy là O . Khi đó ta giải phương trình:

$$(SH - x)^2 + OH^2 = x^2 + R_D^2. \text{ Với giá trị } x \text{ tìm được ta có: } R^2 = x^2 + R_D^2.$$

5.4.6. Dạng 6: Bán kính mặt cầu nội tiếp: $r = \frac{3V}{S_{tp}}$.

6 - TỔNG HỢP CÁC CÔNG THỨC ĐẶC BIỆT VỀ KHỐI TRÒN XOAY

1. Chỏm cầu

Nội dung	Hình vẽ
$\begin{cases} S_{xq} = 2\pi Rh = \pi(r^2 + h^2) \\ V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) = \frac{\pi h}{6} (h^2 + 3r^2) \end{cases}$	

2. Hình trụ cụt

Nội dung	Hình vẽ
$\begin{cases} S_{xq} = \pi R(h_1 + h_2) \\ V = \pi R^2 \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right) \end{cases}$	

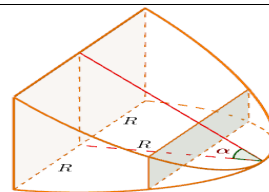
3. Hình nêm loại 1

Nội dung	Hình vẽ
$V = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha$	

4. Hình nêm loại 2

Nội dung	Hình vẽ
----------	---------

$$V = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) R^3 \tan \alpha$$



5. Parabol bậc hai-Paraboloid tròn xoay

Nội dung	Hình vẽ
$\begin{cases} S_{\text{parabol}} = \frac{4}{3}Rh; \frac{S'}{S} = \left(\sqrt{\frac{x}{h}} \right)^3 = \left(\frac{a}{R} \right)^3 \\ V = \frac{1}{2}\pi R^2 h = \frac{1}{2}V_{\text{trụ}} \end{cases}$	

6. Diện tích Elip và Thể tích khối tròn xoay sinh bởi Elip

Nội dung	Hình vẽ
$\begin{cases} S_{\text{elip}} = \pi ab \\ V_{\text{xoay quanh } 2a} = \frac{4}{3}\pi ab^2 \\ V_{\text{xoay quanh } 2b} = \frac{4}{3}\pi a^2 b \end{cases}$	

7. Diện tích hình vành khăn

Nội dung	Hình vẽ
$S = \pi(R^2 - r^2)$	

8. Thể tích hình xuyến (phao)

Nội dung	Hình vẽ
$V = 2\pi^2 \left(\frac{R+r}{2} \right) \left(\frac{R-r}{2} \right)^2$	

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DẠNG 1: MẶT CẦU NGOẠI TIẾP, NỘI TIẾP KHỐI ĐA DIỆN

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB=1$, $AC=2$ và $\widehat{BAC}=60^\circ$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC . Tính bán kính R của mặt cầu đi qua các điểm A, B, C, M, N .

A. $R = \sqrt{2}$. B. $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. $R = \frac{4}{\sqrt{3}}$. D. $R = 1$.

Câu 2: (Chuyên Hưng Yên Lần 3) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I cạnh $AB = 3a$, $BC = 4a$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của ID . Biết rằng SB tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45° . Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{25\pi}{2}a^2$. B. $\frac{125\pi}{4}a^2$. C. $\frac{125\pi}{2}a^2$. D. $4\pi a^2$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC . Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Gọi G là trọng tâm tam giác SAC , R là bán kính mặt cầu có tâm G và tiếp xúc với mặt phẳng (SAB) . Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $R = d[G, (SAB)]$. B. $3\sqrt{13}R = 2SH$. C. $\frac{R^2}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4\sqrt{3}}{39}$. D. $\frac{R}{a} = \sqrt{13}$.

Câu 4: Cho khối chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$; đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$; $AD = 2a$; $SA = a$. Gọi E là trung điểm của AD . Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ECD$.

A. $R = \frac{a\sqrt{7}}{2}$ B. $R = a\sqrt{7}$ C. $R = \frac{a\sqrt{11}}{2}$ D. $R = a\sqrt{11}$

Câu 5: (-Mai-Anh-Tuần-Thanh-Hóa-lần-1-2018-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = a$, $BC = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ và mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Tính diện tích xung quanh của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\frac{12\pi a^2}{7}$. B. $\frac{4\pi a^2}{7}$. C. $\frac{3\pi a^2}{7}$. D. $\frac{15\pi a^2}{7}$.

Câu 6: (SỞ PHÚ THỌ LẦN 2 NĂM 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có $AC = a$, $AB = a\sqrt{3}$, $\widehat{BAC} = 150^\circ$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M , N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC . Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $ABCNM$ bằng

A. $\frac{4\sqrt{7}\pi a^3}{3}$. B. $\frac{28\sqrt{7}\pi a^3}{3}$. C. $\frac{20\sqrt{5}\pi a^3}{3}$. D. $\frac{44\sqrt{11}\pi a^3}{3}$.

Câu 7: (Hải Hậu Lần 1) Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC đều cạnh bằng 8cm và một điểm S di động ngoài mặt phẳng (P) sao cho tam giác MAB luôn có diện tích bằng $16\sqrt{3}\text{ cm}^2$, với M là trung điểm của SC . Gọi (S) là mặt cầu đi qua bốn đỉnh M, A, B, C . Khi thể tích hình chóp $S.ABC$ lớn nhất, tính bán kính nhỏ nhất của (S) :

A. $\frac{16\sqrt{6}}{9}$ cm.

B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm.

C. $\frac{4\sqrt{15}}{3}$ cm.

D. $\frac{4\sqrt{39}}{3}$ cm.

Câu 8: (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên Lần 2) Trong không gian cho bốn mặt cầu có bán kính lần lượt là 2; 3; 3; 2 (đơn vị độ dài) đôi một tiếp xúc nhau. Mặt cầu nhỏ tiếp xúc ngoài với cả bốn mặt cầu nói trên có bán kính bằng

A. $\frac{7}{15}$.

B. $\frac{3}{7}$.

C. $\frac{6}{11}$.

D. $\frac{5}{9}$.

Câu 9: (GIỮA-HKII-2019-NGHĨA-HƯNG-NAM-ĐÌNH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết rằng $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$ và $\widehat{ASB} = 60^\circ$. Tính diện tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $S = \frac{13\pi a^2}{2}$.

B. $S = \frac{13\pi a^2}{3}$.

C. $S = \frac{11\pi a^2}{2}$.

D. $S = \frac{11\pi a^2}{3}$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Đường thẳng $SA = a\sqrt{2}$ vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M trung điểm SC , mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A và M đồng thời song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E, F . Bán kính mặt cầu đi qua năm điểm S, A, E, M, F nhận giá trị nào sau đây?

A. $a\sqrt{2}$

B. a

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{a}{2}$

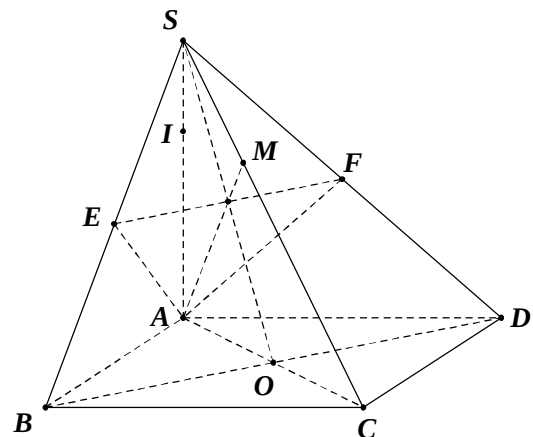
Câu 11: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮK LẮK LẦN X NĂM 2019) Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi K là trung điểm của AB , M, N lần lượt là hình chiếu của K lên AD và AC . Tính theo a bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $K.CDMN$?

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{3a\sqrt{3}}{8}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

D. $\frac{3a\sqrt{2}}{8}$.



Câu 12: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$; tam giác

ABC cân tại A , $AB = a$; $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SC . Tính bán kính mặt cầu đi qua 5 điểm A, B, C, K, H .

A. $R = a\sqrt{3}$

B. $R = a$

C. $R = 2a$

D. Không tồn tại mặt cầu như vậy

Câu 13: (Chuyên Bắc Giang) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, các cạnh còn lại cùng bằng a . Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

$$\text{A. } R = \frac{a\sqrt{13}}{2}. \quad \text{B. } R = \frac{a}{3}. \quad \text{C. } R = \frac{a\sqrt{13}}{3}. \quad \text{D. } R = \frac{a\sqrt{13}}{6}.$$

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC . Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Gọi G là trọng tâm tam giác SAC , R là bán kính mặt cầu có tâm G và tiếp xúc với mặt phẳng (SAB) . Đẳng thức nào sau đây sai?

$$\text{A. } R = d[G, (SAB)] \quad \text{B. } 3\sqrt{13}R = 2SH \quad \text{C. } \frac{R^2}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4\sqrt{3}}{39} \quad \text{D. } \frac{R}{a} = \sqrt{3}$$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD, DC . Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.DMN$.

$$\text{A. } R = \frac{a\sqrt{102}}{6}. \quad \text{B. } R = \frac{a\sqrt{31}}{4}. \quad \text{C. } R = \frac{a\sqrt{39}}{6}. \quad \text{D. } R = \frac{a\sqrt{39}}{13}.$$

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{6}$. Đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và $B, AB = BC = \frac{1}{2}AD = a$. Gọi E là trung điểm AD . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ECD$.

$$\text{A. } R = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \text{B. } R = a\sqrt{6} \quad \text{C. } R = \frac{\sqrt{114}}{6}a \quad \text{D. } R = \frac{a\sqrt{26}}{2}$$

Câu 17: Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = 3a, AC = 4a$. Hình chiếu H của S trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Biết $SA = 2a$, bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

$$\text{A. } R = a \cdot \frac{\sqrt{118}}{4}. \quad \text{B. } R = a \cdot \frac{\sqrt{118}}{2}. \quad \text{C. } R = a \cdot \frac{\sqrt{118}}{8}. \quad \text{D. } R = a \cdot \sqrt{118}.$$

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AC = b, AB = c, \widehat{BAC} = \alpha$. Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $ABCC'B'$ theo b, c, α .

$$\begin{aligned} \text{A. } R &= 2\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}. & \text{B. } R &= \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}}{\sin 2\alpha}. \\ \text{C. } R &= \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}}{2 \sin \alpha}. & \text{D. } R &= \frac{2\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $B, AB = BC = a\sqrt{3}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $A\sqrt{2}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ theo a .

A. $S = 2\pi a^2$ B. $S = 8\pi a^2$ C. $S = 16\pi a^2$ D. $S = 12\pi a^2$

Câu 20: Cho khối chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B , biết $AB=1$; $AC=\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm BC , biết $SM \perp (ABC)$. Tổng diện tích các mặt cầu ngoại tiếp các tứ diện $SMAB$ và $SMAC$ bằng 15π . Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A. $\frac{21\pi}{4}$ B. 20π C. $\frac{25\pi}{4}$ D. 4π

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , cạnh huyền $BC=6$ (cm), các cạnh bên cùng tạo với đáy một góc 60° . Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $48\pi cm^2$. B. $12\pi cm^2$. C. $16\pi cm^2$. D. $24\pi cm^2$.

Câu 22: Cho tứ diện $ABCD$ có ABC và ABD là các tam giác đều cạnh a và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ theo a .

A. $\frac{5}{3}\pi a^2$ B. $\frac{11}{3}\pi a^2$ C. $2\pi a^2$ D. $\frac{4}{3}\pi a^2$

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=3$. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt cạnh SB , SC , SD lần lượt tại các điểm M , N , P . Thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$.

A. $V = \frac{32\pi}{3}$. B. $V = \frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$. C. $V = \frac{108\pi}{3}$. D. $V = \frac{125\pi}{6}$.

Câu 24: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2a^2$ là

A. Mặt cầu có tâm là trọng tâm của tam giác ABC và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

B. Mặt cầu có tâm là trọng tâm của tứ diện và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

C. Mặt cầu có tâm là trọng tâm của tứ diện và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. Đường tròn có tâm là trọng tâm tam giác ABC và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Câu 25: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AB=AC=a$, $BC=\sqrt{3}a$. Cạnh bên $AA'=2a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AB'C'C$ bằng

A. a . B. $\sqrt{2}a$. C. $\sqrt{5}a$. D. $\sqrt{3}a$.

Câu 26: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với mặt đáy góc 60° và điểm G là trọng tâm tam giác ABC . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $G.A'B'C'$ bằng:

A. $\frac{85a}{108}$. B. $\frac{3a}{2}$. C. $\frac{3a}{4}$. D. $\frac{31a}{36}$.

Câu 27: (Liên Trường Nghệ An) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = 3a\sqrt{2}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCB) bằng $2a\sqrt{3}$. Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

- A. $72\sqrt{18}\pi a^3$. B. $18\sqrt{18}\pi a^3$. C. $6\sqrt{18}\pi a^3$. D. $24\sqrt{18}\pi a^3$.

Câu 28: (Chuyên Phan Bội Châu Lần2) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAB đều và tam giác SCD vuông cân tại S . Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

- A. $\frac{7}{3}\pi a^2$. B. πa^2 . C. $\frac{8}{3}\pi a^2$. D. $\frac{5}{3}\pi a^2$.

Câu 29: (Sở Hưng Yên Lần1) Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Thể tích của khối cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của tứ diện $ABCD$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$. B. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{24}$. C. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{9}$. D. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{8}$.

Câu 30: (THTT số 3) Gọi r, R lần lượt là bán kính mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp tứ diện đều $ABCD$.

Tính tỉ số $\frac{R}{r}$?

- A. 3. B. $\frac{4}{3}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 31: (Nguyễn Khuyến) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$. Đường thẳng AC' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc 30° . Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho bằng

- A. $3\pi a^2$. B. $6\pi a^2$. C. $4\pi a^2$. D. $24\pi a^2$.

Câu 32: (Chuyên-Thái-Nguyên-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3) Cho khối nón có độ lớn góc ở đỉnh là $\frac{\pi}{3}$.

Một khối cầu (S_1) nội tiếp trong khối nón. Gọi S_2 là khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của nón và với S_1 ; S_3 là khối tiếp xúc với tất cả các đường sinh của nón với $S_1, \dots, S_n$ là khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của nón và với S_{n-1} . Gọi $V_1, V_2, V_3, \dots, V_{n-1}, V_n$ lần lượt là thể tích của khối cầu $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{n-1}, S_n$ và V là thể tích của khối nón. Tính giá trị của biểu thức $T = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_1 + V_2 + \dots + V_n}{V}$.

- A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{6}{13}$. C. $\frac{7}{9}$. D. $\frac{1}{2}$.

DẠNG 2: CỰC TRỊ VỀ KHỐI CẦU VÀ MẶT TRÒN XOAY

Câu 33: (Hùng Vương Bình Phước) Cho tam giác ABC đều cạnh a , đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi S là điểm thay đổi trên đường thẳng d , H là trực tâm tam giác SBC . Biết rằng khi điểm S thay đổi trên đường thẳng d thì điểm H nằm trên đường tròn (C) . Trong số các mặt cầu chứa đường tròn (C) , bán kính mặt cầu nhỏ nhất là

A. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. B. a . C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{12}$.

Câu 34: Cho một mặt cầu bán kính bằng 1. Xét các hình chóp tam giác đều ngoại tiếp mặt cầu trên. Hỏi thể tích nhỏ nhất của chúng là bao nhiêu?

A. $\min V = 8\sqrt{3}$. B. $\min V = 4\sqrt{3}$. C. $\min V = 9\sqrt{3}$. D. $\min V = 16\sqrt{3}$.

Câu 35: (Chuyên Vinh Lần 3) Trong không gian $Oxyz$, lấy điểm C trên tia Oz sao cho $OC = 1$. Trên hai tia Ox, Oy lần lượt lấy hai điểm A, B thay đổi sao cho $OA + OB = OC$. Tìm giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$?

A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$. B. $\sqrt{6}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 36: (Sở Hải Dương) Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và cắt một mặt cầu tâm O bán kính R tạo thành hai đường tròn có cùng bán kính. Xét hình nón có đỉnh trùng với tâm của một trong hai đường tròn và đáy trùng với đường tròn còn lại. Tính khoảng cách giữa (P) và (Q) để diện tích xung quanh hình nón đó là lớn nhất.

A. R . B. $R\sqrt{2}$. C. $2R\sqrt{3}$. D. $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Câu 37: (THPT Đặng Thúc Hứa) Cho ba tia Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc với nhau. Gọi C là điểm cố định trên Oz , đặt $OC = 1$, các điểm A, B thay đổi trên Ox, Oy sao cho $OA + OB = OC$. Tìm giá trị bé nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. C. $\sqrt{6}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 38: (THPT-Chuyên-Sơn-La-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hai mặt cầu (S_1) và (S_2) đồng tâm I , có bán kính lần lượt là $R_1 = 2$ và $R_2 = \sqrt{10}$. Xét tứ diện $ABCD$ có hai đỉnh A, B nằm trên (S_1) và hai đỉnh C, D nằm trên (S_2) . Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $ABCD$ bằng

A. $3\sqrt{2}$. B. $7\sqrt{2}$. C. $4\sqrt{2}$. D. $6\sqrt{2}$.

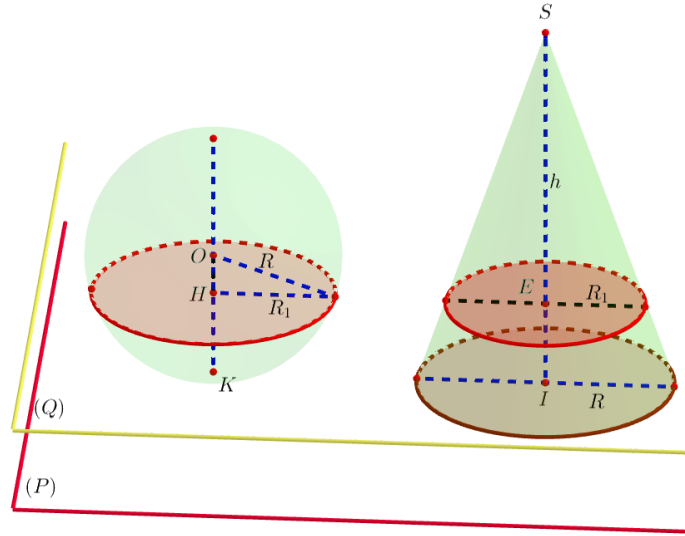
Câu 39: (Chuyên Lý Tự Trọng Cần Thơ) Cho khối cầu (S) có tâm I và bán kính $R = 2\sqrt{3}$, gọi (P) là mặt phẳng cắt khối cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) . Tính khoảng cách d từ I đến (P) sao cho khối nón có đỉnh I và đáy là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất.

A. $d = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. B. $d = \sqrt{2}$. C. $d = 2$. D. $d = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 40: (Liên Trường Nghệ An) Cho hình cầu tâm O bán kính $R = 5$, tiếp xúc với mặt phẳng (P) . Một hình nón tròn xoay có đáy nằm trên (P) , có chiều cao $h = 15$, có bán kính đáy bằng R . Hình cầu và hình nón nằm về một phía đối với mặt phẳng (P) . Người ta cắt hai hình đó bởi mặt phẳng (Q) song song với (P) và thu được hai thiết diện có tổng diện tích là S . Gọi x là khoảng cách

giữa (P) và (Q), ($0 < x \leq 5$). Biết rằng S đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{a}{b}$ (phân số $\frac{a}{b}$ tối giản).

Tính giá trị $T = a + b$.



A. $T = 17$.

B. $T = 19$.

C. $T = 18$.

D. $T = 23$.

Câu 41: Khi cắt mặt cầu $S(O, R)$ bởi một mặt kính, ta được hai nửa mặt cầu và hình tròn lớn của mặt kính đó gọi là mặt đáy của mỗi nửa mặt cầu. Một hình trụ gọi là nội tiếp nửa mặt cầu $S(O, R)$ nếu một đáy của hình trụ nằm trong đáy của nửa mặt cầu, còn đường tròn đáy kia là giao tuyến của hình trụ với nửa mặt cầu. Biết $R = 1$, tính bán kính đáy r và chiều cao h của hình trụ nội tiếp nửa mặt cầu $S(O, R)$ để khối trụ có thể tích lớn nhất.

A. $r = \frac{\sqrt{3}}{2}, h = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

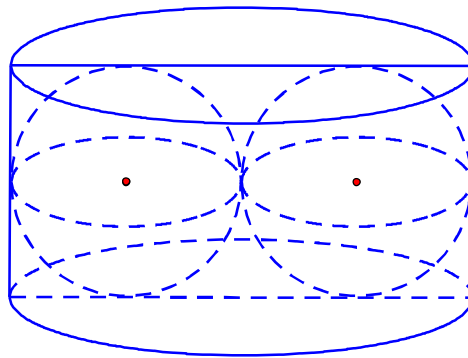
B. $r = \frac{\sqrt{6}}{2}, h = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $r = \frac{\sqrt{6}}{3}, h = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $r = \frac{\sqrt{3}}{3}, h = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

DẠNG 3: TỔNG HỢP VỀ MẶT TRÒN XOAY

Câu 42: (Chuyên Vinh Lần 3) Người ta xếp hai quả cầu có cùng bán kính r vào một chiếc hộp hình trụ sao cho các quả cầu đều tiếp xúc với hai đáy, đồng thời hai quả cầu tiếp xúc với nhau và mỗi quả cầu đều tiếp xúc với đường sinh của hình trụ (tham khảo hình vẽ). Biết thể tích khối trụ là 120 cm^3 , thể tích của mỗi khối cầu bằng



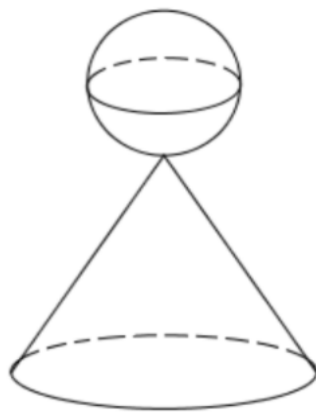
A. 10 cm^3 .

B. 20 cm^3 .

C. 30 cm^3 .

D. 40 cm^3 .

Câu 43: (Chuyên-Thái-Nguyên-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3) Một khối pha lê gồm một hình cầu (H_1) bán kính R và một hình nón (H_2) có bán kính đáy và đường sinh lần lượt là r, l thỏa mãn $r = \frac{1}{2}l$ và $l = \frac{3}{2}R$ xếp chồng lên nhau (hình vẽ). Biết tổng diện tích mặt cầu (H_1) và diện tích toàn phần của hình nón (H_2) là 91 cm^2 . Tính diện tích của mặt cầu (H_1).



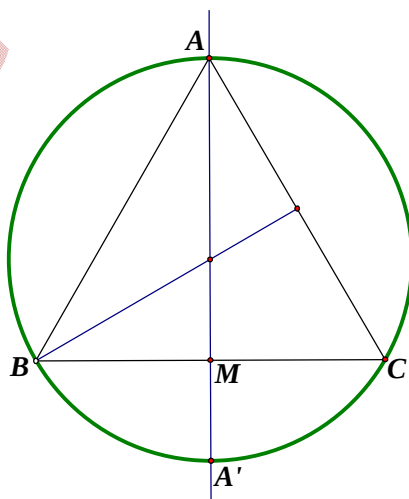
A. $\frac{104}{5} \text{ cm}^2$.

B. 16 cm^2 .

C. 64 cm^2 .

D. $\frac{26}{5} \text{ cm}^2$.

Câu 44: (Hậu Lộc Thanh Hóa) Cho tam giác đều ABC có đỉnh $A(5;5)$ nội tiếp đường tròn tâm I đường kính AA' , M là trung điểm BC . Khi quay tam giác ABM cùng với nửa hình tròn đường kính AA' xung quanh đường thẳng AM (như hình vẽ minh họa), ta được khối nón và khối cầu có thể tích lần lượt là V_1 và V_2 .



Tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{9}{32}$.

B. $\frac{9}{4}$.

C. $\frac{27}{32}$.

D. $\frac{4}{9}$.

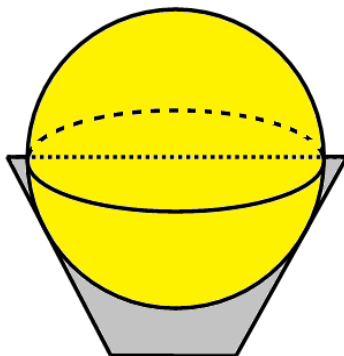
Câu 45: (CHUYÊN THÁI NGUYỄN LẦN 3) Cho (S) là một mặt cầu có đường kính $AB = 10$. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By với mặt cầu (S) sao cho $Ax \perp By$. Gọi M là điểm di động trên Ax , N là điểm di động trên By sao cho MN luôn tiếp xúc với mặt cầu. Tính giá trị của tích $AM \cdot BN$?

- A. $AM \cdot BN = 50$. B. $AM \cdot BN = 10$. C. $AM \cdot BN = 100$. D. $AM \cdot BN = 20$.

Câu 46: (KSCL-Lần-2-2019-THPT-Nguyễn-Đức-Cảnh-Thái-Bình) Cho hai mặt cầu (S_1) có tâm I_1 , bán kính $R_1 = 1$, (S_2) có tâm I_2 bán kính $R_2 = 5$. Lần lượt lấy hai điểm M_1, M_2 thuộc hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$. Gọi K là trung điểm M_1M_2 . Khi M_1, M_2 di chuyển trên $(S_1), (S_2)$ thì K quét miền không gian là một khối tròn xoay có thể tích bằng?

- A. $\frac{55\pi}{3}$. B. $\frac{68\pi}{3}$. C. $\frac{76\pi}{3}$. D. $\frac{82\pi}{3}$.

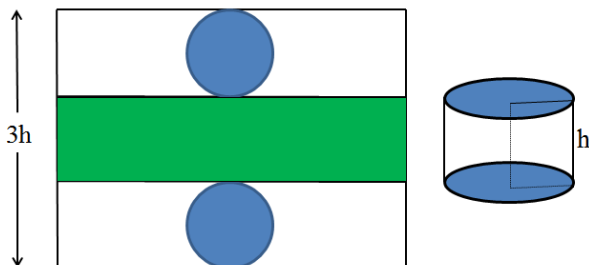
Câu 47: (Hoàng Hoa Thám Hưng Yên) Một cái thùng đựng đầy nước được tạo thành từ việc cắt mặt xung quanh của một hình nón bởi một mặt phẳng vuông góc với trục của hình nón. Miệng thùng là đường tròn có bán kính bằng ba lần bán kính mặt đáy của thùng. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng $\frac{3}{2}$ chiều cao của thùng nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $54\sqrt{3}\pi$ (dm^3). Biết rằng khối cầu tiếp xúc với mặt trong của thùng và đúng một nửa của khối cầu đã chìm trong nước (hình vẽ). Thể tích nước còn lại trong thùng có giá trị nào sau đây?



- A. $\frac{46}{5}\sqrt{3}\pi$ (dm^3). B. $18\sqrt{3}\pi$ (dm^3). C. $\frac{46}{3}\sqrt{3}\pi$ (dm^3). D. 18π (dm^3).

IV - ỨNG DỤNG THỰC TẾ

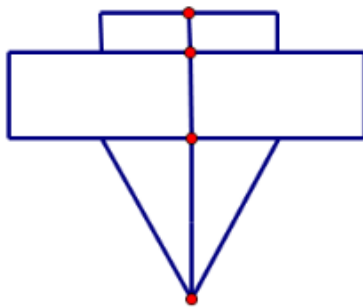
Câu 1: (Ba Đình Lần 2) Từ một tấm thép phẳng hình chữ nhật, người ta muốn làm một chiếc thùng đựng dầu hình trụ bằng cách cắt ra hai hình tròn bằng nhau và một hình chữ nhật (phần tô đậm) sau đó hàn kín lại, như hình vẽ dưới đây.



Hai hình tròn làm hai mặt đáy, hình chữ nhật làm thành mặt xung quanh của thùng đựng dầu (vừa đủ). Biết thùng đựng dầu có thể tích bằng 50,24 lít (các mối ghép nối khi gò hàn chiếm diện tích không đáng kể. Lấy $\pi = 3,14$). Tính diện tích của tấm thép hình chữ nhật ban đầu?

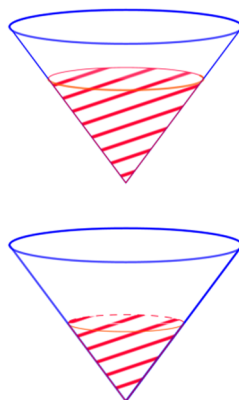
- A. $1,8062 \text{ m}^2$. B. $2,2012 \text{ m}^2$. C. $1,5072 \text{ m}^2$. D. $1,2064 \text{ m}^2$.

Câu 2: (Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2) Một con xoay được thiết kế gồm hai khối trụ (T_1), (T_2) chồng lên khối nón (N) (Tham khảo mặt cắt ngang qua trục như hình vẽ). Khối trụ (T_1) có bán kính đáy $r(\text{cm})$, chiều cao $h_1(\text{cm})$. Khối trụ (T_2) có bán kính đáy $2r(\text{cm})$, chiều cao $h_2 = 2h_1(\text{cm})$. Khối nón (N) có bán kính đáy $r(\text{cm})$, chiều cao $h_n = 4h_1(\text{cm})$. Biết rằng thể tích toàn bộ con xoay bằng $31(\text{cm}^3)$. Thể tích khối nón (N) bằng



- A. $5(\text{cm}^3)$. B. $3(\text{cm}^3)$. C. $4(\text{cm}^3)$. D. $6(\text{cm}^3)$.

Câu 3: (Đặng Thành Nam Đề 5) Hai hình nón bằng nhau có chiều cao bằng 2 dm, được đặt như hình vẽ bên (mỗi hình đều đặt thẳng đứng với đỉnh nằm phía dưới). Lúc đầu, hình nón trên chứa đầy nước và hình nón dưới không chứa nước. Sau đó, nước được chảy xuống hình nón dưới thông qua lỗ trống ở đỉnh của hình nón trên. Hãy tính chiều cao của nước trong hình nón dưới tại thời điểm khi mà chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm.



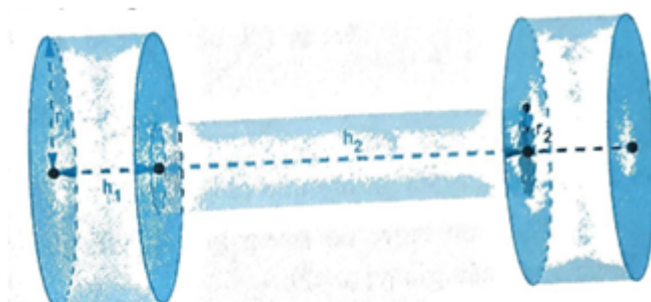
A. $\sqrt[3]{7}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\sqrt[3]{5}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 4: (THTT lần 5) Một quả tạ tập tay gồm ba khối trụ (H_1) , (H_2) , (H_3) gắn liền nhau lần lượt có bán kính và chiều cao tương ứng là r_1, h_1 , r_2, h_2 , r_3, h_3 thỏa mãn $r_1 = r_3$, $h_1 = h_3$; $r_2 = \frac{1}{3}r_1$ (xem hình vẽ). Biết thể tích của toàn bộ quả tạ bằng 60π và chiều dài quả tạ bằng 9. Thể tích khối trụ (H_2) bằng?

 (H_1)

A. $\pi \frac{16(9-2h_1)}{4h_1+9}$.

B. $\pi \frac{36(9-2h_1)}{4h_1+9}$.

C. $\pi \frac{60(9-2h_1)}{4h_1+9}$.

D. $\pi \frac{46(9-2h_1)}{4h_1+9}$.

Câu 5: (Chuyên Thái Nguyên) Một bình đựng nước dạng hình nón (không có đáy) đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $18\pi \text{ dm}^3$. Biết khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa khối cầu chìm trong nước. Tính thể tích nước còn lại trong bình.

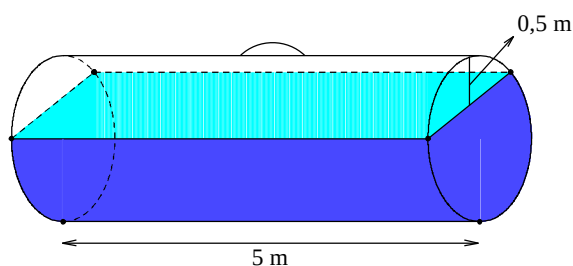
A. $27\pi \text{ dm}^3$.

B. $6\pi \text{ dm}^3$.

C. $9\pi \text{ dm}^3$.

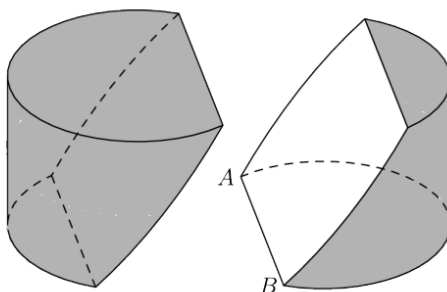
D. $24\pi \text{ dm}^3$.

Câu 6: (THPT PHỤ DỤC – THÁI BÌNH) Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5 m, có bán kính đáy 1 m, với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với 0,5 m của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn (theo đơn vị m^3).



- A. $23,562 \text{ m}^3$. B. $12,637 \text{ m}^3$. C. $6,319 \text{ m}^3$. D. $11,781 \text{ m}^3$.

Câu 7: [THPT chuyên Vĩnh Phúc lần 5] Một khối gỗ có hình trụ với bán kính đáy bằng 6 và chiều cao bằng 8. Trên một đường tròn đáy nào đó ta lấy hai điểm A, B sao cho cung AB có số đo 120° . Người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua A, B và tâm của hình trụ (tâm của hình trụ là trung điểm của đoạn nối tâm hai đáy) để được thiết diện như hình vẽ. Tính diện tích S của thiết diện thu được.



- A. $S = 20\pi$. B. $S = 20\pi + 30\sqrt{3}$. C. $S = 12\pi + 18\sqrt{3}$. D. $S = 20\pi + 25\sqrt{3}$.

Câu 8: (Cầu Giấy Hà Nội 2019 Lần 1) Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ có thể tích là V , các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon sữa bò là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ bằng V và diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy bằng bao nhiêu?

- A. $r = \sqrt[3]{\frac{V\pi}{2}}$. B. $r = \sqrt[3]{V}$. C. $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. D. $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2}}$.

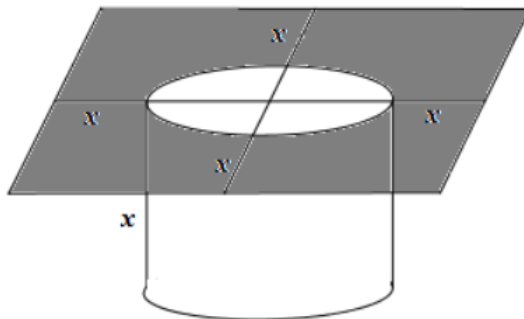
Câu 9: (Trần Đại Nghĩa) Nam muốn xây một bình chứa hình trụ có thể tích 72m^3 . Đáy làm bằng bê tông giá 100 nghìn đồng/ m^2 , thành làm bằng tôn giá 90 nghìn đồng/ m^2 , nắp bằng nhôm giá 140 nghìn đồng/ m^2 . Vậy đáy của hình trụ có bán kính bằng bao nhiêu để chi phí xây dựng là thấp nhất?

- A. $\frac{3}{2\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$. B. $\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$. C. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$. D. $\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$.

Câu 10: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NĂM 2018-2019) Tại trung tâm một thành phố người ta tạo điểm nhấn bằng cột trang trí hình nón có kích thước như sau: đường sinh $l = 10\text{m}$, bán kính đáy $R = 5\text{m}$. Biết rằng tam giác SAB là thiết diện qua trục của hình nón và C là trung điểm của SB . Trang trí một hệ thống đèn điện từ chạy từ A đến C trên mặt nón. Định giá trị ngắn nhất của chiều dài dây đèn điện từ.

- A. 15m . B. 10m . C. $5\sqrt{3}\text{m}$. D. $5\sqrt{5}\text{m}$.

Câu 11: (THPT CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 01 NĂM 2018-2019) Trên một mảnh đất hình vuông có diện tích $81m^2$ người ta đào một cái ao nuôi cá hình trụ (như hình vẽ) sao cho tâm của hình tròn đáy trùng với tâm của mảnh đất. Ở giữa mép ao và mép mảnh đất người ta để lại một khoảng đất trống để đi lại, biết khoảng cách nhỏ nhất giữa mép ao và mép mảnh đất là $x(m)$. Giả sử chiều sâu của ao cũng là $x(m)$. Tính thể tích lớn nhất V của ao.



- A. $V = 13,5\pi(m^3)$. B. $V = 27\pi(m^3)$. C. $V = 36\pi(m^3)$. D. $V = 72\pi(m^3)$.

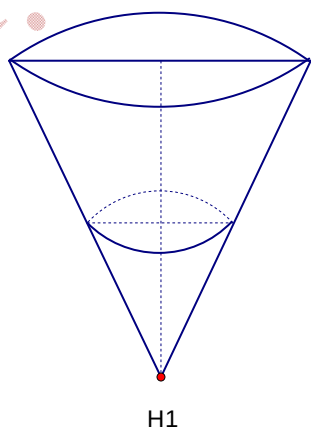
Câu 12: Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón có thể tích $27cm^3$ với chiều cao là h và bán kính đáy là r để lượng giấy tiêu thụ là ít nhất thì giá trị của r là:

- A. $r = \sqrt[4]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$. B. $r = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$. C. $r = \sqrt[4]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$. D. $r = \sqrt[6]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$.

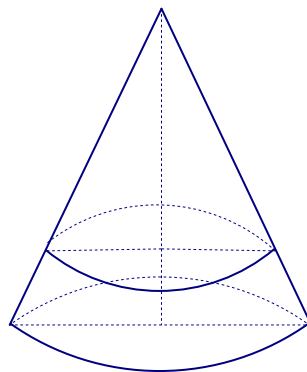
Câu 13: Một phễu đựng kem hình nón bằng giấy bạc có thể tích $12\pi(cm^3)$ và chiều cao là $4cm$. Muốn tăng thể tích kem trong phễu hình nón lên 4 lần, nhưng chiều cao không thay đổi, diện tích miếng giấy bạc cần thêm là.

- A. $(12\sqrt{13} - 15)\pi(cm^2)$. B. $12\pi\sqrt{13}(cm^2)$.
C. $\frac{12\sqrt{13}}{15}(cm^2)$. D. $(12\sqrt{13} + 15)\pi(cm^2)$

Câu 14: Một cái phễu có dạng hình nón chiều cao của phễu là $30cm$. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của cột nước trong phễu bằng $15cm$ (hình H_1). Nếu bịt kín miệng phễu rồi lật ngược phễu lên (hình H_2) thì chiều cao của cột nước trong phễu gần với giá trị nào sau đây?



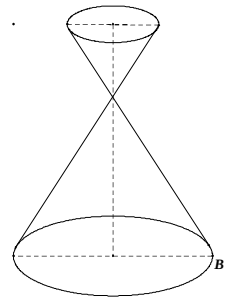
H1



H2

- A. $1,553(cm)$. B. $1,306(cm)$. C. $1,233(cm)$ D. $15(cm)$.

Câu 15: Cho một đồng hồ cát như hình vẽ (gồm hai hình nón chung đỉnh ghép lại) trong đó đường sinh bất kỳ của hình nón tạo với đáy một góc 60° . Biết rằng chiều cao của đồng hồ là 30cm và tổng thể tích của đồng hồ là $1000\pi(\text{cm}^3)$. Nếu cho đầy lượng cát vào phần trên thì khi chảy hết xuống dưới. khi đó tỷ lệ thể tích lượng cát chiếm chỗ và thể tích phần phía dưới là bao nhiêu

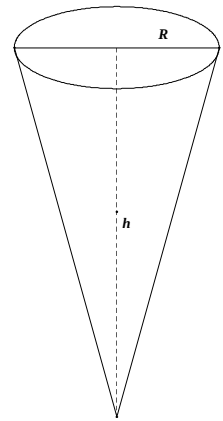
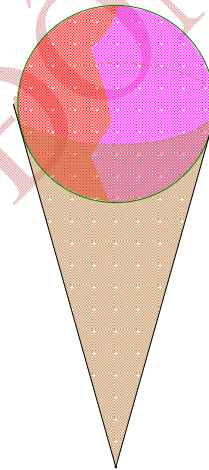


- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{27}$
C. $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ D. $\frac{1}{64}$

Câu 16: Cho một miếng tôn hình tròn có bán kính 50cm . Biết hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích miếng tôn ở trên. Khi đó hình nón có bán kính đáy là

- A. $10\sqrt{2}\text{cm}$ B. 20cm C. $50\sqrt{2}\text{cm}$ D. 25cm

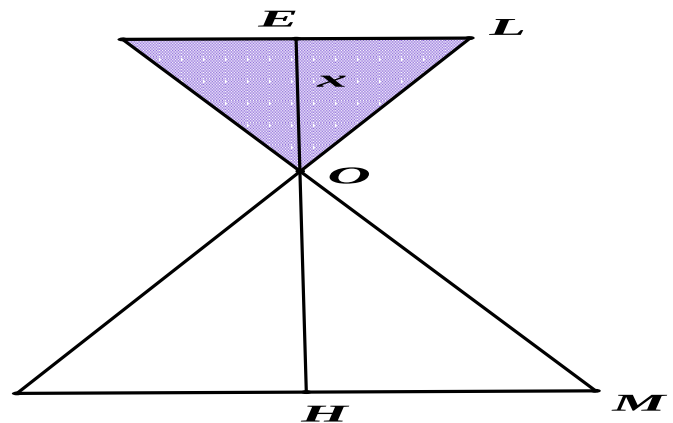
Câu 17: Một kem ốc quế gồm hai phần, phần kem có dạng hình cầu, phần ốc quế có dạng hình nón, giả sử hình cầu và hình nón có bán kính bằng nhau, biết rằng nếu kem tan chảy hết sẽ làm đầy phần ốc quế. Biết thể tích kem sau khi tan chảy bằng 75% thể tích kem đóng băng ban đầu, gọi h, r lần lượt là chiều cao và bán kính của phần ốc quế. Tính tỷ số $\frac{h}{r}$



- A. $\frac{h}{r} = 3$ B. $\frac{h}{r} = 2$
C. $\frac{h}{r} = \frac{4}{3}$ D. $\frac{h}{r} = \frac{16}{3}$

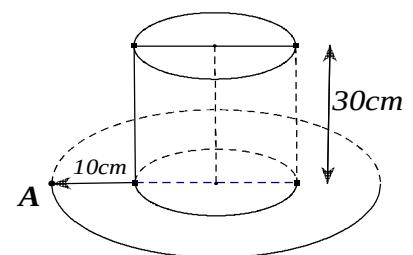
Câu 18: Cắt một hình nón bằng một mặt phẳng song song với đáy thì phần hình nón nằm giữa mặt phẳng và đáy gọi là hình nón cụt. Một chiếc cốc có dạng hình nón cụt cao 9cm , bán kính của đáy cốc và miệng cốc lần lượt là và 4cm . Hỏi chiếc cốc có thể chứa được lượng nước tối đa là bao nhiêu trong số các lựa chọn sau:

- A. 250ml B. 300ml
C. 350ml D. 400ml



Câu 19: Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật với các kích thước như hình vẽ. Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không kể viền, mép, phần thừa).

- A. $700\pi(\text{cm}^2)$ B. $754,25\pi(\text{cm}^2)$
C. $750,25\pi(\text{cm}^2)$ D. $756,25\pi(\text{cm}^2)$



Câu 20: Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích của khối trụ đó bằng 2 và diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy gần số nào nhất?

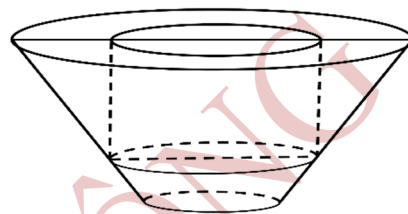
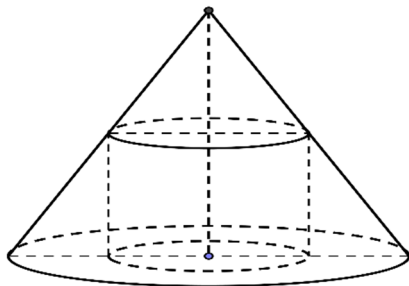
A. 0,68.

B. 0,6.

C. 0,12.

D. 0,52.

Câu 21: (THPT-Phúc-Trạch-Hà-Tĩnh-lần-2-2018-2019-thi-tháng-4) Khi sản xuất hộp mì tôm các nhà sản xuất luôn để một khoảng trống dưới đáy hộp. Hình vẽ dưới mô tả cấu trúc của hộp mì tôm. Thớ mì tôm có dạng hình trụ, hộp mì có dạng hình nón cụt được cắt ra bởi hình nón có chiều cao 9cm và bán kính đáy 6cm. Nhà sản xuất tìm cách sao cho thớ mì tôm có được thể tích lớn nhất vì mục đích thu hút khách hàng. Tìm thể tích lớn nhất đó.

A. 48π .B. $\frac{81}{2}\pi$.C. 36π .D. 54π .

Câu 22: Một cái ly có dạng hình nón được rót nước vào với chiều cao mực nước bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao hình nón. Hỏi nếu bịch kính miệng ly rồi úp ngược ly xuống thì tỷ số chiều cao mực nước và chiều cao hình nón xấp xỉ bằng bao nhiêu?

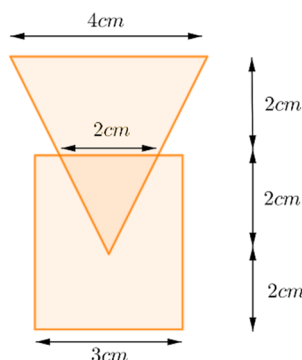
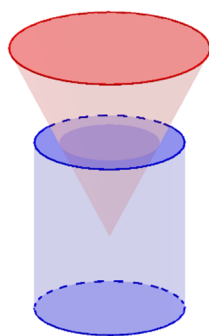
A. 0,33.

B. 0,11.

C. 0,21.

D. 0,08.

Câu 23: Một nút chai thủy tinh là một khối tròn xoay (H), một mặt phẳng chứa trục của (H) cắt (H) theo một thiết diện như trong hình vẽ bên. Tính thể tích của (H) (đơn vị cm^3).

A. $V_{(H)} = 23\pi$.B. $V_{(H)} = 13\pi$.C. $V_{(H)} = \frac{41\pi}{3}$.D. $V_{(H)} = 17\pi$.

Câu 24: Một bồn chứa xăng có cấu tạo gồm
1 hình trụ ở giữa và 2 nửa hình cầu ở 2 đầu,
biết rằng hình cầu có đường kính 1,8m và

chiều dài của hình trụ là $3,62m$. Hỏi bồn đó có thể chứa tối đa bao nhiêu lít xăng trong các giá trị sau đây?

- A. 10905l B. 23650l C. 12265l D. 20201l

Câu 25: Một hình hộp chữ nhật kích thước $4 \times 4 \times h$ chứa một khối cầu lớn có bán kính bằng 2 và tám khối cầu nhỏ có bán kính bằng 1 sao cho các khối lớn tiếp xúc với tám khối cầu nhỏ và các khối cầu đều tiếp xúc với các mặt hình hộp. Thể tích khối hộp là:

- A. $32 + 32\sqrt{7}$ B. $48 + 32\sqrt{5}$ C. $64 + 32\sqrt{7}$ D. $64\sqrt{5}$

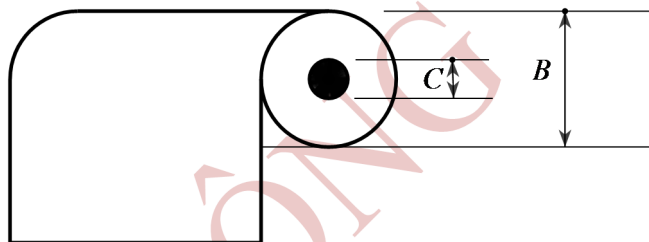
Câu 26: Một băng giấy dài được cuộn chặt lại thành nhiều vòng xung quanh một ống lõi

hình trụ rỗng có đường kính $C = 12,5mm$.

Biết độ dày của giấy cuộn là $0,6mm$ và đường kính cả cuộn giấy là $B = 44,9mm$.

Tính chiều dài l của cuộn giấy.

- A. $L \approx 44m$ B. $L \approx 38m$ C. $L \approx 4m$ D. $L \approx 24m$



Câu 27: (Thị Xã Quảng Trị) Một ly nước hình trụ có chiều cao 20 cm và bán kính đáy bằng 4 cm . Bạn Nam đổ nước vào ly cho đến khi mực nước cách đáy ly 17 cm thì dừng lại. Sau đó, Nam lấy các viên đá lạnh hình cầu có cùng bán kính 2 cm thả vào ly nước. Bạn Nam cần dùng ít nhất bao nhiêu viên đá để nước trào ra khỏi ly?

- A. 4. B. 7. C. 5. D. 6.

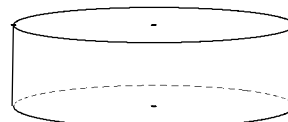
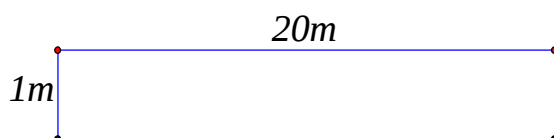
Câu 28: Một thầy giáo dự định xây dựng bể bơi di động cho học sinh nghèo miền núi từ 15 tấm tôn có kích thước $1m \times 20cm$ (biết giá $1m^2$ tôn là 90000 đồng) bằng 2 cách:

Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành 1 hình trụ như hình 1.

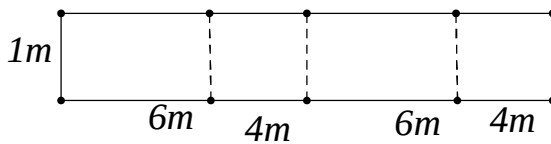
Cách 2: Chia chiều dài tấm tôn thành 4 phần rồi gò tấm tôn thành 1 hình hộp chữ nhật như hình 2.

Biết sau khi xây xong bể theo dự định, mực nước chỉ đổ đến $0,8m$ và giá nước cho đơn vị sự nghiệp là $9955\text{dong} / m^3$. Chi phí trong tay thầy hiệu trưởng là 2 triệu đồng. Hỏi thầy giáo sẽ chọn cách làm nào để không vượt quá kinh phí (giả sử chỉ tính đến các chi phí theo dữ kiện trong bài toán).

Hình 1



Hình 2



A. Cả 2 cách như nhau

B. Không chọn cách nào

C. Cách 2

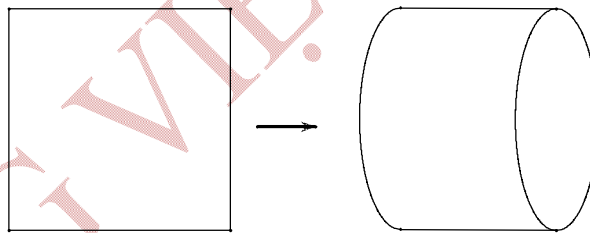
D. Cách 1

Câu 29: Một bình đựng nước dạng hình nón (không có nắp đáy), đựng đầy nước. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào bình đó một khối trụ và đo được thể tích nước trào ra ngoài là $\frac{16\pi}{9}(dm^3)$. Biết rằng một mặt của khối trụ nằm trên mặt đáy của hình nón và khối trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón (như hình vẽ dưới). Tính bán kính đáy R của bình nước.

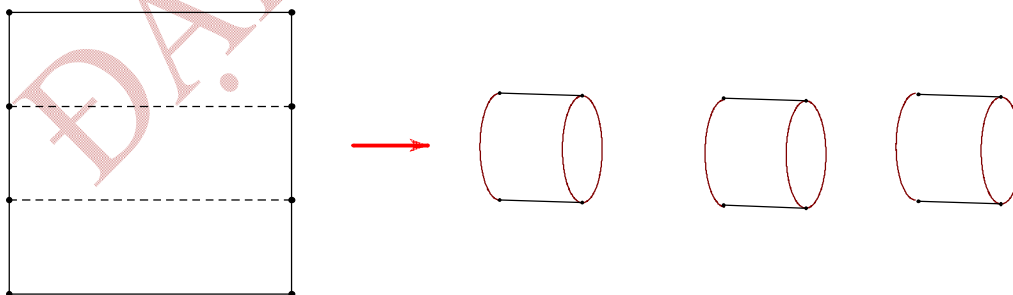
A. $R = 3(dm)$.B. $R = 4(dm)$.C. $R = 2(dm)$.D. $R = 5(dm)$.

Câu 30: Có một miếng nhôm hình vuông, cạnh là $3dm$, một người dự định tính tạo thành các hình trụ (không đáy) theo hai cách sau:

Cách 1: Gò hai mép hình vuông để thành mặt xung quanh của một hình trụ, gọi thể tích của khối trụ đó là V_1 .



Cách 2: Cắt hình vuông ra làm ba và gò thành mặt xung quanh của ba hình trụ, gọi tổng thể tích của chúng là V_2 .



Khi đó, tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là:

A. 3

B. 2

C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

Câu 31: Một chiếc hộp hình lập phương cạnh a bị khoét một khoảng trống có dạng là một khối lăng trụ với hai đáy là hai đường tròn nội tiếp của hai mặt đối diện của hình hộp. Sau đó, người ta dùng

bìa cứng dán kín hai mặt vừa bị cắt của chiếc hộp lại như cũ, chỉ chừa lại khoảng trống bên trong. Tính thể tích của khoảng trống tạo bởi khối trụ này.

- A. πa^3 B. $\frac{1}{2}\pi a^3$ C. $\frac{1}{4}\pi a^3$ D. $\frac{1}{8}\pi a^3$

Câu 32: Người ta dùng một loại vải vintage để bọc quả khối khí của khinh khí cầu, biết rằng quả khối này có dạng hình cầu đường kính $2m$. Biết rằng $1m^2$ vải có giá là 200.000 đồng. Hỏi cần tối thiểu bao nhiêu tiền mua vải để làm khinh khí cầu này?

- A. 2.500.470 đồng B. 3.150.342 đồng
C. 2.513.274 đồng D. 2.718.920 đồng

Câu 33: Cho biết rằng hình chòm cầu có công thức thể tích là $\frac{\pi h(3r^2 + h^2)}{6}$, trong đó h là chiều cao chòm cầu và r là bán

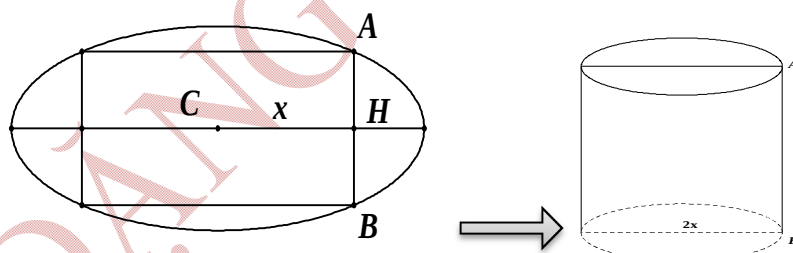
kính đường tròn bề mặt chòm cầu (bán kính này khác với bán kính hình cầu). Bài hỏi đặt ra là với một quả dưa hấu hình cầu, người ta dùng một cái ống khoét thủng một lỗ hình trụ chưa rõ bán kính xuyên qua trái dưa như hình vẽ (trong hình có AB là đường kính trái dưa). Biết rằng chiều cao của lỗ là $12cm$ (trong hình trên, chiều cao này chính là độ dài HK).

Tính thể tích của phần

dưa còn lại.

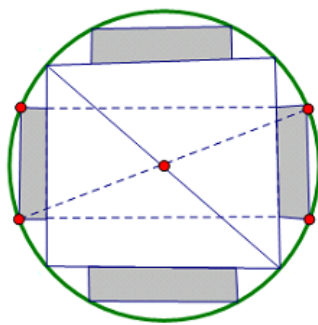
- A. $200\pi cm^3$ B. $96\pi cm^3$ C. $288\pi cm^3$ D. $144\pi cm^3$

Câu 34: người ta cần cắt một tấm tôn có hình dạng một elíp với độ dài trục lớn bằng 8 độ dài trục bé bằng 4 để được một tấm tôn có dạng hình chữ nhật nội tiếp elíp. Người ta gò tấm tôn hình chữ nhật thu được thành một hình trụ không có đáy như hình bên. Tính thể tích lớn nhất có thể thu được của khối trụ đó



- A. $\frac{128\sqrt{3}}{\pi}(cm^3)$ B. $\frac{64}{3\sqrt{2}\pi}(cm^3)$ C. $\frac{64}{3\sqrt{3}\pi}(cm^3)$ D. $\frac{128}{3\sqrt{2}\pi}(cm^3)$

Câu 35: Từ một khúc gỗ tròn hình trụ có đường kính bằng 40 cm, cần xẻ thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và bốn miếng phụ được tô màu xám như hình vẽ dưới đây. Tìm chiều rộng x của miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất.



A. $x = \frac{3\sqrt{34} - 17\sqrt{2}}{2} (cm)$

B. $x = \frac{3\sqrt{34} - 19\sqrt{2}}{2} (cm)$

C. $x = \frac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2} (cm)$

D. $x = \frac{5\sqrt{34} - 13\sqrt{2}}{2} (cm)$

Câu 36: Người ta thiết kế một thùng chứa hình trụ có thể tích V nhất định. Biết rằng giá của vật liệu làm mặt đáy và nắp của thùng bằng nhau và đắt gấp 3 lần so với giá làm vật liệu xung quanh của thùng (chi phí cho mỗi đơn vị diện tích). Gọi h là chiều cao của thùng và bán kính đáy là R .

Tính tỷ số $\frac{h}{R}$ sao cho chi phí làm thùng là nhỏ nhất

A. $\frac{h}{R} = 2$

B. $\frac{h}{R} = \sqrt{2}$

C. $\frac{h}{R} = 3\sqrt{2}$

D. $\frac{h}{R} = 6$

Câu 37: Một nhà máy sản xuất cần thiết kế một thùng sơn dạng hình trụ có nắp đáy với dung tích $1000 cm^3$. Bán kính của nắp đáy để nhà sản xuất tiết kiệm nguyên vật liệu nhất bằng

A. $\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} cm$.

B. $10 \cdot \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}} cm$.

C. $\frac{500}{\pi} cm$.

D. $10 \cdot \sqrt{\frac{5}{\pi}} cm$.

Câu 38: Một viên phấn bằng có dạng một khối trụ với bán kính đáy bằng $0,5 cm$, chiều dài $6 cm$. Người ta làm một hình hộp chữ nhật bằng carton đựng các viên phấn đó với kích thước $6 cm \times 5 cm \times 6 cm$. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu hộp kích thước như trên để xếp 460 viên phấn?

A. 17.

B. 15.

C. 16.

D. 18.

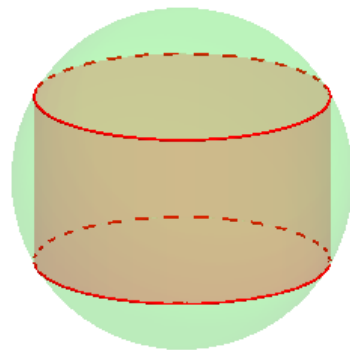
Câu 39: Một khối cầu có bán kính là $5(dm)$, người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng $3(dm)$ để làm một chiếc lu đựng nước (như hình vẽ). Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.

A. $\frac{100}{3} \pi (dm^3)$

B. $\frac{43}{3} \pi (dm^3)$

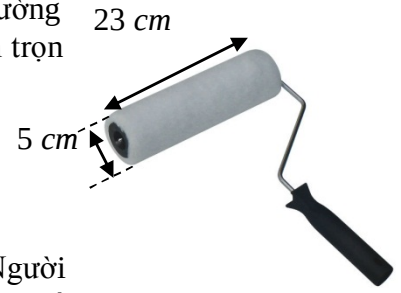
C. $41\pi (dm^3)$

D. $132\pi (dm^3)$



Câu 40: Một cái trục lăn sơn nước có dạng một hình trụ. Đường kính của đường tròn đáy là 5cm , chiều dài lăn là 23cm (hình bên). Sau khi lăn tròn 15 vòng thì trục lăn tạo nên sân phẳng một diện tích là

- A. $1725\pi\text{ cm}^2$. B. $3450\pi\text{ cm}^2$.
C. $1725\pi\text{ cm}^2$. D. $862,5\pi\text{ cm}^2$.

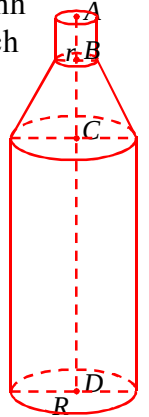


Câu 41: Một quả bóng bàn và một chiếc chén hình trụ có cùng chiều cao. Người ta đặt quả bóng lên chiếc chén thấy phần ở ngoài của quả bóng có chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao của nó. Gọi V_1 , V_2 lần lượt là thể tích của quả bóng và chiếc chén, khi đó:

- A. $9V_1 = 8V_2$. B. $3V_1 = 2V_2$. C. $16V_1 = 9V_2$. D. $27V_1 = 8V_2$.

Câu 42: Phần không gian bên trong của chai nước ngọt có hình dạng như hình bên. Biết bán kính đáy bằng $R = 5\text{cm}$, bán kính cổ $r = 2\text{cm}$, $AB = 3\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$, $CD = 16\text{cm}$. Thể tích phần không gian bên trong của chai nước ngọt đó bằng:

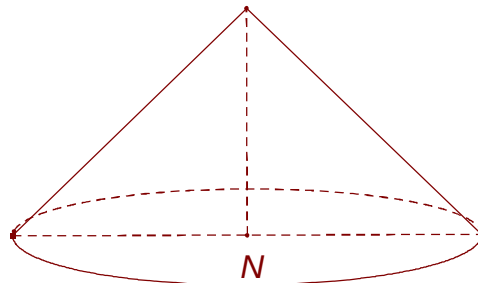
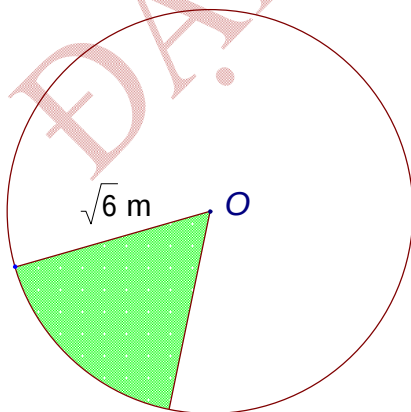
- A. $495\pi(\text{cm}^3)$. B. $462\pi(\text{cm}^3)$.
C. $490\pi(\text{cm}^3)$. D. $412\pi(\text{cm}^3)$.



Câu 43: Nhà Nam có một chiếc bàn tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}\text{ m}$. Nam muốn mắc một bóng điện ở phía trên và chính giữa chiếc bàn sao cho mép bàn nhận được nhiều ánh sáng nhất. Biết rằng cường độ sáng C của bóng điện được biểu thị bởi công thức $C = c \frac{\sin \alpha}{l^2}$ (α là góc tạo bởi tia sáng tới mép bàn và mặt bàn, c - hằng số tỷ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng, l khoảng cách từ mép bàn tới bóng điện). Khoảng cách nam cần treo bóng điện tính từ mặt bàn là

- A. 1m B. $1,2\text{m}$ C. 1.5 m D. 2m

Câu 44: Với một đĩa tròn bằng thép tráng có bán kính $R = \sqrt{6}\text{m}$ phải làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của đĩa này và gấp phần còn lại thành hình tròn. Cung tròn của hình quạt bị cắt đi phải bằng bao nhiêu độ để hình nón có thể tích cực đại?

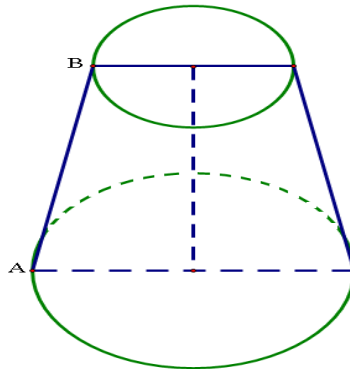


- A. $\approx 66^\circ$ B. $\approx 294^\circ$ C. $\approx 12,56^\circ$ D. $\approx 2,8^\circ$

Câu 45: Một công ty nhận làm những chiếc thùng phi kín hay đáy với thể tích theo yêu cầu là $2\pi m^3$ mỗi chiếc yêu cầu tiết kiệm vật liệu nhất. Hỏi thùng phải có bán kính đáy R và chiều cao h là bao nhiêu?

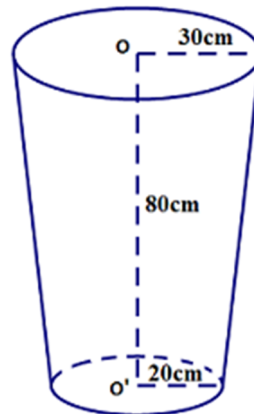
- A. $R = 2m, h = \frac{1}{2}m$. B. $R = \frac{1}{2}m, h = 8m$. C. $R = 4m, h = \frac{1}{8}m$. D. $R = 1m, h = 2m$.

Câu 46: Có một cái cốc làm bằng giấy, được úp ngược như hình vẽ. Chiều cao của chiếc cốc là $20cm$, bán kính đáy cốc là $4cm$, bán kính miệng cốc là $5cm$. Một con kiến đang đứng ở điểm A của miệng cốc dự định sẽ bò hai vòng quanh thân cốc để lên đến đáy cốc ở điểm B. Quãng đường ngắn nhất để con kiến có thể thực hiện được dự định của mình gần đúng nhất với kết quả nào được đây?



- A. $59,98cm$ B. $59,93cm$ C. $58,67cm$ D. $58,80cm$.

Câu 47: Học sinh A sử dụng 1 xô đựng nước có hình dạng và kích thước giống như hình vẽ, trong đó đáy xô là hình tròn có bán kính $20cm$, miệng xô là đường tròn bán kính $30cm$, chiều cao xô là $80cm$. Mỗi tháng A dùng hết 10 xô nước. Hỏi A phải trả bao nhiêu tiền nước mỗi tháng, biết giá nước là 20000 đồng/ $1 m^3$ (số tiền được làm tròn đến đơn vị đồng)?



- A. 35279 đồng. B. 38905 đồng. C. 42116 đồng. D. 31835 đồng.

Câu 48: Một cốc nước hình trụ có chiều cao $9cm$, đường kính $6cm$. Mặt đáy phẳng và dày $1cm$, thành cốc dày $0,2cm$. Đổ vào cốc $120ml$ nước sau đó thả vào cốc 5 viên bi có đường kính $2cm$. Hỏi mặt nước trong cốc cách mép cốc bao nhiêu cm . (Làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

- A. $3,67cm$. B. $2,67cm$. C. $3,28cm$. D. $2,28cm$.

Câu 49: Người ta xếp 7 hình trụ có cùng bán kính đáy r và cùng chiều cao h vào một cái lọ hình trụ cũng có chiều cao h , sao cho tất cả các hình tròn đáy của hình trụ nhỏ đều tiếp xúc với đáy của hình trụ lớn, hình trụ nằm chính giữa tiếp xúc với sáu hình trụ xung quanh, mỗi hình trụ xung quanh đều tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ lớn. Khi thể tích của lọ hình trụ lớn là:

A. $16\pi r^2 h$

B. $18\pi r^2 h$

C. $9\pi r^2 h$

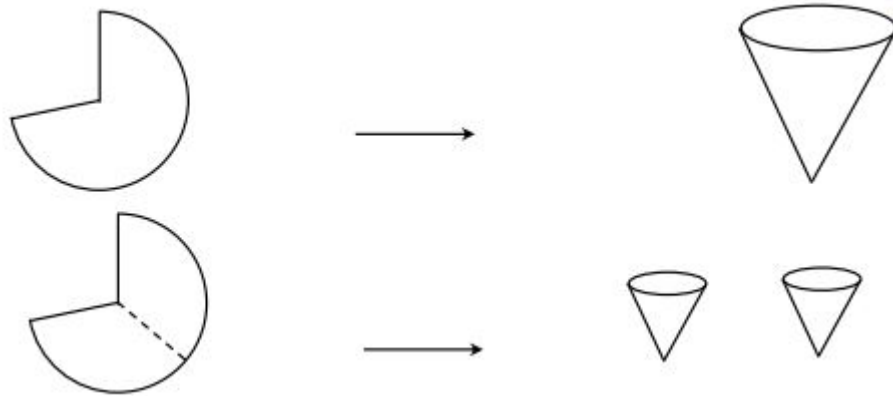
D. $36\pi r^2 h$

Câu 50: Từ cùng một tấm kim loại dẻo hình quạt như hình vẽ có kích thước bán kính $R = 5$ và chu vi của hình quạt là $P = 8\pi + 10$, người ta gò tấm kim loại thành những chiếc phễu theo hai cách:

Câu 51: Gò tấm kim loại ban đầu thành mặt xung quanh của một cái phễu

Câu 52: Chia đôi tấm kim loại thành hai phần bằng nhau rồi gò thành mặt xung quanh của hai cái phễu

Gọi V_1 là thể tích của cái phễu thứ nhất, V_2 là tổng thể tích của hai cái phễu ở cách 2. Tính $\frac{V_1}{V_2}$?



A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{21}{\sqrt{7}}$

B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{\sqrt{6}}$

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Câu 53: Cho một miếng tôn hình tròn có bán kính 50cm . Biết hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích miếng tôn ở trên. Khi đó hình nón có bán kính đáy là

A. $10\sqrt{2}\text{cm}$

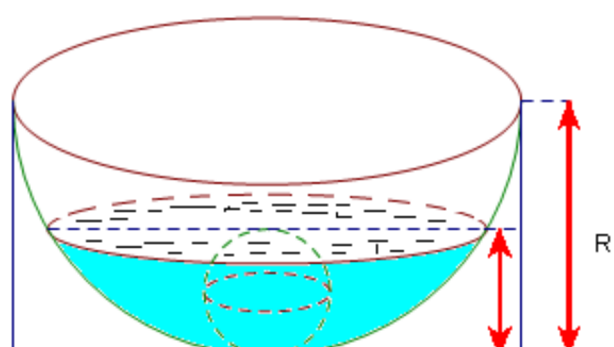
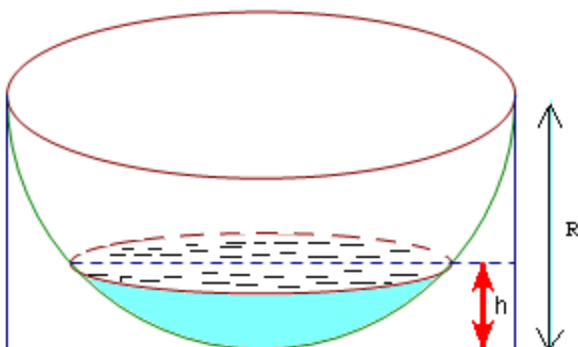
B. 20cm

C. $50\sqrt{2}\text{cm}$

D. 25cm

Câu 54: Một chậu nước hình bán cầu bằng nhôm có bán kính $R = 10\text{cm}$, đặt trong một khung hình hộp chữ nhật (hình 1). Trong chậu có chứa sẵn một khối nước hình chỏm cầu có chiều cao $h = 4\text{cm}$. Người ta bỏ vào chậu một viên bi hình cầu bằng kim loại thì mặt nước dâng lên vừa phủ kín viên bi (hình 2). Bán kính của viên bi gần số nguyên nào sau đây. (Cho biết thể tích khối chỏm cầu là

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)$$



A. 2

B. 4

C. 7 D. 10

Câu 55: Một người có một dải duy băng dài 130cm , người đó cần bọc dải duy băng đồ đồ quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà, người này dùng 10cm của dải duy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp

(như hình vẽ minh họa). Hỏi dài duy băng có thể bọc được hộp quà có thể tích lớn nhất là bao nhiêu?



- A. $4000\pi \text{ cm}^3$ B. $32000\pi \text{ cm}^3$ C. $1000\pi \text{ cm}^3$ D. $16000\pi \text{ cm}^3$

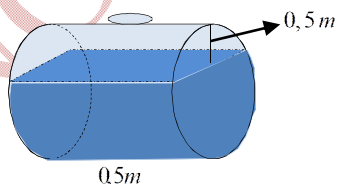
Câu 56: Một khối gạch hình lập phương (không thấm nước) có cạnh bằng 2 được đặt vào trong một chiếc phễu hình nón tròn xoay chứa đầy nước theo cách như sau: Một cạnh của viên gạch nằm trên mặt nước (nằm trên một đường kính của mặt này); các đỉnh còn lại nằm trên mặt nón; tâm của viên gạch nằm trên trục của hình nón. Tính thể tích nước còn lại ở trong phễu (làm tròn 2 chữ số thập phân).

- A. $V = 22,27$ B. $V = 22,30$ C. $V = 23,10$ D. $20,64$

Câu 57: (CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG QUẢNG NAM LẦN 2 NĂM 2019) Người ta xếp ba viên bi có bán kính bằng nhau và bằng $\sqrt{3}$ vào một cái lọ hình trụ sao cho các viên bi đều tiếp xúc với hai đáy của lọ hình trụ và các viên bi này đôi một tiếp xúc nhau và cùng tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ. Tính bán kính đáy của lọ hình trụ.

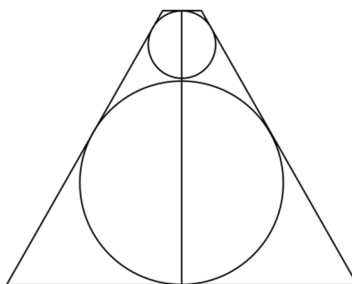
- A. $1+2\sqrt{3}$. B. $2\sqrt{3}$. C. $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$. D. $2+\sqrt{3}$.

Câu 58: Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là $5m$, có bán kính đáy $1m$, với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với $0,5m$ của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn (theo đơn vị m^3)



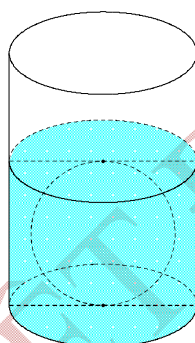
- A. $12,637m^3$. B. $114,923m^3$. C. $11,781m^3$. D. $8,307m^3$.

Câu 59: (Chuyên Vinh Lần 2) Người ta sản xuất một vật lưu niệm (N) bằng thủy tinh trong suốt có dạng khối tròn xoay mà thiết diện qua trục là hình thang cân. Bên trong (N) có hai khối cầu ngũ sắc với bán kính lần lượt là $R = 3cm$ và $r = 1cm$ tiếp xúc với nhau và tiếp xúc với mặt xung quanh của (N) đồng thời hai khối cầu tiếp xúc với hai đáy của (N). Tính thể tích của vật lưu niệm đó.



- A. $\frac{485}{6}\pi (cm^3)$. B. $81\pi (cm^3)$. C. $72\pi (cm^3)$. D. $\frac{728}{9}\pi (cm^3)$.

Câu 60: (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên Lần2) Người ta thả một viên billiards snooker có dạng hình cầu với bán kính nhỏ hơn 4,5cm vào một chiếc cốc hình trụ đang chứa nước thì viên billiards đó tiếp xúc với đáy cốc và tiếp xúc với mặt nước sau khi dâng (tham khảo hình vẽ bên). Biết rằng bán kính của phần trong đáy cốc bằng 5,4cm và chiều cao của mực nước ban đầu trong cốc bằng 4,5cm. Bán kính của viên billiards đó bằng?

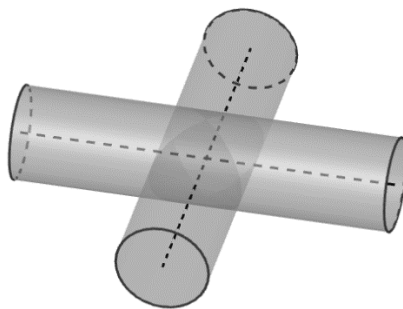


- A. 4,2cm. B. 3,6cm. C. 2,7cm. D. 2,6cm.

Câu 61: (THPT-Ngô-Quyên-Hải-Phòng-Lần-2-2018-2019) Một hộp đựng bóng tennis có dạng hình trụ. Biết rằng hộp chứa vừa khít ba quả bóng tennis được xếp theo chiều dọc, các quả bóng tennis có kích thước như nhau. Thể tích phần không gian còn trống trong hộp chiếm tỉ lệ $a\%$ so với thể tích của hộp bóng tennis. Số a gần nhất với số nào sau đây?

- A. 50. B. 66. C. 30. D. 33.

Câu 62: Cho hai mặt trụ có cùng bán kính bằng 4 được đặt lồng vào nhau như hình vẽ. Tính thể tích phần chung của chúng biết hai trục của hai mặt trụ vuông góc và cắt nhau.



- A. 256π . B. 512. C. $\frac{256}{3}\pi$. D. $\frac{1024}{3}$.

MẶT NÓN TRÒN XOAY VÀ KHỐI NÓN

A – LÝ THUYẾT CHUNG

1. Mặt nón tròn xoay

Nội dung	Hình vẽ
Đường thẳng d, Δ cắt nhau tại O và tạo thành góc β với $0^\circ < \beta < 90^\circ$, $mp(P)$ chứa d, Δ. (P) quay quanh trục Δ với góc β không đổi $\Rightarrow$ mặt nón tròn xoay đỉnh O. Δ gọi là trục. d được gọi là đường sinh. - Góc 2β gọi là góc ở đỉnh.	

2. Khối nón

Nội dung	Hình vẽ
Là phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay kể cả hình nón đó. Những điểm không thuộc khối nón gọi là những điểm ngoài của khối nón. Những điểm thuộc khối nón nhưng không thuộc hình nón tương ứng gọi là những điểm trong của khối nón. Đỉnh, mặt đáy, đường sinh của một hình nón cũng là đỉnh, mặt đáy, đường sinh của khối nón tương ứng.	

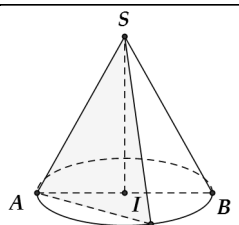
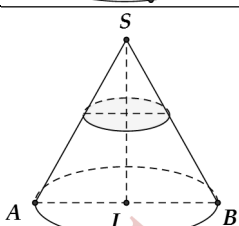
Cho hình nón có chiều cao h , đường sinh l và bán kính đáy r .

- Diện tích xung quanh:** của hình nón: $S_{xq} = \pi r l$.
- Diện tích đáy (hình tròn):** $S_{đáy} = \pi r^2$.
- Diện tích toàn phần:** của hình nón: $S_{tp} = \pi r l + \pi r^2$.
- Thể tích khối nón:** $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

3. MỘT SỐ DẠNG TOÁN VÀ CÔNG THỨC GIẢI

3.1. Dạng 1. Thiết diện của hình nón cắt bởi một mặt phẳng

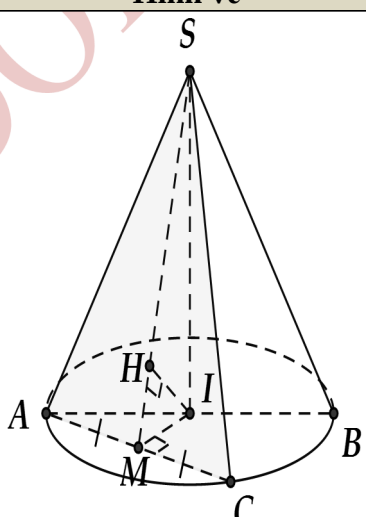
Nội dung	Hình vẽ
Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác cân.	

Thiết diện qua đỉnh của hình nón là những tam giác cân có hai cạnh bên là hai đường sinh của hình nón.	
Thiết diện vuông góc với trục của hình nón là những đường tròn có tâm nằm trên trục của hình nón.	

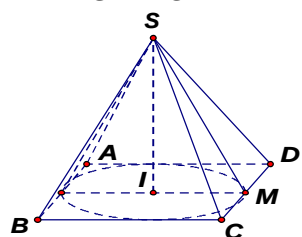
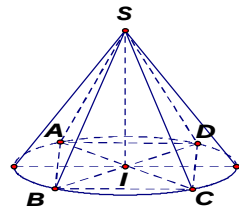
3.2. Dạng 2. Bài toán liên quan đến thiết diện qua đỉnh của hình nón

Cho hình nón có chiều cao là h , bán kính đáy r và đường sinh l .

Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là d .

Nội dung	Hình vẽ
Gọi M là trung điểm của AC. Khi đó: $AC \perp (SMI)$ - Góc giữa (SAC) và (ABC) là góc $\widehat{SMI}$. - Góc giữa (SAC) và SI là góc $\widehat{MSI}$. $d(I, (SAC)) = IH = d$. Diện tích thiết diện $S_{td} = S_{\Delta SAC} = \frac{1}{2} SM \cdot AC = \frac{1}{2} \sqrt{SI^2 + IM^2} \cdot 2\sqrt{AI^2 - IM^2}$ $= \sqrt{r^2 - \frac{h^2 d^2}{h^2 - d^2}} \cdot \sqrt{h^2 + \frac{h^2 d^2}{h^2 - d^2}}$	

3.3. Dạng 3. Bài toán hình nón ngoại tiếp và nội tiếp hình chóp

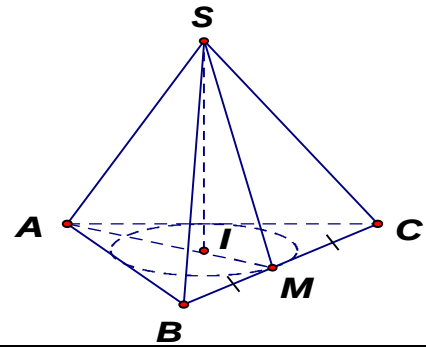
Hình nón nội tiếp hình chóp $S.ABCD$ đều là hình nón có đỉnh là S, đáy là đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$. Khi đó hình nón có: - Bán kính đáy $r = IM = \frac{AB}{2}$, - Đường cao $h = SI$, đường sinh $l = SM$.	Hình vẽ Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ 
Hình nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ đều là hình nón có đỉnh là S, đáy là đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$. Khi đó hình nón có: - Bán kính đáy: $r = IA = \frac{AC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2}$. - Chiều cao: $h = SI$. - Đường sinh: $l = SA$.	Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ 
Hình nón nội tiếp hình chóp $S.ABC$ đều là hình nón có đỉnh	Hình chóp tam giác đều

là S , đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Khi đó hình nón có

- Bán kính đáy: $r = IM = \frac{AM}{3} = \frac{AB\sqrt{3}}{6}$.
- Chiều cao: $h = SI$.
- Đường sinh: $l = SM$.

$S.ABC$

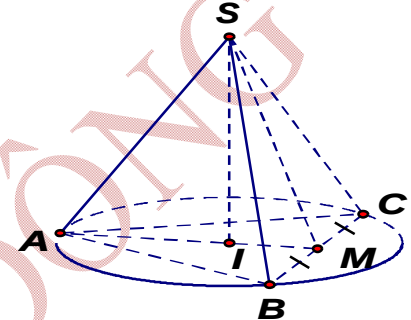


Hình nón **ngoại tiếp** hình chóp $S.ABC$ đều là hình nón có đỉnh là S , đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Khi đó hình nón có:

- Bán kính đáy: $r = IA = \frac{2AM}{3} = \frac{AB\sqrt{3}}{3}$.
 - Chiều cao: $h = SI$.
- Đường sinh: $l = SA$.

Hình chóp tam giác đều $S.ABC$



3.4. Dạng 4. Bài toán hình nón cắt

Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đáy thì phần mặt phẳng nằm trong hình nón là một hình tròn. Phần hình nón nằm giữa hai mặt phẳng nói trên được gọi là **hình nón cắt**.

Nội dung	Hình vẽ
Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đáy thì được mặt cắt là một hình tròn.	
Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với trục thì được mặt cắt là một hình thang cân.	
Cho hình nón cắt có R, r, h lần lượt là bán kính đáy lớn, bán kính đáy nhỏ và chiều cao. Diện tích xung quanh của hình nón cắt: $S_{xq} = \pi l (R + r).$ Diện tích đáy (hình tròn): $\begin{cases} S_{\text{đáy1}} = \pi r^2 \\ S_{\text{đáy2}} = \pi R^2 \end{cases} \Rightarrow \sum S_{\text{đáy}} = \pi (r^2 + R^2).$ Diện tích toàn phần của hình nón cắt: $S_{tp} = \pi l (R + r) + \pi r^2 + \pi R^2.$ Thể tích khối nón cắt:	

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr).$$

3.5. Dạng 5. Bài toán hình nón tạo bởi phần còn lại của hình tròn sau khi cắt bỏ đi hình quạt

Nội dung	Hình vẽ
Từ hình tròn $(O; R)$ cắt bỏ đi hình quạt AmB. Độ dài cung $\widehat{AnB}$ bằng x. Phần còn lại của hình tròn ghép lại được một hình nón. Tìm bán kính, chiều cao và độ dài đường sinh của hình nón đó. Hình nón được tạo thành có $\begin{cases} l = R \\ 2\pi r = x \Rightarrow r = \frac{2\pi}{x} \\ h = \sqrt{l^2 - r^2} \end{cases}$	

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: (CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP 2019 LẦN 2) Cho tứ diện $ABCD$ có DA vuông góc với $mp(ABC)$, $DB \perp BC$, $AD = AB = BC = a$. Kí hiệu V_1, V_2, V_3 lần lượt là thể tích của hình tròn xoay sinh bởi tam giác ABD khi quay quanh AD , tam giác ABC khi quay quanh AB , tam giác DBC khi quay quanh BC . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $V_1 + V_2 = V_3$.

B. $V_1 + V_3 = V_2$.

C. $V_2 + V_3 = V_1$.

D. $V_1 = V_2 = V_3$.

Lời giải

Chọn A

Quay tam giác ABD khi quay quanh AD ta có

$$V_1 = \frac{1}{3} AD \cdot \pi AB^2 = \frac{\pi}{3} a^3 \text{ (đvtt)}.$$

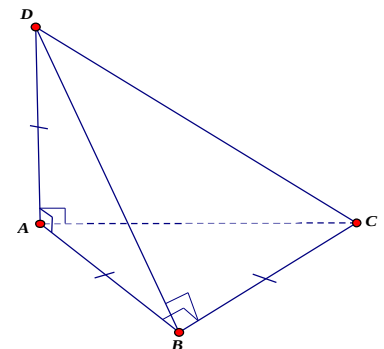
Quay tam giác ABC khi quay quanh AB ta có

$$V_2 = \frac{1}{3} AB \cdot \pi BC^2 = \frac{\pi}{3} a^3 \text{ (đvtt)}.$$

Quay tam giác DBC khi quay quanh BC ta có

$$V_3 = \frac{1}{3} BC \cdot \pi BD^2 = \frac{\pi}{3} AB \cdot 2AB^2 = \frac{2\pi}{3} a^3 \text{ (đvtt)}.$$

$$\text{Vậy } V_1 + V_2 = V_3.$$



Câu 2: (Chuyên Hưng Yên Lần 3) Cho hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O bán kính R . Trên đường tròn (O) lấy hai điểm A, B sao cho tam giác OAB vuông. Biết diện tích tam giác SAB bằng $R^2 \sqrt{2}$. Thể tích hình nón đã cho bằng

A. $\frac{\pi R^3 \sqrt{14}}{12}$.

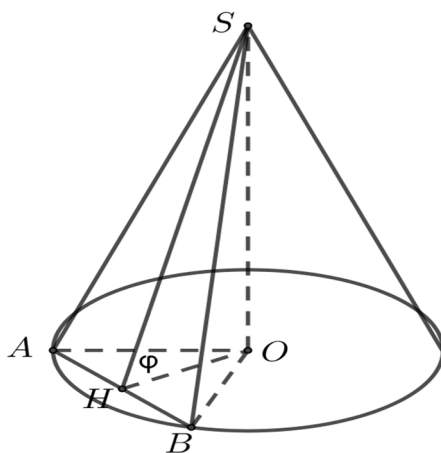
B. $\frac{\pi R^3 \sqrt{14}}{2}$.

C. $\frac{\pi R^3 \sqrt{14}}{6}$.

D. $\frac{\pi R^3 \sqrt{14}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm của đoạn AB .

Nhận thấy:

+) Tam giác OAB vuông cân tại O .

+) $OH \perp AB$, $SH \perp AB$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SAB) , (OAB) bằng $\varphi = \widehat{SHO}$.

$$\text{Ta có: } S_{\triangle OAB} = S_{\triangle SAB} \cdot \cos \varphi \Rightarrow \frac{1}{2} R^2 = R^2 \sqrt{2} \cdot \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\text{Mà } \cos \varphi = \frac{OH}{SH} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\frac{R\sqrt{2}}{2}}{SH} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow SH = \frac{R\sqrt{2}}{2} \cdot 2\sqrt{2} = 2R.$$

$$\Rightarrow SO = \sqrt{SH^2 - OH^2} = \sqrt{4R^2 - \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{14}}{2}$$

$$\text{Vậy thể tích của khối nón bằng } V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot SO = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot \frac{R\sqrt{14}}{2} = \frac{\pi R^3 \sqrt{14}}{6}.$$

Câu 3: (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định Lần 1) Một khối nón có bán kính đáy bằng 2 cm, chiều cao bằng $\sqrt{3}$ cm. Một mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với đáy một góc 60° chia khối nón làm 2 phần. Tính thể tích V phần nhỏ hơn (Tính gần đúng đến hàng phần trăm).

A. $V \approx 1,42 \text{ cm}^3$.

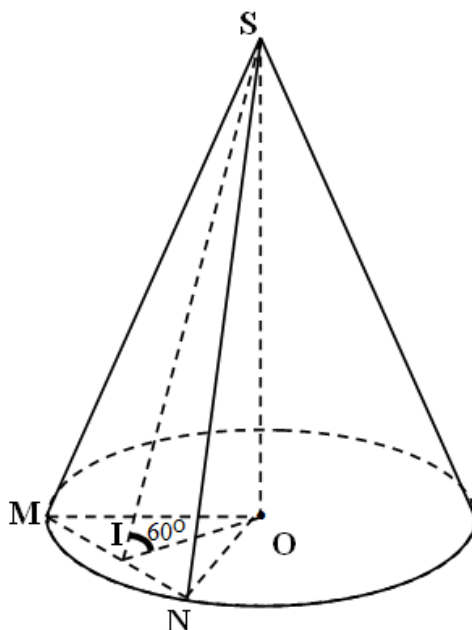
B. $V \approx 2,36 \text{ cm}^3$.

C. $V \approx 1,53 \text{ cm}^3$.

D. $V \approx 2,47 \text{ cm}^3$.

Lời giải

Chọn A

**Cách 1:**

Gọi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với đáy một góc 60° cắt khối nón theo thiết diện là tam giác SMN như hình vẽ.

Gọi I là trung điểm MN . Khi đó $OI \perp MN$ và $SI \perp MN$, suy ra góc giữa mặt phẳng (SMN) và mặt đáy là góc $\widehat{SIO} = 60^\circ$.

Xét tam giác SIO ta có: $OI = \frac{SO}{\tan \widehat{SIO}} = \frac{\sqrt{3}}{\tan 60^\circ} = 1$.

$$IN = \sqrt{ON^2 - OI^2} = \sqrt{3}, MN = 2IN = 2\sqrt{3}.$$

$$S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} \cdot OI \cdot MN = \sqrt{3}.$$

$$V_{S,OMN} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{\triangle OMN} = 1.$$

$$V_{k/nón} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \pi.$$

$$\sin \widehat{ION} = \frac{IN}{ON} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Suy ra } \widehat{ION} = 60^\circ, \widehat{MON} = 2 \cdot \widehat{ION} = 120^\circ.$$

Gọi V là thể tích cần tính.

$$\text{Ta có } V = \frac{1}{3} V_{k/nón} - V_{S,OMN} = \frac{4\sqrt{3}}{9} \pi - 1 \approx 1,42 \text{ cm}^3.$$

Cách 2:

Gọi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với đáy một góc 60° cắt khối nón theo thiết diện là tam giác SMN như hình vẽ.

Gọi I là trung điểm MN . Khi đó $OI \perp MN$ và $SI \perp MN$, suy ra góc giữa mặt phẳng (SMN) và mặt đáy là góc $\widehat{SIO} = 60^\circ$.

Xét tam giác SIO ta có: $OI = \frac{SO}{\tan \widehat{SIO}} = \frac{\sqrt{3}}{\tan 60^\circ} = 1$.

$$IN = \sqrt{ON^2 - OI^2} = \sqrt{3} \Rightarrow MN = 2IN = 2\sqrt{3}.$$

$$S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} \cdot OI \cdot MN = \sqrt{3}.$$

Ta có $\sin \widehat{ION} = \frac{IN}{ON} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ suy ra $\widehat{ION} = 60^\circ$, $\widehat{MON} = 2 \cdot \widehat{ION} = 120^\circ$.

Gọi S_v là diện tích hình viên phân tạo bởi dây MN và cung nhỏ MN .

$$\text{Ta có } S_v = \frac{1}{3} \pi R^2 - S_{\triangle OMN} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

$$\text{Thể tích phần nhỏ cần tính là: } V = \frac{1}{3} SO \cdot S_v = \frac{4\sqrt{3}}{9} \pi - 1 \approx 1,42 \text{ cm}^3.$$

Câu 4: Cho khối nón tròn xoay có đường cao $h = 20 \text{ cm}$, bán kính đáy $r = 25 \text{ cm}$. Một mặt phẳng (P) đi qua 2 đỉnh của khối nón và có khoảng cách đến tâm O của đáy là 12 cm. Khi đó diện tích thiết diện của (P) với khối nón bằng:

A. 500 cm^2

B. 475 cm^2

C. 450 cm^2

D. 550 cm^2

Lời giải

Gọi S là đỉnh của khối nón. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh S cắt khối nón theo hai đường sinh bằng nhau là $SA = SB$ nên ta có thiết diện là tam giác cân SAB .

Gọi I là trung điểm của đoạn AB, ta có $OI \perp AB$.

Từ tâm O của đáy ta kẻ $OH \perp SI$ tại H, ta có

$OH \perp (SAB)$ và do đó theo giả thiết ta có

$OH = 12 \text{ cm}$. Xét tam giác vuông SOI ta có:

$$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{12^2} - \frac{1}{20^2}$$

$$\Rightarrow OI = 15 (\text{cm})$$

Mặt khác, xét tam giác vuông SOI ta còn có:

$$OS \cdot OI = SI \cdot OH$$

$$\text{Do đó } SI = \frac{OS \cdot OI}{OH} = \frac{20 \cdot 15}{12} = 25 (\text{cm})$$

Gọi S_t là diện tích của thiết diện SAB . Ta có: $S_t = \frac{1}{2} AB \cdot SI$, trong đó $AB = 2AI$

Vì $AI^2 = OA^2 - OI^2 = 25^2 - 15^2 = 20^2$ nên $AI = 20 \text{ cm}$ và $AB = 40 \text{ cm}$

Vậy thiết diện SAB có diện tích là: $S_t = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 25 = 500 (\text{cm}^2)$.

Chọn A

Câu 5: (THPT-Yên-Mô-A-Ninh-Bình-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho tam giác ABC cân tại A, biết $AB = 2a$ và góc $\widehat{ABC} = 30^\circ$, cho tam giác ABC (kể cả điểm trong) quay xung quanh đường thẳng AC được khối tròn xoay. Khi đó thể tích khối tròn xoay bằng

A. $2\pi a^3$.

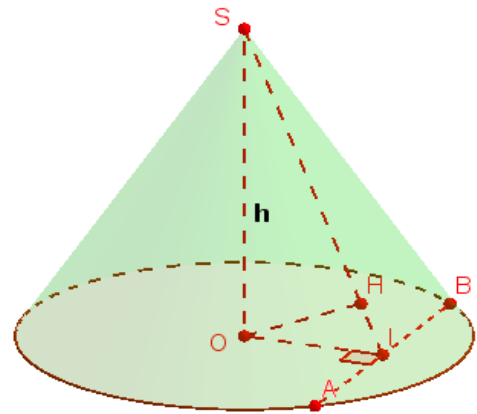
B. $6\pi a^3$.

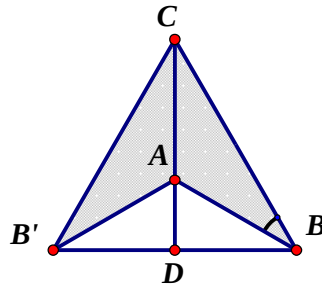
C. $\frac{2\pi a^3}{3}$.

D. $2a^3$.

Lời giải

Chọn A





Gọi D là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng AC .

V_1 là thể tích khối nón tròn xoay sinh bởi tam giác vuông CDB khi quay quanh trục CD .

V_2 là thể tích khối nón tròn xoay sinh bởi tam giác vuông ADB khi quay quanh trục AD .

Khi đó thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = V_1 - V_2$.

Tam giác ABC cân tại A và $AB = 2a = AC$, $\widehat{ABC} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{CAB} = 120^\circ$ và $\widehat{DAB} = 60^\circ$.

Do đó $DB = AB \cdot \sin 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Vậy ta có

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot DB^2 \cdot DC - \frac{1}{3}\pi \cdot DB^2 \cdot DA = \frac{1}{3}\pi \cdot DB^2 (DC - DA) = \frac{1}{3}\pi \cdot DB^2 \cdot AC = \frac{1}{3}\pi \cdot (a\sqrt{3})^2 \cdot 2a = 2\pi a^3$$

Chọn đáp án A.

Câu 6: Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{BAD} = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), $AD = a$ và $\widehat{ADB} = 90^\circ$. Quay $ABCD$ quanh AB , ta được vật tròn xoay có thể tích là:

A. $V = \pi a^3 \sin^2 \alpha$

B. $V = \pi a^3 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha$

C. $V = \pi a^3 \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$

D. $V = \pi a^3 \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$

Lời giải

Kẻ $DH \perp AB, CN \perp AB$.

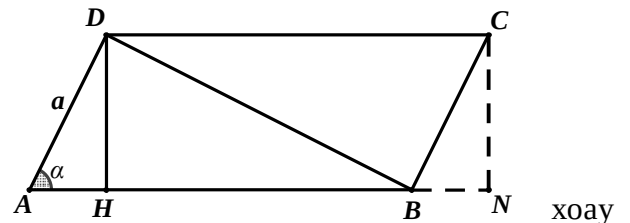
Các tam giác vuông HAD và NBC bằng nhau.

$$DH = CN = a \cdot \sin \alpha$$

$$AH = BN = a \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow HN = AB = \frac{a}{\cos \alpha}$$

Khi quay quanh AB , các tam giác vuông AHD và NBC tạo thành hai hình nón tròn bằng nhau nên:



$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot DH^2 \cdot AH + \left(\pi \cdot DH^2 \cdot HN - \frac{1}{3}\pi \cdot CN^2 \cdot BN \right) = \pi \cdot DH^2 \cdot AB = \pi \cdot a^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \frac{a}{\sin \alpha} = \pi a^3 \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

Chọn C

Câu 7: Cho hình nón $\mathcal{S}$ có bán kính đáy R , đường cao SO . Gọi (P) mà mặt phẳng vuông góc với SO tại O_1 sao cho $SO_1 = \frac{1}{3}SO$. Một mặt phẳng qua trục hình nón cắt phần khối nón $\mathcal{S}$ nằm giữa

(P) và đáy hình nón theo thiết diện là hình tứ giác có hai đường chéo vuông góc. Tính thể tích phần hình nón $\mathcal{S}$ nằm giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng chứa đáy hình nón $\mathcal{S}$.

A. $\frac{7\pi R^3}{9}$

B. $\frac{\pi R^3}{9}$

C. $\frac{26\pi R^3}{81}$

D. $\frac{52\pi R^3}{81}$

Lời giải

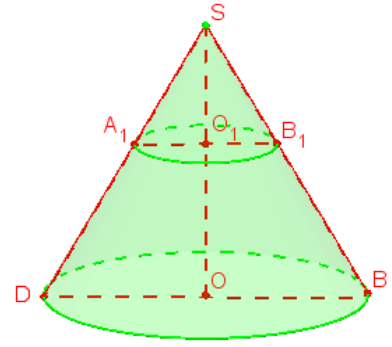
Gọi thiết diện thu được là AA_1B_1B

$$\text{Vì } SO_1 = \frac{1}{3}SO \text{ nên } A_1B_1 = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}.2R$$

Mặt khác $AB_1 \perp A_1B$ tại I nên

$$IO = \frac{1}{2}AB, IO_1 = \frac{1}{2}A_1B_1$$

$$\text{Vậy } OO_1 = R + \frac{R}{3} = \frac{4R}{3}$$



$$\text{Để thấy } SO_1 = \frac{1}{2}OO_1 = \frac{2R}{3}$$

Từ đó $SO = 2R$

Gọi thể tích phần hình nón phải tính là V^* thì

$V^* = V_1 - V_2$, trong đó:

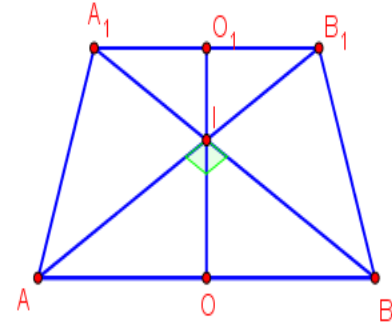
V_1 là thể tích của hình nón $\mathcal{S}$.

V_2 là thể tích hình nón đỉnh S và đáy là thiết diện của $\mathcal{S}$ được cắt bởi (P).

Ta có thể tích phần hình nón phải tính là

$$V^* = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}\pi OB^2 \cdot SO - \frac{1}{3}\pi O_1B_1^2 \cdot SO_1$$

$$= \frac{1}{3}\pi \left(R^2 \cdot 2R - \frac{R^2}{9} \cdot \frac{2R}{3} \right) = \frac{52\pi R^3}{81}$$



Câu 8: (THTT số 3) Một hình thang cân có chiều cao h và độ dài hai đáy là a, b . Tính thể tích vật thể tròn xoay thu được khi quay hình thang này quanh đường trung trực của hai đáy.

A. $\frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2)$.

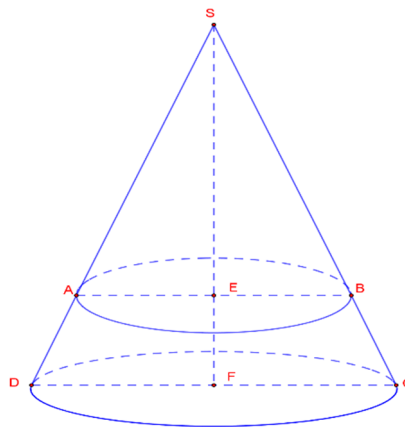
B. $\frac{1}{6}\pi h(a^2 + ab + b^2)$.

C. $\frac{1}{12}\pi h(a^2 + ab + b^2)$.

D. Cả A, B, C đều sai.

Chọn C

Lời giải



Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD .

Theo giả thiết, ta có $EB = \frac{a}{2}$, $FC = \frac{b}{2}$ và $EF = h$. Đặt $SE = x$.

$$\triangle SEB \sim \triangle SFC \Rightarrow \frac{SE}{SF} = \frac{EB}{FC} \Rightarrow \frac{x}{x+h} = \frac{a}{b} \Rightarrow x = \frac{ah}{b-a}. \text{ Suy ra } SF = \frac{ah}{b-a} + h = \frac{bh}{b-a}.$$

Thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là

$$V = \frac{1}{3}\pi.SF.FC^2 - \frac{1}{3}\pi.SE.EB^2 = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{bh}{b-a} \cdot \frac{b^2}{4} - \frac{ah}{b-a} \cdot \frac{a^2}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{h}{4(b-a)} \cdot (b^3 - a^3) = \frac{1}{12}\pi h \cdot (a^2 + ab + b^2).$$

- Câu 9: (Hải Hậu Lần1)** Cho hình trụ (T) có chiều cao $h = 2m$, bán kính đáy $r = 3m$. Giả sử (L) là hình lăng trụ đều n cạnh có hai đáy là đa giác đều nội tiếp đường tròn đáy của hình trụ (T) . Khi n tăng lên vô hạn thì tổng diện tích tất cả các mặt của của khối lăng trụ (L) (tính bằng m^2) có giới hạn là:
- A. $S = 12$. B. $S = 20\pi$. **C. 30π .** D. 12π .

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Vì (L) là hình lăng trụ đều n cạnh có hai đáy là đa giác đều nội tiếp đường tròn đáy của hình trụ (T) nên độ dài mỗi cạnh của lăng trụ là $a = 2r \cdot \sin \frac{\pi}{n}$.

Do đó diện tích của n mặt bên là $S_1 = nah = 2nrh \cdot \sin \frac{\pi}{n} = 12n \cdot \sin \frac{\pi}{n}$

Công thức diện tích của đa giác đều n cạnh, có độ dài mỗi cạnh là a là: $s = \frac{nr^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n}}{2}$.

Nên diện tích của hai đáy là: $S_2 = 2s = 9n \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$.

Tổng diện tích tất cả các mặt của khối lăng trụ (L) là:

$$S = S_1 + S_2 = 12n \cdot \sin \frac{\pi}{n} + 9n \cdot \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Khi n tăng lên vô hạn:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(12n \cdot \sin \frac{\pi}{n} + 9n \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(12n \cdot \sin \frac{\pi}{n} \right) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(9n \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \right) = 30\pi.$$

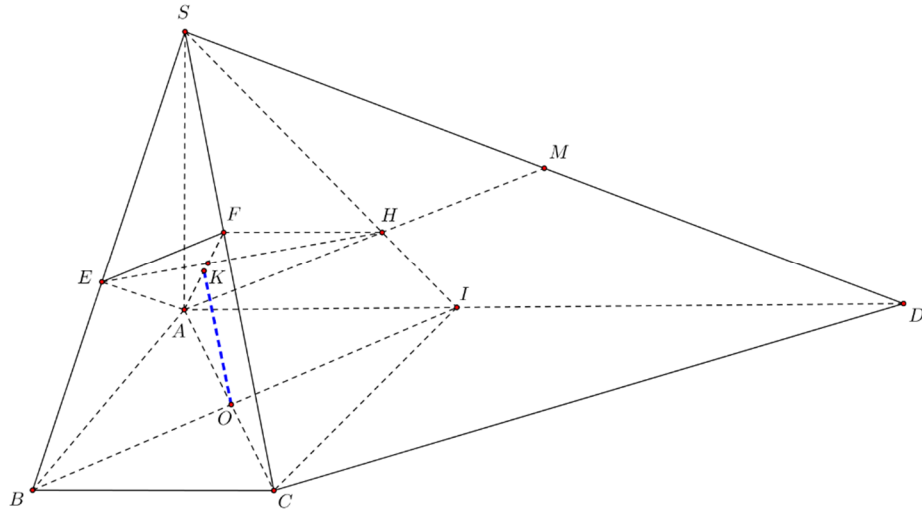
Cách 2: Khi n tăng lên vô hạn, hình lăng trụ tiến dần tới hình trụ, do đó tổng diện tích tất cả các mặt của của khối lăng trụ (L) bằng với diện tích toàn phần của hình trụ (T) và bằng $2\pi rh + 2\pi r^2 = 30\pi$

- Câu 10: (Sở Bắc Ninh)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, tứ giác $ABCD$ là hình thang vuông với cạnh đáy AD, BC . $AD = 3CB = 3a$, $AB = a$, $SA = a\sqrt{3}$. Điểm I thỏa mãn $\overline{AD} = 3\overline{AI}$, M là trung điểm SD , H là giao điểm của AM và SI . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SC . Tính thể tích V của khối nón có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác EFH và đỉnh thuộc mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $V = \frac{\pi a^3}{5\sqrt{5}}$. B. $V = \frac{\pi a^3}{2\sqrt{5}}$. C. $V = \frac{\pi a^3}{\sqrt{5}}$. **D. $V = \frac{\pi a^3}{10\sqrt{5}}$.**

Lời giải

Chọn D



Nhận xét: Tứ giác $ABCI$ là hình vuông. Dễ chứng minh $BC \perp (SAB)$ và $BI \perp SC$.

$$\begin{cases} EA \perp SB \\ EA \perp BC \end{cases} \Rightarrow EA \perp (SBC) \Rightarrow EA \perp SC.$$

$$\begin{cases} EA \perp SC \\ FA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AEF).$$

Trong tam giác vuông SAB có $\frac{SE}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{3}{4}$.

Trong tam giác SAD có $\frac{HS}{HI} \cdot \frac{AI}{AD} \cdot \frac{MD}{MS} = 1 \Rightarrow \frac{HS}{HI} = 3 \Rightarrow \frac{SH}{SI} = \frac{3}{4}$.

Trong tam giác SBI có $\frac{SE}{SB} = \frac{SH}{SI} = \frac{3}{4} \Rightarrow EH \parallel BI$. Do $BI \perp SC$ nên $EH \perp SC$.

Suy ra các điểm A, E, F, H cùng thuộc mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC .

Gọi K là trung điểm AF .

Vì $\begin{cases} EA \perp EF \\ AH \perp FH \end{cases} \Rightarrow K$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle EFH$.

$$\text{Ta có: } AF = \frac{SA \cdot AC}{SC} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Suy ra bán kính đáy của khối nón là } R = \frac{1}{2} AF = \frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{5}}.$$

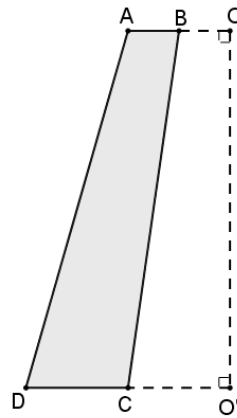
Gọi O là tâm hình vuông $ABCI$.

Do $\begin{cases} SC \perp (EFH) \\ OK \parallel SC \end{cases} \Rightarrow OK \perp (EFH) \Rightarrow O$ là đỉnh của khối nón.

$$\text{Chiều cao của khối nón là } h = \frac{1}{2} FC = \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 - AF^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 - \frac{6}{5}a^2} = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Vậy thể tích khối nón là } V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{5}} \right)^2 \cdot \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{\pi a^3}{10\sqrt{5}}.$$

Câu 11: Thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang $ABCD$ quanh trục OO' , biết $OO' = 80$, $O'D = 24$, $O'C = 12$, $OA = 12$, $OB = 6$.



A. $V = 43200\pi$.

B. $V = 21600\pi$.

C. $V = 20160\pi$.

D. $V = 45000\pi$.

Lời giải

Chọn C

Công thức tính thể tích khối nón cụt $V = \frac{1}{3}\pi h(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2)$.

Trong đó h là độ dài đường cao, $R_1; R_2$ lần lượt là bán kính hai đáy.

Gọi V_1 là thể tích khối nón cụt khi quay hình thang $AOO'D$ quanh trục OO' .

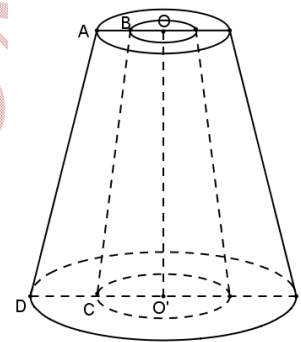
Gọi V_2 là thể tích khối nón cụt khi quay hình thang $BOO'C$ quanh trục OO' .

Khi đó $V = V_1 - V_2$.

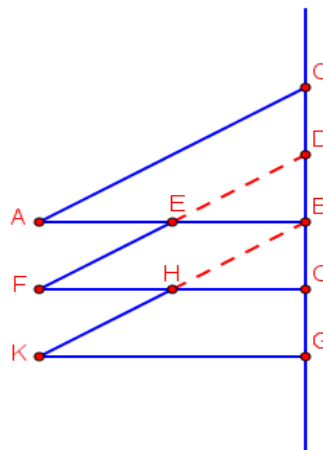
$$\text{Ta có } V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot OO' \cdot (O'D^2 + OA^2 + O'D \cdot OA) = 26880\pi$$

$$\text{và } V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot OO' \cdot (O'C^2 + OB^2 + O'C \cdot OB) = 6720\pi.$$

$$\text{Vậy } V = V_1 - V_2 = 26880\pi - 6720\pi = 20160\pi.$$



Câu 12: Cho ba hình tam giác đều cạnh bằng a chồng lên nhau như hình vẽ (cạnh đáy của tam giác trên đi qua các trung điểm hai cạnh bên của tam giác dưới). Tính theo a thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay chúng xung quanh đường thẳng d .



A. $\frac{13\sqrt{3}\pi a^3}{96}$.

B. $\frac{11\sqrt{3}\pi a^3}{96}$.

C. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{8}$.

D. $\frac{11\sqrt{3}\pi a^3}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Nếu ba hình tam giác không chồng lên nhau thì

$$\text{thể tích của khối tròn xoay là } V_1 = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{8}$$

$$\text{Thể tích phần bị chồng lên là } V_2 = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{96}$$

$$\Rightarrow \text{Thể tích cần tính là } V = V_1 - V_2 = \frac{11\sqrt{3}\pi a^3}{96}$$

Hoặc làm như sau:

Đặt $V_1; V_2; V_3; V_4$ lần lượt là thể tích: khối nón sinh bởi tam giác OAB quay quanh OB , khối tròn xoay sinh bởi hình $BCFE; GCHK$, khối nón sinh bởi tam giác DEB khi quay quanh BC . Khi đó: Thể tích khối cần tìm là:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 3V_1 - 2V_4 = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{a^2}{16} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{11\sqrt{3}\pi a^3}{96}.$$

Câu 13: (Nguyễn Trãi Hải Dương Lần1) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2$, $AD = 2\sqrt{3}$ và nằm trong mặt phẳng (P) . Quay (P) một vòng quanh đường thẳng BD . Khối tròn xoay được tạo thành có thể tích bằng

A. $\frac{28\pi}{9}$.

B. $\frac{28\pi}{3}$.

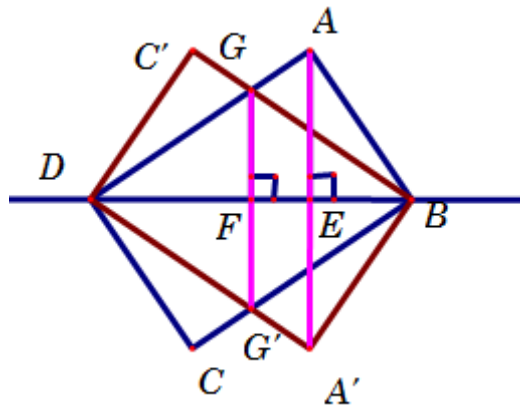
C. $\frac{56\pi}{9}$.

D. $\frac{56\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:



Gọi A' , C' lần lượt đối xứng với A , C qua BD , $G = BC' \cap AD$, G' đối xứng với G qua BD . $E = AA' \cap BD$, $F = GG' \cap BD \Rightarrow F$ là trung điểm BD .

Gọi V là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh đường thẳng BD .

V_1 là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác BAD quanh cạnh BD (cũng là thể tích của khối tròn xoay khi quay tam giác BCD quanh cạnh BD).

V'_1, V''_1 lần lượt là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay $\triangle BAE, \triangle EAD$ quanh cạnh BD .

V_2 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay $\triangle BGD$ quanh cạnh BD .

V'_2 là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay $\triangle BGF$ quanh cạnh BD .

Ta có V'_1 là thể tích của khối nón đỉnh B , bán kính đáy AE .

$$\text{Tính được } AE = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2}} = \sqrt{3}, BD = 4, BE = 1, DE = 3.$$

$$\Rightarrow V'_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot AE^2 \cdot BE = \frac{1}{3} \pi (\sqrt{3})^2 = \pi.$$

Ta có V''_1 là thể tích của khối nón đỉnh D , bán kính đáy AE .

$$\Rightarrow V''_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot AE^2 \cdot DE = \frac{1}{3} \pi (\sqrt{3})^2 \cdot 3 = 3\pi.$$

$$\text{Suy ra } V_1 = V'_1 + V''_1 = \pi + 3\pi = 4\pi.$$

Ta có V'_2 là thể tích của khối nón đỉnh B , bán kính đáy GF .

Ta chứng minh được $\triangle BGF \sim \triangle BDC'$ (g - g).

$$\Rightarrow \frac{GF}{DC'} = \frac{BF}{BC'} \Rightarrow GF = \frac{BF \cdot DC'}{BC'} = \frac{BD \cdot DC'}{2BC'} = \frac{4 \cdot 2}{2 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

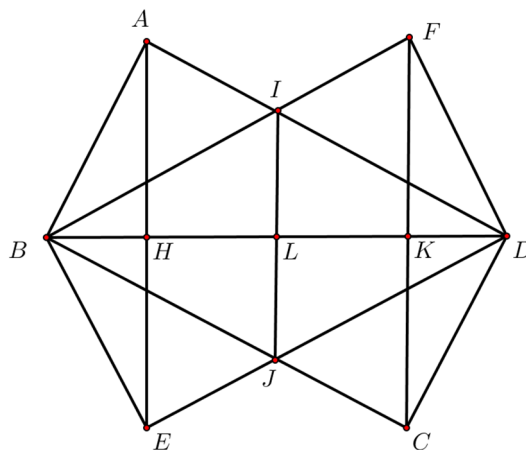
$$V'_2 = \frac{1}{3} \pi \cdot GF^2 \cdot BF = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot 2 = \frac{8\pi}{9}.$$

$$\text{Ta có } V_2 = 2V'_2 = \frac{16\pi}{9}.$$

$$\text{Vậy } V = 2V_1 - V_2 = 2 \cdot 4\pi - \frac{16\pi}{9} = \frac{56\pi}{9}.$$

Cách 2:

Gọi điểm như hình vẽ

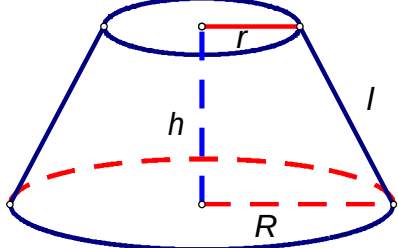


V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối nón, nón cụt nhận được khi quay tam giác ABH và tứ giác $AHLT$ quay BD .

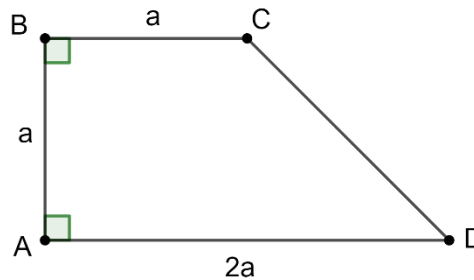
Ta có: $AH = \sqrt{3}, IL = \frac{2}{\sqrt{3}}, BH = HL = 1.$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } V &= 2(V_1 + V_2) = 2\left[\frac{1}{3}BH.\pi.AH^2 + \frac{1}{3}HL.\pi.(IL^2 + IL.AH + AH^2)\right] \\ &= 2\left[\frac{1}{3}.1.\pi.3 + \frac{1}{3}.1.\pi.\left(\frac{4}{3} + 2 + 3\right)\right] = \frac{56\pi}{9}. \end{aligned}$$

Ghi nhớ:

Thể tích khối nón cụt		$\begin{cases} S_{xq} = \pi l(R + r) \\ V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr) \end{cases}$
-------------------------------------	---	---

Câu 14: (Cụm 8 trường chuyên lần 1) Cho hình thang $ABCD$ có $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình thang $ABCD$ xung quanh trục CD .



A. $\frac{7\sqrt{2}\pi a^3}{6}$.

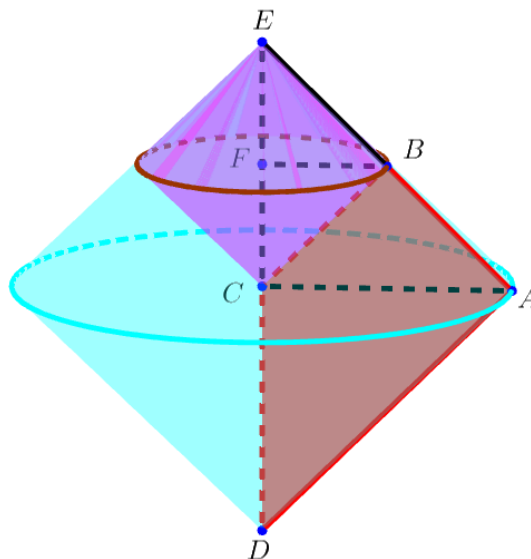
B. $\frac{7\sqrt{2}\pi a^3}{12}$.

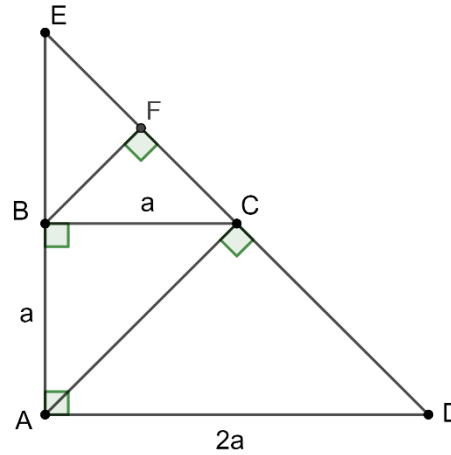
C. $\frac{7\pi a^3}{6}$.

D. $\frac{7\pi a^3}{12}$.

Lời giải

Chọn A





Gọi E là giao điểm của AB và CD . Gọi F là hình chiếu vuông góc của B trên CE .

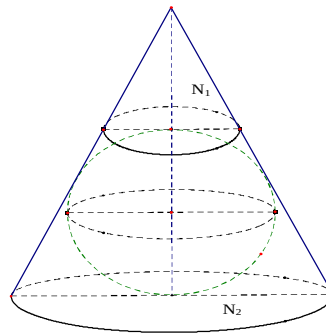
Ta có: $\triangle BCF = \triangle BEF$ nên tam giác $\triangle BCF$ và $\triangle BEF$ quay quanh trục CD tạo thành hai khối nón bằng nhau có thể tích V_1 .

$\triangle ADC = \triangle AEC$ nên tam giác $\triangle ADC$ và $\triangle AEC$ quay quanh trục CD tạo thành hai khối nón bằng nhau có thể tích V .

Nên thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình thang $ABCD$ xung quanh trục CD bằng:

$$2V - 2V_1 = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi (CD \cdot AC^2 - CF \cdot BF^2) = \frac{2}{3} \pi \left[(a\sqrt{2})^3 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^3 \right] = \frac{7\sqrt{2}\pi a^3}{6} \text{ (đvtt)}.$$

Câu 15: Một hình nón bị cắt bởi mặt phẳng (P) song song với đáy. Mặt phẳng (P) chia hình nón làm hai phần (N_1) và (N_2) . Cho hình cầu nội tiếp (N_2) như hình vẽ sao cho thể tích hình cầu bằng một nửa thể tích của (N_2) . Một mặt phẳng đi qua trục hình nón và vuông góc với đáy cắt (N_2) theo thiết diện là hình thang cân, tang góc nhọn của hình thang cân là



A. 2

B. 4

C. 1

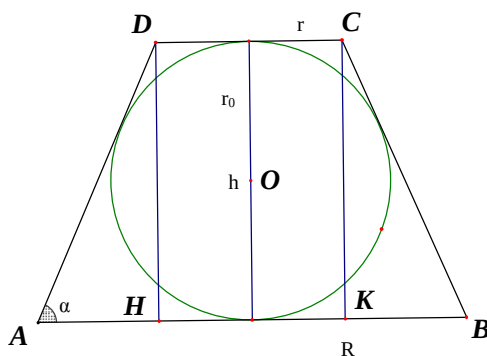
D. $\sqrt{3}$ **Lời giải**

Giả sử ta có mặt cắt của hình nón cắt và các đại lượng như hình vẽ.

Gọi α là góc cần tìm.

Xét $\triangle AHD$ vuông tại H có $DH = h, AH = R - r \Rightarrow h = 2r_0 = AH \cdot \tan \alpha = (R - r) \tan \alpha$ (1)

Thể tích khối cầu là $V_1 = \frac{4}{3} \pi r_0^3 = \frac{\pi h^3}{6}$



Thể tích của (N_2) là $V_2 = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow h^2 = R^2 + r^2 + Rr \quad (2)$$

Ta có $BC = R + r$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$$\text{Mà } h^2 = BC^2 - (R - r)^2 = 4Rr \quad (3)$$

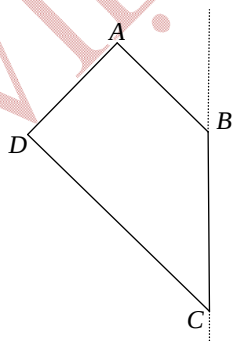
$$\text{Từ } (2), (3) \Rightarrow (R - r)^2 = Rr \quad (4)$$

$$\text{Từ } (1), (3), (4) \Rightarrow h^2 = (R - r)^2 \cdot \tan^2 \alpha = 4(R - r)^2 \text{ (vì } \alpha \text{ là góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha = 4 \Rightarrow \tan \alpha = 2$$

Chọn A

Câu 16: (CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ HÒA BÌNH LẦN 4 NĂM 2019) Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D có $CD = 2AB = 2AD = 4$. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra bởi hình thang $ABCD$ khi quay xung quanh đường thẳng BC bằng



A. $\frac{28\sqrt{2}}{3}\pi$.

B. $\frac{20\sqrt{2}}{3}\pi$.

C. $\frac{32\sqrt{2}}{3}\pi$.

D. $\frac{10\sqrt{2}}{3}\pi$.

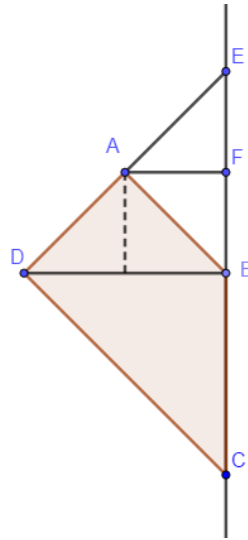
Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } AB = AD = 2, \quad BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2\sqrt{2}, \quad BC = \sqrt{AD^2 + \left(\frac{1}{2}CD\right)^2} = 2\sqrt{2}.$$

Tam giác BCD vuông cân tại B do $CD^2 = BD^2 + BC^2$ và $BD = BC = 2\sqrt{2}$.

Kéo dài $AD \cap BC = E$. Kẻ $AF \perp BE$ tại F . Khi đó $AF \parallel BD$.



Để chứng minh: $\triangle ABCD = \triangle BED$, $\triangle ABF = \triangle AEF$, $AF = BF = \frac{1}{2}BD = \sqrt{2}$.

+ Thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi tam giác ECD khi quay xung quanh đường thẳng BC bằng 2 lần thể tích khối nón sinh ra bởi tam giác BCD khi quay xung quanh đường thẳng BC

(bán kính đáy BD , đường cao BC): $V_1 = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi BD^2 \cdot BC = \frac{32\sqrt{2}\pi}{3}$.

+ Thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi tam giác ABE khi quay xung quanh đường thẳng BC bằng 2 lần thể tích khối nón sinh ra bởi tam giác ABF khi quay xung quanh đường thẳng BC

(bán kính đáy AF , đường cao BF): $V_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi AF^2 \cdot BF = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}$.

Thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi hình thang $ABCD$ khi quay xung quanh đường thẳng BC

là: $V = V_1 - V_2 = \frac{28\sqrt{2}\pi}{3}$.

Câu 17: Trong các hình nón tròn xoay cùng có diện tích toàn phần bằng π . Tính thể tích hình nón lớn nhất?

- A. $\frac{\pi\sqrt{2}}{9}$. B. $\frac{\pi\sqrt{2}}{12}$. C. $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $S_{tp} = \pi \Leftrightarrow \pi rl + \pi r^2 = \pi \Leftrightarrow rl + r^2 = 1$ suy ra $l = \frac{1-r^2}{r}$ và $l+r = \frac{1}{r}$.

Có $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2} = \frac{1}{3} \pi r \sqrt{1 - 2r^2}$.

Xét hàm số $y = f(x) = x\sqrt{1-2x^2}$ trên đoạn $\left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ ta có $\max_{\left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ tại $x = \frac{1}{2}$.

Vậy $V_{\max} = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{12}$.

Câu 18: Tìm hình nón có thể tích nhỏ nhất ngoại tiếp mặt cầu bán kính r cho trước có thể tích bằng:

- A. $\frac{1}{6} \pi r^3$ B. $\frac{8}{3} \pi r^3$ C. $\frac{2}{3} \pi r^3$ D. $\frac{4}{3} \pi r^3$

Lời giải

Xét mặt phẳng chứa trục của hình nón, mặt phẳng này cắt hình nón theo tam giác cân SAB và cắt mặt cầu nội tiếp hình nón theo đường tròn bán kính r và hình tròn này nội tiếp tam giác cân SAB (h.79b)

Kí hiệu bán kính đáy hình nón là x , chiều cao hình nón là y ($x > 0, y > 2r$) thì $(AH + SA)r = \frac{1}{2} AB.SH$

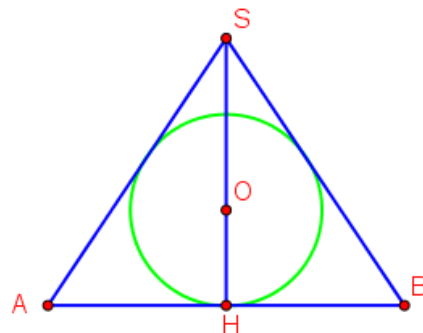
$$\Leftrightarrow \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) r = xy \Leftrightarrow x^2 = \frac{r^2 y}{y - 2r}$$

Vậy thể tích hình nón ngoại tiếp mặt cầu bán kính r là

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi x^2 y = \frac{1}{3} \pi r^2 : \frac{y^2}{y - 2r}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{y^2}{y-2r} &= \frac{y^2-4r^2+4r^2}{y-2r} = y+2r+\frac{4r^2}{y-2r} \\ &= y-2r+\frac{4r^2}{y-2r}+4r \geq 2\sqrt{(y-2r) \cdot \frac{4r^2}{y-2r}}+4r=8r \end{aligned}$$

Từ đó $V_2 \geq \frac{1}{3}\pi \cdot 8r^3$, tức là V_2 đạt giá trị bé nhất khi và chỉ khi $y - 2r = \frac{4r^2}{y - 2r} \Leftrightarrow y = 4r$ từ đó $x = r\sqrt{2}$.



Câu 19: Cho một hình nón (N) có đáy là hình tròn tâm O . Đường kính $2a$ và đường cao $SO = a$. Cho điểm H thay đổi trên đoạn thẳng SO . Mặt phẳng (P) vuông góc với SO tại H và cắt hình nón theo đường tròn (C). Khối nón có đỉnh là O và đáy là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{2\pi a^3}{81}$. B. $\frac{4\pi a^3}{81}$. C. $\frac{7\pi a^3}{81}$. D. $\frac{8\pi a^3}{81}$.

Lời giải

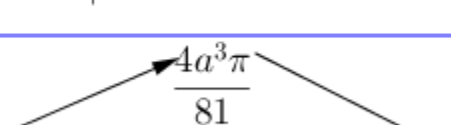
Gọi (α) là mặt phẳng qua trục của hình nón (N) cắt hình nón (N) theo thiết là tam giác SAB, cắt hình nón đỉnh S và có đáy là đường tròn (C) theo thiết diện là tam giác SCD, gọi I là giao điểm của SO và CD. Ta có: $AB = 2a \Rightarrow OA = a = SO$. Do đó tam giác SOA vuông cân tại S. Suy ra tam giác SIC vuông cân tại I. Đặt $SI = AC = x (0 < x < a) \Rightarrow OI = a - x$

Thể tích khối nón có đỉnh là O và đáy là hình tròn (C) là:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot IC^2 \cdot OI = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot x^2 (a - x) = \frac{1}{3} \pi (-x^3 + ax^2) \cdot V'(x) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (-3x^2 + 2ax)$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2a}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{2a}{3}$	a	
$V'(x)$		+	0	—
V				

Chọn B

Câu 20: Cho hình nón có chiều cao h . Tính chiều cao x của khối trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong hình nón theo h .

A. $x = \frac{h}{2}$.

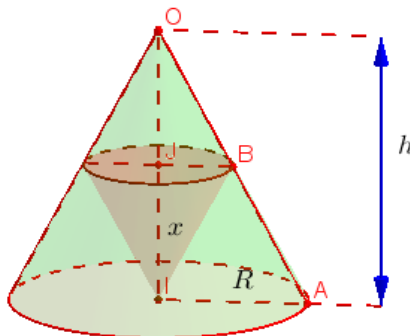
B. $x = \frac{h}{3}$.

C. $x = \frac{2h}{3}$.

D. $x = \frac{h}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Gọi r, R theo thứ tự là bán kính đáy hình nón và khối trụ cần tìm. O là đỉnh của hình nón, I là tâm của đáy hình nón, J là tâm của đáy hình trụ và khác I . OA là một đường sinh của hình nón, B là điểm chung của OA với khối trụ. Ta có: $\frac{r}{R} = \frac{h-x}{h} \Rightarrow r = \frac{R}{h}(h-x)$.



Thể tích khối trụ là: $V = \pi x R^2 = \pi x \frac{R^2}{h^2} (h-x)^2$

Xét hàm số $V(x) = \pi x \frac{R^2}{h^2} (h-x)^2$, $0 < x < h$.

Ta có $V'(x) = \pi \frac{R^2}{h^2} (h-x)(h-3x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{h}{3}$ hay $x = h$.

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{h}{3}$	h	
$V'(x)$		+	0	—
$V(x)$	0	$\nearrow \frac{4\pi R^2 h}{81}$ $\searrow$	0	

Dựa vào BBT, ta thấy thể tích khối trụ lớn nhất khi chiều cao của khối trụ là $x = \frac{h}{3}$.

Câu 21: Cho hình nón đỉnh S , đáy là hình tròn tâm O , góc ở đỉnh bằng 120° . Trên đường tròn đáy, lấy điểm A cố định và điểm M di động. Có bao nhiêu vị trí điểm của điểm M để diện tích tam giác SAM đạt giá trị lớn nhất?

A. 2.

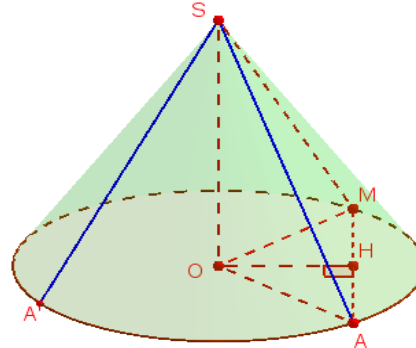
B. 3.

C. 1.

D. vô số.

Lời giải

Chọn A



Gọi r là bán kính đáy của hình nón.

Vì góc ở đỉnh $\widehat{ASA'} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ASO} = 60^\circ$.

Suy ra $SO = OA \cdot \cot \widehat{ASO} = \frac{r}{\sqrt{3}}$.

Gọi H là trung điểm của AM và đặt $x = OH$.

Ta có: $SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = \sqrt{\frac{r^2}{3} + x^2}$, $AM = 2AH = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 2\sqrt{r^2 - x^2}$.

Diện tích tam giác $\triangle SAM$ bằng $s = \frac{1}{2}SH \cdot AM = \sqrt{\frac{r^2}{3} + x^2} \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \leq \frac{2}{3}r^2$.

$s_{\max} = \frac{2}{3}r^2$ đạt được khi $\frac{r^2}{3} + x^2 = r^2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{r^2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{r}{\sqrt{3}}$. Tức là $OH = SO$.

Theo tính chất đối xứng của của đường tròn ta có hai vị trí của M thỏa yêu cầu.

Câu 22: Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ và điểm C thay đổi trên nửa đường tròn đó, đặt $\alpha = \widehat{CAB}$ và gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB . Tìm α sao cho thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay tam giác ACH quanh trục AB đạt giá trị lớn nhất.

A. $\alpha = 60^\circ$.B. $\alpha = 45^\circ$.C. $\arctan \frac{1}{\sqrt{2}}$.D. $\alpha = 30^\circ$.

Lời giải

Chọn C

$$AC = AB \cdot \cos \alpha = 2R \cdot \cos \alpha$$

$$CH = AC \cdot \sin \alpha = 2R \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha;$$

$$AH = AC \cdot \cos \alpha = 2R \cdot \cos^2 \alpha$$

Thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay tam giác ACH quanh trục AB là

$$V = \frac{1}{3}AH \cdot \pi CH^2 = \frac{8}{3}R^3 \cdot \cos^4 \alpha \cdot \sin^2 \alpha. \text{ Đặt } t = \cos^2 \alpha \text{ (} 0 < t < 1 \text{)}$$

$$\Rightarrow V = \frac{8}{3}R^3 t^2 (1-t) = \frac{8}{6}R^3 \cdot t \cdot t(2-2t) \leq \frac{8}{6}R^3 \left(\frac{t+t+2-2t}{3} \right)^3$$

$$\text{Vậy } V \text{ lớn nhất khi } t = \frac{2}{3} \text{ khi } \alpha = \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

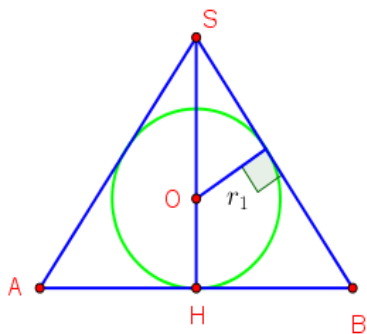
□ Chú ý: có thể dùng PP hàm số để tìm GTNN của hàm $f(t) = t^2(1-t)$

Câu 23: Gọi r và h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của một hình nón. Kí hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích hình nón và thể tích hình cầu nội tiếp hình nón. Khi r và h thay đổi, tìm giá trị bé nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$

A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\frac{1}{3}$

D. 2

Lời giải



Gọi (P) là mặt phẳng đi qua trục của hình nón thì (P) cắt hình nón. Theo tam giác cân SAB , cắt mặt cầu theo đường tròn lớn, đường tròn này nội tiếp tam giác cân. Khi đó, bán kính r_1 của hình cầu nội tiếp hình nón được tính bởi công thức $r_1 = \frac{rh}{r + \sqrt{h^2 + r^2}}$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{4} \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}} + 1 \right)^3}{\frac{h^2}{r^2}} = \frac{1}{4} \frac{(1 + \sqrt{1+x})^3}{x}, \text{ ở đó } \frac{h^2}{r^2} = x > 0$$

$$\text{Xét } f(x) = \frac{(1 + \sqrt{1+x})^3}{4x}, f'(x) = \frac{(\sqrt{1+x} + 1)^2 (x - 2 - 2\sqrt{1+x})}{4.2x^2 \sqrt{x+1}}$$

Vì $\frac{(\sqrt{1+x} + 1)^2}{4.2x^2 \sqrt{x+1}} > 0$ nên khi xét dấu của $f(x)$, ta chỉ cần xét dấu của $g(x) = x - 2 - 2\sqrt{1+x}$.

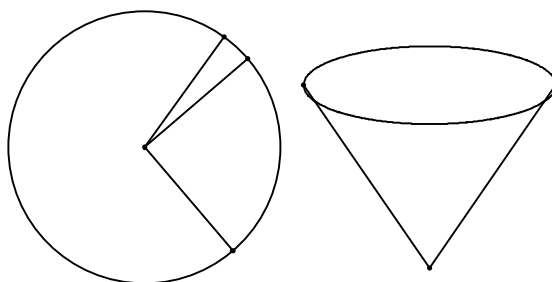
Ta có $g'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$. Dễ thấy $g'(x) > 0$ vì khi $x > 0$ thì $\frac{1}{\sqrt{x+1}} < 1$, đồng thời

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 8$$

Vậy $g(x)$ là hàm tăng trên miền $x > 0$ và $g(8) = 0$ nên

Với $0 < x \leq 8$ thì $g(x) \leq 0$;

Câu 24: Với một miếng tôn hình tròn có bán kính bằng $R = 6\text{cm}$. Người ta muốn làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của hình tròn này và gấp phần còn lại thành hình nón (Như hình vẽ).



Hình nón có thể tích lớn nhất khi người ta cắt cung tròn của hình quạt bằng:

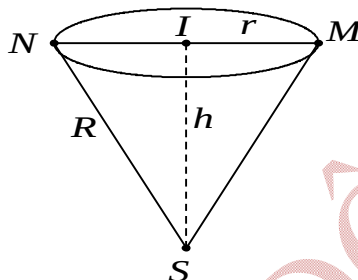
A. $4\pi\sqrt{6}cm$

B. $6\pi\sqrt{6}cm$

C. $2\pi\sqrt{6}cm$

D. $8\pi\sqrt{6}cm$

Lời giải



Gọi $x, (x > 0)$ là chiều dài cung tròn của phần được xếp làm hình nón.

Như vậy, bán kính R của hình nón sẽ là đường sinh của hình nón và đường tròn đáy của hình nón sẽ có độ dài là x .

Bán kính r của đáy được xác định bởi đẳng thức $2\pi r = x \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$.

Chiều cao của hình nón tính theo Định lý Pitago là: $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$.

Thể tích của khối nón: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$.

Áp dụng Bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$V^2 = \frac{4\pi^2}{9} \cdot \frac{x^2}{8\pi^2} \cdot \frac{x^2}{8\pi^2} \left(R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \leq \frac{4\pi^2}{9} \left(\frac{\frac{x^2}{8\pi^2} + \frac{x^2}{8\pi^2} + R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}{3}\right)^3 = \frac{4\pi^2}{9} \cdot \frac{R^6}{27}$$

Do đó V lớn nhất khi và chỉ khi: $\frac{x^2}{8\pi^2} = R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3}R\sqrt{6} = \frac{2\pi}{3}6\sqrt{6} = 4\pi\sqrt{6}$.

Chọn A

(Lưu ý bài có thể sử dụng đạo hàm để tìm giá trị lớn nhất, tuy nhiên lời giải bài sẽ dài hơn)

Câu 25: Gọi r và h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của một hình nón. Kí hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình nón và thể tích của khối cầu nội tiếp hình nón. Giá trị bé nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là

A. $\frac{5}{4}$.

B. $\frac{4}{3}$.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Ta có: Thể tích khối nón là $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Mặt khác: $IO + IS = h$

$$\text{Thể tích khối cầu là } V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \frac{r^3 h^3}{\left(r + \sqrt{h^2 + r^2}\right)^3}.$$

$$\text{BBT} \Rightarrow f(t) \geq 8 \forall t \geq 1 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} \geq 2$$

D. 25cm

Trang 24

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{a^4}{y^2 + 2a^2} \cdot y = \frac{1}{3} \pi a^4 \cdot \frac{y}{y^2 + 2a^2}$$

V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{y^2 + 2a^2}{y}$ đạt giá trị nhỏ nhất

$$\text{Ta có } \frac{y^2 + 2a^2}{y} = y + \frac{2a^2}{y} \geq 2\sqrt{y \cdot \frac{2a^2}{y}} = 2\sqrt{2}a$$

Vậy V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $y = \frac{2a^2}{y}$, tức là $y = a\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{a}{2} = 25\text{cm}$

Lưu ý: Bài trên các em xét hàm số và lập bảng biến thiên cũng được nhé

Câu 27: (Chuyên Thái Nguyên) Khi cắt hình nón có chiều cao 16 cm và đường kính đáy 24 cm bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện có diện tích lớn nhất gần với giá trị nào sau đây?

A. 170.

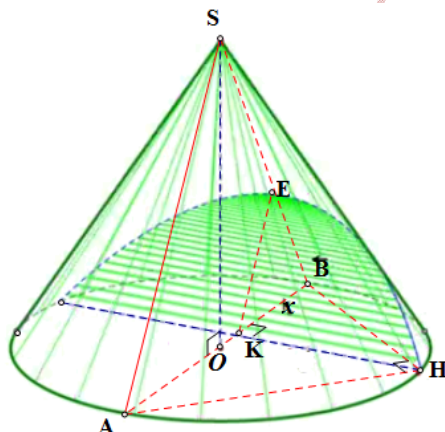
B. 260.

C. 294.

D. 208.

Lời giải

Chọn D



Cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện là một parabol.

Xét dây cung bất kỳ chứa đoạn KH như hình vẽ, suy ra tồn tại đường kính $AB \perp KH$, trong tam giác SAB, $KE \parallel SA, E \in SB$, Suy ra Parabol nhận KE làm trục như hình vẽ chính là một thiết diện thỏa yêu cầu bài toán. (Thiết diện này song song với đường sinh SA)

Đặt $BK = x$ (với $0 < x < 24$).

Trong tam giác ABH có: $HK^2 = BK \cdot AK = x(24 - x)$.

Trong tam giác SAB có: $\frac{KE}{SA} = \frac{BK}{BA} \Leftrightarrow KE = \frac{BK}{BA} \cdot SA \Leftrightarrow KE = \frac{5x}{6}$.

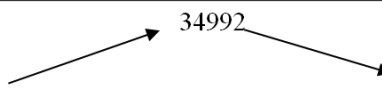
Thiết diện thu được là một parabol có diện tích: $S = \frac{4}{3} KH \cdot KE$.

Ta có: $S^2 = \frac{16}{9} KH^2 \cdot KE^2 = \frac{16}{9} \cdot x(24 - x) \cdot \frac{25x^2}{36} = \frac{100}{81} \cdot (24x^3 - x^4) \Rightarrow S = \frac{10}{9} \cdot \sqrt{24x^3 - x^4}$

Đặt $f(x) = 24x^3 - x^4$, với $0 < x < 24$.

Ta có: $f'(x) = 72x^2 - 4x^3$. Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 72x^2 - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 18 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	0	18	24	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$				

Vậy thiết diện có diện tích lớn nhất là: $\frac{10}{9}\sqrt{34992} \approx 207,8 \text{ cm}^2$

Câu 28: (CỤM-CHUYÊN-MÔN-HẢI-PHÒNG) Gọi d là đường thẳng tùy ý đi qua điểm $M(1;1)$ và có hệ số góc âm. Giả sử d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B . Quay tam giác OAB quanh trục Oy thu được một khối tròn xoay có thể tích là V . Giá trị nhỏ nhất của V bằng:

A. 3π .

B. $\frac{9\pi}{4}$.

C. 2π .

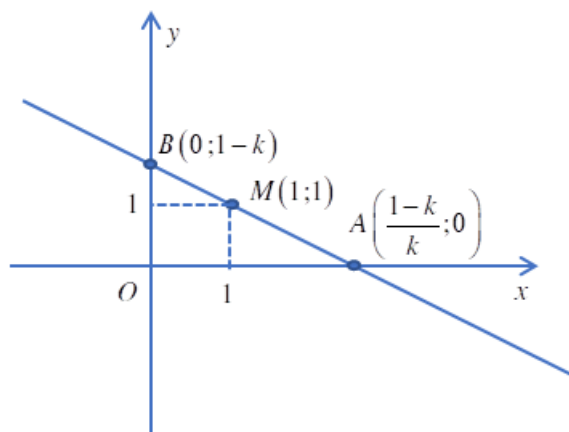
D. $\frac{5\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình đường thẳng qua $M(1;1)$ có hệ số góc k ($k < 0$) là $(d): y = k(x-1) + 1$

$$A = d \cap Ox \Rightarrow A\left(\frac{k-1}{k}; 0\right) \quad B = d \cap Oy \Rightarrow B(0; 1-k)$$



Nhận xét khi quay tam giác quanh Oy thì khối tròn xoay được tạo thành là khối nón có bán kính đáy là OA và đường cao là OB .

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{k-1}{k}\right)^2 \cdot (1-k) = \frac{\pi}{3} \frac{(1-k)^3}{k^2} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{3}{k} + 1 - k\right)$$

$$\text{Đặt } g(x) = \frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{3}{k} + 1 - k\right)$$

$$\text{Suy ra } g'(x) = \frac{\pi}{3} \left(-\frac{2}{k^3} + \frac{3}{k^2} - 1\right)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \left(-\frac{2}{k^3} + \frac{3}{k^2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 & (l) \\ k=-2 & (n) \end{cases}$$

MẶT TRỤ - KHỐI TRỤ

A – LÝ THUYẾT CHUNG

II - MẶT TRỤ TRÒN XOAY

1. Mặt trụ

Nội dung	Hình vẽ
Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng Δ và l song song với nhau, cách nhau một khoảng bằng r. Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay, gọi tắt là mặt trụ. - Đường thẳng Δ gọi là trục. - Đường thẳng l là đường sinh. r là bán kính của mặt trụ đó.	

2. Hình trụ tròn xoay và khối trụ tròn xoay

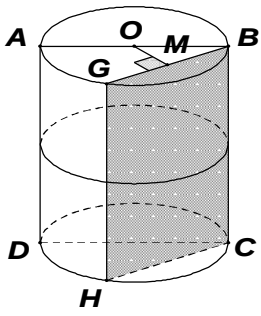
Nội dung	Hình vẽ
Ta xét hình chữ nhật ABCD. Khi quay hình chữ nhật ABCD xung quanh đường thẳng chứa một cạnh nào đó, chẳng hạn cạnh AB thì đường gấp khúc ADCB sẽ tạo thành một hình gọi là hình trụ tròn xoay, hay gọi tắt là hình trụ.	

- Khi quay quanh AB, hai cạnh AD và BC sẽ vạch ra hai hình tròn bằng nhau gọi là hai đáy của hình trụ, bán kính của chúng gọi là bán kính của hình trụ.
- Độ dài đoạn CD gọi là độ dài đường sinh của hình trụ.
- Phần mặt tròn xoay được sinh ra bởi các điểm trên cạnh CD khi quay xung quanh AB gọi là mặt xung quanh của hình trụ.
- Khoảng cách AB giữa hai mặt phẳng song song chứa hai đáy là chiều cao của hình trụ.
- Diện tích xung quanh:** $S_{xq} = 2\pi rl$.
- Diện tích toàn phần:** $S_{tp} = 2\pi rl + 2\pi r^2$.
- Thể tích:** $V = \pi r^2 h$.

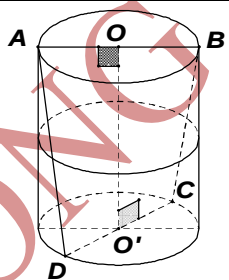
3. MỘT SỐ DẠNG TOÁN VÀ CÔNG THỨC GIẢI BÀI TOÁN MẶT TRỤ

3. 1. Dạng 1. Thiết diện của hình trụ cắt bởi một mặt phẳng

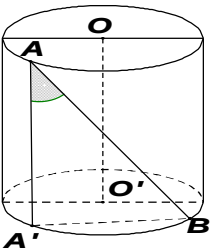
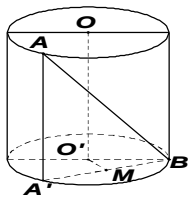
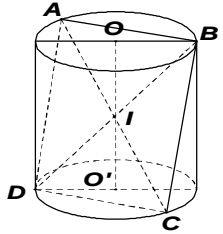
Nội dung	Hình vẽ
----------	---------

Thiết diện vuông góc trục là một đường tròn bán kính R Thiết diện chứa trục là một hình chữ nhật $ABCD$ trong đó $AB = 2R$ và $AD = h$. Nếu thiết diện qua trục là một hình vuông thì $h = 2R$. Thiết diện song song với trục và không chứa trục là hình chữ nhật $BGHC$ có khoảng cách tới trục là: $d(OO'; (BGHC)) = OM$	
---	---

3. 2. Dạng 2. Thể tích khối tứ diện có 2 cạnh là đường kính 2 đáy

Nội dung	Hình vẽ
Nếu như AB và CD là hai đường kính bất kỳ trên hai đáy của hình trụ thì: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot OO' \cdot \sin(\angle AB, CD)$ * Đặc biệt: Nếu AB và CD vuông góc nhau thì: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot OO'.$	

3. 3. Dạng 3. Xác định góc khoảng cách

Nội dung	Hình vẽ
Góc giữa AB và trục OO': $(\angle AB, OO') = \angle A'AB$	
Khoảng cách giữa AB và trục OO': $d(AB; OO') = OM.$	
Nếu $ABCD$ là một hình vuông nội tiếp trong hình trụ thì đường chéo của hình vuông cũng bằng đường chéo của hình trụ. Nghĩa là cạnh hình vuông: $AB\sqrt{2} = \sqrt{4R^2 + h^2}.$	

3. 4. Dạng 4. Xác định mối liên hệ giữa diện tích xung quanh, toàn phần và thể tích khối trụ trong bài toán tối ưu

Nội dung	Hình vẽ
----------	---------

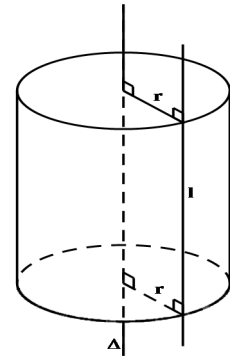
Một khối trụ có thể tích V không đổi.

- Tìm bán kính đáy và chiều cao hình trụ để diện tích toàn phần nhỏ nhất:

$$S_{tp} \min \Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}} \\ h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}} \end{cases}$$

- Tìm bán kính đáy và chiều cao hình trụ để diện tích xung quanh cộng với diện tích 1 đáy và nhỏ nhất:

$$S \min \Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \\ h = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \end{cases}$$



3. 5. Dạng 5. Hình trụ ngoại tiếp, nội tiếp một hình lăng trụ đứng

Cho hình lăng trụ tam giác đều nội tiếp trong một hình trụ. Thể tích khối lăng trụ là V thì thể tích khối trụ là $V_{(T)} = \frac{4\pi V}{9}$

Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ ngoại tiếp trong một hình trụ. Diện tích xung quanh hình trụ là S_{xq} thì diện tích xung quanh của hình lăng trụ là $S_{xq} = \frac{2S}{\pi}$

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O' , bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a . Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A , trên đường đáy tâm O' lấy điểm B sao cho $AB = 2a$. Tính thể tích của khối tứ diện $OO'AB$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

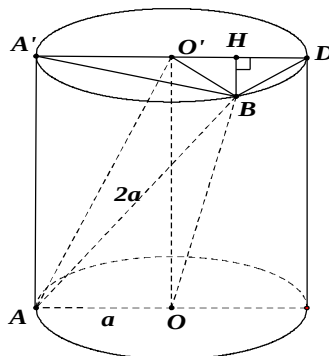
B. $\frac{a^3}{12}$

C. $\frac{5a^3\sqrt{3}}{12}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Kẻ đường sinh AA' . Gọi D là điểm đối xứng của A' qua O' và H là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng $A'D$.



$$\begin{cases} BH \perp A'D \\ BH \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BH \perp (AOOA')$$

Do đó, BH là chiều cao của tứ diện $OO'AB$

$$\text{Thể tích khối tứ diện } OO'AB: V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle AOO'} \cdot BH$$

$$\text{Tam giác } AA'B \text{ vuông tại } A' \text{ cho: } A'B = \sqrt{AB^2 - A'A^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$$

$$\text{Tam giác } A'B = \sqrt{A'D^2 - A'B^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a.$$

Suy ra $BO'D$ là tam giác đều cạnh a .

$$\text{Từ đó } BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Do } OA = OO' = a \text{ nên tam giác } AOO' \text{ vuông cân tại } O.$$

$$\text{Diện tích tam giác } AOO' \text{ là: } S_{\triangle AOO'} = \frac{1}{2} OA \cdot OO' = \frac{1}{2} a^2$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

Chọn A

Câu 2: (KÊNH TRUYỀN HÌNH GIÁO DỤC QUỐC GIA VTV7 – 2019) Cho khối trụ (T) , AB và CD lần lượt là hai đường kính trên các mặt đáy của khối (T) . Biết góc giữa AB và CD là 30° , $AB = 6\text{cm}$ và thể tích khối $ABCD$ là 30cm^3 . Khi đó thể tích khối trụ (T) là

A. $90\pi\text{cm}^3$.

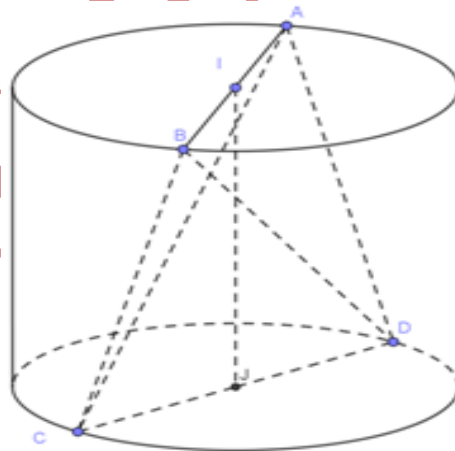
B. $30\pi\text{cm}^3$.

C. $45\pi\text{cm}^3$.

D. $\frac{90\pi\sqrt{3}}{270}\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn A



Gọi h , V lần lượt là chiều cao và thể tích khối trụ (T) .

$$\Rightarrow d(AB, CD) = h(\text{cm}).$$

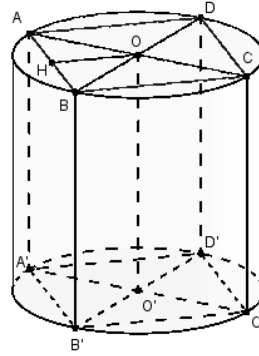
$$\text{Ta có: } V_{ABCD} = \frac{1}{6} h \cdot \sin(AB, CD) \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{6} h \cdot \sin 30^\circ \cdot 6^2 \Rightarrow h = \frac{6V_{ABCD}}{\sin 30^\circ \cdot 6^2} = 10(\text{cm}).$$

$$\Rightarrow V_{(T)} = \pi \left(\frac{AB}{2} \right)^2 \cdot h = 90\pi(\text{cm}^3).$$

Câu 3: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác có $AB = 5, AC = 8$ và góc $(\widehat{AB, AC}) = 60^\circ$.

Gọi V, V' lần lượt là thể tích của khối lăng trụ ngoại tiếp và nội tiếp khối lăng trụ đã cho. Tính

$$\text{tỉ số } \frac{V'}{V}?$$



Dựng lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ như hình vẽ.

Gọi H là trung điểm AB.

$$\text{Ta có } OH \perp AB \Rightarrow OH \perp (ABB'A') \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow AH = BH = \frac{a\sqrt{2}}{2} = OH.$$

$\Rightarrow \Delta OAB$ vuông cân tại O $\Rightarrow ABCD$ là hình vuông.

Từ đó suy ra:

$$V_2 = \frac{1}{4}(V - V_{ABCD.A'B'C'D'}) = \frac{1}{4}(2\pi a^3 - (a\sqrt{2})^2 \cdot 2a) = \frac{a^3(\pi - 2)}{2}.$$

$$V_1 = V - V_2 = 2\pi a^3 - \frac{a^3(\pi - 2)}{2} = \frac{a^3(3\pi + 2)}{2}. \text{ Suy ra } \frac{V_1}{V_2} = \frac{3\pi + 2}{\pi - 2}.$$

Chọn A

Câu 5: Cho một hình trụ có bán kính đáy $R=5$, chiều cao $h=6$. Một đoạn thẳng AB có độ dài bằng 10 và có hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy. Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và trục của hình trụ?

A. 3

B. 4

C. 2

D. 1

Lời giải

Gọi hai đường tròn đáy là $(O), (O')$ và

$A \in (O), B \in (O')$. Kẻ hai đường sinh AD, BC ta được tứ giác $ABCD$ là một hình chữ nhật và $mp(ABCD) // OO'$.

Do đó, khoảng cách giữa OO' và AB bằng khoảng cách từ O đến $mp(ABCD)$.

Tam giác ACB vuông tại C nên ta có:

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

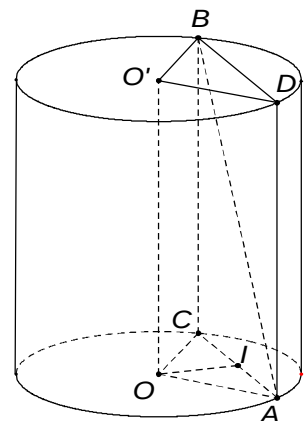
Gọi I là trung điểm AC , ta có:

$$\begin{cases} OI \perp AC \\ OI \perp AD \end{cases} \Rightarrow OI \perp (ABCD)$$

Vậy khoảng cách giữa đường thẳng AB và trục OO' của hình trụ là:

$$OI = \sqrt{OA^2 - IA^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

Chọn B



Câu 6: Một hình trụ có bán kính đáy bằng 50cm và có chiều cao là 50cm. Một đoạn thẳng AB có chiều dài là 100cm và có hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy. Tính khoảng cách d từ đoạn thẳng đó đến trục hình trụ.

A. $d = 50\text{cm}$

B. $d = 50\sqrt{3}\text{cm}$

C. $d = 25\text{cm}$

D. $d = 25\sqrt{3}\text{cm}$

Lời giải

Kẻ AA_1 vuông góc với đáy, A_1 thuộc đáy. Suy ra:

$$OO_1 \parallel AA_1 \Rightarrow OO_1 \parallel (AA_1B) \Rightarrow d(OO_1, AB) = d(OO_1, (AA_1B)) = d(O_1, (AA_1B))$$

Tiếp tục kẻ $O_1H \perp A_1B$ tại H, vì O_1H nằm trong đáy nên cũng vuông góc với A_1A suy ra:

$$O_1H \perp (AA_1B). \text{ Do đó}$$

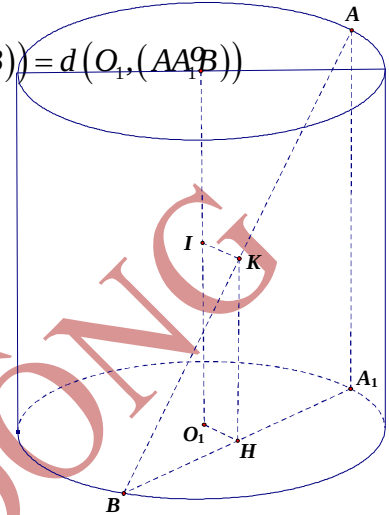
$$d(OO_1, AB) = d(OO_1, (AA_1B)) = d(O_1, (AA_1B)) = O_1H$$

Xét tam giác vuông AA_1B ta có

$$A_1B = \sqrt{AB^2 - AA_1^2} = 50\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } O_1H = \sqrt{O_1A_1^2 - A_1H^2} = 25\text{cm}$$

Chọn C



Câu 7: Cho hình trụ có bán kính đáy R và chiều cao R lấy hai điểm A, B nằm trên hai đường tròn đáy sao cho $AB = 2R$. Tính khoảng cách từ AB đến trục hình trụ theo R.

A. $\frac{R}{2}$

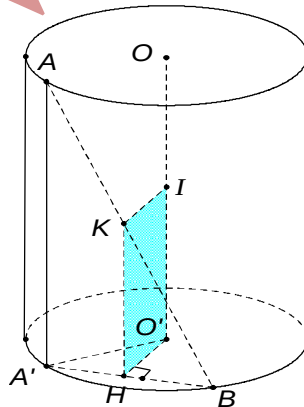
B. $\frac{R}{3}$

C. $\frac{R}{5}$

D. $\frac{R}{4}$

Lời giải

Giả sử $A \in$ đường tròn O, $B \in O'$. Từ A vẽ đường song song OO' cắt đường tròn (O') tại A' .



Vẽ $O'H$ vuông góc $A'B$.

Từ H vẽ đường thẳng song song với OO' , cắt AB tại K. Vẽ $KI \parallel O'H$.

Ta có: $O'H \perp A'B$ và AA' nên: $O'H \perp mp(AA'B) \Rightarrow O'H \perp HK$ và AB

Vậy tứ giác $KIO'H$ là hình chữ nhật $\Rightarrow KI \perp OO'$.

Vậy KI là đoạn vuông góc chung của AB và OO' . $\triangle AA'B$ vuông

$$\Rightarrow A'B^2 = AB^2 - AA'^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2.$$

$$\text{Do H trung điểm } A'B \text{ nên: } HA' = \frac{R\sqrt{3}}{2}. \triangle O'A'H \Rightarrow O'H^2 = O'A'^2 - A'H^2 = R^2 - \frac{3R^2}{4} = \frac{R^2}{4}$$

Do đó: $d(AB, OO') = KI = O'H = \frac{R}{2}$.

Chọn A

Câu 8: (Ba Đình Lần 2) Cho khối trụ có đáy là các đường tròn tâm (O) , (O') có bán kính là R và chiều cao $h = R\sqrt{2}$. Gọi A , B lần lượt là các điểm thuộc (O) và (O') sao cho OA vuông góc với $O'B$. Tỷ số thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ với thể tích khối trụ là:

A. $\frac{2}{3\pi}$.

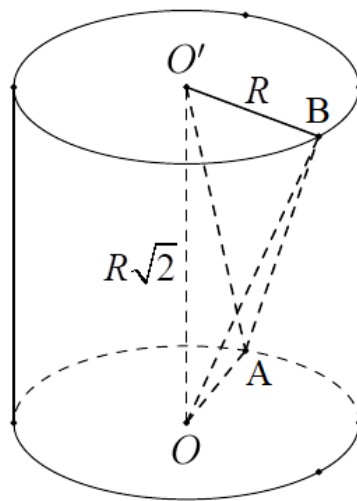
B. $\frac{1}{3\pi}$.

C. $\frac{1}{6\pi}$.

D. $\frac{1}{4\pi}$.

Lời giải

Chọn C



Thể tích khối trụ $V_1 = \pi R^2 \cdot h = \pi R^2 \cdot R\sqrt{2} = \pi R^3 \sqrt{2}$

Khối tứ diện $BO'OA$ có BO' là đường cao và đáy là tam giác vuông $O'OA$, do đó thể tích khối

tứ diện là $V_2 = \frac{1}{3} S_{O'OA} \cdot O'B = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} OA \cdot OO' \cdot O'B = \frac{1}{6} R \cdot R\sqrt{2} \cdot R = \frac{\sqrt{2}}{6} R^3$

Vậy $\frac{V_2}{V_1} = \frac{R^3 \sqrt{2}}{6} \cdot \frac{1}{\pi R^3 \sqrt{2}} = \frac{1}{6\pi}$.

Câu 9: (Sở Ninh Bình 2019 lần 2) Cho hình trụ có tâm hai đáy lần lượt là O và O' ; bán kính đáy hình trụ bằng a . Trên hai đường tròn (O) và (O') lần lượt lấy hai điểm A và B sao cho AB tạo với trục của hình trụ một góc 30° và có khoảng cách tới trục của hình trụ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính diện tích toàn phần của hình trụ đã cho

A. $2\pi a^2 (\sqrt{3} + 1)$.

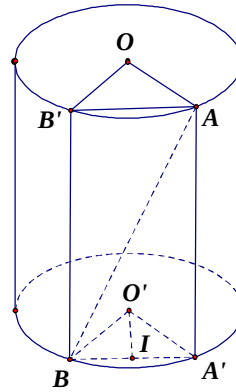
B. $\frac{\pi a^2}{3} (\sqrt{3} + 2)$.

C. $\pi a^2 (\sqrt{3} + 2)$.

D. $\frac{2\pi a^2}{3} (\sqrt{3} + 3)$.

Lời giải

Chọn A



Gọi A' là hình chiếu của A trên (O') ; B' là hình chiếu của B trên (O) .

Khi đó $OO' \parallel AA'$ nên $(\widehat{AB, OO'}) = (\widehat{AB, AA'}) = \widehat{BAA'} = 30^\circ$ (do $\triangle ABA'$ vuông tại B).

Gọi I là trung điểm $A'B$.

Do $OO' \parallel (AA'BB')$ nên

$$d(OO', AB) = d(OO', (AA'BB')) = d(O', (AA'BB')) = O'I = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ta có } A'B = 2BI = 2\sqrt{O'B^2 - O'I^2} = 2\sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = a.$$

$$OO' = AA' = A'B \cdot \cot 30^\circ = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Diện tích toàn phần: } S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi a \cdot a\sqrt{3} + 2\pi a^2 = 2\pi a^2(\sqrt{3} + 1).$$

Câu 10: (Sở Ninh Bình Lần 1) Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$. AB là một dây cung của đường tròn $(O; R)$ sao cho tam giác $O'AB$ là tam giác đều và mặt phẳng $(O'AB)$ tạo với mặt phẳng chứa đường tròn $(O; R)$ một góc 60° . Tính theo R thể tích V của khối trụ đã cho.

A. $V = \frac{\pi\sqrt{7}R^3}{7}.$

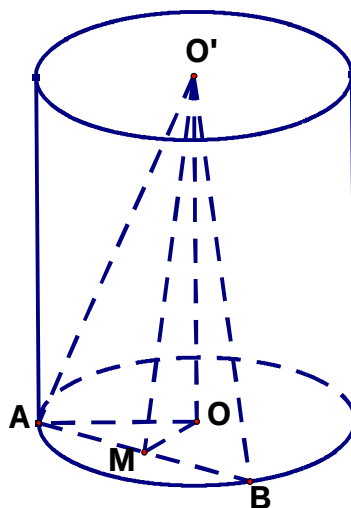
B. $V = \frac{3\pi\sqrt{5}R^3}{5}.$

C. $V = \frac{\pi\sqrt{5}R^3}{5}.$

D. $V = \frac{3\pi\sqrt{7}R^3}{7}.$

Lời giải

Chọn D



Đặt độ dài cạnh $AB = x$ ($x > 0$) và M là trung điểm AB .

Vì tam giác $O'AB$ đều nên $O'A = O'B = AB = x \Rightarrow O'M = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Vì mặt phẳng $(O'AB)$ tạo với mặt phẳng chứa đường tròn $(O; R)$ góc 60° nên $\widehat{O'MO} = 60^\circ$.

Xét tam giác $O'OM$ vuông tại O ta có: $\cos \widehat{O'MO} = \frac{OM}{O'M}$. Suy ra

$$\cos 60^\circ = \frac{OM}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow OM = \frac{x\sqrt{3}}{4}$$

Xét tam giác OAM vuông ở M có: $OA^2 = OM^2 + AM^2$ nên

$$R^2 = \left(\frac{x\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow R^2 = \frac{7}{16}x^2 \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{7}}{7}R$$

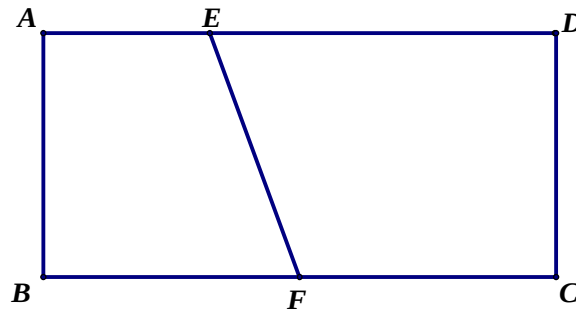
Do đó: $O'M = \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{21}}{7}R$ và $OM = \frac{x\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{21}}{7}R$. Vì vậy, ta có

$$OO' = \sqrt{O'M^2 - OM^2} = \frac{3\sqrt{7}}{7}R.$$

Vậy thể tích khối trụ là

$$V = \pi R^2 \cdot h = \pi R^2 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{7}R \Rightarrow V = \frac{3\pi\sqrt{7}R^3}{7}.$$

Câu 11: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 2019 – LẦN 1) Có một miếng bìa hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 3$ và $AD = 6$. Trên cạnh AD lấy điểm E sao cho $AE = 2$, trên cạnh BC lấy điểm F là trung điểm BC .



Cuốn miếng bìa lại sao cho cạnh AB và DC trùng nhau để tạo thành mặt xung quanh của một hình trụ. Khi đó tính thể tích V của tứ diện $ABEF$.

A. $V = \frac{\pi}{3}$.

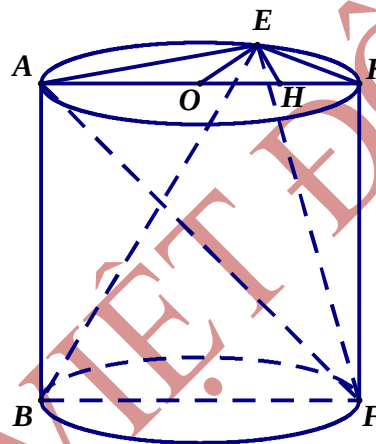
B. $V = \frac{9\sqrt{3}}{2\pi^2}$.

C. $V = \frac{3\pi^3}{2}$.

D. $V = \frac{2}{3\pi^2}$.

Lời giải

Chọn B



Từ giả thiết suy ra BF là đường kính đường tròn đáy của hình trụ. Kẻ đường sinh FK , gọi O là trung điểm AK .

Gọi r là bán kính đáy, suy ra $2\pi r = 6 \Leftrightarrow r = \frac{3}{\pi}$.

Đặt $\widehat{AOE} = \alpha$ (rad). Trong hình chữ nhật $ABCD$ có $AE = 2$

$\Rightarrow l_{\widehat{AE}} = r \cdot \alpha = 2 \Rightarrow \widehat{AOE} = \alpha = \frac{2}{r} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \widehat{EOK} = \frac{\pi}{3}$, suy ra tam giác EOK là tam giác đều

cạnh $r = \frac{3}{\pi}$.

Gọi H là trung điểm $OK \Rightarrow EH \perp AK, EH \perp AB$

$\Rightarrow EH \perp (ABFK) \Rightarrow d(E, (ABF)) = EH = \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

Diện tích tam giác ABF là $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BF = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{6}{\pi} = \frac{9}{\pi}$.

Thể tích khối tứ diện $ABEF$ là $V = \frac{1}{3} S_{ABF} \cdot d(E, (ABF)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{\pi} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} = \frac{9\sqrt{3}}{2\pi^2}$.

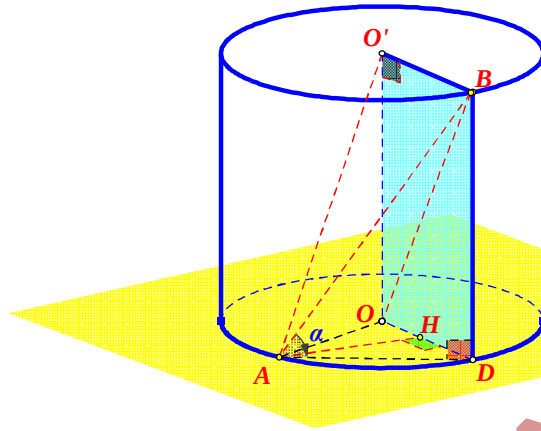
Câu 12: (THPT CHUYÊN VINH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O' , bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A , trên đường tròn tâm O' lấy điểm B . Đặt α là góc giữa AB và đáy. Tính $\tan \alpha$ khi thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\tan \alpha = \sqrt{2}$

B. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

C. $\tan \alpha = \frac{1}{2}$

D. $\tan \alpha = 1$

Lời giải**Cách 1:**

Gọi D là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (O) .

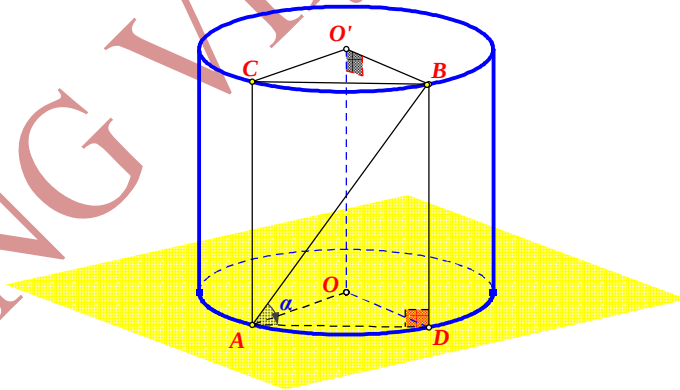
Kẻ $AH \perp OD$, $H \in OD$.

Ta có thể tích của khối chóp $OO'AB$: $V_{OO'AB} = \frac{1}{3} AH \cdot S_{\triangle O'B} = \frac{2a^2}{3} \cdot AH \leq \frac{2a^2}{3} \cdot AO = \frac{4a^3}{3}$.

$(V_{OO'AB})_{\max} \Leftrightarrow H \equiv O$. Suy ra $AD = 2\sqrt{2}a$.

Suy ra: $\tan \alpha = \tan \widehat{BAD} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Nhận xét: Nên thêm giả thiết AB chéo với OO' để tứ diện $OO'AB$ tồn tại.



Gọi D là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng chứa đường tròn (O) .

Gọi C là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng chứa đường tròn (O') .

Ta có $O'CB.OAD$ là một hình lăng trụ đứng.

Ta có thể tích của khối chóp $OO'AB$:

$$V_{OO'AB} = V_{O'BC.OAD} = \frac{1}{3} 2a \cdot S_{\triangle OAD} = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \sin \widehat{AOD} \leq \frac{4a^3}{3}.$$

$(V_{O'ABCD})_{\max} \Leftrightarrow \widehat{AOD} = 90^\circ \Leftrightarrow AD = 2\sqrt{2}a$.

Suy ra: $\tan \alpha = \tan \widehat{BAD} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

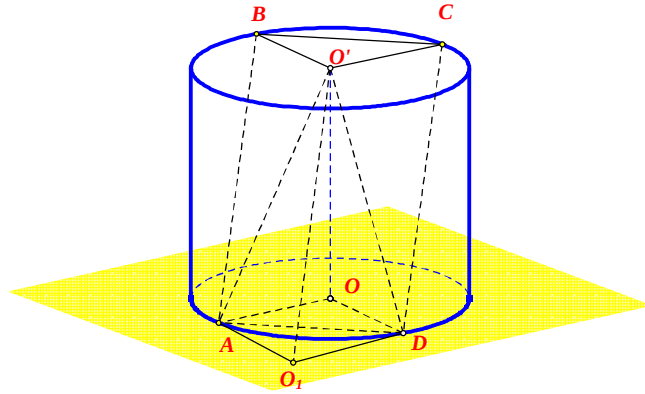
Câu 13: (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O' , bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O

A. $\tan \alpha = \sqrt{3}$ **B.** $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **C.** $\tan \alpha = 1$ **D.** $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Suy ra: $\tan \alpha = \tan \widehat{BAH} = \frac{BH}{AH} = \frac{2a}{2a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

A. $AD = 2\sqrt{2}a$ **B.** $AD = 4a$ **C.** $AD = \frac{4\sqrt{3}}{3}a$ **D.** $AD = \sqrt{2}a$

Trang 34



Kẻ đường thẳng qua O' song song với AB cắt mặt phẳng chứa đường tròn (O) tại O_1 . Lúc đó $AO_1D.BO_1C$ là một hình lăng trụ chiều cao bằng $2a$.

Vì $AD = BC$ nên $S_{\Delta BO_1C} = S_{\Delta AOD}$

Ta có thể tích của khối chóp $O'.ABCD$:

$$V_{O'.ABCD} = \frac{1}{3}V_{AO_1D.BO_1C} = \frac{2}{3}.2a.S_{\Delta BO_1C} = \frac{2}{3}.2a.S_{\Delta AOD} = \frac{2}{3}.2a.\frac{1}{2}.2a.2a.\sin \widehat{AOD} \leq \frac{8a^3}{3}.$$

$$(V_{O'.ABCD})_{\max} \Leftrightarrow \widehat{AOD} = 90^\circ \Leftrightarrow AD = 2\sqrt{2}a.$$

Câu 15: (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 02) Một hình trụ có độ dài đường cao bằng 3, các đường tròn đáy lần lượt là $(O;1)$ và $(O';1)$. Giả sử AB là đường kính cố định của $(O;1)$ và MN là đường kính thay đổi trên $(O';1)$. Tìm giá trị lớn nhất $V_{\max}$ của thể tích khối tứ diện $ABMN$.

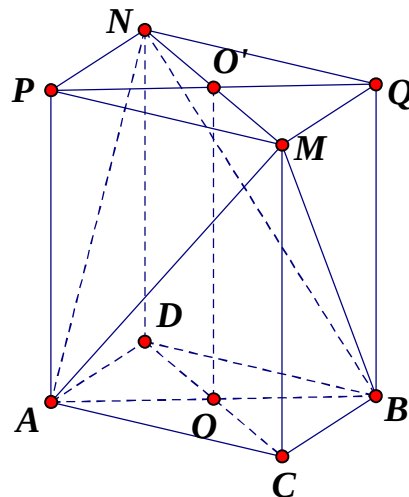
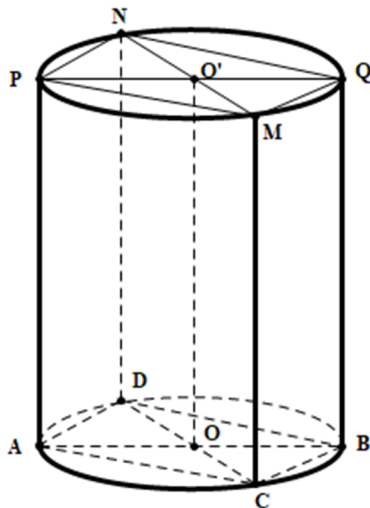
A. $V_{\max} = 2$

B. $V_{\max} = 6$

C. $V_{\max} = \frac{1}{2}$

D. $V_{\max} = 1$

Lời giải



Dựng hình hộp chữ nhật $ACBD.PMQN$ nội tiếp hình trụ như hình vẽ.

$$\text{Để thấy } V_{ACBD.PMQN} = V_{PAMN} + V_{QBMN} + V_{CAMB} + V_{DNAB} + V_{ABMN}$$

$$\text{Mà } V_{PAMN} = V_{QBMN} = V_{CAMB} = V_{DNAB} = V_{ABMN} = \frac{1}{6}V \text{ nên } V_{ABMN} = \frac{1}{3}V_{ACBD.PMQN}$$

$$V_{ACBD.PMQN} = S_{PMQN} \cdot OO' \leq \frac{1}{2} MN \cdot PQ \cdot OO' = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\text{Vậy } V_{ABMN} = \frac{1}{3} V_{ACBD.PMQN} \leq \frac{1}{3} \cdot 6 = 2 \Rightarrow V_{\max} = 2$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi AB và MN vuông góc với nhau.

Câu 16: Cho hình trụ có chiều cao $h = 2$, bán kính đáy $r = 3$. Một mặt phẳng (P) không vuông góc với đáy của hình trụ, lần lượt cắt hai đáy theo đoạn giao tuyến AB và CD sao cho $ABCD$ là hình vuông. Tính diện tích S của hình vuông $ABCD$.

A. $S = 12\pi$.

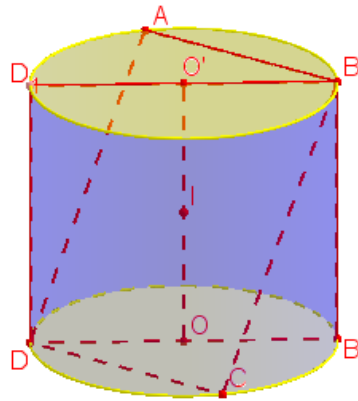
B. $S = 12$.

C. $S = 20$.

D. $S = 20\pi$.

Lời giải

Kẻ đường sinh BB' của hình trụ. Đặt độ dài cạnh của hình vuông $ABCD$ là x , $x > 0$.



Do $\begin{cases} CD \perp BC \\ CD \perp BB' \end{cases} \Rightarrow CD \perp B'C \Rightarrow \triangle B'CD$ vuông tại C. Khi đó, $B'D$ là đường kính của đường

Tròn (O') . Xét $\triangle B'CD$ vuông tại C

$$\Rightarrow B'D^2 = CD^2 + CB'^2 \Rightarrow 4r^2 = x^2 + CB^2 \quad (1)$$

Xét tam giác $\triangle BB'C$ vuông tại B

$$\Rightarrow BC^2 = BB'^2 + CB'^2 \Rightarrow x^2 = h^2 + CB'^2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow x^2 = \frac{4r^2 + h^2}{2} = 20.$$

Suy ra diện tích hình vuông $ABCD$ là $S = 20$.

Câu 17: (THẠCH THÀNH I - THANH HÓA 2019) Cho hình trụ có bán kính bằng r và chiều cao cũng bằng r . Một hình vuông $ABCD$ có hai cạnh AB, CD lần lượt là các dây cung của hai đường tròn đáy, còn cạnh BC, AD không phải là đường sinh của hình trụ. Tan của góc giữa mặt phẳng chứa hình vuông và mặt đáy bằng

A. 1.

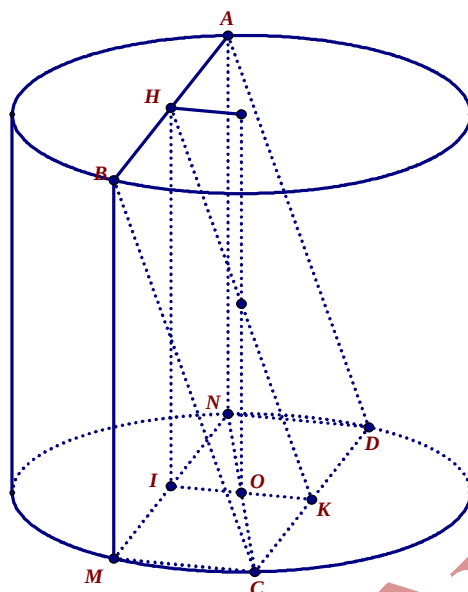
B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi MN là hình chiếu vuông góc của AB lên đường tròn đáy. Ta có $MNDC$ là hình chữ nhật và $NC \cap MD = O$ là tâm đường tròn đáy. Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm AB, MN, CD . Lại có $HK \perp CD$, $IK \perp CD$, suy ra góc giữa mặt phẳng chứa hình vuông $ABCD$ và mặt đáy là $\widehat{HKI} \Rightarrow \tan \widehat{HKI} = \frac{IH}{IK}$.

Đặt $AB = BC = CD = AD = x$ ($x > 0$). Ta có $MC = IK = 2OK = 2\sqrt{OC^2 - CK^2} = 2\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}}$.

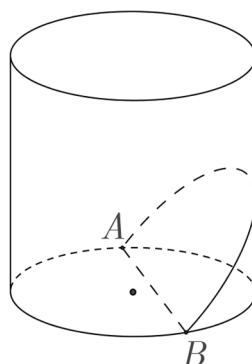
Trong tam giác vuông BMC ta có

$$BM^2 + MC^2 = BC^2 \Leftrightarrow r^2 + 4\left(r^2 - \frac{x^2}{4}\right) = x^2 \Leftrightarrow x = \frac{r\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \Rightarrow IK = \frac{r\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Suy ra } \tan \widehat{HKI} = \frac{IH}{IK} = \frac{r}{\frac{r\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 18: (THPT-Chuyên-Sơn-La-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho khối trụ có bán kính đáy bằng $4(\text{cm})$ và chiều cao $5(\text{cm})$. Gọi AB là một dây cung đáy

dưới sao cho $AB = 4\sqrt{3}(\text{cm})$. Người ta dựng mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B và tạo với mặt phẳng đáy hình trụ một góc 60° như hình vẽ. Tính diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (P) .



A. $\frac{8(4\pi - 3\sqrt{3})}{3} (cm^2).$

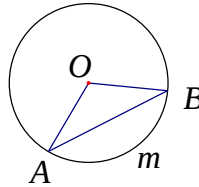
B. $\frac{4(4\pi - \sqrt{3})}{3} (cm^2).$

C. $\frac{4(4\pi - 3\sqrt{3})}{3} (cm^2).$

D. $\frac{8(4\pi - \sqrt{3})}{3} (cm^2).$

Lời giải

Chọn A



Gọi S là diện tích thiết diện, S' là diện tích hình chiếu của thiết diện lên mặt phẳng đáy. Khi đó $S' = S \cdot \cos 60^\circ$.

Ta có $AB = 4\sqrt{3} \Rightarrow \cos \widehat{AOB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin 120^\circ = 4\sqrt{3} \\ S_{OAmB} = \frac{1}{3} \pi \cdot OA^2 = \frac{16\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow S' = S_{OAmB} - S_{OAB} = \frac{4(4\pi - 3\sqrt{3})}{3}$$

$$\Rightarrow S = \frac{S'}{\cos 60^\circ} = \frac{8(4\pi - 3\sqrt{3})}{3}.$$

Câu 19: Một khối lăng trụ tam giác đều cạnh đáy bằng a , góc giữa đường chéo mỗi mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Tính thể tích khối trụ ngoại tiếp khối lăng trụ đó.

A. $V = \frac{1}{3} \pi a^3 \sqrt{3}$

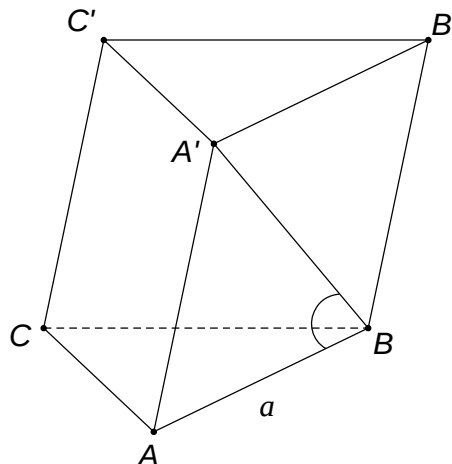
B. $V = \pi a^3 \sqrt{3}$

C. $V = \frac{1}{2} \pi a^3 \sqrt{3}$

D. $V = \frac{2}{3} \pi a^3 \sqrt{3}$

Lời giải

Xét hình lăng trụ tam giác đều



$ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy $AB = a$,

góc của đường chéo $A'B$ với mặt đáy (ABC) là $\widehat{A'BA} = 60^\circ$.

Suy ra: $h = AA' = a \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Khối trụ ngoại tiếp khối lăng trụ có cùng đường cao là $A'A$, đáy là đường tròn ngoại tiếp hai mặt đáy $(ABC), (A'B'C')$, có bán kính R cho bởi $R\sqrt{3} = a \Rightarrow R = \frac{a}{\sqrt{3}}$

Thể tích khối trụ:

$$V = \pi R^2 h = \pi \left(\frac{a}{\sqrt{3}} \right)^2 a\sqrt{3} = \frac{1}{3} \pi a^3 \sqrt{3} \text{ (đvdt)}.$$

Chọn A

Câu 20: (Sở Quảng NamT) Cho hình trụ có trục OO' , bán kính đáy r và chiều cao $h = \frac{3r}{2}$. Hai điểm

M, N di động trên đường tròn đáy (O) sao cho OMN là tam giác đều. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên $(O'MN)$. Khi M, N di động trên đường tròn (O) thì đoạn thẳng OH tạo thành mặt xung quanh của một hình nón, diện tích S của mặt này.

A. $S = \frac{9\sqrt{3}\pi r^2}{32}$.

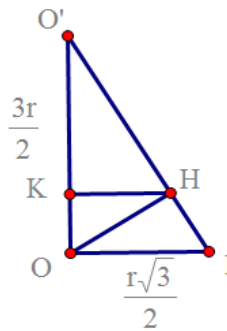
B. $S = \frac{9\sqrt{3}\pi r^2}{16}$.

C. $S = \frac{9\pi r^2}{32}$.

D. $S = \frac{9\pi r^2}{16}$.

Lời giải

Chọn A



Trong (O) kẻ $OI \perp MN$ tại I . Khi đó ta có $MN \perp (OO'I) \Rightarrow (OO'I) \perp (O'MN)$. Trong $(OO'I)$ kẻ $OH \perp O'I$ tại $H \Rightarrow OH \perp (O'MN)$ tại H nên H là hình chiếu vuông góc của O lên $(O'MN)$.

Tam giác OMN đều cạnh r , có OI là đường trung tuyến nên $OI = \frac{r\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác $O'OI$ vuông tại O , đường cao OH nên ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{O'O^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{4}{9r^2} + \frac{4}{3r^2} = \frac{16}{9r^2} \Rightarrow OH = \frac{3r}{4}.$$

$$O'I = \sqrt{O'O^2 + OI^2} = r\sqrt{3}.$$

$$O'O^2 = O'H \cdot O'I \Rightarrow \frac{O'H}{O'I} = \frac{O'O^2}{O'I^2} = \frac{3}{4}.$$

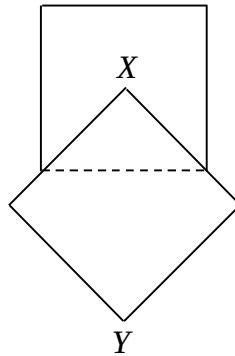
Kẻ $HK \perp O'O$ tại K ta có KH là bán kính đáy của mặt nón.

$$\text{Ta có } \frac{HK}{OI} = \frac{O'H}{O'I} = \frac{3}{4} \Rightarrow HK = \frac{3}{4} OI = \frac{3\sqrt{3}}{8} r.$$

Diện tích S cần tính là

$$S = \pi \cdot HK \cdot OH = \pi \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} r \cdot \frac{3r}{4} = \frac{9\sqrt{3}\pi r^2}{32}.$$

Câu 21: Cho hai hình vuông có cùng cạnh bằng 5 được xếp chồng lên nhau sao cho đỉnh X của một hình vuông là tâm của hình vuông còn lại (như hình vẽ). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên xung quanh trục XY .



A. $V = \frac{125(1+\sqrt{2})\pi}{6}$.

B. $V = \frac{125(5+2\sqrt{2})\pi}{12}$.

C. $V = \frac{125(5+4\sqrt{2})\pi}{24}$.

D. $V = \frac{125(2+\sqrt{2})\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn C

□ **Cách 1 :**

Khối tròn xoay gồm 3 phần:

Phần 1: khối trụ có chiều cao bằng 5, bán kính đáy

bằng $\frac{5}{2}$ có thể tích $V_1 = \pi \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times 5 = \frac{125\pi}{4}$.

Phần 2: khối nón có chiều cao và bán kính đáy bằng

$\frac{5\sqrt{2}}{2}$ có thể tích

$$V_2 = \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{125\pi\sqrt{2}}{12}$$

Phần 3: khối nón cụt có thể tích là

$$V_3 = \frac{1}{3} \pi \times \frac{5(\sqrt{2}-1)}{2} \times \left(\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{5\sqrt{2}}{2} \times \frac{5}{2} \right) = \frac{125(2\sqrt{2}-1)\pi}{24}$$

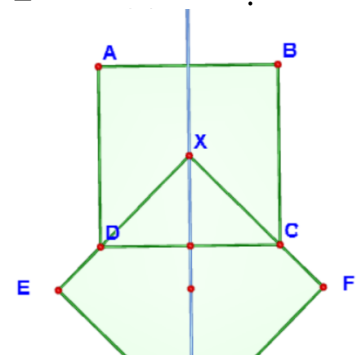
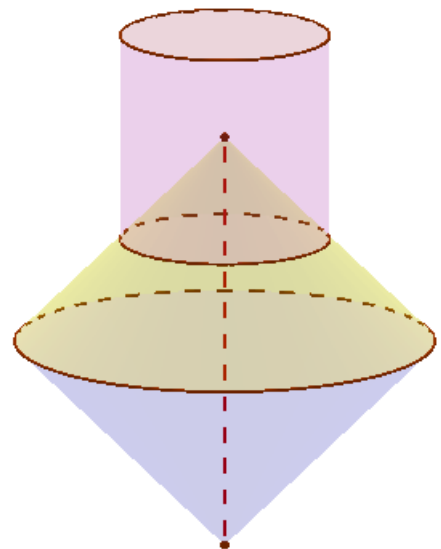
.

Vậy thể tích khối tròn xoay là

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{125\pi}{4} + \frac{125\pi\sqrt{2}}{12} + \frac{125(2\sqrt{2}-1)\pi}{24} = \frac{125(5+4\sqrt{2})\pi}{24}$$

□ **Cách 2 :**

Thể tích hình trụ được tạo thành từ hình vuông $ABCD$ là



$$V_T = \pi R^2 h = \frac{125\pi}{4}$$

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành từ hình vuông $XEYF$ là

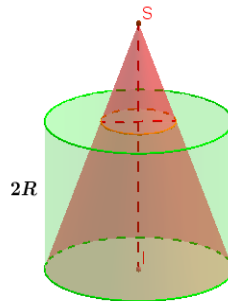
$$V_{2N} = \frac{2}{3} \pi R^2 h = \frac{125\pi\sqrt{2}}{6}$$

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành từ tam giác XDC là

$$V_{N'} = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{125\pi}{24}$$

$$\text{Thể tích cần tìm } V = V_T + V_{2N} - V_{N'} = 125\pi \frac{5+4\sqrt{2}}{24}.$$

Câu 22: Cho hình nón có độ dài đường kính đáy là $2R$, độ dài đường sinh là $R\sqrt{17}$ và hình trụ có chiều cao và đường kính đáy đều bằng $2R$, lồng vào nhau như hình vẽ.



Tính thể tích phần khối trụ không giao với khối nón

A. $\frac{5}{12} \pi R^3$.

B. $\frac{1}{3} \pi R^3$.

C. $\frac{4}{3} \pi R^3$.

D. $\frac{5}{6} \pi R^3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$SI = \sqrt{SB^2 - IB^2} = \sqrt{17R^2 - R^2} = 4R \Rightarrow SE = 2R, EF = \frac{R}{2}.$$

Thể tích khối nón lớn (có đường cao SI) là

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot 4R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Thể tích khối nón nhỏ (có đường cao SE) là

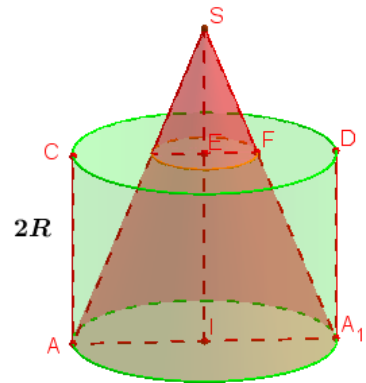
$$V_2 = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{R}{2} \right)^2 \cdot 2R = \frac{1}{6} \pi R^3$$

Thể tích phần khối giao nhau giữa khối nón và khối trụ là

$$V_3 = V_1 - V_2 = \frac{7}{6} \pi R^3.$$

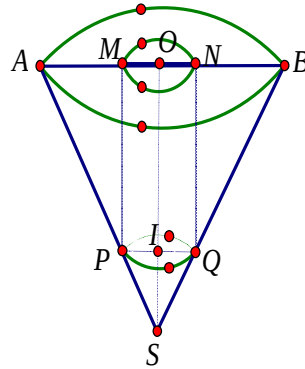
Thể tích khối trụ là $V_4 = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$.

Vậy thể tích phần khối trụ không giao với khối nón là $V = V_4 - V_3 = \frac{5}{6} \pi R^3$.



Câu 23: Một bình đựng nước dạng hình nón (không đáy) đựng đầy nước. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào đó một khối trụ và đo được thể tích nước tràn

ra ngoài là $\frac{16\pi}{9} dm^3$. Biết rằng một mặt của khối trụ nằm trên mặt trên của hình nón, các điểm trên đường tròn đáy còn lại đều thuộc các đường sinh của hình nón (như hình vẽ) và khối trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón. Diện tích xung quanh S_{xq} của bình nước là:



A. $S_{xq} = \frac{9\pi\sqrt{10}}{2} dm^2$. B. $S_{xq} = 4\pi\sqrt{10} dm^2$. C. $S_{xq} = 4\pi dm^2$. D. $S_{xq} = \frac{3\pi}{2} dm^2$.

Lời giải

Chọn B

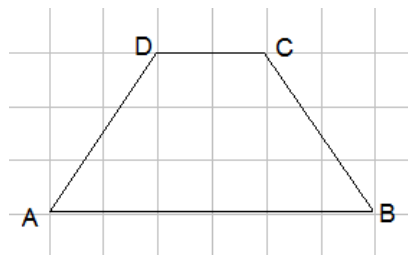
Xét hình nón: $h = SO = 3r$, $r = OB$, $l = SA$. Xét hình trụ: $h_1 = 2r = NQ$, $r_1 = ON = QI$

$$\Delta SQI \sim \Delta SBO \Rightarrow \frac{QI}{BO} = \frac{SI}{SO} = \frac{1}{3} \Rightarrow r_1 = \frac{r}{3} \Rightarrow \text{Thể tích khối trụ là:}$$

$$V_t = \pi r_1^2 h_1 = \frac{2\pi r^3}{9} = \frac{16\pi}{9} \Rightarrow r = 2 \Rightarrow h = 6 \Rightarrow l = \sqrt{h^2 + r^2} = 2\sqrt{10} \Rightarrow S_{xq} = \pi r l = 4\pi\sqrt{10} dm^2$$

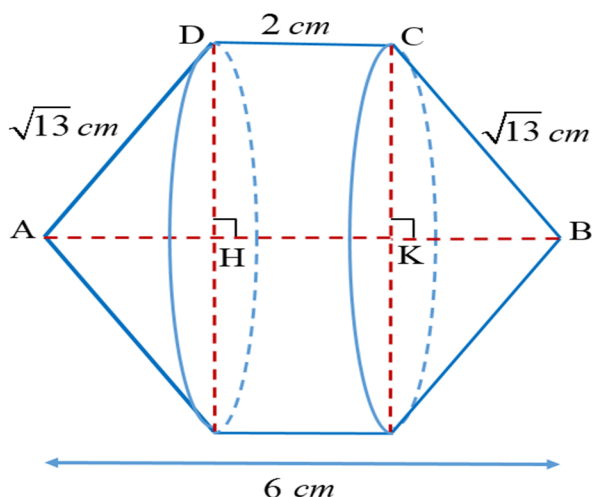
Câu 24: (CHUYÊN SƯ PHẠM HÀ NỘI LẦN 4 NĂM 2019) Cho hình thang cân $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 6cm$, $CD = 2cm$, $AD = BC = \sqrt{13}cm$. Quay hình thang $ABCD$ xung quanh đường thẳng AB ta được một khối tròn xoay có thể tích là

A. $18\pi (cm^3)$. B. $30\pi (cm^3)$. C. $24\pi (cm^3)$. D. $12\pi (cm^3)$.



Lời giải

Chọn B



Kẻ $DH \perp AB$, $CK \perp AB$ với $H, K \in AB$. Suy ra $HK = 2 \text{ cm}$.

Do $ABCD$ là hình thang cân, $AB = 6 \text{ cm}$, $CD = 2 \text{ cm}$ nên $AH = BK = 2 \text{ cm}$.

Do $\triangle ADH$, $\triangle BCK$ vuông nên $DH = CK = \sqrt{13 - 4} = 3 \text{ cm}$.

Đoạn DH quay xung quanh AB tạo thành hình tròn (C_1) tâm H , bán kính $R_1 = HD = 3 \text{ cm}$.

Đoạn CK quay xung quanh AB tạo thành hình tròn (C_2) tâm K , bán kính $R_2 = CK = 3 \text{ cm}$.

Gọi (V_1) là thể tích khối nón đỉnh A , đáy là hình tròn (C_1) .

Gọi (V_2) là thể tích khối nón đỉnh B , đáy là hình tròn (C_2) .

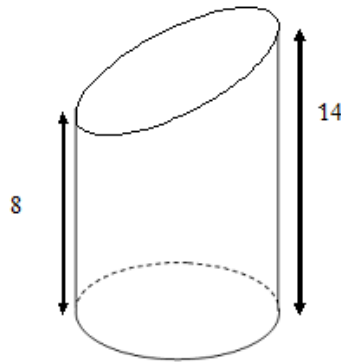
Gọi (V_3) là thể tích khối trụ chiều cao HK và hai đáy là hai hình tròn (C_1) , (C_2) .

Ta có: $V_1 = V_2 = \frac{1}{3} \pi \cdot DH^2 \cdot AH = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 2 = 6\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

$V_3 = \pi \cdot DH^2 \cdot HK = \pi \cdot 3^2 \cdot 2 = 18\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

Khi hình thang $ABCD$ quay xung quanh đường thẳng AB ta được một khối tròn xoay có thể tích là: $V = V_1 + V_2 + V_3 = 6\pi + 6\pi + 12\pi = 30\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

Câu 25: Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng ta được một khối (H) như hình vẽ bên. Biết rằng thiết diện là một hình elip có độ dài trục lớn bằng 8, khoảng cách từ điểm thuộc thiết diện gần mặt đáy nhất và điểm thuộc thiết diện xa mặt đáy nhất tới mặt đáy lần lượt là 8 và 14 (xem hình vẽ). Tính thể tích của (H) .



A. $V_{(H)} = 192\pi$.

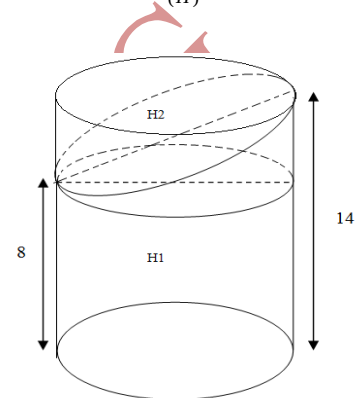
B. $V_{(H)} = 275\pi$.

C. $V_{(H)} = 704\pi$.

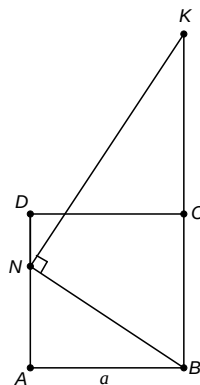
D. $V_{(H)} = 176\pi$.

Lời giải

Chọn D

Đường kính đáy của khối trụ là $\sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ Bán kính đáy của khối trụ là $R = 4$ Thể tích của khối trụ $H1$ là $V_1 = \pi.R^2.h_1 = \pi.4^2.8 = 128\pi$.Thể tích của khối trụ $H2$ là $V_2 = \pi.R^2.h_2 = \pi.4^2.6 = 96\pi$.Thể tích của H là $V = V_1 + \frac{1}{2}V_2 = 128\pi + \frac{1}{2}.96\pi = 176\pi$.

Câu 26: (Chuyên Hưng Yên Lần 3) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi N là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AN = 2ND$. Đường thẳng qua N vuông góc với BN cắt BC tại K . Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay tứ giác $ANKB$ quanh trục BK là



A. $V = \frac{7}{6}\pi a^3$.

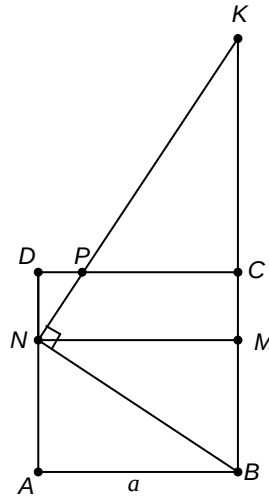
B. $V = \frac{9}{14}\pi a^3$.

C. $V = \frac{6}{7}\pi a^3$.

D. $V = \frac{14}{9}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $NB = \sqrt{a^2 + \frac{4a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{13}}{3}$.

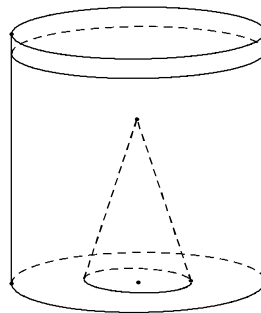
$\triangle ABN$ đồng dạng $\triangle NKB$ suy ra $\frac{AN}{NB} = \frac{NB}{KB} \Rightarrow KB = \frac{NB^2}{AN} = \frac{13a^2}{9} \cdot \frac{3}{2a} = \frac{13a}{6}$

Gọi M là điểm trên BC sao cho $BM = 2MC$

Suy ra $BM = \frac{2a}{3}; MK = \frac{3a}{2}$.

Vậy $V = \pi a^2 \cdot \frac{2a}{3} + \frac{1}{3} \pi a^2 \cdot \frac{3a}{2} = \frac{7}{6} \pi a^3$.

Câu 27: (THTT số 3) Một khối nón làm bằng chất liệu không thấm nước, có khối lượng riêng lớn hơn khối lượng riêng của nước, có đường kính đáy bằng a và chiều cao 12, được đặt trong và trên đáy của một cái cốc hình trụ bán kính đáy a như hình vẽ, sao cho đáy của khối nón tiếp xúc với đáy của cốc hình trụ. Đổ nước vào cốc hình trụ đến khi mực nước đạt đến độ cao 12 thì lấy khối nón ra. Hãy tính độ cao của nước trong cốc sau khi đã lấy khối nón ra.



A. 11,37.

B. 11.

C. $6\sqrt{3}$.

D. $\frac{\pi\sqrt{37}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

+) Gọi V, R, h lần lượt là thể tích khối trụ (khối chứa phần nước trong cốc), bán kính đáy cốc và chiều cao của lượng nước trong cốc khi chưa lấy khối nón ra. Suy ra : $V = \pi R^2 h$ (1)

+) Gọi V_1, R_1, h_1 lần lượt là thể tích, bán kính đáy và chiều cao của khối nón.

Suy ra : $V_1 = \frac{1}{3} \pi R_1^2 h_1$ (2)

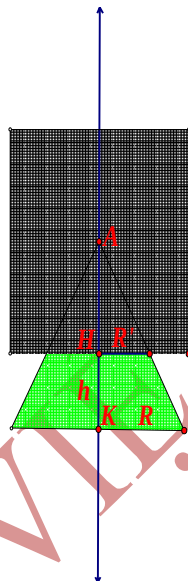
+) Gọi V_2, h_2 là thể tích lượng nước đổ vào và độ cao của nước trong cốc sau khi đã lấy khối nón ra. Suy ra : $V_2 = \pi R^2 h_2$ (3)

Từ (1),(2) và (3) ta có :

$$V - V_1 = V_2 \Leftrightarrow \pi R^2 h - \frac{1}{3} \pi R_1^2 h_1 = \pi R^2 h_2 \Leftrightarrow R^2 h - \frac{1}{3} R_1^2 h_1 = R^2 h_2 \Leftrightarrow h_2 = \frac{R^2 h - \frac{1}{3} R_1^2 h_1}{R^2} \quad (4)$$

Thay $R = a, R_1 = \frac{a}{2}, h = h_1 = 12$ vào (4) ta có : $h_2 = 12 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 12 = 11$.

Câu 28: Cho tam giác đều và hình vuông cùng có cạnh bằng 4 được xếp chồng lên nhau sao cho một đỉnh của tam giác đều trùng với tâm của hình vuông, trục của tam giác đều trùng với trục của hình vuông (như hình vẽ). Thể tích của vật thể tròn xoay sinh bởi hình đã cho khi quay quanh trục AB là



- A. $\frac{136\pi + 24\pi\sqrt{3}}{9}$ B. $\frac{48\pi + 7\pi\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{128\pi + 24\pi\sqrt{3}}{9}$ D. $\frac{144\pi + 24\pi\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Khi xoay quanh trục AB thì:

□ Phần hình vuông phía trên trở thành lăng trụ có bán kính $R = 2$, chiều cao $h = 4$

$$\rightarrow V_1 = \pi 2^2 \cdot 4 = 16\pi$$

Phần dưới trở thành hình nón cụt với

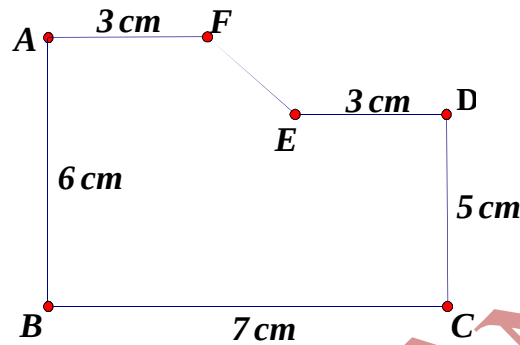
$$h = HK = AK - AH = 2\sqrt{3} - 2 = 2(\sqrt{3} - 1); R = 2$$

$$\frac{R'}{R} = \frac{AH}{AK} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow R' = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Áp dụng } V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + R'^2 + RR') = \dots = \left(\frac{24\sqrt{3} - 8}{9} \right) \pi$$

$$\text{Vậy } V = V_1 + V_2 = \left(\frac{24\sqrt{3} + 136}{9} \right) \pi.$$

Câu 29: Cho hình phẳng (H) được mô tả ở hình vẽ dưới đây. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay được tạo ra khi quay hình phẳng (H) quanh cạnh AB .



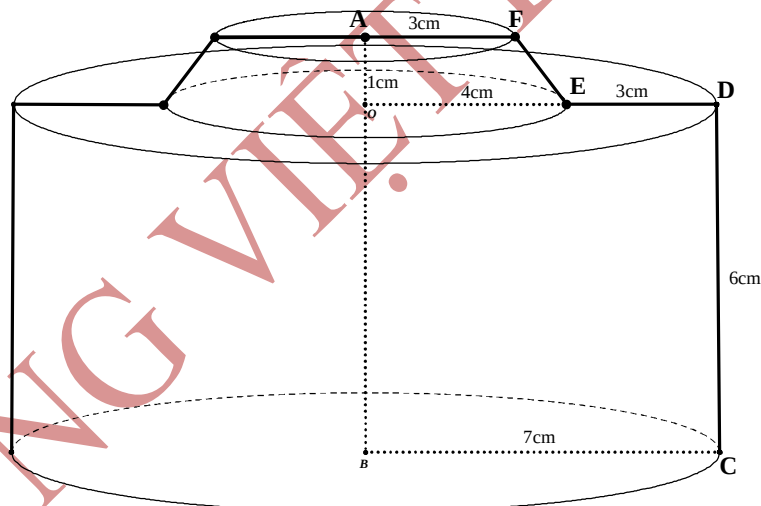
A. $V = \frac{772\pi}{3} \text{ cm}^3.$

B. $V = \frac{799\pi}{3} \text{ cm}^3.$

C. $V = 254\pi \text{ cm}^3.$

D. $V = \frac{826\pi}{3} \text{ cm}^3.$

Lời giải



Vật thể tròn xoay tạo ra gồm hai phần:

V_1 là phần hình trụ tròn xoay quay bởi hình gấp khúc $ODCB$ quanh trục AB tạo ra hình trụ có chiều cao $h = 6(\text{cm})$; bán kính đáy $R_1 = 7(\text{cm})$.

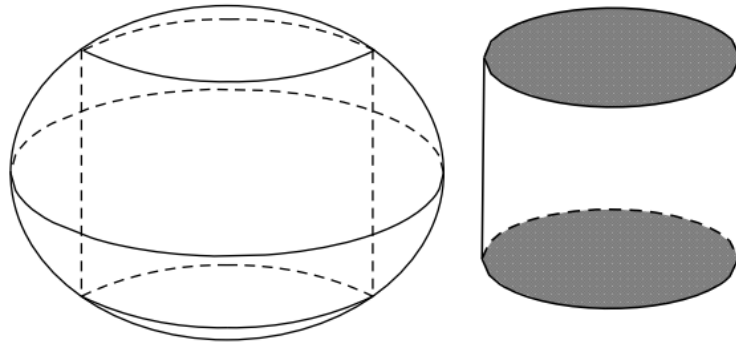
V_2 là phần hình trụ tròn xoay quay bởi hình gấp khúc $AFEO$ quanh trục AB tạo ra hình nón cụt có chiều cao $h' = 1(\text{cm})$; bán kính đáy lớn $R = 4(\text{cm})$; bán kính đáy bé $r = 3(\text{cm})$.

Khi đó thể tích khối tròn xoay là:

$$V = V_1 + V_2 = \pi R_1^2 \cdot h + \frac{\pi \cdot h'}{3} (R^2 + r^2 + R \cdot r) = \pi \cdot 49 \cdot 6 + \frac{\pi \cdot 1}{3} (4^2 + 3^2 + 4 \cdot 3) = \frac{772\pi}{3} \text{ cm}^3.$$

Chọn A.

Câu 30: (Thuan-Thanh-Bac-Ninh) Một khối đá có hình là một khối cầu có bán kính R , người thợ thủ công mỹ nghệ cần cắt và gọt viên đá đó thành một viên đá cảnh có hình dạng là một khối trụ. Tính thể tích lớn nhất có thể của viên đá cảnh sau khi đã hoàn thiện?



A. $\frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{9}$.

B. $\frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{3}$.

C. $\frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{6}$.

D. $\frac{3\sqrt{3}\pi R^3}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi chiều cao của viên đá cảnh hình trụ là $h = 2x$, $0 < x < R$

$\Rightarrow$ bán kính đáy của khối trụ là: $\sqrt{R^2 - x^2}$.

$\Rightarrow V = \pi(R^2 - x^2)2x = 2\pi(R^2x - x^3)$.

$\Rightarrow V' = 2\pi(R^2 - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{R^2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{3}}{3}$.

Lập bảng biến thiên của hàm số V trên khoảng $(0; R)$ ta được $V_{\max} = V\left(\frac{R\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{9}$.

Câu 31: (THĂNG LONG HN LẦN 2 NĂM 2019) Cho mặt cầu (S) có bán kính $\sqrt{3}$. Trong tất cả các khối trụ nội tiếp mặt cầu (S) (hai đáy của khối trụ là những thiết diện của hình cầu cắt bởi hai mặt phẳng song song), khối trụ có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}$.

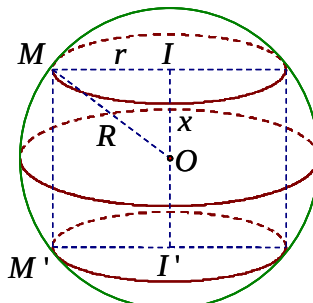
B. 4π .

C. 3π .

D. $\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi bán kính mặt cầu là R và chiều cao của khối trụ là $h = 2x > 0$.

Suy ra bán kính đáy trụ là $r = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = 2\pi(R^2 - x^2)x$

Theo BĐT Cauchy ta có $V^2 = 2\pi^2 (R^2 - x^2)^2 \cdot 2x^2 \leq 2\pi^2 \left(\frac{2(R^2 - x^2) + 2x^2}{3} \right)^3 = \frac{16\pi^2 R^6}{27}$

Suy ra $V \leq \frac{4\pi R^3 \sqrt{3}}{9}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $R^2 - x^2 = 2x^2 \Leftrightarrow x = \frac{R}{\sqrt{3}}$

Vậy $\max V = \frac{4\pi R^3 \sqrt{3}}{9}$. Với $R = \sqrt{3}$ thì $\max V = 4\pi$.

Câu 32: Một hình trụ có thể tích V không đổi. Tính mối quan hệ giữa bán kính đáy và chiều cao hình trụ sao cho diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $R = \frac{h}{2}$

B. $R = \frac{h}{3}$

C. $R = \frac{h}{5}$

D. $R = \frac{h}{4}$

Lời giải

Gọi R và h là bán kính đáy và chiều cao hình trụ.

Ta có: $V = \pi R^2 h$ (không đổi)

$$S_{tp} = S_{xq} = 2S_{day} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = (Rh + R^2) 2\pi$$

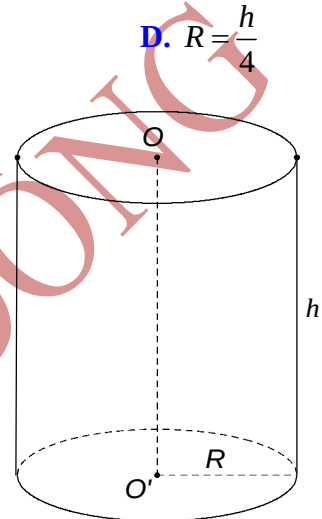
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương,

$$\text{Ta có: } \frac{Rh}{2} + \frac{Rh}{2} + R^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{Rh}{2} \cdot \frac{Rh}{2} \cdot R^2}$$

$$\Leftrightarrow Rh + R^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{R^4 h^2}{4}} = 3\sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi^2 4}}$$

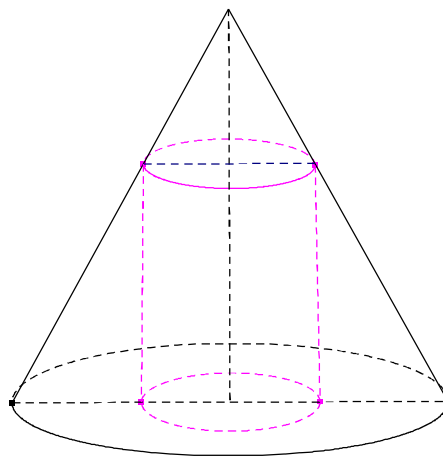
$$\Leftrightarrow S_{tp} \geq 3(2\pi) \sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi^2 4}} \text{ (hằng số)}$$

$$\text{Do đó: } S \text{ toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất} \Leftrightarrow \frac{Rh}{2} = R^2 \Leftrightarrow R = \frac{h}{2}.$$



Chọn A

Câu 33: (THPT LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NGÃI) Cho hình nón có bán kính đáy bằng 3 chiều cao bằng 6, một khối trụ có bán kính đáy thay đổi nội tiếp khối nón đã cho (như hình vẽ). Thể tích lớn nhất của khối trụ bằng



A. 6π .

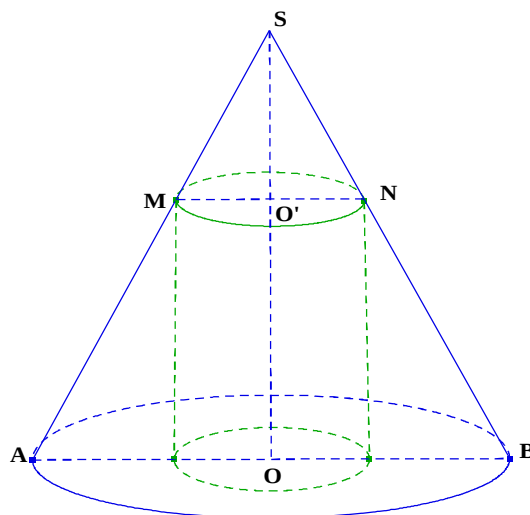
B. 10π .

C. 4π .

D. 8π .

Lời giải

Chọn D



Gọi bán kính của khối trụ là x ($0 < x < 3$), chiều cao của khối trụ là $h = OO'$ ($0 < h < 6$).

Khi đó thể tích khối trụ là: $V = \pi x^2 h$.

Ta có: $\triangle SO'N$ đồng dạng với $\triangle SOB$ nên có $\frac{O'N}{OB} = \frac{SO'}{SO} \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{6-h}{6} \Leftrightarrow h = 6 - 2x$.

Suy ra $V = \pi x^2 h = \pi x^2 (6 - 2x) = \pi (6x^2 - 2x^3)$.

Xét hàm $f(x) = 6x^2 - 2x^3$, ($0 < x < 3$).

$$f'(x) = 12x - 6x^2.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (l)} \\ x = 2 \text{ (n)} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	2	3
$f'(x)$		+	0
$f(x)$		8	

Do đó V lớn nhất khi hàm $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

Vậy thể tích của khối trụ lớn nhất là $V = 8\pi$ khi bán kính khối trụ bằng 2.

Câu 34: (NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG LẦN IV NĂM 2019) Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau cắt khối cầu tâm O bán kính R tạo thành hai hình tròn (C_1) và (C_2) cùng bán kính. Xét hình nón có đỉnh trùng với tâm của một trong hai hình tròn, đáy trùng với hình tròn còn lại. Biết diện tích xung quanh của hình nón là lớn nhất, khi đó thể tích khối trụ có hai đáy là hai hình tròn (C_1) và (C_2) bằng

A. $\frac{4\pi R^3 \sqrt{3}}{9}$.

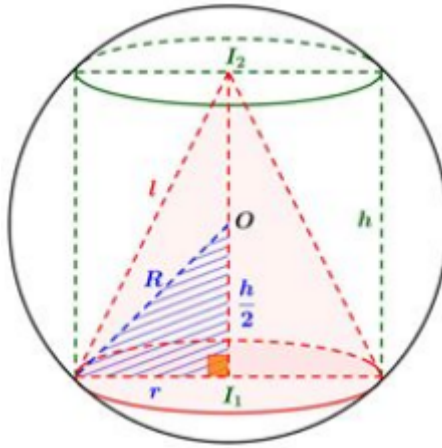
B. $\frac{2\pi R^3 \sqrt{3}}{9}$.

C. $\frac{\pi R^3 \sqrt{3}}{9}$.

D. $\frac{4\pi R^3 \sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi r, h, l lần lượt là bán kính đáy, chiều cao và đường sinh của hình nón và I_1, I_2, O lần lượt là tâm của hai đường tròn $(C_1), (C_2)$ và mặt cầu.

Vì hai đường tròn $(C_1), (C_2)$ có bán kính bằng nhau nên dễ dàng suy ra: $OI_1 = OI_2 = \frac{h}{2}$

$$\text{Ta có } r = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}} \Rightarrow l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{R^2 + \frac{3h^2}{4}}.$$

Diện tích xung quanh hình nón là

$$S_{xq} = \pi r l = \pi \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}} \sqrt{R^2 + \frac{3h^2}{4}} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}} \sqrt{(12R^2 - 3h^2)(4R^2 + 3h^2)} \leq \frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}.$$

$$S_{xq} \text{ lớn nhất bằng } \frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } 12R^2 - 3h^2 = 4R^2 + 3h^2 \Leftrightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

$$\Rightarrow r = \frac{R\sqrt{6}}{3}.$$

Mà bán kính đáy và chiều cao của hình nón cũng chính là bán kính đáy và chiều cao hình trụ.

$$\text{Vậy thể tích hình trụ } V = \pi r^2 h = \pi \cdot \frac{6R^2}{9} \cdot \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi R^3 \sqrt{3}}{9}.$$

Câu 35: Trong số các hình trụ có diện tích toàn phần đều bằng S thì bán kính R và chiều cao h của khối trụ có thể tích lớn nhất là:

$$\text{A. } R = \sqrt{\frac{S}{2\pi}}; h = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{2\pi}}.$$

$$\text{B. } R = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}; h = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}.$$

$$\text{C. } R = \sqrt{\frac{2S}{3\pi}}; h = 4\sqrt{\frac{2S}{3\pi}}.$$

$$\text{D. } R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}; h = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}.$$

Lời giải

Gọi thể tích khối trụ là V , diện tích toàn phần của hình trụ là S .

Ta có: $S = S_{\text{đáy}} + S_{xq} = 2\pi R^2 + 2\pi R h$. Từ đó suy ra:

$$\frac{S}{2\pi} = R^2 + R h \Leftrightarrow \frac{S}{2\pi} = R^2 + \frac{V}{\pi R} = R^2 + \frac{V}{2\pi R} + \frac{V}{2\pi R} \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 3\sqrt{\frac{V^2}{4\pi^2}}$$

$$\text{hay } 27 \frac{V^2}{4\pi^2} \leq \left(\frac{S}{2\pi} \right)^3 \Leftrightarrow V \leq \sqrt{\frac{S^3}{54\pi}}.$$

Vậy $V_{\max} = \sqrt{\frac{S^3}{54\pi}}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow R^2 = \frac{V}{2\pi R} = \frac{\pi R^2 h}{2\pi R} = \frac{Rh}{2}$ hay $h = 2R$.

Khi đó $S = 6\pi R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ và $h = 2R = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.

Chọn D

Câu 36: Cho hình cầu tâm O, đường kính 2R và hình trụ tròn xoay nội tiếp trong hình cầu. Hãy tìm kích thước của hình trụ khi nó có thể tích đạt giá trị lớn nhất.

A. $r = \frac{R\sqrt{6}}{3}$

B. $r = \frac{2R}{3}$

C. $r = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

D. $r = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

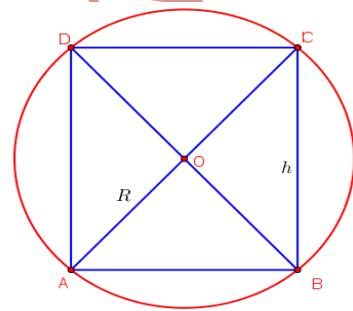
Lời giải

Gọi h và r là chiều cao và bán kính đáy của hình trụ. Bài toán quy về việc tính h và r phụ thuộc theo R khi hình chữ nhật ABCD nội tiếp trong hình tròn (O, R) thay đổi về $V = \pi r^2 h$ đạt giá trị lớn nhất

Ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow 4R^2 = 4r^2 + h^2$

$V = \pi \left(R^2 - \frac{1}{4}h^2 \right) h = \pi \left(-\frac{1}{4}h^3 + R^2 h \right) \quad (0 < h < 2R)$

$V' = \pi \left(-\frac{3}{4}h^2 + R^2 \right) \Leftrightarrow h = \pm \frac{2R}{\sqrt{3}}$



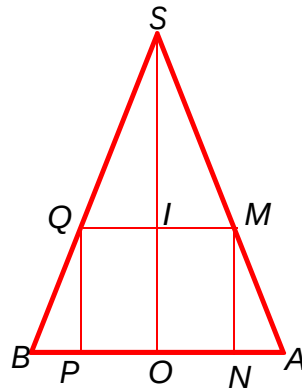
h	0	$\frac{2R}{\sqrt{3}}$	$2R$
V'	+	0	-
V			

Vậy $V = V_{\max} = \frac{4}{9}\pi R^3 \sqrt{3} \Leftrightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

Lúc đó $r^2 = R^2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{4R^2}{3} = \frac{2R^2}{3} \Rightarrow r = \frac{R\sqrt{6}}{3}$.

Chọn A

Câu 37: Cho hình vẽ bên. Tam giác SOA vuông tại O có $MN \parallel SO$ với M, N lần lượt nằm trên cạnh SA, OA. Đặt $SO = h$ không đổi. Khi quay hình vẽ quanh SO thì tạo thành một hình trụ nội tiếp hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O bán kính $R = OA$. Tìm độ dài của MN để thể tích khối trụ là lớn nhất.



A. $MN = \frac{h}{2}$

B. $MN = \frac{h}{3}$

C. $MN = \frac{h}{4}$

D. $MN = \frac{h}{6}$

Lời giải

Ta thấy khi quay quanh trục SO sẽ tạo nên một khối trụ nằm trong khối chóp. Khi đó thiết diện qua trục của hình trụ là hình chữ nhật $MNPQ$. Ta có hình sau:

Ta có $SO = h$; $OA = R$. Khi đó đặt $OI = MN = x$.

Theo định lí Thales ta có $\frac{IM}{OA} = \frac{SI}{SO} \Rightarrow IM = \frac{OA \cdot SI}{SO} = \frac{R \cdot (h-x)}{h}$. Thể tích khối trụ

$$V = \pi IM^2 \cdot IH = \frac{\pi R^2}{h^2} \cdot x(h-x)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$2x(h-x)^2 \leq \left[\frac{2x + 2(h-x)}{3} \right]^3$$

Vậy $V \leq \frac{4\pi R^2 h}{27}$. Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{h}{3}$. Hay $MN = \frac{h}{3}$.

Chọn B

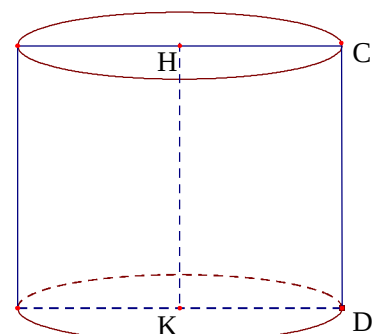
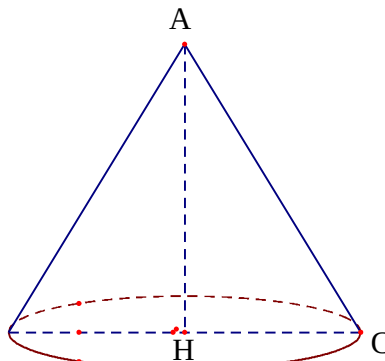
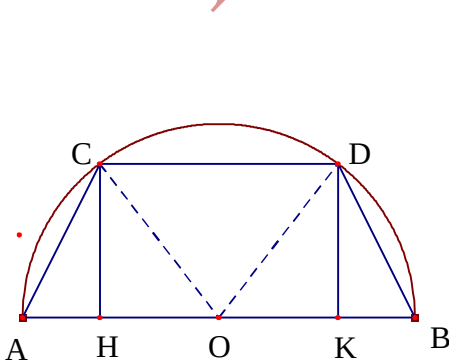
Câu 38: Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$, hai điểm C, D di động trên nửa đường tròn sao cho $CD \parallel AB$. Kí hiệu $CD = x$, tìm x để vật thể tròn xoay tạo thành khi quay hình thang cân $ACDB$ quanh trục AB lớn nhất.

A. $x = \frac{R(\sqrt{13}-1)}{3}$

B. $x = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

C. $x = \frac{R(1+2\sqrt{13})}{15}$

D. $x = \frac{R}{\sqrt{3}}$

Lời giải

Chọn A

Kí hiệu $\widehat{COD} = 2\alpha \Rightarrow \widehat{COA} = \widehat{DOB} = 90^\circ - \alpha$ và H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của C, D lên AB .

Ta có $CD = HK = 2R \sin \alpha$ và

$$OH = OK = \frac{HK}{2} = R \sin \alpha, AH = KB = \frac{2R - 2R \sin \alpha}{2} = R - R \sin \alpha.$$

Khi quay hình thang cân $ACDB$ quanh trục AB ta được khối tròn xoay có thể tích bằng tổng thể tích của khối trụ có

$$r = CH = \sqrt{OC^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 \alpha} = R \cos \alpha, h = HK = 2R \sin \alpha.$$

và thể tích của hai khối nón bằng nhau có $r = CH = R \cos \alpha, h = AH = R - R \sin \alpha$.

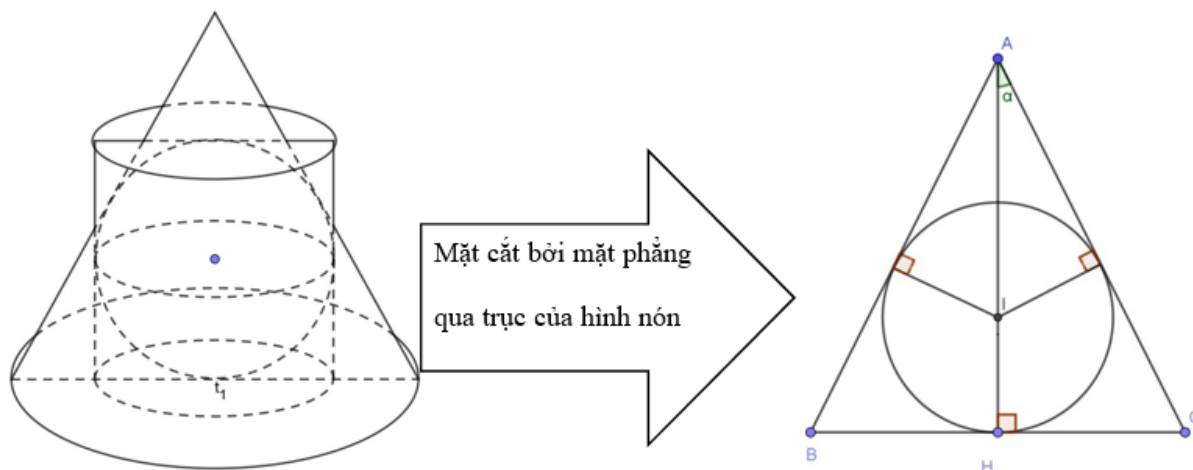
$$\begin{aligned} \text{Vì vậy } V &= \pi R^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot 2R \sin \alpha + \frac{2\pi R^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot (R - R \sin \alpha)}{3} \\ &= \frac{2\pi R^3 \cdot \cos^2 \alpha \cdot (3 \sin \alpha + 1 - \sin \alpha)}{3} = \frac{2\pi R^3 \cdot (1 + 2 \sin \alpha) \cdot (1 - \sin^2 \alpha)}{3} \leq \frac{35 + 13\sqrt{13}}{81} \pi R^3. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng đạt tại } \sin \alpha = \frac{\sqrt{13} - 1}{6} \Rightarrow CD = 2R \sin \alpha = \frac{R(\sqrt{13} - 1)}{3}.$$

* **Chú ý**. Khảo sát hàm số $f(x) = \frac{2 \cdot (1 + 2x) \cdot (1 - x^2)}{3}$ trên đoạn $[0; 1]$, ta có

$$\max_{[0;1]} f(x) = f\left(\frac{\sqrt{13} - 1}{6}\right) = \frac{35 + 13\sqrt{13}}{81}.$$

Câu 39: (SỞ GD&ĐT KIÊN GIANG 2019) Cho một hình cầu nội tiếp hình nón tròn xoay có góc ở đỉnh là 2α , bán kính đáy là R và chiều cao là h . Một hình trụ ngoại tiếp hình cầu đó có đáy dưới nằm trong mặt phẳng đáy của hình nón (tham khảo hình vẽ). Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình nón và hình trụ, biết rằng $V_1 \neq V_2$. Gọi M là giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V_2}{V_1}$. Giá trị của biểu thức $P = 48M + 25$ thuộc khoảng nào dưới đây?



A. (40; 60).

B. (60; 80).

C. (20; 40).

D. (0; 20).

Lời giải

Chọn B

Gọi r là bán kính hình cầu, khi đó r cũng là bán kính đường tròn đáy của hình trụ đã cho, chiều cao của hình trụ bằng $2r$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} V_1 = \frac{1}{3} \pi R^2 h \\ V_2 = \pi r^2 \cdot 2r \end{cases} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{6r^3}{R^2 h}.$$

Xét mặt cắt qua trục của hình nón là 1 tam giác cân ABC có diện tích là $S = \frac{1}{2} h \cdot 2R = Rh$.

Tam giác cân có chiều dài cạnh bên $AB = AC = \frac{R}{\sin \alpha}$.

Mặt khác áp dụng công thức $S = pr$ với p là nửa chu vi tam giác, r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác (cũng là bán kính mặt cầu đã cho).

$$\text{Ta có } p = \frac{1}{2} \left(2R + 2 \frac{R}{\sin \alpha} \right) \Rightarrow S = Rh = \left(R + \frac{R}{\sin \alpha} \right) r \Leftrightarrow r = \frac{h \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha + 1}.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \frac{V_2}{V_1} &= \frac{6h^3 \sin^3 \alpha}{R^2 h (\sin \alpha + 1)^3} = \frac{6 \sin^3 \alpha}{(\sin \alpha + 1)^3} \cdot \left(\frac{h}{R} \right)^2 \\ &= \frac{6 \sin^3 \alpha}{(\sin \alpha + 1)^3} \cdot \cot^2 \alpha = \frac{6 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha)}{(\sin \alpha + 1)^3} = \frac{6 \sin \alpha (1 - \sin \alpha)}{(\sin \alpha + 1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Xét hàm số } y = \frac{6 \sin \alpha (1 - \sin \alpha)}{(\sin \alpha + 1)^2}.$$

$$\text{Đặt } t = \sin \alpha, t \in (0; 1) \text{ ta có } y = \frac{6t(1-t)}{(t+1)^2}, t \in (0; 1).$$

$$\text{Ta có } y' = \frac{-6(3t-1)}{(t+1)^3}; y' = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}.$$

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{3}$	1	
y'		+	0	-
y	0	$\frac{3}{4}$	0	

Suy ra $M = \frac{3}{4}$. Vậy $P = 48M + 25 = 48 \cdot \frac{3}{4} + 25 = 61$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

MẶT CẦU – KHỐI CẦU

A – LÝ THUYẾT CHUNG

1. Mặt cầu

Nội dung	Hình vẽ
Cho điểm I cố định và một số thực dương R. Tập hợp tất cả những điểm M trong không gian cách I một khoảng R được gọi là mặt cầu tâm I, bán kính R. Kí hiệu: $S(I; R)$. Khi đó: $S(I; R) = \{M \mid IM = R\}$	

2. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu $S(I; R)$ và mặt phẳng (P) . Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $(P) \Rightarrow d = IH$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) . Khi đó:

$d > R$	$d = R$	$d < R$
Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.	Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu: (P) là mặt phẳng tiếp diện của mặt cầu và H : tiếp điểm .	Mặt phẳng cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm I' và bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$

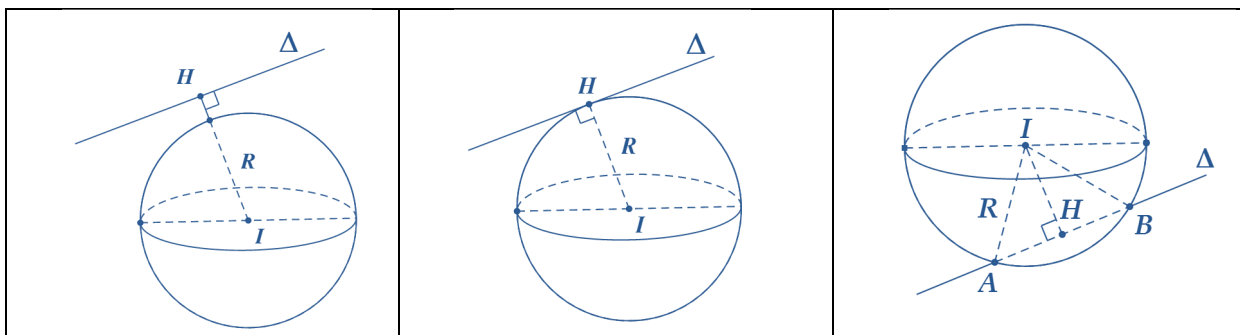
Lưu ý:

Khi mặt phẳng (P) đi qua tâm I của mặt cầu thì mặt phẳng (P) được gọi là **mặt phẳng kính** và thiết diện lúc đó được gọi là **đường tròn lớn**.

3. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

Cho mặt cầu $S(I; R)$ và đường thẳng Δ . Gọi H là hình chiếu của I lên Δ . Khi đó:

$IH > R$	$IH = R$	$IH < R$
Δ không cắt mặt cầu.	Δ tiếp xúc với mặt cầu. Δ : Tiếp tuyến của (S) H : tiếp điểm .	Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.



Lưu ý:

Trong trường hợp Δ cắt (S) tại 2 điểm A, B thì bán kính R của (S) được tính như sau:

$$\begin{cases} d(I; \Delta) = IH \\ R = \sqrt{IH^2 + AH^2} = \sqrt{IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} \end{cases}$$

4. MỘT SỐ DẠNG TOÁN VÀ CÔNG THỨC GIẢI BÀI TOÁN MẶT CẦU

4.1. Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

4.1. Các khái niệm cơ bản

Trục của đa giác đáy: là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác đáy và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác đáy $\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên trục của đa giác thì cách đều các đỉnh của đa giác đó.

Đường trung trục của đoạn thẳng: là đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.

$\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên đường trung trục thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.

Mặt trung trục của đoạn thẳng: là mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.

$\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên mặt trung trục thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.

4.2. Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp: là điểm cách đều các đỉnh của hình chóp. Hay nói cách khác, nó chính là giao điểm I của trục đường tròn ngoại tiếp mặt phẳng đáy và mặt phẳng trung trục của một cạnh bên hình chóp.

Bán kính: là khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình chóp.

4.3. Cách xác định tâm và bán kính mặt cầu của một số hình đa diện

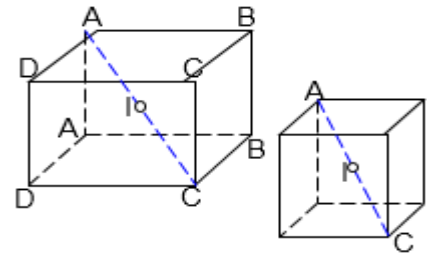
4.3.1. Hình hộp chữ nhật, hình lập phương

Nội dung	Hình vẽ
Tâm: trùng với tâm đối xứng của hình hộp chữ nhật (hình lập	

phương) $\Rightarrow$ Tâm là I , là trung điểm của AC' .

Bán kính: bằng nửa độ dài đường chéo hình hộp chữ nhật (hình lập phương).

$$\Rightarrow \text{Bán kính: } R = \frac{AC'}{2}.$$



4.3.2. Hình lăng trụ đứng có đáy nội tiếp đường tròn

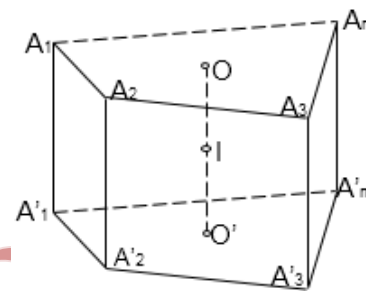
Nội dung

Xét hình lăng trụ đứng $A_1A_2A_3...A_nA'_1A'_2A'_3...A'_n$, trong đó có 2 đáy $A_1A_2A_3...A_n$ và $A'_1A'_2A'_3...A'_n$ nội tiếp đường tròn (O) và (O') . Lúc đó, mặt cầu nội tiếp hình lăng trụ đứng có:

Tâm: I với I là trung điểm của OO' .

Bán kính: $R = IA_1 = IA_2 = ... = IA'_n$.

Hình vẽ



4.3.3. Hình chóp có các đỉnh nhìn đoạn thẳng nối 2 đỉnh còn lại dưới 1 góc vuông

Nội dung

Hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = 90^\circ$.

Tâm: I là trung điểm của SC .

$$\text{Bán kính: } R = \frac{SC}{2} = IA = IB = IC.$$

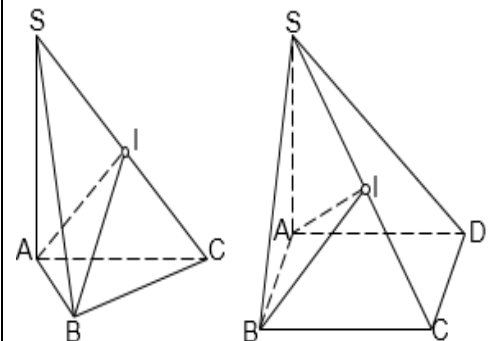
Hình chóp $S.ABCD$ có

$$\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = \widehat{SDC} = 90^\circ.$$

Tâm: I là trung điểm của SC .

$$\text{Bán kính: } R = \frac{SC}{2} = IA = IB = IC = ID.$$

Hình vẽ



4.3.4. Hình chóp đều

Nội dung

Hình vẽ

Cho hình chóp đều $S.ABC\dots$

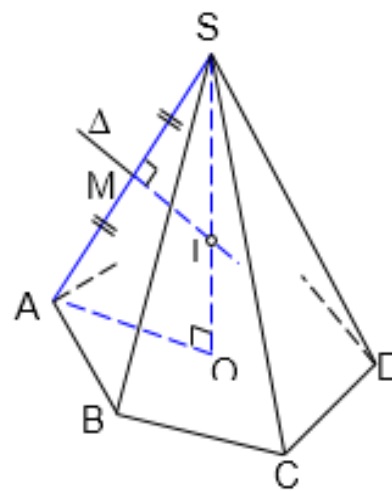
Gọi O là tâm của đáy $\Rightarrow SO$ là trục của đáy.

Trong mặt phẳng xác định bởi SO và một cạnh bên, chẳng hạn như $mp(SAO)$, ta vẽ đường trung trực của cạnh SA là Δ cắt SA tại M và cắt SO tại $I \Rightarrow I$ là tâm của mặt cầu.

Bán kính:

Ta có: $\triangle SMI \sim \triangle SOA \Rightarrow \frac{SM}{SO} = \frac{SI}{SA} \Rightarrow$ Bán kính:

$$R = IS = \frac{SM \cdot SA}{SO} = \frac{SA^2}{2SO} = IA = IB = IC = \dots$$



4.3.5. Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy

Nội dung

Cho hình chóp $S.ABC\dots$ có cạnh bên $SA \perp (ABC\dots)$ và đáy $ABC\dots$ nội tiếp được trong đường tròn tâm O .

Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC\dots$ được xác định như sau:

Từ tâm O ngoại tiếp của đường tròn đáy, ta vẽ đường thẳng d vuông góc với $mp(ABC\dots)$ tại O .

Trong $mp(d, SA)$, ta dựng đường trung trực Δ của cạnh SA , cắt SA tại M , cắt d tại $I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và bán kính

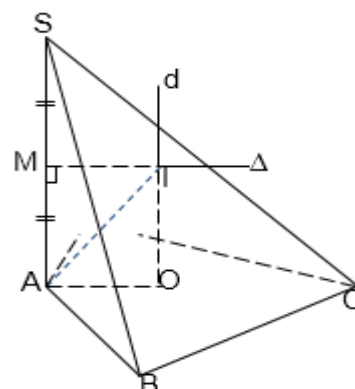
$$R = IA = IB = IC = IS = \dots$$

Tìm bán kính

Ta có: $MIOB$ là hình chữ nhật.

Xét $\triangle MAI$ vuông tại M có:

$$R = AI = \sqrt{MI^2 + MA^2} = \sqrt{AO^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2}$$



4.3.6. Hình chóp khác

Dựng trục Δ của đáy.

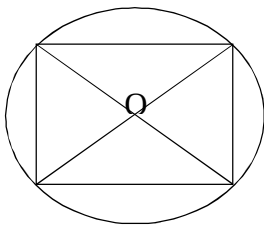
Dựng mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên bất kì.

$(\alpha) \cap \Delta = I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

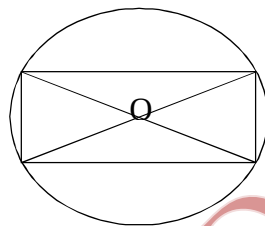
Bán kính: khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình chóp.

4.3.7. Đường tròn ngoại tiếp một số đa giác thường gặp

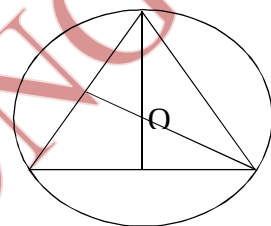
Khi xác định tâm mặt cầu, ta cần xác định trục của mặt phẳng đáy, đó chính là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đáy tại tâm O của đường tròn ngoại tiếp đáy. Do đó, việc xác định tâm ngoại O là yếu tố rất quan trọng của bài toán.



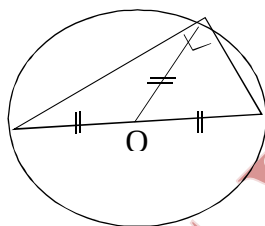
Hình vuông: O là giao điểm 2 đường chéo.



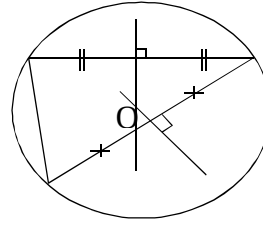
Hình chữ nhật: O là giao điểm của hai đường chéo.



Δ đều: O là giao điểm của 2 đường trung tuyến (trọng tâm).



Δ vuông: O là trung điểm của cạnh huyền



Δ thường: O là giao điểm của hai đường trung trực của hai cạnh Δ .

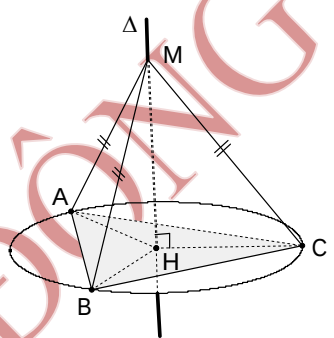
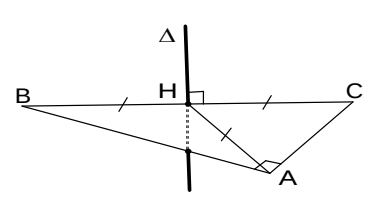
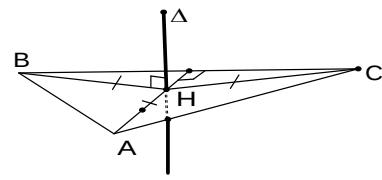
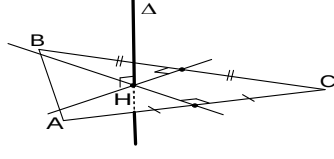
5.1 Kỹ thuật xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

Nội dung	Hình vẽ
Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ (thỏa mãn điều kiện tồn tại mặt cầu ngoại tiếp). Thông thường, để xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta thực hiện theo hai bước: <u>Bước 1:</u> Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. Dựng Δ: trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. <u>Bước 2:</u> Lập mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên.	

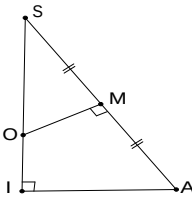
Lúc đó	
Tâm O của mặt cầu: $\Delta \cap mp(\alpha) = \{O\}$	
Bán kính: $R = SA (= SO)$. Tùy vào từng trường hợp.	

5.2. Kỹ năng xác định trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy

5.2.1. Trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy

Nội dung	Hình vẽ
Định nghĩa Trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp đáy và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính chất $\forall M \in \Delta : MA = MB = MC$ Suy ra: $MA = MB = MC \Leftrightarrow M \in \Delta$ Các bước xác định trục <u>Bước 1:</u> Xác định tâm H của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. <u>Bước 2:</u> Qua H dựng Δ vuông góc với mặt phẳng đáy. Một số trường hợp đặc biệt Đáy là tam giác vuông Đáy là tam giác đều Đáy là tam giác thường	   

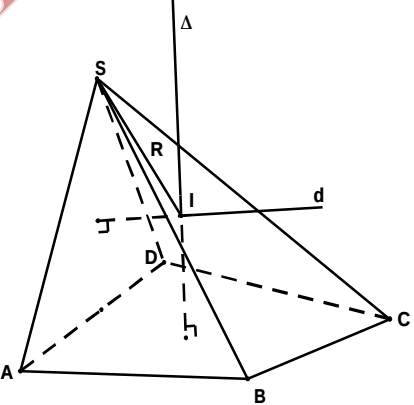
5.2.2. Kỹ năng tam giác đồng dạng

Nội dung	Hình vẽ
ΔSMO đồng dạng với $\Delta SIA \Rightarrow \frac{SO}{SA} = \frac{SM}{SI}$.	

5.2.3. Nhận xét quan trọng

$$\exists M, S : \begin{cases} MA = MB = MC \\ SA = SB = SC \end{cases} \Rightarrow SM \text{ là trục đường tròn ngoại tiếp } \Delta ABC.$$

5.3. Kỹ thuật sử dụng hai trục xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp đa diện

Nội dung	Hình vẽ
Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ (thỏa mãn điều kiện tồn tại mặt cầu ngoại tiếp). Thông thường, để xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta thực hiện theo hai bước: <u>Bước 1:</u> Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. Dựng Δ: trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. <u>Bước 2:</u> Xác định trục d của đường tròn ngoại tiếp một mặt bên (để xác định) của khối chóp. Lúc đó: Tâm I của mặt cầu: $\Delta \cap d = \{I\}$ Bk: $R = IA (= IS)$. Tùy vào từng trường hợp.	

5.4. Tổng kết các dạng tìm tâm và bán kính mặt cầu

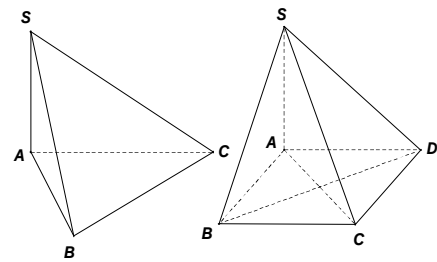
5.4.1. Dạng 1

Nội dung	Hình vẽ
----------	---------

Cạnh bên SA vuông góc đáy và $\widehat{ABC} = 90^\circ$ khi đó

$$R = \frac{SC}{2}$$

và tâm là trung điểm SC .



5.4.2. Dạng 2

Nội dung

Cạnh bên SA vuông góc đáy và bất kể đáy là hình gì, chỉ cần tìm được bán kính đường tròn ngoại tiếp của đáy là R_D , khi đó :

$$R^2 = R_D^2 + \frac{SA^2}{4}$$

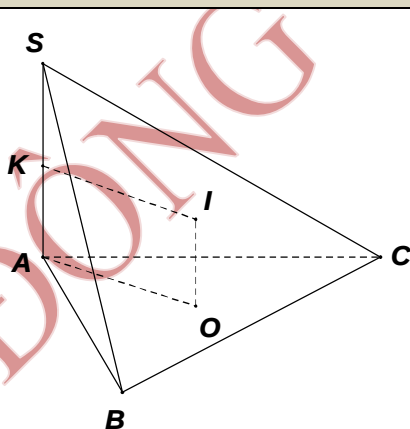
$$R_D = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} \quad (p : \text{nửa chu vi}).$$

Nếu $\triangle ABC$ vuông tại A thì: $R_D = \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2 + AS^2)$.

Đáy là hình vuông cạnh a thì $R_D = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

nếu đáy là tam giác đều cạnh a thì $R_D = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hình vẽ



5.4.3. Dạng 3

Nội dung

Chóp có các cạnh bên bằng nhau: $SA = SB = SC = SD$:

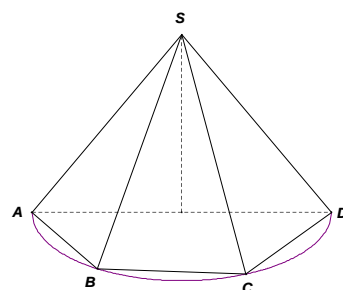
$$R = \frac{SA^2}{2SO}$$

$ABCD$ là hình vuông, hình chữ nhật, khi đó O là giao hai đường chéo.

$\triangle ABC$ vuông, khi đó O là trung điểm cạnh huyền.

$\triangle ABC$ đều, khi đó O là trọng tâm, trực tâm.

Hình vẽ



5.4.4. Dạng 4

Nội dung	Hình vẽ
Hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) vuông góc với nhau và có giao tuyến AB. Khi đó ta gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác SAB và ABC. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp: $R^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{4}$	

5.4.5. Dạng 5

Chóp $S.ABCD$ có đường cao SH , tâm đường tròn ngoại tiếp đáy là O . Khi đó ta giải phương trình:

$$(SH - x)^2 + OH^2 = x^2 + R_D^2. \text{ Với giá trị } x \text{ tìm được ta có: } R^2 = x^2 + R_D^2.$$

5.4.6. Dạng 6: Bán kính mặt cầu nội tiếp: $r = \frac{3V}{S_{tp}}$.

IV - TỔNG HỢP CÁC CÔNG THỨC ĐẶC BIỆT VỀ KHỐI TRÒN XOAY**1. Chỏm cầu**

Nội dung	Hình vẽ
$\begin{cases} S_{xq} = 2\pi Rh = \pi(r^2 + h^2) \\ V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) = \frac{\pi h}{6} (h^2 + 3r^2) \end{cases}$	

2. Hình trụ cụt

Nội dung	Hình vẽ
$\begin{cases} S_{xq} = \pi R(h_1 + h_2) \\ V = \pi R^2 \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right) \end{cases}$	

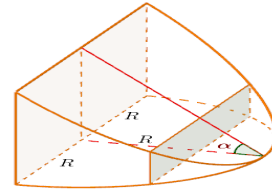
3. Hình nôm loại 1

Nội dung	Hình vẽ
$V = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha$	

4. Hình nôm loại 2

Nội dung	Hình vẽ
----------	---------

$$V = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) R^3 \tan \alpha$$



5. Parabol bậc hai-Paraboloid tròn xoay

Nội dung	Hình vẽ
$\begin{cases} S_{\text{parabol}} = \frac{4}{3}Rh; \frac{S'}{S} = \left(\sqrt{\frac{x}{h}} \right)^3 = \left(\frac{a}{R} \right)^3 \\ V = \frac{1}{2}\pi R^2 h = \frac{1}{2}V_{\text{trụ}} \end{cases}$	

6. Diện tích Elip và Thể tích khối tròn xoay sinh bởi Elip

Nội dung	Hình vẽ
$\begin{cases} S_{\text{elip}} = \pi ab \\ V_{\text{xoay quanh } 2a} = \frac{4}{3}\pi ab^2 \\ V_{\text{xoay quanh } 2b} = \frac{4}{3}\pi a^2 b \end{cases}$	

7. Diện tích hình vành khăn

Nội dung	Hình vẽ
$S = \pi(R^2 - r^2)$	

8. Thể tích hình xuyến (pháo)

Nội dung	Hình vẽ
$V = 2\pi^2 \left(\frac{R+r}{2} \right) \left(\frac{R-r}{2} \right)^2$	

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DẠNG 1: MẶT CẦU NGOẠI TIẾP, NỘI TIẾP KHỐI ĐA DIỆN

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB=1$, $AC=2$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi M , N lần lượt là hình chiếu của A trên SB , SC . Tính bán kính R của mặt cầu đi qua các điểm A , B , C , M , N .

A. $R = \sqrt{2}$.

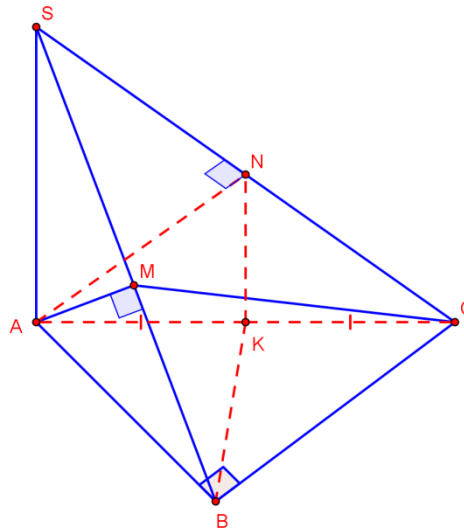
B. $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $R = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

D. $R = 1$.

Lời giải

Chọn D



*Gọi K là trung điểm của AC suy ra : $AK = AB = KC = 1$

*Lại có $\widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ABK} = 60^\circ; \widehat{KBC} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 90^\circ (1)$

*Theo giả thiết $\widehat{ANC} = 90^\circ (2)$

* Chứng minh $\widehat{AMC} = 90^\circ (3)$

Thật vậy, ta có:

$$BC \perp SA; BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$$

$$AM \perp SB \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp MC$$

Từ (1);(2);(3) suy ra các điểm A, B, C, M, N nội tiếp đường tròn tâm K , bán kính

$$KA = KB = KC = KM = KN = \frac{1}{2} AC = 1.$$

Câu 2: (Chuyên Hưng Yên Lần 3) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I cạnh $AB = 3a$, $BC = 4a$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của ID . Biết rằng SB tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45° . Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{25\pi}{2}a^2$.

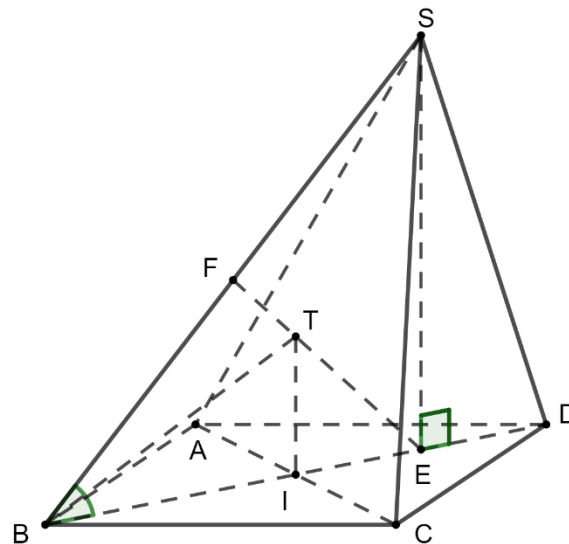
B. $\frac{125\pi}{4}a^2$.

C. $\frac{125\pi}{2}a^2$.

D. $4\pi a^2$.

Lời giải

Chọn B



Gọi E là trung điểm của ID , F là trung điểm của SB . Trong mặt phẳng (SBD) , vẽ IT song song với SE và cắt EF tại T .

Ta có $SE \perp (ABCD)$, suy ra $\widehat{SBE} = [SB; (ABCD)] = 45^\circ$. Suy ra $\triangle SBE$ vuông cân tại E . Suy ra EF là trung trực của SB . Suy ra $TS = TB$. (1)

Ta có $IT \parallel SE$, suy ra $IT \perp (ABCD)$. Suy ra IT là trục đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$. Suy ra $TA = TB = TC = TD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra T là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên $BD = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5a$, suy ra $IB = ID = \frac{5}{2}a$.

Do E là trung điểm của ID nên $IE = \frac{1}{2}ID = \frac{5}{4}a$.

$\triangle BEF$ vuông tại F có $\widehat{EBF} = 45^\circ$ nên $\triangle BEF$ vuông cân tại F .

$\triangle EIT$ vuông tại I có $\widehat{IET} = 45^\circ$ nên $\triangle EIT$ vuông cân tại I . Suy ra $IT = IE = \frac{5}{4}a$.

Do $\triangle BIT$ vuông tại I nên $TB = \sqrt{IB^2 + IT^2} = \frac{5\sqrt{5}}{4}a$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $S = 4\pi TB^2 = \frac{125\pi}{4}a^2$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC . Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Gọi G là trọng tâm tam giác SAC , R là bán kính mặt cầu có tâm G và tiếp xúc với mặt phẳng (SAB) . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $R = d[G, (SAB)]$. B. $3\sqrt{13}R = 2SH$. C. $\frac{R^2}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4\sqrt{3}}{39}$. D. $\frac{R}{a} = \sqrt{13}$.

Lời giải

Ta có $60^\circ = \widehat{SA, (ABC)} = \widehat{SA, HA} = \widehat{SAH}$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

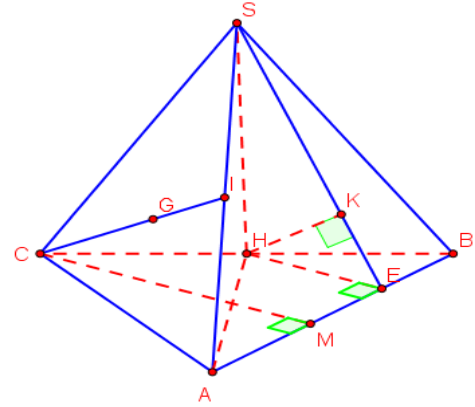
Trong tam giác vuông SHA , ta có

$$SH = AH \cdot \tan \widehat{SAH} = \frac{3a}{2}.$$

Vì mặt cầu có tâm G và tiếp xúc với (SAB) nên bán kính mặt cầu $R = d[G, (SAB)]$.

Ta có

$$d[G, (SAB)] = \frac{1}{3} d[C, (SAB)] = \frac{2}{3} d[H, (SAB)].$$



Gọi M, E lần lượt là trung điểm AB và MB .

$$\text{Suy ra } \begin{cases} CM \perp AB \\ CM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} HE \perp AB \\ HE = \frac{1}{2} CM = \frac{a\sqrt{3}}{4} \end{cases}.$$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên SE , suy ra $HK \perp SE$. (1)

$$\text{Ta có } \begin{cases} HE \perp AB \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHE) \Rightarrow AB \perp HK. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $HK \perp (SAB)$ nên $d[H, (SAB)] = HK$.

$$\text{Trong tam giác vuông } SHE, \text{ ta có } HK = \frac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{3a}{2\sqrt{13}}.$$

$$\text{Vậy } R = \frac{2}{3} HK = \frac{a}{\sqrt{13}}.$$

Chọn D

Câu 4: Cho khối chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$; đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$; $AD = 2a$; $SA = a$. Gọi E là trung điểm của AD . Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ECD$.

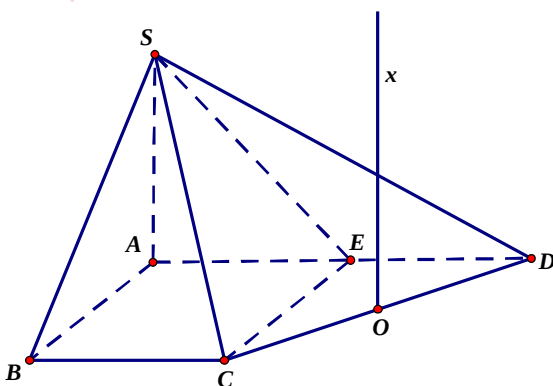
A. $R = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

B. $R = a\sqrt{7}$

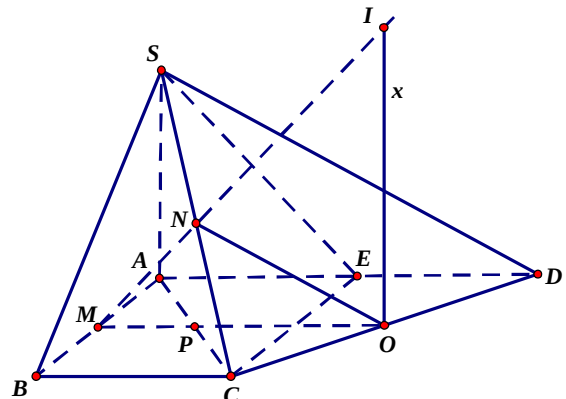
C. $R = \frac{a\sqrt{11}}{2}$

D. $R = a\sqrt{11}$

Lời giải



Gọi O là trung điểm của CD .



Kẻ tia $Ox \parallel SA$ thì $Ox \perp (ABCD)$.

Ta có: O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông CDE và $Ox \perp (ABCD)$, nên Ox là trục của đường tròn (CDE) .

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, SC .

Ta có: $SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $MC = \sqrt{MB^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ nên suy ra $SM = MC$.

Do đó tam giác SMC cân tại M , suy ra $MN \perp SC$.

Dễ thấy $(MNO) \parallel (SAD)$ và $CE \perp (SAD)$ nên suy ra $CE \perp (MNO)$ và do đó $CE \perp MN$.

Vậy nên $MN \perp (SEC)$, do đó MN là trục của đường tròn (SEC) .

Gọi I là giao điểm của MN và SO thì I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ECD$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ECD$ là $R = \sqrt{IC} = \sqrt{IO^2 + OC^2}$.

Trong đó $OC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ và $IO = 3NP = 3 \cdot \frac{SA}{2} = \frac{3a}{2}$ (P là giao điểm của MO và AC).

Vậy thì $R = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{11}}{2}$.

Chọn C

Câu 5: (-Mai-Anh-Tuấn-Thanh-Hóa-lần-1-2018-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có

$SA = SB = SC = AB = a, BC = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ và mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) .

Tính diện tích xung quanh của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\frac{12\pi a^2}{7}$.

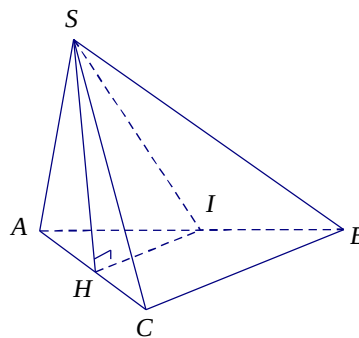
B. $\frac{4\pi a^2}{7}$.

C. $\frac{3\pi a^2}{7}$.

D. $\frac{15\pi a^2}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của $AC \Rightarrow SH \perp (ABC)$

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow HI = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

Tam giác SAB đều cạnh $a \Rightarrow SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$SH = \sqrt{SI^2 - HI^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$$

$$AC = 2AH = 2\sqrt{SA^2 - SH^2} = \frac{a\sqrt{15}}{3}$$

Gọi r_b, r_d lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác SAC, ABC

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

$$S_{\Delta SAC} = \frac{1}{2} SH.AC = \frac{a^2 \sqrt{35}}{12} \Rightarrow r_b = \frac{SA.SC.AC}{4S_{\Delta SAC}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

$$\text{Theo công thức Hê-rông: } S_{\Delta ABC} = \frac{a^2 \sqrt{6}}{6} \Rightarrow r_d = \frac{AB.AC.BC}{4S_{\Delta ABC}} = \frac{a\sqrt{15}}{6}$$

$$R = \sqrt{r_b^2 + r_d^2 - \frac{AC^2}{4}} = \frac{a\sqrt{21}}{7} \text{ Vậy: } S_{mc} = 4\pi \left(\frac{a\sqrt{21}}{7} \right)^2 = \frac{12\pi a^2}{7}$$

Câu 6: (SỞ PHÚ THỌ LẦN 2 NĂM 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có $AC = a$, $AB = a\sqrt{3}$, $\widehat{BAC} = 150^\circ$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC . Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$ bằng

A. $\frac{4\sqrt{7}\pi a^3}{3}$.

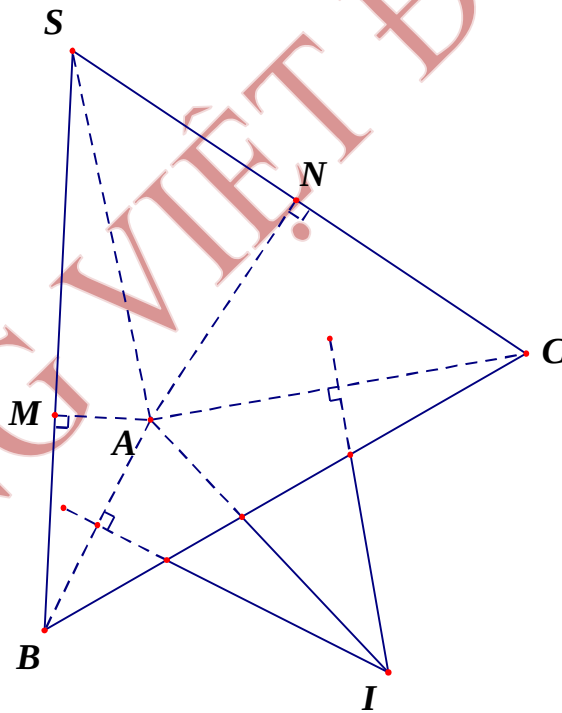
B. $\frac{28\sqrt{7}\pi a^3}{3}$.

C. $\frac{20\sqrt{5}\pi a^3}{3}$.

D. $\frac{44\sqrt{11}\pi a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B.



Trong mp (ABC) , gọi Δ và Δ' lần lượt là trung trực của các đoạn thẳng AB và AC .

Gọi I là giao điểm của Δ và Δ' .

Vì $\begin{cases} \Delta \perp AB \\ \Delta \perp SA \end{cases}$ nên $\Delta \perp (AMB)$, mà tam giác AMB vuông tại M suy ra Δ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB .

Có $I \in \Delta \Rightarrow IA = IB = IM$ (1)

Chứng minh tương tự ta được Δ' là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ANC .

Do đó $IA = IN = IC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $IA = IB = IM = IN = IC \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$ với bán kính $R = IA$.

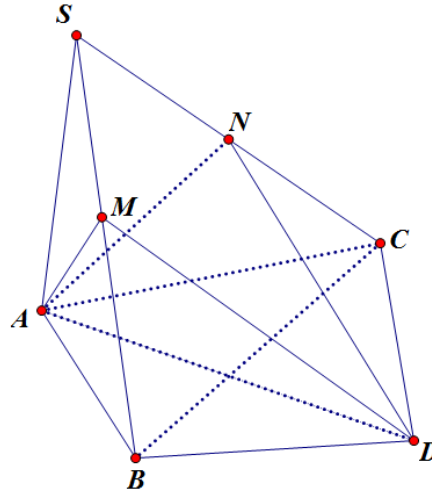
Mặt khác trong tam giác ABC , I là giao điểm của hai đường trung trực nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC

$$R = IA = \frac{BC}{2 \sin \widehat{BAC}} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}}}{2 \sin \widehat{BAC}} = \frac{\sqrt{7}}{2 \sin 150^\circ} = \sqrt{7}a.$$

Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$: $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{28\sqrt{7}\pi a^3}{3}$.

Cách 2.



Dựng AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Khi đó $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^\circ \Rightarrow AB \perp BD; AC \perp CD$.

Ta có: $\left. \begin{array}{l} AB \perp BD \\ SA \perp BD \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (SAB), AM \subset (SAB) \Rightarrow BD \perp AM$.

Mặt khác $AM \perp MB \Rightarrow AM \perp (MBD) \Rightarrow AM \perp MD$ hay $\widehat{AMD} = 90^\circ$.

Chứng minh tương tự: $\widehat{AND} = 90^\circ$.

Hình chóp $A.BCNM$ có các đỉnh cùng nhìn đoạn AD dưới một góc vuông nên khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$ có đường kính là AD .

Vì vậy, bán kính của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$ là bán kính R của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC

$$R = \frac{BC}{2 \sin \widehat{BAC}} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}}}{2 \sin \widehat{BAC}} = \frac{\sqrt{7}}{2 \sin 150^\circ} = \sqrt{7}a.$$

Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$: $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{28\sqrt{7}\pi a^3}{3}$.

Câu 7: (Hải Hậu Lần1) Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC đều cạnh bằng 8cm và một điểm S di động ngoài mặt phẳng (P) sao cho tam giác MAB luôn có diện tích bằng $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$, với M là trung điểm của SC . Gọi (S) là mặt cầu đi qua bốn đỉnh M, A, B, C . Khi thể tích hình chóp $S.ABC$ lớn nhất, tính bán kính nhỏ nhất của (S) :

A. $\frac{16\sqrt{6}}{9} \text{ cm}.$

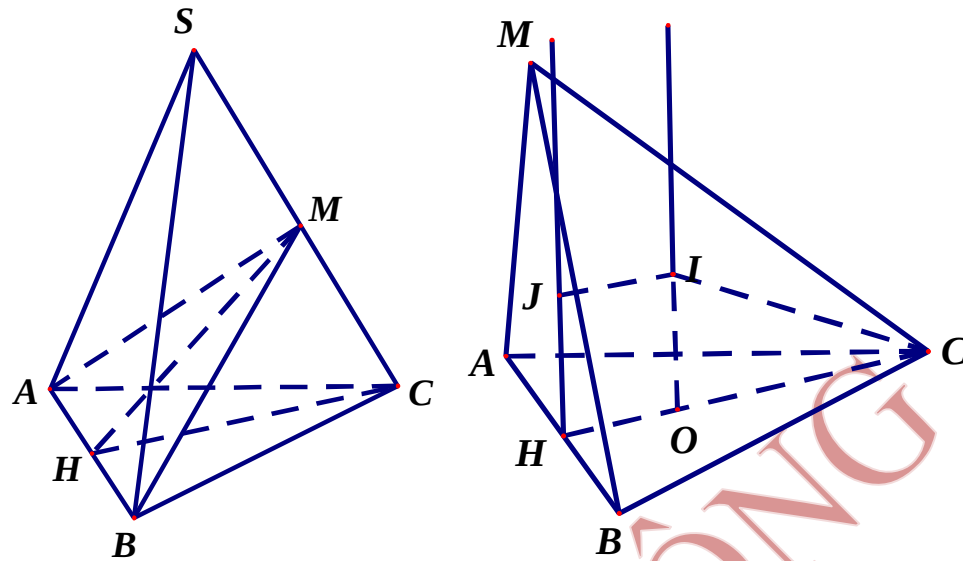
B. $\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}.$

C. $\frac{4\sqrt{15}}{3} \text{ cm}.$

D. $\frac{4\sqrt{39}}{3} \text{ cm}.$

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm cạnh AB , ta có: $CH \perp AB$.

Ta có: $d(S, (ABC)) = 2d(M, (ABC)) \Rightarrow V_{SABC} = 2V_{MABC}$.

Mà $V_{MABC} = V_{CMAB} = \frac{1}{3} S_{\Delta MAB} \cdot d(C, (MAB)) = \frac{1}{3} \cdot 16\sqrt{3} \cdot d(C, (MAB)) \leq \frac{1}{3} \cdot 16\sqrt{3} \cdot CH$.

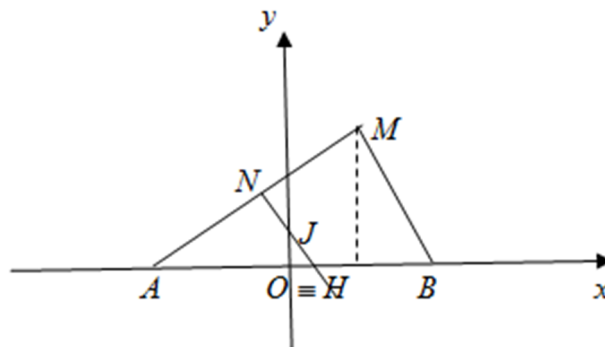
Do đó, V_{SABC} lớn nhất khi và chỉ khi $d(C, (MAB)) = CH$ hay $CH \perp (MAB)$.

Gọi J, O lần lượt là tâm hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác MAB và tam giác ABC .

Dựng hai trục của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác MAB và tam giác ABC cắt nhau tại I . Khi đó I chính là tâm mặt cầu ngoại đi qua 4 điểm A, B, C, M và bán kính mặt cầu đi qua

bốn điểm A, B, C, M là $R = \sqrt{OC^2 + OI^2} = \sqrt{\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2 + JH^2}$.

Do $S_{\Delta MAB} = 16\sqrt{3}, AB = 8 \Rightarrow d(M, AB) = 4\sqrt{3}$.



Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, ta có $H(0;0;0), A(-4;0), B(4;0), M(a;4\sqrt{3})$.

Đường trung trực của đoạn thẳng AM đi qua điểm $N\left(\frac{a-4}{2}; 2\sqrt{3}\right)$ và có một véc tơ pháp

tuyến $\overrightarrow{AM} = (a+4; 4\sqrt{3})$ nên có phương trình là

$$(a+4)\left(x-\frac{a-4}{2}\right)+4\sqrt{3}(y-2\sqrt{3})=0$$

$$\Rightarrow J\left(0;\frac{a^2+32}{8\sqrt{3}}\right) \Rightarrow JH=\frac{a^2+32}{8\sqrt{3}} \geq \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Do đó } R_{\min} = \sqrt{\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{15}}{3}.$$

Câu 8: (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên Lần 2) Trong không gian cho bốn mặt cầu có bán kính lần lượt là 2; 3; 3; 2 (đơn vị độ dài) đôi một tiếp xúc nhau. Mặt cầu nhỏ tiếp xúc ngoài với cả bốn mặt cầu nói trên có bán kính bằng

A. $\frac{7}{15}$.

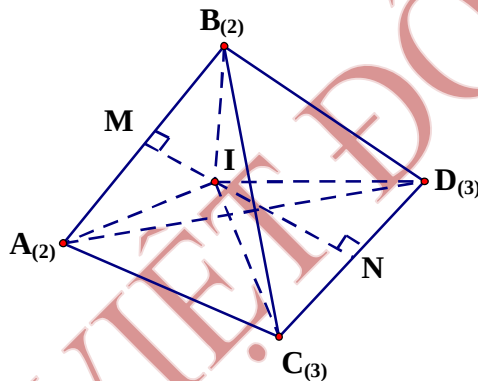
B. $\frac{3}{7}$.

C. $\frac{6}{11}$.

D. $\frac{5}{9}$.

Lời giải

Chọn C



*Gọi A, B lần lượt là tâm của hai mặt cầu có bán kính bằng 2; C, D lần lượt là tâm của hai mặt cầu có bán kính bằng 3 và I là tâm mặt cầu cần tìm với bán kính bằng x ($x > 0$).

*Mặt cầu (I) tiếp xúc ngoài với bốn mặt cầu tâm $A, B, C, D \Leftrightarrow \begin{cases} IA = IB = x+2 \\ IC = ID = x+3 \end{cases}$

* $IA = IB \Leftrightarrow I \in mp(P)$ là mặt phẳng trung trực của đoạn AB và $IC = ID \Leftrightarrow I \in mp(Q)$ là mặt phẳng trung trực của đoạn CD . Suy ra: $I \in (P) \cap (Q)$ (1).

*Tứ diện $ABCD$ có $DA = DB = CA = CB = 5$ nên nếu gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD thì MN là đường vuông góc chung của AB và $CD \Rightarrow MN \subset (P)$ và $MN \subset (Q)$. Suy ra $MN = (P) \cap (Q)$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $I \in MN$.

*Xét $\triangle AIM$ có $IM = \sqrt{IA^2 - AM^2} = \sqrt{(x+2)^2 - 4}$ và $\triangle CIN$ có

$$IN = \sqrt{IC^2 - CN^2} = \sqrt{(x+3)^2 - 9}.$$

$$\text{Ta có } MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = \sqrt{\left(\frac{AC^2 + AD^2}{2} - \frac{CD^2}{4}\right) - 4} = \sqrt{\left(\frac{5^2 + 5^2}{2} - \frac{6^2}{4}\right) - 4} = \sqrt{12}.$$

$$* \text{Mà } IM + IN = MN \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 - 4} + \sqrt{(x+3)^2 - 9} = \sqrt{12} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x} = \sqrt{12} - \sqrt{x^2 + 6x}$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x = 12 + x^2 + 6x - 2\sqrt{12(x^2 + 6x)} \Leftrightarrow \sqrt{12(x^2 + 6x)} = x + 6 \Leftrightarrow 11x^2 + 60x - 36 = 0$$

*Thử lại $x = -6(l)$; $x = \frac{6}{11}$ (nhận).

Câu 9: (GIỮA-HKII-2019-NGHĨA-HÙNG-NAM-ĐỊNH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết rằng $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$ và $\widehat{ASB} = 60^\circ$. Tính diện tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $S = \frac{13\pi a^2}{2}$.

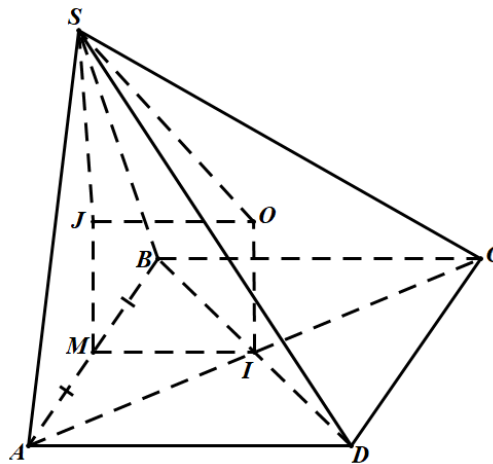
B. $S = \frac{13\pi a^2}{3}$.

C. $S = \frac{11\pi a^2}{2}$.

D. $S = \frac{11\pi a^2}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I, J là tâm đường tròn ngoại tiếp của tứ giác $ABCD$ và tam giác SAB . M là trung điểm của AB và O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Ta có: $JM \perp AB$ và $IM \perp AB$ và $mp(SAB) \perp mp(ABCD)$ nên $IM \perp JM$, ngoài ra O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp nên $OI \perp (ABCD) \Rightarrow OI \perp IM$; $OJ \perp (SAB) \Rightarrow OJ \perp JM$.

Do đó O, J, M, I đồng phẳng và tứ giác $OJMI$ là hình chữ nhật (do có 3 góc ở đỉnh vuông).

Gọi R, R_b lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB .

$$\text{Ta có: } R = SO = \sqrt{SJ^2 + OJ^2} = \sqrt{R_b^2 + IM^2} = \sqrt{R_b^2 + IA^2 - AM^2} = \sqrt{R_b^2 + IA^2 - \frac{AB^2}{4}}$$

$$\text{Áp dụng định lý Pytago: } IA^2 = \frac{BD^2}{4} = \frac{AB^2 + AD^2}{4} = \frac{a^2 + 3a^2}{4} = a^2 \Rightarrow IA = a.$$

$$\text{Áp dụng định lý sin trong tam giác } SAB: R_b = \frac{AB}{2 \sin \widehat{ASB}} = \frac{a}{2 \cdot \sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Do đó: } R = \sqrt{\frac{a^2}{3} + a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{13}{12}a^2} \Rightarrow S = 4\pi R^2 = \frac{13}{3}\pi a^2.$$

Nhận xét: Bài toán này áp dụng một bổ đề quan trọng sau:

Xét hình chóp đỉnh S , có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy, mặt phẳng đáy nội tiếp trong đường tròn bán kính R_d , bán kính mặt cầu ngoại tiếp tam giác SAB là R_b . Khi đó hình

$$\text{chóp này nội tiếp trong 1 mặt cầu có bán kính } R = \sqrt{R_d^2 + R_b^2 - \frac{AB^2}{4}}$$

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Đường thẳng $SA = a\sqrt{2}$ vuông góc với đáy ($ABCD$). Gọi M trung điểm SC , mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A và M đồng thời song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E, F . Bán kính mặt cầu đi qua năm điểm S, A, E, M, F nhận giá trị nào sau đây?

A. $a\sqrt{2}$

B. a

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{a}{2}$

Lời giải

Mặt phẳng (α) song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E, F nên $EF \parallel BD$. ΔSAC cân tại A , trung tuyến AM nên $AM \perp SC$ (1)

$$\text{Ta có } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC.$$

$$\text{Do đó } EF \perp SC \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } SC \perp (\alpha) \Rightarrow SC \perp AE \quad (*).$$

Lại

có:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE \quad (**)$$

$$\text{Từ } (*), (**) \text{ suy ra } AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SB.$$

Tương tự ta cũng có $AF \perp SD$. Do đó $\widehat{SEA} = \widehat{SMA} = \widehat{SFA} = 90^\circ$ nên 5 điểm S, A, E, M, F cùng thuộc mặt cầu tâm I là trung điểm của SA , bán kính $R = \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 11: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮK LẮK LẦN X NĂM 2019) Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi K là trung điểm của AB , M, N lần lượt là hình chiếu của K lên AD và AC . Tính theo a bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $K.CDMN$?

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

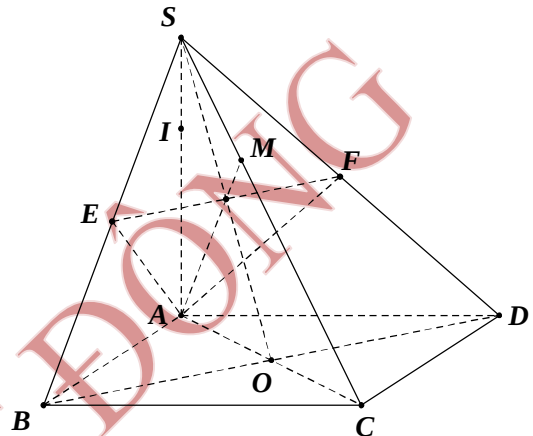
B. $\frac{3a\sqrt{3}}{8}$

C. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

D. $\frac{3a\sqrt{2}}{8}$

Lời giải

Chọn D





Ta lại có: $\begin{cases} AK \perp KC \\ AK \perp DC \text{ (do } DC \perp (KCD)) \end{cases} \Rightarrow AK \perp KC.$

Suy ra tam giác AKD vuông tại K , suy ra: $IA = ID = IK$.

Tương tự như trên ta cũng có: $IA = ID = IH$.

Vậy thì $IA = IB = IC = IK = IH$,

do đó 5 điểm A, B, C, K, H cùng nằm trên một mặt cầu (đpcm).

Bán kính R của mặt cầu cũng là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Áp dụng định lý $\cos$ ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 120^\circ} = a\sqrt{3}$.

Áp dụng định lý $\sin$ ta có: $\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{a\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = a$.

Chọn B

Câu 13: (Chuyên Bắc Giang) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, các cạnh còn lại cùng bằng a . Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A. $R = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

B. $R = \frac{a}{3}$.

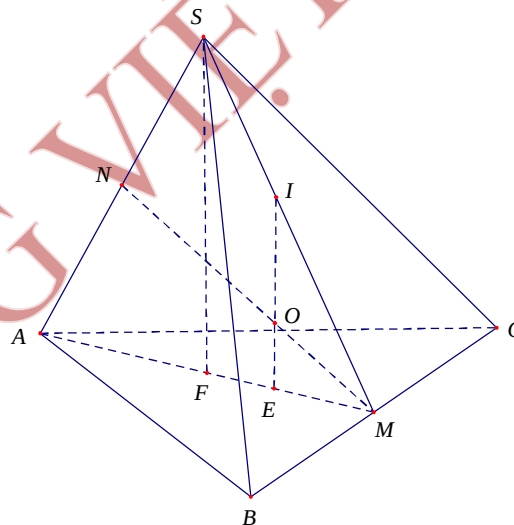
C. $R = \frac{a\sqrt{13}}{3}$.

D. $R = \frac{a\sqrt{13}}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD .

Ta có: $\triangle ABC$ và $\triangle SBC$ là các tam giác đều cạnh $a \Rightarrow AM = SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow \triangle SAM$ là tam giác đều cạnh $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi F là trung điểm của $AM \Rightarrow SF \perp AM$ (1).

Mặt khác $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow AM \perp BC$.

$\triangle SBC$ đều $\Rightarrow SM \perp BC$.

$\Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SF$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SF \perp (ABC)$.

Ta có: $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} BE \cdot SA = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{39}}{16}$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔSAB là: $BH = \frac{SA \cdot SB \cdot AB}{4 \cdot S_{\Delta SAB}} = \frac{\frac{a^3\sqrt{3}}{2}}{4 \cdot \frac{a^2\sqrt{39}}{16}} = \frac{2a}{\sqrt{13}}$.

Xét ΔCHB ta có: $CH = \sqrt{CB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{4a^2}{13}} = \frac{3a}{\sqrt{13}}$.

Vậy $R = CO = \frac{CB^2}{2 \cdot CH} = \frac{a^2}{2 \cdot \frac{3a}{\sqrt{13}}} = \frac{a\sqrt{13}}{6}$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC . Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Gọi G là trọng tâm tam giác SAC , R là bán kính mặt cầu có tâm G và tiếp xúc với mặt phẳng (SAB) . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $R = d[G, (SAB)]$ B. $3\sqrt{13}R = 2SH$ C. $\frac{R^2}{S_{\Delta ABC}} = \frac{4\sqrt{3}}{39}$ D. $\frac{R}{a} = \sqrt{3}$

Lời giải

Ta có $60^\circ = (\widehat{SA, (ABC)}) = (\widehat{SA, HA}) = \widehat{SAH}$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông SHA , ta có

$SH = AH \cdot \tan \widehat{SAH} = \frac{3a}{2}$.

Vì mặt cầu có tâm G và tiếp xúc với (SAB) nên bán kính mặt cầu $R = d[G, (SAB)]$

Ta có $d[G, (SAB)] = \frac{1}{3} d[C, (SAB)] = \frac{2}{3} d[H, (SAB)]$. Gọi M, E lần lượt là trung điểm AB, MB .

Suy ra $\begin{cases} CM \perp AB \\ CM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ và $\begin{cases} HE \perp AB \\ HE = \frac{1}{2} CM = \frac{a\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên SE , suy $HK \perp SE$ (1)

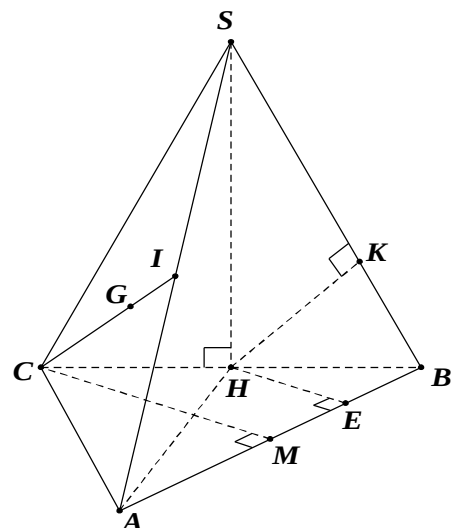
Ta có

$\begin{cases} HE \perp AB \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHE) \Rightarrow AB \perp HK$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow HK \perp (SAB), d[H, (SAB)] = HK$.

Trong tam giác vuông SHE , ta có

$HK = \frac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{3a}{2\sqrt{13}}$. Vậy



ra

$$R = \frac{2}{3} HK = \frac{a}{\sqrt{13}}.$$

Chọn D

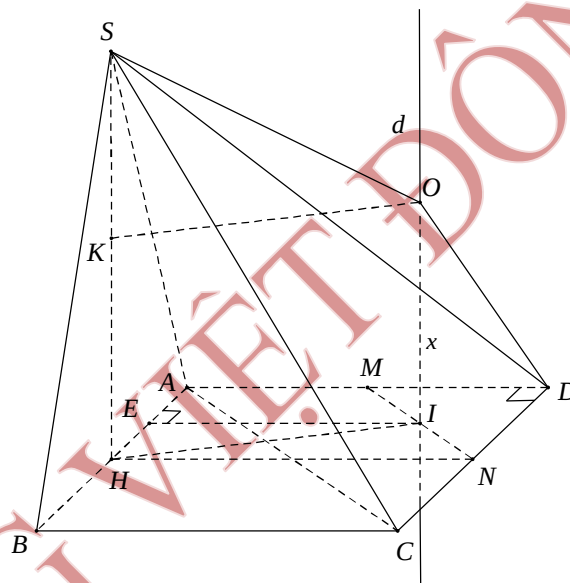
Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD, DC . Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.DMN$.

A. $R = \frac{a\sqrt{102}}{6}$.

B. $R = \frac{a\sqrt{31}}{4}$.

C. $R = \frac{a\sqrt{39}}{6}$.

D. $R = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Hướng dẫn giải**Chọn A.**

Gọi I là trung điểm của MN . Suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN .

d là đường thẳng qua I và vuông góc với mặt đáy.

E là hình chiếu của I lên AB .

O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.DMN$. K là hình chiếu của O lên SH .

Đặt $OI = x$.

Ta có $DI = \frac{1}{2} MN = \frac{a\sqrt{5}}{4}$. Suy ra $OD = \sqrt{DI^2 + OI^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{16} + x^2}$.

$$SK = SH - x = \frac{a\sqrt{3}}{2} - x; KO = HI$$

$$EI = \frac{AM + HN}{2} = \frac{3a}{2}.$$

$$HI = \sqrt{EI^2 + HE^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4} + \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{37}}{4}..$$

$$\text{Suy ra } SO = \sqrt{SK^2 + KO^2} = \sqrt{\frac{49a^2}{16} - a\sqrt{3}x + x^2}.$$

Vì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp nên:

$$SO = DO \Rightarrow \frac{49a^2}{16} - a\sqrt{3}x + x^2 = x^2 + 5a \Rightarrow x = \frac{a11}{4\sqrt{3}}.$$

$$\Rightarrow R = OD = \frac{a\sqrt{102}}{6}.$$

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{6}$. Đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = \frac{1}{2}AD = a$. Gọi E là trung điểm AD . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ECD$.

A. $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

B. $R = a\sqrt{6}$

C. $R = \frac{\sqrt{114}}{6}a$

D. $R = \frac{a\sqrt{26}}{2}$

Lời giải

Gọi H là trung điểm của CD và d là đường thẳng đi qua H và vuông góc với đáy. Gọi I và R là tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp $S.CDE$. Suy ra I thuộc d . Đặt $IH = x$. Trong mp $(ASIH)$ kẻ đường thẳng đi qua I và song song với AH cắt AS tại K .

$$\text{Ta có: } ID^2 = IH^2 + HD^2 = x^2 + \frac{a^2}{2}.$$

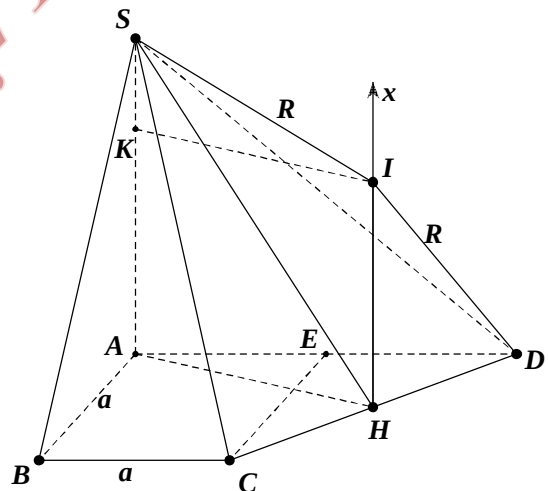
$$IS^2 = IK^2 + KS^2 = AH^2 + KS^2$$

$$= AC^2 + CH^2 + KS^2 = 2a^2 + \frac{a^2}{2} + (a\sqrt{6} - x)^2$$

Suy ra:

$$x^2 + \frac{a^2}{2} = 2a^2 + \frac{a^2}{2} + (a\sqrt{6} - x)^2 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{6}a}{3}.$$

$$\text{Vậy bán kính mặt cầu bằng } R = \frac{\sqrt{114}a}{6}.$$



Chọn C

Câu 17: Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = 3a$, $AC = 4a$. Hình chiếu H của S trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Biết $SA = 2a$, bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $R = a \cdot \frac{\sqrt{118}}{4}$.

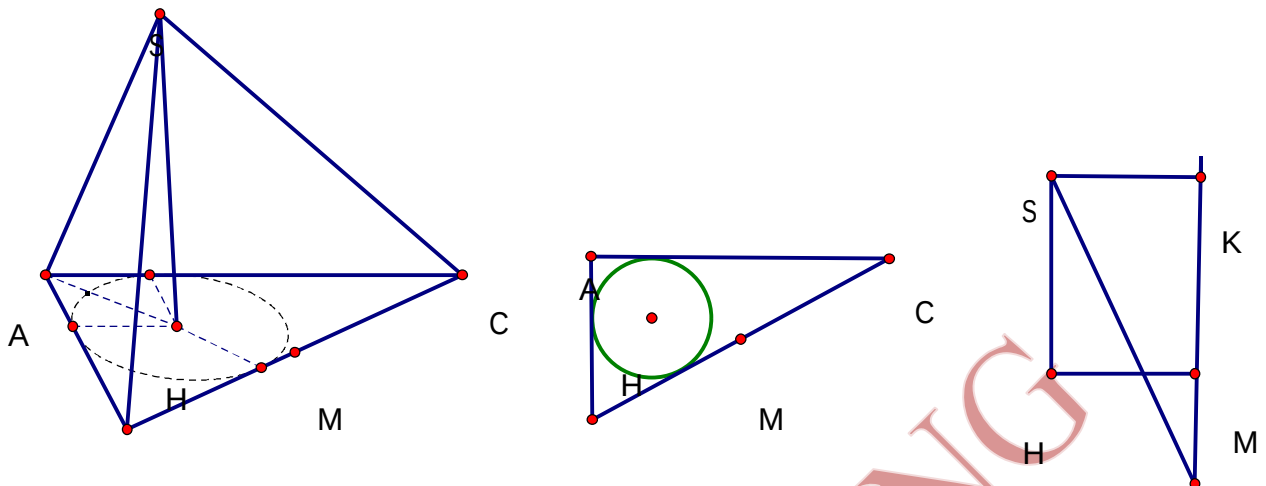
B. $R = a \cdot \frac{\sqrt{118}}{2}$.

C. $R = a \cdot \frac{\sqrt{118}}{8}$.

D. $R = a \cdot \sqrt{118}$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tính được $r = \frac{AB \cdot AC}{AB + AC + BC} = a$.

Tính được $AH = a\sqrt{2}$ và $MH = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Tam giác SAH vuông tại H suy ra $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = a\sqrt{2}$.

Gọi M là trung điểm của BC và Δ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$. Suy ra $O \in \Delta$.

Ta có:

$$OC^2 = OS^2 \Leftrightarrow OM^2 + MC^2 = SK^2 + OK^2.$$

$$\Leftrightarrow OM^2 + \frac{25a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} + (OM + a\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow OM = \frac{3\sqrt{2}}{4}a$$

$$\text{Suy ra } R = OC = \frac{\sqrt{118}}{4}a.$$

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AC = b$, $AB = c$, $\widehat{BAC} = \alpha$. Gọi B' , C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB , SC . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $ABCC'B'$ theo b, c, α .

A. $R = 2\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$.

B. $R = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}}{\sin 2\alpha}$.

C. $R = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}}{2 \sin \alpha}$.

D. $R = \frac{2\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}}{\sin \alpha}$.

Lời giải

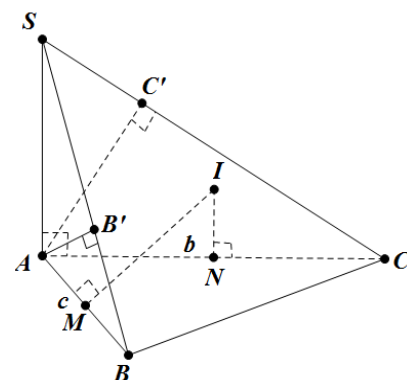
Chọn C

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC .

Tam giác ABB' vuông tại B' nên M chính là tâm đường

tròn ngoại tiếp tam giác ABB' , suy ra trục tâm đường

tròn ngoại tiếp tam giác ABB' chính là đường trung trực Δ của AB (xét trong mp (ABC)).



Tam giác ACC' vuông tại C' nên N chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACC' , suy ra trục tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACC' chính là đường trung trực

Δ_1 của AC (xét trong mp (ABC)).

Gọi $I = \Delta \cap \Delta_1$ thì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và I cách đều các điểm A, B, C, B', C' nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp $ABCB'C'$.

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp $ABCB'C'$ thì R chính là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

$$\text{Ta có } R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4 \cdot S_{\Delta ABC}} = \frac{c \cdot b \cdot BC}{4 \cdot \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha} = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha}}{2 \sin \alpha}.$$

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = a\sqrt{3}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $A\sqrt{2}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ theo a .

A. $S = 2\pi a^2$

B. $S = 8\pi a^2$

C. $S = 16\pi a^2$

D. $S = 12\pi a^2$

Lời giải

Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC)

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp SC \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow HC \perp BC$$

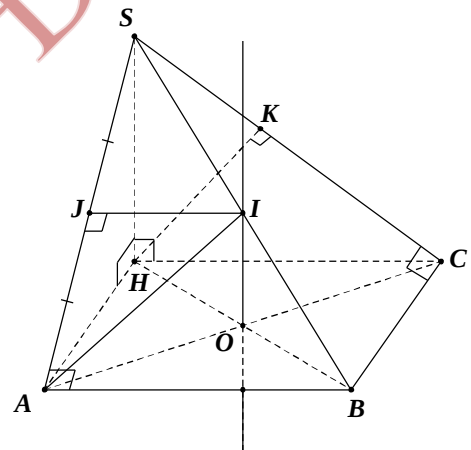
Tương tự, $AH \perp AB$

Và ΔABC vuông cân tại B nên $ABCH$ là hình vuông.

Gọi $O = AC \cap BH$, O là tâm hình vuông.

Dựng một đường thẳng d qua O vuông góc với $(ABCH)$, dựng mặt phẳng trung trực của SA qua trung điểm J cắt d tại I , I là tâm mặt cầu ngoại tiếp. Ta hoàn toàn có $IJ \perp SA \Rightarrow IJ \parallel AB \Rightarrow I$ là trung điểm

SB , hay $I = d \cap SC$.



$$\text{Bán kính mặt cầu ngoại tiếp: } r_{S,ABC} = AI = \sqrt{IJ^2 + JA^2}; \quad IJ = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Do } AH \parallel (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = d(H, (SBC)) = HK$$

$$(K \text{ là hình chiếu của } H \text{ lên } SC \text{ và } BC \perp (SHC) \Rightarrow HK \perp (SBC))$$

$$\Rightarrow HK = a\sqrt{2} \text{ tam giác } SHC \text{ vuông tại } H \Rightarrow SH = a\sqrt{6}$$

$$\text{Tam giác } SHA \text{ vuông tại } H \Rightarrow SA = 3a$$

$$JA = \frac{SA}{2} = \frac{3a}{2} \Rightarrow r_{S,ABC} = AI = a\sqrt{3} \Rightarrow S_{mc} = 4\pi r^2 = 12\pi a^2.$$

Chọn D

Câu 20: Cho khối chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B , biết $AB = 1$; $AC = \sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm BC , biết $SM \perp (ABC)$. Tổng diện tích các mặt cầu ngoại tiếp các tứ diện $SMAB$ và $SMAC$ bằng 15π . Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A. $\frac{21\pi}{4}$

B. 20π

C. $\frac{25\pi}{4}$

D. 4π

Lời giải

Để kiểm tra được $BC = 2a$ và tam giác MAB đều cạnh a . Đặt $SM = h$.

Gọi R_1, R_2 và R lần lượt là bán kính các mặt cầu ngoại tiếp của các hình $SMAB$, $SMAC$ và $S.ABC$.

Gọi r_1, r_2 và r lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp của các tam giác MAB , MAC và ABC .

Ta có: $r_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $r_2 = \frac{AC}{2 \cdot \sin 120^\circ} = 1$.

Vì $SA \perp (MAB)$, $SA \perp (MAC)$ nên dễ kiểm tra được:

$$R_1^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r_1^2 = \frac{h^2}{4} + \frac{3}{4} \text{ và}$$

$$R_2^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r_2^2 = \frac{h^2}{4} + 1.$$

Theo giả thiết tổng diện tích các mặt cầu thì: $4\pi(R_1^2 + R_2^2) = 15\pi$

Suy ra: $\frac{h^2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{h^2}{4} + 1 = \frac{15}{4}$. Từ đây tìm được $h = 2$.

Dựng trung trực của SC , cắt SM tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp của $S.ABC$.

Để kiểm tra $SI \cdot SM = SN \cdot SC$, suy ra $R = SI = \frac{SN \cdot SC}{SM} = \frac{5}{4}$.

Vậy thì diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $S = 4\pi \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25\pi}{4}$.

Chọn C

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , cạnh huyền $BC = 6$ (cm), các cạnh bên cùng tạo với đáy một góc 60° . Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $48\pi \text{ cm}^2$.

B. $12\pi \text{ cm}^2$.

C. $16\pi \text{ cm}^2$.

D. $24\pi \text{ cm}^2$.

Lời giải

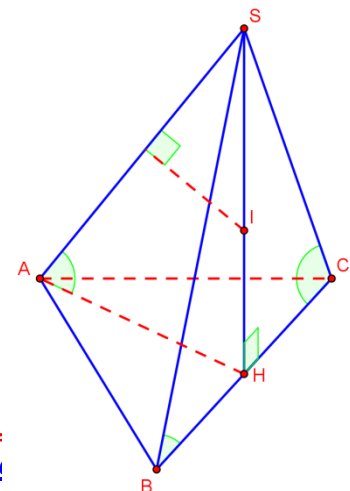
Chọn A

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC)

. Gọi O là trung điểm của BC .

Tam giác ABC vuông tại A , O là trung điểm của cạnh huyền BC , suy ra $OA = OB = OC$ (1).

Xét các tam giác $\triangle SHA$, $\triangle SHB$, $\triangle SHC$ có:



$$\begin{cases} SH \text{ chung} \\ \widehat{SHA} = \widehat{SHB} = \widehat{SHC} = 90^\circ \\ \widehat{SAH} = \widehat{SBH} = \widehat{SCH} = 60^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta SHA = \Delta SHB = \Delta SHC (g.c.g) \Rightarrow HA = HB = HC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra H trùng O . Khi đó SH là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

Trong ΔSAH dựng trung trực của SA cắt SH tại I .

Khi đó $IA = IB = IC = IS$. Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

$$\Delta SBC \text{ đều cạnh bằng } 6 \text{ (cm)} \Rightarrow SO = 3\sqrt{3} \Rightarrow SI = \frac{2}{3}.SO = \frac{2}{3}.3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là: $S = 4\pi(2\sqrt{3})^2 = 48\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$

Câu 22: Cho tứ diện $ABCD$ có ABC và ABD là các tam giác đều cạnh a và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ theo a .

A. $\frac{5}{3}\pi a^2$

B. $\frac{11}{3}\pi a^2$

C. $2\pi a^2$

D. $\frac{4}{3}\pi a^2$

Lời giải

Gọi M là Trung điểm của AB

Vì Tam giác ADB và tam giác ABC là tam giác đều $\rightarrow DM \perp AB; CM \perp AB$

Do có ABC và ABD là các tam giác đều cạnh a và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau $\Rightarrow$ Góc $\widehat{DMC} = 90^\circ$

Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp Tam giác ABC

G là tâm đường tròn ngoại tiếp Tam giác ABD

$\Rightarrow H, G$ đồng thời là trọng tâm của tam giác ABC và ABD

$$\Rightarrow \begin{cases} H \in CM; CH = \frac{2}{3}CM \\ G \in DM; DG = \frac{2}{3}DM \end{cases}$$

Kẻ Đường vuông góc với đáy (ABC) từ H và Đường vuông góc với (ABD) từ G .

Do hai đường vuông góc này đều thuộc (DMC) nên chúng cắt nhau tại O .

$\Rightarrow O$ chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện

$ABCG$ và $R = OC$.

Tam giác ABC đều

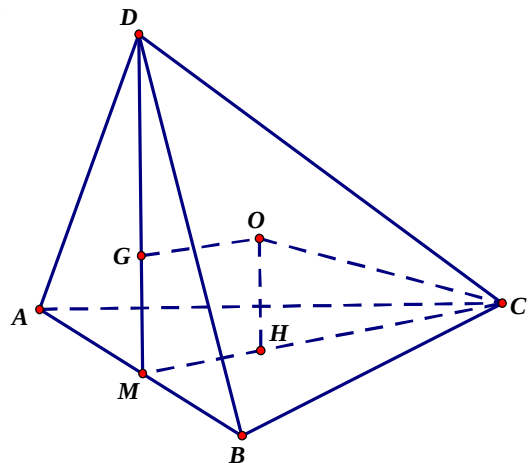
$$\rightarrow CM = CB \cdot \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow CH = \frac{\sqrt{3}}{3}a; HM = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

$$\text{CMTT ta có } GM = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

$$\text{Từ đó nhận thấy } OGMH \text{ là hình vuông} \rightarrow OH = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

Tam giác OHC vuông tại $H \rightarrow$ Áp dụng định lý Pitago ta có:

$$CM = CB \cdot \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow CH = \frac{\sqrt{3}}{3}a; HM = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$



$$OC = \sqrt{CH^2 + OH^2} = \frac{\sqrt{5}}{12}a = R \Rightarrow S = 4\pi R^2 = \frac{5}{3}\pi a^2$$

Chọn A

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=3$. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt cạnh SB, SC, SD lần lượt tại các điểm M, N, P . Thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$.

A. $V = \frac{32\pi}{3}$.

B. $V = \frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$.

C. $V = \frac{108\pi}{3}$.

D. $V = \frac{125\pi}{6}$.

Lời giải**Chọn A**

Ta có:

$$CB \perp (SAD), AM \subset (SAB) \Rightarrow AM \perp CB \quad (1)$$

$$(\alpha) \perp SC, AM \subset (\alpha) \Rightarrow AM \perp SC \quad (2)$$

$$\text{Từ } (1), (2) \Rightarrow AM \perp (SBC)$$

$$\Rightarrow AM \perp MC \Rightarrow \widehat{AMC} = 90^\circ$$

Chứng minh tương tự ta có $\widehat{APC} = 90^\circ$

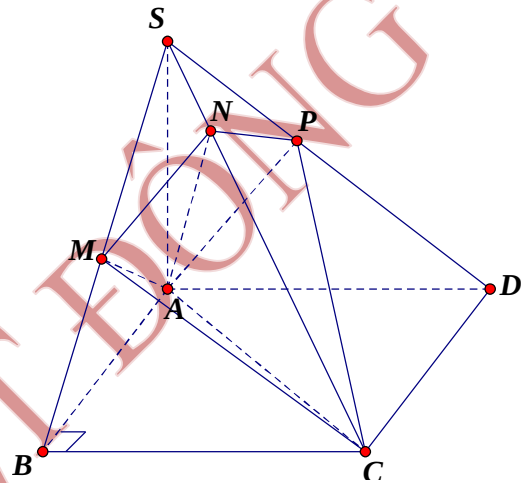
$$\text{Có } AN \perp SC \Rightarrow \widehat{ANC} = 90^\circ$$

$$\text{Ta có: } \widehat{AMC} = \widehat{APC} = \widehat{ANC} = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ khối cầu đường kính AC là khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$.

$$\text{Bán kính cầu này là } r = \frac{AC}{2} = 2.$$

$$\text{Thể tích cầu: } V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{32\pi}{3}$$



Câu 24: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2a^2$ là

A. Mặt cầu có tâm là trọng tâm của tam giác ABC và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

B. Mặt cầu có tâm là trọng tâm của tứ diện và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

C. Mặt cầu có tâm là trọng tâm của tứ diện và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

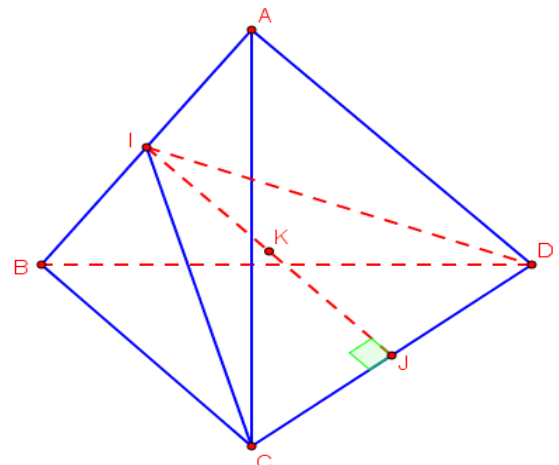
D. Đường tròn có tâm là trọng tâm tam giác ABC và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải**Chọn B**

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD

. Gọi K là trung điểm IJ . (Lúc này, K là trọng tâm tứ diện).

Áp dụng định lý đường trung tuyến trong tam giác, ta có:



$$\begin{cases} MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 2MI^2 + \frac{a^2}{2} \\ MC^2 + MD^2 = 2MJ^2 + \frac{CD^2}{2} = 2MJ^2 + \frac{a^2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2(MI^2 + MJ^2) + a^2 = 2\left(2MK^2 + \frac{IJ^2}{2}\right) + a^2$$

$$\text{Ta có: } IJ^2 = \frac{IC^2 + ID^2}{2} - \frac{CD^2}{4} = IC^2 - \frac{a^2}{4} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MK^2 + \frac{3a^2}{2}.$$

$$\text{Do đó: } MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2a^2 \Leftrightarrow 4MK^2 + \frac{3a^2}{2} = 2a^2 \Leftrightarrow MK = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn hệ thức đề bài là mặt cầu tâm K , bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Câu 25: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a, BC = \sqrt{3}a$. Cạnh bên $AA' = 2a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AB'C'C$ bằng

- A. a . B. $\sqrt{2}a$. C. $\sqrt{5}a$. D. $\sqrt{3}a$.

Lời giải

Chọn B.

Dễ thấy tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AB'C'C$ cũng là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ đứng đã cho.

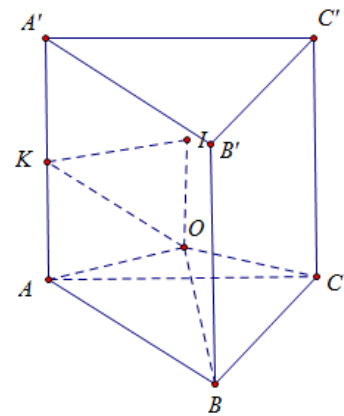
Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Đường thẳng qua O vuông góc với (ABC) cắt mặt phẳng trung trực của AA' tại I . Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

$$\text{Mặt khác } \cos \hat{A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có: } R_{ABC} = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{a\sqrt{3}}{2 \sin 120^\circ} = a \text{ do đó}$$

$$R = IA = \sqrt{OI^2 + OA^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$



Câu 26: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với mặt đáy góc 60° và điểm G là trọng tâm tam giác ABC . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $G.A'B'C'$ bằng:

- A. $\frac{85a}{108}$. B. $\frac{3a}{2}$. C. $\frac{3a}{4}$. D. $\frac{31a}{36}$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm $B'C'$, ta có

$$60^\circ = (\widehat{AB'C'}, \widehat{A'B'C'}) = \widehat{AM, A'M} = \widehat{AMA'}.$$

$$\text{Trong } \triangle AA'M, \text{ có } A'M = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$AA' = A'M \cdot \tan \widehat{AMA'} = \frac{3a}{2}.$$

Gọi G' là trọng tâm tam giác đều $A'B'C'$, suy ra G' cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'B'C'$.

Vì lăng trụ đứng nên $GG' \perp (A'B'C')$.

Do đó GG' là trục của tam giác $A'B'C'$.

Trong mặt phẳng $(GC'G')$, kẻ trung trực d của đoạn thẳng GC' cắt GG' tại I . Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $G.A'B'C'$, bán kính $R = GI$.

$$\text{Ta có } \Delta GPI \sim \Delta GG'C' \Rightarrow \frac{GP}{GI} = \frac{GG'}{GC'}$$

$$\Rightarrow R = GI = \frac{GP \cdot GC'}{GG'} = \frac{GC'^2}{2GG'} = \frac{GG'^2 + G'C'^2}{2GG'} = \frac{31a}{36}.$$

Chọn D

Câu 27: (Liên Trường Nghệ An) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = 3a\sqrt{2}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCB) bằng $2a\sqrt{3}$. Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $72\sqrt{18}\pi a^3$.

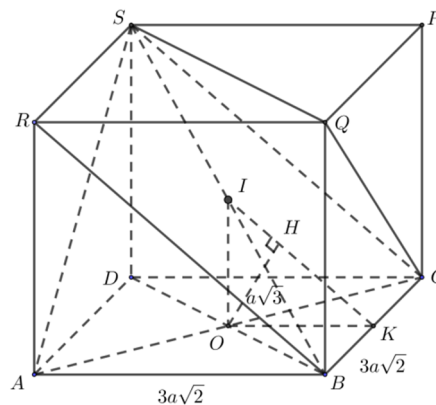
B. $18\sqrt{18}\pi a^3$.

C. $6\sqrt{18}\pi a^3$.

D. $24\sqrt{18}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D



Ta ghép hình chóp $S.ABC$ vào hình hộp đứng $SRQP.DABC$. Khi đó tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp đứng chính là tâm của hình chóp $S.ABC$.

Từ giả thiết ABC là tam giác vuông cân tại B nên đáy của hình hộp đứng là hình vuông.

$$d(A, (SBC)) = 2d(O, (SBC)) = 2a\sqrt{3} \Rightarrow OH = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } OIK \text{ có: } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OK^2} \Leftrightarrow \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{\left(\frac{3a\sqrt{2}}{2}\right)^2} \Leftrightarrow OI = 3a.$$

Suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $R = IB = \sqrt{OI^2 + OB^2}$.

$$\Leftrightarrow OI = \sqrt{9a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} 3a\sqrt{2}\right)^2} = a\sqrt{18}.$$

$$\text{Thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp } S.ABC \text{ là } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi (a\sqrt{18})^3 = 24\sqrt{18}\pi a^3.$$

Câu 28: (Chuyên Phan Bội Châu Lần2) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAB đều và tam giác SCD vuông cân tại S . Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

A. $\frac{7}{3}\pi a^2$.

B. πa^2 .

C. $\frac{8}{3}\pi a^2$.

D. $\frac{5}{3}\pi a^2$.

Lời giải.

Chọn A

Gọi M là trung điểm AB và N là trung điểm CD , G là trọng tâm tam giác SAB .

Ta có $SN = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $SG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $MN = a$

Áp dụng định lý Pitago đảo suy ra tam giác SMN vuông tại S .

Dựng từ G trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB , dựng từ N trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SCD . Hai trục đường tròn cắt nhau tại I .

Vì tứ giác $SGIN$ có 3 góc vuông suy ra tứ giác $SGIN$ là hình chữ nhật.

Suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp $S.ABCD$: $R^2 = IS^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{7}{12}a^2$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp: $S = 4\pi R^2 = \frac{7}{3}\pi a^2$.

Câu 29: (Sở Hưng Yên Lần1) Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Thể tích của khối cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$.

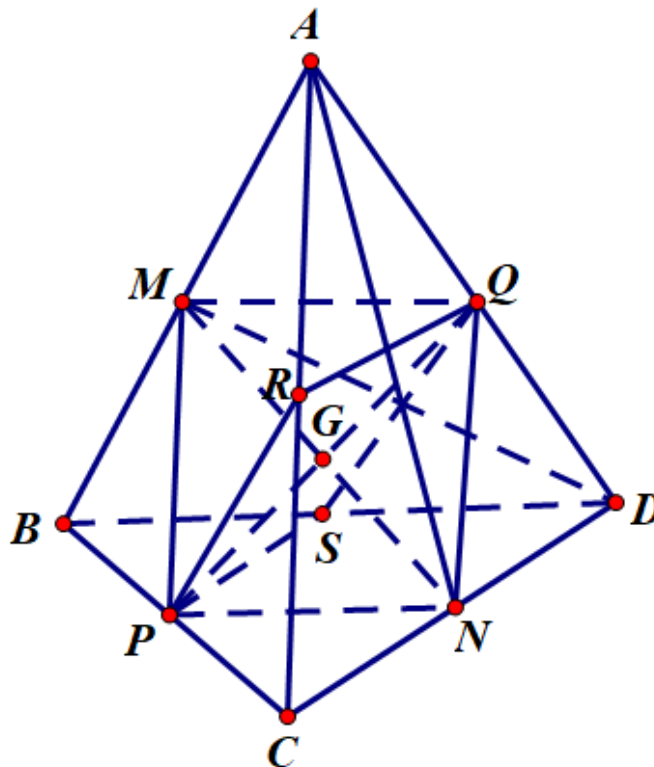
B. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{24}$.

C. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{9}$.

D. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Ta chứng minh G là tâm mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của tứ diện.

Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, BC, AD, AC, BD .
Ta có G là trung điểm của các đoạn MN, PQ, RS .

$\triangle ACD = \triangle BCD \Rightarrow AN = BN \Rightarrow \triangle NAB$ cân tại $N \Rightarrow MN \perp AB$. Tương tự ta có $MN \perp CD$.

$$\text{Ta có: } PQ = RS = MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } d(G, AB) = d(G, CD) = \frac{1}{2}MN = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có } d(G, AC) = d(G, AD) = d(G, BD) = d(G, BC) = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Vậy G là tâm mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của tứ diện $ABCD$.

$$\text{Bán kính mặt cầu } R = \frac{a\sqrt{2}}{4}. \text{ Suy ra thể tích khối cầu là } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{24}.$$

Câu 30: (THTT số 3) Gọi r, R lần lượt là bán kính mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp tứ diện đều $ABCD$.

Tính tỉ số $\frac{R}{r}$?

A. 3.

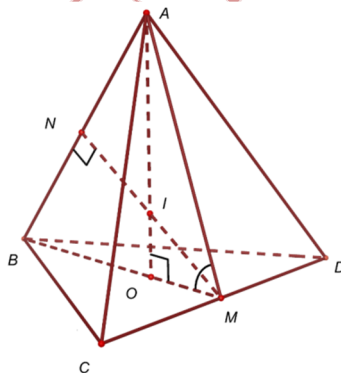
B. $\frac{4}{3}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



+ Gọi các cạnh của tứ diện là a , M, N lần lượt là trung điểm của DC, AB .

+ Gọi O là trọng tâm $\triangle BCD \Rightarrow AO \perp (BCD)$.

+ Ta gọi $NM \cap AO = I$ và $NM \perp AB$ ($\triangle AMB$ cân) $\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp $ABCD$.
 $\Rightarrow R = IA$.

+ Tâm mặt cầu nội tiếp $ABCD$ cách đều tất cả các mặt bên, dễ thấy I cũng là tâm mặt cầu nội tiếp $ABCD \Rightarrow r = IO$.

+ Tính $r = IO$:

$$\text{Ta có } BM = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}, OA = \sqrt{AM^2 - OM^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Xét $\triangle AMB$ có MN là đường phân giác nên:

$$\frac{OI}{IA} = \frac{OM}{AM} \Rightarrow \frac{OI}{OI + IA} = \frac{OM}{OM + AM} \Rightarrow OI = \frac{OA \cdot OM}{OM + AM} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{6} + \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{12}.$$

$$+ \text{Tính } R = IA = AO - OI = \frac{a\sqrt{6}}{3} - \frac{a\sqrt{6}}{12} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

$$+ \text{Vậy } \frac{R}{r} = 3.$$

***Chú ý:** + Ta có thể dùng thể tích $V_{ABCD} = 4V_{IDBC} \Rightarrow OI \Rightarrow AI$.

+ Áp dụng luôn điểm I chia AO thành 4 phần bằng nhau.

Câu 31: (Nguyễn Khuyến) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$. Đường thẳng AC' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc 30° . Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho bằng

A. $3\pi a^2$.

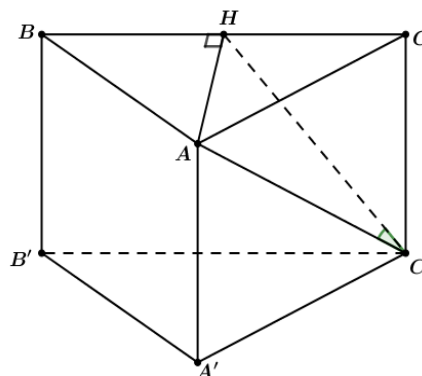
B. $6\pi a^2$.

C. $4\pi a^2$.

D. $24\pi a^2$.

Lời giải

Chọn B



Trong tam giác ABC , hạ đường cao AH thì $AH \perp (BB'C'C)$.

Khi đó $\widehat{(AC', (BB'C'C))} = \widehat{(AC', HC')} = \widehat{ACH} = 30^\circ$.

$$\text{Ta có: } AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a$$

$$AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Rightarrow AC' = \frac{AH}{\sin 30^\circ} = a\sqrt{3} \Rightarrow CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = a\sqrt{2}$$

Gọi O_1, O_2 lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$.

Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là trung điểm I của O_1O_2 và bán kính mặt

$$\text{cầu đó là } R = \frac{BC'}{2} = \frac{\sqrt{BC^2 + CC'^2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Diện tích mặt cầu cần tính là $S = 4\pi R^2 = 6\pi a^2$.

Câu 32: (Chuyên-Thái-Nguyên-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3) Cho khối nón có độ lớn góc ở đỉnh là $\frac{\pi}{3}$. Một khối cầu (S_1) nội tiếp trong khối nón. Gọi S_2 là khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của nón và với S_1 ; S_3 là khối tiếp xúc với tất cả các đường sinh của nón với $S_1, \dots, S_n$ là khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của nón và với S_{n-1} . Gọi $V_1, V_2, V_3, \dots$,

V_{n-1}, V_n lần lượt là thể tích của khối cầu $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{n-1}, S_n$ và V là thể tích của khối nón.

Tính giá trị của biểu thức $T = \lim \frac{V_1 + V_2 + \dots + V_n}{V}$.

A. $\frac{3}{5}$.

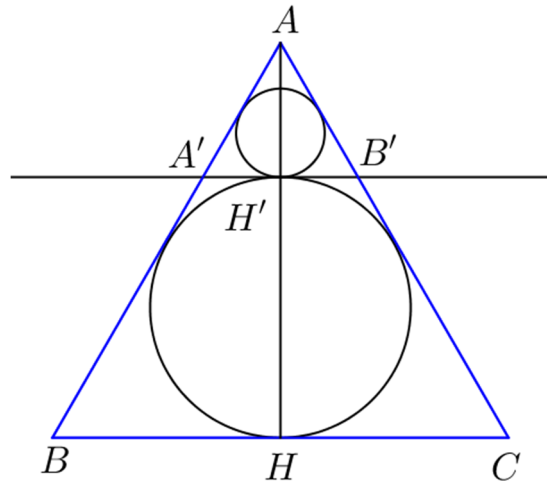
B. $\frac{6}{13}$.

C. $\frac{7}{9}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Thiết diện qua trục của hình nón là một tam giác đều cạnh l .

Do đó bán kính đường tròn nội tiếp tam giác cũng chính là bán kính mặt cầu nội tiếp chóp là

$$r_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{6}.$$

Áp dụng định lí Ta-lét ta được $\frac{AA'}{AB} = \frac{AH'}{AH} = \frac{AH - HH'}{AH} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2} - \frac{l\sqrt{3}}{3}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow AA' = \frac{l}{3}.$

Tương tự ta tìm được $r_2 = \frac{l}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{l\sqrt{3}}{18} = \frac{r_1}{3}, r_3 = \frac{r_1}{3^2}, r_4 = \frac{r_1}{3^3}, \dots, r_n = \frac{r_1}{3^{n-1}}.$

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi r_1^3, V_2 = \frac{4}{3} \pi r_2^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{r_1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3^3} V_1, V_3 = \frac{1}{(3^3)^2} V_1, \dots, V_n = \frac{1}{(3^3)^{n-1}} V_1.$$

Khi đó $T = \lim \frac{V_1 + V_2 + \dots + V_n}{V} = \lim \frac{V_1 \left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{(3^3)^2} + \dots + \frac{1}{(3^3)^{n-1}}\right)}{V} = \lim \frac{V_1 \cdot S}{V}.$

Đặt $S = 1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{(3^3)^2} + \dots + \frac{1}{(3^3)^{n-1}}.$

Đây là tổng của CSN lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{3^3} < 1 \Rightarrow \lim S = \frac{1}{1 - \frac{1}{3^3}} = \frac{27}{26}$

$$\Rightarrow V_1 + V_2 + \dots + V_n = \frac{27}{26} \cdot V_1 = \frac{27}{26} \cdot \frac{4}{3} \pi \left(\frac{l\sqrt{3}}{6}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{52} \pi l^3$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi l^3}{24} \Rightarrow T = \frac{\frac{\sqrt{3}}{52}\pi l^3}{\frac{\sqrt{3}\pi l^3}{24}} = \frac{6}{13}.$$

DẠNG 2: CỰC TRỊ VỀ KHỐI CẦU VÀ MẶT TRÒN XOAY

Câu 33: (Hùng Vương Bình Phước) Cho tam giác ABC đều cạnh a , đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi S là điểm thay đổi trên đường thẳng d , H là trực tâm tam giác SBC . Biết rằng khi điểm S thay đổi trên đường thẳng d thì điểm H nằm trên đường tròn (C) . Trong số các mặt cầu chứa đường tròn (C) , bán kính mặt cầu nhỏ nhất là

A. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

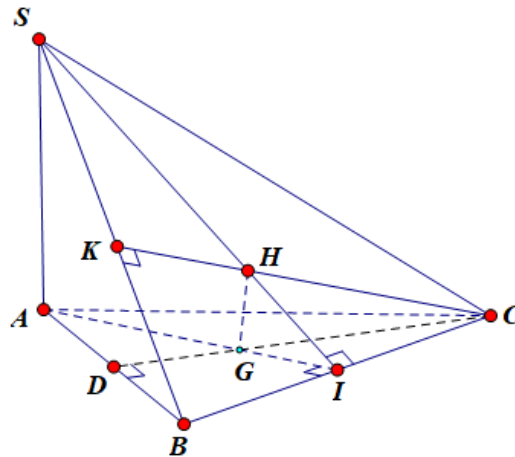
B. a .

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi G là trực tâm của tam giác ABC .

Ta có $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp GH$ (1)

$DC \perp (SAB) \Rightarrow DC \perp SB$

$\left. \begin{array}{l} SB \perp KC \\ SB \perp CD \end{array} \right\} \Rightarrow SB \perp (CDK) \Rightarrow SB \perp GH$ (2)

(1), (2) suy ra $GH \perp (SBC) \Rightarrow \widehat{GHI} = 90^\circ \Rightarrow H$ thuộc mặt cầu đường kính GI và thuộc mặt phẳng cố định (SAI) nên H thuộc đường tròn (C) là giao của mặt cầu đường kính GI và mặt phẳng (SAI) . Dễ nhận thấy trong các mặt cầu chứa (C) , mặt cầu đường kính GI là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất, suy ra H nằm trên đường tròn đường kính GI nằm trong (SAI) .

$$\Rightarrow R_{\min} = \frac{GI}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{12}.$$

Câu 34: Cho một mặt cầu bán kính bằng 1. Xét các hình chóp tam giác đều ngoại tiếp mặt cầu trên. Hỏi thể tích nhỏ nhất của chúng là bao nhiêu?

A. $\min V = 8\sqrt{3}$.

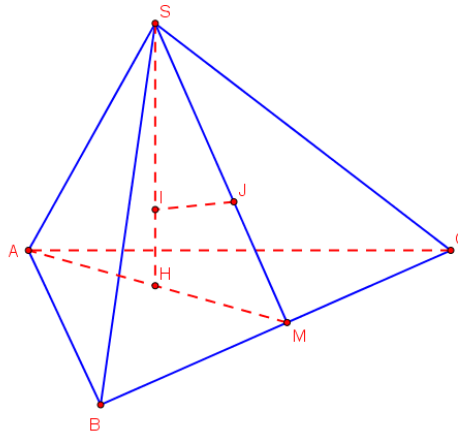
B. $\min V = 4\sqrt{3}$.

C. $\min V = 9\sqrt{3}$.

D. $\min V = 16\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi cạnh đáy của hình chóp là a

Ta có $\triangle SIJ \sim \triangle SMH$

$$\Rightarrow \frac{SI}{SM} = \frac{IJ}{MH} \Rightarrow MH(SH - IH) = IJ\sqrt{SH^2 - HM^2}$$

$$\Rightarrow MH^2(SH - 1)^2 = SH^2 - HM^2 \Rightarrow (a^2 - 12)SH^2 - 2a^2SH = 0$$

$$\Rightarrow SH = \frac{2a^2}{a^2 - 12} (a^2 \neq 12)$$

$$S = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SH = \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{2a^4}{a^2 - 12} = \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{1}{\frac{1}{a^2} - \frac{12}{a^4}}. \text{ Ta có } \frac{1}{a^2} - \frac{12}{a^4} \leq \frac{1}{48} \Rightarrow S \geq 8\sqrt{3}$$

Câu 35: (Chuyên Vinh Lần 3) Trong không gian $Oxyz$, lấy điểm C trên tia Oz sao cho $OC = 1$. Trên hai tia Ox, Oy lần lượt lấy hai điểm A, B thay đổi sao cho $OA + OB = OC$. Tìm giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$?

A. $\frac{\sqrt{6}}{4}..$

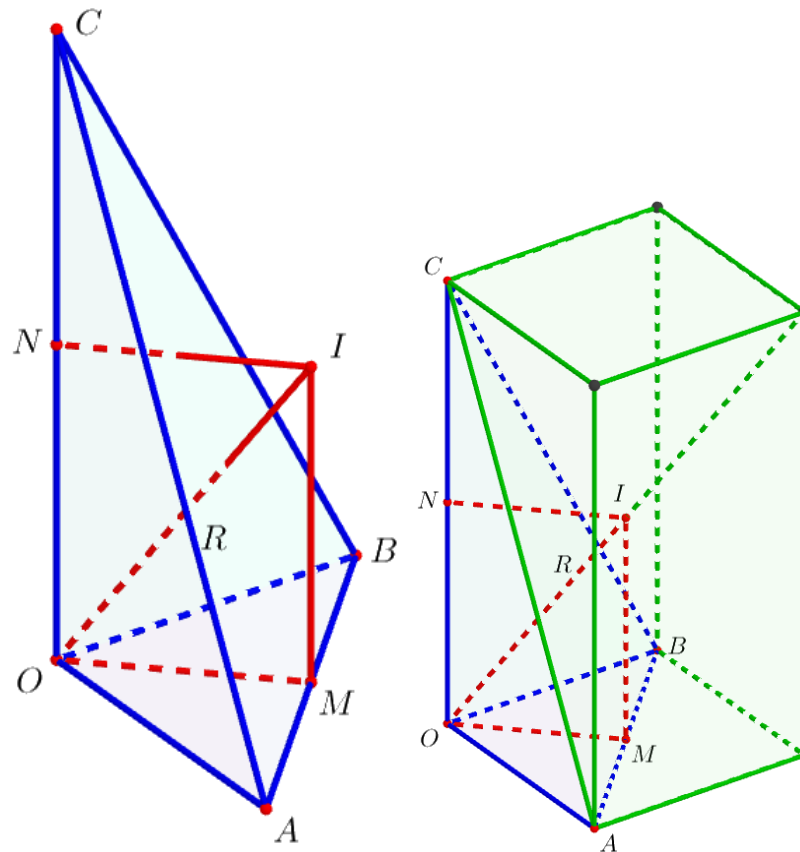
B. $\sqrt{6}..$

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}..$

D. $\frac{\sqrt{6}}{2}..$

Lời giải.

Chọn A



Bốn điểm O, A, B, C tạo thành 1 tam diện vuông.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$ là $R = \frac{\sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2}}{2}$.

Đặt $OA = a; OB = b, a, b > 0$. Ta có $a + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - a$.

$$\begin{aligned} \text{Vậy } R &= \frac{\sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 1^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + (1-a)^2 + 1^2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2\left(\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)}}{2} \geq \frac{\sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } R_{\min} = \frac{\sqrt{6}}{4}, \text{ tại } a = b = \frac{1}{2}.$$

Câu 36: (Sở Hải Dương) Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và cắt một mặt cầu tâm O bán kính R tạo thành hai đường tròn có cùng bán kính. Xét hình nón có đỉnh trùng với tâm của một trong hai đường tròn và đáy trùng với đường tròn còn lại. Tính khoảng cách giữa (P) và (Q) để diện tích xung quanh hình nón đó là lớn nhất.

A. R .

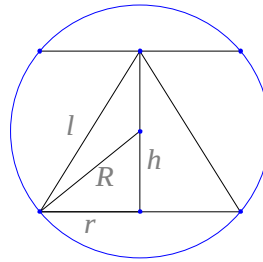
B. $R\sqrt{2}$.

C. $2R\sqrt{3}$.

D. $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Ta có $r = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}$, $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{R^2 + \frac{3h^2}{4}}$.

$$S_{xq} = \pi r l = \pi \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}} \sqrt{R^2 + \frac{3h^2}{4}} = \pi \sqrt{-\frac{3}{16}h^4 + \frac{R^2}{2}h^2 + R^4}.$$

Xét $f(h) = -\frac{3}{16}h^4 + \frac{R^2}{2}h^2 + R^4$ ($0 < h < 2R$).

Ta có $f'(h) = -\frac{3}{4}h^3 + R^2h$, $f'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Bảng biến thiên:

h	0	$\frac{2R\sqrt{3}}{3}$	$2R$
$f'(h)$		0	
$f(h)$			

Khi đó $f(h)$ đạt giá trị lớn nhất tại $h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$. Do đó S_{xq} đạt giá trị lớn nhất khi $h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Câu 37: (THPT Đặng Thúc Hứa) Cho ba tia Ox , Oy , Oz đôi một vuông góc với nhau. Gọi C là điểm cố định trên Oz , đặt $OC = 1$, các điểm A , B thay đổi trên Ox , Oy sao cho $OA + OB = OC$. Tìm giá trị bé nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

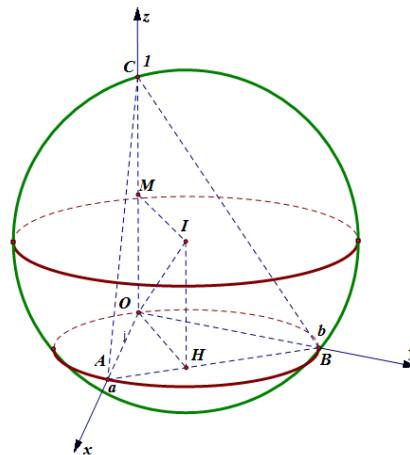
B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

C. $\sqrt{6}$.

D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Đặt $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a, b > 0$. Vì $OA + OB = OC \Leftrightarrow a + b = 1$.

Gọi $(I; R)$ là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ và H là hình chiếu của I lên mặt phẳng Oxy . Khi đó, H cách đều ba đỉnh O, A, B nên nó là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle OAB$.

Áp dụng định lý hàm số Sin cho OAB , có.

$$\begin{cases} OH = \frac{AB}{2 \sin \widehat{AOB}} = \frac{AB}{2 \sin 90^\circ} = \frac{AB}{2} \\ AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Gọi M là trung điểm của SC . Vì $IO = IC$ nên $\triangle IOC$ cân tại I .

$\Rightarrow IM \perp OC \Rightarrow IMO H$ là hình chữ nhật.

$$\text{Do đó } R = \sqrt{IM^2 + OM^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{a^2 + b^2}{4}} \quad (\text{Do } OH = IM).$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(a^2 + b^2)} \stackrel{BCS}{\geq} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{(a+b)^2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

$$\text{Vậy } \min R = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Câu 38: (THPT-Chuyên-Sơn-La-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hai mặt cầu (S_1) và (S_2) đồng tâm I , có bán kính lần lượt là $R_1 = 2$ và $R_2 = \sqrt{10}$. Xét tứ diện $ABCD$ có hai đỉnh A, B nằm trên (S_1) và hai đỉnh C, D nằm trên (S_2) . Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $ABCD$ bằng

A. $3\sqrt{2}$.

B. $7\sqrt{2}$.

C. $4\sqrt{2}$.

D. $6\sqrt{2}$.

Lời giải

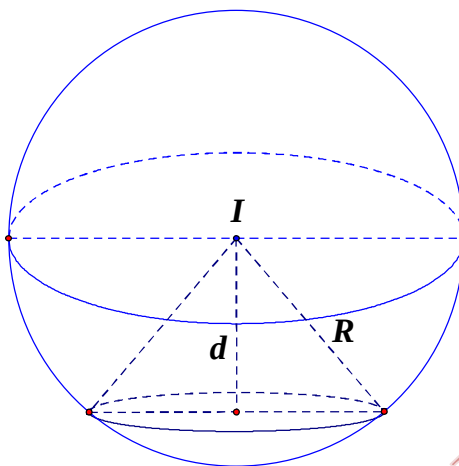
Chọn D


$$\begin{cases} \frac{\sqrt{\frac{10-x^2}{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4-y^2}}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{6} \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \\ \frac{xy}{\sqrt{2}} = 9 - \sqrt{2}xy \end{cases}$$

D. $d = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi r là bán kính khối nón.

Áp dụng định lý Pitago ta có:

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - d^2} = \sqrt{12 - d^2}$$

Thể tích khối nón:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (12 - d^2) d = \frac{1}{3} \pi (12d - d^3).$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(d) = 12d - d^3$ trên khoảng $(0; 2\sqrt{3})$.

$$f'(d) = 12 - 3d^2$$

$$f'(d) = 0 \Leftrightarrow 12 - 3d^2 = 0 \Leftrightarrow d = 2 \text{ (vì } 0 < d < 2\sqrt{3})$$

Bảng biến thiên

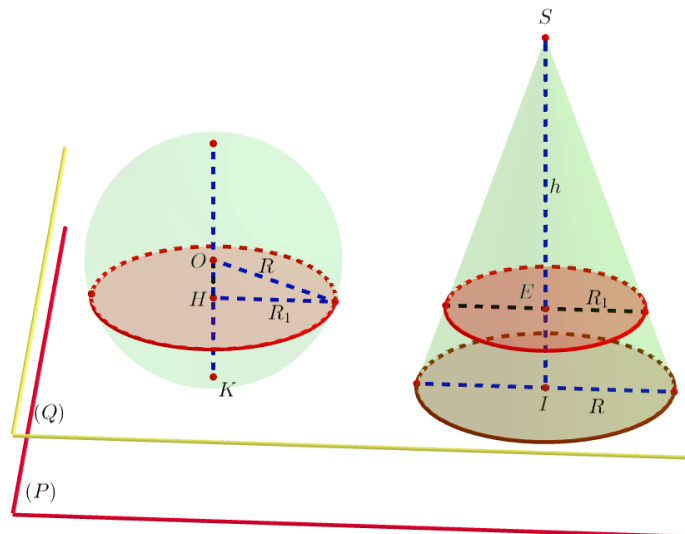
d	0	2	$2\sqrt{3}$
$f'(d)$	+	0	-
$f(d)$	0	16	0

Ta suy ra $\max_{(0; 2\sqrt{3})} f(d) = f(2) = 16$.

Vậy thể tích lớn nhất của khối nón là $V = \frac{16\pi}{3}$ khi $d = 2$.

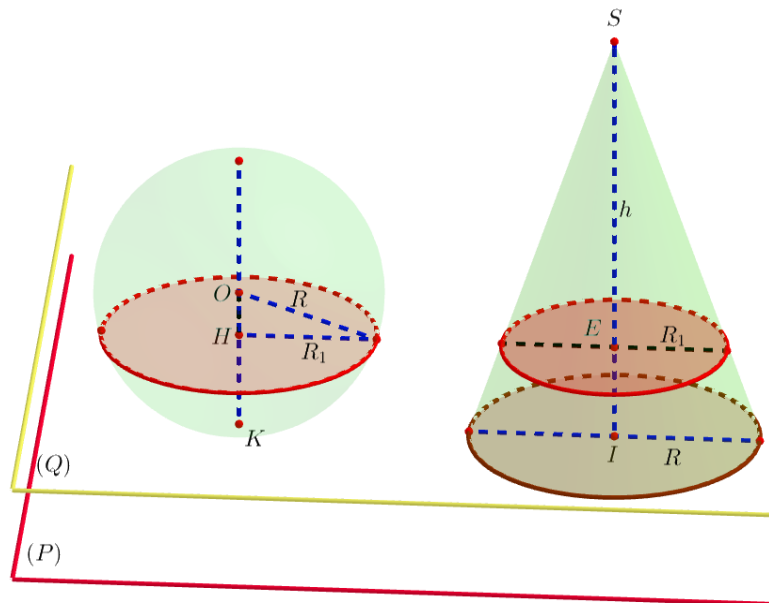
Câu 40: (Liên Trường Nghệ An) Cho hình cầu tâm O bán kính $R = 5$, tiếp xúc với mặt phẳng (P) . Một hình nón tròn xoay có đáy nằm trên (P) , có chiều cao $h = 15$, có bán kính đáy bằng R . Hình cầu và hình nón nằm về một phía đối với mặt phẳng (P) . Người ta cắt hai hình đó bởi mặt phẳng (Q) song song với (P) và thu được hai thiết diện có tổng diện tích là S . Gọi x là

khoảng cách giữa (P) và (Q) , $(0 < x \leq 5)$. Biết rằng S đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{a}{b}$ (phân số $\frac{a}{b}$ tối giản). Tính giá trị $T = a + b$.

A. $T = 17$.B. $T = 19$.C. $T = 18$.D. $T = 23$.

Lời giải

Chọn B



Nhận thấy khi ta cắt hình cầu và hình nón bởi mặt phẳng (Q) song song với (P) thì hai thiết diện đều là hình tròn.

Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính, còn H, E lần lượt là tâm của hai hình tròn thiết diện đó.

Gọi K là tiếp điểm của mặt cầu với (P) , còn I là tâm mặt đáy của hình nón.

Theo giả thiết $HK = EI = x$, $0 < x \leq R$ nên H nằm giữa O và K , còn E nằm giữa S và I .

Ta có: $R_1^2 = R^2 - OH^2 = R^2 - (5 - x)^2 = 10x - x^2$.

$$\frac{R_2}{R} = \frac{SE}{SI} = \frac{15 - x}{15} \Rightarrow R_2 = \frac{15 - x}{3}.$$

Do đó:

$$S = \pi R_1^2 + \pi R_2^2 = \pi(10x - x^2) + \pi\left(\frac{15-x}{3}\right)^2 = \frac{\pi}{9}(-8x^2 + 60x + 225) = \frac{\pi}{9}(-8x^2 + 60x + 225).$$

$$S = \frac{75\pi}{2} - \frac{8\pi}{9}\left(x - \frac{15}{4}\right)^2 \leq \frac{75\pi}{2}. \text{ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } x = \frac{15}{4}.$$

$$S \text{ đạt giá trị lớn nhất khi } x = \frac{a}{b} = \frac{15}{4}. \text{ Vậy } T = a + b = 19.$$

Câu 41: Khi cắt mặt cầu $S(O, R)$ bởi một mặt kính, ta được hai nửa mặt cầu và hình tròn lớn của mặt kính đó gọi là mặt đáy của mỗi nửa mặt cầu. Một hình trụ gọi là nội tiếp nửa mặt cầu $S(O, R)$ nếu một đáy của hình trụ nằm trong đáy của nửa mặt cầu, còn đường tròn đáy kia là giao tuyến của hình trụ với nửa mặt cầu. Biết $R=1$, tính bán kính đáy r và chiều cao h của hình trụ nội tiếp nửa mặt cầu $S(O, R)$ để khối trụ có thể tích lớn nhất.

A. $r = \frac{\sqrt{3}}{2}, h = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **B.** $r = \frac{\sqrt{6}}{2}, h = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $r = \frac{\sqrt{6}}{3}, h = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $r = \frac{\sqrt{3}}{3}, h = \frac{\sqrt{6}}{3}$

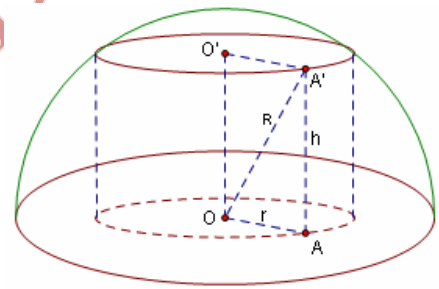
Lời giải

Chọn C

Hình trụ nội tiếp nửa mặt cầu, nên theo giả thiết đường tròn đáy trên có tâm O' có hình chiếu của O xuống mặt đáy (O'). Suy ra hình trụ và nửa mặt cầu cùng chung trục đối xứng và tâm của đáy dưới hình trụ trùng với tâm O của nửa mặt cầu. Ta có: $h^2 + r^2 = R^2$
 $(0 < h \leq R=1) \Rightarrow r^2 = 1 - h^2$

Thể tích khối trụ là: $V = \pi r^2 h = \pi(1 - h^2)h = f(h)$

$$\Rightarrow f'(h) = \pi(1 - 3h^2) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

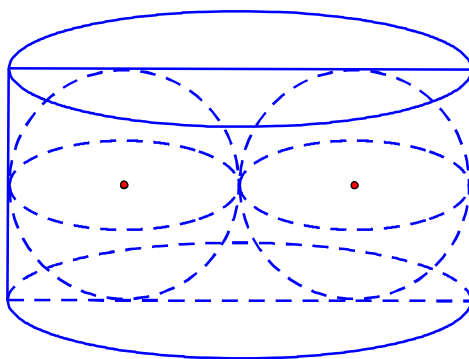


h	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1
$f'(h)$	+	0	-
$f(h)$	0	$\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$	0

Vậy: $\max_{(0;1]} V = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ (đvtt) khi $r = \frac{\sqrt{6}}{3}$ và $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$

DẠNG 3: TỔNG HỢP VỀ MẶT TRÒN XOAY

Câu 42: (Chuyên Vinh Lần 3) Người ta xếp hai quả cầu có cùng bán kính r vào một chiếc hộp hình trụ sao cho các quả cầu đều tiếp xúc với hai đáy, đồng thời hai quả cầu tiếp xúc với nhau và mỗi quả cầu đều tiếp xúc với đường sinh của hình trụ (tham khảo hình vẽ). Biết thể tích khối trụ là 120 cm^3 , thể tích của mỗi khối cầu bằng

A. 10 cm^3 .B. 20 cm^3 .C. 30 cm^3 .D. 40 cm^3 .

Lời giải

Chọn B

Chiều cao của hình trụ là $2r$.

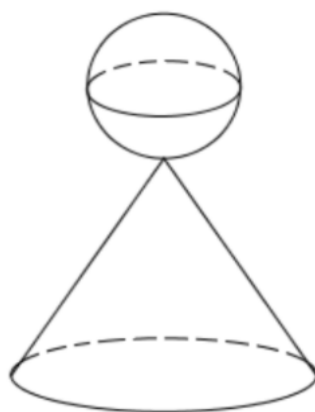
Đường kính của hình trụ là $4r$. Suy ra bán kính của hình trụ là $2r$.

Thể tích khối trụ là $\pi (2r)^2 \cdot 2r = 8\pi r^3$. Theo bài ra có

$$8\pi r^3 = 120 \text{ cm}^3 \Leftrightarrow \pi r^3 = 15 \text{ cm}^3 \Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = 20.$$

Vậy thể tích của mỗi khối cầu là 20 cm^3 .

Câu 43: (Chuyên-Thái-Nguyên-lân-1-2018-2019-Thi-tháng-3) Một khối pha lê gồm một hình cầu (H_1) bán kính R và một hình nón (H_2) có bán kính đáy và đường sinh lần lượt là r, l thỏa mãn $r = \frac{1}{2}l$ và $l = \frac{3}{2}R$ xếp chồng lên nhau (hình vẽ). Biết tổng diện tích mặt cầu (H_1) và diện tích toàn phần của hình nón (H_2) là 91 cm^2 . Tính diện tích của mặt cầu (H_1) .

A. $\frac{104}{5} \text{ cm}^2$.B. 16 cm^2 .C. 64 cm^2 .D. $\frac{26}{5} \text{ cm}^2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có
$$\begin{cases} r = \frac{1}{2}l \\ l = \frac{3}{2}R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}R = \frac{3}{4}R \\ l = \frac{3}{2}R \end{cases}.$$

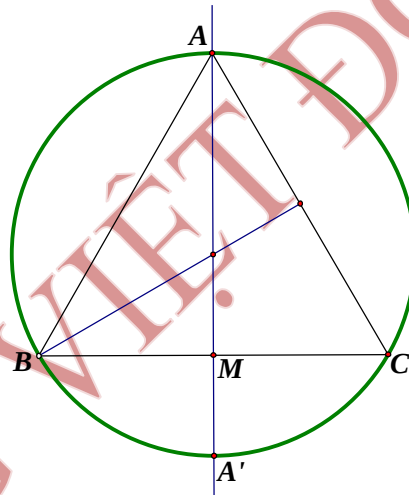
Diện tích toàn phần của hình nón là $S_1 = \pi rl + \pi r^2 = \pi \left(\frac{3}{4}R\right) \cdot \frac{3}{2}R + \pi \left(\frac{3}{4}R\right)^2 = \pi \frac{27}{16}R^2$.

Diện tích mặt cầu là $S_2 = 4\pi R^2$.

Theo bài ra ta có: $S_1 + S_2 = 91 \Leftrightarrow \pi \frac{27}{16}R^2 + 4\pi R^2 = 91 \Leftrightarrow \pi R^2 = 16$.

Vậy diện tích mặt cầu là: $S_2 = 4\pi R^2 = 4 \cdot 16 = 64 (cm^2)$

Câu 44: (Hậu Lộc Thanh Hóa) Cho tam giác đều ABC có đỉnh $A(5;5)$ nội tiếp đường tròn tâm I đường kính AA' , M là trung điểm BC . Khi quay tam giác ABM cùng với nửa hình tròn đường kính AA' xung quanh đường thẳng AM (như hình vẽ minh họa), ta được khối nón và khối cầu có thể tích lần lượt là V_1 và V_2 .



Tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{9}{32}$.

B. $\frac{9}{4}$.

C. $\frac{27}{32}$.

D. $\frac{4}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi độ dài cạnh của tam giác ABC là a .

Khi đó khối nón tạo thành có bán kính đáy là: $r = BM = \frac{a}{2}$; chiều cao $h = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Thể tích khối nón là $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{24}$

Khối cầu tạo thành có bán kính là $R = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Thể tích khối cầu là: $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{4\pi a^3 \sqrt{3}}{27}$

$$\text{Suy ra: } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{24} : \frac{4\pi a^3 \sqrt{3}}{27} = \frac{9}{32}.$$

Câu 45: (CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3) Cho (S) là một mặt cầu có đường kính $AB = 10$. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By với mặt cầu (S) sao cho $Ax \perp By$. Gọi M là điểm di động trên Ax , N là điểm di động trên By sao cho MN luôn tiếp xúc với mặt cầu. Tính giá trị của tích $AM \cdot BN$?

A. $AM \cdot BN = 50$.

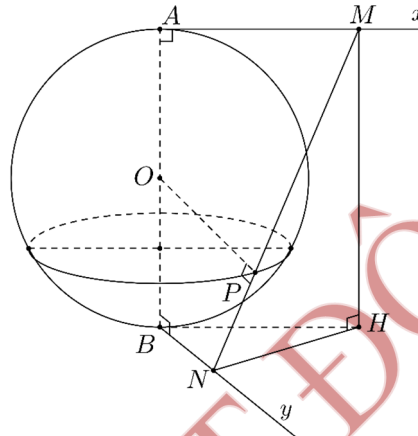
B. $AM \cdot BN = 10$.

C. $AM \cdot BN = 100$.

D. $AM \cdot BN = 20$.

Lời giải

Chọn A



Dựng hình chữ nhật $AMHB$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} AB \perp BH \\ AB \perp BN \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BHN) \Rightarrow MH \perp (BHN).$$

$$\text{Do } Ax \perp By \Rightarrow BH \perp BN.$$

$$\text{Giả sử } MN \text{ tiếp xúc với mặt cầu } (S) \text{ tại } P \Rightarrow \begin{cases} MA = MP \\ NB = NP \end{cases}.$$

Trong tam giác MHN vuông tại H có:

$$MN^2 = MH^2 + HN^2$$

$$\Leftrightarrow (MP + PN)^2 = 100 + BH^2 + BN^2$$

$$\Leftrightarrow (MA + NB)^2 = 100 + AM^2 + BN^2$$

$$\Leftrightarrow MA \cdot NB = 50.$$

Câu 46: (KSCL-Lần-2-2019-THPT-Nguyễn-Đức-Cảnh-Thái-Bình) Cho hai mặt cầu (S_1) có tâm I_1 , bán kính $R_1 = 1$, (S_2) có tâm I_2 bán kính $R_2 = 5$. Lần lượt lấy hai điểm M_1, M_2 thuộc hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$. Gọi K là trung điểm $M_1 M_2$. Khi M_1, M_2 di chuyển trên $(S_1), (S_2)$ thì K quét miền không gian là một khối tròn xoay có thể tích bằng?

A. $\frac{55\pi}{3}$.

B. $\frac{68\pi}{3}$.

C. $\frac{76\pi}{3}$.

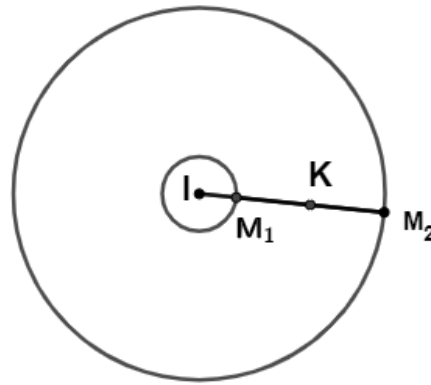
D. $\frac{82\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta xét trường hợp đặc biệt là $I_1 \equiv I_2 \equiv I$.

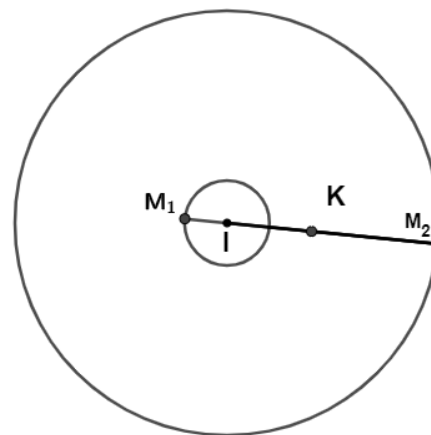
Trường hợp 1: Hai vector $\overrightarrow{IM_1}, \overrightarrow{IM_2}$ cùng hướng.



Khi đó IK sẽ đạt giá trị lớn nhất và

$$IK_{\max} = IM_1 + M_1K = IM_1 + \frac{M_1M_2}{2} = IM_1 + \frac{IM_2 - IM_1}{2} = 1 + \frac{5-1}{2} = 3.$$

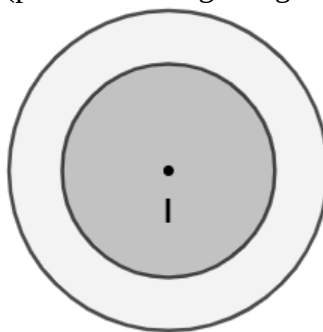
Trường hợp 2: Hai vector $\overrightarrow{IM_1}, \overrightarrow{IM_2}$ ngược hướng.



Khi đó IK sẽ đạt giá trị nhỏ nhất và

$$IK_{\min} = IM_2 - M_2K = IM_2 - \frac{M_1M_2}{2} = IM_2 - \frac{IM_2 + IM_1}{2} = 5 - \frac{5+1}{2} = 2.$$

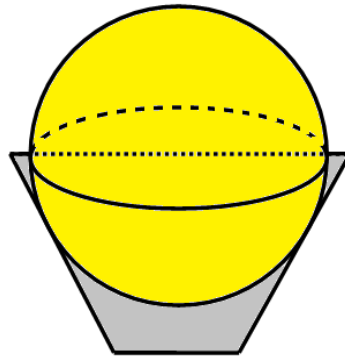
Tập hợp các điểm K là phần không gian nằm trong khối cầu bán kính 3 và ngoài khối cầu bán kính 2, tính cả bề mặt hai khối cầu (phần màu trắng trong hình vẽ).



Do đó thể tích khối tròn xoay cần tìm là $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{76\pi}{3}.$

Câu 47: (Hoàng Hoa Thám Hưng Yên) Một cái thùng đựng đầy nước được tạo thành từ việc cắt mặt xung quanh của một hình nón bởi một mặt phẳng vuông góc với trục của hình nón. Miệng thùng là đường tròn có bán kính bằng ba lần bán kính mặt đáy của thùng. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng $\frac{3}{2}$ chiều cao của thùng nước và đo được thể tích nước tràn ra

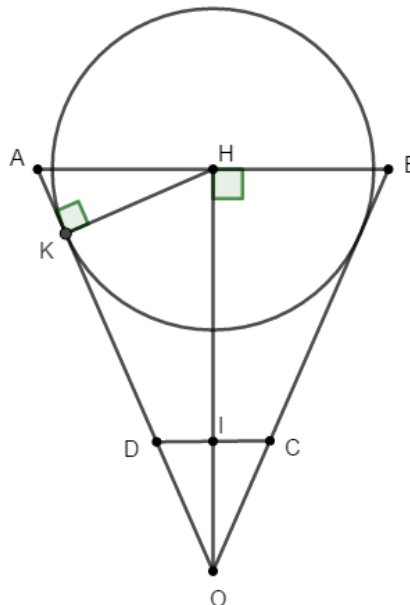
ngoài là $54\sqrt{3}\pi$ (dm³). Biết rằng khối cầu tiếp xúc với mặt trong của thùng và đứng một nửa của khối cầu đã chìm trong nước (hình vẽ). Thể tích nước còn lại trong thùng có giá trị nào sau đây?



- A. $\frac{46}{5}\sqrt{3}\pi$ (dm³). B. $18\sqrt{3}\pi$ (dm³). C. $\frac{46}{3}\sqrt{3}\pi$ (dm³). D. 18π (dm³).

Lời giải

Chọn C



Gọi R là bán kính của khối cầu. Khi đó thể tích nước tràn ra ngoài là thể tích của một nửa khối cầu nên $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = 54\sqrt{3}\pi \Leftrightarrow R = 3\sqrt{3}$.

Do đó chiều cao của thùng nước là $h = \frac{2}{3} \cdot 2R = 4\sqrt{3}$.

Cắt thùng nước bởi thiết diện qua trục ta được hình thang cân ABCD với $AB = 3CD$. Gọi O là giao điểm của AD và BC thì tam giác OAB cân tại O.

Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB và I là giao điểm của OH và CD $\rightarrow I$ là trung điểm của DC nên $DI = \frac{1}{3}AH$.

Ta có $\frac{OI}{OH} = \frac{DI}{AH} = \frac{1}{3} \rightarrow OH = \frac{3}{2}HI = 6\sqrt{3}$

Gọi K là hình chiếu của H trên OA thì $HK = R = 3\sqrt{3}$

Tam giác OHA vuông tại H có đường cao HK nên

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HO^2} + \frac{1}{AH^2} \rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{HK^2} - \frac{1}{HO^2} = \frac{1}{36} \rightarrow AH = 6 \rightarrow DI = 2$$

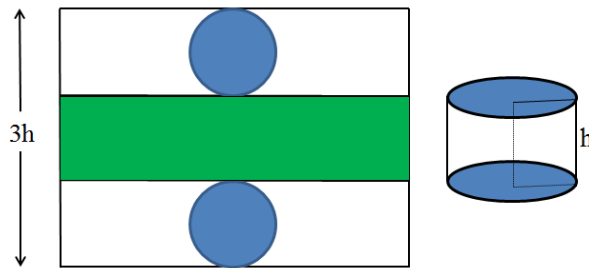
Thể tích thùng đầy nước là $\frac{h\pi(AH^2 + DI^2 + AH \cdot DI)}{3} = \frac{4\sqrt{3}\pi(6^2 + 2^2 + 6 \cdot 2)}{3} = \frac{208\sqrt{3}\pi}{3}$

Do đó thể tích nước còn lại là $\frac{208\sqrt{3}\pi}{3} - 54\sqrt{3}\pi = \frac{46\sqrt{3}\pi}{3} (dm^3)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

ỨNG DỤNG THỰC TẾ

Câu 1: (Ba Đình Lần 2) Từ một tấm thép phẳng hình chữ nhật, người ta muốn làm một chiếc thùng đựng dầu hình trụ bằng cách cắt ra hai hình tròn bằng nhau và một hình chữ nhật (phần tô đậm) sau đó hàn kín lại, như hình vẽ dưới đây.



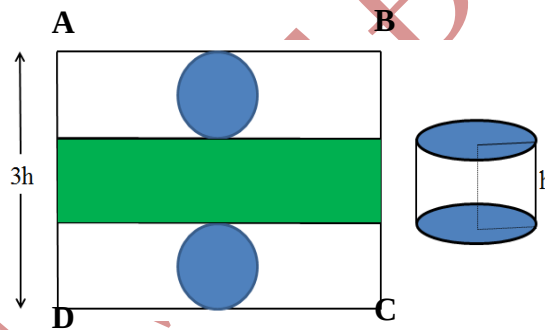
Hai hình tròn làm hai mặt đáy, hình chữ nhật làm thành mặt xung quanh của thùng đựng dầu (vừa đủ). Biết thùng đựng dầu có thể tích bằng 50,24 lít (các mối ghép nối khi gò hàn chiếm diện tích không đáng kể. Lấy $\pi = 3,14$). Tính diện tích của tấm thép hình chữ nhật ban đầu?

- A. 1,8062 m². B. 2,2012 m². C. 1,5072 m². D. 1,2064 m².

Lời giải

Chọn C

Gọi tấm thép hình chữ nhật ban đầu là $ABCD$ (Hình vẽ dưới), r là bán kính của hình tròn đáy.



Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là: $S = AB \cdot AD$.

Ta có $3h = 4r + h \Leftrightarrow h = 2r$.

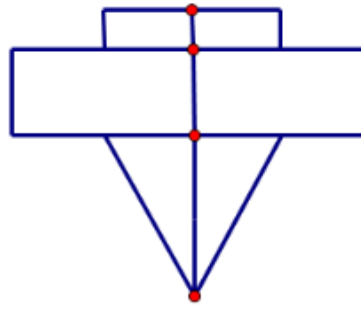
Thể tích của khối trụ $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot r^2 \cdot 2r = 6,28r^3$.

Theo bài ra $V = 50,24 \Leftrightarrow 6,28r^3 = 50,24 \Leftrightarrow r^3 = 8 \Leftrightarrow r = 2$.

Do $r = 2 \text{ dm} = 0,2 \text{ m} \Rightarrow AD = 3h = 6r = 1,2 \text{ m}$; $AB = 2\pi \cdot r = 1,256 \text{ m}$.

Vậy $S = 1,2 \cdot 1,256 = 1,5072 (\text{m}^2)$.

Câu 2: (Trung Tâm Thanh Trường Nghệ An Lần 2) Một con xoay được thiết kế gồm hai khối trụ (T_1), (T_2) chồng lên khối nón (N) (Tham khảo mặt cắt ngang qua trục như hình vẽ). Khối trụ (T_1) có bán kính đáy $r(\text{cm})$, chiều cao $h_1(\text{cm})$. Khối trụ (T_2) có bán kính đáy $2r(\text{cm})$, chiều cao $h_2 = 2h_1(\text{cm})$. Khối nón (N) có bán kính đáy $r(\text{cm})$, chiều cao $h_n = 4h_1(\text{cm})$. Biết rằng thể tích toàn bộ con xoay bằng $31(\text{cm}^3)$. Thể tích khối nón (N) bằng

A. $5(\text{cm}^3)$.B. $3(\text{cm}^3)$.C. $4(\text{cm}^3)$.D. $6(\text{cm}^3)$.

Lời giải

Chọn C

Theo bài ta có $h_n = 4h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{1}{4}h_n; h_2 = 2h_1 = \frac{1}{2}h_n$.

Thể tích toàn bộ con xoay là

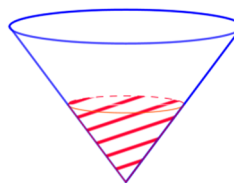
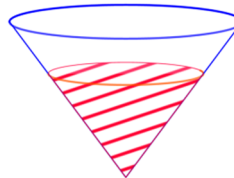
$$V = V_{(T_1)} + V_{(T_2)} + V_{(N)} = \pi \cdot r^2 \cdot h_1 + \pi \cdot (2r)^2 \cdot h_2 + \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h_n$$

$$\Leftrightarrow 31 = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{1}{4}h_n + \pi \cdot 4r^2 \cdot \frac{1}{2}h_n + \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h_n$$

$$\Leftrightarrow 31 = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h_n \right) + 6 \left(\frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h_n \right) + \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h_n \Leftrightarrow 31 = \frac{31}{4} \left(\frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h_n \right) \Leftrightarrow \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h_n = 4$$

Vậy thể tích khối nón (N) là: $V_{(N)} = 4(\text{cm}^3)$.

Câu 3: (Đặng Thành Nam Đề 5) Hai hình nón bằng nhau có chiều cao bằng 2 dm, được đặt như hình vẽ bên (mỗi hình đều đặt thẳng đứng với đỉnh nằm phía dưới). Lúc đầu, hình nón trên chứa đầy nước và hình nón dưới không chứa nước. Sau đó, nước được chảy xuống hình nón dưới thông qua lỗ trống ở đỉnh của hình nón trên. Hãy tính chiều cao của nước trong hình nón dưới tại thời điểm khi mà chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm.

A. $\sqrt[3]{7}$.B. $\frac{1}{3}$.C. $\sqrt[3]{5}$.D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi bán kính đáy của hình nón là r .

Khi đó thể tích nước trong khối nón phía trên lúc ban đầu là: $\frac{\pi r^2 \cdot 2}{3}$

Thể tích nước trong khối nón phía trên sau khi chảy xuống nón dưới tại thời điểm khi mà chiều

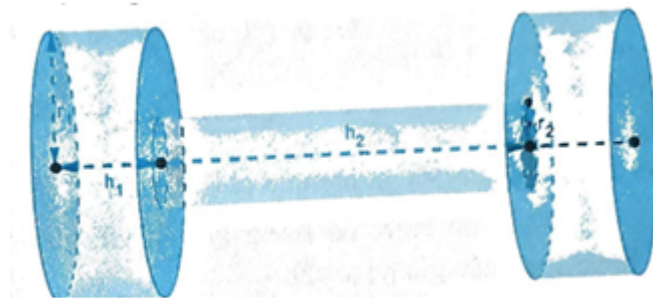
cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm là: $\frac{\pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot 1}{3} = \frac{\pi r^2}{12}$

Thể tích nước trong nón phía dưới sau khi nón trên chảy xuống là: $\frac{2\pi r^2}{3} - \frac{\pi r^2}{12} = \frac{7\pi r^2}{12}$.

Gọi chiều cao nước trong nón dưới là h , bán kính đáy nước trong nón dưới là r' , khi đó: $\frac{h}{2} = \frac{r'}{r} \Leftrightarrow r' = \frac{rh}{2}$.

Thể tích nước trong nón phía dưới là: $\frac{\pi (r')^2 h}{3} = \frac{7\pi r^2}{12} \Leftrightarrow \frac{\pi \left(\frac{rh}{2}\right)^2 \cdot h}{3} = \frac{7\pi r^2}{12} \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{7}$.

Câu 4: (THTT lần 5) Một quả tạ tập tay gồm ba khối trụ (H_1) , (H_2) , (H_3) gắn liền nhau lần lượt có bán kính và chiều cao tương ứng là r_1, h_1 , r_2, h_2 , r_3, h_3 thỏa mãn $r_1 = r_3$, $h_1 = h_3$; $r_2 = \frac{1}{3}r_1$ (xem hình vẽ). Biết thể tích của toàn bộ quả tạ bằng 60π và chiều dài quả tạ bằng 9. Thể tích khối trụ (H_2) bằng?



(H_1)

A. $\pi \frac{16(9-2h_1)}{4h_1+9}$ B. $\pi \frac{36(9-2h_1)}{4h_1+9}$ C. $\pi \frac{60(9-2h_1)}{4h_1+9}$ D. $\pi \frac{46(9-2h_1)}{4h_1+9}$

Lời giải

Chọn C

Chiều dài quả tạ là $l = h_1 + h_2 + h_3 = 2h_1 + h_2 = 9 \Rightarrow h_2 = 9 - 2h_1$

Thể tích quả tạ là $V = V_{(H_1)} + V_{(H_2)} + V_{(H_3)} = \pi r_1 h_1 + \pi r_2 h_2 + \pi r_3 h_3 = 2\pi r_1 h_1 + \pi r_2 h_2 = 60\pi$

$\Leftrightarrow 2r_1 h_1 + r_2 h_2 = 60 \Leftrightarrow 6r_2 h_1 + r_2 (9 - 2h_1) = 60 \Leftrightarrow r_2 (9 + 4h_1) = 60 \Leftrightarrow r_2 = \frac{60}{9 + 4h_1}$

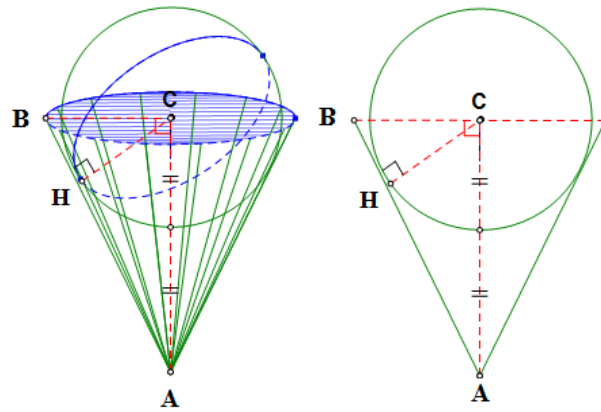
Thể tích $V_{(H_2)} = \pi r_2 h_2 = \pi \frac{60}{9 + 4h_1} (9 - 2h_1) = \pi \frac{60(9 - 2h_1)}{9 + 4h_1}$.

Câu 5: (Chuyên Thái Nguyên) Một bình đựng nước dạng hình nón (không có đáy) đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $18\pi \text{ dm}^3$. Biết khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa khối cầu chìm trong nước. Tính thể tích nước còn lại trong bình.

A. $27\pi \text{ dm}^3$ B. $6\pi \text{ dm}^3$ C. $9\pi \text{ dm}^3$ D. $24\pi \text{ dm}^3$.

Lời giải

Chọn B



Vì đúng một nửa khối cầu chìm trong nước nên thể tích khối cầu gấp 2 lần thể tích nước tràn ra ngoài.

Gọi bán kính khối cầu là R , lúc đó: $\frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi \Leftrightarrow R^3 = 27$.

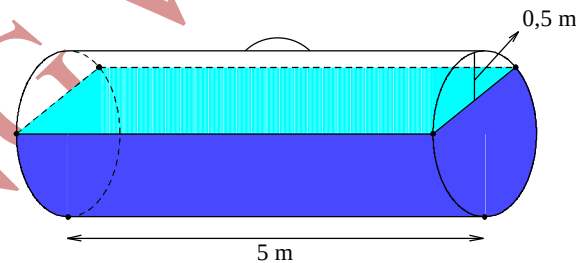
Xét tam giác ABC có AC là chiều cao bình nước nên $AC = 2R$ (Vì khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước)

Trong tam giác ABC có: $\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CA^2} + \frac{1}{CB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{R^2} = \frac{1}{4R^2} + \frac{1}{CB^2} \Leftrightarrow CB^2 = \frac{4R^2}{3}$.

Thể tích khối nón: $V_n = \frac{1}{3}\pi \cdot CB^2 \cdot AC = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{4R^2}{3} \cdot 2R = \frac{8\pi}{9} \cdot R^3 = 24\pi \text{ dm}^3$.

Vậy thể tích nước còn lại trong bình: $24\pi - 18\pi = 6\pi \text{ dm}^3$

Câu 6: (THPT PHỤ DỤC – THÁI BÌNH) Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5 m, có bán kính đáy 1 m, với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với 0,5 m của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn (theo đơn vị m^3).



A. 23,562 m^3 .

B. 12,637 m^3 .

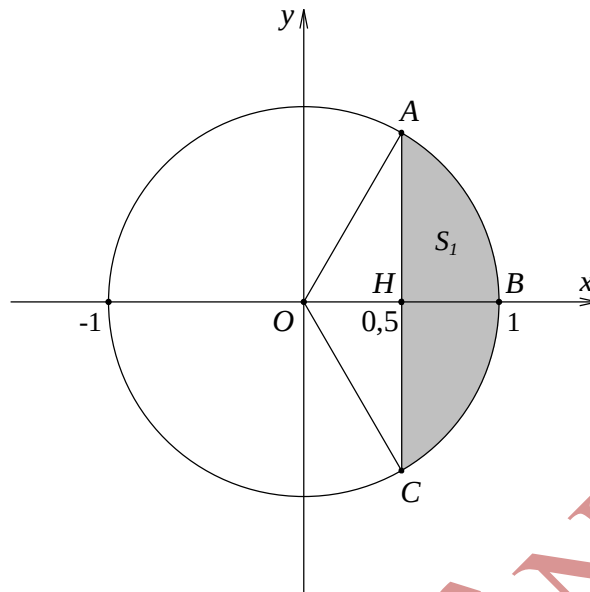
C. 6,319 m^3 .

D. 11,781 m^3 .

Lời giải

Chọn B

Gắn hệ trục tọa độ Oxy vào đáy hình trụ như hình vẽ sau



Ta có H là trung điểm OB nên $\triangle OAB$ là tam giác đều. Suy ra $\widehat{AOB} = 60^\circ$ và $\widehat{AOC} = 120^\circ$ nên hình quạt chứa cung nhỏ $\widehat{AC}$ có diện tích là $S = \frac{1}{3}\pi r^2 = \frac{\pi}{3}$.

Khi đó diện tích phần tô đậm trên hình vẽ là $S_1 = S - S_{OAC} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

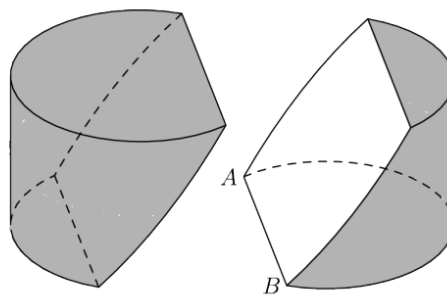
Và thể tích dầu được rút ra là $V_1 = h \cdot S_1 = 5 \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$.

Thể tích bồn chứa dầu hình trụ là $V = \pi r^2 h = 5\pi$.

Thể tích dầu còn lại trong bồn là $V_2 = V - V_1 = 5\pi - 5 \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{10\pi}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{4} \approx 12,637 \text{ (m}^3\text{)}.$

Cách khác: Có thể tính diện tích phần tô đậm bằng tích phân $S_1 = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Câu 7: [THPT chuyên Vĩnh Phúc lần 5] Một khối gỗ có hình trụ với bán kính đáy bằng 6 và chiều cao bằng 8. Trên một đường tròn đáy nào đó ta lấy hai điểm A, B sao cho cung AB có số đo 120° . Người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua A, B và tâm của hình trụ (tâm của hình trụ là trung điểm của đoạn nối tâm hai đáy) để được thiết diện như hình vẽ. Tính diện tích S của thiết diện thu được.



A. $S = 20\pi$.

B. $S = 20\pi + 30\sqrt{3}$.

C. $S = 12\pi + 18\sqrt{3}$.

D. $S = 20\pi + 25\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi giao tuyến của mặt phẳng cắt với đáy còn lại là đoạn CD .
Kẻ các đường sinh CC', DD' . Khi đó $ABD'C'$ là hình chữ nhật.

$$\text{Góc } OC'D' = 120^\circ \Rightarrow C'D' = 6\sqrt{3}; BD' = 6; \widehat{AOC'} = 60^\circ.$$

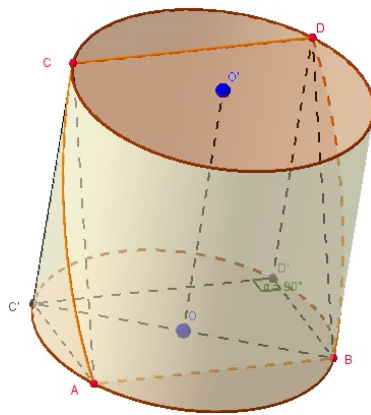
Gọi φ là góc giữa mặt cắt và mặt đáy.

$$\cos \varphi = \cos \widehat{DBD'} = \frac{8}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{3}{5}.$$

Thiết diện cần tìm có hình chiếu xuống đường tròn đáy tâm O là phần hình nằm giữa cung

$C'D'$ và cung AB . Áp dụng công thức hình chiếu $S = \frac{S_{H\text{Chieu}}}{\cos \alpha}$; Và

$$S_{H\text{Chieu}} = 2(S_{AOB} + S_{\widehat{AOC'}}) = 2\left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{60}{360} \cdot \pi \cdot 36\right) = 18\sqrt{3} + 12\pi. \text{ Do đó } S = 20\pi + 30\sqrt{3}.$$



Câu 8: (Cầu Giấy Hà Nội 2019 Lần 1) Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ có thể tích là V , các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon sữa bò là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ bằng V và diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy bằng bao nhiêu?

A. $r = \sqrt[3]{\frac{V\pi}{2}}$.

B. $r = \sqrt[3]{V}$.

C. $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

D. $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $S_{\text{đáy}} = \pi r^2$; $S_{\text{xq}} = 2\pi rh$.

Thể tích khối trụ $V = S_{\text{đáy}} \cdot h \Rightarrow h = \frac{V}{S_{\text{đáy}}} = \frac{V}{\pi r^2}$.

$S_{\text{tp}} = 2S_{\text{đáy}} + S_{\text{xq}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$.

Xét hàm số $f(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$, có $f'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}$; $f'(r) = 0 \Leftrightarrow 4\pi r = \frac{2V}{r^2} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

r	0	$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$+\infty$
$f'(r)$		0	
$f(r)$			

Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số đạt tại $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Vậy khi $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ thì diện tích toàn phần hình trụ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 9: (Trần Đại Nghĩa) Nam muốn xây một bình chứa hình trụ có thể tích 72m^3 . Đáy làm bằng bê tông giá 100 nghìn đồng/ m^2 , thành làm bằng tôn giá 90 nghìn đồng/ m^2 , nắp bằng nhôm giá 140 nghìn đồng/ m^2 . Vậy đáy của hình trụ có bán kính bằng bao nhiêu để chi phí xây dựng là thấp nhất?

A. $\frac{3}{2\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$.

B. $\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$.

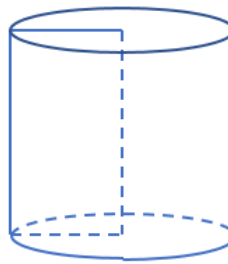
C. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$.

D. $\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Như Hưng; Fb: Nguyen Hung

Chọn B



Gọi bán kính đáy của hình trụ là R (m) và chiều cao là h (m).

Do thể tích khối trụ là 72 nên $\pi R^2 h = 72 \Leftrightarrow h = \frac{72}{\pi R^2}$.

Diện tích đáy là πR^2 .

Diện tích xung quanh là $2\pi R h = 2\pi R \cdot \frac{72}{\pi R^2} = \frac{144}{R}$.

Chi phí làm bình là:

$$T = 100 \cdot \pi R^2 + 90 \cdot \frac{144}{R} + 140 \cdot \pi R^2 = 240\pi R^2 + \frac{12960}{R}$$

$$= 240\pi R^2 + \frac{6480}{R} + \frac{6480}{R} \geq 3\sqrt[3]{240\pi R^2 \cdot \frac{6480}{R} \cdot \frac{6480}{R}} = 6480\sqrt[3]{\pi}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $240\pi R^2 = \frac{6480}{R} = \frac{6480}{R} \Leftrightarrow R = \frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}.$

Câu 10: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NĂM 2018-2019) Tại trung tâm một thành phố người ta tạo điểm nhấn bằng cột trang trí hình nón có kích thước như sau: đường sinh $l = 10\text{m}$, bán kính đáy $R = 5\text{m}$. Biết rằng tam giác SAB là thiết diện qua trục của hình nón và C là trung điểm của SB . Trang trí một hệ thống đèn điện tử chạy từ A đến C trên mặt nón. Định giá trị ngắn nhất của chiều dài dây đèn điện tử.

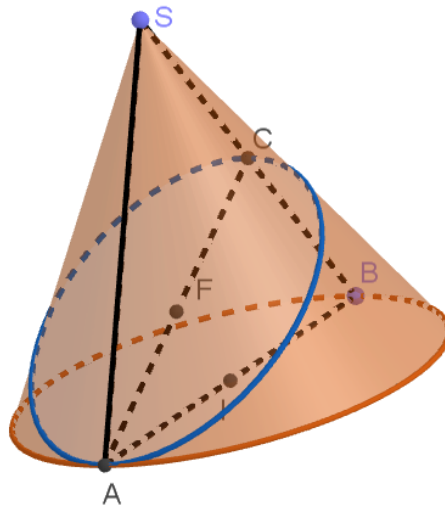
A. 15m .

B. 10m .

C. $5\sqrt{3}\text{m}$.

D. $5\sqrt{5}\text{m}$.

Lời giải



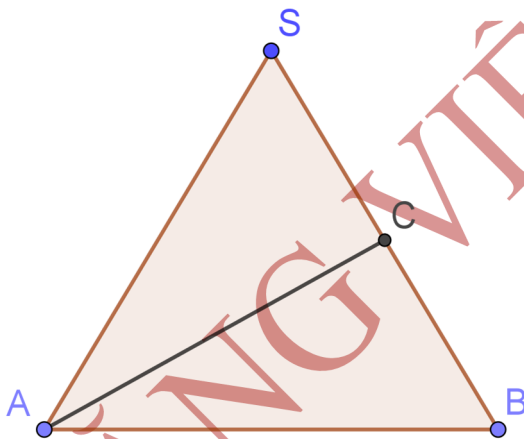
Ta có: $\triangle SAB$ cân và $SB = AB \Rightarrow \triangle SAB$ đều

Diện tích xung quanh hình nón là $S_{xq} = \pi Rl = 50\pi (m^2)$

Vẽ (P) đi qua C và vuông góc với AB . Mặt phẳng (P) cắt hình nón theo thiết diện là một Elip

Khi đó, chiều dài dây đèn điện tử ngắn nhất chính là chiều dài dây cung AC trên Elip.

* Ta dùng phương pháp trải hình ra sẽ thấy ngay như sau

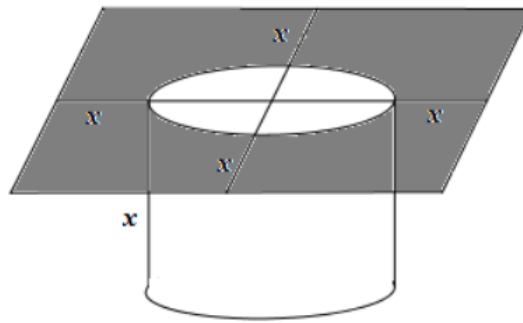


Hình trải dài là một hình quạt với AB là độ dài nửa đường tròn và $AB = R \cdot \pi = 5\pi (m)$

$$S_{ABS} = \frac{1}{2} S = 25\pi \Leftrightarrow \frac{\widehat{ASB} \cdot \pi R_1^2}{360} = 25\pi \Leftrightarrow \widehat{ASB} = \frac{360 \cdot 25\pi}{\pi \cdot 10^2} = 90^\circ$$

Vậy $\triangle SAC$ vuông tại S và $AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = 5\sqrt{5}$.

Câu 11: (THPT CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 01 NĂM 2018-2019) Trên một mảnh đất hình vuông có diện tích $81m^2$ người ta đào một cái ao nuôi cá hình trụ (như hình vẽ) sao cho tâm của hình tròn đáy trùng với tâm của mảnh đất. Ở giữa mép ao và mép mảnh đất người ta để lại một khoảng đất trống để đi lại, biết khoảng cách nhỏ nhất giữa mép ao và mép mảnh đất là $x(m)$. Giả sử chiều sâu của ao cũng là $x(m)$. Tính thể tích lớn nhất V của ao.



A. $V = 13,5\pi (m^3)$.

B. $V = 27\pi (m^3)$.

C. $V = 36\pi (m^3)$.

D. $V = 72\pi (m^3)$.

Lời giải

Chọn A.

Phương pháp

Xác định bán kính đáy và chiều cao của hình trụ, sử dụng công thức $V = \pi R^2 h$ tính thể tích của hình trụ.

+) Lập BBT tìm GTLN của hàm thể tích.

Cách giải

Ta có: Đường kính đáy của hình trụ là $9 - 2x \Rightarrow$ Bán kính đáy hình trụ là $\frac{9 - 2x}{2}$.

Khi đó ta có thể tích ao là $V = \pi \left(\frac{9 - 2x}{2} \right)^2 x = \frac{\pi}{4} (9 - 2x)^2 x = \frac{\pi}{4} f(x)$

Xét hàm số $f(x) = (9 - 2x)^2 x = 4x^3 - 36x^2 + 81x$ với $0 < x < \frac{9}{2}$ ta có:

$$f'(x) = 12x^2 - 72x + 81 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

BBT:

x	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	54	0

Dựa vào BBT ta thấy $f(x)_{\max} = 54 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. Khi đó $V_{\max} = \frac{\pi}{4} \cdot 54 = \frac{27\pi}{2} = 13,5\pi (m^3)$.

Câu 12: Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón có thể tích $27cm^3$ với chiều cao là h và bán kính đáy là r để lượng giấy tiêu thụ là ít nhất thì giá trị của r là:

A. $r = \sqrt[4]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$.

B. $r = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$.

C. $r = \sqrt[4]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$.

D. $r = \sqrt[6]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Thể tích của cốc: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = 27 \Rightarrow r^2 h = \frac{81}{\pi} \Rightarrow h = \frac{81}{\pi} \cdot \frac{1}{r^2}$

Lượng giấy tiêu thụ ít nhất khi và chỉ khi diện tích xung quanh nhỏ nhất.

$$\begin{aligned}
 S_{xq} &= 2\pi r l = 2\pi r \sqrt{r^2 + h^2} = 2\pi r \sqrt{r^2 + \frac{81^2}{\pi^2} \frac{1}{r^4}} = 2\pi \sqrt{r^4 + \frac{81^2}{\pi^2} \frac{1}{r^2}} \\
 &= 2\pi \sqrt{r^4 + \frac{81^2}{2\pi^2} \frac{1}{r^2} + \frac{81^2}{2\pi^2} \frac{1}{r^2}} \geq 2\pi \sqrt{3 \sqrt[3]{r^4 \cdot \frac{81^2}{2\pi^2} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{81^2}{2\pi^2} \frac{1}{r^2}}} \\
 &= 2\sqrt{3}\pi \sqrt[6]{\frac{81^4}{4\pi^4}} \text{ (theo BĐT Cauchy)} \\
 S_{xq} \text{ nhỏ nhất} &\Leftrightarrow r^4 = \frac{81^2}{2\pi^2} \frac{1}{r^2} \Leftrightarrow r^6 = \frac{3^8}{2\pi^2} \Leftrightarrow r = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}.
 \end{aligned}$$

Câu 13: Một phễu đựng kem hình nón bằng giấy bạc có thể tích 12π (cm³) và chiều cao là 4cm. Muốn tăng thể tích kem trong phễu hình nón lên 4 lần, nhưng chiều cao không thay đổi, diện tích miêng giấy bạc cần thêm là.

A. $(12\sqrt{13} - 15)\pi$ (cm²).

B. $12\pi\sqrt{13}$ (cm²).

C. $\frac{12\sqrt{13}}{15}$ (cm²).

D. $(12\sqrt{13} + 15)\pi$ (cm²).

Hướng dẫn giải:

Gọi R_1 là bán kính đường tròn đáy hình nón lúc đầu; h_1 là chiều cao của hình nón lúc đầu.
Gọi R_2 là bán kính đường tròn đáy hình nón sau khi tăng thể tích; h_2 là chiều cao của hình nón sau khi tăng thể tích.

Ta có: $V_1 = \frac{1}{3}\pi R_1^2 h_1 \Rightarrow 12\pi = \frac{1}{3}\pi R_1^2 4 \Rightarrow R_1 = 3$

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3}\pi R_1^2 h_1 \\ V_2 &= \frac{1}{3}\pi R_2^2 h_2 \\ h_2 &= h_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{R_2^2}{R_1^2} = 4 \Rightarrow R_2 = 2R_1 = 6$$

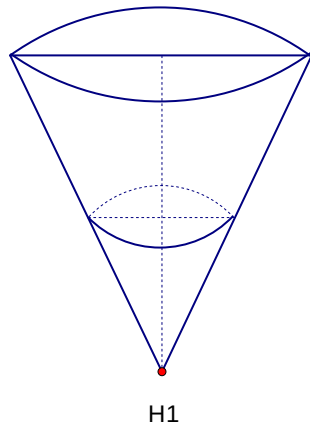
Diện tích xung quanh hình nón lúc đầu: $S_{xp1} = \pi R_1 l_1 = \pi 3\sqrt{16+9} = 15\pi$ (cm²)

Diện tích xung quanh hình nón sau khi tăng thể tích:
 $S_{xp2} = \pi R_2 l_2 = \pi 6\sqrt{16+36} = 12\pi\sqrt{13}$ (cm²)

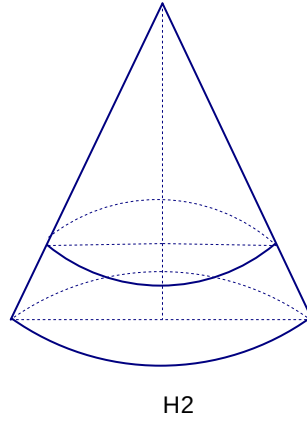
Diện tích phần giấy bạc cần tăng thêm là: $S = (12\sqrt{13} - 15)\pi$ (cm²)

Chọn A.

Câu 14: Một cái phễu có dạng hình nón chiều cao của phễu là 30cm. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của cột nước trong phễu bằng 15cm (hình H_1). Nếu bịt kín miệng phễu rồi lật ngược phễu lên (hình H_2) thì chiều cao của cột nước trong phễu gần với giá trị nào sau đây?



H1



H2

A. 1,553(cm).

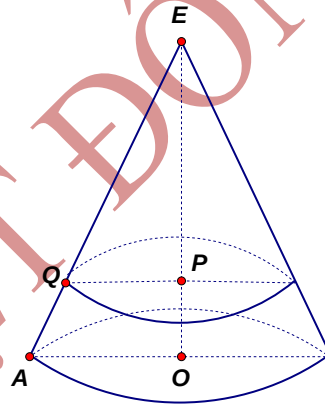
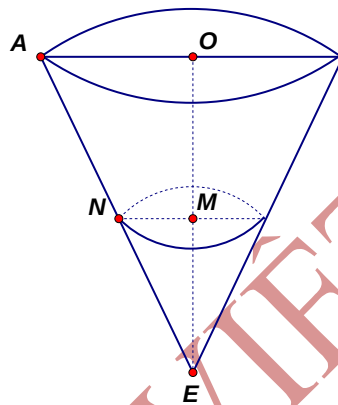
B. 1,306(cm).

C. 1,233(cm)

D. 15(cm).

Chọn B

Lời giải



Phễu có dạng hình nón, gọi E là đỉnh, đáy là đường tròn tâm O , bán kính OA chiều cao $OE = 30\text{cm}$.

Gọi V là thể tích của khối nón có đỉnh E , đáy là đường tròn tâm O , bán kính OA .

$$\text{Ta có } V = \frac{1}{3} \pi \cdot OA^2 \cdot OE = 10\pi OA^2$$

Gọi M là trung điểm của đoạn OE , N là trung điểm của đoạn EA . Khi đổ nước vào phễu chiều cao của cột nước là $EM = 15\text{cm}$.

Gọi V_1 là thể tích của khối nón có đỉnh E , đáy là đường tròn tâm M , bán kính MN .

$$\Rightarrow \text{Thể tích nước là } V_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot MN^2 \cdot EM = 5\pi \cdot MN^2 = \frac{5}{4} \pi \cdot OA^2 \Rightarrow V_1 = \frac{1}{8} V$$

Khi bịt kín miệng phễu rồi lật ngược phễu lên, chiều cao của cột nước là OP .

Gọi V_2 là thể tích của khối nón có đỉnh E , đáy là đường tròn tâm P , bán kính PQ

$$\text{Ta có } V_2 = V - V_1 = \frac{7}{8} V \Leftrightarrow \frac{V_2}{V} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{3} \pi \cdot PQ^2 \cdot PE}{\frac{1}{3} \pi \cdot OA^2 \cdot OE} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \frac{PQ^2 \cdot PE}{OA^2 \cdot OE} = \frac{7}{8} \quad (1)$$

Ta có $\triangle PEQ$ vuông tại P và $\triangle OEA$ vuông tại O có $\widehat{OEA} = \widehat{PEQ}$

$$\Rightarrow \triangle PEQ \text{ và } \triangle OEA \text{ đồng dạng} \Rightarrow \frac{PQ}{OA} = \frac{PE}{OE}$$

$$\text{Do đó (1)} \Leftrightarrow \left(\frac{PE}{OE}\right)^3 = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \frac{PE}{OE} = \frac{\sqrt[3]{7}}{2} \Leftrightarrow \frac{OE-OP}{OE} = \frac{\sqrt[3]{7}}{2}$$

$$\Leftrightarrow OP = OE \left(1 - \frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right) = 30 \left(1 - \frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right) \approx 1,306 \text{ cm}$$

Câu 15: Cho một đồng hồ cát như hình vẽ (gồm hai hình nón chung đỉnh ghép lại) trong đó đường sinh bất kỳ của hình nón tạo với đáy một góc 60° . Biết rằng chiều cao của đồng hồ là 30 cm và tổng thể tích của đồng hồ là $1000\pi (\text{cm}^3)$. Nếu cho đầy lượng cát vào phần trên thì khi chảy hết xuống dưới. khi đó tỷ lệ thể tích lượng cát chiếm chỗ và thể tích phần phía dưới là bao nhiêu

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{27}$
 C. $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ D. $\frac{1}{64}$

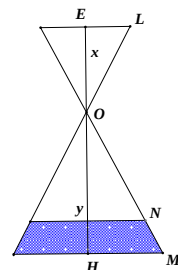
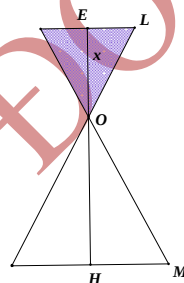
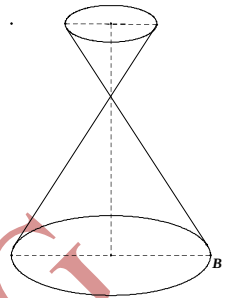
Đặt $\begin{cases} OE = x > 0 \\ OH = y > 0 \Rightarrow x + y = 60 \\ x < y \end{cases} \quad (1)$

Ta có $\begin{cases} \frac{1}{3}\pi \cdot EL^2 \cdot x + \frac{1}{3}\pi \cdot HM^2 \cdot y = 1000\pi \\ \tan 60^\circ = \frac{x}{EL} = \frac{y}{HM} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} EL^2 \cdot x + HM^2 \cdot y = 3000 \\ EL = \frac{x}{\sqrt{3}}; HM = \frac{y}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 = 9000 \quad (2). \text{ Từ (1), (2)} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 (\text{cm}) \\ y = 20 (\text{cm}) \end{cases} \text{ Khi cát chảy hết xuống dưới}$$

$$\frac{V_{\text{cat chiếm chỗ}}}{V_{\text{dưới}}} = \left(\frac{x}{y}\right)^3 = \frac{1}{8}$$



Câu 16: Cho một miếng tôn hình tròn có bán kính 50 cm . Biết hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích miếng tôn ở trên. Khi đó hình nón có bán kính đáy là

- A. $10\sqrt{2} \text{ cm}$ B. 20 cm C. $50\sqrt{2} \text{ cm}$ D. 25 cm

Hướng dẫn giải:

Đặt $a = 50 \text{ cm}$. Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình nón lần lượt là $x, y (x, y > 0)$. Ta có

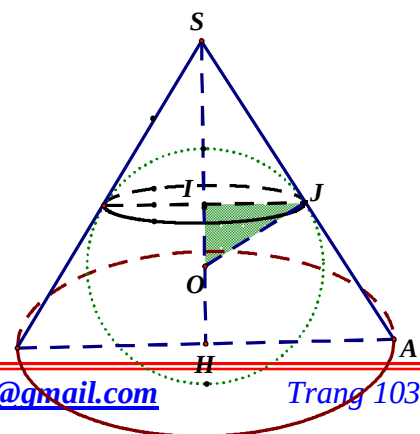
$$SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Khi đó diện tích toàn phần của hình nón là

$$S_p = \pi x^2 + \pi x \sqrt{x^2 + y^2}$$

Theo giả thiết ta có:

$$\pi x^2 + \pi x \sqrt{x^2 + y^2} = \pi a^2 \Leftrightarrow x \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 = a^2$$



$$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2 + y^2} = a^2 - x^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2(x^2 + y^2) = a^4 + x^4 - 2a^2x^2, (DK: x < a) \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^4}{y^2 + 2a^2}$$

$$\text{Khi đó thể tích khối nón là: } V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a^4}{y^2 + 2a^2} \cdot y = \frac{1}{3}\pi a^4 \cdot \frac{y}{y^2 + 2a^2}$$

V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{y^2 + 2a^2}{y}$ đạt giá trị nhỏ nhất

$$\text{Ta có } \frac{y^2 + 2a^2}{y} = y + \frac{2a^2}{y} \geq 2\sqrt{y \cdot \frac{2a^2}{y}} = 2\sqrt{2}a$$

Vậy V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $y = \frac{2a^2}{2\sqrt{2}a} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, tức là $y = a\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{a}{2} = 25\text{cm}$

Chọn D.

Câu 17: Một kem ốc quế gồm hai phần, phần kem có dạng hình cầu, phần ốc quế có dạng hình nón, giả sử hình cầu và hình nón có bán kính bằng nhau, biết rằng nếu kem tan chảy hết sẽ làm đầy phần ốc quế. Biết thể tích kem sau khi tan chảy bằng 75% thể tích kem đóng băng ban đầu, gọi h, r lần lượt là chiều cao và bán kính của phần ốc quế. Tính tỷ số $\frac{h}{r}$

A. $\frac{h}{r} = 3$

B. $\frac{h}{r} = 2$

C. $\frac{h}{r} = \frac{4}{3}$

D. $\frac{h}{r} = \frac{16}{3}$

Hướng dẫn giải:

Thể tích kem ban đầu: $V_{\text{kem}(bd)} = \frac{4}{3}\pi R^3$

Thể tích phần ốc quế: $V_{\text{oc que}} = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot h$

Ta có $V_{\text{oc que}} = \frac{3}{4}V_{\text{kem}(bd)} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot h = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \Leftrightarrow \frac{h}{R} = 3$

Câu 18: Cắt một hình nón bằng một mặt phẳng song song với đáy thì phần hình nón nằm giữa mặt phẳng và đáy gọi là hình nón cụt. Một chiếc cốc có dạng hình nón cụt cao 9cm, bán kính của đáy cốc và miệng cốc lần lượt là và 4cm. Hỏi chiếc cốc có thể chứa được lượng nước tối đa là bao nhiêu trong số các lựa chọn sau:

A. 250ml

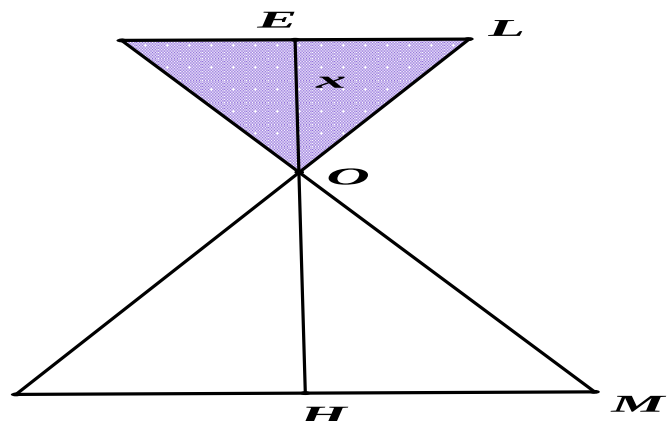
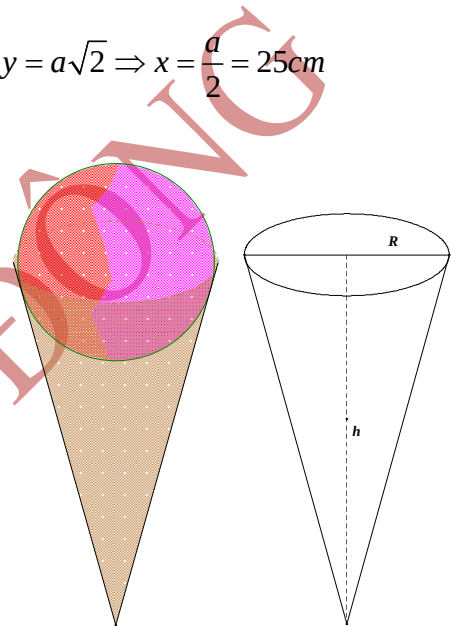
B. 300ml

C. 350ml

D. 400ml

Hướng dẫn giải:

$$\Delta AGC \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AG}{AB} = \frac{GC}{BD} = \frac{3}{4} \Rightarrow AG = \frac{3}{4}AB$$



$$\Leftrightarrow \frac{AG}{AG+9} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow AG = 27$$

Suy ra $V_{coc} = V_{nonlon} - V_{nonrho}$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot (27+9) - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 27 = 111\pi \approx 348,72ml$$

Vậy lượng nước tối đa là 300ml.

Chọn B.

Câu 19: Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật với các kích thước như hình vẽ. Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không kể viền, mép, phần thừa).

A. $700\pi (cm^2)$ **B.** $754,25\pi (cm^2)$

C. $750,25\pi (cm^2)$ **D.** $756,25\pi (cm^2)$

Hướng dẫn giải:

$$S_{hinhton} = \pi R^2 = \pi \left(\frac{35}{2} \right)^2;$$

$$S_{xqlangtru} = 2\pi rl = 2\pi \left(\frac{35-20}{2} \right) \cdot 30 = 450\pi$$

$$S = \pi \left[\left(\frac{35}{2} \right)^2 + 450 \right] = 756,25\pi.$$

Chọn D.

Câu 20: Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích của khối trụ đó bằng 2 và diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy gần số nào nhất?

A. 0,68.

B. 0,6.

C. 0,12.

D. 0,52.

Hướng dẫn giải:

Gọi x ($x > 0$) là bán kính đáy của lon sữa.

$$\text{Khi đó } V = \pi x^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi x^2}.$$

Diện tích toàn phần của lon sữa là

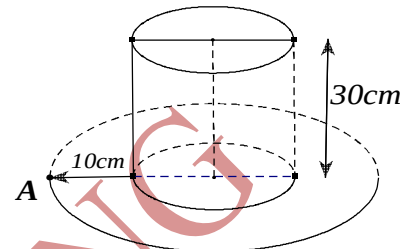
$$S(x) = 2\pi x^2 + 2\pi xh = 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{V}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + 2 \frac{V}{x} = 2\pi x^2 + \frac{4}{x}, x > 0$$

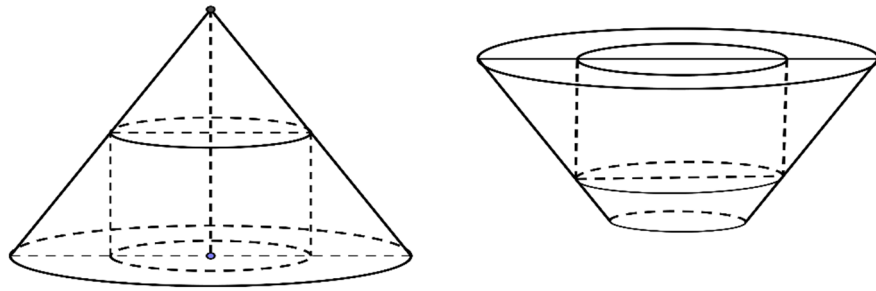
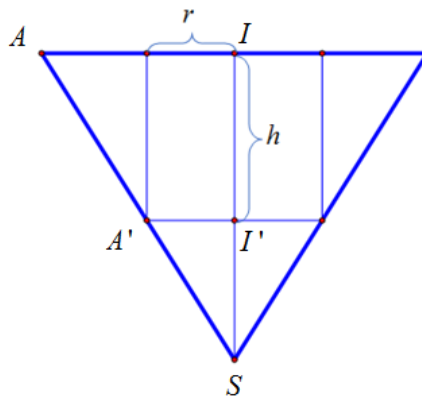
Bài toán quy về tìm GTNN của hàm số $S(x) = 2\pi x^2 + \frac{4}{x}, x > 0$

$$S'(x) = 4\pi x - \frac{4}{x^2}$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} \approx 0,6827$$

Câu 21: (THPT-Phúc-Trạch-Hà-Tĩnh-lần-2-2018-2019-thi-tháng-4) Khi sản xuất hộp mì tôm các nhà sản xuất luôn để một khoảng trống dưới đáy hộp. Hình vẽ dưới mô tả cấu trúc của hộp mì tôm. Thớ mì tôm có dạng hình trụ, hộp mì có dạng hình nón cụt được cắt ra bởi hình nón có chiều cao 9cm và bán kính đáy 6cm. Nhà sản xuất tìm cách sao cho thớ mì tôm có được thể tích lớn nhất vì mục đích thu hút khách hàng. Tìm thể tích lớn nhất đó.



**A.** 48π .**B.** $\frac{81}{2}\pi$.**C.** 36π .**D.** 54π .**Lời giải****Chọn A**

- Ta có mặt cắt qua trục hình nón như hình vẽ.
Đặt r là bán kính đáy hình trụ, h là chiều cao của hình trụ.
Thở vì tìm có được thể tích lớn nhất khi khối trụ có thể tích lớn nhất.
Thể tích khối trụ là: $V = \pi r^2 h$.

Ta có hai tam giác SAI và $SA'I'$ đồng dạng.

$$\Rightarrow \frac{SI}{SI'} = \frac{AI}{A'I'} \Leftrightarrow \frac{9}{9-h} = \frac{6}{r} \Rightarrow h = 9 - \frac{3r}{2}.$$

$$\text{Khi đó } V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot \left(9 - \frac{3r}{2}\right) = \pi \left(-\frac{3r^3}{2} + 9r^2\right).$$

- Khảo sát hàm số V , biến số r ($0 < r < 6$).

$$V' = \pi \left(-\frac{9r^2}{2} + 18r\right).$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow \pi \left(-\frac{9r^2}{2} + 18r\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \text{ (l)} \\ r = 4 \text{ (n)} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

r	$-\infty$	0		4		6	$+\infty$
V'		0	+	0	-		
V		0		48π		0	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $V_{\max} = 48\pi$ khi $r = 4$.

Vậy thớ mì tôm có thể tích lớn nhất là 48π .

- Câu 22:** Một cái ly có dạng hình nón được rót nước vào với chiều cao mực nước bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao hình nón. Hỏi nếu bịch kính miệng ly rồi úp ngược ly xuống thì tỷ số chiều cao mực nước và chiều cao hình nón xấp xỉ bằng bao nhiêu?
- A. 0,33. B. 0,11. C. 0,21. D. 0,08

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi chiều cao và bán kính đường tròn đáy của cái ly lần lượt là h và R . Khi để cốc theo chiều xuôi thì lượng nước trong cốc là hình nón có chiều cao và bán kính đường tròn đáy lần lượt là $\frac{2h}{3}$ và $\frac{2R}{3}$.

Do đó thể tích lượng nước trong bình là $\frac{8V}{27} \Rightarrow$ Phần không chứa nước chiếm $\frac{19}{27}V$.

Khi úp ngược ly lại thì phần thể tích nước trong ly không đổi và lúc đó phần không chứa nước là hình nón và ta gọi h' và R' lần lượt là chiều cao và bán kính đường tròn đáy của phần hình nón không chứa nước đó.

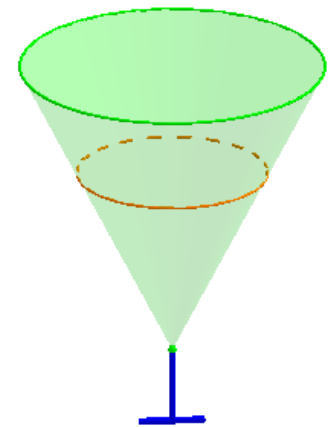
Ta có $\frac{R'}{R} = \frac{h'}{h}$ và phần thể tích hình nón không chứa

nước là $\frac{19}{27}V$

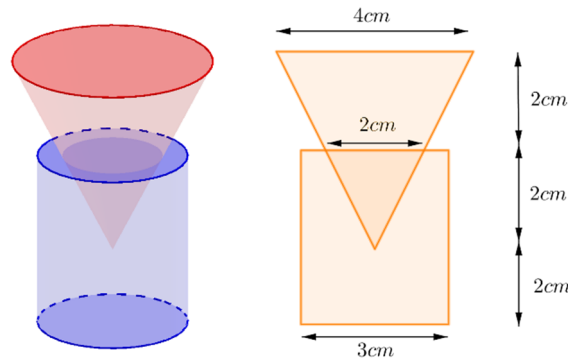
$$\Rightarrow \frac{h'}{3} \cdot \pi R'^2 = \frac{19}{27} \cdot \frac{h}{3} \cdot \pi R^2 \Leftrightarrow \left(\frac{h'}{h}\right)^3 = \frac{19}{27} \Rightarrow \frac{h'}{h} = \frac{\sqrt[3]{19}}{3}.$$

Do đó tỷ lệ chiều cao của phần chứa nước và chiều cao của cái ly trong trường hợp úp ngược ly là

$$1 - \frac{h'}{h} = \frac{3 - \sqrt[3]{19}}{3}.$$



- Câu 23:** Một nút chai thủy tinh là một khối tròn xoay (H) , một mặt phẳng chứa trục của (H) cắt (H) theo một thiết diện như trong hình vẽ bên. Tính thể tích của (H) (đơn vị cm^3).



A. $V_{(H)} = 23\pi$.

B. $V_{(H)} = 13\pi$.

C. $V_{(H)} = \frac{41\pi}{3}$.

D. $V_{(H)} = 17\pi$.

Hướng dẫn giải:**Chọn C.**

Thể tích khối trụ là $V_{tru} = Bh = \pi 1.5^2 \cdot 4 = 9\pi$. Thể tích khối nón là $V_{non} = \frac{1}{3} \pi 2^2 \cdot 4 = \frac{16\pi}{3}$.

Thể tích phần giao là: $V_{p.giao} = \frac{1}{3} \pi 1^2 \cdot 2 = \frac{2\pi}{3}$. Vậy $V_{(H)} = 9\pi + \frac{16\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{41\pi}{3}$.

Câu 24: Một bồn chứa xăng có cấu tạo gồm 1 hình trụ ở giữa và 2 nửa hình cầu ở 2 đầu, biết rằng hình cầu có đường kính 1,8m và chiều dài của hình trụ là 3,62m. Hỏi bồn đó có thể chứa tối đa bao nhiêu lít xăng trong các giá trị sau đây?

A. 10905l

B. 23650l

C. 12265l

D. 20201l

Hướng dẫn giải:Ta có: $V_{tru} = \pi R^2 h$

Vì thể tích của 2 nửa hình cầu bằng nhau nên tổng thể tích của 2 nửa hình cầu là 1 khối cầu có

$$V_c = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

$$\text{Vậy } V_H = V_{tru} + V_c = \pi R^2 h + \frac{4}{3} \pi R^3 = 12,265m^3$$

Vậy bồn xăng chứa: 12265l.

Chọn C.

Câu 25: Một hình hộp chữ nhật kích thước $4 \times 4 \times h$ chứa một khối cầu lớn có bán kính bằng 2 và tám khối cầu nhỏ có bán kính bằng 1 sao cho các khối lớn tiếp xúc với tám khối cầu nhỏ và các khối cầu đều tiếp xúc với các mặt hình hộp. Thể tích khối hộp là:

A. $32 + 32\sqrt{7}$

B. $48 + 32\sqrt{5}$

C. $64 + 32\sqrt{7}$

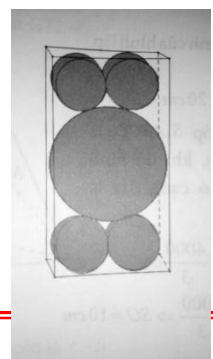
D. $64\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải:

Gọi tâm hình cầu lớn là I và tâm bốn hình cầu nhỏ tiếp xúc với đáy là ABCD. Khi đó ta có

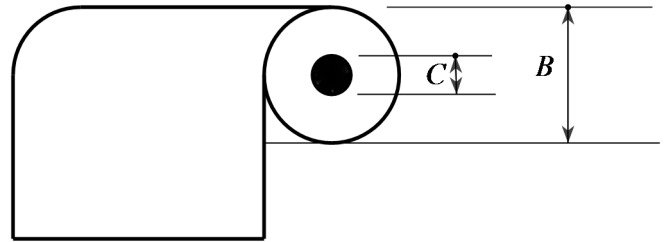
$I.ABCD$ là hình chóp đều với cạnh bên $IA = 3$ và cạnh đáy $AB = 2$ do đó chiều cao hình chóp là $\sqrt{7}$. Suy ra khoảng cách từ tâm I đến mặt đáy là $1 + \sqrt{7}$ hay chiều cao hình hộp chữ nhật là:

$$2(1 + \sqrt{7}) \text{ suy ra thể tích hình hộp là } 32(1 + \sqrt{7}).$$



Chọn A.

Câu 26: Một băng giấy dài được cuộn chặt lại thành nhiều vòng xung quanh một ống lõi hình trụ rỗng có đường kính $C = 12,5\text{mm}$. Biết độ dày của giấy cuộn là $0,6\text{mm}$ và đường kính cả cuộn giấy là $B = 44,9\text{mm}$.



Tính chiều dài l của cuộn giấy.

A. $L \approx 44\text{m}$

B. $L \approx 38\text{m}$

C. $L \approx 4\text{m}$

D. $L \approx 24\text{m}$

Hướng dẫn giải:

Gọi chiều rộng của băng giấy là r , chiều dài băng giấy là L độ dày của giấy là m khi đó ta có thể tích của băng giấy: $V = r.m.L$ (1)

$$\text{Khi cuộn lại ta cũng có thể tích: } V = \pi \left(\frac{B}{2} \right)^2 .m - \pi \left(\frac{C}{2} \right)^2 .m = \frac{\pi}{4} r (B^2 - C^2) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra: } m.r.L = \frac{\pi}{4} r (B^2 - C^2) \Rightarrow L = \frac{\pi}{4m} (B^2 - C^2)$$

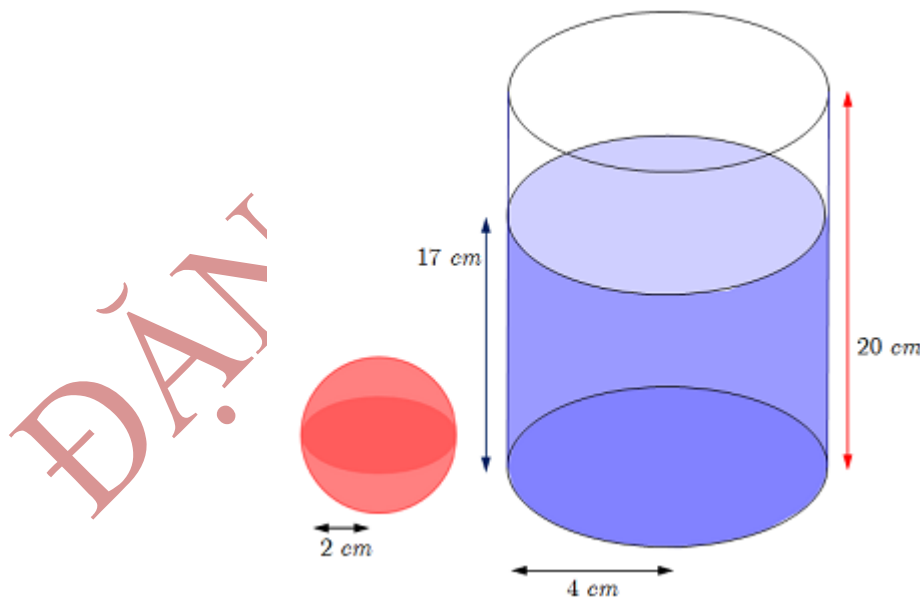
Câu 27: (Thị Xã Quảng Trị) Một ly nước hình trụ có chiều cao 20 cm và bán kính đáy bằng 4 cm . Bạn Nam đổ nước vào ly cho đến khi mực nước cách đáy ly 17 cm thì dừng lại. Sau đó, Nam lấy các viên đá lạnh hình cầu có cùng bán kính 2 cm thả vào ly nước. Bạn Nam cần dùng ít nhất bao nhiêu viên đá để nước trào ra khỏi ly?

A. 4.

B. 7.

C. 5.

D. 6.

**Lời giải****Chọn C**

Ta có thể tích phần không chứa nước $V_1 = 3.\pi.4^2 = 48\pi$. Như vậy để nước trào ra ngoài thì số bi thả vào cốc có tổng thể tích lớn hơn 48π .

Gọi n là số viên bi tối thiểu thả vào cốc khi đó tổng thể tích của n viên bi là

$$V_2 = n.\frac{4}{3}\pi.2^3 = \frac{32\pi n}{3}. \text{ Theo bài ra } \frac{32\pi n}{3} > 48\pi \Leftrightarrow n > \frac{9}{2}. \text{ Vậy } n = 5.$$

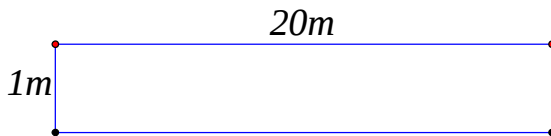
Câu 28: Một thầy giáo dự định xây dựng bể bơi di động cho học sinh nghèo miền núi từ 15 tấm tôn có kích thước $1m \times 20cm$ (biết giá $1m^2$ tôn là 90000 đồng) bằng 2 cách:

Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành 1 hình trụ như hình 1.

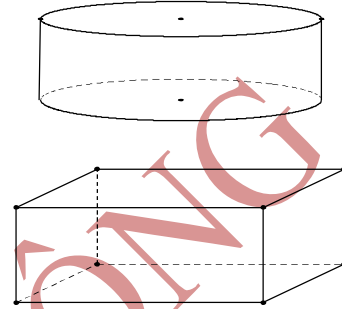
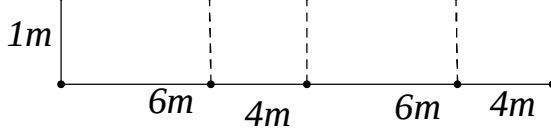
Cách 2: Chia chiều dài tấm tôn thành 4 phần rồi gò tấm tôn thành 1 hình hộp chữ nhật như hình 2.

Biết sau khi xây xong bể theo dự định, mức nước chỉ đổ đến $0,8m$ và giá nước cho đơn vị sự nghiệp là $9955\text{dong} / m^3$. Chi phí trong tay thầy hiệu trưởng là 2 triệu đồng. Hỏi thầy giáo sẽ chọn cách làm nào để không vượt quá kinh phí (giả sử chỉ tính đến các chi phí theo dữ kiện trong bài toán).

Hình 1



Hình 2



A. Cả 2 cách như nhau

C. Cách 2

Hướng dẫn giải:

Ở cách 2:

$$1m^2 \rightarrow 90.000$$

$$20m^2 \rightarrow 1.800.000$$

$$\text{Ta có } V_{\text{nước}} = 0,8 \cdot 6 \cdot 4 = 19,2m^3$$

$$\text{Do đó tổng tiền ở phương án 2 là } 19,2 \cdot 9955 + 20 \cdot 90000 = 1.991.136.$$

Ở cách 1:

$$20m^2 \rightarrow 1.800.000$$

$$\text{Ta có } 20 = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{10}{\pi} \Rightarrow V_{\text{nước}} = h\pi r^2 = 0,8 \cdot \pi \cdot \left(\frac{10}{\pi}\right)^2 \approx 25,46m^3$$

$$\text{Do đó tiền nước: } 253.454 \text{ đồng}$$

$$\text{Tổng tiền: } 2.053.454 \text{ đồng.}$$

Vậy thầy nên chọn cách 2.

Chọn C.

Câu 29: Một bình đựng nước dạng hình nón (không có nắp đáy), đựng đầy nước. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào bình đó một khối trụ và đo được thể tích nước trào ra ngoài là $\frac{16\pi}{9}(dm^3)$

. Biết rằng một mặt của khối trụ nằm trên mặt đáy của hình nón và khối trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón (như hình vẽ dưới). Tính bán kính đáy R của bình nước.

A. $R = 3(dm)$.

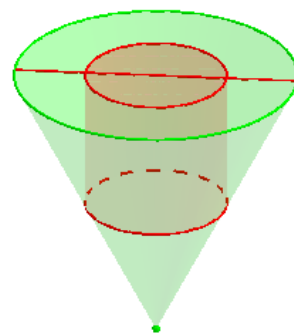
B. $R = 4(dm)$.

C. $R = 2(dm)$.

D. $R = 5(dm)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Gọi h, h' lần lượt là chiều cao của khối nón và khối trụ.

R, r lần lượt là bán kính của khối nón và khối trụ.

Theo đề ta có: $h = 3R, h' = 2R$.

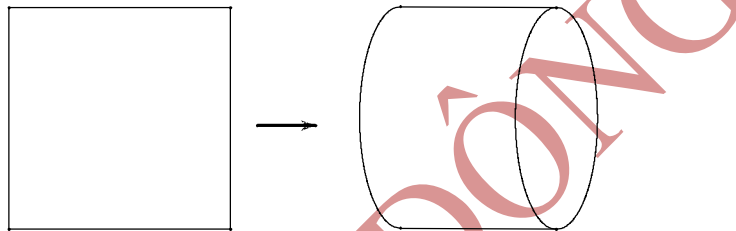
Xét tam giác SOA ta có: $\frac{r}{R} = \frac{IM}{OA} = \frac{SI}{SO} = \frac{h-h'}{h} = \frac{3R-2R}{3R} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{3}R. \text{ Ta lại có: } V_{\text{trụ}} = \pi r^2 h' = \pi \cdot \frac{R^2}{9} \cdot 2R = \frac{2\pi R^3}{9} = \frac{16\pi}{9}$$

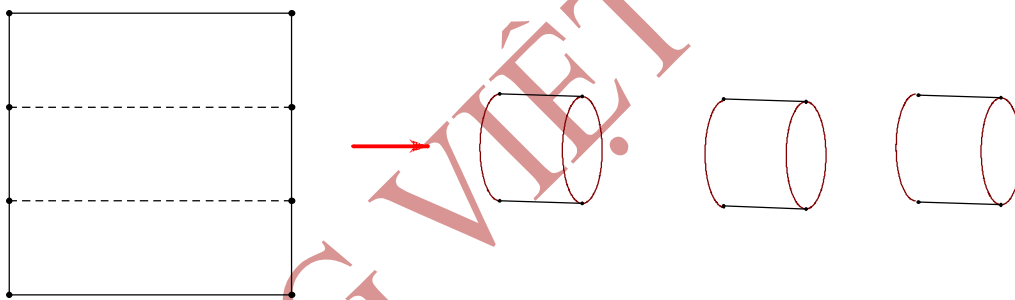
$$\Rightarrow R^3 = 8 \Leftrightarrow R = 2 \text{ dm.}$$

Câu 30: Có một miếng nhôm hình vuông, cạnh là 3dm , một người dự định tính tạo thành các hình trụ (không đáy) theo hai cách sau:

Cách 1: Gò hai mép hình vuông để thành mặt xung quanh của một hình trụ, gọi thể tích của khối trụ đó là V_1 .



Cách 2: Cắt hình vuông ra làm ba và gò thành mặt xung quanh của ba hình trụ, gọi tổng thể tích của chúng là V_2 .



Khi đó, tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là:

A. 3

B. 2

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{3}$

Hướng dẫn giải:

Gọi R_1 là bán kính đáy của khối trụ thứ nhất, có: $2\pi R_1 = 3 \Leftrightarrow R_1 = \frac{3}{2\pi} \Rightarrow V_1 = \pi R_1^2 h = \frac{27}{4\pi}$

Gọi R_2 là bán kính đáy của khối trụ thứ hai, có: $2\pi R_2 = 1 \Leftrightarrow R_2 = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow V_2 = \pi R_2^2 h = \frac{9}{4\pi}$

Chọn A.

Câu 31: Một chiếc hộp hình lập phương cạnh a bị khoét một khoảng trống có dạng là một khối lăng trụ với hai đáy là hai đường tròn nội tiếp của hai mặt đối diện của hình hộp. Sau đó, người ta dùng bìa cứng dán kín hai mặt vừa bị cắt của chiếc hộp lại như cũ, chỉ chừa lại khoảng trống bên trong. Tính thể tích của khoảng trống tạo bởi khối trụ này.

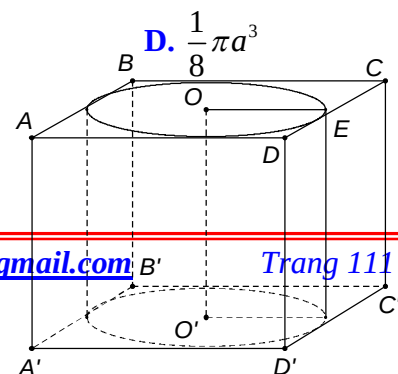
A. πa^3

B. $\frac{1}{2}\pi a^3$

C. $\frac{1}{4}\pi a^3$

D. $\frac{1}{8}\pi a^3$

Hướng dẫn giải:



$$\text{Ta có } OE = \frac{1}{2} BC = \frac{a}{2};$$

$$OO' = a$$

Thể tích là:

$$V = \pi \cdot OE^2 \cdot OO' = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot a = \frac{\pi a^3}{4}.$$

Chọn C.

Câu 32: Người ta dùng một loại vải vintage để bọc quả khối khí của khinh khí cầu, biết rằng quả khối này có dạng hình cầu đường kính $2m$. Biết rằng $1m^2$ vải có giá là 200.000 đồng. Hỏi cần tối thiểu bao nhiêu tiền mua vải để làm khinh khí cầu này?

A. 2.500.470 đồng

B. 3.150.342 đồng

C. 2.513.274 đồng

D. 2.718.920 đồng

Hướng dẫn giải:

$$S_{\text{mat cau}} = 4\pi R^2$$

$$\text{Với } R = \frac{d}{2} = 1(m). \text{ Vậy } S_{\text{mat cau}} = 4\pi \cdot 1^2 = 4\pi (m^2)$$

$$\text{Vậy cần tối thiểu số tiền: } 4\pi \cdot 200000 = 2.513.274 \text{ đồng.}$$

Chọn C.

Câu 33: Cho biết rằng hình chòm cầu có công thức thể tích là $\frac{\pi h(3r^2 + h^2)}{6}$, trong đó h là chiều cao chòm cầu và r là

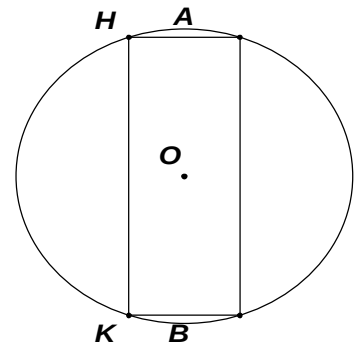
bán kính đường tròn bề mặt chòm cầu (bán kính này khác với bán kính hình cầu). Bài hỏi đặt ra là với một quả dưa hấu hình cầu, người ta dùng một cái ống khoét thủng một lỗ hình trụ chưa rõ bán kính xuyên qua trái dưa như hình vẽ (trong hình có AB là đường kính trái dưa). Biết rằng chiều cao của lỗ là $12cm$ (trong hình trên, chiều cao này chính là độ dài HK). Tính thể tích của phần dưa còn lại.

A. $200\pi cm^3$

B. $96\pi cm^3$

C. $288\pi cm^3$

D. $144\pi cm^3$



Hướng dẫn giải:

Đặt r là bán kính của hình cầu.

Chiều cao của lỗ là 12 nên chiều cao của chòm cầu là $r - 6$.

Bán kính của chòm cầu, cũng là bán kính đáy của hình trụ và là: $\sqrt{r^2 - 36}$

Thể tích hình trụ là $12\pi(r^2 - 36)$.

$$\text{Thể tích 2 chòm cầu: } \frac{2\pi(r-6)\left[3(r^2-36)+(r-6)^2\right]}{6} = \frac{\pi(r-6)(4r^2-12r-72)}{3}$$

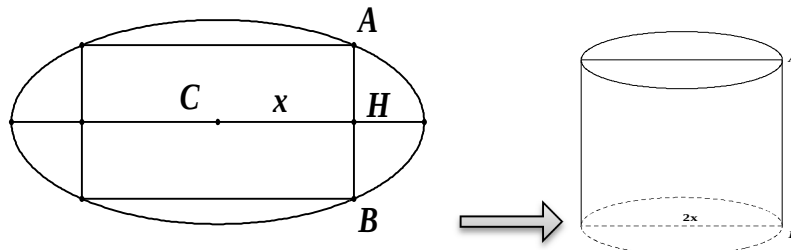
$$\text{Thể tích cái lỗ là: } 12\pi(r^2-36) + \frac{\pi(r-6)(4r^2-12r-72)}{3}$$

$$= \pi(r-6)\left[12(r+6) + \frac{4r^2-12r-72}{3}\right] = \frac{\pi(r-6)(4r^2+24r+144)}{3} = \frac{4\pi(r^3-6^3)}{3} = \frac{4\pi r^3}{3} - 288\pi$$

Thể tích hình cầu là $\frac{4\pi r^3}{3}$ nên thể tích cần tìm là: $V = 288\pi$.

Chọn C.

Câu 34: người ta cần cắt một tấm tôn có hình dạng một elip với độ dài trục lớn bằng 8 độ dài trục bé bằng 4 để được một tấm tôn có dạng hình chữ nhật nội tiếp elip. Người ta gò tấm tôn hình chữ nhật thu được thành một hình trụ không có đáy như hình bên. Tính thể tích lớn nhất có thể thu được của khối trụ đó



- A. $\frac{128\sqrt{3}}{\pi} (cm^3)$ B. $\frac{64}{3\sqrt{2}\pi} (cm^3)$ C. $\frac{64}{3\sqrt{3}\pi} (cm^3)$ D. $\frac{128}{3\sqrt{2}\pi} (cm^3)$

Hướng dẫn giải:

Ta có (E): $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}$. Chu vi 1 đáy của hình trụ $2\pi R = 2x \Leftrightarrow R = \frac{x}{\pi}$

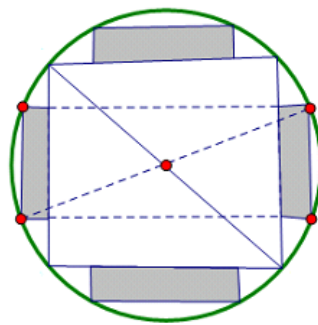
Ta có $AH = \frac{1}{2}\sqrt{16-x^2} \Rightarrow h = \sqrt{16-x^2} \Rightarrow V_{tru} = \pi \cdot R^2 \cdot h = \pi \left(\frac{x}{\pi}\right)^2 \cdot \sqrt{16-x^2} = \pi x^2 \sqrt{16-x^2}$

Đặt $f(x) = x^2 \sqrt{16-x^2} \quad (-4 < x < 4) \Rightarrow f'(x) = \frac{-32x^3 + 32x}{\sqrt{16-x^2}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\frac{32}{3}} \end{cases}$

$\Rightarrow \max f(x) = f\left(\pm\sqrt{\frac{32}{3}}\right) = \frac{128\sqrt{3}}{9} \Rightarrow V_{\max} = \frac{128\sqrt{3}}{9\pi}$

TỔNG QUÁT: Elip có độ dài trục lớn $2a$, trục bé $2b$ khi đó $(V_{tru})_{\max} = \frac{4a^2b}{3\sqrt{3}\pi}$

Câu 35: Từ một khúc gỗ tròn hình trụ có đường kính bằng 40 cm, cần xẻ thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và bốn miếng phụ được tô màu xám như hình vẽ dưới đây. Tìm chiều rộng x của miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất.



- A. $x = \frac{3\sqrt{34} - 17\sqrt{2}}{2} (cm)$ B. $x = \frac{3\sqrt{34} - 19\sqrt{2}}{2} (cm)$
C. $x = \frac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2} (cm)$ D. $x = \frac{5\sqrt{34} - 13\sqrt{2}}{2} (cm)$

Hướng dẫn giải:

Diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là $S = S_{MNPQ} + 4xy$

Cạnh hình vuông $MN = \frac{MP}{\sqrt{2}} = \frac{40}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2} (cm)$

$$\Rightarrow S = (20\sqrt{2})^2 + 4xy = 800 + 4xy \quad (1)$$

$$\text{Ta có } 2x = AB - MN = AB - 20\sqrt{2} < BD - 20\sqrt{2} = 40 - 20\sqrt{2} \Rightarrow 0 < x < 20 - 10\sqrt{2}$$

$$\text{Lại có } AB^2 + AD^2 = BD^2 = 40^2 \Rightarrow (2x + 20\sqrt{2})^2 + y^2 = 1600$$

$$\Rightarrow y^2 = 800 - 80x\sqrt{2} - 4x^2 \Rightarrow y = \sqrt{800 - 80x\sqrt{2} - 4x^2}$$

$$\text{Thế vào (1)} \Rightarrow S = 800 + 4x\sqrt{800 - 80x\sqrt{2} - 4x^2} = 800 + 4\sqrt{800x^2 - 80x^3\sqrt{2} - 4x^4}$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = 800x^2 - 80x^3\sqrt{2} - 4x^4, \text{ với } x \in (0; 20 - 10\sqrt{2}) \text{ có}$$

$$f'(x) = 1600x - 240x^2\sqrt{2} - 16x^3 = 16x(100 - 15x\sqrt{2} - x^2)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} x \in (0; 20 - 10\sqrt{2}) \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; 20 - 10\sqrt{2}) \\ 16x(100 - 15x\sqrt{2} - x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Khi đó } x = \frac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2} \text{ chính là giá trị thỏa mãn bài toán.}$$

Chọn C.

Câu 36: Người ta thiết kế một thùng chứa hình trụ có thể tích V nhất định. Biết rằng giá của vật liệu làm mặt đáy và nắp của thùng bằng nhau và đắt gấp 3 lần so với giá làm vật liệu xung quanh của thùng (chi phí cho mỗi đơn vị diện tích). Gọi h là chiều cao của thùng và bán kính đáy là R .

Tính tỷ số $\frac{h}{R}$ sao cho chi phí làm thùng là nhỏ nhất

A. $\frac{h}{R} = 2$

B. $\frac{h}{R} = \sqrt{2}$

C. $\frac{h}{R} = 3\sqrt{2}$

D. $\frac{h}{R} = 6$

Hướng dẫn giải:

Gọi V là thể tích của khối trụ, T là giá tiền cho một đơn vị S_{xq}

$$\text{Ta có } V_{tru} = \pi R^2 \cdot h \Leftrightarrow h = \frac{V_{tru}}{\pi R^2}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} S_{2day} = 2\pi R^2 \\ S_{xq} = 2\pi R \cdot h = 2\pi R \cdot \frac{V_{tru}}{\pi R^2} = \frac{2V_{tru}}{R} \end{cases}$$

Giá vật liệu để làm 2 đáy là: $G_{2d} = 2\pi R^2 \cdot 3T = 6\pi T \cdot R^2$, Giá vật liệu làm xung quanh thùng

$$G_{xq} = \frac{2V_{tru}}{R} \cdot T$$

Giá vật liệu làm thùng là:

$$G_{thung} = \frac{2V_{tru} \cdot T}{R} + 6\pi T \cdot R^2 = \frac{V_{tru} \cdot T}{R} + \frac{V_{tru} \cdot T}{R} + 6\pi T \cdot R^2 \geq 3\sqrt{6V_{tru}^2} \cdot T \quad (const)$$

$$\Rightarrow (G_{thung})_{\min} = 3\sqrt{6V_{tru}^2} \cdot T \Leftrightarrow \frac{V_{tru} \cdot T}{R} = 6\pi T \cdot R^2 \Leftrightarrow V_{tru} = 6\pi R^3 \Rightarrow \frac{h}{R} = 6$$

Câu 37: Một nhà máy sản xuất cần thiết kế một thùng sơn dạng hình trụ có nắp đậy với dung tích 1000 cm^3 . Bán kính của nắp đậy để nhà sản xuất tiết kiệm nguyên vật liệu nhất bằng

A. $\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \text{ cm}.$

B. $10 \cdot \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}} \text{ cm}.$

C. $\frac{500}{\pi} \text{ cm}.$

D. $10 \cdot \sqrt{\frac{5}{\pi}} \text{ cm}.$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi h (cm) là chiều cao hình trụ và R (cm) là bán kính nắp đáy.

Ta có: $V = \pi R^2 h = 1000$. Suy ra $h = \frac{1000}{\pi R^2}$.

Để nhà sản xuất tiết kiệm nguyên vật liệu nhất thì diện tích toàn phần S_p của hình trụ nhỏ nhất.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S_p &= 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot \frac{1000}{\pi R^2} \\ &= 2\pi R^2 + \frac{1000}{R} + \frac{1000}{R} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{2\pi R^2 \cdot \frac{1000}{R} \cdot \frac{1000}{R}} = 3\sqrt[3]{2\pi \cdot 1000^2} \end{aligned}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } 2\pi R^2 = \frac{1000}{R} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}.$$

Câu 38: Một viên phấn bảng có dạng một khối trụ với bán kính đáy bằng 0,5cm, chiều dài 6cm. Người ta làm một hình hộp chữ nhật bằng carton đựng các viên phấn đó với kích thước 6cm×5cm×6cm. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu hộp kích thước như trên để xếp 460 viên phấn?

A. 17.

B. 15.

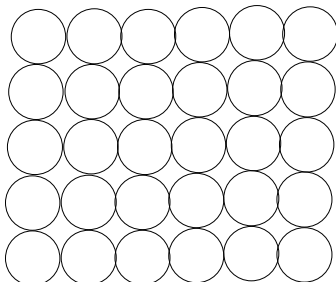
C. 16.

D. 18.

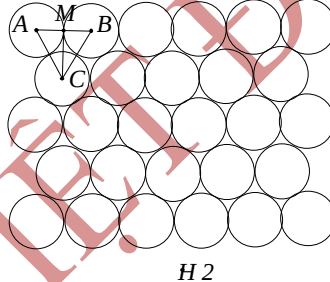
Hướng dẫn giải:

Chọn C.

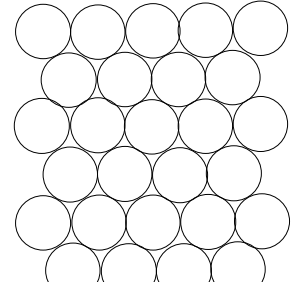
Có 3 cách xếp phấn theo hình vẽ dưới đây:



H 1



H 2



H 3

- Nếu xếp theo hình H1: vì đường kính viên phấn là 2.0,5 = 1cm nên mỗi hộp xếp được tối đa số viên phấn là: 6.5 = 30.
- Nếu xếp theo hình H2: hàng 6 viên xen kẽ hàng 5 viên. Gọi số hàng xếp được là $n+1, n \in \mathbb{Z}_+$.

$$\text{Ta có } \triangle ABC \text{ đều cạnh bằng } 1 \Rightarrow CM = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ta phải có $2.0,5 + n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \leq 5 \Rightarrow n \leq \frac{8}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ xếp tối đa được 5 hàng $\Rightarrow$ mỗi hộp xếp được tối đa số viên phấn là: $3.6 + 2.5 = 28$.

- Nếu xếp theo hình H3: hàng 5 viên xen kẽ hàng 4 viên. Gọi số hàng xếp được là $m+1, m \in \mathbb{Z}_+$.

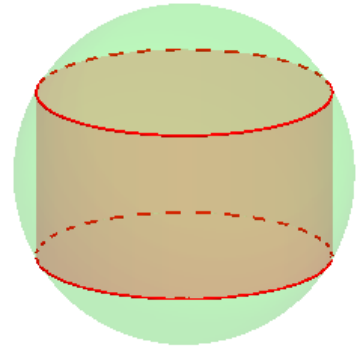
$$\text{Ta phải có } 2.0,5 + m \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \leq 6 \Rightarrow m \leq \frac{10}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{xếp tối đa được 6 hàng} \Rightarrow \text{nên mỗi hộp xếp được tối đa số viên phấn là: } 3.5 + 3.4 = 27.$$

Vậy, xếp theo hình H1 thì xếp được nhiều phấn nhất, nên cần ít hộp nhất.

Ta có $460 : 30 \approx 15,3 \Rightarrow$ cần ít nhất 16 hộp để xếp hết 460 viên phấn.

Câu 39: Một khối cầu có bán kính là 5(dm), người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng 3(dm) để làm một chiếc lu đựng nước (như hình vẽ). Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.

- A. $\frac{100}{3}\pi (dm^3)$ B. $\frac{43}{3}\pi (dm^3)$
 C. $41\pi (dm^3)$ D. $132\pi (dm^3)$



Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Cách 1: Trên hệ trục tọa độ Oxy, xét đường tròn (C): $(x-5)^2 + y^2 = 25$. Ta thấy nếu cho nửa trên trục Ox của (C) quay quanh trục Ox ta được mặt cầu bán kính bằng 5. Nếu cho hình phẳng (H) giới hạn bởi nửa trên trục Ox của (C), trục Ox, hai đường thẳng $x=0$, $x=2$ quay xung quanh trục Ox ta sẽ được khối tròn xoay chính là phần cắt đi của khối cầu trong đề bài.

$$\text{Ta có } (x-5)^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{25 - (x-5)^2}$$

$$\Rightarrow \text{Nửa trên trục Ox của (C) có phương trình } y = \sqrt{25 - (x-5)^2} = \sqrt{10x - x^2}$$

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể tròn xoay khi cho (H) quay quanh Ox là:

$$V_1 = \pi \int_0^2 (10x - x^2) dx = \pi \left(5x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{52\pi}{3}$$

$$\text{Thể tích khối cầu là: } V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = \frac{500\pi}{3}$$

$$\text{Thể tích cần tìm: } V = V_2 - 2V_1 = \frac{500\pi}{3} - 2 \cdot \frac{52\pi}{3} = 132\pi (dm^3)$$

Câu 40: Một cái trục lăn sơn nước có dạng một hình trụ. Đường kính của đường tròn đáy là 5cm, chiều dài lăn là 23cm (hình bên). Sau khi lăn tròn 15 vòng thì trục lăn tạo nên sân phẳng một diện tích tích là

- A. $1725\pi cm^2$. B. $3450\pi cm^2$.
 C. $1725\pi cm^2$. D. $862,5\pi cm^2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Diện tích xung quanh của mặt trụ là

$$S_{xq} = 2\pi Rl = 2\pi \cdot 5 \cdot 23 = 230\pi cm^2.$$

Sau khi lăn 15 vòng thì diện tích phần sơn được là:

$$S = 230\pi \cdot 15 = 3450\pi cm^2.$$



Câu 41: Một quả bóng bàn và một chiếc chén hình trụ có cùng chiều cao. Người ta đặt quả bóng lên chiếc chén thấy phần ở ngoài của quả bóng có chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao của nó. Gọi V_1 , V_2 lần lượt là thể tích của quả bóng và chiếc chén, khi đó:

- A. $9V_1 = 8V_2$. B. $3V_1 = 2V_2$. C. $16V_1 = 9V_2$. D. $27V_1 = 8V_2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

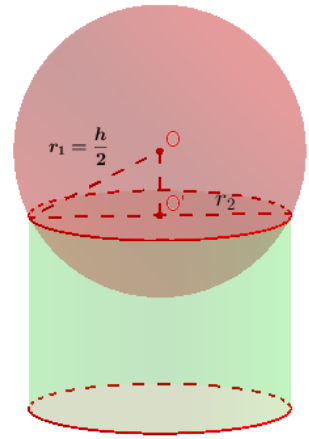
Gọi r_1 là bán kính quả bóng, r_2 là bán kính chiếc chén, h là chiều cao chiếc chén.

Theo giả thiết ta có $h = 2r_1 \Rightarrow r_1 = \frac{h}{2}$ và $OO' = \frac{r_1}{2} = \frac{h}{4}$.

Ta có $r_2^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 - \left(\frac{h}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}h^2$.

Thể tích của quả bóng là $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi h^3$

và thể tích của chén nước là $V_2 = B.h = \pi r_2^2 h = \frac{3}{16}\pi h^3 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{8}{9}$.



Câu 42: Phần không gian bên trong của chai nước ngọt có hình dạng như hình bên. Biết bán kính đáy bằng $R = 5\text{cm}$, bán kính cổ $r = 2\text{cm}$, $AB = 3\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$, $CD = 16\text{cm}$. Thể tích phần không gian bên trong của chai nước ngọt đó bằng:

A. $495\pi(\text{cm}^3)$. B. $462\pi(\text{cm}^3)$.

C. $490\pi(\text{cm}^3)$. D. $412\pi(\text{cm}^3)$.

Hướng dẫn giải:

Thể tích khối trụ có đường cao CD : $V_1 = \pi R^2.CD = 400\pi(\text{cm}^3)$.

Thể tích khối trụ có đường cao AB : $V_2 = \pi r^2.AB = 12\pi(\text{cm}^3)$.

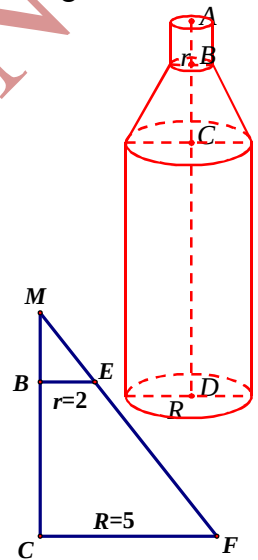
Ta có $\frac{MC}{MB} = \frac{CF}{BE} = \frac{5}{2} \Rightarrow MB = 4$

Thể tích phần giới hạn giữa BC :

$V_3 = \frac{\pi}{3}(R^2.MC - r^2.MB) = 78\pi(\text{cm}^3)$.

Suy ra: $V = V_1 + V_2 + V_3 = 490\pi(\text{cm}^3)$.

Chọn C.



Câu 43: Nhà Nam có một chiếc bàn tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$ m. Nam muốn mắc một bóng điện ở phía trên và chính giữa chiếc bàn sao cho mép bàn nhận được nhiều ánh sáng nhất. Biết rằng cường độ sáng C của bóng điện được biểu thị bởi công thức $C = c \frac{\sin \alpha}{l^2}$ (α là góc tạo bởi tia sáng tới mép bàn và mặt bàn, c - hằng số tỷ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng, l khoảng cách từ mép bàn tới bóng điện). Khoảng cách nam cần treo bóng điện tính từ mặt bàn là

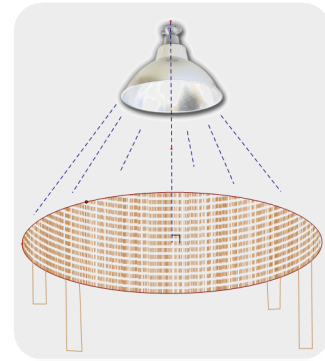
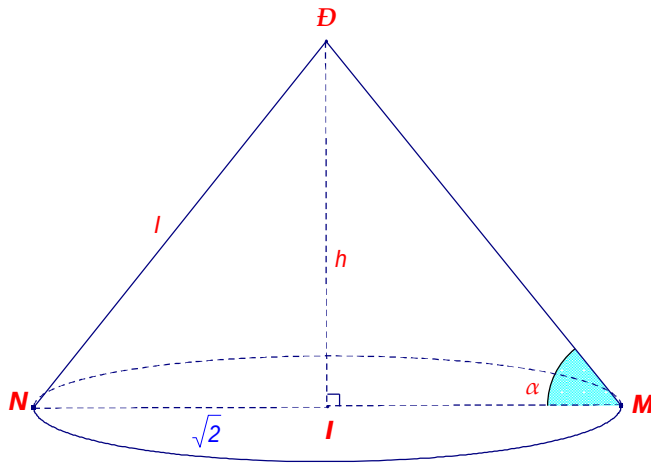
A. 1m

B. 1,2m

C. 1.5 m

D. 2m

Hướng dẫn giải:



Gọi h là độ cao của bóng điện so với mặt bàn ($h > 0$); Đ là bóng điện; l là hình chiếu của Đ lên mặt bàn. MN là đường kính của mặt bàn. (như hình vẽ)

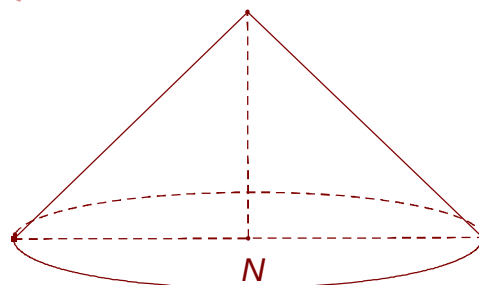
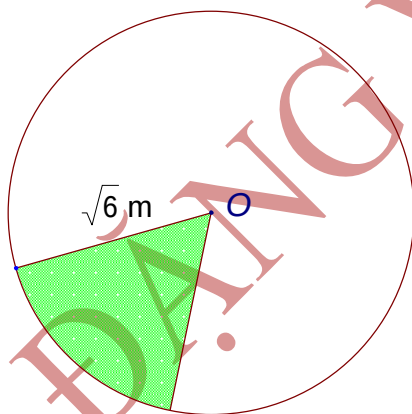
Ta có $\sin \alpha = \frac{h}{l}$ và $h^2 = l^2 - 2$, suy ra cường độ sáng là: $C(l) = c \frac{\sqrt{l^2 - 2}}{l^3}$ ($l > \sqrt{2}$).

$$C'(l) = c \cdot \frac{6 - l^2}{l^4 \cdot \sqrt{l^2 - 2}} > 0 \quad (\forall l > \sqrt{2})$$

$$C'(l) = 0 \Leftrightarrow l = \sqrt{6} \quad (l > \sqrt{2})$$

Lập bảng biến thiên ta thu được kết quả C lớn nhất khi $l = \sqrt{6}$, khi đó

Câu 44: Với một đĩa tròn bằng thép tráng có bán kính $R = \sqrt{6}m$ phải làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của đĩa này và gấp phần còn lại thành hình nón. Cung tròn của hình quạt bị cắt đi phải bằng bao nhiêu độ để hình nón có thể tích cực đại?



A. $\approx 66^\circ$

B. $\approx 294^\circ$

C. $\approx 12,56^\circ$

D. $\approx 2,8^\circ$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có thể nhận thấy đường sinh của hình nón là bán kính của đĩa tròn. Còn chu vi đáy của hình nón chính là chu vi của đĩa trừ đi độ dài cung tròn đã cắt. Như vậy ta tiến hành giải chi tiết như sau:

Gọi $x(m)$ là độ dài đáy của hình nón (phần còn lại sau khi cắt cung hình quạt của đĩa).

$$\text{Khi đó } x = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$$

Chiều cao của hình nón tính theo định lí PITAGO là $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$

Thể tích khối nón sẽ là: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \frac{x^2}{4\pi^2} \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$

Đến đây các em đạo hàm hàm $V(x)$ tìm được GTLN của $V(x)$ đạt được khi $x = \frac{2\pi}{3} R\sqrt{6} = 4\pi$

Suy ra độ dài cung tròn bị cắt đi là: $2\pi R - 4\pi \Rightarrow \alpha = \frac{2\sqrt{6}\pi - 4\pi}{2\sqrt{6}\pi} 360^\circ \approx 66^\circ$

Câu 45: Một công ty nhận làm những chiếc thùng phi kín hay đáy với thể tích theo yêu cầu là $2\pi m^3$ mỗi chiếc yêu cầu tiết kiệm vật liệu nhất. Hỏi thùng phải có bán kính đáy R và chiều cao h là bao nhiêu?

A. $R = 2m, h = \frac{1}{2}m$. **B.** $R = \frac{1}{2}m, h = 8m$. **C.** $R = 4m, h = \frac{1}{8}m$. **D.** $R = 1m, h = 2m$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi R là bán kính đáy thùng (m), h : là chiều cao của thùng (m). ĐK: $R > 0, h > 0$

Thể tích của thùng là: $V = \pi R^2 h = 2\pi \Leftrightarrow R^2 h = 2 \Leftrightarrow h = \frac{2}{R^2}$

Diện tích toàn phần của thùng là:

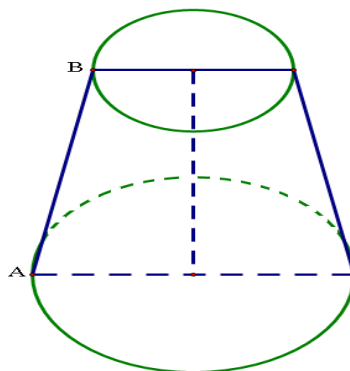
$$S_{tp} = 2\pi R h + 2\pi R^2 = 2\pi R \left(\frac{2}{R^2} + R \right) = 2\pi \left(\frac{2}{R} + R^2 \right)$$

Đặt $f(t) = 2\pi \left(\frac{2}{t} + t^2 \right) (t > 0)$ với $t = R$

$$f'(t) = 4\pi \left(t - \frac{1}{t^2} \right) = \frac{4\pi(t^3 - 1)}{t^2}, f'(1) = 0 \Leftrightarrow t^3 = 1 \Leftrightarrow t = 1$$

Từ bảng biến thiên..... ta cần chế tạo thùng với kích thước $R = 1m, h = 2m$

Câu 46: Có một cái cốc làm bằng giấy, được úp ngược như hình vẽ. Chiều cao của chiếc cốc là $20cm$, bán kính đáy cốc là $4cm$, bán kính miệng cốc là $5cm$. Một con kiến đang đứng ở điểm A của miệng cốc dự định sẽ bò hai vòng quanh thân cốc để lên đến đáy cốc ở điểm B . Quãng đường ngắn nhất để con kiến có thể thực hiện được dự định của mình gần đúng nhất với kết quả nào dưới đây?



A. $59,98cm$

B. $59,93cm$

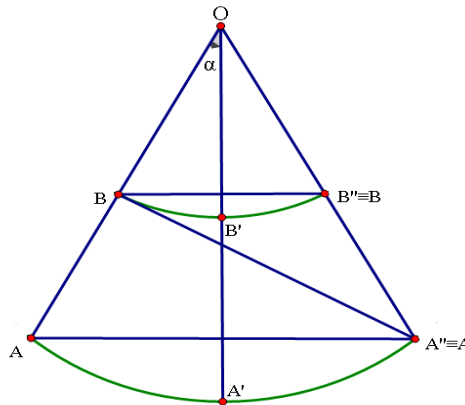
C. $58,67cm$

D. $58,80cm$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Đặt b, a, h lần lượt là bán kính đáy cốc, miệng cốc và chiều cao của cốc, α là góc kí hiệu như trên hình vẽ. Ta “trả” hai lần mặt xung quanh cốc lên mặt phẳng sẽ được một hình quạt của một khuyên với cung nhỏ $BB'' = 4\pi b$ và cung lớn $AA'' = 4\pi a$.



Độ dài ngắn nhất của đường đi của con kiến là độ dài đoạn thẳng BA'' . Áp dụng định lí hàm số cosin ta được:

$$l = \sqrt{BO^2 + OA''^2 - 2BO \cdot OA'' \cdot \cos 2\alpha} \quad (1).$$

$$B''A'' = AB = \sqrt{(a-b)^2 + h^2}. \quad \frac{a}{b} = \frac{4\pi a}{4\pi b} = \frac{l(BB'')}{l(AA'')} = \frac{OA}{OB} = \frac{OB + AB}{OB} = 1 + \frac{AB}{2\pi b} = 1 + \frac{AB \cdot \alpha}{2\pi b}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2\pi(a-b)}{AB} = \frac{2\pi(a-b)}{\sqrt{(a-b)^2 + h^2}} \quad (a). \quad \frac{AB}{OB} = \frac{a}{b} - 1 = \frac{a-b}{b} \Rightarrow OB = \frac{b\sqrt{(a-b)^2 + h^2}}{a-b} \quad (b).$$

$$OA'' = OB + BA = \frac{b\sqrt{(a-b)^2 + h^2}}{a-b} + \sqrt{(a-b)^2 + h^2} \quad (c).$$

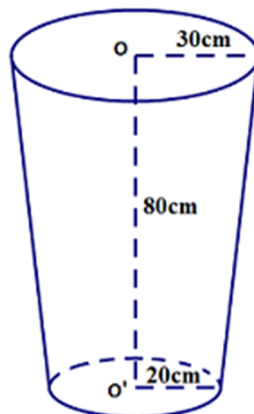
Thay (a), (b), (c) vào (1) ta tìm được l .

$$l \approx 58,79609\text{cm} \approx 58,80$$

Ghi chú. Để tồn tại lời giải trên thì đoạn BA'' phải không cắt cung BB'' tại điểm nào khác B , tức là BA'' nằm dưới tiếp tuyến của BB'' tại B . Điều này tương đương với $2\alpha < \cos^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$.

Tuy nhiên, trong lời giải của thí sinh không yêu cầu phải trình bày điều kiện này (và đề bài cũng đã cho thỏa mãn yêu cầu đó).

Câu 47: Học sinh A sử dụng 1 xô đựng nước có hình dạng và kích thước giống như hình vẽ, trong đó đáy xô là hình tròn có bán kính 20 cm, miệng xô là đường tròn bán kính 30 cm, chiều cao xô là 80 cm. Mỗi tháng A dùng hết 10 xô nước. Hỏi A phải trả bao nhiêu tiền nước mỗi tháng, biết giá nước là 20000 đồng/1 m³ (số tiền được làm tròn đến đơn vị đồng)?



- A. 35279 đồng. B. 38905 đồng. C. 42116 đồng. D. 31835 đồng.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta xét hình nón đỉnh A, đường cao $h > 80$ cm đáy là đường tròn tâm O, bán kính bằng 30 cm. Mặt phẳng (α) cách mặt đáy 80 cm cắt hình nón theo giao tuyến là đường tròn tâm O' có bán kính bằng 20 cm. Mặt phẳng (α) chia hình nón thành 2 phần. Phần I là phần chứa đỉnh A, phần II là phần không chứa đỉnh A (Như hình vẽ)

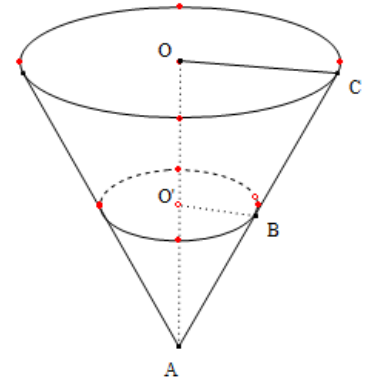
$$\text{Ta có } \frac{O'B}{OC} = \frac{AO'}{AO} \Leftrightarrow \frac{AO'}{AO' + O'O} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow AO' = 160 \text{ cm}$$

$$\text{Thể tích hình nón } V = \frac{1}{3} AO \cdot \pi \cdot 30^2 = 72000\pi \text{ cm}^3$$

$$\text{Thể tích phần I là } V_1 = \frac{1}{3} AO' \cdot \pi \cdot 20^2 = \frac{64000}{3} \pi \text{ cm}^3$$

$$\text{Vậy thể tích cái xô là thể tích phần II là } V_2 = V - V_1 = \frac{152000}{3} \pi \text{ cm}^3 = \frac{19}{375} \pi \text{ (m}^3\text{)}$$

$$\text{Vậy số tiền phải trả là } T = \frac{19\pi}{375} \cdot 10 \cdot 20000 \approx 31835 \text{ đồng.}$$



Câu 48: Một cốc nước hình trụ có chiều cao 9cm, đường kính 6cm. Mặt đáy phẳng và dày 1cm, thành cốc dày 0,2cm. Đổ vào cốc 120ml nước sau đó thả vào cốc 5 viên bi có đường kính 2cm. Hỏi mặt nước trong cốc cách mép cốc bao nhiêu cm. (Làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

- A. 3,67 cm. B. 2,67 cm. C. 3,28 cm. D. 2,28 cm.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Thành cốc dày 0,2cm nên bán kính đáy trụ bằng 2,8cm. Đáy cốc dày 1cm nên chiều cao hình trụ bằng 8cm. Thể tích khối trụ là $V = \pi \cdot (2,8)^2 \cdot 8 = 197,04 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Đổ 120ml vào cốc, thể tích còn lại là $197,04 - 120 = 77,04 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Thả 5 viên bi vào cốc, thể tích 5 viên bi bằng $V_{bi} = 5 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 = 20,94 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Thể tích cốc còn lại $77,04 - 20,94 = 56,1 \text{ (cm}^3\text{)}$.

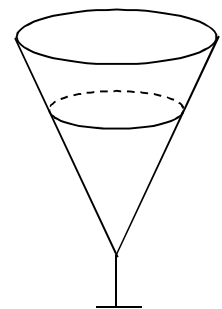
Ta có $56,1 = h' \cdot \pi \cdot (2,8)^2 \Rightarrow h' = 2,28 \text{ cm}$.

Cách khác: Dùng tỉ số thể tích

$$\frac{V_{Tr}}{V_{nuoc} + V_{bi}} = \frac{h_{coc}}{h_{nuoc+bi}} \Leftrightarrow \frac{8 \cdot (2,8)^2 \cdot \pi}{120 + 5 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi} = \frac{8}{h_{nuoc+bi}} \Rightarrow h_{nuoc+bi} = 5,72$$

Chiều cao còn lại của trụ là $8 - 5,72 = 2,28$.

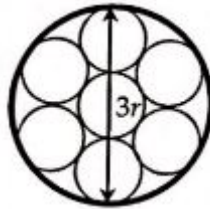
Vậy mặt nước trong cốc cách mép cốc là 2,28cm.



Câu 49: Người ta xếp 7 hình trụ có cùng bán kính đáy r và cùng chiều cao h vào một cái lọ hình trụ cũng có chiều cao h, sao cho tất cả các hình tròn đáy của hình trụ nhỏ đều tiếp xúc với đáy của hình trụ lớn, hình trụ nằm chính giữa tiếp xúc với sáu hình trụ xung quanh, mỗi hình trụ xung quanh đều tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ lớn. Khi thể tích của lọ hình trụ lớn là:

- A. $16\pi r^2 h$ B. $18\pi r^2 h$ C. $9\pi r^2 h$ D. $36\pi r^2 h$

Hướng dẫn giải:

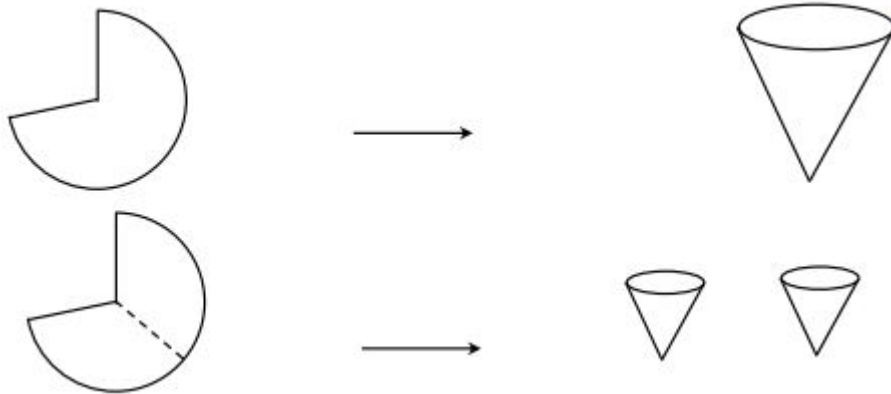


Ta có hình vẽ minh họa mặt đáy của hình đã cho như trên, khi đó ta rõ ràng nhận ra rằng $R = 3r$, đề bài thì có vẻ khá phức tạp, tuy nhiên nếu để ý kỹ thì lại rất đơn giản. Vậy khi đó $V = B.h = (3r)^2 \cdot \pi \cdot h = 9\pi r^2 h$.

Câu 50: Từ cùng một tấm kim loại dẻo hình quạt như hình vẽ có kích thước bán kính $R = 5$ và chu vi của hình quạt là $P = 8\pi + 10$, người ta gò tấm kim loại thành những chiếc phễu theo hai cách:

Câu 51: Gò tấm kim loại ban đầu thành mặt xung quanh của một cái phễu

Câu 52: Chia đôi tấm kim loại thành hai phần bằng nhau rồi gò thành mặt xung quanh của hai cái phễu
Gọi V_1 là thể tích của cái phễu thứ nhất, V_2 là tổng thể tích của hai cái phễu ở cách 2. Tính $\frac{V_1}{V_2}$?



A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{21}{\sqrt{7}}$

B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{\sqrt{6}}$

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Do chu vi của hình quạt tròn là $P = \text{độ dài cung} + 2R$. Do đó độ dài cung tròn là $l = 8\pi$

Theo cách thứ nhất: 8π chính là chu vi đường tròn đáy của cái phễu. Tức là $2\pi r = 8\pi \Rightarrow r = 4$

$$\text{Khi đó } h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \cdot 3\pi \cdot 4^2$$

Theo cách thứ hai: Thì tổng chu vi của hai đường tròn đáy của hai cái phễu là $8\pi \Leftrightarrow$ chu vi của một đường tròn đáy là $4\pi \Rightarrow 4\pi = 2\pi r \Rightarrow r = 2$

$$\text{Khi đó } h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$$

$$\Rightarrow V_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} \sqrt{21} \cdot 2^2 \cdot \pi$$

$$\text{Khi đó } \frac{V_1}{V_2} = \frac{4^2}{\frac{8\sqrt{21}}{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$$

Câu 53: Cho một miếng tôn hình tròn có bán kính 50cm . Biết hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích miếng tôn ở trên. Khi đó hình nón có bán kính đáy là

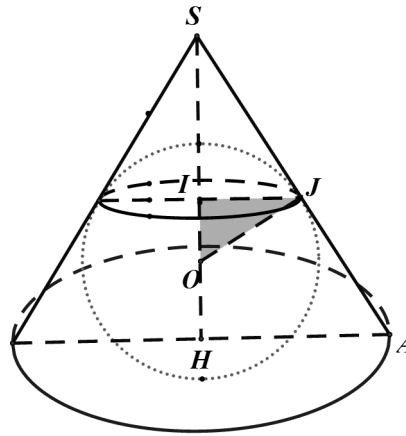
A. $10\sqrt{2}\text{cm}$

B. 20cm

C. $50\sqrt{2}\text{cm}$

D. 25cm

Hướng dẫn giải:



Đặt $a = 50\text{cm}$

Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình nón lần lượt là $x, y (x, y > 0)$. Ta có

$$SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Khi đó diện tích toàn phần của hình nón là $S_p = \pi x^2 + \pi x \sqrt{x^2 + y^2}$

Theo giả thiết ta có

$$\pi x^2 + \pi x \sqrt{x^2 + y^2} = \pi a^2 \Leftrightarrow x \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow x \sqrt{x^2 + y^2} = a^2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 (x^2 + y^2) = a^4 + x^4 - 2a^2 x^2, (DK : x < a) \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^4}{y^2 + 2a^2}$$

Khi đó thể tích khối nón là

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{a^4}{y^2 + 2a^2} \cdot y = \frac{1}{3} \pi a^4 \cdot \frac{y}{y^2 + 2a^2}$$

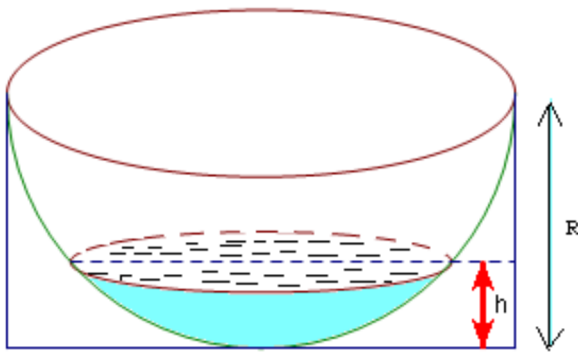
V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{y^2 + 2a^2}{y}$ đạt giá trị nhỏ nhất

$$\text{Ta có } \frac{y^2 + 2a^2}{y} = y + \frac{2a^2}{y} \geq 2 \sqrt{y \cdot \frac{2a^2}{y}} = 2\sqrt{2}a$$

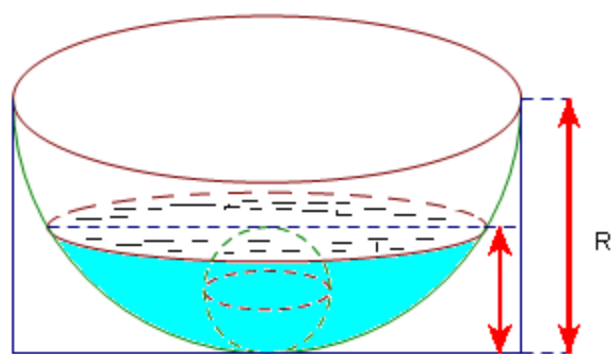
Vậy V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $y = \frac{2a^2}{y}$, tức là $y = a\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{a}{2} = 25\text{cm}$

Lưu ý: Bài trên các em xét hàm số và lập bảng biến thiên cũng được nhé

Câu 54: Một chậu nước hình bán cầu bằng nhôm có bán kính $R = 10\text{cm}$, đặt trong một khung hình hộp chữ nhật (hình 1). Trong chậu có chứa sẵn một khối nước hình chỏm cầu có chiều cao $h = 4\text{cm}$. Người ta bỏ vào chậu một viên bi hình cầu bằng kim loại thì mặt nước dâng lên vừa phủ kín viên bi (hình 2). Bán kính của viên bi gần số nguyên nào sau đây. (Cho biết thể tích khối chỏm cầu là $V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)$)



A. 2



B. 4

C. 7 D. 10

Hướng dẫn giải:

Gọi x là bán kính viên bi hình cầu. Điều kiện: $0 < 2x < 10 \Leftrightarrow 0 < x < 5$

- Thể tích viên bi là $V_{bi} = \frac{4}{3}\pi x^3$.

- Thể tích khối nước hình chỏm cầu khi chưa thả viên bi vào

$$V_1 = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) = 16\pi \left(10 - \frac{4}{3} \right) = \frac{416\pi}{3}$$

- Khi thả viên bi vào thì khối chỏm cầu gồm khối nước và viên bi có

$$\text{thể tích là: } V_2 = \pi (2x)^2 \left(R - \frac{2x}{3} \right) = \frac{4\pi x^2 (30 - 2x)}{3}$$

- Ta có phương trình:

$$V_2 - V_1 = V_{bi} \Leftrightarrow \frac{4\pi x^2 (30 - 2x)}{3} - \frac{416\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi x^3 \Leftrightarrow 4\pi x^2 (30 - 2x) - 416\pi = 4\pi x^3$$

$$\Leftrightarrow 3x^3 - 30x^2 + 104 = 0$$

- Giải phương trình ta có các nghiệm: $x_1 \approx 9,6257 > 5$ (loại)

$x_2 \approx 2,0940 < 5$ (thỏa mãn), và $x_3 \approx -1,8197$ (loại).

Vậy bán kính viên bi là: $r \approx 2,09$ (cm).

Câu 55: Một người có một dải duy băng dài 130 cm, người đó cần bọc dải duy băng đỏ đó quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà, người này dùng 10 cm của dải duy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp (như hình vẽ minh họa). Hỏi dải duy băng có thể bọc được hộp quà có thể tích lớn nhất là bao nhiêu?

A. $4000\pi \text{ cm}^3$ B. $32000\pi \text{ cm}^3$ C. $1000\pi \text{ cm}^3$ D. $16000\pi \text{ cm}^3$ **Hướng dẫn giải:**

Một bài toán thực tế khá hay trong ứng dụng của việc tìm giá trị lớn nhất của hàm số. Ta nhận thấy, dải duy băng tạo thành hai hình chữ nhật quanh cái hộp, do đó chiều dài của dải duy băng chính là tổng chu vi của hai hình chữ nhật đó. Tất nhiên chiều dài duy băng đã phải trừ đi phần duy băng dùng để thắt nơ, có nghĩa là: $22(2r + h) = 120 \Leftrightarrow h = 30 - 2r$

Khi đó thể tích của hộp quà được tính bằng công thức:

$$V = B.h = \pi.r^2 (30 - 2r) = \pi(-2r^3 + 30r^2)$$

Xét hàm số $f(r) = -2r^3 + 30r^2$ trên $(0;15)$

$$f'(r) = -6r^2 + 60r; f'(r) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0(l) \\ r = 10 \end{cases}$$

Khi đó vẽ BBT ta nhận ra $\underset{(0;10)}{Max} f(r) = f(10)$. Khi đó thể tích của hộp quả

$$V = B.h = \pi.10^2.10 = 1000\pi$$

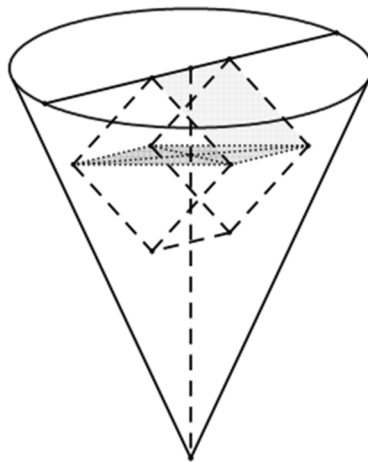
Câu 56: Một khối gạch hình lập phương (không thấm nước) có cạnh bằng 2 được đặt vào trong một chiếc phễu hình nón tròn xoay chứa đầy nước theo cách như sau: Một cạnh của viên gạch nằm trên mặt nước (nằm trên một đường kính của mặt này); các đỉnh còn lại nằm trên mặt nón; tâm của viên gạch nằm trên trục của hình nón. Tính thể tích nước còn lại ở trong phễu (làm tròn 2 chữ số thập phân).

A. $V = 22,27$

B. $V = 22,30$

C. $V = 23,10$

D. $20,64$



Hướng dẫn giải:

Gọi R, h lần lượt là bán kính và chiều cao của hình nón (phễu).

Thiết diện của hình nón song song với đáy của hình nón, qua tâm của viên gạch là hình tròn có

bán kính $R_1 = \sqrt{3}$ thỏa mãn $\frac{R_1}{R} = \frac{h - \sqrt{2}}{h} \Rightarrow \frac{h - \sqrt{2}}{h} \cdot R = \sqrt{3} \quad (1)$

Thiết diện của hình nón song song với đáy hình nón, chứa cạnh đối diện với cạnh nằm trên đáy

của hình nón là hình tròn có bán kính $R_2 = 1$ thỏa mãn $\frac{R_2}{R} = \frac{h - 2\sqrt{2}}{h} \Rightarrow \frac{h - 2\sqrt{2}}{h} \cdot R = 1 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{h - \sqrt{2}}{h - 2\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$ và $R = 2\sqrt{3} - 1$

Thể tích lượng nước còn lại trong phễu là $V = V_{\text{nón}} - V_{\text{gạch}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h - 2^3 \approx 22,2676$

Câu 57: (CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG QUẢNG NAM LẦN 2 NĂM 2019) Người ta xếp ba viên bi có bán kính bằng nhau và bằng $\sqrt{3}$ vào một cái lọ hình trụ sao cho các viên bi đều tiếp xúc với hai đáy của lọ hình trụ và các viên bi này đôi một tiếp xúc nhau và cùng tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ. Tính bán kính đáy của lọ hình trụ.

A. $1 + 2\sqrt{3}$.

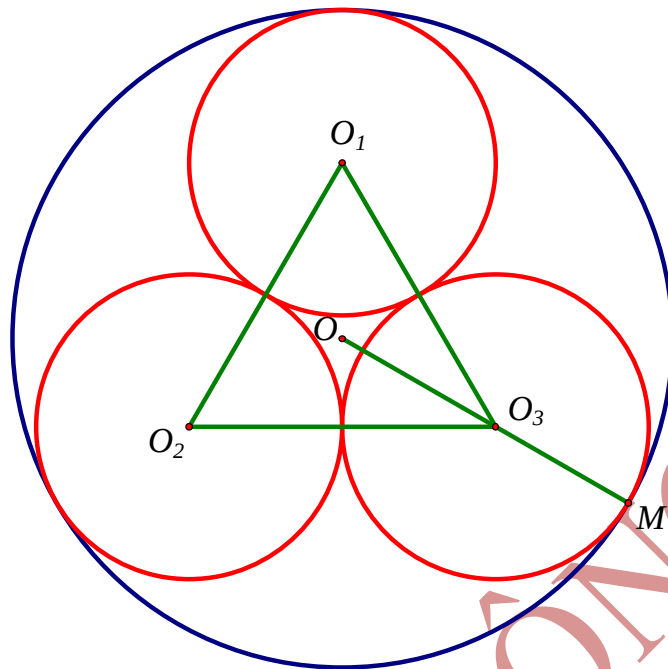
B. $2\sqrt{3}$.

C. $\frac{3 + 2\sqrt{3}}{2}$.

D. $2 + \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



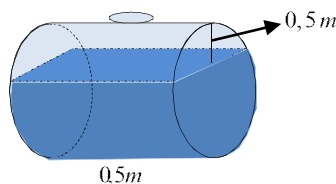
Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm của ba viên bi và $r_1 = r_2 = r_3 = \sqrt{3}$ là bán kính của ba viên bi đó. Theo giả thiết thì ba đường tròn lớn của ba viên bi đôi một tiếp xúc với nhau, khi đó ba điểm O_1, O_2, O_3 tạo thành một tam giác đều cạnh $2\sqrt{3}$. Gọi O là trọng tâm của tam giác $O_1O_2O_3$ thì

$$OO_1 = OO_2 = OO_3 = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2.$$

Cũng theo giả thiết thì ba viên bi tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ tại 3 điểm nằm trên một đường tròn bằng đường tròn đáy của lọ hình trụ (tham khảo hình vẽ trên).

Vậy bán kính đáy của lọ hình trụ là $OM = OO_3 + O_3M = 2 + \sqrt{3}$.

Câu 58: Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là $5m$, có bán kính đáy $1m$, với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với $0,5m$ của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn (theo đơn vị m^3)



A. $12,637m^3$.

B. $114,923m^3$.

C. $11,781m^3$.

D. $8,307m^3$.

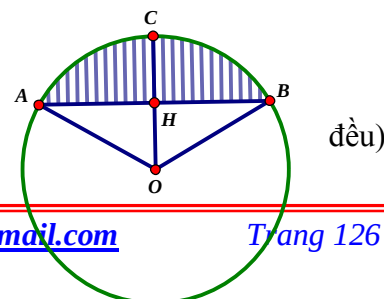
Hướng dẫn giải:

Nhận xét $OH = CH = 0,5 = \frac{R}{2} = \frac{OB}{2}$ suy ra $\triangle OHB$ là tam giác nửa đều

$$\Rightarrow \widehat{HOB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ$$

Suy ra diện tích hình quạt OAB là: $S = \frac{1}{3} \pi R^2 = \frac{1}{3} \pi$

$$\text{Mặt khác: } S_{\triangle AOB} = 2S_{\triangle HOB} = S_{\triangle BOC} = \frac{OB^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (\triangle BOC \text{ đều})$$



Vậy diện tích hình viên phân cung AB là $\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$

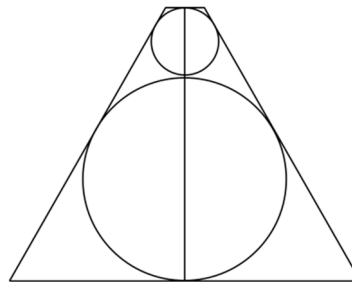
Suy ra thể tích dầu được rút ra: $V_1 = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$

Thể tích dầu ban đầu: $V = 5 \cdot \pi \cdot 1^2 = 5\pi$

Vậy thể tích còn lại: $V_2 = V - V_1 \approx 12,637m^3$.

Chọn A.

Câu 59: (Chuyên Vinh Lần 2) Người ta sản xuất một vật lưu niệm (N) bằng thủy tinh trong suốt có dạng khối tròn xoay mà thiết diện qua trục là hình thang cân. Bên trong (N) có hai khối cầu ngũ sắc với bán kính lần lượt là $R = 3cm$ và $r = 1cm$ tiếp xúc với nhau và tiếp xúc với mặt xung quanh của (N) đồng thời hai khối cầu tiếp xúc với hai đáy của (N). Tính thể tích của vật lưu niệm đó.



A. $\frac{485}{6}\pi (cm^3)$.

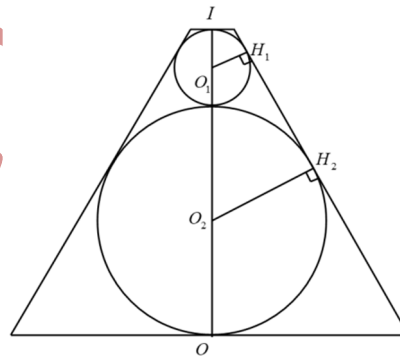
B. $81\pi (cm^3)$.

C. $72\pi (cm^3)$.

D. $\frac{728}{9}\pi (cm^3)$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\Delta IO_1H_1 \sim \Delta IO_2H_2 \Rightarrow \frac{IO_1}{IO_2} = \frac{O_1H_1}{O_2H_2} = \frac{1}{3}$

Mà $IO_2 - IO_1 = 4$ nên $IO_2 = 6cm$; $IO_1 = 2cm$; $IK = 1cm$; $IO = 9cm$

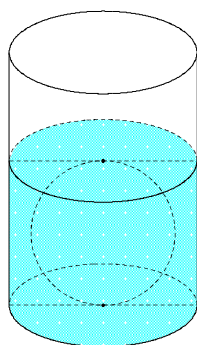
(N) là khối nón cụt có bán kính đáy lớn và đáy bé là r_1 và r_2

Trong ΔIO_1H_1 có $\sin \widehat{O_1IH_1} = \frac{1}{2}$ nên $r_1 = 3\sqrt{3}$; $r_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy thể tích của (N) là $V = \frac{1}{3}\pi (r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2)h = \frac{728}{9}\pi (cm^3)$

Câu 60: (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên Lần 2) Người ta thả một viên billiards snooker có dạng hình cầu với bán kính nhỏ hơn 4,5cm vào một chiếc cốc hình trụ đang chứa nước thì viên billiards đó tiếp xúc với đáy cốc và tiếp xúc với mặt nước sau khi dâng (tham khảo hình vẽ bên). Biết

rằng bán kính của phần trong đáy cốc bằng 5,4cm và chiều cao của mực nước ban đầu trong cốc bằng 4,5cm. Bán kính của viên billiards đó bằng?



A. 4,2cm.

B. 3,6cm.

C. 2,7cm.

D. 2,6cm.

Lời giải

Chọn C

Gọi V_1 là thể tích của viên billiards snooker và r là bán kính của nó (ĐK: $0 < r < 4,5$).

Gọi V_2, V lần lượt là thể tích của khối trụ trước và sau khi thả viên billiards snooker vào.

Khi đó: $V = V_1 + V_2$ (1).

Ta có $V_1 = \frac{4}{3}\pi.r^3$; $V_2 = \pi.5,4^2.4,5 = 131,22\pi$; $V = \pi.5,4^2.2r = 58,32\pi.r$. Thay vào (1) ta có phương trình:

$$\frac{4}{3}\pi.r^3 + 131,22\pi = 58,32\pi.r \Leftrightarrow \frac{4}{3}.r^3 - 58,32.r + 131,22 = 0 \quad (2).$$

Giải phương trình (2) ta được $r_1 \approx 4,83$ (loại); $r_2 \approx -7,53$ (loại); $r_3 = 2,7$ (Thỏa mãn).

Vậy $r = 2,7$ cm.

Câu 61: (THPT-Ngô-Quyên-Hải-Phòng-Lần-2-2018-2019) Một hộp đựng bóng tennis có dạng hình trụ. Biết rằng hộp chứa vừa khít ba quả bóng tennis được xếp theo chiều dọc, các quả bóng tennis có kích thước như nhau. Thể tích phần không gian còn trống trong hộp chiếm tỉ lệ $a\%$ so với thể tích của hộp bóng tennis. Số a gần nhất với số nào sau đây?

A. 50.

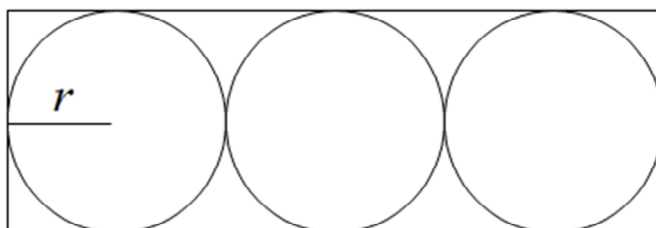
B. 66.

C. 30.

D. 33.

Lời giải

Chọn D



Gọi r là bán kính của quả bóng tennis.

Khi đó bán kính đáy hộp bằng r và chiều cao hộp bằng $6r$.

Khi đó thể tích hộp bóng hình trụ: $V = \pi r^2 h = \pi r^2 6r = 6\pi r^3$.

Thể tích một quả bóng tennis: $V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3$.

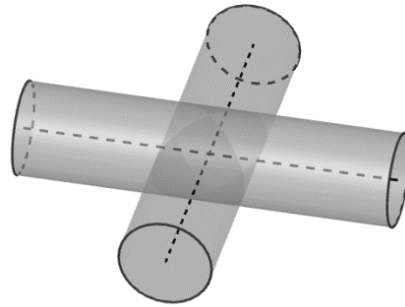
Suy ra thể tích ba quả bóng tennis là $3V_1 = 4\pi r^3$.

Thể tích phần không gian còn trống trong hộp là $V_2 = V - 3V_1 = 6\pi r^3 - 4\pi r^3 = 2\pi r^3$.

Ta có: $\frac{V_2}{V} = a\% \Leftrightarrow \frac{2\pi r^3}{6\pi r^3} = a\% \Leftrightarrow \frac{1}{3} = a\%.$

Suy ra $a \approx 33.$

Câu 62: Cho hai mặt trụ có cùng bán kính bằng 4 được đặt lồng vào nhau như hình vẽ. Tính thể tích phần chung của chúng biết hai trục của hai mặt trụ vuông góc và cắt nhau.



A. $256\pi.$

B. 512.

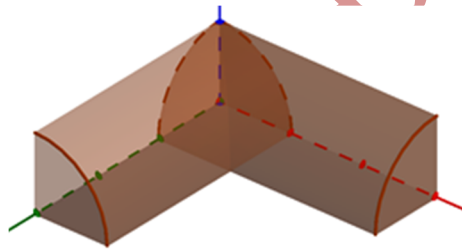
C. $\frac{256}{3}\pi.$

D. $\frac{1024}{3}.$

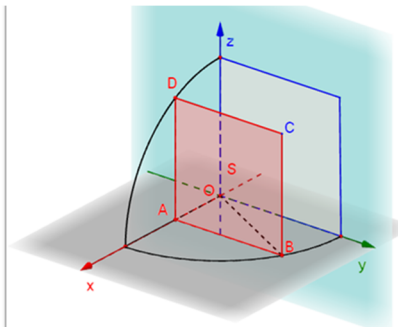
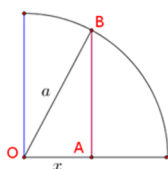
Hướng dẫn giải

Chọn D.

Cách 1. Ta xét $\frac{1}{8}$ phần giao của hai trụ như hình.



Ta gọi trục tọa độ Oxyz như hình vẽ.



Khi đó phần giao (H) là một vật thể có đáy là một phần tư hình tròn tâm O bán kính 4, thiết diện của mặt phẳng vuông góc với trục Ox là một hình vuông có diện tích $S(x) = 4^2 - x^2.$

Thể tích khối (H) là $\int_0^4 S(x) dx = \int_0^4 (16 - x^2) dx = \frac{128}{3}.$ Vậy thể tích phần giao là $\frac{1024}{3}.$

Cách 2. Dùng công thức tổng quát giao hai trụ $V = \frac{16}{3} R^3 = \frac{1024}{3}.$