

SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG THPT DĨ AN

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 CẤP TRƯỜNG
NĂM HỌC 2025 - 2026
MÔN: TOÁN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 2 trang)

Ngày thi: 31/01/2026

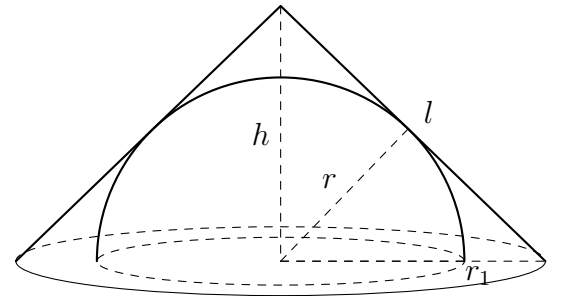
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (4 điểm)

- Một buổi chiều nọ, bên bếp lửa hồng trong gian nhà ẩm áp, người ta nhìn thấy ba mẹ con cùng ngồi ăn đậu phộng rang. Tấm ăn trước, cô bốc 1 hạt đậu và bỏ vào miệng; Cám là người bốc đậu tiếp theo, cô bỏ hai hạt đậu vào miệng; dì ghẻ là người bốc đậu tiếp theo liền bỏ 3 hạt vào miệng. Trở lại lượt của Tấm, cô lấy 4 hạt đậu, rồi Cám lấy 5 hạt đậu, dì ghẻ lấy 6 hạt đậu... Bữa ăn hào hứng như thế cho đến lượt cuối cùng thì số hạt đậu không đủ theo quy luật trò chơi, người nào đến lượt cuối sẽ lấy hết số hạt đậu còn lại. Sau bữa ăn ẩm áp ấy, Tấm nhận ra mình đã cho vào bụng khoảng 317 hạt đậu. Hỏi tổng số đậu mà ba mẹ con đã ăn trong tối đó là bao nhiêu?
- Tính số đo ba góc tam giác ABC biết $9 + 4 \left(\sqrt{2} \cos B - \sqrt{3} \cos C \right) = 4 \cos A \cos(B - C)$.

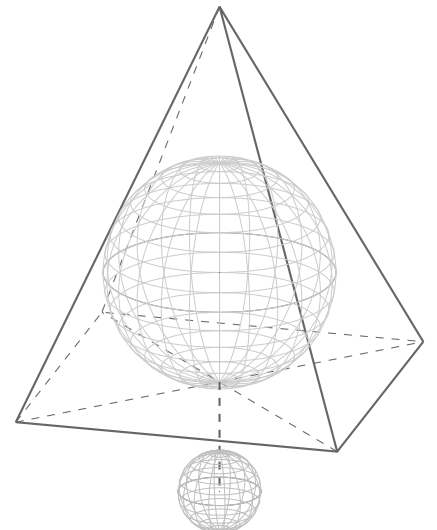
Câu 2. (4 điểm)

- Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ có đồ thị (C) . Tìm trên (C) các điểm M sao cho tiếp tuyến tại M của (C) tạo với hai đường tiệm cận của (C) một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.
- Cho nửa hình cầu bán kính r không đổi. Một hình nón có chiều cao h , bán kính đáy là r_1 . Hãy xác định h và r_1 để diện tích xung quanh của hình nón là nhỏ nhất biết rằng mặt ngoài của hình nón tiếp xúc của mặt cầu và 2 đường tròn đáy đồng tâm và cùng thuộc 1 mặt phẳng.

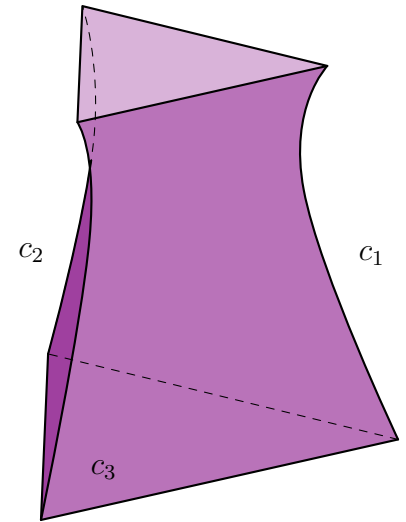


Câu 3. (4 điểm)

- Một hộp trang trí dạng hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng 40 cm. Trong hộp có một quả cầu pha lê lớn được đặt vừa khít vào hộp sao cho quả cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình chóp. Từ vị trí tâm O của đáy hình chóp, có một sợi dây dùng để treo một quả cầu nhỏ, bên trong quả cầu đó chứa những lời chúc tốt đẹp. Hộp quả được treo cân bằng trong căn phòng sao cho đỉnh hình chóp ở vị trí cao nhất và đáy hình chóp song song với mặt đất. Khi đó tâm của quả cầu pha lê và quả cầu nhỏ đối xứng nhau qua O và đồng thời tâm quả cầu nhỏ cách đều tất cả các cạnh hình chóp. Người ta đổ epoxy resin (một loại keo tổng hợp trong suốt dùng trong thủ công mỹ nghệ) vào đầy hộp để trang trí. Tính thể tích phần keo cần đổ, theo đơn vị lít.



2. Một kiến trúc sư chịu trách nhiệm thiết kế một tòa nhà có dạng hình chóp cắt cong tam giác đều. Mặt cắt ngang tại mọi độ cao, vuông góc với trục thẳng đứng, luôn là một hình tam giác đều (xem hình vẽ). Mặt đáy tòa nhà là hình tam giác đều có cạnh $L_b = 30$ m, mặt đỉnh là hình tam giác đều có cạnh $L_t = 21$ m. Mặt cắt ngang tại vị trí hẹp nhất của tòa nhà là hình tam giác có cạnh $L_{\min} = 18$ m. Tòa nhà cao 30 m và các cạnh bên c_1, c_2, c_3 của tòa nhà nằm trên các đường parabol có trục đối xứng là trục của tòa nhà. Tính thể tích của tòa nhà đó (làm tròn đến hàng đơn vị, đơn vị tính: mét khối).



Câu 4. (4 điểm)

1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = \frac{3}{2}AD$, $\widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^\circ$, $CD = AD$. Tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.
2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3; 1; 0), B(0; 1; 1)$. Đặt $P = |3\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{BM}|$, trong đó $M(a; b; c)$ là một điểm chạy trên mặt phẳng (Oxz) . Tính $a + b + c$ khi P đạt giá trị nhỏ nhất?

Câu 5. (4 điểm)

1. Ba cầu thủ đá phạt đền 11m, mỗi người đá một lần với xác suất ghi bàn tương ứng là x, y và $0,6$ (với $x > y$). Biết xác suất để ít nhất một trong ba cầu thủ ghi bàn là $0,976$ và xác suất để cả ba cầu thủ đều ghi bàn là $0,336$. Tính xác suất để có đúng hai cầu thủ ghi bàn.
2. Một gia đình ba thế hệ có 26 thành viên, trong đó có 16 người trưởng thành và 10 em bé. Mỗi em bé nuôi một con heo đất. Nhân dịp lễ $2/9$, cả gia đình nhận được 2 600 000 đồng từ Chính phủ gồm 4 tờ tiền mệnh giá 500 000 đồng và 6 tờ tiền mệnh giá 100 000 đồng. Giả sử các tờ tiền cùng mệnh giá là giống nhau. Để lưu giữ kỉ niệm, gia đình quyết định lấy 10 tờ tiền vừa nhận được bỏ vào các con heo đất của những em bé. Hỏi có bao nhiêu cách bỏ các tờ tiền trên vào các con heo đất biết có đúng 2 con heo đất không nhận được bất kì tờ tiền nào?

———— HẾT ————

Giám thị coi thi không giải thích gì thêm

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN

Biên soạn: GV. Đỗ Trọng Khang-DPAD

CÂU 1 (4.0 điểm)

1. Ba mẹ con ăn đậu theo quy luật $1, 2, 3, 4, \dots$ xoay vòng. Tắm ăn khoảng 317 hạt. Lượt cuối thiếu thì vét đĩa. Tính tổng số đậu.
2. Giải phương trình lượng giác:

$$9 + 4 \left(\sqrt{2} \cos B - \sqrt{3} \cos C \right) = 4 \cos A \cos(B - C)$$

LỜI GIẢI:

■ Ý 1: Bài toán dãy số (Chia kẹo)

Cách 1: Dùng công thức cấp số cộng (Đại số)

- Dãy số chung: $1, 2, 3, 4, 5, \dots$. Tắm là người thứ nhất.
- Các lượt ăn của Tắm: $1, 4, 7, \dots$. Số hạt ở lượt thứ k là $u_k = 3k - 2$.
- Tổng số hạt Tắm ăn sau n lượt trọn vẹn: $S_n = \frac{n(3n-1)}{2}$.
- Giải $S_n \approx 317 \Rightarrow 3n^2 \approx 634 \Rightarrow n \approx 14.5$. Chọn $n = 14$.
- $S_{14} = 287$. Số hạt vét đĩa: $317 - 287 = 30$.
- Lượt tiếp theo (thứ 15 của Tắm) ứng với $u_{15} = 43$. Vì $30 < 43$ nên đúng là vét đĩa.
- Tổng số đậu = (Tổng 42 số tự nhiên đầu) + 30 hạt lẻ = $903 + 30 = \mathbf{933}$.

Cách 2: Liệt kê và ước lượng (Số học)

- Tổng 3 lượt trong 1 vòng thứ k : $(3k - 2) + (3k - 1) + 3k = 9k - 3$.
- Tắm chiếm khoảng $1/3$ tổng số hạt. Tổng hạt ước lượng $317 \times 3 \approx 951$.
- Tổng n số tự nhiên $\approx \frac{m^2}{2} \approx 951 \Rightarrow m \approx \sqrt{1900} \approx 43$.
- Kiểm tra lượt 43: Lượt này thuộc về Tắm (vì $43 \equiv 1 \pmod{3}$).
- Số hạt Tắm ăn nếu đầy đủ đến lượt 43: $S_{\text{Tắm}} = \sum_{k=1}^{15} (3k - 2) = 335 > 317$.
- Vậy Tắm dừng ở giữa chừng lượt thứ 15.
- Tính lại chính xác như Cách 1 ra 933.

■ Ý 2: Phương trình lượng giác**Cách 1: Tổng bình phương (Đại số)**

- Biến đổi VP: $4 \cos A \cos(B - C) = -4 \cos(B + C) \cos(B - C) = -2(\cos 2B + \cos 2C) = 4 - 4 \cos^2 B - 4 \cos^2 C$.
- Chuyển vế: $(4 \cos^2 B + 4\sqrt{2} \cos B + 2) + (4 \cos^2 C - 4\sqrt{3} \cos C + 3) = 0$.
- $\Leftrightarrow (2 \cos B + \sqrt{2})^2 + (2 \cos C - \sqrt{3})^2 = 0$.
- $\Leftrightarrow \hat{B} = 135^\circ, \hat{C} = 30^\circ \Rightarrow \hat{A} = 15^\circ$.

Cách 2: Đánh giá (Bất đẳng thức)

- Ta có $2 \cos B + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos B = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ là điểm rơi.
- Xét hàm $f(x) = 4x^2 + 4\sqrt{2}x + 2 = (2x + \sqrt{2})^2 \geq 0$.
- Phương trình thực chất là tổng các hàm không âm bằng 0. Cách tư duy này giúp xác định nhanh dạng toán "tổng bình phương".

CÂU 2 (4.0 điểm)

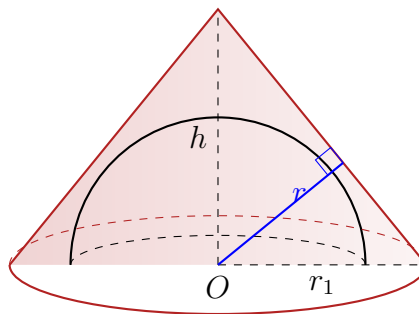
1. Tìm $M \in (C) : y = \frac{x-3}{x+1}$ để Δ tạo bởi tiếp tuyến và 2 tiệm cận có bán kính nội tiếp Max.
2. Hình nón tròn bán cầu bán kính r . Tìm h, r_1 để diện tích xung quanh nón Min.

LỜI GIẢI:**■ Ý 1: Cực trị Hình học giải tích****Cách 1: Bất đẳng thức AM-GM (Cauchy)**

- Gọi A, B là giao điểm của tiếp tuyến với 2 tiệm cận $I(-1; 1)$.
- Diện tích $S_{IAB} = 8$ (hằng số).
- $r = \frac{8}{IA+IB+\sqrt{IA^2+IB^2}}$. Để r max $\Rightarrow (IA + IB)$ min.
- $IA + IB \geq 2\sqrt{IA \cdot IB} = 2\sqrt{16} = 8$.
- Dấu "=" khi $IA = IB$ (Vuông cân) $\Rightarrow k = \pm 1 \Rightarrow M(1; -1), M(-3; 3)$.

Cách 2: Tham số hóa tọa độ

- Gọi $M(x_0; 1 - \frac{4}{x_0+1})$. Viết phương trình tiếp tuyến.
- Tìm tọa độ $A(-1; y_A), B(x_B; 1)$. Tính độ dài IA, IB theo x_0 .
- Thiết lập hàm số bán kính $r(x_0)$ và khảo sát đạo hàm (Cách này dài nhưng tổng quát cho mọi bài toán không có tính chất tam giác vuông cân).

■ Ý 2: Tối ưu Hình học không gian**Cách 1: Lượng giác hóa - Khuyến dùng**

- Đặt α là góc ở đáy ($0 < \alpha < 90^\circ$).
- $r_1 = h \cot \alpha$ và $r = r_1 \sin \alpha \Rightarrow r_1 = \frac{r}{\sin \alpha}$.
- $S_{xq} = \pi r_1 l = \frac{\pi r^2}{\sin^2 \alpha \cos \alpha}$.
- Khảo sát mẫu số $f(\alpha) = (1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha$. Max khi $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

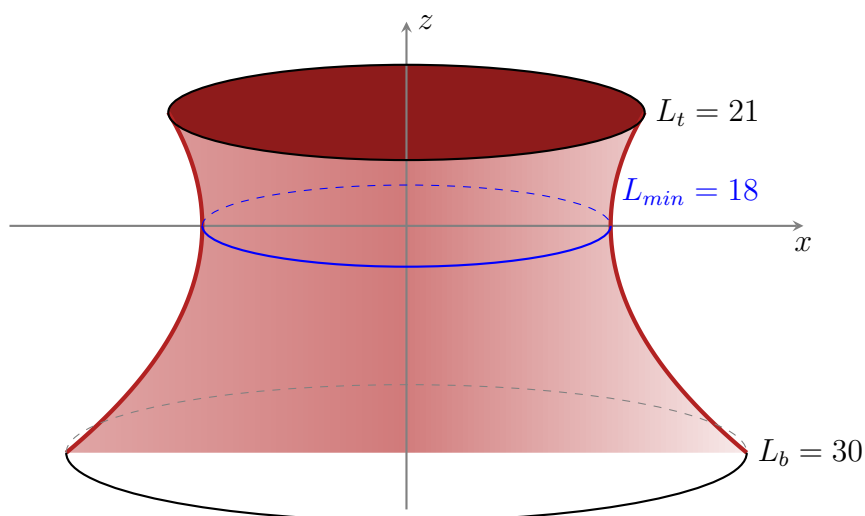
- Kết quả: $h = r\sqrt{3}, r_1 = \frac{r\sqrt{6}}{2}$.

Cách 2: Đại số hóa

- Đặt ẩn h . Ta có $\Delta \sim \Delta \Rightarrow \frac{r_1}{\sqrt{h^2 + r_1^2}} = \frac{r_1}{l} = \cos \alpha$.
- Từ đồng dạng: $r_1^2 = \frac{h^2 r^2}{h^2 - r^2}$.
- $S_{xq}(h) = \pi r_1 \sqrt{h^2 + r_1^2}$. Thay r_1 vào và đạo hàm theo h .
- Kết quả tương đương nhưng tính toán nặng nề hơn.

CÂU 3 (4.0 điểm)

1. Tính thể tích Epoxy (trừ phần cầu nội tiếp).
2. Tính thể tích tòa nhà chóp cắt cong Hyperboloid ($L_b = 30, L_t = 21, L_{min} = 18$, cao 30m).

LỜI GIẢI:**■ Ý 2: Thể tích vật thể tròn xoay (Hyperboloid)****Cách 1: Tích phân xác định**

- Chọn gốc O tại eo. $L(z) = az^2 + 18$.
- Hệ phương trình: $z_2 - z_1 = 30$ và $az_1^2 + 18 = 30, az_2^2 + 18 = 21$.
- Giải ra $z_1 = -20, z_2 = 10, a = 0.03$.
- $V = \int_{-20}^{10} \frac{\sqrt{3}}{4} (0.03z^2 + 18)^2 dz$.
- Kết quả: $V = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 13554 \approx 5869 m^3$.

Cách 2: Công thức Simpson (Mẹo giải nhanh trắc nghiệm)

- Với các vật thể có biên là đường cong bậc 2 (parabol), công thức Simpson cho kết quả chính xác tuyệt đối:

$$V = \frac{h}{6} (S_{\text{đáy}} + 4S_{\text{giữa}} + S_{\text{đỉnh}})$$

- $S_{\text{đáy}} = S(-20), S_{\text{đỉnh}} = S(10), S_{\text{giữa}} = S(-5)$.
- Bấm máy tính 1 dòng ra ngay kết quả, rất hữu ích để kiểm tra lại tích phân.

CÂU 4 (4.0 điểm)

1. Tứ diện $ABCD$: $AC = 1.5AD$, $\widehat{A} = 60^\circ$, $CD = AD$. Tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.
2. Trong $Oxyz$, tìm Min $P = |3\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{BM}|$ với $M \in (Oxz)$.

LỜI GIẢI:**■ Ý 1: Góc giữa 2 vectơ****Cách 1: Phân tích vectơ**

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- $= \frac{1}{2}AB \cdot AD - \frac{3}{4}AB \cdot AD = -\frac{1}{4}AB \cdot AD$.
- $\cos = -\frac{1}{4}$ (Vì $CD = AD$).

Cách 2: Chọn hệ trục tọa độ đặc biệt

- Chọn $A(0; 0; 0)$. $B(b; 0; 0)$ nằm trên Ox .
- $D(1; \sqrt{3}; 0)$ (trong mp Oxy , giả sử $AD = 2$).
- C nằm trong không gian sao cho $AC = 3$ và $\widehat{CAB} = 60^\circ$.
- Tính tích vô hướng qua tọa độ. (Cách này dài hơn nhưng trực quan cho ai thạo $Oxyz$).

■ Ý 2: Cực trị Vectơ**Cách 1: Tâm tỉ cự**

- Tìm I : $\overrightarrow{OI} = 3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} = (9; 1; -2)$.
- $P = IM$. Min khi M là hình chiếu I lên $(Oxz) \Rightarrow M(9; 0; -2)$.

Cách 2: Biến đổi đại số

- $P^2 = (3\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{BM})^2 = 9AM^2 + 4BM^2 - 12\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$.
- Thay tọa độ $M(x; 0; z)$ vào, nhóm hằng đẳng thức: $(x - 9)^2 + (z + 2)^2 + C \geq C$.
- Tìm được $x = 9, z = -2$.

CÂU 5 (4.0 điểm)

1. Xác suất sút phạt. Tính XS đúng 2 người ghi bàn.
2. Chia 2.6tr (4 tờ 500k, 6 tờ 100k) vào 10 heo, đúng 2 heo rỗng.

LỜI GIẢI:**■ Ý 2: Tổ hợp chia kẹo**

Cách 1: Nguyên lý bao hàm - loại trừ

- **B1:** Chọn 2 heo rỗng: $C_{10}^2 = 45$.
- **B2:** Chia tiền vào 8 heo còn lại (không rỗng).
- Số cách chia m vật loại A, n vật loại B vào k hộp tùy ý: $C_{k+m-1}^m C_{k+n-1}^n$.
- Áp dụng công thức bao hàm loại trừ:

$$N = \sum_{j=0}^8 (-1)^j C_8^j \cdot S_{8-j}$$

- Tính toán: $N = 4236$. Kết quả: 190,620.

Cách 2: Đa thức sinh- Dành cho HS chuyên

- Số cách chia vào 8 hộp khác nhau, không rỗng tương ứng với hệ số của $x^4 y^6$ trong khai triển đa thức:

$$P(x, y) = [(1 + x + x^2 + \dots)(1 + y + y^2 + \dots) - 1]^8$$

- Phần trong ngoặc là $(\frac{1}{1-x} \frac{1}{1-y} - 1)^8$.
- Tìm hệ số trong khai triển này. Đây là cách giải "sang chảnh" và chặt chẽ về mặt toán học cao cấp.