TS. NGUYỄN THANH VÂN - TRẦN MINH QUANG

450 Bài tập TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TÍCH PHÂN



THEO CHƯƠNG TRÌNH TỪ NĂM 2007 CỦA BỘ GD & ĐT

- DÀNH CHO HỌC SINH LUYỆN THI TÚ TÀI VÀ TUYỂN SINH ĐẠI HỌC & CAO ĐẲNG
- PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TỪNG LOẠI TÍCH PHÂN

HQGHN
5
V
7
986

ĐHQG Hà Nội NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TS. NGUYỄN THANH VÂN
Cử nhân Giáo khoa Toán TRẦN MINH QUANG

450

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

TÍCH PHÂN

THEO CHƯƠNG TRÌNH TỪ NĂM 2007
CỦA BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

- DÀNH CHO HỌC SINH LUYỆN THI TÚ TÀI VÀ TUYỂN SINH CAO ĐẲNG & ĐẠI HỌC
- PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TỪNG LOẠI TÍCH PHÂN

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội

Điện thoại: (04) 9724852; (04) 9724770 Fax: (04) 9714899

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập: TẠ ĐẠT – TRẦN HƯNG

Chế bản: NS HỒNG ÂN

Trình bày bìa: NGỌC ANH

450 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TÍCH PHÂN

Mã số: 1L – 300ĐH2007

In 2000 cuốn, khổ 16 · 24cm tại Công ti TNHH in bao bì Phong Tân.

Số xuất bản: 897 – 2007/CXB/19 – 146/ĐHQGHN, ngày 12/11/2007

Quyết định xuất bản số: 687LK/XB

In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2007.

LỜI NÓI ĐẦU

Chúng tôi biên soạn quyển sách này nhằm giúp học sinh chuẩn bị cho thi trắc nghiệm của kì thi Tú tài và Tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng bắt đầu từ năm 2007.

Thi trắc nghiệm môn Toán là vấn đề mới nên việc biên soạn và học để làm bài trắc nghiệm ban đầu sẽ có nhiều bỡ ngỡ.

Trong kì thi Tú tài và Tuyển sinh vào Đại học số câu trắc nghiệm Tích phân là 5 câu, thời gian làm bài khoảng 9 phút. Đây là khoảng thời gian rất ngắn nên thí sinh phải nắm rất vững các công thức, có kĩ năng suy luận và tính toán nhanh.

Trong quá trình biên soạn, chúng tôi đã giảm tải các bài toán dài hoặc khó. Các bài toán tự luận chỉ có mục đích tập dợt kĩ năng tính toán, áp dụng công thức... học sinh chủ yếu tự giải quyết trả lời các câu trắc nghiệm sau đó tự đánh giá qua câu trả lời.

Biên soạn câu hỏi trắc nghiệm là vấn đề mới, các câu hỏi dùng được hay không phải thông qua quá trình giảng dạy, làm thử của học sinh nên bước đầu sẽ có một số câu chưa hay. Chúng tôi sẽ rút kinh nghiệm và chỉnh sửa trong các lần tái bản, xin bạn đọc lượng thứ.

Các tác giả

Bài 1 : HỌ NGUYÊN HÀM

1. ĐỊNH NGHĨA

- *F(x) là nguyên hàm của f(x) trên (a; b)*

  $\Leftrightarrow$ $F'(x) = f(x)$ *với* $\forall x \in (a; b)$

- *F(x) là 1 nguyên hàm của f(x) trên [a; b]*

$$\Rightarrow \begin{cases} F'(x) = f(x) \text{ với } \forall x \in (a; b) \\ F'(a^+) = f(a) \\ F'(b^-) = f(b) \end{cases}$$

1 Chứng minh $F(x) = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + k}\right|$ là 1 nguyên hàm của

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} \text{ trên R.}$$

Ta có : $F'(x) = \dfrac{(x + \sqrt{x^2 + k})'}{x + \sqrt{x^2 + k}}$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + k}}}{x + \sqrt{x^2 + k}} = \frac{\sqrt{x^2 + k} + x}{\sqrt{x^2 + k}(x + \sqrt{x^2 + k})}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} = f(x) \text{ với } \forall x \in R.$$

Do đó F(x) là 1 nguyên hàm của f(x) trên R. ■

2 Chứng minh $F(x) = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x - a}{x + a}\right|$ với $a > 0$ là 1 nguyên hàm của

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2} \text{ trên } R\backslash\{-a; a\}$$

$\forall x \neq \pm a$ ta có : $F'(x) = \dfrac{1}{2a}\dfrac{\left(\dfrac{x - a}{x + a}\right)'}{\left(\dfrac{x - a}{x + a}\right)} = \dfrac{1}{2a}\dfrac{\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -a \\ 1 & a \end{vmatrix}}{(x + a)^2}}{\dfrac{x - a}{x + a}}$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2a} \cdot \frac{2a}{(x + a)^2} \cdot \frac{x + a}{x - a}$$

$$\Rightarrow \quad F'(x) = \frac{1}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{x^2-a^2} = f(x)$$

Vậy F(x) là 1 nguyên hàm của f(x) trên $R\setminus\{\pm a\}$ ■

3 Tìm a, b, c sao cho $F(x) = e^{\sqrt{2}x}(a\tan^2 x + b\tan x + c)$ là 1 nguyên hàm của

$$f(x) = e^{\sqrt{2}x}\tan^2 x \text{ trên } \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right).$$

$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ thì :

$$F'(x) = \sqrt{2}\,e^{\sqrt{2}x}(a\tan^2 x + b\tan x + c) + \square\,(2a(1+\tan^2 x)\tan x - b(1+\tan^2 x))$$

F(x) là nguyên hàm của f(x) trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\sqrt{2}x}[2a\tan^3 x + (\sqrt{2}a + b)\tan^2 x + (\sqrt{2}b + 2a)\tan x + \sqrt{2}c + b]$$

$$= e^{\sqrt{2}x}\tan^2 x \qquad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ \sqrt{2}a + b = 0 \\ \sqrt{2}b + 2a = 0 \\ \sqrt{2}c + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} \quad ■$$

4 Cho hàm số $f(x) = x\sqrt{3-x}$.

Tìm các số a, b sao cho hàm số $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3-x}$ là 1 nguyên hàm của f(x) trên $(-\infty; 3]$.

Ta có : $\quad F'(x) = (2ax + b)\sqrt{3-x} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}}(ax^2 + bx + c)$

$$\Rightarrow \quad F'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{3-x}}[(2ax + b)2(3-x) - (ax^2 + bx + c)]$$

$$\Rightarrow \quad F'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{3-x}}[-5ax^2 + (12a - 3b)x + 6b - c]$$

F(x) là 1 nguyên hàm của f(x) trên $(-\infty; 3]$

$$\Leftrightarrow \quad F'(x) = f(x) \ \forall x, \ x \le 3$$

$$\Leftrightarrow \quad -5ax^2 + (12a - 3b)x + 6b - c = 2(3-x)x \qquad (\forall x \le 3)$$

$\Rightarrow \quad -5ax^2 + (12a - 3b)x + 6b - c = 2x^2 + 6x \qquad (\forall x < 3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5a = -2 \\ 12a - 3b = 6 \\ 6b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{5} \\ b = \dfrac{2}{5} \\ c = \dfrac{12}{5} \end{cases} \blacksquare$$

5 Chứng minh $F(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ là 1 nguyên hàm trên R của

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)e^x + 1}{x^2} & \text{nếu } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

- Khi $x \neq 0$ thì $F'(x) = \dfrac{e^x.x - (e^x - 1)1}{x^2} = \dfrac{(x-1)e^x + 1}{x^2} = f(x)$

  Vậy F(x) là nguyên hàm của f(x) trên $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ (1)

- Tại $x = 0$: $F'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{e^x - 1}{x} - 1}{x}$

$$\Rightarrow \quad F'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2} = f(0) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ F(x) là nguyên hàm của f(x) trên R. $\blacksquare$

6 Chứng minh $F(x) = |x| - \ln(1 + |x|)$ là 1 nguyên hàm trên R của

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

Ta có : $$F(x) = \begin{cases} x - \ln(1 + x) & \text{nếu } x > 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ -x - \ln(1 - x) & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

và $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + x} & \text{nếu } x > 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ \dfrac{x}{1 - x} & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

• Khi $x > 0$ thì $F'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x} = f(x)$ (1)

• Khi $x < 0$ thì $F'(x) = -1 + \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{x}{1-x} = f(x)$ (2)

• Tại $x = 0$: $F'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x}$

$\Rightarrow \quad F'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x} - \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 - 1 = 0 = f(0)$

Mặt khác : $F'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x - \ln(1-x)}{x}$

$\Rightarrow \quad F'(0^-) = -1 + \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{-x} = -1 + 1 = 0$

Vậy : $F'(0^+) = F'(0^-) = 0 \quad \Rightarrow \quad F'(0) = 0 = f(0)$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow$ F(x) là nguyên hàm của f(x) trên R. ■

2. HỌ NGUYÊN HÀM

Nếu hàm số f(x) có một nguyên hàm F(x) thì nó có vô số nguyên hàm và tất cả các nguyên hàm đều có dạng F(x) + C (C hằng số tùy ý).

• **Kí hiệu** $\int f(x)dx$ ***là họ nguyên hàm của hàm số f(x).***

• **Tính chất :**

a) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

b) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

c) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \quad (k \in R)$

d) Nếu F(t) là một nguyên hàm của f(t) thì F[u(x)] là một nguyên hàm của f[u(x)]u'(x).

• **Bảng nguyên hàm thường dùng :** ***với*** $u = u(x)$

1. $\int du = u + C$

2. $\int u^\alpha du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \neq -1)$

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C \qquad (u \neq 0)$

4. $\int e^u du = e^u + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$

5. $\int \cos u du = \sin u + C$

6. $\int \sin u du = -\cos u + C$

7. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \int (1 + \tan^2 u) du = \tan u + C$

8. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = \int (1 + \cot^2 u) du = -\cot u + C$

- **Bảng nguyên hàm mở rộng :** *với* $a \in R \setminus \{0\}$, $b \in R$.

$$\int (ax + b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{\alpha + 1}}{\alpha + 1} + C \quad (\alpha \in R \setminus \{-1\})$$

$$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + C$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

$$\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$$

$$\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2(ax + b)} = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2(ax + b)} = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + C$$

- **Phương pháp đổi biến số :**

Nếu $t = u(x)$ ***có đạo hàm liên tục và*** $\int f(t) dt = F(t) + C$ ***thì***

$$\int f[u(x)] u'(x) dx = F[u(x)] + C$$

- **Phương pháp nguyên hàm từng phần :**

Nếu $u(x)$ ***và*** $v(x)$ ***có đạo hàm liên tục trên K (khoảng hay đoạn nào đó) thì trên K***

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

7 Tìm nguyên hàm F(x) của $f(x) = 2\sin 5x + \sqrt{x} + \frac{3}{5}$ sao cho đồ thị của hàm số f(x) và F(x) cắt nhau tại một điểm trên trục tung.

Ta có : $f(x) = 2\sin 5x + \sqrt{x} + \frac{3}{5}$

$\Rightarrow \quad F(x) = -\frac{2}{5}\cos 5x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{5}x + C$

Do 2 đồ thị cắt nhau tại một điểm trên trục tung

$\Rightarrow \quad F(0) = f(0) \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{5} + C = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad C = 1$

Vậy : $F(x) = -\frac{2}{5}\cos 5x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{5} + 1$ ■

8 Tìm họ nguyên hàm của :

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 + x + 2}{x^2 + x + 1} \quad \text{và} \quad g(x) = \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + x + 1}.$$

Ta có : $\int f(x)dx = \int \frac{x^4 + 2x^2 + x + 2}{x^2 + x + 1}dx = \int (x^2 - x + 2)dx$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + C$$

Ta có : $\int g(x)dx = \int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1}dx = \int (x^2 - x + 1)dx$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C$$ ■

9 Tìm họ nguyên hàm của $f(x) = x(1 - x)^{20}$.

Ta có : $f(x) = [(x - 1) + 1](x - 1)^{20} \quad \Rightarrow \quad f(x) = +(x - 1)^{21} + (x - 1)^{20}$

Vậy : $\int f(x)dx = +\int (x - 1)^{21}d(x - 1) + \int (x - 1)^{20}d(x - 1)$

$$= \frac{+(x - 1)^{22}}{22} + \frac{(x - 1)^{21}}{21} + C$$ ■

10 Tìm họ nguyên hàm của $f(x) = \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$.

Ta có : $\int f(x)dx = \int \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 - 1}}dx = \int \frac{2x\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)}{x^2 - (x^2 - 1)}dx$

$$= \int 2x^2dx - \int 2x\sqrt{x^2 - 1}dx = \frac{2}{3}x^3 - \int (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}d(x^2 - 1)$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}\left(x^2 - 1\right)^{\frac{3}{2}} + C$$ ■

11 Tìm họ nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$.

Đặt $u = \sqrt{x+1} \Rightarrow u^2 = x+1 \Rightarrow 2u\,du = dx$

Do đó: $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}} = \int \frac{(u^2-1)\cdot 2u\,du}{u} = \int (2u^2-2)\,du = \frac{2}{3}u^3 - 2u + C$

$= \dfrac{2}{3}u(u^2-3) + C = \dfrac{2}{3}\sqrt{x+1}(x-2) + C$ ■

12 Tìm họ nguyên hàm của $f(x) = \tan x + \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}$.

Ta có: $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}{(2x+1)-(2x-1)}$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{1}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{2}(2x-1)^{\frac{1}{2}}$

Do đó:

$$\int f(x)dx = \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x} + \frac{1}{4}\int (2x+1)^{\frac{1}{2}}\,d(2x+1) - \frac{1}{4}\int (2x-1)^{\frac{1}{2}}\,d(2x-1)$$

$$= -\ln|\cos x| + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}$$

$$= -\ln|\cos x| + \frac{1}{6}\left[(2x+1)^{\frac{3}{2}} - (2x-1)^{\frac{3}{2}}\right] + C$$

13 Tìm họ nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}$.

Ta có: $\displaystyle\int f(x)dx = \int \frac{\sqrt{(x^2+x^{-2})^2}}{x^3}\,dx = \int \frac{|x^2+x^{-2}|}{x^3}\,dx$

$= \displaystyle\int \frac{(x^2+x^{-2})}{x^3}dx$ (do $x^2 + \dfrac{1}{x^2} > 0, \forall x$)

$= \displaystyle\int\left(\frac{1}{x}+x^{-5}\right)dx = \ln|x| - \frac{x^{-4}}{4} + C = \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C$ ■

14 Tìm họ nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{e^{3x}+1}{e^x+1}$.

Ta có: $\displaystyle\int f(x)dx = \int \frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{e^x+1}dx = \int (e^{2x}-e^x+1)dx$

$= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int e^{2x}d(2x) - \int (e^x-1)dx = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + C$ ■

15 Tìm họ nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{x^{2001}}{(1+x^2)^{1002}}$.

Ta có : $f(x) = \dfrac{\left(x^2\right)^{1000}}{\left(1+x^2\right)^{1000}} \cdot \dfrac{x}{\left(1+x^2\right)^2}$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \int\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{1000} \cdot \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{1000} \cdot d\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2002}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{1001} + C \quad \blacksquare$$

16 Tìm họ nguyên hàm của $f(x) = \sqrt{e^x + e^{-x} - 2}$.

Ta có : $f(x) = \sqrt{(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})^2} = \left|e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right|$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} & \left(\text{nếu } \dfrac{x}{2} \geq -\dfrac{x}{2}\right) \\ -e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} & \left(\text{nếu } \dfrac{x}{2} < -\dfrac{x}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} & (\text{nếu } x \geq 0) \\ -e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} & (\text{nếu } x < 0) \end{cases}$$

Do đó : $\int f(x)dx = \begin{cases} 2(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}) & (\text{nếu } x \geq 0) \\ -2(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}) & (\text{nếu } x < 0) \end{cases}$ $\blacksquare$

17 Tìm họ nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[10]{x+1}}$.

Đặt $t = \sqrt[10]{x+1} \Rightarrow t^{10} = x+1 \Rightarrow 10t^9dt = dx$

Vậy : $\int f(x)dx = \int\dfrac{(t^{10}-1)}{t}10t^9dt = 10\int(t^{18} - t^8)dt = \dfrac{10t^{19}}{19} - \dfrac{10t^9}{9}$

$$= 10\left(\frac{\sqrt[10]{(x+1)^{19}}}{19} - \frac{\sqrt[10]{(x+1)^9}}{9}\right) + C \quad \blacksquare$$

18 Tìm họ nguyên hàm của $F(x) = \dfrac{\ln ex}{1 + x\ln x}$

Ta có : $d(1 + x\ln x) = (1 + x\ln x)'dx = \left(1\ln x + \dfrac{1}{x}.x\right)dx$

$= (\ln x + 1)dx = \ln ex.dx$

Do đó $\int f(x)dx = \int \dfrac{\ln ex dx}{x\ln x + 1} = \int \dfrac{d(1 + x\ln x)}{x\ln x + 1}$

$\Rightarrow \quad \int f(x)dx = \ln|x\ln x + 1| + C$ ■

19 **a)** Tìm A, B để $\dfrac{3x + 1}{(x + 1)^3} \equiv \dfrac{A}{(x + 1)^3} + \dfrac{B}{(x + 1)^2}$

b) Tìm họ nguyên hàm của $\dfrac{3x + 1}{(x + 1)^3}$

a) $\dfrac{3x + 1}{(x + 1)^3} \equiv \dfrac{A}{(x + 1)^3} + \dfrac{B}{(x + 1)^2} \Leftrightarrow 3x + 1 \equiv A + B(x + 1)$

$\Leftrightarrow 3x + 1 \equiv Bx + A + B$

$\Leftrightarrow \begin{cases} B = 3 \\ A + B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 3 \end{cases}$

b) $\int \dfrac{3x + 1}{(x + 1)^3}dx = \int \dfrac{-2}{(x + 1)^3}dx + \int \dfrac{3dx}{(x + 1)^2}$

$= -2\int (x + 1)^{-3}d(x + 1) + 3\int (x + 1)^{-2}d(x + 1)$

$= \dfrac{1}{(x + 1)^2} - \dfrac{3}{(x + 1)} + C$ ■

20 Cho $f(x) = \dfrac{3x^2 + 3x + 3}{x^3 - 3x + 2}$.

a) Tìm A, B, C sao cho $f(x) = \dfrac{A}{(x - 1)^2} + \dfrac{B}{x - 1} + \dfrac{C}{x + 2}$.

b) Tìm họ nguyên hàm của f(x).

a) $\dfrac{3x^2 + 3x + 3}{x^3 - 3x + 2} = \dfrac{3x^2 + 3x + 3}{(x - 1)^2(x + 2)} = \dfrac{A}{(x - 1)^2} + \dfrac{B}{x - 1} + \dfrac{C}{x + 2}$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 3x + 3 = A(x + 2) + B(x - 1)(x + 2) + C(x - 1)^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} B + C = 3 \\ A + B - 2C = 3 \\ 2A - 2B + C = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 = 3A \\ 9 = 9C \\ 3 = 2A - 2B + C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ C = 1 \\ B = 2 \end{cases}$

b) $\int f(x)dx = 3\int \frac{dx}{(x-1)^2} + 2\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+2}$

$\Rightarrow \int f(x)dx = -\frac{3}{x-1} + 2\ln|x-1| + \ln|x+2| + C$ ■

21 Tìm họ nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x^3 + x^5}$

Ta có : $f(x) = \frac{(1+x^2) - x^2}{x^3(1+x^2)} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(1+x^2)x}$.

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{(1+x^2) - x^2}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{x}{1+x^2}$

Vậy $\int f(x)dx = \int x^{-3}dx - \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$.

$\Rightarrow \int f(x) = \frac{1}{2x^2} - \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$

Chú ý : Thay vì dùng phương pháp đồng nhất hai vế giống hai bài tập trên ta nên thêm bớt số hạng để tách thành tổng nhiều phân thức. ■

22 Tìm họ nguyên hàm của $f(x) = \frac{x}{x^4 + 3x^2 + 2}$.

Ta có : $\frac{x}{x^4+3x^2+2} = \frac{x}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{x[(2+x^2) - (1+x^2)]}{(x^2+1)(x^2+2)}$

$f(x) = \frac{x}{x^4+3x^2+2} = \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+2}$

Vậy $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2)}{(x^2+2)}$

$\Rightarrow \int f(x)dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + C = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+2} + C$ ■

23* Tính họ nguyên hàm của $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^6 + 4x^4 + 4x^2 + 1}$.

Ta có : $\Rightarrow I = \int f(x)dx = \int \frac{x^3 - x}{x^6 + 4x^4 + 4x^2 + 1}dx$

$\Rightarrow I = \int f(x)dx = \int \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)dx}{x^3 + 4x + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^3}}$

$$\Rightarrow \quad I = \int f(x)dx = \int \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)}$$

$$I = \int \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(x + \frac{1}{x}\right)}$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow dt = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)dx$

Vậy $I = \int \frac{dt}{t^3 + t} = \int \frac{(1 + t^2) - t^2}{t(t^2 + 1)}dt$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{tdt}{t^2 + 1} = \int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2 + 1)}{t^2 + 1}$$

$$\Rightarrow I = \ln|t| - \frac{1}{2}\ln(t^2 + 1) = \ln \frac{|t|}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow I = \ln \frac{\left|x + \frac{1}{x}\right|}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 1}} = \ln \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}} + C \quad \blacksquare$$

24 Tìm họ nguyên hàm của : $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$, $g(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}$

- $\int f(x)dx = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}dx = \int \frac{-d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = -\ln|\sin x + \cos x| + C$
- $\int f(x)dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x}dx = \int (\cos x - \sin x)dx = \sin x + \cos x + C \quad \blacksquare$

25 Tìm họ nguyên hàm của $f(x) = \frac{\cot x}{1 + \sin^9 x}$

$$\int f(x)dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x(1 + \sin^9 x)} = \int \frac{\sin^8 x \cos x dx}{\sin^9 x(1 + \sin^9 x)} = \frac{1}{9}\int \frac{d(\sin^9 x)}{\sin^9 x(1 + \sin^9 x)}$$

$$= \frac{1}{9}\int \left(\frac{1}{\sin^9 x} - \frac{1}{1 + \sin^9 x}\right)d(\sin^9 x)$$

$$= \frac{1}{9}\left[\ln(\sin^9 x) - \ln(1 + \sin^9 x)\right] + C = \frac{1}{9}\ln \frac{\sin^9 x}{1 + \sin^9 x} + C \quad \blacksquare$$

26 Tìm họ nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{\sin 3x.\sin 4x}{\tan x + \cot 2x}$.

Ta có : $\tan x + \cot 2x = \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos 2x}{\sin 2x} = \dfrac{\sin x.\sin 2x + \cos x\cos 2x}{\cos x.\sin 2x}$

$= \dfrac{\cos(2x - x)}{\cos x.\sin 2x} = \dfrac{1}{\sin 2x}$

Do đó : $f(x) = \sin 2x.\sin 3x.\sin 4x$

$\Rightarrow f(x) = -\dfrac{1}{2}(\cos 5x - \cos x)\sin 4x$

$\Rightarrow f(x) = -\dfrac{1}{2}\sin 4x\cos 5x + \dfrac{1}{2}\sin 4x.\cos x$

$\Rightarrow f(x) = -\dfrac{1}{4}(\sin 9x - \sin x) + \dfrac{1}{4}(\sin 5x + \sin 3x)$

$\Rightarrow f(x) = -\dfrac{1}{4}(\sin 9x - \sin x - \sin 5x - \sin 3x)$

$\int f(x)dx = \dfrac{1}{36}\cos 9x - \dfrac{1}{4}\cos x - \dfrac{1}{20}\cos 5x - \dfrac{1}{12}\cos 3x + C$ ■

27 Tìm họ nguyên hàm của $f(x) = \cos x.\cos 2x.\sin 4x$.

Ta có : $f(x) = \dfrac{1}{2}(\cos 3x + \cos x)\sin 4x$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{2}\sin 4x.\cos 3x + \dfrac{1}{2}\sin 4x.\cos x$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{4}[\sin 7x + \sin x + \sin 5x + \sin 3x]$

Do đó $\int f(x)dx = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\cos 7x}{7} + \cos x + \dfrac{\cos 5x}{5} + \dfrac{\cos 3x}{3}\right) + C$ ■

28 Tìm họ nguyên hàm của : $f(x) = \cos^3 x.\sin 8x$.

Ta có : $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

Do đó : $f(x) = \dfrac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)\sin 8x$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{4}(\sin 8x.\cos 3x + 3\sin 8x\cos x)$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{8}(\sin 11x + \sin 5x) + \dfrac{3}{8}(\sin 9x + \sin 7x)$

Vậy : $\int f(x)dx = -\dfrac{1}{88}\cos 11x - \dfrac{1}{40}\cos 5x - \dfrac{3}{72}\cos 9x - \dfrac{3}{56}\cos 7x + C$ ■

29 Tìm họ nguyên hàm của : $f(x) = \cos^3 x.\cos 3x$ và $g(x) = \cos^2 x.\cos 2x$.

a) Ta có : $f(x) = \cos^3 x \,.\, \cos 3x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x).\cos 3x$

$$= \frac{1}{4}\cos^2 3x + \frac{3}{4}\cos x.\cos 3x$$

$$= \frac{1}{8}(1 + \cos 6x) + \frac{3}{8}(\cos 4x + \cos 2x)$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \frac{1}{8}x + \frac{\sin 6x}{48} + \frac{3}{32}\sin 4x + \frac{3}{16}\sin 2x + C$$

b) $g(x) = \cos^2 x.\cos 2x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\cos 2x$

$$= \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\cos^2 2x = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}(1 + \cos 4x)$$

$$\Rightarrow \int g(x)dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}\sin 4x + C \quad \blacksquare$$

30 Tìm họ nguyên hàm của $f(x) = \sin^3 x\cos 3x + \cos^3 x\sin 3x$.

Ta có : $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

Vậy $f(x) = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)\cos 3x + \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)\sin 3x$

$$f(x) = \frac{3}{4}\sin x\cos 3x - \frac{1}{8}\sin 6x + \frac{1}{8}\sin 6x + \frac{3}{4}\sin 3x\cos x$$

$$f(x) = \frac{3}{8}(\sin 4x - \sin 2x) + \frac{3}{8}(\sin 4x + \sin 2x)$$

$$f(x) = \frac{3}{4}\sin 4x \quad \Rightarrow \quad \int f(x)dx = -\frac{3}{16}\cos 4x + C \quad \blacksquare$$

31 Tìm họ nguyên hàm của $f(x) = \tan^4 x$.

Ta có : $\int f(x)dx = \int \tan^2 x(\tan^2 x + 1 - 1)dx = \int \tan^2 x d(\tan x) - \int \tan^2 x dx$

$$= \frac{1}{3}\tan^3 x - \int(\tan^2 x + 1 - 1)dx$$

$$= \frac{1}{3}\tan^3 x - \int d(\tan x) + \int dx = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C \quad \blacksquare$$

32 Tìm họ nguyên hàm của $f(x) = \cos 3x.\tan x$.

Ta có : $f(x) = (4\cos^3 x - 3\cos x).\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow f(x) = 4\cos^2 x.\sin x - 3\sin x$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC/ 1986

Vậy $\int f(x)dx = \int 4\cos^2 x \sin x dx - \int 3\sin x dx$

$\Rightarrow \int f(x)dx = -4\int \cos^2 x d(\cos x) - 3\int \sin x dx$

$\Rightarrow \int f(x)dx = -\frac{4}{3}\cos^3 x + 3\cos x + C$ ■

33 Tìm họ nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2} + \sin x - \cos x}$

Ta có : $\sqrt{2} + \sin x - \cos x = \sqrt{2} - \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left[1 - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

$= \sqrt{2}.2\sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$

Do đó : $\int f(x)dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{2d\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cot\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$ ■

34 Tìm họ nguyên hàm của $f(x) = \sin^4 x$.

Ta có : $f(x) = (\sin^2 x)^2 = \frac{1}{4}(1 - \cos 2x)^2$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}\left[1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right]$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right)$

Vậy $\int f(x)dx = \frac{3x}{8} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$ ■

35 Tìm họ nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{\cos x.\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}$

Ta có : $f(x) = \frac{1}{\cos x\left(\cos x.\cos\frac{\pi}{4} - \sin x.\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos^2 x - \sin x\cos x)}$

Chia tử và mẫu cho $\cos^2 x$ ta được :

$$\Rightarrow \quad \int f(x)dx = \sqrt{2}\int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{1-\tan x} = -\sqrt{2}\int \frac{d(1-\tan x)}{1-\tan x}$$

$$= -\sqrt{2}\ln|1-\tan x| + C \blacksquare$$

36 Tìm họ nguyên hàm của $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)(2 + 2\sin 2x)$.

Ta có : $f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin 2x \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\Rightarrow \quad f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Do đó : $\int f(x)dx = -2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{3}\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C \quad \blacksquare$

37 Tìm họ nguyên hàm của $f(x) = \frac{\sin(\alpha + x)}{\cos^2 x}$ (α là hằng số).

Ta có : $f(x) = \frac{\sin\alpha\cos x + \sin x\cos\alpha}{\cos^2 x}$

$$\Rightarrow \quad \int f(x)dx = \sin\alpha \int \frac{\cos x dx}{1-\sin^2 x} + \cos\alpha \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \quad \int f(x)dx = \sin\alpha \int \frac{-d(\sin x)}{\sin^2 x - 1} - \cos\alpha \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \quad \int f(x)dx = \frac{-\sin\alpha}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + \frac{\cos\alpha}{\cos x} + C \quad \blacksquare$$

38 Tính $I = \int \frac{dx}{3\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 5\cos^2 x}$.

Chia tử và mẫu hàm số dưới dấu TP cho $\cos^2 x$ thì :

$$I = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{3\tan^2 x - 8\tan x + 5}$$

Đặt $t = \tan x \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$

$$\Rightarrow \quad I = \int \frac{dt}{3t^2 - 8t + 5} = \int \frac{dt}{(t-1)(3t-5)}$$

Đặt $\frac{1}{(t-1)(3t-5)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{3t-5}$

$$\Rightarrow \quad 1 = A(3t - 5) + B(t - 1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy $\quad I = -\dfrac{1}{2}\int\dfrac{dt}{t-1} + \dfrac{3}{2}\int\dfrac{dt}{3t-5}$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{-1}{2}\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln|3t-5| + C$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}\ln\frac{|3t-5|}{|t-1|} + C$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}\ln\frac{|3\tan x - 5|}{|\tan x - 1|} + C \quad \blacksquare$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Tìm họ nguyên hàm của :

1. $f(x) = \cot^2\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

2. $f(x) = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right).\cot\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

3. $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$

4. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x^2 + 5x + 1)(x^2 - 3x + 1)}$

5. $f(x) = \dfrac{\cot x}{1 + \sin x}$

6. $f(x) = x\ln\dfrac{1-x}{1+x}$

7. $f(x) = \dfrac{1}{\sin 2x - \sin x}$

8. $f(x) = \dfrac{x^4 - 2}{x^3 - x}$

9. Cho $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2x + 5}{x^3 - 3x + 2}$.

a) Tìm m, n, p để $f(x) = \dfrac{m}{(x-1)^2} + \dfrac{n}{x-1} + \dfrac{p}{x+2}$.

b) Tìm họ nguyên hàm của f(x).

10. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}$

11. $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{\sin x + \sqrt{3}\cos x}$

12. $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \sin 2x}$

13. $f(x) = \dfrac{1}{\sin 2x - \sin x}$

14. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x^2 + 1)^3}$

15. $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 4e^{-x}}$

16. $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - x}$.

50 CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Vấn đề 1. HỌ NGUYÊN HÀM

1. Đẳng thức nào sau đây là sai :

a) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ b) $\int [f(x)]'dx = f(x) + C$

c) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) + C$ d) $\left(\int f(t)dt\right)' = f(t)$.

2. Cho f(x) xác định trên [a; b] có F(x) là nguyên hàm của f(x) trên (a; b). Kết luận nào sau đây là đúng : F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên [a; b] khi và chỉ khi :

a) $F'(a) = f(a)$ và $f'(b) = f(b)$ b) $F'(a^+) = f(a)$ và $F'(b^+) = f(b)$

c) $F'(a^-) = f(a)$ và $F'(b^+) = f(b)$ d) $F'(a^+) = f(a)$ và $F'(b^-) = f(b)$.

3. Mệnh đề nào sau đây sai :

a) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

b) F(x) là 1 nguyên hàm của f(x) trên [a; b] $\Leftrightarrow F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a; b]$.

c) Nếu F(x) là 1 nguyên hàm của f(x) trên (a; b) và C là hằng số thì

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

d) Mọi hàm số liên tục trên [a; b] đều có nguyên hàm trên [a; b].

4. Cho F(x) và G(x) là một nguyên hàm của f(x) và g(x) trên $K \subset R$ là hằng số. Kết luận nào sau đây là sai :

a) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = F(x) \pm G(x) + C$

b) $\int [kf(x) + hg(x)] = kF(x) + hG(x) + C$ với $k, h \in R$

c) $\int f(x).g(x)dx = F(x).G(x) + C$

d) $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in K$.

5. Biết $\int f(y)dy = x^2 + xy + C$ thì f(y) bằng :

a) y b) x c) $\frac{y}{2}$ d) xy.

6. Biết $\int f(y)dy = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^2} + C$ thì f(y) bằng :

a) $2y^3$ b) $\frac{2}{y^3}$ c) $-\frac{2}{y^3}$ d) $-\frac{2}{x^3}$.

7. Họ nguyên hàm của $\sin^2 x$ là :

a) $\frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)$ b) $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$

c) $\frac{1}{2}(x + 2\cos 2x) + C$ d) $\frac{1}{2}(x - 2\cos 2x) + C$.

8. Một nguyên hàm của $f(x) = (2x - 1)e^{\frac{1}{x}}$ là :

a) $F(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ b) $F(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

c) $F(x) = e^{\frac{1}{x}}$ d) $F(x) = (x^2 - 1)e^{\frac{1}{x}}$.

9. Một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}$ là :

a) $\frac{x^2}{2} + 3x - 6\ln|x + 1|$ b) $\frac{x^2}{2} + 3x + 6\ln|x + 1|$

c) $\frac{x^2}{2} - 3x + 6\ln|x + 1|$ d) $\frac{x^2}{2} - 3x + 6\ln(x + 1)$.

10. Một nguyên hàm của $f(x) = \frac{e^{4x} - 1}{e^{2x} + 1}$ là :

a) $\frac{1}{2}e^{2x} + x$ b) $\frac{1}{2}e^{2x} - x$ c) $2e^{2x} + x$ d) $2e^{2x} - x$.

11. Họ nguyên hàm của $\left(\frac{1 - x}{x}\right)^2$ là :

a) $-\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + C$ b) $-\frac{1}{x} - 2\ln x + x + C$

c) $\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + C$ d) $-\frac{1}{x} - 2\ln|x| - x + C$.

12. Họ nguyên hàm của $f(x) = x\cos x^2$ là :

a) $\cos x^2 + C$ b) $\sin x^2 + C$ c) $\frac{1}{2}\sin x^2 + C$ d) $2\sin x^2 + C$.

13. Họ nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ là :

a) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x - 2}{x + 2}\right| + C$ b) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x + 2}{x - 2}\right| + C$

c) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x - 2}{x + 2}\right| + C$ d) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x + 2}{x - 2}\right| + C$.

14. Họ nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x}$ là :

a) $x^2 - \dfrac{1}{x^2} + C$ b) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} + C$

c) $\dfrac{1}{2}\left(x^2 - \dfrac{1}{x^2}\right) + C$ d) $\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2x^2}$.

15. Họ nguyên hàm của $g(x) = \sin x \sin 2x$ là :

a) $\dfrac{1}{6}\sin 3x - \dfrac{1}{2}\sin x + C$ b) $-\dfrac{1}{6}\sin 3x + \dfrac{1}{2}\sin x + C$

c) $\dfrac{3}{2}\sin 3x - \sin x + C$ d) $\dfrac{\sin^2 x}{4}.\sin^2 2x + C$.

16. Họ nguyên hàm của $f(x) = \cos x \cos 3x$ là :

a) $\dfrac{\sin 4x}{8} + \dfrac{\sin 2x}{4} + C$ b) $-\dfrac{\sin 4x}{8} - \dfrac{\sin 2x}{4} + C$

c) $2\sin 4x + \sin 2x + C$ d) $\sin x + \dfrac{\sin 3x}{3} + C$.

17. Họ nguyên hàm của $h(x) = \sin x \cos 3x$:

a) $\dfrac{\cos 4x}{8} + \dfrac{\sin 2x}{4} + C$ b) $-\dfrac{\cos 4x}{8} - \dfrac{\sin 2x}{4} + C$

c) $\dfrac{\cos 4x}{8} - \dfrac{\sin 2x}{4} + C$ d) $-\dfrac{\cos 4x}{8} + \dfrac{\sin 2x}{4} + C$.

18. $\int 2^{x+1} dx$ bằng :

a) $\dfrac{2^{x+1}}{\ln 2}$ b) $\dfrac{2^{x+1}}{\ln 2} + C$ c) $2^{x+1}\ln 2 + C$ d) $2^{x+1} + C$.

19. Một nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{1}{(2-x)^2}$ là :

a) $\dfrac{1}{2-x}$ b) $\dfrac{1}{x-2}$ c) $\dfrac{1}{(2-x)^3}$ d) $\ln(x-2)^2$.

20. Một nguyên hàm của $g(x) = \dfrac{1 - \cos 2x}{\cos^2 x}$ là :

a) $2(\text{tg}x + x)$ b) $2(\text{tg}x - x)$ c) $\text{tg}x - x$ d) $2\text{tg}x$.

21. Một nguyên hàm của $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}$ là :

a) $\sqrt{3x+1}$ b) $\dfrac{1}{3}\sqrt{3x+1}$ c) $2\sqrt{3x+1}$ d) $\dfrac{2}{3}\sqrt{3x+1}$.

22. $\int 2^{2x}.3^x.7^x dx$ bằng :

a) $\frac{2^{2x}.3^x.7^x}{\ln 4.\ln 3.\ln 7} + C$ b) $\frac{84^x}{\ln 84} + C$

c) $84^x \ln 84 + C$ d) $84^x + C$.

23. Họ nguyên hàm của $\frac{1}{x^2 + x - 2}$ là :

a) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right| + C$ b) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C$

c) $\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C$ d) $\ln|x^2 + x - 2| + C$.

24. Một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ là :

a) $\ln(x^2 + 1)$ b) $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)$ c) $2\ln(x^2 + 1)$ d) $\frac{1}{2}\ln(x + 1)$.

25. Họ nguyên hàm của $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$ là :

a) $\frac{x}{3}\ln^3 x + C$ b) $3x\ln^3 x + C$ c) $3\ln^2 x + C$ d) $\frac{1}{3}\ln^2 x + C$.

26. Họ nguyên hàm của $\frac{\tan x}{\cos^4 x}$ là :

a) $\frac{1}{4}\cos^4 x + C$ b) $\frac{1}{4\cos^4 x} + C$ c) $4\cos^4 x + C$ d) $\frac{4}{\cos^4 x} + C$.

27. Cho $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$; $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và đồ thị của $F(x)$ qua $M\left(\frac{\pi}{6}; 0\right)$ thì $F(x)$ bằng :

a) $\sqrt{3} - \cot x$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3} - \cot x$ c) $-\sqrt{3} + \cot x$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{3} + \cot x$.

28. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x - 1}$ và $F(2) = 1$.

Thì $F(3)$ bằng :

a) $\ln 2$ b) $\ln 2 + 1$ c) $\ln\frac{3}{2}$ d) $\frac{1}{2}$.

Vấn đề 2. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

29. Họ nguyên hàm của tgx là :

a) $\frac{\tan^2 x}{2} + C$ b) $\ln(\cos x) + C$

c) $\ln|\cos x| + C$ d) $-\ln|\cos x| + C$.

30. Họ nguyên hàm của $\frac{e^x}{e^{2x} - 1}$ là :

a) $\ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right| + C$ b) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right| + C$

c) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right| + C$ d) $\ln|e^{2x} - 1| + C$.

31. Họ nguyên hàm của $\frac{1}{\sin x}$ là :

a) $\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$ b) $\ln\left|\cot\frac{x}{2}\right| + C$

c) $-\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$ d) $\ln|\sin x| + C$.

32. Họ nguyên hàm của $f(x) = \sin^3 x$:

a) $\frac{\sin^4 x}{4} + C$ b) $\cos x - \frac{\cos^3 x}{3} + C$

c) $-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$ d) $-\cos x + \frac{1}{\cos x} + C$.

33. $\int \frac{dx}{(1 + x^2)x}$ bằng :

a) $\ln \frac{|x|}{\sqrt{1 + x^2}} + C$ b) $\ln|x|\sqrt{x^2 + 1} + C$

c) $\ln \frac{x}{1 + x^2} + C$ d) $\ln|x|(x^2 + 1) + C$.

34. Một nguyên hàm của $f(x) = xe^{-x^2}$ là :

a) e^{-x^2} b) $-e^{-x^2}$ c) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$ d) $\frac{1}{2}e^{-x^2}$.

35. $\int \cos x \sin^3 x dx$ bằng :

a) $\frac{\sin^4 x}{4} + C$ b) $\frac{\cos^4 x}{4} + C$ c) $\sin^4 x + C$ d) $\cos^4 x + C$.

36. Hàm số nào là nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{1}{1+\sin x}$:

a) $F(x) = 1 + \cot\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$ b) $F(x) = 2\tan\dfrac{x}{2}$

c) $F(x) = \ln(1 + \sin x)$ d) $F(x) = -\dfrac{2}{1+\tan\dfrac{x}{2}}$.

37. Hàm số nào là nguyên hàm của $f(x) = x.\sqrt{x^2+5}$:

a) $F(x) = (x^2+5)^{\frac{3}{2}}$ b) $F(x) = \dfrac{1}{3}(x^2+5)^{\frac{3}{2}}$

c) $F(x) = \dfrac{1}{2}(x^2+5)^{\frac{3}{2}}$ d) $F(x) = 3(x^2+5)^{\frac{3}{2}}$.

38. Họ nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$ là :

a) $F(x) = \ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right| + C$ b) $F(x) = \ln\left|\dfrac{x+1}{x}\right| + C$

c) $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right| + C$ d) $F(x) = \ln|x(x+1)| + C$.

39. Họ nguyên hàm của $f(x) = x^2(x^3+1)^5$ là :

a) $F(x) = 18(x^3+1)^6 + C$ b) $F(x) = \dfrac{1}{18}(x^3+1)^6 + C$

c) $F(x) = (x^3+1)^6 + C$ d) $F(x) = \dfrac{1}{9}(x^3+1)^6 + C$.

40. Một nguyên hàm của $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$ là :

a) $\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}$ b) $\dfrac{1}{6}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} + 1$

c) $\dfrac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}$ d) $\dfrac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} - 4$.

Vấn đề 3. PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

41. Một nguyên hàm của $f(x) = x\cos x$ là :

a) $x\sin x$ b) $x\sin x + \sin x$

c) $x\sin x + \cos x$ d) $x\sin x - \cos x$.

42. Một nguyên hàm của $g(x) = xe^{-x}$ là :

a) $e^{-x}(x+1)$ b) $-e^{-x}(x+1)$ c) xe^{-x} d) $-xe^{-x}$.

43. Một nguyên hàm của $h(x) = \ln x$ là :

a) $(x + 1)\ln x$ b) $x\ln x$ c) $(x - 1)\ln x$ d) $x(\ln x - 1)$.

44. Một nguyên hàm của $k(x) = x\ln x$:

a) $\frac{x^2}{4}(2\ln x - 1)$ b) $\frac{x^2}{4}(\ln x - 2)$ c) $\frac{x^2}{4}(2\ln x + 1)$ d) $\frac{x^2}{4}(\ln x + 2)$.

45. Một nguyên hàm của $e(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ là :

a) $x\tan x - \ln|\cos x|$ b) $x\tan x + \ln|\cos x|$

c) $x\tan x + \ln(\cos x)$ d) $x\tan x - \ln|\sin x|$.

46. Một nguyên hàm của $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ là :

a) $\frac{1}{x}(\ln x + 1)$ b) $\frac{1}{x}(\ln x - 1)$ c) $-\frac{1}{x}(\ln x + 1)$ d) $-\frac{1}{x}(\ln x - 1)$

47. Một nguyên hàm của $f(x) = x\sin 2x$ là :

a) $-\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$ b) $-\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x$

c) $-x\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x$ d) $\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$.

48. Một nguyên hàm của $f(x) = (x + 2)e^{2x}$ là :

a) $\frac{1}{4}e^{2x}$ b) $-2xe^{2x}$ c) $\frac{x}{2}e^{2x}$ d) $\frac{2x + 3}{4}e^{2x}$.

49. Một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$:

a) $x\cot x + \ln|\sin x|$ b) $-x\cot x + \ln|\sin x|$

c) $x\cot x - \ln|\sin x|$ d) $-x\cot x - \ln|\sin x|$.

50. Một nguyên hàm của $f(x) = \ln|x + 1|$ là :

a) $(x + 1)\ln|x + 1|$ b) $x\ln|x + 1| - x$

c) $(x + 1)\ln|x + 1| - x$ d) $(x + 1)\ln|x + 1| + x$.

TRẢ LỜI

Vấn đề 1. HỌ NGUYÊN HÀM

1. Đẳng thức c sai. Ví dụ : $\left(\int x dx\right)' = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)' = x$ → Chọn c.

2. Kết luận d là đúng.

3. Mệnh đề b là sai.

4. Mệnh đề sai là c.

5. $\frac{d}{dy}\int f(y)dy = \frac{d}{dy}(x^2 + xy + C) \Rightarrow f(y) = x \rightarrow$ Chọn b.

6. $\int f(y)dy = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^2} + C \Rightarrow f(y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{x^3} + y^{-2} + C\right)$

$\Rightarrow f(y) = -2y^{-3} = -\frac{2}{y^3} \rightarrow$ Chọn c.

7. $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + C \rightarrow$ Chọn b.

8. Ta kiểm tra kết quả bằng định nghĩa.

$(x^2 e^{\frac{1}{x}})' = 2xe^{\frac{1}{x}} + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}(2x - 1) \rightarrow$ Chọn a.

9. $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1} dx = \int\left(x - 3 + \frac{6}{x + 1}\right)dx$

$= \frac{x^2}{2} - 3x + 6\ln|x + 1| + C \rightarrow$ Chọn c.

10. $\int \frac{(e^{2x})^2 - 1}{e^{2x} + 1} dx = \int (e^{2x} - 1)dx = \frac{1}{2}e^{2x} - x + C \rightarrow$ Chọn b.

11. $\int\left(\frac{1 - x}{x}\right)^2 dx = \int\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 dx = \int\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1\right)dx$

$= -\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + C \rightarrow$ Chọn a.

12. Chọn c, vì $\left(\frac{1}{2}\sin x^2 + C\right)' = x\cos x^2 \rightarrow$ Chọn c.

13. $\int \frac{dx}{x^2 - 4} = \frac{1}{4}\int \frac{(x + 2) - (x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} dx = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 2}\right)dx = \frac{1}{4}\left|\frac{x - 2}{x + 2}\right| + C$

Chú ý : Nên thuộc công thức $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + C \rightarrow$ Chọn a.

14. $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x} dx = \int \frac{\sqrt{(x^2 + x^{-2})^2}}{x} dx = \int \frac{x^2 + x^{-2}}{x} dx$ (do $x^2 + x^{-2} > 0$)

$= \int (x + x^{-3})dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) + C \rightarrow$ Chọn c.

15. $\sin 2x\sin x = -\frac{1}{2}(\cos 3x - \cos x) \Rightarrow \int g(x)dx = -\frac{1}{6}\sin 3x + \frac{1}{2}\sin x + C$

→ Chọn b.

16. $\cos 3x\cos x = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) \Rightarrow \int f(x)dx = \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + C$

→ Chọn a.

17. $\sin x\cos 3x = \frac{1}{2}[\sin 4x + \sin(-2x)] \Rightarrow \int h(x)dx = -\frac{\cos 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + C$

→ Chọn d.

18. $\int 2^{x+1}dx = 2\int 2^x dx = 2.\frac{2^x}{\ln 2} + C$ → Chọn b.

19. $\int \frac{dx}{(2-x)^2} = \int (x-2)^{-2}dx = \frac{(x-2)^{-1}}{-1} = \frac{1}{2-x}$ → Chọn a.

20. $\int \frac{1-\cos 2x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = 2\int[(\tg^2 x + 1) - 1]dx$

$= 2(\tg x - x) + C$ → Chọn b.

21. $\int (3x+1)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$ → Chọn d.

22. $2^x.3^x.7^x = 84^x$ → Chọn b.

23. $\int \frac{dx}{x^2+x-2} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3}\int \frac{(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)}dx$

$= \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C$ → Chọn b.

24. $\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$ → Chọn b.

25. $\int \frac{\ln^2 x\,dx}{x} = \int \ln^2 x d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C$ → Chọn d.

26. $\int \frac{\tan x}{\cos^4 x}dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos^5 x} = \int -\cos^{-5} x d(\cos x) = -\frac{\cos^{-4} x}{4} + C$ → Chọn c.

27. $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow F(x) = -\cot x + C$

$N\left(\frac{\pi}{6};0\right) \in (C) \Rightarrow 0 = -\cotg\frac{\pi}{6} + C \Rightarrow C = \sqrt{3}$ → Chọn a.

28. $F(x) = \int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + C$

$F(2) = 1 \Rightarrow \ln 1 + C = 1 \Rightarrow C = 1$

Vậy $F(x) = \ln|x-1| + 1 \Rightarrow F(3) = \ln 2 + 1 \rightarrow$ Chọn b.

Vấn đề 2. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

29. $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C \rightarrow$ Chọn d.

30. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-1} = \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2 - 1^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C \rightarrow$ Chọn b.

31. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2\tan\frac{x}{2}.\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$

$\rightarrow$ Chọn a.

32. $\int \sin^3 x dx = -\int (1-\cos^2 x) d(\cos x) = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C \rightarrow$ Chọn c.

33. $\int \frac{dx}{(1+x^2)x} = \int \frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)x} dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x dx}{1+x^2} = \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$

$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \rightarrow$ Chọn a.

34. $\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C \rightarrow$ Chọn c.

35. $\int \cos x.\sin^3 x dx = \int \sin^3 x d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C \rightarrow$ Chọn a.

36. $\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{dx}{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)^2} = \int \frac{2d\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)}{\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)^2}$

$= -2\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)^{-1} + C \rightarrow$ Chọn d.

Chú ý : Có thể thấy $F'(x) = f(x)$.

37. $\int x.\sqrt{x^2+5} dx = \frac{1}{2}\int (x^2+5)^{\frac{1}{2}} d(x^2+5) = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}(x^2+5)^{\frac{3}{2}} + C \rightarrow$ Chọn b.

38. $\int\frac{dx}{x(x+1)}=\int\frac{(1+x)-x}{x(x+1)}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\ln|x|-\ln|x+1|+C=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$ → Chọn a.

39. $\int x^2(x^3+1)^5dx=\frac{1}{3}\int(x^3+1)^5d(x^3+1)=\frac{1}{18}(x^3+1)^6+C$ → Chọn b.

40. $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int\frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}d(x^2+1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+C$ → Chọn d.

Vấn đề 3. PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

41. $I=\int x\cos x dx$

$u=x \Rightarrow du=dx;\quad dv=\cos x dx \Rightarrow v=\sin x$

$\Rightarrow I=x\sin x-\int\sin x dx=x\sin x+\cos x+C$ → Chọn c.

42. $J=\int xe^{-x}dx$

$u=x \Rightarrow du=dx;\quad dv=e^{-x}dx \Rightarrow v=-e^{-x}$

$\Rightarrow J=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}=-e^{-x}(x+1)$ → Chọn b.

43. $K=\int\ln x dx$

$u=\ln x \Rightarrow du=\frac{dx}{x};\quad dv=dx \Rightarrow v=x$

$K=x\ln x-\int dx=x\ln x-x$ → Chọn d.

44. $H=\int x\ln x dx$

$u=\ln x \Rightarrow du=\frac{dx}{x};\quad dv=xdx \Rightarrow v=\frac{x^2}{2}$

$H=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C=\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C$ → Chọn a.

45. $L=\int\frac{x}{\cos^2 x}$

$u=x \Rightarrow du=dx;\quad dv=\frac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow v=\tan x$

$L=x\tan x-\int\frac{\sin x dx}{\cos x}=x\tan x+\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=x\tan x+\ln|\cos x|$ → Chọn b.

46. $I = \int \frac{\ln x}{x^2} dx$

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}; \quad dv = x^{-2}dx \Rightarrow v = -\frac{1}{x}$

$I = -\frac{1}{x}\ln x + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x}$ → Chọn c.

47. $I = \int x \sin 2x\, dx$

$u = x \Rightarrow du = dx; \quad dv = \sin 2x dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2}\cos 2x$

$I = -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$ → Chọn a.

48. $I = \int (x+2)e^{2x} dx$

$u = x + 2 \Rightarrow du = dx; \quad dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$I = \frac{x+2}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x} dx = \frac{x+2}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} = \frac{2x+3}{4}e^{2x} + C$ → Chọn c.

49. $I = \int \frac{x dx}{\sin^2 x}$

$u = x \Rightarrow du = dx; \quad dv = \frac{dx}{\sin^2 x} \Rightarrow v = -\cot x$

$I = -x\cot x + \int \frac{\cos x\, dx}{\sin x} = -x\cot x + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$

$= -x\cot x + \ln|\sin x| + C$ → Chọn b.

50. $I = \int \ln|x+1| dx$

$u = \ln|x+1| \Rightarrow du = \frac{1}{x+1}dx; \quad dv = dx \Rightarrow v = x + 1$

$I = (x+1)\ln|x+1| - \int dx = (x+1)\ln|x+1| - x$ → Chọn c.

Bài 2 : TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

- **Công thức Newton-Leibnitz :**

  Cho f(x) là hàm số liên tục trên [a; b], thì :

  $$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

  với F(x) là 1 nguyên hàm của f(x) trên [a; b].

- **Tính chất :**

  1. $\int_a^a f(x)dx = 0$

  2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

  3. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

  4. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

  5. $c \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Vấn đề 1. ÁP DỤNG CÔNG THỨC NEWTON – LEIBNITZ

1 Tính các tích phân sau đây :

a) $I = \int_0^1 (e^{2x} - \pi \sin \pi x)dx$

b) $J = \int_0^{\pi} (2\sin^2 x - \cos^2 x - \sin x \cos x)dx$

c) $H = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$.

a) $I = \int_0^1 (e^{2x} - \pi \sin \pi x)dx = \left(\frac{1}{2}e^{2x} + \cos \pi x\right)\Big|_0^1$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}(e^2 - e^0) + \cos\pi - \cos 0 = \frac{1}{2}(e^2 - 1) - 2 = \frac{e^2 - 5}{2}$.

b) $J = \int_0^{\pi} (2\sin^2 x - \cos^2 x - \sin x \cos x)dx$

$\Rightarrow J = \int_0^{\pi} \left[(1 - \cos 2x) - \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) - \frac{1}{2}\sin 2x\right]dx$

$$\Rightarrow \quad J = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1 - 3\cos 2x - \sin 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow \quad J = \frac{1}{2}(\pi - 0) - \frac{3}{4}(\sin 2\pi - \sin 0) + \frac{1}{4}(\cos 2\pi - \cos 0) = \frac{\pi}{2}.$$

c) $$H = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x dx}{\cos^2 x \sin^2 x} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x . \sin^2 x} dx$$

$$\Rightarrow \quad H = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = (-\cot x - \tan x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow \quad H = -\cot\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{3} + \cot\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad H = -\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} + 2 = \frac{1}{3}(6 - 4\sqrt{3}) \quad \blacksquare$$

2 Tính các tích phân :

a) $I = \int_1^2 \frac{(2x-1)^2}{x} dx$ **b)** $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$.

a) $$I = \int_1^2 \frac{4x^2 - 4x + 1}{x} dx = \int_1^2 \left(4x - 4 + \frac{1}{x}\right)dx$$

$$I = \left(2x^2 - 4x + \ln|x|\right)\Big|_1^2 = 2 + \ln 2.$$

b) $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x)\sin x dx$$

$$I = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x)d(\cos x) = \left(\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \quad \blacksquare$$

3 Tìm A, B sao cho $f(x) = A\sin \pi x + B$ thỏa : $f'(1) = 2$ và $\int_0^2 f(x)dx = 1$.

- $f(x) = A\sin\pi x + B \Rightarrow f'(x) = A\pi\cos\pi x$

  Mà $f'(1) = 2 \Rightarrow A\pi\cos\pi = 2 \Rightarrow A = -\frac{2}{\pi}$

- Mặt khác : $\int_0^2 (A\sin\pi x + B)dx = 4 \Leftrightarrow \left(-\frac{A}{\pi}\cos\pi x + Bx\right)\Big|_0^2 = 4$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{A}{\pi}(\cos 2\pi - \cos 0) + B(2 - 0) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2B = 4 \quad \Leftrightarrow \quad B = 2 \quad \blacksquare$$

4 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + \sin 2x} dx$.

Tuyển sinh Đại học Khối B 2003

Ta có : $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x dx}{1 + \sin 2x} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(1 + \sin 2x)}{1 + \sin 2x}$

$$I = \frac{1}{2} \ln|1 + \sin 2x| \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \blacksquare$$

5 Tính $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{\sin x} + \cos x\right) \cos x dx$.

Tuyển sinh Đại học Khối D 2005

Ta có : $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{\sin x} . \cos x + \cos^2 x\right) dx$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} d(\sin x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx$$

$$J = e^{\sin x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = e + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \blacksquare$$

6 Tính $I = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$.

Ta có : $I = \int_1^2 \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{(x+1) - (x-1)} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \left[(x+1)^{\frac{1}{2}} - (x-1)^{\frac{1}{2}}\right] dx$

$$I = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\left((x+1)^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}}\right) \Big|_1^2 = \frac{1}{3}\left[\left(3^{\frac{3}{2}} - 1\right) - \left(2^{\frac{3}{2}} - 0\right)\right]$$

$$I = \frac{1}{3}\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2} - 1\right) \quad \blacksquare$$

7 Tính $I = \int_0^{\ln 2} \frac{1 - e^x}{1 + e^x} dx$.

Ta có : $I = \int_0^{\ln 2} \frac{(1 + e^x) - 2e^x}{1 + e^x} dx = \int_0^{\ln 2} dx - 2\int_0^{\ln 2} \frac{d(1 + e^x)}{1 + e^x}$

$$I = x\Big|_0^{\ln 2} - 2\left(\ln|1 + e^x|\right) \Big|_0^{\ln 2} = \ln 2 - 2\ln 3 + 2\ln 2$$

$$I = 3\ln 2 - 2\ln 3 = \ln\frac{8}{9} \quad \blacksquare$$

8 Tính $I = \int_0^2 \frac{dx}{x(x^4+1)}$.

Ta có : $I = \int_0^2 \frac{(1+x^4)-x^4}{x(1+x^4)}dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x^3}{1+x^4}\right)dx$

$I = \ln|x|\Big|_1^2 - \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{d(1+x^4)}{1+x^4}$

$I = \ln 2 - \frac{1}{4}\left(\ln\left|1+x^4\right|\right)\Big|_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{4}\ln\frac{17}{2}$ ■

9 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^5 x(1+\tan^2 x)dx$.

Ta có : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^5 x d(\tan x) = \left(\frac{\tan^6 x}{6}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{6}$ ■

10 Tìm các giá trị của hằng số a để có đẳng thức :

$$\int_1^2 |a^2 + (4-4a)x + 4x^3|dx = 12.$$

Ta có : $\int_1^2 |a^2 + (4-4a)x + 4x^3|dx = 12$

$\Leftrightarrow \quad |a^2x + (2-2a)x^2 + x^4|\Big|_1^2 = 12$

$\Leftrightarrow \quad 2a^2 + (2-2a)4 + 16 - a^2 - 2 + 2a - 1 = 12$

$\Leftrightarrow \quad a^2 - 6a + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 3$ ■

11 Tính $I = \int_0^1 \frac{xdx}{4-x^2}$.

Ta có : $I = \int_0^1 \frac{xdx}{4-x^2} = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(4-x^2)}{4-x^2} = -\frac{1}{2}\ln\left|4-x^2\right|\Big|_0^1$

$\Rightarrow \quad I = -\frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 4) = -\frac{1}{2}\ln\frac{3}{4}$ ■

12 Tính $I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^3}$.

Ta có : $I = \int_0^1 (1+x)^{-3}d(1+x) = \frac{(1+x)^{-2}}{-2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2(1+x)^2}\Big|_0^1$

$\Rightarrow \quad I = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - 1\right) = \frac{3}{8}$ ■

13 Tính tích phân sau đây bằng cách thêm hoặc bớt số hạng vào tử số :

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{e^{2x} + e^x}.$$

Ta có : $I = \int_0^1 \frac{[(1+e^x) - e^x]}{e^x(1+e^x)}dx = \int_0^1 \frac{dx}{e^x} - \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$

$\Rightarrow I = \int_0^1 e^{-x}dx - \int_0^1 \frac{[(1+e^x) - e^x]dx}{1+e^x}$

$\Rightarrow I = -\int_0^1 e^{-x}d(-x) - \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^x}$

$\Rightarrow I = -e^{-x}\Big|_0^1 - (x)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{d(1+e^x)}{1+e^x}$

$\Rightarrow I = -\frac{1}{e} + 1 - 1 + \ln\left|1+e^x\right|\Big|_0^1 = -\frac{1}{e} + \ln\frac{1+e}{2}$ ■

14 Tính tích phân :

$$I = \int_0^1 \frac{x^3 + 2x^2 + 10x + 1}{x^2 + 2x + 9}dx \; ; \qquad J = \int_0^1 \frac{x^2 + 3x + 10}{x^2 + 2x + 9}dx.$$

Ta có : $I = \int_0^1 \left(x + \frac{x+1}{x^2+2x+9}\right)dx = \int_0^1 xdx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(x^2+2x+9)}{x^2+2x+9}$

$\Rightarrow I = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\left(\ln|x^2+2x+9|\right)\Big|_0^1$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\ln 12 - \ln 9) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}.$

Ta có : $J = \int_0^1 \left(1 + \frac{x+1}{x^2+2x+9}\right)dx = \int_0^1 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(x^2+2x)+9}{x^2+2x+9}$

$\Rightarrow J = x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\left(\ln|x^2+2x+9|\right)\Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$ ■

15 Tính $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x.\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$.

Ta có : $\sin x.\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin x\left(\sin x.\cos\frac{\pi}{6} + \cos x.\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= \frac{1}{2}\sin x(\sqrt{3}\sin x + \cos x)$

$$\Rightarrow \quad I = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sqrt{3}\sin^2 x + \sin x \cos x} = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{dx}{\sin^2 x}}{\sqrt{3} + \cot x}$$

$$\Rightarrow \quad I = -2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\sqrt{3} + \cot x)}{\sqrt{3} + \cot x} = -2\ln\left|\sqrt{3} + \cot x\right|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow \quad I = -2\left(\ln\left|\frac{4\sqrt{3}}{3}\right| - \ln|2\sqrt{3}|\right) = -2\ln\frac{2}{3} \quad \blacksquare$$

16 Cho $f(t) = \int_0^t \left(4\sin^4 x - \frac{3}{2}\right)dx$. Giải phương trình $f(t) = 0$.

Ta có : $f(t) = \int_0^t \left(4\sin^4 x - \frac{3}{2}\right)dx = \int_0^t \left[(1 - \cos 2x)^2 - \frac{3}{2}\right]dx$

$$\Rightarrow \quad f(t) = \int_0^t \left(-\frac{1}{2} - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)dx$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = \int_0^t \left[-\frac{1}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right]dx$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{2}\cos 4x - 2\cos 2x\right)dx$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{8}\sin 4x - \sin 2x\Big|_0^t = \frac{1}{8}\sin 4t - \sin 2t$$

Do đó $f(t) = 0 \Leftrightarrow \sin 4t = 8\sin 2t \Leftrightarrow 2\sin 2t\cos 2t = 8\sin 2t$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin 2t(4 - \cos 2t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2t = 0 \\ \cos 2t = 4 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2t = k\pi \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{k\pi}{2} \quad (k \in Z) \quad \blacksquare$$

Vấn đề 2. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

- ***Muốn tính*** $\int_a^b f(x)dx$ ***mà*** $f(x)$ ***không có trong bảng nguyên hàm***

Đặt $t = v(x) \Rightarrow dt = v'(x)dx$

Thì $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g[v(x)]v'(x)dx = G[v(x)]\Big|_a^b$

$$= G[v(b)] - G[v(a)] = G(t)\Big|_{v(a)}^{v(b)}$$

Với $G(t)$ ***là 1 nguyên hàm của*** $g(t)$.

17 Tính $I = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{(e^x + 1)^3}$.

Đề dự bị Khối A 2003

Đặt $t = e^x + 1 \Rightarrow dt = e^x dx$

x	0	ln3
t	2	4

$\Rightarrow I = \int_2^4 \frac{dt}{t^3} = \int_2^4 t^{-3} dt = \frac{t^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2t^2}\Big|_2^4$

$I = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{16}\right) = \frac{3}{32}$ ■

18 Tính $I = \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 5}$.

Đặt $t = e^x + 5 \Rightarrow dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t - 5}$

x	0	ln2
t	6	7

$\Rightarrow I = \int_6^7 \frac{dt}{t(t-5)} = \frac{1}{5}\int_6^7 \frac{(5-t)+t}{t(t-5)} dt = \frac{1}{5}\int_6^7 \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t-5}\right) dt$

$\Rightarrow I = \frac{1}{5}\ln|t-5| - \ln|t|\Big|_6^7 = \frac{1}{5}\ln\frac{t-5}{t}\Big|_6^7 = \frac{1}{5}\left(\ln\frac{2}{7} - \ln\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{5}\ln\frac{12}{7}$ ■

19 Tính $I = \int_0^1 \frac{dx}{e^{2x} + 3}$.

Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

x	0	1
t	1	e

$\Rightarrow I = \int_1^e \frac{dt}{t(t^2+3)} = \frac{1}{3}\int_1^e \frac{(3+t^2)-t^2}{t(t^2+3)} dt = \frac{1}{3}\int_1^e \frac{dt}{t} - \frac{1}{3}\int_1^e \frac{tdt}{t^2+3}$

$\Rightarrow I = \frac{1}{3}\int_1^e \frac{dt}{t} - \frac{1}{6}\int_1^e \frac{d(t^2+3)}{t^2+3} = \frac{1}{3}\ln|t|\Big|_1^e - \frac{1}{6}\ln(t^2+3)\Big|_1^e$

$\Rightarrow I = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\ln\frac{e^2+3}{4}$ ■

20 Tính $I = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x + 1}}$.

Đặt $t = \sqrt{e^x + 1} \Rightarrow t^2 = e^x + 1$

$\Rightarrow 2tdt = e^x dx$

x	0	ln2
t	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$

Ta có : $I = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x.e^x dx}{\sqrt{e^x+1}} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{(t^2-1)2tdt}{t}$

$\Rightarrow \quad I = 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (t^2-1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ■

21 Tính $I = \int_0^1 \frac{e^{-2x}dx}{1+e^{-x}}$.

Ta có : $I = \int_0^1 \frac{e^{-x}.e^{-x}dx}{1+e^{-x}}$

Đặt $t = 1 + e^{-x} \Rightarrow dt = -e^{-x}dx$

x	0	1
t	2	$1+e^{-1}$

Vậy $I = \int_2^{1+e^{-1}} -\frac{(t-1)dt}{t} = \int_2^{1+e^{-1}} \left(-1+\frac{1}{t}\right)dt = -t + \ln|t|\Big|_1^{1+e^{-1}}$

$\Rightarrow \quad I = -1 - \frac{1}{e} + \ln\left(1+\frac{1}{e}\right) + 2 - \ln 2 = -\frac{1}{e} + 1 + \ln\frac{e+1}{2e}$ ■

22 Tính $I = \int_0^1 (1+3x)(1+2x+3x^2)^{10}dx$.

Đặt $t = 1 + 2x + 3x^2 \Rightarrow dt = (2+6x)dx$

x	0	1
t	1	6

$\Rightarrow \quad I = \int_1^6 t^{10}.\frac{dt}{2} = \frac{t^{11}}{22}\Big|_1^6 = \frac{1}{22}(6^{11}-1)$ ■

23 Tính $I = \int_0^{\ln 2} \frac{(e^{2x}+3e^x)dx}{e^{2x}+3e^x+2}$.

Ta có : $I = \int_0^{\ln 2} \frac{(e^x+3)e^x dx}{(e^x+1)(e^x+2)}$

x	0	ln2
t	1	2

Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

$\Rightarrow \quad I = \int_1^2 \frac{(t+3)dt}{(t+1)(t+2)}$

Đặt $\frac{t+3}{(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2}$

$\Leftrightarrow \quad t+3 = A(t+2) + B(t+1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \end{cases}$

Vậy $I = \int_1^2 \left(\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t+2}\right)dt = 2\ln|t+1| - \ln|t+2|\Big|_1^2$

$\Rightarrow \quad I = 2\ln\frac{3}{2} - \ln\frac{4}{3}$ ■

24 Tính $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}}{x}\ln x dx$.

Tuyển sinh Khối B 2004

Đặt $t = \sqrt{1+3\ln x} \quad \Rightarrow \quad t^2 = 1+3\ln x$

$\Rightarrow \quad 2tdt = \frac{3dx}{x}$

x	1	e
t	1	2

Vậy $I = \int_1^2 t\left(\frac{t^2-1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}tdt\right) = \frac{2}{9}\int_1^2 (t^4 - t^2)dt$

$I = \frac{2}{9}\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^2 = \frac{116}{135}$ ■

25 Tính $I = \int_1^e \frac{\ln x \sqrt[3]{1+\ln^2 x}}{x}dx$.

Đặt $t = \sqrt[3]{1+\ln^2 x} \quad \Leftrightarrow \quad t^3 = 1+\ln^2 x$

Vậy $3t^2dt = \frac{2}{x}\ln x dx$

x	1	e
t	1	$\sqrt[3]{2}$

Vậy $I = \int_1^{\sqrt[3]{2}} t.\left(\frac{3}{2}t^2dt\right) = \frac{3}{2}\int_1^{\sqrt[3]{2}} t^3dt = \frac{3}{2}\frac{t^4}{4}\Big|_1^{\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{8}(2\sqrt[3]{2} - 1)$ ■

26 Tính $I = \int_0^1 x^5(1-x^3)^6 dx$.

Ta có : $I = \int_0^1 x^3(1-x^3)^6 x^2 dx$

Đặt $t = 1 - x^3 \quad \Rightarrow \quad dt = -3x^2dx$

x	0	1
t	1	0

$\Rightarrow \quad I = -\frac{1}{3}\int_1^0 (1-t)t^6 dt = \frac{1}{3}\int_0^1 (t^6 - t^7)dt = \left(\frac{1}{21}t^7 - \frac{1}{24}t^8\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{168}$ ■

27 Tính $I = \int_1^2 \frac{dx}{x(x^5+1)}$.

Ta có : $I = \int_1^2 \frac{(1+x^5)-x^5}{x(x^5+1)}dx = \int_1^2 \frac{dx}{x} - \int_1^2 \frac{x^4dx}{1+x^5}$

Đặt $t = 1 + x^5 \Rightarrow dt = 5x^4dx$

x	1	2
t	2	33

$$I = \left(\ln|x|\right)\Big|_1^2 - \frac{1}{5}\int_2^{33}\frac{dt}{t}$$

$$I = \ln 2 - \frac{1}{5}\left(\ln|t|\right)\Big|_2^{33} = \ln 2 - \frac{1}{5}\ln\frac{33}{2} \quad \blacksquare$$

28 Tính $I = \int_0^2 \frac{dx}{(x^2+4)^2}$.

Đặt $x = 2\tan t \Rightarrow dx = 2(1 + \tan^2 t)dt$

x	0	2
t	0	$\frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2(1+\tan^2 t)dt}{(4\tan^2 t + 4)^2} = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\tan^2 t + 1} = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,dt$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)dt = \frac{1}{16}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{16}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{64}(\pi + 2) \quad \blacksquare$$

29 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$.

Tuyển sinh Đại học Khối A 2005

Đặt $t = \sqrt{1+3\cos x} \Rightarrow t^2 = 1 + 3\cos x$

$\Rightarrow 2tdt = -3\sin x dx$

x	0	π/2
t	2	1

Vậy $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\cos x + 1)\sin x dx}{\sqrt{1+3\cos x}} = \int_2^1 \frac{\left[2\left(\frac{t^2-1}{3}\right)+1\right]\left(-\frac{2}{3}tdt\right)}{t}$$

$$I = \frac{2}{9}\int_1^2 (2t^2+1)dt = \frac{2}{9}\left(\frac{2t^3}{3} + t\right)\Big|_1^2 = \frac{34}{27} \quad \blacksquare$$

30 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x dx}{1+\cos^2 x}$.

Ta có : $$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin 2x.\cos 2x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin 2x(2\cos^2 x - 1)dx}{1+\cos^2 x}$$

Đặt $t = 1 + \cos^2 x \Rightarrow dt = -\sin 2x dx$

x	0	$\frac{\pi}{4}$
t	2	$\frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \quad I = 2\int_2^{\frac{3}{2}} \frac{[2(t-1)-1](-dt)}{t} = 2\int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{(2t-3)}{t}dt = 2\int_{\frac{3}{2}}^{2}\left(2-\frac{3}{t}\right)dt$$

$$\Rightarrow \quad I = 2(2t - 3\ln|t|)\Big|_{\frac{3}{2}}^{2} = 2\left(1 - 3\ln\frac{3}{4}\right) \blacksquare$$

31 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.(1+\sin^2 x)^3 dx$

$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x(1+\cos x)^2 dx$.

- Đặt $t = 1 + \sin^2 x \Rightarrow dt = \sin 2x dx$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	1	2

Vậy $I = \int_1^2 t^3 dt = \frac{t^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{1}{4}(16-1) = \frac{15}{4}$.

- Đặt $t = 1 + \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	2	1

Vậy $J = \int_2^1 -(t-1)t^2 dt = \int_1^2 (t^3 - t^2)dt$

$$\Rightarrow \quad J = \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3}\Big|_1^2 = \left(4 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{17}{12} \blacksquare$$

32 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x dx}{\sin x + \cos x + 2}$.

- Ta có : $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$
- Đặt $t = \sin x + \cos x + 2 \Rightarrow dt = (\cos x - \sin x)dx$

x	0	$\frac{\pi}{4}$
t	3	$2 + \sqrt{2}$

Vậy $I = \int_3^{2+\sqrt{2}} \frac{(t-2)dt}{t} = \int_3^{2+\sqrt{2}} \left(1 - \frac{2}{t}\right)dt$

$\Rightarrow I = t - 2\ln|t|\Big|_3^{2+\sqrt{2}} = (2+\sqrt{2}) - 2\ln(2+\sqrt{3}) - (3 - 2\ln 3)$

$\Rightarrow I = \sqrt{2} - 1 + 2\ln\frac{3}{2+\sqrt{3}}$ ■

33 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x dx}{(\sin x + \cos x + 2)^3}$.

Đặt $t = \sin x + \cos x + 2 \Rightarrow dt = (\cos x - \sin x)dx$

x	0	$\frac{\pi}{4}$
t	3	$2+\sqrt{2}$

$\Rightarrow I = \int_3^{2+\sqrt{2}} \left(\frac{t-2}{t^3}\right)dt = \int_3^{2+\sqrt{2}} \left(t^{-2} - 2t^{-3}\right)dt$

$\Rightarrow I = -\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\Big|_3^{2+\sqrt{2}} = \frac{2}{9} - \frac{1+\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}}$ ■

34 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x + 3}$.

Đặt $\cos x = \sqrt{3}\tan t$ $\left(\text{với } t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\right) \Rightarrow -\sin x dx = \sqrt{3}(1 + \tan^2 t)dt$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{6}$	0

Vậy $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^0 \frac{-\sqrt{3}(1+\tan^2 t)dt}{3\tan^2 t + 3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^0 dt = \frac{\sqrt{3}}{3}t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{18}$ ■

35 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[6]{1-\cos^3 x}.\sin x \cos^5 x dx$.

Đề Dự bị Khối D 2002

Đặt $t = \sqrt[6]{1-\cos^3 x} \Rightarrow t^6 = 1 - \cos^3 x$

$\Rightarrow 6t^5 dt = 3\sin x.\cos^2 x dx$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	1

$$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[6]{1-\cos^3 x}.\cos^3 x(\sin x \cos^2 x dx)$$

$$I = \int_0^1 t(1-t^6)(2t^5 dt) = 2\int_0^1 (t^6 - t^{12})dt$$

$$I = 2\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^{13}}{13}\right)\Big|_0^1 = 2\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{13}\right) = \frac{12}{91} \quad \blacksquare$$

36 Tính $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\sin^3 x - \sin x}}{\sin^3 x} \cot x dx$.

Ta có : $\frac{\sqrt[3]{\sin^3 x - \sin x}}{\sin^3 x}.\cot x = \sqrt[3]{\frac{\sin^3 x - \sin x}{\sin^3 x}}.\frac{1}{\sin^2 x}.\cot x$

$$= \sqrt[3]{1 - \frac{1}{\sin^2 x}}.\frac{1}{\sin^2 x}.\cot x$$

$$= \sqrt[3]{-\cot^2 x}.\cot x.\frac{1}{\sin^2 x}$$

Vậy $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} -(\cot x)^{\frac{5}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\cot x)^{\frac{5}{3}} d(\cot x)$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{3}{8}(\cot gx)^{\frac{8}{3}}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{\frac{3}{8}} = -\frac{1}{8\sqrt[3]{3}} \quad \blacksquare$$

Vấn đề 3. PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Nếu u(x) và v(x) là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên [a; b] thì :

$$\int_a^b u(x)dv = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)du .$$

37 Tính $I = \int_0^1 (x-2)e^{2x}dx$.

Tuyển sinh Đại học Khối D 2006

Đặt $u = x - 2 \Rightarrow du = dx; \qquad dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$

Vậy $I = \frac{x-2}{2}e^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = 0 + e^0 - \frac{1}{4}\left(e^{2x}\right)\Big|_0^1$

$$I = 1 - \frac{1}{4}(e^2 - 1) = \frac{5 - e^2}{4} \quad \blacksquare$$

38 Tính $I = \int_0^1 (1+x)^2 e^{2x} dx$.

Đặt $u = (1+x)^2 \Rightarrow du = 2(1+x)dx$

$dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$\Rightarrow I = \frac{(1+x)^2}{2} e^{2x}\Big|_0^1 - \int_0^1 (1+x)e^{2x}dx$

Đặt $u_1 = 1+x \Rightarrow du_1 = dx$

$dv_1 = e^{2x}dx \Rightarrow v_1 = \frac{1}{2}e^{2x}$

Vậy $I = \frac{1}{2}(1+x)^2 e^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\left((1+x)e^{2x}\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{4}\left(e^{2x}\right)\Big|_0^1$

$\Rightarrow I = \frac{1}{4}e^{2x}(2x^2+2x+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}(5e^2 - 1)$ ■

39 Tính $J = \int_0^1 (x^2+2x)e^x dx$.

• Đặt $u = x^2 + 2x \Rightarrow du = (2x+2)dx$

$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

$\Rightarrow J = (x^2+2x)e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 (2x+2)e^x dx$

Đặt $u_1 = 2x+2 \Rightarrow du_1 = 2dx$

$dv_1 = e^x dx \Rightarrow v_1 = e^x$

$\Rightarrow J = 3e - \left((2x+2)e^x\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 2e^x dx$

$\Rightarrow J = 3e - 4e + 2 + 2e^x\Big|_0^1 = e + 2 + 2(e-1) = e$ ■

40 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x dx$.

Ta có : $I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx$

Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \cos 2x dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}\sin 2x$

Do đó : $I = \frac{1}{4}\left(x^2\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}(x\sin 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$

$\Rightarrow I = \frac{\pi^2}{16} + 0 + \frac{1}{8}(\cos 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}$ ■

41 Tính $I = \int_1^{e^\pi} \cos(\ln x)dx$.

Đặt $u = \cos(\ln x) \Rightarrow du = -\frac{1}{x}\sin(\ln x)dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

$\Rightarrow I = x\cos(\ln x)\Big|_1^{e^\pi} + \int_1^{e^\pi} \sin(\ln x)dx$

Đặt $u_1 = \sin(\ln x)dx \Rightarrow du_1 = \frac{1}{x}\cos x(\ln x)dx$

$dv_1 = dx \Rightarrow v_1 = x$

Vậy $I = x\cos(\ln x)\Big|_1^{e^\pi} + x\sin(\ln x)\Big|_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} \cos(\ln x)dx$

$\Rightarrow 2I = e^\pi\cos\pi - 1\cos 0 + e^\pi\sin\pi - \sin 0$

$\Rightarrow I = \frac{-1}{2}(e^\pi + 1)$ ■

42 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x dx$.

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\tan^2 x + 1 - 1)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\tan^2 x + 1)dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} xdx$

Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = (\tan^2 x + 1)dx \Rightarrow v = \tan x$

Do đó: $I = x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} xdx$

$\Rightarrow I = \frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\cos x)}{\cos x} - \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$\Rightarrow I = \frac{\pi}{4} + \left(\ln|\cos x|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi^2}{32}$ ■

43 Tính $I = \int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}dx$.

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow dx = 2tdt$

x	0	π^2
t	0	π

Vậy $I = \int_0^{\pi} 2t\sin t dt$

Đặt $u = 2t \Rightarrow du = 2dt$

$dv = \sin t dt \Rightarrow v = -\cos t$

$\Rightarrow I = -2t\cos t\Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi}\cos t dt$

$\Rightarrow I = -2\cos\pi + 2\sin t\Big|_0^{\pi} = 2$ ■

44* Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x}\sin 4x dx$.

Đặt $u = \sin 4x \Rightarrow du = 4\cos 4x dx$

$dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x}$.

Vậy $I = \left(\frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x}.\cos 4x dx$

Gọi $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x}.\cos 4x dx$

Đặt $u_1 = \cos 4x \Rightarrow du_1 = -4\sin 4x dx$

$dv_1 = e^{3x}dx \Rightarrow v_1 = \frac{1}{3}e^{3x}$

Do đó $J = \frac{1}{3}e^{3x}.\cos 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x}.\sin 4x dx = -\frac{1}{3}e^{\frac{3\pi}{4}} - \frac{1}{3} + \frac{4}{3}I$

Vậy $I = \frac{1}{3}\left(e^{\frac{3\pi}{4}}\sin\pi - e^0\sin 0\right) - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{\frac{3\pi}{4}} - \frac{1}{3} + \frac{4}{3}I\right)$

$\Rightarrow I + \frac{16}{9}I = \frac{4}{9}e^{\frac{3\pi}{4}} + \frac{4}{9} \Rightarrow I = \frac{4}{25}(e^{\frac{3\pi}{4}} + 1)$ ■

45* Tính $I = \int_0^{\pi} e^{2x}.\sin^2 x dx$.

Ta có : $I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1 - \cos 2x)e^{2x}dx$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2x}dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2x}.\cos 2x dx = \frac{1}{4}\left(e^{2x}\right)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2}K$

Với $K = \int_0^{\pi} e^{2x}.\cos 2x dx$

Đặt $u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x}dx$

$dv = \cos 2x dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}\sin 2x$

Vậy $K = \left(\frac{1}{2}e^{2x}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{2x}.\sin 2x dx$

Đặt $u_1 = e^{2x} \Rightarrow du_1 = 2e^{2x}dx$

$dv_1 = \sin 2xdx \Rightarrow v_1 = -\frac{1}{2}\cos 2x$

Do đó: $K = \frac{1}{2}e^{2\pi}\sin 2\pi - \frac{1}{2}e^{0}\sin 0 - \left(-\frac{1}{2}e^{2x}.\cos 2x\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{2x}.\cos 2xdx$

$\Rightarrow K = +\frac{1}{2}(e^{2\pi}\cos 2\pi - e^{0}\cos 0) - K$

$\Rightarrow 2K = \frac{1}{2}(e^{2\pi} - 1)$

Vậy $I = \frac{1}{4}(e^{2\pi} - 1) - \frac{1}{8}(e^{2\pi} - 1) = \frac{1}{8}(e^{2\pi} - 1)$ ■

46 Tính $I = \int_0^{\pi} x\sin x.\cos^2 xdx$.

Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \sin x.\cos^2 xdx = -\cos^2 xd(\cos x) \Rightarrow v = -\frac{\cos^3 x}{3}$

$\Rightarrow I = -\frac{x}{3}\cos^3 x\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\cos^3 xdx = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{12}\int_0^{\pi}(\cos 3x + 3\cos x)dx$

$\Rightarrow I = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{12}\left(\frac{\sin 3x}{3} + 3\sin x\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{3}$ ■

47 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x}\sin x.\cos^3 xdx$.

Đặt $t = \sin^2 x \Rightarrow dt = 2\sin x\cos xdx$

Ta có: $\sin x.\cos^3 x = \sin x\cos x(1 - \sin^2 x)$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	1

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_0^1 e^t.(1 - t)dt$

Đặt $u = 1 - t \Rightarrow du = -dt$

$dv = e^t dt \Rightarrow v = e^t$

Vậy $I = \frac{1}{2}(1 - t)e^t\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^t dt = -\frac{1}{2}e^0 + \frac{1}{2}\left(e^t\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e - 1$ ■

48 Tính $I = \int_1^2 \ln(1+x)dx$.

Đặt $u = \ln(1+x) \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x+1}$

$dv = dx \Rightarrow v = x+1$

Vậy $I = (x+1)\ln(1+x)\Big|_1^2 - \int_1^2 dx$

$\Rightarrow I = 3\ln 3 - 2\ln 2 - (x)\Big|_1^2 = 3\ln 3 - 2\ln 2 - 1$ ■

49 Tính $I = \int_1^e x\ln^2 x dx$.

Đặt $u = \ln^2 x \Rightarrow du = \dfrac{2}{x}\ln x dx$

$dv = xdx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2}$

Vậy $I = \dfrac{x^2}{2}\ln^2 x\Big|_1^e - \int_1^e x\ln x dx$

Đặt $u_1 = \ln x \Rightarrow du_1 = \dfrac{dx}{x}$

$dv_1 = x \Rightarrow v_1 = \dfrac{x^2}{2}$

$\Rightarrow I = \dfrac{x^2}{2}\ln^2 x\Big|_1^e - \left(\dfrac{x^2}{2}\ln x\right)\Big|_1^e + \int_1^e \dfrac{1}{2}xdx$

$\Rightarrow I = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{e^2}{2} + \dfrac{1}{4}(x^2)\Big|_1^e = \dfrac{1}{4}(e^2-1)$ ■

50 Tính $I = \int_1^2 \dfrac{\ln(x+1)}{x^2}dx$.

Đặt $u = \ln(x+1) \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x+1}$

$dv = \dfrac{dx}{x^2} \Rightarrow v = -\dfrac{1}{x}$

Do đó : $I = -\dfrac{\ln(x+1)}{x}\Big|_1^2 + \int_1^2 \dfrac{dx}{x(x+1)} = -\dfrac{\ln 3}{2} + \ln 2 + \int_1^2 \dfrac{(1+x)-x}{x(1+x)}dx$

$\Rightarrow I = -\dfrac{1}{2}\ln 3 + \ln 2 + \int_1^2 \dfrac{dx}{x} - \int_1^2 \dfrac{dx}{1+x}$

$$\Rightarrow \quad I = \ln\frac{2}{\sqrt{3}} + (\ln x)\Big|_1^2 - (\ln|1+x|)\Big|_1^2$$

$$I = \ln\frac{2}{\sqrt{3}} + \ln 2 - \ln 3 + \ln 2 = \ln\frac{8}{3\sqrt{3}} \quad \blacksquare$$

51 Tính $I = \int_1^e \ln^2 x\,dx$.

Đặt $u = \ln^2 x \Rightarrow du = \frac{2}{x}\ln x dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

Vậy $I = x\ln^2 x\Big|_1^e - 2\int_1^e \ln x dx$

Đặt $u_1 = \ln x \Rightarrow du_1 = \frac{dx}{x}$

$dv_1 = dx \Rightarrow v_1 = x$

Vậy $I = e - 2(x\ln x)\Big|_1^e + 2\int_1^e dx = e - 2e + 2(x)\Big|_1^e = e - 2$ $\blacksquare$

52 Tính $I = \int_1^e (x\ln x)^2 dx$.

Ta có : $I = \int_1^e x^2\ln^2 x dx$

Đặt $u = \ln^2 x \Rightarrow du = \frac{2}{x}\ln x dx$

$dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3}$

Vậy $I = \frac{x^3}{3}\ln^2 x\Big|_1^e - \frac{2}{3}\int_1^e x^2\ln x dx$

Đặt $u_1 = \ln x \Rightarrow du_1 = \frac{dx}{x}$

$dv_1 = x^2 dx \Rightarrow v_1 = \frac{x^3}{3}$

Do đó : $I = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3}\ln x\right)\Big|_1^e + \frac{2}{9}\int_1^e x^2 dx = \frac{e^3}{3} - \frac{2e^3}{9} + \frac{2}{9}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^e$

$\Rightarrow \quad I = \frac{e^3}{9} + \frac{2}{27}(e^3 - 1) = \frac{5}{27}e^3 - \frac{2}{27}$ $\blacksquare$

53 Tính $I = \int_1^2 x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$.

Đặt $u = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow du = \frac{x^2}{1 + \frac{1}{x}} dx = \frac{1}{x(x+1)} dx$

$dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3 + 1}{3}$

Vậy $I = \frac{x^3 + 1}{3} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 + \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{x^3 + 1}{x(x+1)} dx$

$\Rightarrow I = 3\ln\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\ln 2 + \frac{1}{3}\int_1^2 \left(x - 1 + \frac{1}{x}\right) dx$

$\Rightarrow I = 3\ln\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\ln 2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x|\right)\Big|_1^2$

$\Rightarrow I = 3\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{1}{6} = 3\ln 3 - \frac{10}{3}\ln 2 - \frac{1}{6}$ ■

54 Tính $I = \int_1^e (1 + x)^2 \ln x dx$.

Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

$dv = (1 + x)^2 dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}(1 + x)^3$

Vậy $I = \frac{1}{3}(1 + x)^3 \ln x\Big|_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e \frac{(1 + x)^3}{x} dx$

$\Rightarrow I = \frac{1}{3}(1 + e)^3 - \frac{1}{3}\int_1^e \left(x^2 + 3x + 3 + \frac{1}{x}\right) dx$

$\Rightarrow I = \frac{1}{3}(1 + e)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 3x + \ln|x|\right)\Big|_1^e$

$\Rightarrow I = \frac{1}{3}(1 + e)^3 - \frac{1}{3}\left[\left(\frac{e^3}{3} + \frac{3}{2}e^2 + 3e + 1\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 3\right)\right]$

$\Rightarrow I = \frac{1}{18}(4e^3 + 9e^2 + 29)$ ■

55 Tính $I = \int_1^e x^3 \ln^2 x dx$.

Tuyển sinh Đại học Khối D 2007

Đặt $u_1 = \ln^2 x \Rightarrow du_1 = \frac{2}{x}\ln x dx$

$dv_1 = x^3 dx \Rightarrow v_1 = \frac{x^4}{4}$

Vậy: $I = \frac{x^4}{4}\ln^2 x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x^3 \ln x dx$

Đặt $u_2 = \ln x \Rightarrow du_2 = \frac{dx}{x}$

$dv_2 = x^3 dx \Rightarrow v_2 = \frac{x^4}{4}$

Vậy: $I = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}\ln x\Big|_1^e + \frac{1}{8}\int_1^e x^3 dx\right) = \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{8} + \frac{1}{8}\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_1^e$

$I = \frac{e^4}{8} + \frac{1}{32}(e^4 - 1) = \frac{1}{32}(5e^4 - 1)$ ■

56 Tính $I = \int_e^{e^3}\left(\frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x}\right)dx$.

Xét $J = \int_e^{e^3}\frac{dx}{\ln x}$

Đặt $u = \frac{1}{\ln x} \Rightarrow du = -\frac{1}{x(\ln x)^2}dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

Vậy $J = \frac{x}{\ln x}\Big|_e^{e^3} + \int_e^{e^3}\frac{dx}{(\ln x)^2}$

Ta có: $I = \int_e^{e^3}\left(\frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x}\right)dx = \int_e^{e^3}\frac{dx}{(\ln x)^2} - J$

$\Rightarrow I = \int_e^{e^3}\frac{dx}{(\ln x)^2} - \left(\frac{x}{\ln x}\right)\Big|_e^{e^3} - \int_e^{e^3}\frac{dx}{(\ln x)^2} = -\frac{x}{\ln x}\Big|_e^{e^3} = -\frac{e^3}{3} + e$ ■

57 Cho $I_k = \int_1^e \ln\frac{k}{x}dx$ Tìm k để $I_k < e - 2$.

$I_k = \int_1^e (\ln k - \ln x)dx = \int_1^e \ln k dx - \int_1^e \ln x dx$

Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

$\Rightarrow \quad I_k = (x\ln k)\Big|_1^e - (x\ln x)\Big|_1^e + \int_1^e dx$

$\Rightarrow \quad I_k = (e-1)\ln k - e + [x]_1^e = (e-1)\ln k - 1$

Do đó $I_k < e-2 \Leftrightarrow (e-1)\ln k - 1 < e-2$

$\Leftrightarrow (e-1)\ln k < e-1 \Leftrightarrow \ln k < 1 = \ln e$

$\Leftrightarrow k < e$ ■

58 a) Với $x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ hãy xác định hằng số A, B sao cho :

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{a\cos x}{1-\sin x} + \frac{b\cos x}{1+\sin x}. \quad \text{Suy ra } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}.$$

b) Bằng cách viết : $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^3 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}.\frac{1}{\cos^2 x}dx$

dùng phép tích phân từng phần hãy tính J.

a) $\frac{1}{\cos x} = \frac{a\cos x}{1-\sin x} + \frac{b\cos x}{1+\sin x} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{a}{1-\sin x} - \frac{b}{1+\sin x}$

$\Leftrightarrow 1 = a(1+\sin x) + b(1-\sin x) \Leftrightarrow 1 = a + b + (a-b)\sin x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1-\sin x}dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x dx}{1+\sin x}$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-d(1-\sin x)}{1-\sin x} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(1+\sin x)}{1+\sin x}$$

$$\Rightarrow I = \left(-\frac{1}{2}\ln|1-\sin x| + \frac{1}{2}\ln(1+\sin x)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\ln\frac{|1+\sin x|}{|1-\sin x|}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(\sqrt{2}+1).$$

b) $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^3 x}$

Đặt $u = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow du = \frac{+\sin x}{\cos^2 x}dx$

$dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow v = \tan x$

Vậy $J = \frac{\tan x}{\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx = \sqrt{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\cos^2 x)dx}{\cos^3 x}$

$\Rightarrow J = \sqrt{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^3 x} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$

$\Rightarrow J = \sqrt{2} - J + I$

$\Rightarrow 2J = \sqrt{2} + I$

$\Rightarrow J = \frac{1}{2}\left|\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)\right|$ ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1. Cho $f(x) = A\sin 2x + B$.

Tìm A, B thỏa $f'(0) = 4$ và $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 3$.

Bài 2. Tính: $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x + e^{\sin x}\cos x)dx$ *(Dự bị Khối B 2005)*

$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\cos 4x dx$ $C = \int_1^4 \frac{dx}{x^2(x+1)}$ $D = \int_1^4 \frac{e^{-x}dx}{1+e^x}$

$E = \int_0^1 \frac{x^5 dx}{x^2+1}$ $F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x\cos 5x dx$.

$G = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 x + \cos^4 x)\cos 2x dx$

$H = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x\tan x dx$ *(Dự bị Khối A 2005)*

$L = \int_0^1 x^3.\sqrt{1-x^2}dx$ $K = \int_0^{\ln 3} \frac{dx}{e^x+2}$

$M = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$ $N = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{x+1}$ $P = \int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)^3}$.

Bài 3. *(Dự bị Khối B 2003)*

Cho $f(x) = \frac{a}{(x+1)^3} + bxe^x$. Tìm a, b biết $f'(0) = 22$ và $\int_0^1 f(x)dx = 5$.

(Đáp số: a = 8, b = 2)

Bài 4. Tính:

$A = \int_0^1 \frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^2}dx$ $B = \int_0^{10} x\log^2 x dx$

C = $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\sqrt{x}\,dx$ D = $\int_{\sqrt{2}}^{4} \sqrt{x^2 - 1}dx$

E = $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$ F = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \sin x}{\cos^2 x}dx$

G = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\sin 2x dx$ *(Dự bị Khối D 2006)*

H = $\int_0^2 (x-2)\ln x dx$ *(Dự bị Khối D 2006)*

K = $\int_0^e x^2 \ln x dx$ *(Dự bị Khối B 2005)*

L = $\int_{-1}^{0} x(e^{2x} + \sqrt[3]{x+1})dx$ *(Dự bị Khối A 2002)*

I = $\int_0^{\pi^2} \sqrt{x}.\sin\sqrt{x}\,dx$ *(Dự bị Khối D 2004)*

J = $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1 + \cos 2x}$ *(Dự bị Khối B 2003)*

T = $\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$ *(Dự bị Khối D 2003)*

45 CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Vấn đề 1. CÔNG THỨC NEWTON – LEIBNITZ

1. Kết quả của I = $\int_1^4 \frac{dx}{x}$ là :

a) 0 b) –1 c) $\frac{1}{2}$ d) Không tồn tại

2. I = $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x(1 + tg^2 x)}$ bằng :

a) 0 b) –1 c) $\frac{1}{2}$ d) 1.

3. Đẳng thức nào sau đây là sai :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t dt$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int_0^1 dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin(2x+1)d(2x+1)$ d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.dx$

4. Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{x}{3}dx$ bằng :

a) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ d) $\frac{3}{2}$.

5. Tích phân $J = \int_1^2 \frac{e^x dx}{e^x - 1}$ bằng :

a) $\ln(e + 1)$ b) $\ln(e - 1)$ c) $-\ln(e + 1)$ d) $\ln(e^2 - 1)$.

6. $I = \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x}dx$ bằng :

a) 2 b) $\frac{3}{2}$ c) 1 d) $\frac{1}{2}$.

7. $I = \int_0^{\pi} \sin 2x.\cos 3x dx$:

a) $\frac{1}{5}$ b) $-\frac{2}{5}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $-\frac{4}{5}$.

8. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 4x \sin dx$ bằng :

a) $-\frac{7}{60}$ b) $\frac{7}{60}$ c) $\frac{1}{20}$ d) $-\frac{1}{20}$.

9. $I = \int_0^5 \frac{dx}{(x-4)^4}$ bằng :

a) $\frac{65}{192}$ b) $-\frac{65}{192}$ c) 0 d) Không xác định.

10. $I = \int_1^8 \sqrt[3]{x}dx$ bằng :

a) $\frac{45}{4}$ b) $\frac{45}{2}$ c) 15 d) Không tồn tại

11. $I = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{x+1}$ bằng :

a) $\frac{5}{6} + \ln 2$ b) $-\frac{5}{6} + \ln 2$ c) $\frac{5}{6} - \ln 2$ d) $-\frac{5}{6} - \ln 2$.

12. $I = \int_1^4 10^{\frac{x}{2}}dx$ bằng :

a) $\frac{198}{5}\ln 10$ b) $\frac{198}{5\ln 10}$ c) $-\frac{198}{5}\ln 10$ d) $-\frac{198}{5\ln 10}$.

13. $I = \int_0^1 \frac{xdx}{x+1}$ bằng :

a) $1 - \ln 2$ b) $1 + \ln 2$ c) $-1 + \ln 2$ d) $-1 - \ln 2$

14. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$ bằng :

a) $1 + \frac{\pi}{4}$ b) $-1 + \frac{\pi}{4}$ c) $1 - \frac{\pi}{4}$ d) 1.

15. $I = \int_0^1 \frac{xdx}{4 - x^2}$ bằng :

a) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$ c) $\ln\frac{3}{4}$ d) $\ln\frac{4}{3}$.

16. $I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^3}$ bằng :

a) 3 b) $\frac{8}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{3}{8}$.

17. $I = \int_{-1}^2 \frac{xdx}{x^2 + 2}$ bằng :

a) $\frac{1}{2}\ln 2$ b) $2\ln 2$ c) $\ln\frac{1}{2}$ d) $2\ln\frac{1}{2}$.

18. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ bằng :

a) π b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{8}$.

19. $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x dx$ bằng :

a) $3\sqrt{3}$ b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ d) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

20. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} dx$ bằng :

a) 0 b) 1 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{4}$.

21. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos x}$ bằng :

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 2.

22. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos x dx$ bằng :

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{6}$.

23. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx$ bằng :

a) $e - 1$ b) e^2 c) e^3 d) $\frac{e}{2}$

24. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x dx$ bằng :

a) ln4 b) ln2 c) $\ln\frac{1}{2}$ d) $\ln\frac{1}{3}$.

25. $I = \int_1^e \frac{\ln x \, dx}{x}$ bằng :

a) 1 b) -2 c) $-\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{2}$.

Vấn đề 2. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

26. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+\sin x} \cos x \, dx$ bằng :

a) $3 + \sqrt{3}$ b) $3 - \sqrt{3}$ c) $\frac{3\sqrt{3}-1}{6}$ d) $\frac{3\sqrt{3}-1}{2}$.

27. $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ bằng :

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{\pi}{2}$.

28. $I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ bằng :

a) π b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{\pi}{6}$.

29. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin^2 x)^3 \sin 2x \, dx$ bằng :

a) 15 b) $\frac{15}{2}$ c) $\frac{15}{4}$ d) 5.

30. $I = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{(e^x + 1)^3}$

a) $\frac{1}{32}$ b) $\frac{3}{32}$ c) $\frac{5}{32}$ d) $\frac{7}{32}$.

31. $I = \int_0^1 x^3(1 - x^2)^4 dx$:

a) $\frac{1}{20}$ b) $\frac{1}{30}$ c) $\frac{1}{40}$ d) $\frac{1}{60}$.

32. $I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$ bằng :

a) $2(1 + \ln 2)$ b) $2(1 - \ln 2)$ c) $1 + 2\ln 2$ d) $1 - 2\ln 2$.

33. $I = \int_1^e \frac{\sqrt{3 + \ln x}}{x} dx$ bằng :

a) $\frac{28}{3}$ b) $\frac{14}{3}$ c) $\frac{7}{3}$ d) $\frac{4}{3}$.

34. $I = \int_0^1 x(1 - x)^5 dx$ bằng :

a) $\frac{1}{42}$ b) $-\frac{1}{42}$ c) $\frac{1}{21}$ d) $\frac{5}{42}$.

35. $I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$ bằng :

a) $1 + \ln 2$ b) $1 - \ln 2$ c) $\frac{1}{2} + \ln 2$ d) $\ln 2$

36. $I = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x + 2}}$ bằng :

a) $2(2 + \sqrt{3})$ b) $2(\sqrt{3} - 2)$ c) $2(2 - \sqrt{3})$ d) $-2(2 + \sqrt{3})$.

37. $I = \int_0^1 \frac{\ln^2(x + 1) dx}{x + 1}$ bằng :

a) $\ln^3 2$ b) $\frac{1}{6}\ln^3 2$ c) $\frac{1}{2}\ln^3 2$ d) $\frac{1}{4}\ln^3 2$.

Vấn đề 3. PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

38. $I = \int_0^1 xe^x dx$ bằng :

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{4}$.

39. $I = \int_0^{\pi} x\cos x dx$ bằng :

a) -4 b) 2 c) 1 d) $\frac{1}{2}$.

40. $I = \int_1^e \ln x dx$ bằng :

a) 1 b) 2 c) 1 d) $\frac{1}{2}$.

41. $I = \int_1^e x\ln x dx$ bằng :

a) $e^2 + 1$ b) $\frac{e^2 + 1}{2}$ c) $\frac{e^2 - 1}{4}$ d) $\frac{e^2 + 1}{8}$.

42. $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$:

a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \ln 2$ b) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \ln 2$ c) $\pi\sqrt{3} - \ln 2$ d) $\pi - \ln 2$.

43. $I = \int_1^2 \frac{\ln x dx}{x^2}$ bằng :

a) $1 + \frac{1}{2}\ln 2$ b) $1 - \frac{1}{2}\ln 2$ c) $2 + \ln 2$ d) $\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$.

44. $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\sin x) dx}{\cos^2 x}$ bằng :

a) $\sqrt{3}\left(\ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3}\ln 2\right) - \frac{\pi}{6}$ b) $\sqrt{3}\left(\ln\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}\ln 2\right) + \frac{\pi}{6}$

c) $\sqrt{3}\left(\ln\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}\ln 2\right) - \frac{\pi}{6}$ d) $-\sqrt{3}\left(\ln\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\ln 2\right) + \frac{\pi}{6}$.

45. $I = \int_0^{\pi^2} \cos\sqrt{x} dx$ bằng :

a) 4 b) -4 c) 2 d) -2.

TRẢ LỜI

Vấn đề 1. CÔNG THỨC NEWTON – LEIBNITZ

1. Chọn d. do $f(x) = \frac{1}{x}$ không xác định tại $x = 0 \in [-1; 1]$.

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x(1+\tan^2 x)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x.\frac{1}{\cos^2 x}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$ → Chọn d

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$

- $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t\,dt = -\cos t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\cos\pi + \cos\frac{\pi}{2} = 1$ → a đúng.
- $\int_0^1 dx = x\Big|_0^1 = 1$ → b đúng.
- $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x+1)d(2x+1) = -\frac{1}{2}\cos(2x+1)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\cos(\pi+1) + \frac{1}{2}\cos 1 \neq 1$

  → c sai.
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ → d đúng.

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{x}{3}dx = 3\sin\frac{x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 3\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ → Chọn b.

5. $\int_1^2 \frac{e^x dx}{e^x - 1} = \int_1^2 \frac{d(e^x - 1)}{e^x - 1} = \ln\left|e^x - 1\right|\Big|_1^2$

$= \ln(e^2 - 1) - \ln|e - 1| = \ln\frac{e^2 - 1}{e - 1} = \ln(e + 1)$ → Chọn a.

6. $I = \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x}dx = \int_1^e \frac{dx}{x} + \int_1^e \ln x d(\ln x) = \ln|x|\Big|_1^e + \left(\frac{\ln^2 x}{2}\right)\Big|_1^e = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

→ Chọn b.

7. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 5x + \sin(-x))dx = \left(-\frac{\cos 5x}{10} + \frac{1}{2}\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= -\frac{1}{10}\left(\cos\frac{5\pi}{2} - \cos 0\right) + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = -\frac{1}{10} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{5}$ → Chọn b.

8. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 4x\sin x\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 5x - \cos 3x)dx = -\frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{6}\sin 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$

$= -\frac{1}{10}\sin\frac{5\pi}{6} + \frac{1}{6}\sin\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{20} + \frac{1}{6} = \frac{-3 + 10}{60}$ → Chọn b.

9. $f(x) = \dfrac{1}{(x-4)^4}$ gián đoạn tại $x = 4 \in (0; 5)$ và $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = +\infty$. Vậy $f(x)$ không khả tích trên $[0; 5]$ → Chọn d.

10. $I = \int_1^8 x^{\frac{1}{3}} dx = \dfrac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \Big|_1^8 = \dfrac{3}{4}\left[\sqrt[3]{8^4} - \sqrt[3]{1^4}\right] = \dfrac{45}{4}$ → Chọn a.

11. $I = \int_0^1 \dfrac{x^3}{x+1} dx = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x - \ln|x+1| \Big|_0^1 = \dfrac{5}{6} - \ln 2$

→ Chọn c.

12. $I = \int_4^1 10^{\frac{x}{4}} dx = 4.\dfrac{10^{\frac{x}{4}}}{\ln 10} \Big|_4^1 = \dfrac{4}{\ln 10}\left|10^{\frac{1}{4}} - 10^{\frac{4}{4}}\right| = \dfrac{4.99}{10\ln 10} = \dfrac{198}{5\ln 10}$ → Chọn b.

13. $I = \int_0^1 \dfrac{(x+1)-1}{x+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \dfrac{1}{x+1}\right) dx = x - \ln|x+1| \Big|_0^1 = 1 - \ln 2$ → Chọn a.

14. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |(\tan^2 x + 1) - 1| dx = \tan x - x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \dfrac{\pi}{4}$ → Chọn c.

15. $I = \int_0^1 \dfrac{x\,dx}{4 - x^2} = -\dfrac{1}{2}\int_0^1 \dfrac{d(4 - x^2)}{4 - x^2} = -\dfrac{1}{2}\ln|4 - x^2| \Big|_0^1 = -\dfrac{1}{2}(\ln 3 - \ln 4) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4}{3}$

→ Chọn b.

16. $\int_0^1 (x+1)^{-3} dx = -\dfrac{1}{2(x+1)^2} \Big|_0^1 = -\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{4} - 1\right] = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{3}{8}$ → Chọn d.

17. $\int_1^2 \dfrac{x\,dx}{x^2 + 2} = \dfrac{1}{2}\int_1^2 \dfrac{d(x^2 + 2)}{x^2 + 2} = \dfrac{1}{2}\left(\ln|x^2 + 2|\right)\Big|_1^2 = \dfrac{1}{2}(\ln 6 - \ln 3) = \dfrac{1}{2}\ln 2$

→ Chọn a.

18. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \cos 2x}{2} dx = \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{4}$ → Chọn c.

19. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\cos 3x + 3\cos x}{4} dx = \left(\dfrac{\sin 3x}{12} + \dfrac{3}{4}\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ → Chọn d.

20. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} dx = \dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{d(1 + \sin 2x)}{1 + \sin 2x} = \dfrac{1}{2}\ln|1 + \sin 2x| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$ → Chọn a.

21. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+2\cos^2\frac{x}{2}-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}} \quad \tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ → Chọn a.

22. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$ → Chọn c.

23. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = e - 1$ → Chọn a.

24. $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln 1 - \ln\frac{1}{2} = \ln 2$ → Chọn b.

25. $I = \int_1^e \frac{\ln x\,dx}{x} = \int_1^e \ln x\,d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^e = \frac{1}{2}\left(\ln^2 e - \ln^2 1\right) = \frac{1}{2}$ → Chọn d.

Vấn đề 2. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

26. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+4\sin x}\cos x\,dx$

x	0	π/6
t	1	$\sqrt{3}$

$t = \sqrt{1+4\sin x} \Rightarrow t^2 = 4\sin x + 1$

$\Rightarrow 2t\,dt = 4\cos x\,dx$

$\Rightarrow I = \int_1^{\sqrt{3}} t\left(\frac{1}{2}t\,dt\right) = \frac{t^3}{6}\Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{6}(3\sqrt{3}-1)$ → Chọn c.

27. $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$.

x	0	1
t	0	π/4

Đặt $x = \tan t \Rightarrow dx = (1+\tan^2 t)dt$

$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\tan^2 t)dt}{1+\tan^2 t} = t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$ → Chọn a.

28. $I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

x	0	2
t	0	π/2

Đặt $x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t\,dt$

$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos t\,dt}{\sqrt{4(1-\sin^2 t)}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\,dt}{|\cos t|} \quad t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$ → Chọn b.

29. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin^2 x)^3 \sin 2x\,dx$

x	0	π/2
t	1	2

$t = 1 + \sin^2 x \quad \Rightarrow \quad dt = \sin 2x\,dx$

$\Rightarrow \quad I = \int_0^2 t^3 dt = \left.\frac{t^4}{4}\right|_1^2 = \frac{1}{4}(16 - 1) = \frac{15}{4}$ → Chọn c.

30. $I = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{(e^x + 1)^3}$

x	0	ln3
t	2	4

$t = e^x + 1 \quad \Rightarrow \quad dt = e^x dx$

$\Rightarrow \quad I = \int_2^4 \frac{dt}{t^3} = -\left.\frac{1}{2t^2}\right|_2^4 = -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{16}\right) = \frac{3}{32}$ → Chọn b.

31. $I = \int_0^1 x^3(1 - x^3)^3 x^2 dx$

x	0	1
t	1	0

$t = 1 - x^3 \quad \Rightarrow \quad dt = -3x^2 dx$

$\Rightarrow \quad I = \int_1^0 -(1 - t)t^3 \cdot \left(\frac{dt}{3}\right)$

$I = \frac{1}{3}\int_0^1 (t^3 - t^4)dt = \frac{1}{3}\left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{60}$ → Chọn d.

32. $I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$

x	0	1
t	0	1

$t = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad t^2 = x \quad \Rightarrow \quad 2t\,dt = dx$

$\Rightarrow \quad I = \int_0^1 \frac{2t\,dt}{1 + t} = 2\int_0^1 \frac{(t + 1) - 1}{t + 1}dt = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t + 1}\right)dt = 2\left(t - \ln|t + 1|\right)\Big|_0^1$

$= 2(1 - \ln 2)$ → Chọn b.

33. $I = \int_1^e \frac{\sqrt{3 + \ln x}}{x}dx$

$t = \sqrt{3 + \ln x} \quad \Rightarrow \quad t^2 = 3 + \ln x \quad \Rightarrow \quad 2t\,dt = \frac{dx}{x}$

x	1	e
t	$\sqrt{3}$	2

$\Rightarrow \quad I = \int_{\sqrt{3}}^2 t(2t\,dt) = \left.\frac{2t^3}{3}\right|_{\sqrt{3}}^2 = \frac{2}{3}(8 - 1) = \frac{14}{3}$ → Chọn b.

34. $I = \int_0^1 x(1 - x)^5 dx$

x	0	1
t	1	0

$t = 1 - x \quad \Rightarrow \quad dt = -dx$

$\Rightarrow \quad I = \int_1^0 (1-t)t^5(-dt) = \int_0^1 (t^5 - t^6)dt$

$\Rightarrow \quad I = \left(\frac{t^6}{6} - \frac{t^7}{7}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$ → Chọn a.

35. $I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$

$t = \sqrt{e^x - 1} \quad \Rightarrow \quad t = e^x - 1 \quad \Rightarrow \quad dt = e^x dx$

x	0	ln2
t	0	1

$\Rightarrow \quad dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t+1}$

$\Rightarrow \quad I = \int_0^1 \frac{tdt}{t+1} = \int_0^1 \frac{(t+1)-1}{t+1}dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt$

$= \left(t - \ln|t+1|\right)\Big|_0^1 = 1 - \ln 2$ → Chọn b.

36. $I = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x + 2}}$

x	0	ln2
t	$\sqrt{3}$	2

$t = \sqrt{e^x + 2} \quad \Rightarrow \quad t^2 = e^x + 2 \quad \Rightarrow \quad 2tdt = e^x dx$

$\Rightarrow \quad I = \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{2tdt}{t} = 2t\Big|_{\sqrt{3}}^2 = 2\left(2 - \sqrt{3}\right)$ → Chọn c.

37. $I = \int_0^1 \frac{\ln^3(x+1)dx}{x+1}$

$t = \ln(x+1) \Rightarrow \quad dt = \frac{dx}{x+1}$

x	0	1
t	0	ln2

$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\ln 2} t^3 dt = \frac{t^4}{4}\Big|_0^{\ln 2} = \frac{1}{4}\ln^4 2$ → Chọn d.

Vấn đề 3. PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

38. $I = \int_0^1 xe^x dx$

$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$

$dv = e^x dx \Rightarrow \quad v = e^x$

$\Rightarrow \quad I = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - \left(e^x\right)\Big|_0^1 = 1$ → Chọn a.

39. $I = \int_0^{\pi} x\cos x\, dx$

$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$

$dv = \cos x\, dx \Rightarrow \quad v = \sin x$

$\Rightarrow \quad I = x\sin\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\,dx = 0 + [\cos x]_0^{\pi} = -1 - 1 = -2 \quad \rightarrow$ Chọn b.

40. $I = \int_1^e \ln x\,dx$

$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \dfrac{dx}{x}$

$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$

$\Rightarrow \quad I = x\ln x\Big|_1^e - \int_0^e \dfrac{x\,dx}{x} = e - x\Big|_1^e = e - (e-1) = 1 \quad \rightarrow$ Chọn c.

41. $I = \int_1^e x\ln x\,dx$

$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \dfrac{dx}{x}$

$dv = x\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \dfrac{x^2}{2}$

$\Rightarrow \quad I = \dfrac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \dfrac{1}{2}\int_1^e x\,dx = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{x^2}{4}\Big|_1^e = \dfrac{e^2+1}{4} \quad \rightarrow$ Chọn c.

42. $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{x\,dx}{\sin^2 x}$

$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$

$dv = \dfrac{dx}{\sin^2 x} \quad \Rightarrow \quad v = -\cot x$

$\Rightarrow \quad I = -x\cot x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x\,dx}{\sin x}$

$\Rightarrow \quad I = 0 + \dfrac{\pi}{6}\left(\sqrt{3}\right) + \left(\ln|\sin x|\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{6} + \ln 2 \quad \rightarrow$ Chọn a.

43. $I = \int_1^2 \dfrac{\ln x}{x^2}dx$

$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \dfrac{dx}{x}$

$dv = x^{-2}dx \quad \Rightarrow \quad v = -\dfrac{1}{x}$

$\Rightarrow \quad I = -\dfrac{1}{x}\ln x\Big|_1^2 + \int_1^2 x^{-2}dx$

$$\Rightarrow \quad I = -\frac{1}{2}\ln 2 - \left(\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = -\frac{1}{2}\ln 2 - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2} \quad \rightarrow \text{Chọn d.}$$

44. $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}\,dx$

$u = \ln(\sin x) \quad \Rightarrow \quad du = \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$

$dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad v = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\Rightarrow \quad I = \tan x.\ln(\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \sqrt{3}\ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\frac{1}{2} - x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow \quad I = \sqrt{3}\ln\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\ln 2 - \frac{\pi}{6} \quad \rightarrow \text{Chọn c.}$$

45. $I = \int_0^{\pi^2} \cos\sqrt{x}\,dx$

$t = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad t^2 = x \quad \Rightarrow \quad 2tdt = dx$

x	0	π^2
t	0	π

$$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\pi} 2t\cos t\,dt$$

$u = 2t \quad \Rightarrow \quad du = 2dt$

$dv = \cos t dt \quad \Rightarrow \quad v = \sin t$

$$\Rightarrow \quad I = 2t\sin t\Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} \sin t\,dt = 0 + 2\cos t\Big|_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow \quad I = 2(-1 - 1) = -4 \quad \rightarrow \text{Chọn b.}$$

Bài 3 : VÀI DẠNG TÍCH PHÂN THƯỜNG GẶP

Vấn đề 1. TÍCH PHÂN HÀM HỮU TỈ

DẠNG 1 : $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \quad (a \neq 0)$

Xét $\Delta = b^2 - 4ac$

* *Nếu* $\Delta = 0$ *: đưa I về dạng* $I = \int_{\alpha}^{\beta} a(x-m)^{-2}dx$ *. Tính được I.*

Với m là nghiệm kép của : $ax^2 + bx + c$.

* *Nếu* $\Delta > 0$ *: phân tích* $ax^2 + bx + c = a(x - m)(x - n)$

dùng phương pháp đồng nhất 2 vế đặt

$$\frac{1}{(x-m)(x-n)} = \frac{A}{x-m} + \frac{B}{x-n}$$

Tìm A, B. Tính được I.

Hoặc đưa mẫu về dạng bình phương thiếu rồi áp dụng

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$$

* *Nếu* $\Delta < 0$ *:* $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}\right]$

Đặt $x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{-\Delta}{4a}}.\tan t \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\Delta}{a}}(1 + \tan^2 t)dt$

Ta tính được I.

1 Tính $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$.

CÁCH 1.

Ta có : $\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{(3-x)+(x-2)}{(x-3)(x-2)}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = -\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$

Vậy $I = \int_0^1 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right)dx = (\ln|x-3| - \ln|x-2|)\Big|_0^2$

$$= \ln \frac{|x-3|}{|x-2|}\Big|_0^1 = \ln \frac{4}{3}.$$

CÁCH 2.

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)} \ln \left| \frac{\left(x-\frac{5}{2}\right) - \frac{1}{2}}{\left(x-\frac{5}{2}\right) + \frac{1}{2}} \right|_0^1 = \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right|_0^1 = \ln \frac{4}{3} \quad \blacksquare$$

Chú ý : Công thức này không có trong sách giáo khoa, khi làm bài trắc nghiệm ta nên sử dụng rất nhanh.

2 Tính : **a)** $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$ **b)** $J = \int_0^2 \frac{dx}{x^2-6x+9}$.

a) Ta có : $\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

Đặt : $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan t, \Rightarrow \quad dx = \frac{\sqrt{3}}{2}(1+\tan^2 t)dt \quad$ với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

x	0	1
t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow I = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(1+\tan^2 t)dt}{\frac{3}{4}\tan^2 t + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dt = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

b) $J = \int_0^2 \frac{dx}{x^2-6x+9} = \int_0^2 \frac{dx}{(x-3)^2} = -\frac{1}{x-3}\Big|_0^2 = \frac{2}{3} \quad \blacksquare$

3 Tìm A, B sao cho $\frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$.

Tính $I = \int_3^5 \frac{dx}{(x-2)(x+1)}$.

Ta có : $\frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} \Leftrightarrow 1 = A(x+1) + B(x-2)$

$$\Leftrightarrow 1 = (A+B)x + A - 2B \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-2B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Do đó : $I = \frac{1}{3}\int_3^5 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{3}\left(\ln|x-2| - \ln|x+1|\right)\Big|_3^5$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3}\ln\frac{|x-2|^5}{|x+1|}\Big|_3 = \frac{1}{3}\left(\ln\frac{3}{6} - \ln\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}\ln 2 \quad \blacksquare$$

4 Tính $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x - 6\cos x + 5}$

Đặt $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$

x	$\frac{\pi}{3}$	π
u	$\frac{1}{2}$	-1

$$\Rightarrow I = \int_{\frac{1}{2}}^{-1} \frac{-du}{u^2 - 6u + 5} = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{du}{(u-3)^2 - 2^2}$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-5}{u-1}\right|\Bigg|_{-1}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(\ln|-9| - \ln|3|) = \frac{1}{4}\ln 3 \quad \blacksquare$$

5 *Đề Tuyển sinh Khối B 2006*

Tính $I = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}$.

Ta có : $I = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^x dx}{e^{2x} + 2 - 3e^x}$

x	ln3	ln5
t	3	5

Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

thì $I = \int_3^5 \frac{dt}{t^2 - 3t + 2} = \int_3^5 \frac{dt}{\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)}\ln\left|\frac{\left(t - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}}{\left(t - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}}\right|\Bigg|_3^5 = \ln\left|\frac{t-2}{t-1}\right|\Bigg|_3^5 = \ln\frac{3}{4} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{3}{2} \quad \blacksquare$$

DẠNG 2 : $I = \int_\alpha^\beta \frac{dx + e}{ax^2 + bx + c} dx$

Phương pháp :

Tách : $I = \frac{d}{2a}\int_\alpha^\beta \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + \left(e - \frac{bd}{2a}\right)\int_\alpha^\beta \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$

Tích phân thứ nhất có dạng $\int \frac{du}{u}$

Tích phân thứ hai đưa về dạng 1 như trên.

Chú ý : *Nếu $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm nên dùng cách đồng nhất hai vế.*

6 Tính $I = \int_0^1 \frac{4x + 11}{x^2 + 5x + 6} dx$.

* *CÁCH 1.*

Ta có : $I = \int_0^1 \frac{2(2x + 5) + 1}{x^2 + 5x + 6} dx = 2\int_0^1 \frac{d(x^2 + 5x + 6)}{x^2 + 5x + 6} + \int_0^1 \frac{dx}{(x + 2)(x + 3)}$

$\Rightarrow \quad I = 2\ln\left|x^2 + 5x + 6\right|\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{(x + 3) - (x + 2)}{(x + 2)(x + 3)} dx$

$\Rightarrow \quad I = 2(\ln 12 - \ln 6) + \int_0^1 \left(\frac{1}{x + 2} - \frac{1}{x + 3}\right) dx$

$\Rightarrow \quad I = 2\ln 2 + \left(\ln|x + 2| - \ln|x + 3|\right)\Big|_0^1$

$\Rightarrow \quad I = 2\ln 2 + \left(\ln\frac{|x + 2|}{|x + 3|}\right)\Big|_0^1 = \ln\frac{9}{2}$.

* *CÁCH 2* : Khi mẫu thức có thể phân tích được ra thừa số ta dùng phương pháp đồng nhất 2 vế thì việc tính tích phân nhanh hơn.

Ta có : $\frac{4x + 11}{x^2 + 5x + 6} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 3}$

$\Leftrightarrow \quad 4x + 11 = A(x + 3) + B(x + 2)$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4 = A + B \\ 11 = 3A + 2B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 1 \end{cases}$

Do đó : $I = \int_0^1 \frac{4x + 11}{x^2 + 5x + 6} dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{x + 2} + \frac{1}{x + 3}\right) dx$

$\Rightarrow \quad I = \left(3\ln|x + 2| + \ln|x + 3|\right)\Big|_0^1 = \ln(x + 2)^3.(x + 3)\Big|_0^1$

$\Rightarrow \quad I = \ln 4(27) - \ln 24 = \ln\frac{9}{2}$ ■

7 Cho hàm số $f(x) = \frac{5x - 3}{x^2 - 3x + 2}$.

a) Tìm các số A và B sao cho : $f(x) = \frac{A}{x - 1} - \frac{B}{x - 2}$ $(\forall x \neq 1, x \neq 2)$.

b) Tính tích phân $I = \int_3^4 f(x)dx$.

a) Ta có : $f(x) = \dfrac{5x-3}{x^2-3x+2} = \dfrac{A}{x-1} - \dfrac{B}{x-2}$

$\Leftrightarrow \quad 5x - 3 = A(x-2) - B(x-1)$

$\Leftrightarrow \quad 5x - 3 = (A-B)x - 2A + B$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} A - B = 5 \\ -2A + B = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = -7 \end{cases}$

b) Do đó : $I = \int_3^4 \left(\dfrac{-2}{x-1} + \dfrac{7}{x-2} \right) dx = -2\ln|x-1| + 7\ln|x-2| \Big|_3^4$

$\Rightarrow \quad I = -2\ln\dfrac{3}{2} + 7\ln 2$ ■

8 Tính $I = \int_0^2 \dfrac{(2x+3)dx}{x^2+2x+4}$.

Ta có : $I = \int_0^2 \dfrac{(2x+2)+1}{x^2+2x+4} dx = \int_0^2 \dfrac{(2x+2)dx}{x^2+2x+4} + \int_0^2 \dfrac{dx}{(x+1)^2+3}$

Xét : $I_1 = \int_0^2 \dfrac{(2x+2)dx}{x^2+2x+4} = \int_0^2 \dfrac{d(x^2+2x+4)}{x^2+2x+4}$

$\Rightarrow \quad I_1 = \ln|x^2+2x+4| \Big|_0^2 = \ln 12 - \ln 4 = \ln 3$

Xét : $I_2 = \int_0^2 \dfrac{dx}{(x+1)^2+3}$

Đặt : $x + 1 = \sqrt{3}\tan t \quad$ với $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \quad dx = \sqrt{3}(\tan^2 t + 1)dt$

x	0	2
t	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \quad I_2 = \dfrac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sqrt{3}(\tan^2 t + 1)dt}{3\tan^2 t + 3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dt = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{18}$

Do đó : $I = \ln 3 + \dfrac{\pi\sqrt{3}}{18}$ ■

9 Tính $I = \int_1^2 \dfrac{x^2 dx}{x^2 - 7x + 12}$.

$I = \int_1^2 \left(1 + \dfrac{7x-12}{x^2-7x+12}\right) dx$

Đặt : $\dfrac{7x-12}{x^2-7x+12} = \dfrac{A}{x-4} + \dfrac{B}{x-3}$

$\Leftrightarrow \quad 7x - 12 = A(x-3) + B(x-4) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 16 \\ B = -9 \end{cases}$

Vậy : $I = \int_1^2 \left(1 + \dfrac{16}{x-4} - \dfrac{9}{x-3}\right)dx$

$\Rightarrow \quad I = \left(x + 16\ln|x-4| - 9\ln|x-3|\right)\Big|_1^2 = 1 + 25\ln 2 - 16\ln 3$ ■

DẠNG 3 : $\int_a^b \dfrac{P(x)}{Q(x)}dx$ **với P(x), Q(x) là đa thức theo x**

- ***Nếu bậc của P(x) lớn hơn hoặc bằng bậc của Q(x) : Dùng phép chia đa thức.***
- ***Nếu bậc của P(x) nhỏ hơn bậc của Q(x) thì :***

+ ***Khi Q(x) chỉ có nghiệm đơn*** $\alpha_1, ..., \alpha_n$.

Đặt : $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{A_1}{x-\alpha_1} + \dfrac{A_2}{x-\alpha_2} + ... + \dfrac{A_n}{x-\alpha_n}$

+ ***Khi*** $Q(x) = (x-\alpha)(x^2+px+q) \quad$ ***với*** $\Delta = p^2 - 4q < 0$

Đặt : $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{A}{x-\alpha} + \dfrac{Bx+C}{x^2+px+q}$

+ ***Khi Q(x) có nghiệm đơn là*** α, ***nghiệm kép*** β ***nghĩa là***

$Q(x) = (x-\alpha).(x-\beta)^2$

Đặt : $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{A}{x-\alpha} + \dfrac{B}{x-\beta} + \dfrac{C}{(x-\beta)^2}$

Chú ý : *Nên khéo phân tích P(x) có thể đơn giản dưới mẫu thức để tách ra nhiều phân thức sẽ tính được tích phân, để khỏi đồng nhất 2 vế dài hơn.*

10 Tính $J = \int_0^1 \dfrac{x^3dx}{x+1}$

Ta có : $J = \int_0^1 \left(x^2 - x + 1 - \dfrac{1}{x+1}\right)dx = \left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x - \ln|x+1|\right)\Big|_0^1$

$\Rightarrow \quad J = \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + 1 - \ln 2\right) = \dfrac{5}{6} - \ln 2$ ■

11 Tính $I = \int_0^1 \frac{x^5 dx}{x^2 + 1}$.

Ta có : $I = \int_0^1 \frac{x^4 . x dx}{x^2 + 1} = \int_0^1 \frac{[(x^4 - 1) + 1]x dx}{x^2 + 1} = \int_0^1 (x^2 - 1)x dx - \int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + 1}$

$\Rightarrow \quad I = \int_0^1 (x^3 - x)dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$

$\Rightarrow \quad I = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + 1\right|\Big|_0^1 = \frac{1}{4}(2\ln 2 - 1)$ ■

12 Tính $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^4 dx}{x^2 - 1}$.

Ta có : $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(x^4 - 1) + 1}{x^2 - 1} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 - 1}\right) dx$

$\Rightarrow \quad I = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1 + x) - (x - 1)}{x^2 - 1} dx$

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{24} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}\right) dx$

$\Rightarrow \quad I = \frac{13}{24} + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{|x - 1|}{|x + 1|}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{13}{24} - \frac{1}{2}\ln 3$ ■

13 Tính $I = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{4 - x^2}$.

Ta có : $I = \int_0^1 \frac{x^2 - 4 + 4}{4 - x^2} dx = \int_0^1 \left(-1 - \frac{4}{x^2 - 4}\right) dx$

$\Rightarrow \quad I = \int_0^1 \left(-1 - \frac{(x + 2) - (x - 2)}{(x - 2)(x + 2)}\right) dx = \int_0^1 \left(-1 - \frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x + 2}\right) dx$

$\Rightarrow \quad I = -x\Big|_0^1 + \left(\ln\frac{|x + 2|}{|x - 2|}\right)\Big|_0^1 = -1 + \ln 3 - \ln 1 = \ln 3 - 1$ ■

14 Tính $I = \int_1^2 \frac{3x^3}{x^2 + 2x + 1} dx$.

Ta có : $I = 3\int_1^2 \left(x - 2 + \frac{3x + 2}{x^2 + 2x + 1}\right) dx = 3\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_1^2 + 3\int_1^2 \frac{3x + 2}{(x + 1)^2} dx$

Đặt : $\dfrac{3x+2}{(x+1)^2} = \dfrac{A}{(x+1)^2} + \dfrac{B}{x+1} \Leftrightarrow 3x+2 = A + B(x+1)$

$\Leftrightarrow 3x+2 = Bx + A + B \Leftrightarrow \begin{cases} B = 3 \\ A + B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 3 \end{cases}$

Do đó : $I = 3\left(\dfrac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_1^2 + 3\int_1^2 \left[\dfrac{-1}{(x+1)^2} + \dfrac{3}{x+1}\right]dx$

$\Rightarrow I = -\dfrac{1}{2} + 3\left(\dfrac{1}{x+1}\right)\Big|_1^2 + 9\left(\ln|x+1|\right)\Big|_1^2$

$\Rightarrow I = -\dfrac{1}{2} + 1 - \dfrac{3}{2} + 9\ln\dfrac{3}{2} = -1 + 9\ln\dfrac{3}{2}$ ■

15 Tính : $I = \int_0^1 \dfrac{x^3 + 2x^2 + 10x + 1}{x^2 + 2x + 9}dx$; $J = \int_0^1 \dfrac{x^2 + 3x + 10}{x^2 + 2x + 9}dx$.

Ta có : $I = \int_0^1 \left(x + \dfrac{x+1}{x^2 + 2x + 9)}\right)dx$

$\Rightarrow I = \dfrac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \dfrac{1}{2}\int_0^1 \dfrac{d(x^2 + 2x + 9)}{x^2 + 2x + 9}$

$\Rightarrow I = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\ln|x^2 + 2x + 9|\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4}{3}$.

Ta có : $J = \int_0^1 \left(1 + \dfrac{x+1}{x^2 + 2x + 9}\right)dx = x\Big|_1^0 + \dfrac{1}{2}\int_0^1 \dfrac{d(x^2 + 2x + 9)}{x^2 + 2x + 9}$

$\Rightarrow J = 1 + \dfrac{1}{2}\left(\ln\left|x^2 + 2x + 9\right|\right)\Big|_0^1 = 1 + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4}{3}$ ■

16 Tính $I = \int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{dx}{x + x^3}$.

Đề Dự bị Khối B 2001

Ta có : $I = \int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{dx}{x(1 + x^2)} = \int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{(1 + x^2) - x^2}{x(1 + x^2)}dx$

$\Rightarrow I = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1 + x^2}\right)dx = \ln|x|\Big|_1^{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{d(1 + x^2)}{1 + x^2}$

$\Rightarrow I = \ln\sqrt{3} - \dfrac{1}{2}\ln\left|1 + x^2\right|\Big|_1^{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}\ln 3 - \dfrac{1}{2}(\ln 4 - \ln 2)$

$\Rightarrow I = \dfrac{1}{2}(\ln 3 - \ln 2) = \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{3}{2}$ ■

17 Tính $I = \int_1^4 \frac{dx}{x^2(x+1)}$.

$$I = \int_1^4 \frac{(1+x)-x}{x^2(1+x)}dx = \int_1^4 \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x(1+x)}\right]dx$$

$$\Rightarrow \quad I = -\frac{1}{x}\Big|_1^4 - \int_1^4 \frac{(1+x)-x}{x(1+x)}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^4 - \int_1^4 \frac{dx}{x} + \int_1^4 \frac{dx}{x+1}$$

$$\Rightarrow \quad I = -\frac{1}{x}\Big|_1^4 - \left(\ln|x|\right)\Big|_1^4 + \left(\ln|x+1|\right)\Big|_1^4$$

$$\Rightarrow \quad I = -\frac{1}{4} + 1 - \ln 4 + \ln\frac{5}{2} = \frac{3}{4} + \ln\frac{5}{8} \quad \blacksquare$$

18 Tính $I = \int_0^1 \frac{xdx}{x^4 + x^2 + 1}$.

Ta có : $I = \int_0^1 \frac{xdx}{\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

Đặt : $x^2 + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan t$ với $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ $\Rightarrow$ $2xdx = \frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \tan^2 t)dt$

x	0	1
t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$

Do đó : $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\tan^2 t)dt}{\frac{3}{4}\tan^2 t + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/3} dt = \frac{\sqrt{3}}{3}(t)\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{6}$ $\blacksquare$

19* Tính $I = \int_1^2 \frac{1-x^2}{1+x^4}dx$.

Ta có : $I = \int_1^2 \frac{\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)dx}{\frac{1}{x^2} + x^2} = \int_1^2 \frac{\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)dx}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2}$

Đặt : $t = x + \frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ $dt = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)dx$

x	1	2
t	2	$\frac{5}{2}$

$$I = \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{-dt}{t^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} \right|_2^{\frac{5}{2}}$$

$$I = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{5 - 2\sqrt{2}}{5 + 2\sqrt{2}} \right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \right|$$

$$I = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{(5 - 2\sqrt{2})^2}{17} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{17(2 - \sqrt{2})}{2(5 - 2\sqrt{2})} \blacksquare$$

20 Cho tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^3 dx}{(x^2 + 1)^3}$. Tính I bằng 2 cách :

a) đặt $t = x^2 + 1$ **b)** đặt $x = \tan t$.

a) Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2xdx$

x	0	1
t	1	2

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{x^2 . x dx}{(x^2 + 1)^3} = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t - 1)dt}{t^3}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_1^2 (t^{-2} - t^{-3})dt = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} \right)_1^2 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{16}$$

b) Đặt $x = \tan t \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 t)dt$

x	0	1
t	0	$\frac{\pi}{4}$

$t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/4} \frac{\tan^3 t . (1 + \tan^2 t)dt}{(\tan^2 t + 1)^3} = \int_0^{\pi/4} \frac{\tan^3 t dt}{(\tan^2 t + 1)^2}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 t}{\cos^3 t} . \frac{dt}{\left(\frac{1}{\cos^2 t} \right)^2} = \int_0^{\pi/4} \sin^3 t . \cos t dt$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/4} \sin^3 t d(\sin t) = \frac{1}{4} \left(\frac{\sin^4 t}{2} \right)_0^{\pi/4} = \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 = \frac{1}{16} \blacksquare$$

21 Tính $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1 + x^2)^2}$.

Đặt $x = \tan t \quad \left(t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \right) \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 t)dt$

x	-1	1
t	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$

Vậy $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\tan^2 t + 1} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t)dt$

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi + 2}{4}$ ■

22 Tính $I = \int_0^1 \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx$.

$$I = \int_0^1 \frac{(x^4 - x^2 + 1) + x^2}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} + \int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^6 + 1}$$

* Đặt $x = \tan t \quad \Rightarrow \quad dx = (1 + \tan^2 t)dt \quad$ với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

x	0	1
t	0	$\frac{\pi}{4}$

Vậy : $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \tan^2 t)dt}{\tan^2 t + 1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4}$

* Đặt : $x^3 = \tan u$ với $u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad 3x^2 dx = (1 + \tan^2 u)du$

x	0	1
u	0	$\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \quad I_2 = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x^3)^2 + 1} = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + tg^2 u)du}{1 + tg^2 u} = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} du = \frac{\pi}{12}$

Do đó $I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$ ■

23 Cho $f(x) = \frac{4x - 1}{x^3 + 2x^2 + x + 2}$.

a) Tìm A, B, C sao cho $f(x) = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x + 2}$.

b) Tính $I = \int_0^1 f(x)dx$.

Ta có :

a) $f(x) = \dfrac{4x-1}{x^3+2x^2+x+2} = \dfrac{4x-1}{(x+2)(x^2+1)} = \dfrac{Ax+B}{x^2+1} + \dfrac{C}{x+2}$

Do đó : $4x - 1 = (Ax + B)(x + 2) + C(x^2 + 1)$

$\Leftrightarrow \quad 4x - 1 = (A + C)x^2 + (2A + B)x + 2B + C$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + C = 0 \\ 2A + B = 4 \\ 2B + C = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{9}{5} \\ B = \dfrac{2}{5} \\ C = -\dfrac{9}{5} \end{cases}$$

b) Ta có : $I = \int_0^1 f(x)dx = \dfrac{1}{5}\int_0^1 \dfrac{9x+2}{x^2+1}dx - \dfrac{9}{5}\int_0^1 \dfrac{dx}{x+2}$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{9}{10}\int_0^1 \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{2}{5}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} - \frac{9}{5}\int_0^1 \frac{dx}{x+2}$$

Đặt : $x = \tan t \Rightarrow \quad dx = (1 + \tan^2 t)dt$

x	0	1
t	0	$\dfrac{\pi}{4}$

Vậy : $I = \dfrac{9}{10}\ln|x^2+1|\Big|_0^1 + \dfrac{2}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt - \dfrac{9}{5}(\ln|x+2|)\Big|_0^1$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{9}{10}\ln 2 + \frac{2}{5}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) - \frac{9}{5}(\ln 3 - \ln 2)$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{27}{10}\ln 2 - \frac{9}{5}\ln 3 + \frac{\pi}{10} \quad \blacksquare$$

Vấn đề 2. TÍCH PHÂN HÀM CHỨA CĂN

Phương pháp :

* ***Khi R(x) là hàm hữu tỷ***

Dạng : $\int_\alpha^\beta R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ ***thì đặt*** $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$

Dạng : $\int_\alpha^\beta R\left(x, \sqrt{c^2 - x^2}\right)dx$ ***thì đặt*** $x = c\sin t$ ***hay*** $x = c\cos t$

Chú ý : *Khi mẫu thức là tổng của 2 căn nên trục căn thức ở mẫu*

24 Tính $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$.

Ta có : $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}dx = \int_0^1 \left[(x+1)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right]dx$

$\Rightarrow \quad I = \frac{2}{3}\left((x+1)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}} - 1\right)$ ■

25 Tính $I = \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}}$.

Đặt : $t = \sqrt{2x+1} \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = 2x+1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{t^2-1}{2}$

Vậy : $2tdt = 2dx$

x	0	1
t	1	$\sqrt{3}$

Vậy $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\frac{1}{2}(t^2-1)tdt}{t} = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}(t^2-1)dt$

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}\right) - \left(\frac{1}{3}-1\right)\right] = \frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ ■

26 Tính $I = \int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+2}}dx$.

Đặt : $t = \sqrt[3]{3x+2} \quad \Rightarrow \quad t^3 = 3x+2 \quad \Rightarrow \quad 3t^2dt = 3dx$

Vậy : $x + 1 = \frac{1}{3}(t^3-2)+1 = \frac{1}{3}(t^3+1)$

x	0	2
t	$\sqrt[3]{2}$	2

Vậy : $I = \frac{1}{3}\int_{\sqrt[3]{2}}^2 \frac{(t^3+1)t^2dt}{t} = \frac{1}{3}\int_{\sqrt[3]{2}}^2 (t^4+t)dt = \frac{1}{3}\left(\frac{t^5}{5} + \frac{t^2}{2}\right)\Big|_{\sqrt[3]{2}}^2$

$I = \frac{42}{15} - \frac{3\sqrt[3]{4}}{10}$ ■

27 Tính $I = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$.

Ta có : $I = \int_1^2 \frac{x^2dx}{x^3\sqrt{1+x^3}}$

Đặt : $t = \sqrt{1+x^3} \Rightarrow t^2 = 1 + x^3 \Rightarrow 2tdt = 3x^2dx$

x	1	2
t	$\sqrt{2}$	3

Vậy : $I = \frac{2}{3}\int_{\sqrt{2}}^{3} \frac{tdt}{(t^2-1)t} = \frac{2}{3}\int_{\sqrt{2}}^{3} \frac{dt}{t^2-1}$

$\Rightarrow I = \frac{2}{3.2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|_{\sqrt{2}}^{3} = \frac{1}{3}\left(\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$

$\Rightarrow I = \frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{2\left(\sqrt{2}-1\right)} = \frac{2}{3}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ ■

28 Tính $I = \int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$.

Đặt : $t = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow t^2 = 1 - x$

Vậy : $2tdt = -dx$

x	0	1
t	1	0

$I = \int_1^0 (1-t^2)t(-2tdt) = \int_0^1 (2t^2 - 2t^4)dt$

$\Rightarrow I = 2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^1 = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{15}$ ■

29 Tính $I = \int_0^1 x^5.\sqrt{1-x^3}dx$.

Ta có : $I = \int_0^1 x^3\sqrt{1-x^3}.x^2dx$

Đặt $t = \sqrt{1-x^3} \Rightarrow t^2 = 1 - x^3 \Rightarrow 2tdt = -3x^2dx$

x	0	1
t	1	0

$\Rightarrow I = \int_0^1 (1-t^2)t.\left(\frac{-2tdt}{3}\right) = \frac{2}{3}\int_0^1 (1-t^2)t^2dt = \frac{2}{3}\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{45}$ ■

30 Tính $I = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$.

Đặt : $t = \sqrt[3]{1+x^2} \Leftrightarrow t^3 = 1 + x^2$

Vậy : $3t^2dt = 2xdx$

x	0	$\sqrt{7}$
t	1	2

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^2.2xdx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(t^3-1)3t^2dt}{t} = \frac{3}{2}\int_1^2 (t^4-t)dt$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{3}{2}\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{3}{2}\left[\frac{32}{5} - 2 - \frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right] = \frac{141}{20} \quad \blacksquare$$

31 Tính $I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$.

Tuyển sinh Đại học Khối A 2002

Đặt : $t = \sqrt{x^2+4} \quad \Rightarrow \quad t^2 = x^2 + 4 \quad \Rightarrow \quad tdt = xdx$

x	$\sqrt{5}$	$2\sqrt{3}$
t	3	4

$$\Rightarrow \quad I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \int_3^4 \frac{tdt}{(t^2-4)t} = \int_3^4 \frac{dt}{t^2-2^2}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\Bigg|_3^4 = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{1}{3} - \ln\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{4}\ln\frac{5}{3} \quad \blacksquare$$

32 Tính $\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

* Ta có : $I = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

Đặt : $t = \sqrt{x^2-1} \quad \Rightarrow \quad t^2 = x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad 2tdt = 2xdx$

x	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$
t	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1

Vậy : $I = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{tdt}{(t^2+1)t} = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{dt}{t^2+1}$

đặt : $t = \tan u$ với $u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad dt = (1 + \tan^2 u)du$

t	$\sqrt{3}/3$	1
u	$\pi/6$	$\pi/4$

thì $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/4} \frac{1+\tan^2 u}{\tan^2 u + 1} du = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/4} du = u\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$ ■

33 Tính $I = \int_0^1 x^{15}.\sqrt{1+3x^8}dx$.

Ta có : $I = \int_0^1 x^8\sqrt{1+3x^8}.x^7dx$

đặt : $t = \sqrt{1+3x^8} \Rightarrow t^2 = 1+3x^8 \Rightarrow 2tdt = 24x^7dx$

x	0	1
t	1	2

Vậy : $I = \int_1^2 \frac{(t^2-1)}{3}.t.\left(\frac{1}{12}tdt\right) = \frac{1}{36}\int_1^2 (t^4 - t^2)dt$

$\Rightarrow I = \frac{1}{36}\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{36}\left[\left(\frac{32}{5} - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right)\right]$

$\Rightarrow I = \frac{1}{36}\left(\frac{31}{5} - \frac{7}{3}\right) = \frac{58}{36} = \frac{29}{18}$ ■

34 Tính $I = \int_0^1 \frac{x^3dx}{x+\sqrt{x^2+1}}$.

Ta có : $I = \int_0^1 \frac{x^3\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{x^2-(x^2+1)}dx = -\int_0^1 x^4dx + \int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}dx$

$\Rightarrow I = -\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 + \int_0^1 x^2\sqrt{x^2+1}(xdx)$

đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow 2tdt = 2xdx$

x	0	1
t	1	$\sqrt{2}$

Vậy $I = -\frac{1}{5} + \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)t(tdt) = -\frac{1}{5} + \int_1^{\sqrt{2}} (t^4-t^2)dt$

$\Rightarrow I = -\frac{1}{5} + \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = -\frac{1}{5} + \left[\left(\frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right)\right]$

$\Rightarrow I = +\frac{2\sqrt{2}}{15} - \frac{1}{15} = \frac{1}{15}\left(2\sqrt{2}-1\right)$ ■

35 Tính $I = \int_{-2}^{\sqrt{2}} \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$.

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow 2tdt = 2xdx$

x	-2	$\sqrt{2}$
t	$\sqrt{5}$	$\sqrt{3}$

Vậy $I = \int_{-2}^{\sqrt{2}} \frac{(x^2+1)xdx}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{3}} \frac{t^2.(tdt)}{(t^2-1)t} = \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{3}} \frac{t^2dt}{t^2-1}$

$\Rightarrow I = \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{3}} \frac{(t^2-1)+1}{t^2-1}dt = \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right)dt = \left(t + \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Big|_{\sqrt{5}}^{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow I = \sqrt{3} - \sqrt{5} + \ln\frac{|\sqrt{3}-1|}{\sqrt{3}+1}.\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ ■

36 Tính $I = \int_1^2 \frac{xdx}{1+\sqrt{x-1}}$.

Tuyển sinh Đại học Khối A 2004

Đặt $t = \sqrt{x-1} \Rightarrow t^2 = x-1 \Rightarrow 2tdt = dx$

x	1	2
t	0	1

Vậy $I = \int_0^1 \frac{(t^2+1)2tdt}{1+t} = 2\int_0^1 \left(t^2 - t + 2 - \frac{2}{t+1}\right)dt$

$\Rightarrow I = 2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t - 2\ln|t+1|\right)\Big|_0^1 = \frac{11}{3} - 4\ln 2$ ■

37 Tính $I = \int_0^1 x^3.\sqrt{1-x^2}dx$.

Ta có : $I = \int_0^1 x^2.\sqrt{1-x^2}xdx$

đặt $t = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow t^2 = 1-x^2 \Rightarrow 2tdt = -2xdx$

x	0	1
t	1	0

Vậy : $I = \int_1^0 (1-t^2)t(-tdt) = \int_0^1 (1-t^2)t^2dt = \int_0^1 (t^2-t^4)dt$

$\Rightarrow I = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ ■

38 Tính $I = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$.

Ta có : $I = \int_1^2 \frac{x^2dx}{x^3\sqrt{1+x^3}}$

Đặt : $t = \sqrt{1+x^3} \Rightarrow t^2 = 1+x^3 \Rightarrow 2tdt = 3x^2dx$

x	1	2
t	$\sqrt{2}$	3

Vậy : $I = \frac{2}{3}\int_{\sqrt{2}}^3 \frac{tdt}{(t^2-1)t} = \frac{2}{3}\int_{\sqrt{2}}^3 \frac{dt}{t^2-1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Big|_{\sqrt{2}}^3$

$\Rightarrow I = \frac{1}{3}\left(\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) = \frac{1}{3}\left(-\ln 2 - \ln(\sqrt{2}-1)^2\right)$

$\Rightarrow I = -\frac{1}{3}\ln 2(\sqrt{2}-1)^2$ ■

39* Tính $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$.

$$I = \int_{-1}^1 \frac{x-\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{x^2-\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^2}dx = \int_{-1}^1 \frac{x-\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{-2\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}dx$$

$\Rightarrow I = -\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{1+x^2}} + \int_{-1}^1 \frac{dx}{2}$

Đặt $t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow t^2 = 1+x^2 \Rightarrow tdt = xdx$

x	-1	1
t	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

$\Rightarrow I = -\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{tdt}{1+t} + \frac{1}{2}(x)\Big|_{-1}^1 = 0 + \frac{1}{2}(2) = 1$ ■

40 Tính $I = \int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}dx$.

Đặt : $t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow t^2 = 1+x^2 \Rightarrow 2tdt = 2xdx$

x	0	1
t	1	$\sqrt{2}$

$\Rightarrow I = \int_0^1 x^2.\sqrt{1+x^2}xdx = \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)t^2dt$

$$\Rightarrow \quad I = \int_1^{\sqrt{2}} (t^4 - t^2)dt = \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Bigg|_1^{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad I = \left(\frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{2}{3}\sqrt{2} \right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{15}\sqrt{2} + \frac{2}{15} \quad \blacksquare$$

41 Tính $I = \int_0^1 x^3.\sqrt{1 - x^2}dx$.

Ta có : $I = \int_0^1 x^2.\sqrt{1 - x^2}.xdx$

Đặt $t = \sqrt{1 - x^2} \quad \Rightarrow \quad t^2 = 1 - x^2 \quad \Rightarrow \quad tdt = -xdx$

x	0	1
t	1	0

Vậy $I = \int_0^1 (1 - t^2)t(-tdt) = \int_0^1 (t^2 - t^4)dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ $\blacksquare$

42 Tính $I = \int_{\sqrt{7}}^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 9}}$.

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 9} \quad \Rightarrow \quad t^2 = x^2 + 9 \quad \Rightarrow \quad 2tdt = 2xdx$

x	$\sqrt{7}$	4
t	4	5

Vậy $I = \int_{\sqrt{7}}^4 \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2 + 9}} = \int_4^5 \frac{tdt}{(t^2 - 9)t} = \int_4^5 \frac{dt}{t^2 - 3^2}$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{6} \ln \frac{|t - 3|}{|t + 3|} \Bigg|_4^5 = \frac{1}{6}\left(\ln \frac{2}{8} - \ln \frac{1}{7} \right) = \frac{1}{6} \ln \frac{7}{4} \quad \blacksquare$$

43 Tính $I = \int_0^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$.

Đặt $t = \sqrt{e^x + 1} \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = e^x + 1$

Vậy $2tdt = e^x dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2tdt}{t^2 - 1}$

x	0	ln3
t	$\sqrt{2}$	2

Vậy $I = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{2dt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Big|_{\sqrt{2}}^{2}$

$\Rightarrow I = \ln\frac{1}{3} - \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \ln\frac{\sqrt{2}+1}{3(\sqrt{2}-1)} = \ln\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{3}$ ■

44 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}}$.

Tuyển sinh Đại học Khối A 2006

Đặt : $t = \sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}$

$\Rightarrow t^2 = (1-\sin^2 x) + 4\sin^2 x = 3\sin^2 x + 1 \Rightarrow 2tdt = 3\sin 2x dx$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	1	2

Vậy : $I = \int_1^2 \frac{\frac{2}{3}tdt}{t} = \frac{2}{3}t\Big|_1^2 = \frac{2}{3}$ ■

45 Tính $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{3+\sin 2x}} dx$.

Ta có : $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x + \sin x)dx}{\sqrt{2^2 - (\sin x - \cos x)^2}}$

Đặt $\sin x - \cos x = 2\sin t$ với $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow (\cos x + \sin x)dx = 2\cos t dt$

x	π/4	π/2
t	0	π/6

$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/6} \frac{2\cos t dt}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} = \int_0^{\pi/6} \frac{2\cos t}{2|\cos t|} dt = \int_0^{\pi/6} dt = \frac{\pi}{6}$ ■

46 Tính $I = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}.dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

Đặt : $u = \sqrt{e^x+1} \Rightarrow u^2 = e^x + 1 \Rightarrow 2udu = e^x dx$

x	0	ln2
u	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$

Vậy : $I = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x.e^x dx}{\sqrt{e^x+1}} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{(u^2-1)2udu}{u}$

$\Rightarrow \quad I = 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (u^2-1)du = \frac{2u^3}{3} - 2u\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \quad I = \left(2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\right) - \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ ■

47 Tính $I = \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}dx$.

Đặt : $x = \cos t \quad \Rightarrow \quad dx = -\sin t dt \quad$ với $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

x	0	1
t	$\pi/2$	0

Vậy $I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{(1-\cos^2 t)^3}\sin t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^6 t}.\sin t dt$

$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)^2 dt$

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - 2\cos 2t + \frac{1}{2}(1+\cos 4t)\right]dt$

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2t + \frac{1}{2}\cos 4t\right)dt$

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}t - \sin 2t + \frac{1}{8}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16}$ ■

48 Tính $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Đặt $x = \sin t$ với $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \quad \Rightarrow \quad dx = \cos t dt$

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
t	0	$\frac{\pi}{4}$

Vậy $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t.\cos t dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t.\cos t dt}{|\cos t|}$

$$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2t) dt$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) \quad \blacksquare$$

49 Tính $I = \int_0^2 x^2\sqrt{4 - x^2}dx$.

Đặt $x = 2\sin t$ với $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $\Rightarrow$ $dx = 2\cos t dt$

x	0	2
t	0	$\frac{\pi}{2}$

Vậy $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t.\sqrt{4 - 4\sin^2 t}.(2\cos t dt)$

$$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\sin^2 t.\cos^2 dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt$$

$$\Rightarrow \quad I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = 2\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \quad \blacksquare$$

50 Tính $I = \int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}dx$ $(a > 0)$.

Đặt $x = a\sin t$ với $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $\Rightarrow$ $dx = a\cos t dt$

x	0	a
t	0	$\frac{\pi}{2}$

Vậy $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2 t\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}(a\cos t dt)$

$$\Rightarrow \quad I = a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t.\cos^2 t dt = \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = \frac{a^4}{8}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^4}{16} \quad \blacksquare$$

Vấn đề 3. TÍCH PHÂN HÀM CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Phương pháp : *Muốn tính* $\int_a^b |f(x)|\,dx$

+ *Xét dấu hàm f(x) trên [a; b]. Giả sử* $\begin{cases} f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \\ x \in (a;b) \end{cases}$

+ *Dùng tính chất của tích phân*

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^{\alpha} |f(x)|\,dx + \int_{\alpha}^b |f(x)|\,dx$$

Mở giá trị tuyệt đối bằng bảng xét dấu trên.

51 Tính $I = \int_0^2 |x^2 - x|\,dx$.

Tuyển sinh Đại học Khối D 2003

Ta có :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$x^2 - x$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	

Vậy $I = \int_0^1 |x^2 - x|dx + \int_1^2 |x^2 - x|dx$

$$\Rightarrow \quad I = \int_0^1 (-x^2 + x)dx + \int_1^2 (x^2 - x)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2$$

$$\Rightarrow \quad I = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = 1 \quad \blacksquare$$

52 Tính $I = \int_0^2 |x^2 - 4x + 3|\,dx$.

Ta có : $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

Do đó : $I = \int_0^1 |x^2 - 4x + 3|\,dx + \int_1^2 |x^2 - 4x + 3|\,dx$

$$\Rightarrow \quad I = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx - \int_1^2 (x^2 - 4x + 3)dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\Big|_0^1 - \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\Big|_1^2$$

$$\Rightarrow \quad I = \left(\frac{1}{3} - 2 + 3\right) - 0 - \left(\frac{8}{3} - 8 + 6\right) + \left(\frac{1}{3} - 2 + 3\right)$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{2}{3} - \frac{8}{3} + 4 = 2 \quad \blacksquare$$

53 Cho $f(x) = 3x^3 - x^2 - 4x + 1$; $g(x) = 2x^3 + x^2 - 3x - 1$.

a) Giải bất phương trình $f(x) \geq g(x)$

b) Tính $I = \int_{-1}^{2} |f(x) - g(x)| dx$.

a) Ta có : $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - x - 2) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x - 2) \geq 0$

$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \vee x \geq 2.$

b) Ta có : $I = \int_{-1}^{2} |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)| dx + \int_{1}^{2} |f(x) - g(x)| dx$

$$\Rightarrow \quad I = \int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)] dx + \int_{1}^{2} [g(x) - f(x)] dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx - \int_{1}^{2} (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{-1}^{1} - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{1}^{2} = \frac{37}{12} \quad \blacksquare$$

54 Tính $I(\alpha) = \int_0^1 x |x - \alpha| dx$.

- Khi $\alpha \leq 0$ thì : $x - \alpha \geq 0, \forall x$

Vậy $I(\alpha) = \int_0^1 x(x - \alpha) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{\alpha x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{2}$

- Khi $0 < \alpha < 1$ thì :

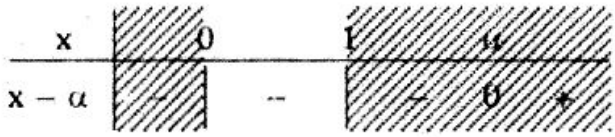
x	0	α	1
$x - \alpha$	$-$	0	$+$

Vậy : $I(\alpha) = \int_0^u x(\alpha - x) dx + \int_u^1 x(x - \alpha) dx$

$$\Rightarrow \quad I(\alpha) = \left(\frac{\alpha x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^u + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{\alpha x^2}{2}\right)\Bigg|_u^1$$

$$\Rightarrow \quad I(\alpha) = \frac{\alpha^3}{2} - \frac{\alpha^3}{3} + \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(\frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^3}{2}\right)$$

$$= \frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3}$$



- Khi $\alpha \geq 1$ thì : $x - \alpha \leq 0, \forall x \leq 1$

$$\Rightarrow \quad I(\alpha) = \int_0^1 x(\alpha - x)dx = \left(\frac{\alpha x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3} \quad \blacksquare$$

53 Tính $I = \int_{-1}^{1} \frac{|x|\,dx}{x^4 - x^2 - 12}$.

Ta có $f(x) = \frac{|x|}{x^4 - x^2 - 12}$ là hàm chẵn trên $[-1; 1]$

Vậy $$I = 2\int_0^1 \frac{|x|\,dx}{x^4 - x^2 - 12} = \int_0^1 \frac{2xdx}{x^4 - x^2 - 12} = \int_0^1 \frac{d\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)}{\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2\left(\frac{7}{2}\right)} \ln\left|\frac{x^2 - 4}{x^2 + 3}\right|\Big|_0^1 = \frac{1}{7}\left[\ln\left|-\frac{3}{4}\right| - \ln\left|\frac{-4}{3}\right|\right] = \frac{2}{7}\ln\frac{3}{4} \quad \blacksquare$$

54 Tính $I = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2x}dx$.

Ta có : $I = \int_0^{\pi} \sqrt{2\cos^2 x}dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi} |\cos x|\,dx$

$$\Rightarrow \quad I = \sqrt{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\cos x|\,dx\right)$$

$$\Rightarrow \quad I = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = \sqrt{2}(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{2}(\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$\Rightarrow \quad I = \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 - \sin\pi + \sin\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2} \quad \blacksquare$$

57 Tính $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin x}dx$.

Ta có : $$1 + \sin x = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \quad (1 + \sin x) = \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 = 2\left[\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]^2$$

Vậy $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| dx$

Đặt $t = \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4} \Rightarrow dt = \frac{1}{2}dx$

x	0	2π
t	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$

Do đó : $I = 2\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} |\sin t| dt = 2\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin t dt - 2\sqrt{2}\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \sin t dt$

$\Rightarrow I = -2\sqrt{2}\cos t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} + 2\sqrt{2}\cos t\Big|_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}$

$\Rightarrow I = -2\sqrt{2}\left(\cos\pi - \cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{4} + \cos\pi\right) = 4\sqrt{2}$ ■

58 Tính $I = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1-\sin x} dx$.

Ta có : $I = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2} dx = \int_{\pi}^{\pi} \left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right| dx$

$\Rightarrow I = \sqrt{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| dx$

Đặt $t = \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4} \Rightarrow dt = \frac{dx}{2}$

x	$-\pi$	π
t	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$

Vậy $I = 2\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |\cos t| dt = 2\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt - 2\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos t dt$

$\Rightarrow I = 2\sqrt{2}(\sin t)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - 2\sqrt{2}(\sin t)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}$

$\Rightarrow I = 2\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}-\sin\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{2}\right) = 4\sqrt{2}$ ■

59 Tính $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |\sin 2x| dx$.

Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
t	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$

Vậy $I = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin t|\,dt = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\sin t|\,dt + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin t|\,dt$

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t\,dt - \frac{1}{2}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin t\,dt = -\frac{1}{2}(\cos t)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{1}{2}(\cos t)\Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}$

$\Rightarrow \quad I = -\frac{1}{2}\left(\cos\pi - \cos\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} - \cos\pi\right) = 1$ ■

60 Tính $I = \int_0^{\pi} |\cos x|\sqrt{\sin x}dx$.

Ta có : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|\sqrt{\sin x}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\cos x|\sqrt{\sin x}dx$

$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{\sin x}dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\sqrt{\sin x}dx$

$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{2}}d(\sin x) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x)^{\frac{1}{2}}d(\sin x)$

$\Rightarrow \quad I = \frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{3}\left((\sin x)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ ■

61 Tính $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/3} \sqrt{\tan^2 x + \cot^2 x - 2}dx$.

Ta có : $\sqrt{\tan^2 x + \cot^2 x - 2} = \sqrt{(\tan x - \cot x)^2} = |\tan x - \cot x|$

$= \left|\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right| = \left|\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos x \sin x}\right|$

$= 2\frac{|\cos 2x|}{|\sin 2x|}$

Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
t	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$

Vậy $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2|\cos 2x|}{|\sin 2x|}dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{|\cos t|}{\sin t}dt$ do $\sin t \geq 0 \ \forall t \in [0, \pi]$

$\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t dt}{\sin t} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} -\frac{\cos t dt}{\sin t}$

$\Rightarrow I = \ln|\sin t|\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} - \ln|\sin t|\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} = -2\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$ ■

Vấn đề 4. TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC

DẠNG 1 : $\int_a^b \sin^n x.\cos^m x dx$ $(n, m \in Z)$

Phương pháp :

- ***Nếu m và n chẵn dương ta dùng công thức hạ bậc***

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

- ***Nếu m lẻ và dương đặt t = sinx***
- ***Nếu n lẻ và dương đặt t = cosx***
- ***Nếu m và n chẵn âm đặt t = tanx hay t = cotx.***

62 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x)dx$.

Ta có : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\right]dx$

$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\sin\pi + \frac{1}{2}\cos\pi\right) - \left(\frac{1}{2}\cos 0\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ ■

63 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$.

Ta có : $I = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)dx$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right)dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \left(\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{16}\pi \quad \blacksquare$$

64 Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x.\cos^2 2x dx$ và $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x.\cos^2 2x dx$

a) Tính I + J, I − J. b) Suy ra I, J.

a) Ta có : $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 4x)dx$

$$\Rightarrow \quad I + J = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Ta có : $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos^2 2x dx$

$$\Rightarrow \quad I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x(1 - \sin^2 2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 2x)d(\sin 2x)$$

$$\Rightarrow \quad I - J = \left(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{6}\sin^3 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

b) Do $\begin{cases} I + J = \frac{\pi}{4} \\ I - J = 0 \end{cases}$

Vậy $I = J = \frac{\pi}{8}$ $\blacksquare$

65 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x.\cos 4x dx$.

Ta có : $I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x)\cos 4x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 4x + \cos 2x.\cos 4x)dx$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos 4x + \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x)\right]dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \left(\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{24}\sin 6x + \frac{1}{8}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 \quad \blacksquare$$

66 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^4 x dx$.

Ta có : $\sin^2 x.\cos^4 x = \frac{1}{8}(1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)^2$

$= \frac{1}{8}(1 - \cos^2 2x)(1 + \cos 2x)$

$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x\right)(1 + \cos 2x)$

$= \frac{1}{16}(1 + \cos 2x - \cos 4x - \cos 4x.\cos 2x)$

$= \frac{1}{16}\left(1 + \cos 2x - \cos 4x - \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x)\right)$

$= \frac{1}{16}\left(1 + \frac{1}{2}\cos 2x - \cos 4x - \frac{1}{2}\cos 6x\right)$

Do đó : $I = \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\cos 2x - \cos 4x - \frac{1}{2}\cos 6x\right)dx$

$= \frac{1}{16}\left(x + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{12}\sin 6x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{32}$ ■

67 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$.

Ta có : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x.\sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx$

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

x	0	π/2
t	1	0

Vậy $I = -\int_1^0 (1 - t^2)^2 dt = \int_0^1 (1 - 2t^2 + t^4)dt$

$\Rightarrow I = \left(t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$ ■

68 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x.\cos^3 x dx$.

Ta có : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x(1 - \sin^2 x)\cos x dx$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

x	0	π/2
t	0	1

Vậy $I = \int_0^1 t^2(1-t^2)dt = \int_0^1 (t^2 - t^4)dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ ■

69 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x(\sin^4 x + \cos^4 x)dx$

Ta có $f(x) = \cos 2x\,(\sin^4 x + \cos^4 x)$

$\Rightarrow$ $f(x) = \cos 2x\,(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x)$

$\Rightarrow$ $f(x) = \cos 2x\,(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x)$

x	0	π/2
t	0	0

Đặt $t = \sin 2x \Rightarrow dt = 2\cos 2x\,dx$

$\Rightarrow$ $I = \int_0^{\pi/2} f(x)dx = \int_0^0 \left(1 - \frac{1}{2}t^2\right)\frac{dt}{2} = 0$ ■

70 Tính $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$.

Ta có : $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{1 - \cos^2 x} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x - 1}$

$\Rightarrow$ $I = +\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right|\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\ln 3$ ■

71 Tính $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/3} \frac{\sin^2 x dx}{\cos^6 x}$

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$

x	π/4	π/3
t	1	$\sqrt{3}$

Vậy $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/3} \tan^2 x . \frac{1}{\cos^2 x} . \frac{dx}{\cos^2 x}$

$\Rightarrow$ $I = \int_1^{\sqrt{3}} t^2(t^2+1)dt = \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{42\sqrt{3} - 8}{15}$ ■

72 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x + \sin^3 x)dx$.

Ta có : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$

$$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\cos x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\sin x\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\,d(\sin x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\,d(\cos x)$$

$$= \left(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(\cos x - \frac{\cos^3 x}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \quad \blacksquare$$

73 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x.\cos^5 x\,dx$.

Ta có : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x.\cos^4 x\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x(1-\sin^2 x)^2\cos x\,dx$

Đặt $t = \sin x \quad \Rightarrow \quad dt = \cos x\,dx$

x	0	π/2
t	0	1

Vậy $I = \int_0^1 t^4(1-t^2)^2\,dt = \int_0^1 (t^4 - 2t^6 + t^8)\,dt$

$$\Rightarrow \quad I = \left(\frac{t^5}{5} - \frac{2}{7}t^7 + \frac{t^9}{9}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{2}{7} + \frac{1}{9} = \frac{8}{315} \quad \blacksquare$$

74 Tính $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^4 x.\cos x}$.

Ta có : $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x.\cos x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x.\cos x} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x.dx}{\sin^4 x}$

$$\Rightarrow \quad I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx}{\sin^2 x\cos x} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x\,dx}{\sin^4 x}$$

$$\Rightarrow \quad I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x\,dx}{\sin^4 x}$$

$$\Rightarrow \quad I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\sin x)}{\sin^4 x}$$

$$\Rightarrow \quad I = \left(-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| - \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x}\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{14}{3} - \frac{26}{9\sqrt{3}} \quad \blacksquare$$

75 Tính $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^6 x dx}{\sin^4 x}$.

Ta có : $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin^2 x)^3}{\sin^4 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-3\sin^2 x+3\sin^4 x-\sin^6 x}{\sin^4 x} dx$

$\Rightarrow \quad I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^4 x} - \frac{3}{\sin^2 x} + 3 - \sin^2 x\right) dx$

$\Rightarrow \quad I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cot^2 x)\frac{dx}{\sin^2 x} + (3\cot x + 3x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2x)dx$

$\Rightarrow \quad I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} -(1+\cot^2 x)d(\cot x) + \frac{3\pi}{2} - 3 - \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow \quad I = \left(\cot x + \frac{\cot^3 x}{3}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3\pi}{4} - 3 - \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right]$

$\Rightarrow \quad I = \left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{5\pi}{8} - \frac{13}{4} = \frac{5\pi}{8} - \frac{23}{12}$ ■

76 Tính $I = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Ta có : $I = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$

$\Rightarrow \quad I = (\tan x - \cot x)\Big|_{\pi/8}^{3\pi/8} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x}\Big|_{\pi/8}^{\frac{3\pi}{8}} = \frac{-2\cos 2x}{\sin 2x}\Big|_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}$

$\Rightarrow \quad I = -2\cot 2x\Big|_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} = -2\cot\frac{3\pi}{4} + 2\cot\frac{\pi}{4} = 4$ ■

77 Tính $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x dx}{\sin x}$.

Ta có : $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin^2 x)\cos x dx}{\sin x} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x\right) d(\sin x)$

$$\Rightarrow \quad I = \left(\ln|\sin x| - \frac{1}{2}\sin^2 x\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = -\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \ln 2 - \frac{3}{8} \quad \blacksquare$$

78 Tính $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x.\sin^3 x}$.

Ta có : $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x.\sin^3 x}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\sin x\cos x} + \frac{\cos x}{\sin^3 x}\right)dx$

$$\Rightarrow \quad I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x\cos x} + \frac{\cot x}{\sin^2 x}\right)dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d(\sin x)}{\sin x} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d(\cos x)}{\cos x} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} -\cot x d(\cot x)$$

$$\Rightarrow \quad I = \left(-\ln|\cos x| + \ln|\sin x| - \frac{1}{2}\cot^2 x\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/3}$$

$$\Rightarrow \quad I = +\ln|\tan x| - \frac{1}{2}\cot^2 x\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \ln\sqrt{3} - \ln\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - 3\right)$$

$$\Rightarrow \quad I = \ln 3 + \frac{4}{3} \quad \blacksquare$$

79 Tính $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}$.

Ta có : $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^4 x} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}\right)dx$

$$\Rightarrow \quad I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x} + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\right)dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\tan^2 x}{\cos^2 x} + \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x d(\tan x) + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \left(\frac{1}{3}\tan^3 x + 2\tan x - \cot x\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \quad I = \left(\frac{1}{3} + 2 - 1\right) - \left(\frac{1}{27}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{3} - \sqrt{3}\right) = \frac{4}{3} + \frac{8}{27}\sqrt{3} \quad \blacksquare$$

80 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^3 x}$.

Dùng phương pháp tích phân từng phần

đặt $u = \frac{1}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{-\sin x dx}{\cos^2 x}$

$dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad v = \tan x$

Vậy : $I = \frac{\sin x}{\cos^2 x}\Big|_0^{\pi/3} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx = 2\sqrt{3} + \int_0^{\pi/3} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} dx$

$\Rightarrow \quad I = 2\sqrt{3} + \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^3 x} - \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x}$

$\Rightarrow \quad 2I = 2\sqrt{3} + \int_0^{\pi/3} \frac{\cos x dx}{1 - \sin^2 x}$

$\Rightarrow \quad I = \sqrt{3} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x - 1} = \sqrt{3} - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|\right)\Big|_0^{\pi/3}$

$\Rightarrow \quad I = \sqrt{3} - \frac{1}{4}\ln\frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right|}{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1} = \sqrt{3} - \frac{1}{4}\ln\frac{|\sqrt{3} - 2|}{\sqrt{3} + 2} \quad \blacksquare$

DẠNG 2 : $\int_a^b R(\sin x, \cos x)dx$ với R là hàm hữu tỷ

Phương pháp :

1. • ***Nếu R (–sinx, cosx) = –R(sinx, cosx) thì đặt t = cosx***

• ***Nếu R(sinx, –cosx) = –R(sinx, cosx) thì đặt t = sinx***

• ***Nếu R (–sinx, –cosx) = R(sinx, cosx) thì đặt t = tanx hay cotx.***

2. Nếu R(sinx, cosx) là hàm đơn giản đặt :

$$t = \tan\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right)dx$$

Lúc đó $\sin x = \frac{2t}{1 - t^2}$, $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$

3. Liên kết với một tích phân khác

4. *Đổi biến đặt $t = \pi - x$ hay $t = \frac{\pi}{2} - x$*

5. *Đồng nhất hóa 2 vế*

Chú ý : *Để tính tích phân dạng R(sinx, cosx) trước tiên nên thử dùng phương pháp 1. Nếu R không phải là hàm chẵn hoặc hàm lẻ theo sinx, cosx mới thử dùng các phương pháp 2, 3, 4, 5.*

81 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\cos x + 1} dx$.

Ta có : $\int_0^{\pi/2} \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{\cos x + 1} dx$

do $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$

đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

x	0	π/2
t	1	0

Do đó :

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \frac{-3 + 4\sin^2 x}{\cos x + 1}(-\sin x dx) = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - 4\cos^2 x}{\cos x + 1}(-\sin x dx)$$

$$\Rightarrow I = \int_1^0 \frac{1 - 4t^2}{t + 1} dt = \int_0^1 \left(4t - 4 + \frac{3}{t+1}\right) dt$$

$$\Rightarrow I = 2t^2 - 4t + 3\ln|t+1|\Big|_0^1 = -2 + 3\ln 2 \quad \blacksquare$$

82 Tính $I = \int_0^{\pi/2} \frac{4\sin^3 x dx}{1 + \cos x}$.

Do $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

x	0	π/2
t	1	0

Ta có : $I = 4\int_0^{\pi/2} \frac{(1 - \cos^2 x)\sin x dx}{1 + \cos x} = 4\int_0^{\pi/2} (1 - \cos x)\sin x dx$

$$\Rightarrow I = -4\int_1^0 (1 - t)dt = 4\left(t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 2 \quad \blacksquare$$

83 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \cos^3 x dx}{1 + \cos^2 x}$.

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

x	0	π/2
t	1	0

Vậy $I = -\int_1^0 \frac{t^3}{1+t^2}dt = \int_0^1 \left(t - \frac{t}{1+t^2}\right)dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1+t^2)}{1+t^2}$

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln|1+t^2|\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$ ■

84 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^3 x dx}{\cos 2x}$.

Do $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = (1 + \tan^2 x)dx$

x	0	$\frac{\pi}{6}$
t	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Do $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

nên $I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{t^3 . \frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{-t^3}{t^2-1}dt = -\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(t + \frac{t}{t^2-1}\right)dt$

$\Rightarrow \quad I = \left(-\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln|t^2-1|\right)\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$ ■

85 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x dx}{1 + \cos x}$.

Tuyển sinh Đại học Khối B 2005

Ta có : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos^2 x \sin x dx}{1 + \cos x}$

Đặt $t = 1 + \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

x	0	π/2
t	2	1

Vậy $I = \int_2^1 \frac{2(t-1)^2(-dt)}{t} = 2\int_1^2 \left(t - 2 + \frac{1}{t}\right)dt$

$\Rightarrow \quad I = 2\left(\frac{t^2}{2} - 2t + \ln|t|\right)\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1$ ■

86 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\sin^3 x dx}{1 + \cos^4 x}$.

Đặt $t = \cos x \quad \Rightarrow \quad dt = -\sin x dx$

x	0	$\frac{\pi}{4}$
t	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ta có : $I = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\cos^2 x)\sin x dx}{1+\cos^4 x}$

$$\Rightarrow \quad I = -4\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{(1-t^2)dt}{1+t^4} = 4\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\left(\frac{1}{t^2}-1\right)dt}{\frac{1}{t^2}+t^2} = 4\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\left(\frac{1}{t^2}-1\right)dt}{\left(\frac{1}{t}+t\right)^2-2}$$

Lại đặt $u = \frac{1}{t} + t \quad \Rightarrow \quad du = \left(-\frac{1}{t^2}+1\right)dt$

t	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
u	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	2

Vậy $I = -4\int_{\frac{3\sqrt{2}}{2}}^2 \frac{du}{u^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{-4}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}\right|\Bigg|_{\frac{3\sqrt{2}}{2}}^2$

$$\Rightarrow \quad I = -\sqrt{2}\left(\ln\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} - \ln\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}\ln\frac{5(2-\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}} \quad \blacksquare$$

87 Tính $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{(1-\cos x)^2}$.

Đặt $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow \quad dt = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

x	π/3	π/2
x	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1

Ta có : $I = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}}{\left(1-\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} = \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{1-t^2}{t^4}dt = \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \left(\frac{1}{t^4}-\frac{1}{t^2}\right)dt$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3t^3}+\frac{1}{t}\right)\Bigg|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \quad \blacksquare$$

88 Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x dx}{1+\cos x}$.

Ta có : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x dx}{1+\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos^3 x + 1) - 1}{1+\cos x} dx$

$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^3 x + 1}{1+\cos x} - \frac{1}{1+\cos x} \right) dx$

$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 x - \cos x + 1 - \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} \right) dx$

$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2x}{2} - \cos x + 1 - \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} \right) dx$

$\Rightarrow \quad I = \left(\frac{3}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} - \sin x - \tan \frac{x}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{4} - 2$ ■

89 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \sin x dx}{(\sin x + \cos x)^3}$.

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x \quad \Rightarrow \quad dt = -dx$

x	0	π/2
t	π/2	0

Vậy $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{-4 \sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right) dt}{\left[\sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right) + \cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \right]^3} = \int_0^{\pi/2} \frac{4 \cos t dt}{(\cos t + \sin t)^3}$

Đặt $J = \int_0^{\pi/2} \frac{4 \cos x dx}{(\cos x + \sin x)^3}$

Ta có $I = J$

Mặt khác : $I + J = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x + \cos x) dx}{(\sin x + \cos x)^3} = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$

$\Rightarrow \quad I + J = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right]^2} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\left(x - \frac{\pi}{4} \right)}{\cos^2 (x - \frac{\pi}{4})}$

$$\Rightarrow \quad I + J = 2\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} = 2\left(\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{4}\right) = 4$$

Mà $I = J$ do đó $I = 2$ ■

90 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x}\,dx$

Đặt $J = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\sin 2x\,dx}{\sin 2x + \cos 2x}$

Ta có $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{8}} dx = x\Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{\pi}{8}$ (1)

Ta có : $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\cos 2x - \sin 2x}{\sin 2x + \cos 2x}\,dx$

$$\Rightarrow \quad I - J = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{d(\sin 2x + \cos 2x)}{\sin 2x + \cos 2x} = \frac{1}{2}\ln|\sin 2x + \cos 2x|\Big|_0^{\frac{\pi}{8}}$$

$$\Rightarrow \quad I - J = \frac{1}{2}\ln\sqrt{2} = \frac{1}{4}\ln 2 \qquad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \quad I = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{8}\ln 2$ ■

91 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5\cos x - 4\sin x}{(\cos x + \sin x)^3}\,dx$.

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dt = -dx$

x	$\frac{\pi}{2}$	0
t	0	$\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \quad I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -\frac{5\sin t - 4\cos t}{(\sin t + \cos t)^3}\,dt$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5\sin t - 4\cos t}{(\sin t + \cos t)^3}\,dt$$

Đặt $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5\sin x - 4\cos x}{(\sin x + \cos x)^3}\,dx$ thì $I = J$ (1)

Ta có $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{(\cos x + \sin x)^3}\,dx$

$$\Rightarrow \quad I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad I + J = -\frac{1}{2}\cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \quad I = \frac{1}{4}$ ■

Chú ý : Một số bài $\int R(\sin x, \cos x)dx$ với R là hàm hữu tỷ phải dùng phương pháp đồng nhất hai vế. Khi R(sinx, cosx) có dạng $\frac{u}{v}$ phải tìm A, B, C sao cho $\frac{u}{v} = A + \frac{Bdv}{v} + \frac{C}{v}$.

92 Cho $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x + \sin x}$.

a) Tìm A, B sao cho $f(x) = A + B\dfrac{(\cos x - \sin x)}{\cos x + \sin x}$.

b) Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x + \sin x} = \dfrac{A(\cos x + \sin x) + B(\cos x - \sin x)}{\cos x + \sin x}$

$\Leftrightarrow \quad \sin x = (A - B)\sin x + (A + B)\cos x$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} A - B = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

b) Vậy $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)dx$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\ln|\cos x + \sin x|)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$ ■

98 a) Tìm 2 số a, b sao cho : $\dfrac{1 - x}{(x + 1)(x^2 + 1)} \equiv \dfrac{a}{x + 1} + \dfrac{bx}{x^2 + 1}$ $(\forall x \neq -1)$.

b) Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{(1 - \sin x)\cos x dx}{(1 + \sin x)(2 - \cos^2 x)}$.

a) Ta có : $1 - x \equiv a(x^2 + 1) + bx(x + 1)$

$\Leftrightarrow \quad 1 - x \equiv (a + b)x^2 + bx + a$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ b = -1 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

b) Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

x	0	$\pi/2$
t	0	1

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{(1-t)dt}{(1+t)(t^2+1)} = \int_0^1 \left(\frac{1}{t+1} - \frac{t}{(t^2+1)} \right) dt$$

$$\Rightarrow I = \ln|t+1|\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(t^2+1)}{t^2+1}$$

$$\Rightarrow I = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln|t^2+1|\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 \quad \blacksquare$$

94 Tìm A, B sao cho : $h(x) = \dfrac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2} = \dfrac{A\cos x}{(2+\sin x)^2} + \dfrac{B\cos x}{2+\sin x}$.

Suy ra $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} h(x)dx$.

Ta có : $\sin 2x = A\cos x + B\cos x(2+\sin x)$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = (A+2B)\cos x + \frac{B}{2}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + 2B = 0 \\ \dfrac{B}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 2 \\ A = -4 \end{cases}$$

Vậy $$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left[\frac{-4\cos x}{(2+\sin x)^2} + \frac{2\cos x}{2+\sin x} \right] dx$$

$$\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left[\frac{-4}{(2+\sin x)^2} + \frac{2}{2+\sin x} \right] d(2+\sin x)$$

$$\Rightarrow I = \left(\frac{4}{2+\sin x} + 2\ln|2+\sin x| \right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$\Rightarrow I = (2 + 2\ln 2) - 4 - 2\ln 1 = 2(\ln 2 - 1) \quad \blacksquare$$

95 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x dx$.

Ta có : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x(\tan^2 x + 1 - 1)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x d(\tan x) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\cos x)}{\cos x}$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{\tan^2 x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \blacksquare$$

96 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^5 x dx$.

Ta có : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x.\tan^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x.(\tan^2 x + 1 - 1)dx$

$$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x d(\tan x) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x|(\tan^2 x + 1) - 1|dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{4}\tan^4 x\Big|_0^1 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x d(\tan x) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-d(\sin x)}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\tan^2 x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \left(\ln|\cos x|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{4} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \blacksquare$$

97 Tính $I = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \tan^4 x dx$.

Ta có : $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/3} \tan^2 x|(\tan^2 x + 1) - 1|dx$

$$\Rightarrow \quad I = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \tan^2 x.d(\tan x) - \int_{\pi/4}^{\pi/3} (\tan^2 x + 1 - 1)dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{3}\tan^3 x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/3} - \int_{\pi/4}^{\pi/3} d(\tan x) + \int_{\pi/4}^{\pi/3} dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{3}\left(3\sqrt{3} - 1\right) - (\tan x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} + (x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{2}{3} + \frac{\pi}{12} \quad \blacksquare$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1. Tính các tích phân :

$$A = \int_1^2 \frac{dx}{x(x^4 + 1)} \qquad B = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{x + 1}$$

$$C = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx \qquad D = \int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^2 + 1}$$ *(Dự bị Khối B 2002)*

$E = \int_0^1 \frac{xdx}{(2x+1)^3}$ $F = \int_0^2 \frac{x^4 - x + 1}{x^2 + 4}$ *(Dự bị Khối A 2004)*

$G = \int_{12}^{17} \frac{(x+3)^5}{(x-7)^7}dx$ $H = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+3x+2)^2}$.

Bài 2. Tính các tích phân :

$A = \int_0^{\sqrt{3}} x^5.\sqrt{1+x^2}dx$ $B = \int_0^7 \frac{x+2}{\sqrt[3]{x+1}}dx$ *(Dự bị Khối A 2005)*

$C = \int_2^6 \frac{dx}{2x+1+\sqrt{4x+1}}$ *(Dự bị Khối A 2006)*

$D = \int_5^{10} \frac{dx}{x-2\sqrt{x-1}}$ *(Dự bị Khối B 2006)*

$E = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{3-2\ln x}{x\sqrt{1+2\ln x}}dx$ *(Dự bị Khối B 2006)*

$F = \int_0^1 \frac{x^3}{x+\sqrt{x^2+1}}dx$ $G = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

Bài 3. Tính các tích phân :

$A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \tan x$ *(Dự bị Khối B 2005)*

$B = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x + 3\sin x + 3}$ $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x.\sin 2xdx$

$D = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$ $E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4xdx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$

$F = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)^2}$ $G = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \cos xdx}{\sin 2x + \cos 2x}$

$H = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\cos x}{4-\sin^2 x}dx$ $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx$

$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin x + 4\cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}dx$ $G = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx$.

30 CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 6x + 9}$ bằng :

A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$.

2. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 4}$ bằng :

A. $\ln 3$ B. $-\ln 3$ C. $\frac{1}{2}\ln 3$ D. $-\frac{1}{4}\ln 3$.

3. Tích phân $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}$ bằng :

A. $\ln \frac{6}{5}$ B. $\frac{1}{2}\ln \frac{6}{5}$. C. $\ln \frac{5}{6}$ D. $\frac{1}{2}\ln \frac{5}{6}$.

4. Tích phân $I = \int_0^3 \frac{dx}{x^2 + 9}$ bằng :

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{12}$ D. $\frac{\pi}{24}$.

5. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$ bằng :

A. $\ln 2 - \frac{1}{2}$ B. $\ln 2 + \frac{1}{2}$ C. $-\ln 2 + \frac{1}{2}$ D. $-\ln 2 - \frac{1}{2}$.

6. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{x\,dx}{2 - x^2}$ bằng :

A. $\ln \frac{1}{2}$ B. $\ln 2$ C. $-\frac{1}{2}\ln \frac{1}{2}$ D. $2\ln \frac{1}{2}$.

7. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^2 - 4}$ bằng :

A. $1 + \ln 3$ B. $1 - \ln 3$ C. $-1 + \ln 3$ D. $-1 - \ln 3$.

8. Tích phân $I = \int_{-1}^0 \frac{x^3}{x+2} dx$ bằng :

A. $\frac{10}{3} + 8\ln 2$ B. $\frac{10}{3} - 8\ln 2$ C. $-\frac{10}{3} + 8\ln 2$ D. $-\frac{10}{3} - 8\ln 2$.

9. Tích phân $I = \int_0^1 \sqrt[3]{x}\, dx$ bằng :

A. $-\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $-\frac{4}{3}$.

10. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$ bằng :

A. $\sqrt{3}$ B. -1 C. $\sqrt{3}+1$ D. $\sqrt{3}-1$.

11. $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$ bằng :

A. $4\sqrt{2}$ B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

12. Tích phân $I = \int_0^1 x\sqrt{1-x}$ bằng :

A. $\frac{2}{15}$ B. $\frac{4}{15}$ C. $\frac{8}{15}$ D. $\frac{16}{5}$.

13. Tích phân $I = \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$ bằng :

A. $2(e^2+e)$ B. e^2-e C. $2(e^2-e)$ D. e^2+e.

14. $I = \int_1^3 \frac{\sqrt{1+\ln x}\,dx}{x}$ bằng :

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{14}{3}$

15. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{2+4\sin x}\cos x\,dx$ bằng :

A. $\frac{7}{3}$ B. $\frac{7}{2}$ C. $\frac{7}{6}$ D. $\frac{4-\sqrt{2}}{3}$

16*. Tích phân $I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$ bằng :

A. $1-\frac{\pi}{4}$ B. $1+\frac{\pi}{4}$ C. $2-\frac{\pi}{2}$ D. $2+\frac{\pi}{2}$.

17. Tích phân $I = \int_0^1 x.\sqrt[3]{1-x}\,dx$ bằng :

A. $\frac{9}{28}$ B. $-\frac{9}{28}$ C. $\frac{28}{9}$ D. $\frac{3}{28}$

18. $I = \int_0^3 |x-2|dx$ bằng :

A. 5 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $-\frac{5}{2}$.

19. $I = \int_{-1}^1 \sqrt{x^{\frac{2}{3}}}\,dx$ bằng :

A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. 6 D. 0.

20. $I = \int_0^3 |2^x - 4| dx$ bằng :

A. $4 + \frac{1}{\ln 2}$ B. $4 + \ln 2$ C. $4 - \frac{1}{\ln 2}$ D. $4 - \ln 2$.

21. $I = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2x}\, dx$ bằng :

A. 0 B. $\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 2.

22. $I = \int_0^{\pi} (2\cos 3x + 3\sin 2x) dx$ bằng :

A. 0 B. 1 C. 2 D. –2.

23. $I = \int_0^{\pi} \cos^2 x\, dx$ bằng :

A. π B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. 0.

24. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x.\cos^3 x\, dx$ bằng :

A. $\frac{8}{15}$ B. $\frac{4}{15}$ C. $\frac{2}{15}$ D. $\frac{1}{15}$.

25. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4 x}$ bằng :

A. $-\frac{4}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$.

26. $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x}$ bằng :

A. $\ln \frac{1}{3}$ B. $\ln 3$ C. $\frac{1}{2} \ln \frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2} \ln 3$.

27. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x.\sin x\, dx$ bằng :

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. 1.

28. $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cot gx\, dx$ bằng :

A. $\ln 2$ B. $\ln \frac{1}{2}$ C. $\ln \frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\ln \frac{\sqrt{2}}{2}$.

29. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\, dx$ bằng :

A. $\frac{1}{15}$ B. $\frac{2}{15}$ C. $\frac{4}{15}$ D. $\frac{8}{15}$.

30*. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1}$:

A. 2 B. $\frac{1}{2}\ln 2$ C. $\ln 2$ D. $-\ln 2$

TRẢ LỜI

1. $I = \int_0^1 (x+3)^{-2}dx = -\frac{1}{x+3}\Big|_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ → Chọn A.

2. $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 2^2} = \frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\left[\ln\frac{1}{3} - \ln 1\right] = -\frac{1}{4}\ln 3$ → Chọn D.

3. $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 4x + 3} = \int_1^2 \frac{d(x+2)}{(x+2)^2 - 1}$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)-1}{(x+2)+1}\right|\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{3}{5} - \ln\frac{2}{4}\right] = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{1}$ → Chọn B.

4. $I = \int_0^3 \frac{dx}{x^2 + 3^2} = \frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}\Big|_0^3 = \frac{1}{3}(\text{ractan}1 - \arctan 0) = \frac{\pi}{12}$ → Chọn C.

Cách khác : Đặt $x = 3\tan t$ $\Rightarrow$ $dx = 3(1 + \tan^2 t)dt$

x	0	3
t	0	$\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3(1+\tan^2 t)dt}{9(\tan^2 t + 1)}$

$\Rightarrow I = \frac{1}{3}(t)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{12}$.

5. $I = \int_0^1 \frac{(x^2 - 1) + 1}{x + 1}dx = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx$

$I = \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 1 + \ln 2 - 0 = \ln 2 - \frac{1}{2}$ → Chọn A.

6. $I = \int_0^1 \frac{x\,dx}{2 - x^2} = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(2-x^2)}{2-x^2} = -\frac{1}{2}\ln|2 - x^2|\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}|\ln 1 - \ln 2| = \frac{1}{2}\ln 2$

→ Chọn C.

7. $I = \int_0^1 \frac{(x^2 - 4) + 4}{x^2 - 4}dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{4}{x^2 - 2^2}\right)dx = \left(x + \frac{4}{2(2)}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right)\Big|_0^1$

$= 1 + \ln\frac{1}{3} = 1 - \ln 3$ → Chọn B.

8. $I = \int_{-1}^{0} \frac{x^3 dx}{x+2} = \int_{-1}^{0} \left(x^2 - 2x + 4x - \frac{8}{x+2} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x - 8\ln|x+2| \right) \Bigg|_{-1}^{0}$

$I = -8\ln 2 - \left(-\frac{1}{3} - 1 - 2 \right) = -8\ln 2 + \frac{10}{3}$ → Chọn B.

9. $I = \int_0^1 x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4} \left(x^{4/3} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{4}$ → Chọn B.

10. $I = \int_0^1 (2x+1)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Bigg|_0^1 = \sqrt{2x+1} \Big|_0^1 = \sqrt{3} - 1$ → Chọn D.

11. $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{(x+1) - x} dx = \int_0^1 \left[(x+1)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \right] dx$

$I = \frac{2}{3} \left((x+1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \left[2^{\frac{3}{2}} + 1 - 1 \right] = \frac{2}{3} (2\sqrt{2})$ → Chọn B.

12. $t = \sqrt{1-x} \Rightarrow t^2 = 1 - x \Rightarrow 2t\,dt = -dx$

x	0	1
t	1	0

$\Rightarrow I = \int_1^0 (1-t^2) t(-2t\,dt) = 2\int_0^1 (t^2 - t^4) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{15}$

→ Chọn B.

13. $I = \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

x	1	4
t	1	2

$I = \int_1^2 e^t . (2dt) = 2 \left(e^t \right) \Big|_1^2 = 2(e^2 - e)$ → Chọn C.

14. $I = \int_1^3 \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$

$t = \sqrt{1+\ln x} \Rightarrow t^2 = 1 + \ln x \Rightarrow 2t\,dt = \frac{dx}{x}$

x	1	e^3
t	1	2

$$I = \int_1^2 t.(2t\,dt) = \frac{2t^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3} \rightarrow \text{Chọn D.}$$

15. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{2+4\sin x}.\cos x\,dx$

Đặt $t = \sqrt{2+4\sin x} \Rightarrow t^2 = 2+4\sin x \Rightarrow 2t\,dt = 4\cos x\,dx$

x	0	$\frac{\pi}{6}$
t	$\sqrt{2}$	2

$$\Rightarrow I = \int_{\sqrt{2}}^2 t\left(\frac{t\,dt}{2}\right) = \frac{t^3}{6}\Big|_{\sqrt{2}}^2 = \frac{1}{6}\left(8-2\sqrt{2}\right) = \frac{4-\sqrt{2}}{3} \rightarrow \text{Chọn D.}$$

16*. $I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$

Đặt $t = \sqrt{e^x-1} \Rightarrow t^2 = e^x - 1 \Rightarrow 2t\,dt = e^x dx$

x	0	ln2
t	0	1

$$\Rightarrow dx = \frac{2t\,dt}{t^2+1}$$

$$I = \int_0^1 \frac{2t^2}{t^2+1}dt = 2\int_0^1 \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}dt = 2\int_0^1\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt$$

$$= 2(t-\arctan t)\Big|_0^1 = 2\left(1-\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \text{Chọn C.}$$

17. $I = \int_0^1 x\sqrt[3]{1-x}\,dx$

Đặt $t = \sqrt[3]{1-x} \Rightarrow t^3 = 1-x \Rightarrow 3t^2dt = -dx$

$I = \int_1^0 (1-t^3)t(-3t^2)dt$

x	0	1
t	1	0

$$= 3\int_0^1 (t^3-t^6)dt = 3\left(\frac{t^4}{4}-\frac{t^7}{7}\right)\Big|_0^1 = 3\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right) = \frac{9}{28} \rightarrow \text{Chọn A.}$$

18. $I = \int_0^3 |x-2|\,dx = \int_0^2 (2-x)dx + \int_2^3 (x-2)dx = \left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 + \left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_2^3$

$$= (4-2) + \left(\frac{9}{2}-6\right) - (2-4) = \frac{9}{2}-2 = \frac{5}{2} \rightarrow \text{Chọn C.}$$

19. $I = \int_{-1}^{1} \sqrt{x^{2/3}}\,dx = \int_{-1}^{1} |x|^{\frac{1}{3}}\,dx = \int_{-1}^{0} -x^{1/3}dx + \int_{-1}^{1} x^{1/3}dx$

$= -\frac{3}{4}x^{4/3}\Big|_{-1}^{0} + \frac{3}{4}x^{4/3}\Big|_{0}^{1} = +\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \rightarrow$ Chọn B.

Cách khác : $I = 2\int_{0}^{1} |x|^{\frac{1}{3}}\,dx$ (do $|x|^{\frac{1}{3}}$ là hàm chẵn)

$\Rightarrow \quad I = 2.\frac{3}{4}\left(x^{4/3}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{3}{2}.$

20. $I = \int_{0}^{3} \left|2^x - 4\right|dx = \int_{0}^{2} (4 - 2^x)dx + \int_{2}^{3} (2^x - 4)dx = \left(4x - \frac{2^x}{\ln 2}\right)\Big|_{0}^{2} + \left(\frac{2^x}{\ln 2} - 4x\right)\Big|_{2}^{3}$

$= 8 - \frac{4}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2} + \frac{8}{\ln 2} - 12 - \frac{4}{\ln 2} + 8 = 4 + \frac{1}{\ln 2} \rightarrow$ Chọn A.

21. $I = \int_{0}^{\pi} \sqrt{2\cos^2 x}\,dx = \sqrt{2}\int_{0}^{\pi} |\cos x|dx = \sqrt{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx - \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx$

$= \sqrt{2}\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \left(\sqrt{2}\sin x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2\sqrt{2} \rightarrow$ Chọn C.

22. $I = \int_{0}^{\pi} (2\cos 3x + 3\sin 2x)dx = +\frac{2}{3}\sin 3x\Big|_{0}^{\pi} - \frac{3}{2}(\cos 2x)\Big|_{0}^{\pi} = 0 \rightarrow$ Chọn A.

23. $I = \int_{0}^{\pi} \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} (1 + \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_{0}^{\pi} = \frac{\pi}{2} \rightarrow$ Chọn B.

24. $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^3 x\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)\sin^2 x(\cos x\,dx)$

Đặt $t = \sin x \quad \Rightarrow \quad dt = \cos x\,dx$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	1

$\Rightarrow \quad I = \int_{0}^{1} (1 - t^2)t^2 dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{2}{15} \rightarrow$ Chọn C.

25. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cot^2 x)\left[-d(\cot x)\right]$

$= -\left(\cot x + \frac{\cot^3 x}{3}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \rightarrow$ Chọn B.

26. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x\,dx}{1-\sin^2 x}$

$t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x\,dx$

x	0	$\frac{\pi}{6}$
t	0	$\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1-t^2} = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^2-1} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln 3$$

→ Chọn D.

27. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,d(\cos x) = -\frac{\cos^3 x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$ → Chọn B.

28. $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2$ → Chọn A.

29. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)^2 \sin x\,dx$

$t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	1	0

$$I = \int_1^0 (1-t^2)^2(-dt) = \int_0^1 (t^4 - 2t^2 + 1)dt = \left(\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t\right)\Big|_0^1 = \frac{8}{15}$$ → Chọn D.

30*. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1}$

$t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	1

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t|\Big|_0^1 = \ln 2$$ → Chọn C.

Bài 4 : CÁC BÀI TOÁN ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC, GIỚI HẠN CỦA TÍCH PHÂN

Vấn đề 1. ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN

Phương pháp :

Nếu f(x)', g(x) là hai hàm số liên tục trên [a; b] thì:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
3. $\forall c \in (a; b)$ *ta có* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
4. $\forall k \in R$ *ta có* $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
5. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

1 Cho f(x) là hàm số liên tục trên R và tuần hoàn có chu kỳ T.

Chứng minh : $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx \quad \forall a \in R.$

Ta có : $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx$

Xét $I_3 = \int_T^{a+T} f(x)dx$

đặt $u = x - T \Rightarrow du = dx$

x	T	a + T
u	0	a

Vậy $I_3 = \int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(u + T)du$

mà $f(u + T) = f(u)$ (do f(x) là hàm tuần hoàn chu kì T)

Do đó $I_3 = \int_0^a f(u)du = \int_0^a f(x)dx$

Vậy $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$

$\Rightarrow \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$ ■

2 Cho f(x) là hàm số liên tục trên R và thỏa :

$$f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2\cos 2x} \quad \forall x \in R.$$

Tính $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$.

Ta có : $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx = I_1 + I_2$

Đặt : $t = -x \Rightarrow dt = -dx$

x	$-\frac{3\pi}{2}$	0
t	$\frac{3\pi}{2}$	0

Vậy : $I_1 = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)dx = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{0} f(-t)(-dt) = \int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)dx$

Do đó $I = \int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)dx + \int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx = \int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} [f(-x) + f(x)]dx$

$$\Rightarrow I = \int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2 - 2\cos 2x}\, dx = \int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2 - 2(1 - 2\sin^2 x)}dx = 2\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x|dx$$

$$\Rightarrow I = 2\int_{0}^{\pi} \sin x\, dx + 2\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} (-\sin x)dx = -2\cos x\Big|_0^{\pi} + 2\cos x\Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow I = -2(\cos\pi - \cos 0) + 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} - \cos\pi\right) = 4 + 2 = 6 \quad \blacksquare$$

3 Cho f(x) là hàm số liên tục trên [−a; a].

Chứng minh $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0 \text{ (nếu f hàm lẻ)} \\ 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx \text{ (nếu f hàm chẵn)} \end{cases}$

Ta có : $I = \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = I_1 + I_2$

Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$

x	-a	0
t	a	0

Vậy : $I_1 = \int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(-t)(-dt) = \int_{0}^{a} f(-t)dt$

- Nếu f(x) là hàm lẻ : $f(-t) = -f(t)$

  Nên $I_1 = -\int_{0}^{a} f(t)dt = -I_2$

  Do đó $I = I_1 + I_2 = 0$

- Nếu f(x) là hàm chẵn : $f(-t) = f(t)$

  Nên $I_1 = \int_{0}^{a} f(t)dt = I_2$

  Do đó $I = I_1 + I_2 = 2I_2 = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ ■

4 Chứng minh $\int_{\frac{1}{e}}^{\tan a} \frac{xdx}{1+x^2} + \int_{\frac{1}{e}}^{\cot a} \frac{dx}{x(1+x^2)} = 1$ với $\tan a > 0$.

Ta có : $\int_{\frac{1}{e}}^{\tan a} \frac{xdx}{1+x^2} + \int_{\frac{1}{e}}^{\cot a} \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int_{\frac{1}{e}}^{\tan a} \frac{x\,dx}{1+x^2}dx + \int_{\frac{1}{e}}^{\cot a} \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)}dx$

$= \int_{\frac{1}{e}}^{\tan a} \frac{x\,dx}{1+x^2} + \int_{\frac{1}{e}}^{\cot a} \frac{dx}{x} - \int_{\frac{1}{e}}^{\cot a} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \int_{\cot a}^{\frac{1}{e}} \frac{x\,dx}{1+x^2} + \int_{\frac{1}{e}}^{\tan a} \frac{x\,dx}{1+x^2} + \int_{\frac{1}{e}}^{\cot a} \frac{dx}{x}$

$= \int_{\cot a}^{\tan a} \frac{x\,dx}{1+x^2} + \ln|x|\Big|_{\frac{1}{e}}^{\cot a} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{\cot a}^{\tan a} + \ln(\cot a) - \ln\frac{1}{e}$

$= \frac{1}{2}\left[\ln\frac{1}{\cos^2 a} - \ln\frac{1}{\sin^2 a}\right] + \ln(\cot a) + 1$

$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}\right) + \ln(\cot a) + 1$

$= \ln(\tan a) + \ln(\cot a) + 1 = \ln(\tan a.\cot a) + 1 = 1$ ■

5 Cho f liên tục trên [0; 1] chứng minh : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

Tính : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x\, dx}{\sin x + \cos x}$ và $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x\, dx}{\sin x + \cos x}$.

Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}$	0

Vậy $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right](-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt$

Do kết quả trên ta có I = J.

Mà $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + \sin^2 x - \sin x \cos x)dx$

$\Rightarrow I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right)dx = \left(x + \frac{1}{4}\cos 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow I + J = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\cos 2\pi - \frac{1}{4}\cos 0 = \frac{\pi}{2}$

Do đó $I = J = \frac{\pi}{4}$ ■

6 Cho f(x) liên tục trên [0; 1].

Chứng minh : $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$.

Ta có : $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx = I_1 + I_2$

Đặt $t = \pi - x \Rightarrow dt = -dx$

x	$\frac{\pi}{2}$	π
t	$\frac{\pi}{2}$	0

Vậy $I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f[\sin(\pi - t)](-dt) = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)dt = I_1$

Do đó $\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx = 2I_1 = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$ ■

7 Cho f(x) liên tục trên [0; 1]. Chứng minh : $\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx$.

Áp dụng tính $I = \int_{0}^{\pi} x \sin x \cos^2 x dx$.

Đặt $t = \pi - x \Rightarrow dt = -dx$

x	0	π
t	π	0

Vậy $I = \int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx = \int_{\pi}^{0} (\pi - t)f[\sin(\pi - t)](-dt)$

$\Rightarrow I = \int_{0}^{\pi} (\pi - t)f[\sin t]dt = \pi\int_{0}^{\pi} f(\sin t)dt - \int_{0}^{\pi} tf(\sin t)dt$

$\Rightarrow I = \pi\int_{0}^{\pi} f(\sin t)dt - I \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx$.

Áp dụng kết quả trên ta có :

$$I = \int_{0}^{\pi} x \sin x.\cos^2 x\, dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} \sin x \cos^2 x\, dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} -\cos^2 x\, d(\cos x) = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{\cos^3 x}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow I = -\frac{\pi}{6}(-1 - 1) = \frac{\pi}{3}$$ ■

8 Cho y = f(x) là hàm số chẵn và liên tục trên R.

Chứng minh với $\forall a > 0$ thì : $\int_{-b}^{b} \frac{f(t)dt}{a^t + 1} = \int_{0}^{b} f(t)dt$.

Áp dụng tính $I = \int_{-1}^{1} \frac{x^4 dx}{2^x + 1}$.

Ta có : $I = \int_{-b}^{b} \frac{f(t)dt}{a^t + 1} = \int_{-b}^{0} \frac{f(t)dt}{a^t + 1} + \int_{0}^{b} \frac{f(t)dt}{a^t + 1} = I_1 + I_2$

Đặt $u = -t \Rightarrow du = -dt$

t	−b	0
u	b	0

$\Rightarrow I_1 = \int_{-b}^{0} \frac{f(t)dt}{a^t + 1} = \int_{b}^{0} -\frac{f(-u)}{a^{-u} + 1} du$

$\Rightarrow I_1 = \int_{0}^{b} \frac{f(u)du}{\frac{1}{a^u} + 1}$ (do f(u) là hàm chẵn) $= \int_{0}^{b} \frac{a^u f(u)du}{1 + a^u}$

Do đó $I = \int_{0}^{b} \frac{a^u f(u)du}{1 + a^u} + \int_{0}^{b} \frac{f(u)du}{1 + a^u} = \int_{0}^{b} \frac{(1 + a^u)f(u)du}{1 + a^u} = \int_{0}^{b} f(u)du$

Áp dụng : $I = \int_{-1}^{1} \frac{x^4 dx}{2^x + 1} = \int_{0}^{1} x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{5}$ ■

9 Tính $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{3^x + 1}$.

Ta có $I = \int_{-\pi}^{0} \frac{\sin^2 x\, dx}{3^x + 1} + \int_{0}^{\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{3^x + 1} = I_1 + I_2$

đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$

x	−π	0
t	π	0

Vậy : $I_1 = \int_{-\pi}^{0} \frac{\sin^2 x\, dx}{3^x + 1} = \int_{\pi}^{0} \frac{\sin^2(-t)}{\frac{1}{3^t} + 1}(-dt) = \int_{0}^{\pi} \frac{3^t . \sin^2 t}{1 + 3^t} dt$

Do đó $I = \int_{0}^{\pi} \frac{3^x \sin^2 x\, dx}{3^x + 1} + \int_{0}^{\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{3^x + 1} = \int_{0}^{\pi} \sin^2 x\, dx$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} (1 - \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}$ ■

10 Chứng minh : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x\, dx}{\cos^n x + \sin^n x} = \frac{\pi}{4}$.

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dt = -dx$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}$	0

Vậy $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)(-dt)}{\cos^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n t\, dt}{\sin^n t + \cos^n t}$

Đặt $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x\, dx}{\sin^n x + \cos^n x}$

Ta có : $I = J$

và $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

Vậy $I = \frac{\pi}{4}$ ■

11 Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log_2(1 + \tan x)dx$.

Đặt $x = \frac{\pi}{4} - t \Rightarrow dx = -dt$

x	0	$\frac{\pi}{4}$
t	$\frac{\pi}{4}$	0

Lúc đó $1 + \tan x = 1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = 1 + \frac{1 - \tan t}{1 + \tan t} = \frac{2}{1 + \tan t}$

Do đó : $I = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \log_2 \frac{2}{1 + \tan t} dt$

$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [1 - \log_2(1 + \tan t)]dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt - I$

$\Rightarrow 2I = t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\pi}{8}$ ■

12 Chứng minh rằng với 2 số m, n khác nhau

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx.\cos nx\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx.\sin nx = 0\ .$$

Ta có : $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx.\cos nx\ dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x]dx$

$$= \left[\frac{1}{2(m+n)}\sin(n+m)x + \frac{1}{2(n-m)}\sin(n-m)x\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Ta có : $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx.\sin nx\ dx = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x - \cos(n-m)x]dx$

$$= \left[-\frac{1}{2(m+n)}\sin(m+n)x + \frac{1}{2(n-m)}\sin(n-m)x\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad \blacksquare$$

13 Cho hàm số f(x) liên tục và f(a + b − x) = f(x).

Chứng minh rằng : $\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

Áp dụng : Tính $I = \int_0^{\pi} x.\sin^3 x\ dx$.

Đặt $t = a + b - x \Rightarrow dt = -dx$

x	a	b
t	b	a

Vậy $I = \int_a^b xf(x)dx = -\int_b^a (a+b-t)f(a+b-t)dt$

$\Rightarrow I = \int_a^b (a+b-t)f(t)dt = (a+b)\int_a^b f(t)dt - \int_a^b tf(t)dt$

$\Rightarrow I = (a+b)\int_a^b f(t)dt - I$

$\Rightarrow I = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

Áp dụng : Đặt $f(x) = \sin^3 x$ đây là hàm liên tục và

$$f(\pi + 0 - x) = \sin^3(\pi - x) = \sin^3 x = f(x)$$

Do đó $I = \frac{\pi+0}{2}\int_0^{\pi} \sin^3 x\ dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} -(1-\cos^2 x)d(\cos x)$

$$\Rightarrow I = -\frac{\pi}{2}\left[\cos x - \frac{\cos^3 x}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi}{3} \quad \blacksquare$$

Vấn đề 2. BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN

- **Định lý :** *Cho $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a; b]$.*

  Nếu $f(x) \le g(x)$ *với* $\forall x \in [a; b]$ *thì* $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$ (1)

  dấu = ở bất đẳng thức (1) chỉ xảy ra $\Leftrightarrow f(x) = g(x)$ $\forall x \in [a; b]$

  Hệ quả : *Nếu* $m \le f(x) \le M$ $\forall x \in [a; b]$

  thì : $m(b - a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b - a)$

14 Cho f(x) liên tục trên [a; b]. Chứng minh : $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

Ta có : $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)| \quad \forall x \in [a; b]$

$$\Rightarrow \quad -\int_a^b |f(x)|dx \le I = \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$$

Do $-k \le I \le k \quad \Leftrightarrow \quad |I| \le k$

Nên $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$ ■

15 Chứng minh : $1 \le \int_{-1}^{1} 2^{x^3}dx \le 4$.

Xét $g(x) = x^3$ $\forall x \in [-1; 1] \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 3x^2 \ge 0$

Do đó :

x	−1		1
g'(x)		+	
g(x)		−1 →	1

Vậy $-1 \le x^3 \le 1$ $\forall x \in [-1; 1] \quad \Rightarrow \quad 2^{-1} \le 2^{x^3} \le 2^1$ $\forall x \in [-1; 1]$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{2}(1 + 1) \le \int_{-1}^{1} 2^{x^3}dx \le 2(1 + 1) = 4 \quad ■$$

16 Chứng minh : $0 \le \int_0^1 x(1 - x)^2dx \le \frac{4}{27}$.

Xét $f(x) = x(1 - x)^2 = x^3 - 2x^2 + x$ với $D = [0; 1]$

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \vee x = \frac{1}{3}$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		+		+	0	−	0	+	
y		↗	0	↗	$\frac{4}{27}$ (C)	↘	0		

Do đó $0 \le f(x) \le \frac{4}{27}$ với $\forall x \in [0; 1] \quad \Rightarrow \quad 0 \le \int_0^1 f(x)dx \le \frac{4}{27}$ ■

17 Chứng minh rằng : $\int_1^2 (\ln x)^2 dx < \int_1^2 \ln x\, dx$.

$\forall x \in [1; 2]$ thì $\ln 1 \le \ln x \le \ln 2 < \ln e = 1$

$\Rightarrow \quad 0 \le \ln x < 1 \quad \Rightarrow \quad (\ln x)^2 < \ln x$

Vậy : $\int_1^2 (\ln x)^2 dx < \int_1^2 \ln x\, dx$ ■

18 Chứng minh : $\int_0^1 \frac{dx}{2 + x + x^2} < \frac{\pi}{8}$.

$\forall x \in [0; 1]$ thì $0 \le x \le 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le x^2 \le x$

$\Rightarrow \quad 0 < 2 + x^2 + x^2 \le 2 + x + x^2$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2(1 + x^2)} \ge \frac{1}{2 + x + x^2}$

$\Rightarrow \quad \int_0^1 \frac{dx}{2(1 + x^2)} \ge \int_0^1 \frac{dx}{2 + x + x^2}$

Xét $\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$ đặt $x = \tan t \Rightarrow \quad dx = (1 + \tan^2 t)dt$

x	0	1
t	0	$\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \quad \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \int_0^{\pi/4} \frac{(1 + \tan^2 t)dx}{1 + \tan^2 t} = \int_0^{\pi/4} dt = \frac{\pi}{4}$

Do đó $\int_0^1 \frac{dx}{2 + x + x^2} \le \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4}$

Dấu = không xảy ra vì khi $x = \frac{1}{2} \in [0; 1]$ thì : $\frac{1}{2\left(1 + \frac{1}{4}\right)} > \frac{1}{2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}$

Vậy : $\int_0^1 \frac{dx}{2+x+x^2} < \frac{\pi}{8}$ ■

19 Chứng minh rằng : $\frac{1}{26\sqrt[3]{2}} < \int_0^1 \frac{x^{25}dx}{\sqrt[3]{1+x^{10}}} < \frac{1}{26}$.

$\forall x \in [0; 1]$ thì $1 \le 1 + x^{10} \le 2 \Rightarrow 1 \ge \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^{10}}} \ge \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$\Rightarrow x^{25} \ge \frac{x^{25}}{\sqrt[3]{1+x^{10}}} \ge \frac{x^{25}}{\sqrt[3]{2}}$

$\Rightarrow \int_0^1 x^{25}dx \ge \int_0^1 \frac{x^{25}dx}{\sqrt[3]{1+x^{10}}} \ge \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \int_0^1 x^{25}dx$

Mà $\int_0^1 x^{25}dx = \frac{x^{26}}{26}\Big|_0^1 = \frac{1}{26}$

Do đó $\frac{1}{26} \ge \int_0^1 \frac{x^{25}dx}{\sqrt[3]{1+x^{10}}} \ge \frac{1}{\sqrt[3]{2}.26}$

Dấu = không xảy ra vì $\frac{1}{2} \in [0; 1]$ thì : $\left(\frac{1}{2}\right)^{25} > \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{25}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{2^{10}}}} > \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{25}}{\sqrt[3]{2}}$

Vậy : $\frac{1}{26\sqrt[3]{2}} < \int_0^1 \frac{x^{25}dx}{\sqrt[3]{1+x^{10}}} < \frac{1}{26}$ ■

20 **Chứng minh các bất đẳng thức sau đây :**

a) $e^x > 1 + x$ với $\forall x \ne 0$ **b)** $\int_0^1 e^{\frac{1}{1+x^2}}dx > \frac{4+\pi}{4}$.

a) Xét $f(x) = e^x - x - 1$

Ta có $f'(x) = e^x - 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	−	0	+
f(x)	$+\infty$ ↘	0 (CT)	↗ $+\infty$

Ta thấy $f(x) > 0 \ \forall x \ne 0 \Rightarrow e^x > 1 + x \ \forall x \ne 0$

b) Áp dụng kết quả câu a ta có : $e^{\frac{1}{1+x^2}} > 1 + \frac{1}{1+x^2}$

$$\Rightarrow \quad \int_0^1 e^{\frac{1}{1+x^2}} dx > \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right) dx = 1 + \frac{\pi}{4} \quad \blacksquare$$

21 Chứng minh : $\frac{\pi}{24} \le \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{3 + 4\sin^2 x} \le \frac{\pi}{18}$.

$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ thì $\quad \sin 0 \le \sin x \le \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad 0 \le \sin^2 x \le \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad 3 \le 3 + 4\sin^2 x \le 3 + 4\left(\frac{1}{4}\right) = 4$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3} \ge f(x) = \frac{1}{3 + 4\sin^2 x} \ge \frac{1}{4}$$

Do đó : $\quad \frac{\pi}{18} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{6} - 0\right) \ge \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx \ge \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{6} - 0\right) = \frac{\pi}{24} \quad \blacksquare$

22 Chứng minh : $\left|\int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2}.\cos e^x + \sqrt{3+x^2}.\sin e^x\right)dx\right| \le 2$.

Do bất đẳng thức BCS ta có :

$$\left|\sqrt{1-x^2}.\cos e^x + \sqrt{3+x^2}.\sin e^x\right| \le \sqrt{(1-x^2)+(3+x^2)}\sqrt{\cos^2 e^x + \sin^2 e^x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\sqrt{1-x^2}.\cos e^x + \sqrt{3+x^2}.\sin e^x\right| \le \sqrt{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad -2 \le \sqrt{1-x^2}.\cos e^x + \sqrt{3+x^2}\sin e^x \le 2$$

$$\Leftrightarrow \quad -2(1-0) \le \int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2}.\cos e^x + \sqrt{3+x^2}\sin e^x\right)dx \le 2(1-0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\int_1^0 \left(\sqrt{1-x^2}.\cos e^x + \sqrt{3+x^2}\sin e^x\right)dx\right| \le 2 \quad \blacksquare$$

23 Chứng minh : $54\sqrt{2} \le \int_{-7}^{11} \left(\sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}\right)dx \le 108$.

Xét $f(x) = \sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}$

Do bất đẳng thức BCS ta có :

$$|f(x)| \le \sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{(x+7)+(11-x)} = \sqrt{2}.3\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad f(x) \le 6 \qquad (1)$$

Mặt khác $[f(x)]^2 = x + 7 + 11 - x + 2\sqrt{x+7}.\sqrt{11-x}$

$$\Rightarrow \quad [f(x)]^2 = 18 + 2\sqrt{2+7}.\sqrt{11-x} \ge 18 \quad \Rightarrow \quad f(x) \ge 3\sqrt{2} \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \quad 3\sqrt{2} \le f(x) \le 6$

$$\Rightarrow \quad 54\sqrt{2}(1) \le \int_{-7}^{11} f(x)dx \le 6(11+7) = 108 \quad \blacksquare$$

24 Chứng minh : $\int_0^1 \frac{x\sin x dx}{1+x\sin x} < 1 - \ln 2$.

Ta có $f(x) = \frac{x\sin x}{1+x\sin x} = \frac{(x\sin x+1)-1}{1+x\sin x} \Rightarrow f(x) = 1 - \frac{1}{1+x\sin x}$

Do $\forall x \in [0; 1]$ nên $0 \le \sin x \le \sin 1 < 1 \Rightarrow 0 \le x\sin x < x$

$$\Rightarrow \quad 1 \le 1 + x\sin x < x + 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1+x\sin x} > \frac{1}{x+1} \Rightarrow \frac{-1}{1+x\sin x} < \frac{-1}{x+1}$$

Ta có : $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x\sin x}\right)dx < \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx$

$$= \left(x - \ln|x+1|\right)\Big|_0^1 = 1 - \ln 2 \quad \blacksquare$$

25 Chứng minh : $\frac{2}{e^2} \le \int_0^2 e^{x-x^2}dx \le 2\sqrt[4]{e}$.

Xét hàm số $f(x) = x - x^2 \quad \forall x \in [0; 2]$

Ta có $f'(x) = 1 - 2x$

x	0		$\frac{1}{2}$		2
f'(x)		+	0	−	
f(x)		0 ↗	$\frac{1}{4}$	↘	−2

Do đó $\forall x \in [0; 2]$ thì $-2 \le x - x^2 \le \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \quad e^{-2} \le e^{x-x^2} \le e^{\frac{1}{4}} \quad (\text{do } y = e^x \text{ là hàm tăng trên } R)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(2-0)}{e^2} \le \int_0^2 e^{x-x^2}dx \le \sqrt[4]{e}(2-0) = 2\sqrt[4]{e} \quad \blacksquare$$

26 Chứng minh : $\int_0^{\pi} e^{\sin^2 x} dx > \frac{3\pi}{2}$.

Xét $f(x) = e^x - x - 1$

Ta có $f'(x) = e^x - 1 \geq 0 \quad \forall x \geq 0$ (do $x \geq 0$ thì $e^x \geq e^0 = 1$)

$\Rightarrow$ $f(x)$ là hàm tăng trên $[0; +\infty)$

$\Rightarrow$ $x \geq 0$ thì $f(x) = e^x - x - 1 \geq 0 = f(0)$

$\Rightarrow$ $x \geq 0$ thì $e^x \geq x + 1$

Do đó $\forall x \in [0; \pi]$ thì $e^{\sin^2 x} \geq \sin^2 x + 1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

Do đó $\int_0^{\pi} e^{\sin^2 x} dx \geq \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(3 - \cos 2x)dx \geq \frac{1}{2}\left[3x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{3\pi}{2}$

Dấu = không xảy ra vì $\exists x_0 = \frac{\pi}{2} \in [0; \pi]$ thì $e^{\sin^2 \frac{\pi}{2}} = e > 1 + \sin^2 \frac{\pi}{2} = 2$ ∎

Vấn đề 3. TÍCH PHÂN TRUY HỒI

Phương pháp :

+ ***Thiết lập mối quan hệ giữa I_n và I_{n-1} (hoặc I_{n-2})***
+ ***Vận dụng công thức liên hệ nhiều lần, lui dần từ I_n đến I_0 (hoặc I_1) để tính được I_n.***

27 Cho $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^n}$ $n \in N, n \geq 2$. Tìm mối liên hệ giữa I_n và I_{n-1}.

Xét $I_{n-1} = \int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}}$

đặt $u = \frac{1}{(t^2+1)^{n-1}} = (t^2+1)^{1-n}$ $\Rightarrow$ $du = \frac{2(1-n)t\,dt}{(t^2+1)^n}$

$dv = dt$ $\Rightarrow$ $v = t$

Vậy $I_{n-1} = \frac{t}{(t^2+1)^{n-1}}\Big|_0^1 - 2(1-n)\int_0^1 \frac{t^2 dt}{(t^2+1)^n}$

$\Rightarrow$ $I_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} + 2(n-1)\int_0^1 \frac{(t^2+1)-1}{(t^2+1)^n} dt$

$$\Leftrightarrow \quad I_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} + 2(n-1)\left[\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}} - \int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^n}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad I_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} + 2(n-1)I_{n-1} - 2(n-1)I_n$$

$$\Leftrightarrow \quad (3-2n)I_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} - 2(n-1)I_n$$

$$\Leftrightarrow \quad I_n = \frac{1}{2(n-1)}\left[\frac{1}{2^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right] \quad \blacksquare$$

28 Xét $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

a) Tính I_2. **b)** Chứng tỏ $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

a) $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

b) Xét $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} x.\cos x\,dx$

Đặt $u = \cos^{n+1} x \quad \Rightarrow \quad du = -(n+1)\sin x.\cos^n x\,dx$

$dv = \cos x\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \sin x$

Vậy $I_{n+2} = \sin x.\cos^{n+1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^n x\,dx$

$$\Rightarrow \quad I_{n+2} = 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\cos^n x\,dx$$

$$\Rightarrow \quad I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} x\,dx$$

$$\Rightarrow \quad I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$$

$$\Rightarrow \quad (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n \quad \Rightarrow \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n \quad \blacksquare$$

29 Cho $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$ với $n \in N$.

a) Tính I_1. **b)** Tìm hệ thức liên hệ giữa I_n và I_{n-1}.

a) $I_1 = \int_1^e \ln x\,dx$

Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x}$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

Vậy $I_1 = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx = e - x\Big|_1^e = 1$

b) Xét $I_n = \int_1^e (\ln x)^n\,dx$

Đặt $u = (\ln x)^n \Rightarrow du = \dfrac{n}{x}(\ln x)^{n-1}dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

Vậy $I_n = x(\ln x)^n\Big|_1^e - n\int_1^e (\ln x)^{n-1}dx = e - nI_{n-1}$ ■

30 Cho $I_n = \int_0^1 \dfrac{x^n dx}{\sqrt{1+x}}$ $n \in N\setminus\{0\}$.

Chứng minh : $(2n+1)I_n + 2nI_{n-1} = 2\sqrt{2}$.

Đặt $u = x^n \Rightarrow du = nx^{n-1}dx$

$dv = \dfrac{dx}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}dx \Rightarrow v = 2\sqrt{1+x}$

Vậy $I_n = 2x^n\sqrt{1+x}\Big|_0^1 - 2n\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1+x}\,dx$

$\Rightarrow I_n = 2\sqrt{2} - 2n\int_0^1 \dfrac{x^{n-1}(1+x)}{\sqrt{1+x}}dx$

$\Rightarrow I_n = 2\sqrt{2} - 2n\int_0^1 \dfrac{x^{n-1}dx}{\sqrt{1+x}} - 2n\int_0^1 \dfrac{x^n dx}{\sqrt{1+x}}$

$\Rightarrow (2n+1)I_n = 2\sqrt{2} - 2nI_{n-1}$

$\Rightarrow (2n+1)I_n + 2nI_{n-1} = 2\sqrt{2}$ ■

31 Cho $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos nx}{5 - 4\cos x}dx$ $(n \in N,\ n \geq 3)$.

Chứng minh : $I_n = \dfrac{5}{2}I_{n-1} - I_{n-2}$.

Ta có $I_n + I_{n-2} = \int_0^{\pi} \frac{\cos nx + \cos(n-2)x}{5 - 4\cos x}\,dx$

$\Leftrightarrow \quad I_n + I_{n-2} = \int_0^{\pi} \frac{2\cos(n-1)x.\cos x\,dx}{5 - 4\cos x}$

$\Leftrightarrow \quad I_n + I_{n-2} = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\cos(n-1)x.\left[(-4\cos x + 5) - 5\right]dx}{5 - 4\cos x}$

$\Leftrightarrow \quad I_n + I_{n-2} = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(n-1)x\,dx + \frac{5}{2}\int_0^{\pi} \frac{\cos(n-1)x\,dx}{5 - 4\cos x}$

$\Leftrightarrow \quad I_n + I_{n-2} = -\frac{1}{2}\frac{\sin(n-1)x}{n-1}\Big|_0^{\pi} + \frac{5}{2}I_{n-1}$

$\Leftrightarrow \quad I_n + I_{n-2} = \frac{5}{2}I_{n-1}$ ■

32 Cho $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n.\cos x\,dx$.

Chứng minh : $I_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n(n-1)I_{n-2}$ $(\forall n \in N, n \geq 2)$.

Đặt $u = x^n \Rightarrow du = nx^{n-1}dx$

$dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = +\sin x$

Vậy $I_n = x^n \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-1}\sin x\,dx$

Tiếp tục dùng tích phân từng phần.

Đặt $u_1 = x^{n-1} \Rightarrow du_1 = (n-1)x^{n-2}dx$

$dv_1 = \sin x\,dx \Rightarrow v_1 = -\cos x$

Do đó $I_n = x^n \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + nx^{n-1}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - n(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-2}\cos x\,dx$

$\Rightarrow \quad I_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n(n-1)I_{n-2}$ ■

33 Cho $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx$ $(n \in N)$.

a) Chứng minh $I_n > I_{n+1}$. b) Tìm hệ thức giữa I_{n+2} và I_n.

c) Chứng minh $\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)} \quad \forall n \geq 2.$

a) Do $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ nên $0 \leq \tan x \leq 1$

Do đó $0 \leq \tan^{n+1} x \leq \tan^n x$

$$\Rightarrow \quad I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1} x \, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx = I_n$$

Dấu = không xảy ra vì $x_0 = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n+1} < \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n$

b) Ta có $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(\tan^2 x + 1 - 1)dx$

$$\Rightarrow \quad I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x d(tgx) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$$

$$\Rightarrow \quad I_{n+2} = \frac{1}{n+1} \tan^{n+1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - I_n$$

$$\Rightarrow \quad I_{n+2} = \frac{1}{n+1} - I_n \quad \Rightarrow \quad I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$$

c) Do kết quả câu a : $I_{n+2} < I_n$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n+1} - I_n < I_n \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n+1} < 2I_n \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2(n+1)} < I_n \qquad (1)$$

Mặt khác : $I_n < I_{n-2}$

$$\Rightarrow \quad 2I_n < I_n + I_{n-2} = \frac{1}{(n-2)+1} = \frac{1}{n-1} \quad \Rightarrow \quad I_n < \frac{1}{2(n-1)} \qquad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \quad \frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)}$ ■

34 Tính $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x \, dx.$

Ta có : $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n-2} x \tan^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n-2} x(\tan^2 x + 1 - 1)dx$

$$\Rightarrow \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n-2} x \, d(\tan x) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n-2} x \, dx$$

$$\Rightarrow \quad J_n = \frac{\tan^{2n-1} x}{2n-1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - J_{n-1} \Rightarrow \quad J_n = \frac{1}{2n-1} - J_{n-1}$$

Do đó: $J_n = \frac{1}{2n-1} - \left(\frac{1}{2(n-1)-1} - J_{n-2}\right)$

$$\Rightarrow \quad J_n = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + J_{n-2}$$

$$\Rightarrow \quad J_n = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-5} - J_{n-3}$$

$$\Rightarrow \quad J_n = \frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-5} + \ldots (-1)^n J_{n-n}$$

Mà $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}$

Do đó $J_n = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-5} \ldots (-1)^n \frac{\pi}{4}$ ■

35 Chứng minh $\forall n \in N, \forall t \in R : e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \int_0^t \frac{(t-x)^n}{n!} e^x dx$.

Xét $I_n = \int_0^t \frac{(t-x)^n e^x}{n!} dx = \frac{1}{n!} \int_0^t (t-x)^n e^x dx$

Đặt $u = (t-x)^n \quad \Rightarrow \quad du = -n(t-x)^{n-1} dx$

$dv = e^x dx \quad \Rightarrow \quad v = e^x$

Vậy $I_n = \frac{1}{n!}(t-x)^n e^x\Big|_0^t + \frac{n}{n!} \int_0^t (t-x)^{n-1} e^x dx$

$$\Rightarrow \quad I_n = -\frac{t^n}{n!} e^0 + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-x)^{n-1} e^x dx \quad \Rightarrow \quad I_n = -\frac{t^n}{n!} + I_{n-1}$$

Áp dụng kết quả trên ta được :

$$I_n = -\frac{t^n}{n!} - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + I_{n-2}$$

. . . . . .

$$\Rightarrow \quad I_n = -\frac{t^n}{n!} - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} - \ldots - \frac{t}{1!} + I_0$$

Mà $I_0 = \int_0^t \frac{(t-x)^0}{0!} e^x dx = \int_0^t e^x dx = e^t - 1$

Do đó $\int_0^t \frac{(t-x)^n e^x dx}{n!} = -\frac{t^n}{n!} - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} - \ldots - t + e^t - 1$

$\Rightarrow \quad e^t = \frac{t^n}{n!} + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + 1 + \int_0^t \frac{(t-x)^n e^x dx}{n!}$ ■

36* Cho $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx \quad (n \in N)$.

a) Tìm hệ thức liên hệ giữa I_n và I_{n-1} $(n \geq 1)$.

b) Tính I_n theo n.

a) Đặt $x = \cos t \quad \Rightarrow \quad dx = -\sin t\, dt$ với $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

x	0	1
t	$\frac{\pi}{2}$	0

Vậy $I_n = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1-\cos^2 t)^n \sin t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t\, dt$

đặt $u = \sin^{2n} t \quad \Rightarrow \quad du = 2n \cos t . \sin^{2n-1} t\, dt$

$dv = \sin t\, dt \quad \Rightarrow \quad v = -\cos t$

Vậy $I_n = -\cos t . \sin^{2n} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t) \sin^{2n-1} t\, dt$

$\Rightarrow \quad I_n = 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} t\, dt - 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t\, dt$

$\Rightarrow \quad I_n = 2nI_{n-1} - 2_n I_n$

$\Rightarrow \quad (2n+1) I_n = 2nI_{n-1}$

$\Rightarrow \quad I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$

b) Ta có $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2(n-1)}{2(n-1)+1} I_{n-2}$

$$\Rightarrow \quad I_n = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3} I_{n-3}$$

$$\Rightarrow \quad I_n = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\frac{4}{5} I_1$$

$$\Rightarrow \quad I_n = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} I_0$$

Mà $I_n = \int_0^1 dx = 1$ nên $I_n = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$ ■

37 **a)** Tính $I = \int_0^1 x(1-x^2)^n dx$.

b) Chứng minh rằng : $\frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 + \ldots + \frac{(-1)^n C_n^n}{2n+2} = \frac{1}{2(n+1)}$.

a) $$I = \int_0^1 x(1-x^2)^n dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)^n d(1-x^2)$$

$$\Rightarrow \quad I = -\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{2(n+1)}.$$

b) Do nhị thức Newton :

$$(1-x^2)^n = C_n^0 - C_n^1 x^2 + C_n^2 x^4 + \ldots (-1)^n C_n^n x^{2n}$$

$$\Rightarrow \quad x(1-x^2)^n = xC_n^0 - C_n^1 x^3 + C_n^2 x^5 + \ldots (-1)^n C_n^n x^{2n+1}$$

$$\Rightarrow \quad I = \int_0^1 x(1-x^2)^n dx = \left[\frac{x}{2}C_n^0 - \frac{C_n^1 x^4}{4} + \ldots (-1)^n \frac{C_n^n x^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}C_n^0 - \frac{C_n^1}{4} + \frac{1}{6}C_n^2 + \ldots \frac{(-1)^n C_n^n}{2n+2}$$

Mà do câu a) thì $I = \frac{1}{(2n+1)}$. Vậy ta có điều phải chứng minh. ■

38 Chứng minh rằng : $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Ta có : $$I = \int_0^1 (1+x)^n dx = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \qquad (1)$$

Mặt khác do nhị thức Newton :

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^n x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

Do đó $I = \int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k dx = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \int_0^1 x^k dx$

$$\Rightarrow \quad I = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{x^k}{k+1}\Big|_0^1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \frac{1}{k+1} \qquad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ điều phải chứng minh. ■

Vấn đề 4. TÍNH GIỚI HẠN CỦA TÍCH PHÂN

Phương pháp :

Tính tích phân đã cho sau đó dựa vào kết quả tìm được để tính giới hạn.

Chú ý : ***Nếu không thể tính được tích phân đã cho dùng nguyên lý "kẹp". Cho các dãy số (a_n), (b_n), (c_n) thỏa :***

$$\begin{cases} c_n \le a_n \le b_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l \end{cases} \quad \text{thì} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = l.$$

39 Đặt $I(x) = \int_1^x \frac{dt}{t(t+1)}$ $(x > 1)$. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x)$.

Ta có $I(x) = \int_1^x \frac{dt}{t(t+1)} = \int_1^x \frac{(1+t)-t}{t(t+1)} dt = \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt$

$$\Rightarrow \quad I(x) = \left[\ln t - \ln|t+1|\right]_1^x = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right|_1^x$$

$$\Rightarrow \quad I(x) = \ln\frac{x}{x+1} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{2x}{x+1}$$

Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\frac{2x}{x+1}\right] = \ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x+1}\right) = \ln 2$ ■

40 Cho $J = \int_b^{\ln 10} \frac{e^x dx}{\sqrt[3]{e^x - 2}}$ (với $b > \ln 2$). Tìm $\lim\limits_{b\to\ln 2} J$.

Đặt $t = \sqrt[3]{e^x - 2} \quad \Rightarrow \quad t^3 = e^x - 2 \quad \Rightarrow \quad 3t^2 dt = e^x dx$

x	b	ln10
t	$\sqrt[3]{e^b - 2}$	2

Vậy : $J = \int_{\sqrt[3]{e^b-2}}^{2} \frac{3t^2 dt}{t} = \frac{3}{2} t^2\Big|_{\sqrt[3]{e^b-2}}^{2} = \frac{3}{2}\left(4 - \sqrt[3]{(e^b-2)^2}\right)$

Do $b \to \ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad e^b \to 2$

Nên $\lim\limits_{b \to \ln 2} J = \lim\limits_{e^b \to 2} J = \dfrac{3}{2}.4 = 6$ ■

41 Tìm A, B sao cho : $f(x) = \dfrac{4x-2}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{Bx}{x^2+1}$.

Tính $F(t) = \int\limits_0^t f(x)dx$ (với $t > 0$). Suy ra $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t)$.

Ta có $f(x) = \dfrac{4x-2}{(x+2)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{Bx}{x^2+1} \quad (\forall x \neq -2)$

$\Leftrightarrow \quad 4x - 2 = A(x^2+1) + Bx(x+2)$

$\Leftrightarrow \quad 4x - 2 = (A+B)x^2 + 2Bx + A \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A + B = 0 \\ 2B = 4 \\ A = -2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = -2 \\ B = 2 \end{cases}$

Do đó $F(t) = \int\limits_0^t \left(\dfrac{-2}{x+2} + \dfrac{2x}{x^2+1} \right) dx = \left(-2\ln|x+2| + \ln|x^2+1| \right)\Big|_0^t$

$= -2\ln(t+2) + \ln(t^2+1) + 2\ln 2 = \ln \dfrac{4(t^2+1)}{(t+2)^2}$

Vậy $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \left[\ln \dfrac{4(t^2+1)}{(t+2)^2} \right] = \ln \left[\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{4(t^2+1)}{(t+2)^2} \right] = \ln 4$ ■

42 Chứng minh : $\lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_0^1 x^n \sin \pi x \, dx = 0 \quad (\forall n \in N)$.

$\forall x \in [0; 1]$ thì $0 \leq \sin \pi x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x^n \sin \pi x \leq x^n$

$\Rightarrow \quad 0 \leq \int\limits_0^1 x^n \sin \pi x \, dx \leq \int\limits_0^1 x^n dx = \dfrac{1}{n+1}$

Mà $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$

Do đó $\lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_0^1 x^n \sin \pi x \, dx = 0$ ■

43 Chứng minh $\lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_0^1 \dfrac{x^n dx}{1+x} = 0$.

Ta có $\forall x \in [0; 1]$ thì $\dfrac{x^n}{1+x} \geq 0$ (1)

Mặt khác $\forall x \in [0; 1]$ thì $1 + x \geq 1$

$$\Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{1+x} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^n}{1+x} \leq x^n \qquad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \quad 0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x} \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$

Mà $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ do đó $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x} = 0$ ■

44 Cho $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx \quad (n \geq 0)$.

a) Tìm hệ thức giữa I_{n+1} và I_n.

b) Chứng minh $I_{n+1} \leq I_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

a) Ta có $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^x dx$

đặt $u = x^{n+1} \Rightarrow du = (n+1)x^n dx$

$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

$$\Rightarrow \quad I_{n+1} = e^x . x^{n+1}\Big|_0^1 - (n+1)\int_0^1 x^n e^x dx$$

$$\Rightarrow \quad I_{n+1} = e - (n+1)I_n \quad \Rightarrow \quad I_{n+1} + (n+1)I_n = e$$

b)* $\forall x \in [0; 1]$ thì $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^{n+1} \leq x^n$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq e^x x^{n+1} \leq e^x x^n$$

Do đó : $0 \leq I_{n+1} = \int_0^1 e^x . x^{n+1} dx \leq I_n = \int_0^1 e^x x^n dx$

* Ta có $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$ mà $I_{n+1} \geq 0$

Do đó : $\Leftrightarrow \quad e - (n+1)I_n \geq 0 \Rightarrow e \geq (n+1)I_n \Rightarrow I_n \leq \frac{e}{n+1}$

Do đó $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

Mà $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ vậy $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$ ■

45 Cho $I_n = \int_0^1 \frac{x^n . dx}{4x^2 + 2x + 1} \quad (n \in N\backslash\{0\})$.

a) Chứng minh $I_n \geq I_{n+1}$. **b)** Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

a) $\forall x \in [0; 1] : 0 \le x \le 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le x^{n+1} \le x^n$

Mà $4x^2 + 2x + 1 > 0 \quad \forall x \in R \ (\Delta' < 0)$

Do đó : $\dfrac{x^{n+1}}{4x^2 + 2x + 1} \le \dfrac{x^n}{4x^2 + 2x + 1}$

$$\Rightarrow \quad I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{4x^2 + 2x + 1} dx \le I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{4x^2 + 2x + 1}$$

b) Ta có $\dfrac{x^n}{4x^2 + 2x + 1} \ge 0 \quad \forall x \in [0; 1] \quad \Rightarrow \quad I_n \ge 0$ (1)

Ta có $\forall x \in [0; 1] : 4x^2 + 2x + 1 \ge 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4x^2 + 2x + 1} \le 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^n}{4x^2 + 2x + 1} \le x^n$$

Do đó $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{4x^2 + 2x + 1} dx \le \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$ (2)

Từ (1), (2) $\quad \Rightarrow \quad 0 \le I_n \le \dfrac{1}{n+1} \quad \forall n \in N$

Mà $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$

Vậy $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$ (do nguyên lý kẹp) ■

15 CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Cho $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Kết luận nào sau đây là sai.

A. $f(x)$ bị chặn trên $[a; b]$.

B. $f(x)$ khả tích trên $[a; b]$.

C. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \forall c \in R.$

D. $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ với k hằng số.

2. Tích phân $I = \displaystyle\int_0^{10\pi} |\sin x| dx$ bằng :

A. 0 B. 20 C. −20 D. −10.

3. Cho $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$. Đẳng thức nào sau đây là đúng.

A. $\displaystyle\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$ B. $\displaystyle\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx$

C. $\displaystyle\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$ D. $\displaystyle\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$.

4. Cho $n \in N$. Kết luận nào sau đây là sai.

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx \geq 0$

C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \geq 0$ D. $-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$.

5. Biết rằng nếu f(x) liên tục trên [0; 1] thì $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

Tích phân $I = \int_0^{\pi} x \sin x \cos^2 x\,dx$ bằng :

A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{4}$.

6. Đẳng thức nào sau đây là đúng.

A. $\int_0^{\pi} x\cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx$ B. $\int_0^{\pi} x\cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos^2 x dx$

C. $\int_0^{\pi} x\cos^2 x\,dx = \pi\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx$ D. $\int_0^{\pi} x\cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \cos^2 x dx$.

7. Kết quả nào sau đây là sai :

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \sin x dx = 0$ B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x})dx = 0$

C. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\frac{1-x}{1+x}dx = 0$ D. $\int_0^2 \left(\frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1} + 1\right)dx = 0$.

8. Biết rằng nếu f(x) là hàm chẵn và liên tục trên R , a là số dương thì $\int_{-b}^{b} \frac{f(x)dx}{a^x + 1} = \int_0^b f(x)dx$. Tích phân $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{3^x + 1}$ bằng :

A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. $\frac{\pi}{4}$ D. 0.

9. Cho y = f(x) liên tục trên [a; b]. Bất đẳng thức nào sau đây là đúng

A. $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ B. $\int_a^b |f(x)|dx \geq \left|\int_a^b f(x)dx\right|$

C. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \geq \int_a^b |f(x)|dx$ D. $\int_a^b |f(x)|^2 dx \geq \int_a^b f(x)dx$.

10. Bất đẳng thức nào sau đây là đúng. Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3\sin^2 x}\,dx$

A. $\frac{\pi}{2} \leq I \leq \pi$ B. $\frac{2\pi}{3} \leq I \leq \pi$ C. $\frac{2}{3}\pi \leq I \geq \frac{4\pi}{5}$ D. $\frac{\pi}{2} \leq I \leq \frac{4\pi}{5}$.

11. Bất đẳng thức nào sau đây là sai.

A. $\int_1^e \ln x\,dx > 0$ B. $\int_1^e \ln^2 x\,dx > 0$

C. $\int_1^e \ln x\,dx < \int_1^e \ln^2 x\,dx$ D. $\int_1^e \ln x\,dx < e - 1$.

12. Biết rằng $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$ thì $\frac{\sqrt{3}}{\pi} \le \frac{\cot x}{x} \le \frac{4}{\pi}$. Gọi $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cot x}{x} dx$.

Kết luận nào sau đây là đúng ?

A. $\frac{\sqrt{3}}{12} \le I \le \frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{4} \le I \le \frac{1}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{12} \le I \le \frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5} \le I \le \frac{1}{4}$.

13. Cho $I_n = \int_0^1 x^n e^{-2x} dx$ $(n \in N)$.

Biết rằng $I_n \le \frac{1}{(n-1)e^2}$ $\forall n \ge 2$ thì $\lim_{n \to +\infty} I_n$ bằng :

A. $+\infty$ B. 0 C. 1 D. Không xác định.

14. $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 x^n \sin \pi x\,dx$ bằng :

A. 0 B. 1 C. $+\infty$ D. Không xác định.

15. Cho I_n $\int_1^e (\ln x)^n dx$ thì hệ thức liên lạc giữa I_n và I_{n-1} là :

A. $I_n + nI_{n-1} = e$ B. $I_n - nI_{n-1} = e$

C. $nI_n + I_{n-1} = e$ D. $nI_n - I_{n-1} = e$.

TRẢ LỜI

1. Do nếu $c \in [a; b]$ thì $\int_a^c f(x)dx$ chưa chắc đã tồn tại.

Kết luận đúng khi $c \in [a; b]$. → C sai.

2. Ta có : $|\sin x| \ge 0$ $\forall x \in [0; 10\pi]$

$\Rightarrow$ $I = \int_0^{10\pi} |\sin x| dx \ge 0$

Dấu = chỉ xảy ra $\Leftrightarrow$ $\sin x = 0$ $\forall x \in [0; 10\pi]$.

Vậy $I > 0$ → Chọn B đúng $I = 20$.

3. $I = \int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx$

Đặt $x = \pi - t \Rightarrow dx = -dt$

x	$\frac{\pi}{2}$	π
t	$\frac{\pi}{2}$	0

$\Rightarrow I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f[\sin\pi - t)](-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)dt$

Vậy $I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$ → Chọn C.

Chú ý : Có thể thử $I = \int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = 2$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Vậy $I = 2J$ → Chọn C.

4. Do $\sin^n x, \cos^n x \geq 0\ \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ nên B và C đúng. Chỉ có A hoặc D sai.

Xét $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dt = -dx$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}$	0

$\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt$. Vậy D sai.

5. Do $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

$\Rightarrow I = \int_0^{\pi} x\sin x\cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \sin x\cos^2 x\,dx$

$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} -\cos^2 x\,d(\cos x) = -\frac{\pi}{6}(\cos^3 x)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{3}$ → Chọn B.

6. Xét $I = \int_0^{\pi} x\cos^2 x\,dx$, $J = \int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx$

Đặt $x = \pi - t \Rightarrow dx = -dt$

x	0	π
t	π	0

$\Rightarrow \quad I = \int_{\pi}^{0} (\pi - t)\cos^2(\pi - t)(-dt)$

$\Rightarrow \quad I = \int_{0}^{\pi} \pi\cos^2 t\, dt - \int_{0}^{\pi} t\cos^2 t\, dt$

$\Rightarrow \quad 2I = \pi \int_{0}^{\pi} \cos^2 t\, dt = \pi.J$. Vậy chọn D.

7. a) $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \sin x\, dx = \int_{0}^{2\pi} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_{0}^{2\pi}$

$= -\cos 2\pi + \cos 0 = 0 \quad \rightarrow$ A đúng.

b) $J = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x})dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\, dx$

$x = \frac{\pi}{2} - t \quad \Rightarrow \quad dt = -dt$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos t}\, dt \quad \rightarrow$ B đúng.

c) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\frac{1-x}{1+x}dx = 0. \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln(1-x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln(1+x)dx$

$x = -t \Rightarrow dx = -dt$

$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln(1-x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} -\ln(1+t)dt \quad \rightarrow$ C đúng.

Vậy chọn D sai.

8. $\int_{-b}^{b} \frac{f(x)dx}{a^x + 1} = \int_{0}^{b} f(x)dx$

nên $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{3^x + 1} = \int_{0}^{\pi} \sin^2 x\, dx$

$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} (1 - \cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_{0}^{\pi} = \frac{\pi}{2} \rightarrow$ Chọn A.

9. Kết luận (C) là đúng do : $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)| \quad \forall x \in [a; b]$

$\Rightarrow \quad -\int_{a}^{b} |f(x)|dx \le \int_{a}^{b} f(x)dx \le \int_{a}^{b} |f(x)|dx$

$\Rightarrow \quad \left|\int_{a}^{b} f(x)dx\right| \le \int_{a}^{b} |f(x)|dx$.

10. $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ thì $0 \le \sin^2 x \le 1$

$\Rightarrow \quad \sqrt{1} \le \sqrt{1 + 3\sin^2 x} \le \sqrt{4}$

$\Rightarrow \quad 1\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \le I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3\sin^2 x}\, dx \le 2\left(\frac{\pi}{2}\right)$ → Chọn A.

11. Do $x \in [1; e]$ nên $0 \le \ln x \le 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le \int_1^e \ln x\, dx \le e - 1$

Vậy A, B, D đúng.

Ta có $x \in [1; e]$ thì $0 \le \ln x \le 1 \quad \Rightarrow \quad \ln^2 x \le \ln x$

$\Rightarrow \quad \int_1^e \ln^2 x\, dx \le \int_1^e \ln x\, dx$

Vậy C sai.

12. $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]: \quad \frac{\sqrt{3}}{\pi} \le \frac{\cot x}{x} \le \frac{4}{\pi}$

$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{12} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cot x}{x} dx \le \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$ → Chọn A.

13. Do $x^n e^{-2x} \ge 0 \ \forall x \in [0; 1] \quad \Rightarrow \quad 0 \le I_n = \int_0^1 x^n e^{-2x} dx \le \frac{1}{(n-1)}$

Mà $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{(n-1)e^2} = 0$

Vậy $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$ → Chọn B.

14. $I_n = \int_0^1 x^n \sin \pi x\, dx \ \forall x \in [0; 1]$ thì $0 \le \sin \pi x \le 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le x^n \sin \pi x \le x^n$

$\Rightarrow \quad 0 \le I_n \le \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$

Mà $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$ → Chọn A.

15. $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$

$u = (\ln x)^n \quad \Rightarrow \quad du = \frac{n}{x}(\ln x)^{n-1} dx$

$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$

Vậy $I_n = x(\ln x)^n \Big|_1^e - n \int_1^e (\ln x)^{n-1} dx$

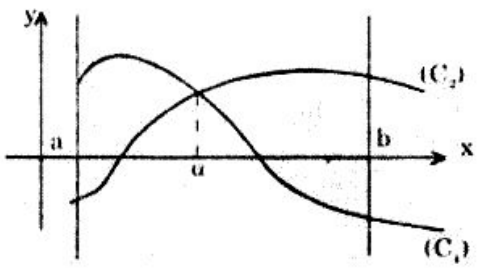
$\Rightarrow \quad I_n = e - nI_{n-1}$ → Chọn A. ■

Bài 5 : ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

Vấn đề 1. TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

Cho hàm số $y = f(x)$ (C_1), $y = g(x)$ (C_2) liên tục trên $[a; b]$ thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C_1), (C_2), hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là :

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$



Chú ý :

1. *Ta bỏ dấu giá trị tuyệt đối hàm dưới dấu tích phân bằng cách xét dấu $f(x) - g(x)$ trên $[a; b]$ hoặc bằng cách nhìn đồ thị lấy biểu thức của hàm số có đồ thị nằm trên trừ đi biểu thức của hàm số có đồ thị nằm dưới (xét trên $[a; b]$).*
2. *Nếu trong đề toán không cho hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ trước tiên ta phải tìm giao điểm của (C_1), (C_2).*
3. *Trường hợp (C_2) là trục hoành thì :* $S = \int_a^b |f(x)|\,dx$.

1 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi : $y = x^2 - 2x$ và $y = -x^2 + 4x$.

Phương trình hoành độ giao điểm :

$$x^2 - 2x = -x^2 + 4x \Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$2x^2 - 6x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Diện tích cần tìm : $S = \int_0^3 |(x^2 - 2x) - (-x^2 + 4x)|\,dx$

$$\Rightarrow S = \int_0^3 |2x^2 - 6x|\,dx = \int_0^3 (-2x^2 + 6x)\,dx$$

$$\Rightarrow S = \left(-\frac{2x^3}{3} + 3x^2\right)\Big|_0^3 = -\frac{2}{3}3^3 + 27 = 9 \quad \blacksquare$$

2 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong :

$y = x^3$ và $y = -x^2$.

Phương trình hoành độ giao điểm :

$$x^3 = -x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = -1$$

Diện tích cần tìm : $S = \int_{-1}^{0} |x^3 - (-x^2)|dx = \int_{-1}^{0} x^2|1+x|dx$

Ta có :

x		-1		0	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$

$$\Rightarrow \quad S = \int_{-1}^{0}(x^3 + x^2)dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0}$$

$$\Rightarrow \quad S = 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12} \quad \blacksquare$$

3 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi : trục hoành, $y = x^2 - 2x$ (P) và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$.

Ta có : $x^2 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 2$

Vậy

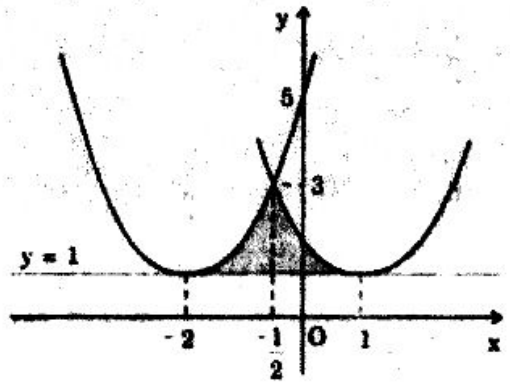
x		-1		0		2	
$x^2 - 2$			$+$	0	$-$	0	$+$

$$S_{\text{cần tìm}} = \int_{-1}^{2}|x^2 - 2x|dx = \int_{-1}^{0}(x^2 - 2x)dx + \int_{0}^{2}(2x - x^2)dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{2} = 0 - \left(-\frac{1}{3} - 1\right) + \left(4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3} \quad \blacksquare$$

4 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường :

$y = x^2 - 2x + 2$; $y = x^2 + 4x + 5$ và $y = 1$.



Phương trình hoành độ giao điểm của 2 parabol

$$x^2 - 2x + 2 = x^2 + 4x + 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$

Diện tích cần tìm :

$$S = \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \left[(x^2 + 4x + 5) - 1\right] dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left[(x^2 - 2x + 2) - 1\right] dx$$

$$\Rightarrow \quad S = \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x\right)\Big|_{-2}^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{1} = \frac{9}{4} \quad \blacksquare$$

5 Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2}{8x^3 + 1}$ với $x \geq 0$.

Tính diện tích tam giác cong chắn bởi trục hoành, $y = f(x)$ và đường thẳng $x = 1$.

Ta có : $$S = \int_0^1 \left|\frac{x^2}{8x^3 + 1}\right| dx = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{8x^3 + 1} = \frac{1}{24} \int_0^1 \frac{d(8x^3 + 1)}{8x^3 + 1}$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{1}{24} \ln(8x^3 + 1)\Big|_0^1 = \frac{1}{24} \ln 9 = \frac{1}{12} \ln 3 \quad \blacksquare$$

6 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \dfrac{-3x - 1}{x - 1}$ và hai trục tọa độ.

Tuyển sinh Đại học Khối D 2002

Phương trình hoành độ giao điểm (C) và trục hoành :

$$\frac{-3x - 1}{x - 1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{3}$$

Ta có : $$S = \int_{-\frac{1}{3}}^{0} \left|\frac{-3x - 1}{x - 1}\right| dx$$

Ta có :

		$-\frac{1}{3}$		1	
$\frac{-3x - 1}{x - 1}$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$

Vậy : $$S = \int_{-\frac{1}{3}}^{0} \frac{-3x - 1}{x - 1} dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{0} \left(-3 - \frac{4}{x - 1}\right) dx$$

$$\Rightarrow \quad S = \left(-3x - 4 \ln|x - 1|\right)\Big|_{-\frac{1}{3}}^{0}$$

$$\Rightarrow \quad S = 0 - \left(1 - 4 \ln \frac{4}{3}\right) = 4 \ln \frac{4}{3} - 1 \quad \blacksquare$$

7* Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường :

$$y = |x^2 - 4x + 3|, \quad y = x + 3.$$

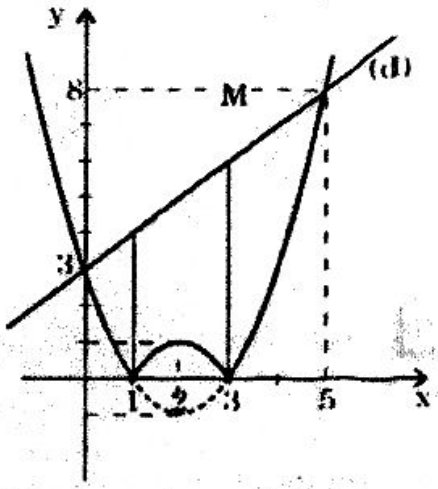
Tuyển sinh Đại học Khối A 2002

Phương trình hoành độ giao điểm (P) và (d) :

$$|x^2 - 4x + 3| = x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 3 = x + 3 \\ x^2 - 4x + 3 = -x - 3 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x = 0 \\ x^2 - 3x + 6 = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 5$$

Cách 1 :



$$S = \int_0^5 \left[(x + 3) - |x^2 - 4x + 3|\right] dx$$

$$S = \int_0^1 \left[(x + 3) - (x^2 - 4x + 3)\right] dx + \int_1^3 \left[(x + 3) + (x^2 - 4x + 3)\right] dx + \int_3^5 \left[(x + 3) - (x^2 - 4x + 3)\right] dx$$

$$S = \int_0^1 (-x^2 + 5x) dx + \int_1^3 (x^2 - 3x + 6) dx + \int_3^5 (-x^2 + 5x) dx$$

$$S = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 6x\right)\Bigg|_1^3 + \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}\right)\Bigg|_3^5 = \frac{109}{6}.$$

Cách 2 :

$$S = \int_0^5 \left[(x + 3) - (x^2 - 4x + 3)\right] dx - 2\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx$$

$$S = \int_0^5 (-x^2 + 5x) dx - 2\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx$$

$$S = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2\right)\Bigg|_0^5 - 2\left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right)\Bigg|_1^3 = \frac{109}{6} \quad \blacksquare$$

8 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi : (P) $y = 4x - x^2$ và các đường tiếp tuyến của (P) này, biết tiếp tuyến đi qua $M\left(\frac{5}{2}; 6\right)$.

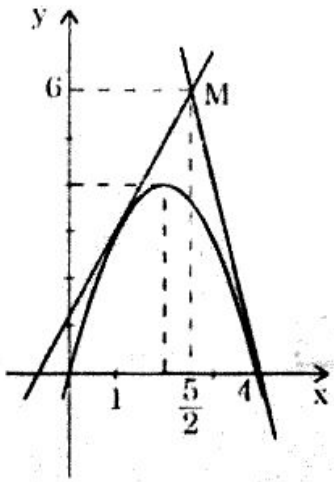
Phương trình đường thẳng qua M : $y = k\left(x - \frac{5}{2}\right) + 6$ (d)

Phương trình hoành độ tiếp điểm của (d) và (P) :

$$4x - x^2 = (4 - 2x)\left(x - \frac{5}{2}\right) + 6$$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 1 \vee x = 4$



Với x = 1 thì k = 2 nên phương trình tiếp tuyến là : y = 2x + 1

Với x = 4 thì k = −4 nên phương trình tiếp tuyến là : y = −4x + 16

Hai tiếp tuyến cắt nhau tại $\left(\frac{5}{2}; 6\right)$ nên :

$$S = \int_1^{\frac{5}{2}} \left[(2x + 1) - (4x - x^2)\right] dx + \int_{\frac{5}{2}}^4 \left[-4x + 16 - (4x - x^2)\right] dx$$

$$S = \int_1^{\frac{5}{2}} (x - 1)^2 dx + \int_{\frac{5}{2}}^4 (x - 4)^2 dx$$

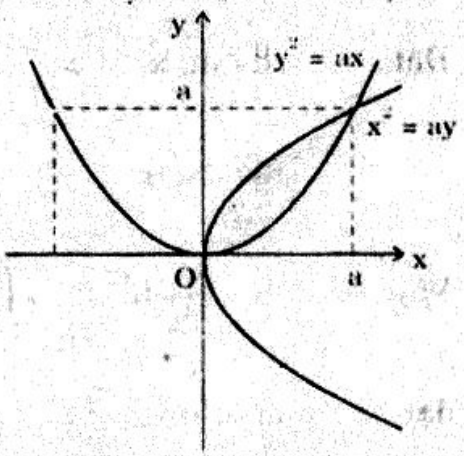
$$S = \frac{1}{3}(x - 1)^3 \Big|_4^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}\left((x - 4)^3\right)\Big|_{\frac{5}{2}}^4 = \frac{9}{4} \quad \blacksquare$$

9 **Tính diện tích hình hữu hạn chắn bởi hai đường cong :**

$y^2 = ax$ và $x^2 = ay$ $(a > 0)$

Nhìn vào đồ thị ta thấy hai đường cong cắt nhau tại O(0; 0) và A(a; a)

$\forall x \in [0; a]$ và $y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{ax}$



Vậy $S = \int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}\right) dx$

$$= \left(\frac{2}{3}\sqrt{a}x\sqrt{x} - \frac{x^3}{3a}\right)\Big|_0^a$$

$$= \frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{3}a^2 = \frac{a^2}{3} \quad \blacksquare$$

10 **Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục tung và các đường :**

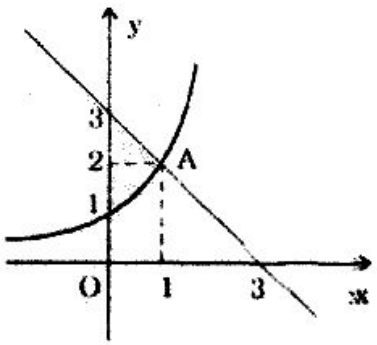
$y = 2^x$, $y = 3 - x$.

Nhìn vào đồ thị ta thấy (d) cắt (C) tại A(1; 2). Ta có :

$$S_{\text{cần tìm}} = \int_0^1 \left[(3 - x) - 2^x\right]dx$$

$$= \left(3x - \frac{x^2}{2} - \frac{2^x}{\ln 2}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{1}{\ln 2} \quad \blacksquare$$



11 Tính diện tích hình giới hạn bởi các đường :

$y = xe^x$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 2$.

Ta có : $S = \int_{-1}^{2} |xe^x|dx = -\int_{-1}^{0} xe^x dx + \int_0^2 xe^x dx$

Xét $I = \int xe^x dx$

Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

$\Rightarrow I = xe^x - \int e^x dx = (x - 1)e^x + C$

Do đó : $S = -(x - 1)e^x\Big|_{-1}^{0} + (x - 1)e^x\Big|_0^2 = 2 + e^2 - \frac{2}{e}$ $\blacksquare$

12 Tính diện tích thang cong giới hạn bởi (C) : $y = x\ln^2 x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = e$.

$$S = \int_1^e |x \ln^2 x|dx = \int_1^e x \ln^2 x\, dx \quad (\text{vì } \forall x \in [1; e] \text{ thì } x\ln^2 x > 0)$$

Đặt $u = \ln^2 x \Rightarrow du = \frac{2}{x}\ln x\, dx$

$dv = x\,dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

Vậy : $S = \frac{x^2}{2}\ln^2 x\Big|_1^e - \int_1^e x \ln x\, dx$

đặt $u_1 = \ln x \Rightarrow du_1 = \frac{dx}{x}$

$dv_1 = x\,dx \Rightarrow v_1 = \frac{x^2}{2}$

Do đó $S = \frac{x^2}{2}\ln^2 x\Big|_1^e - \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e + \int_1^e \frac{x}{2}dx$

$\Rightarrow S = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{1}{4}(e^2 - 1)$ ■

13 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường :

$y = (e + 1)x$ và $y = (1 + e^x)x$.

Tuyển sinh Đại học Khối A 2007

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường :

$ex + x = x + xe^x \Leftrightarrow x(e - e^x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$

Ta có : $\forall x \in [0; 1]$: $e^x \le e^1 \Rightarrow e^x - e \le 0 \Rightarrow x(e^x - e) \le 0$

Do đó : $S = \int_0^1 \left|(e + 1)x - (1 + e^x)x\right| dx$

$\Rightarrow S = \int_0^1 \left|x(e - e^x)\right| dx = \int_0^1 x(e - e^x)dx$

Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$

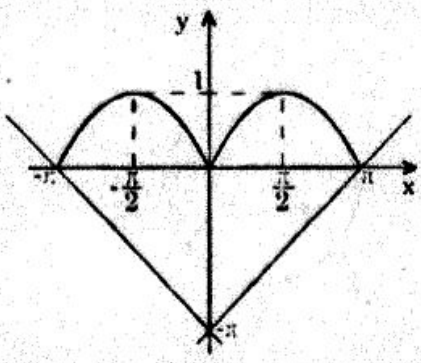
$dv = (e - e^x)dx \Rightarrow v = ex - e^x$

Vậy : $S = x(ex - e^x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (ex - e^x)dx$

$\Rightarrow S = 1 + 1 = 2$ ■

14 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sin|x|$, $y = |x| - \pi$.

Do đồ thị hai hàm số trên đều nhận Oy làm trục đối xứng. Do đó diện tích cần tìm được tính như sau :



$S = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin|x| - |x| + \pi)dx$

$\Rightarrow S = 2\int_0^{\pi} (\sin|x| - |x| + \pi)dx$

$\Rightarrow S = 2\int_0^{\pi} (\sin x - x + \pi)dx$ (do $x \in [0; \pi]$)

$\Rightarrow S = \left(-2\cos x - x^2 + 2\pi x\right)\Big|_0^{\pi}$

$\Rightarrow S = (2 - \pi^2 + 2\pi^2) + 2 = 4 + \pi^2$ ■

15 Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường :

$$y = 2 + \sin x, \quad y = 1 + \cos^2 x \quad \text{với } x \in [0; \pi].$$

Phương trình hoành độ giao điểm $\begin{cases} x \in [0, \pi] \\ 2 + \sin x = 1 + \cos^2 x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x(1 + \sin x) = 0 \\ x \in [0, \pi] \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pi$$

Vậy $S = \int_0^{\pi} \left|(2 + \sin x) - (1 + \cos^2 x)\right| dx$

$$S = \int_0^{\pi} \left|\sin x + \sin^2 x\right| dx$$

$$S = \int_0^{\pi} (\sin x + \sin^2 x) dx \qquad (\text{do } \sin x \geq 0 \ \forall x \in [0, \pi])$$

$$S = \int_0^{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\right] dx$$

$$S = \left(-\cos x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi} = 1 + \frac{\pi}{2} \quad \blacksquare$$

16° Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường có phương trình :

$$y = -\sqrt{4 - x^2}, \quad x^2 + 3y = 0.$$

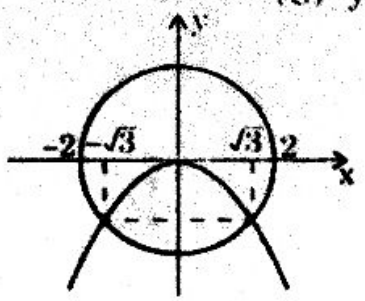
Phương trình hoành độ giao điểm (C) và (P) :

$$\sqrt{4 - x^2} = \frac{x^2}{3} \Leftrightarrow x^4 + 9x^2 - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 3 \vee x^2 = -12 \quad (\text{e})$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

(C) $y = -\sqrt{4 - x^2}$ là nửa đường tròn tâm O, bán kính R = 2.



Diện tích phần tô đậm được tính như sau:

$$S = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(-\frac{x^2}{3} + \sqrt{4 - x^2}\right) dx$$

$$S = 2\int_0^{\sqrt{3}} -\frac{x^2}{3} dx + 2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - x^2} dx$$

Đặt $x = 2\sin t \quad (t \in [0; \pi])$

$\Rightarrow dx = 2\cos t dt$

x	0	$\sqrt{3}$
t	0	$\frac{\pi}{3}$

Do đó $S = -\frac{2x^3}{9}\Big|_0^{\sqrt{3}} + 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{4 - 4\sin^2 t}\,.\cos t\,dt$

$\Rightarrow \quad S = -\frac{6\sqrt{3}}{9} + 8\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t\,dt = -\frac{2\sqrt{3}}{9} + 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2t)dt$

$\Rightarrow \quad S = -\frac{2\sqrt{3}}{3} + 4\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$

$\Rightarrow \quad S = -\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3} = \frac{4\pi + \sqrt{3}}{3}$ ■

17 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường :

$$y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} \quad \text{và} \quad y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}.$$

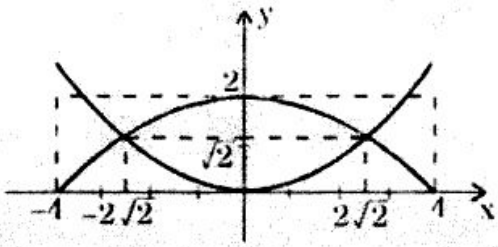
Tuyển sinh Đại học Khối B 2002

Phương trình hoành độ giao điểm :

$$\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$$

$\Leftrightarrow \quad x^2 = 8$

$\Leftrightarrow \quad x = \pm 2\sqrt{2}$



Trên $\left[-2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}\right]$ thì $\frac{x^2}{4\sqrt{2}} \le \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ và do tính đối xứng qua Oy nên :

$$S = 2\int_0^{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4\sqrt{2}}\right)dx$$

$$S = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{16 - x^2}\,dx - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\sqrt{2}} x^2\,dx$$

Đặt $x = 4\sin t \quad \Rightarrow \quad dx = 4\cos t\,dt$

x	0	$2\sqrt{2}$
t	0	$\frac{\pi}{4}$

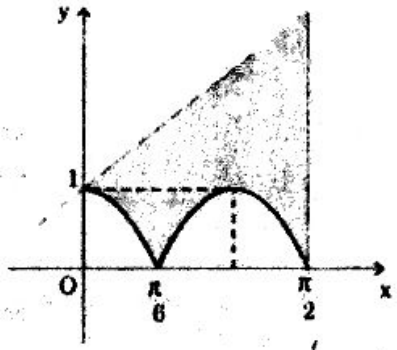
$\Rightarrow \quad S = 16\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,dt - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \quad S = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t)dt - \frac{8}{3}$

$\Rightarrow \quad S = 8\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{8}{3} = 2\pi + \frac{4}{3}$ ■

18 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

$$y = \left|1 - 2\sin^2\frac{3x}{2}\right| ; \quad x = \frac{\pi}{2} \quad \text{và} \quad y = 1 + \frac{12x}{\pi}.$$



Ta có : $y = \left|1 - 2\sin^2\frac{3x}{2}\right| = |\cos 3x| = \begin{cases} \cos 3x & \left(0 \le x < \frac{\pi}{6}\right) \\ -\cos 3x & \left(\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

Diện tích cần tìm :

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(1 + \frac{12}{\pi}x - \cos 3x\right)dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{12}{\pi}x + \cos 3x\right)dx$$

$$\Rightarrow \quad S = \left(x + \frac{6}{\pi}x^2 - \frac{1}{3}\sin 3x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \left(x + \frac{6}{\pi}x^2 + \frac{\sin 3x}{3}\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

Vậy $S = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\right) = 2\pi - 1$ ■

19 Cho $a > 0$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường có phương trình : $y = \frac{x^2 + 2ax + 3a^2}{1 + a^4}$ và $y = \frac{a^2 - ax}{1 + a^4}$.

Tìm a để diện tích đạt giá trị lớn nhất.

Phương trình hoành độ giao điểm :

$$x^2 + 2ax + 3a^2 = a^2 - ax \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 3ax + 2a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -2a \ \vee \ x = -a$$

Vậy $S = \int_{-2a}^{-a} \frac{\left|x^2 + 3ax + 2a^2\right|}{1 + a^4}dx = \frac{-1}{1 + a^4}\int_{-2a}^{-a} (x^2 + 3ax + 2a^2\,dx$

$$\Rightarrow \quad S = -\frac{1}{1 + a^4}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}ax^2 + 2a^2x\right)\Big|_{-2a}^{-a} = \frac{a^3}{6(1 + a^4)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 4 số dương, ta được :

$$3(1 + a^4) = 3 + a^4 + a^4 + a^4 \geq 4\sqrt[4]{3a^{12}}$$

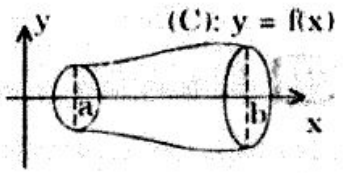
$$\Rightarrow \quad \frac{a^3}{1 + a^4} \leq \frac{3}{4\sqrt[4]{3}}$$

$$\Rightarrow \quad S \leq \frac{1}{8\sqrt[4]{3}}$$

Do đó $S_{Max} = \frac{1}{8\sqrt[4]{3}}$ khi $a^4 = 3 \Leftrightarrow a = \sqrt[4]{3}$ ■

Vấn đề 2. THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY

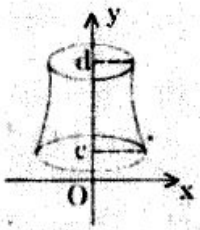
1. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $x = a$ và $x = b$, $y = 0$ quay xung quanh Ox tạo thành vật thể tròn xoay.



Ta có : $\boxed{V_T = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx}$

2. Xét đường cong $x = g(y)$ trong đó $g(y)$ là hàm liên tục trên $[c; d]$.

Thể tích V của khối tròn xoay khi hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, $x = 0$, $y = c$, $y = d$ quanh quay trục Oy là:



$$\boxed{V_T = \pi \int_c^d [g(y)]^2 \, dy}$$

20 Gọi D là miền giới hạn bởi (P) $y = 2x - x^2$ và trục hoành. Tính thể tích vật thể V do ta quay D quanh :

a) Ox, **b)** Oy.

a) Phương trình hoành độ giao điểm (P) và Ox :

$$2x - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 0 \vee x = 2$$

Ta có : $V = \pi \int_0^2 [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx$

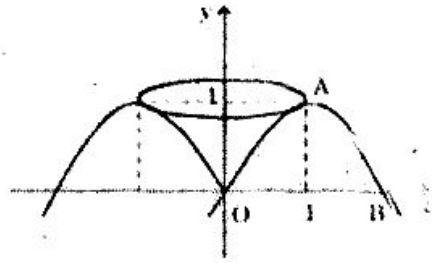
$$\Rightarrow \quad V = \pi \left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^2 = \frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} = \frac{16\pi}{15}.$$

b) $\forall x \in [0; 2]$ thì $y = 2x - x^2$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 1 - y$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-1) = \pm\sqrt{1-y}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 + \sqrt{1-y} & (x \in [1;\ 2]) \\ x = 1 - \sqrt{1-y} & (x \in [0;\ 1]) \end{cases}$$



$$V = \pi\int_0^1 \left(1 + \sqrt{1-y}\right)^2 dy - \pi\int_0^1 (1 - \sqrt{1-y})^2 dy$$

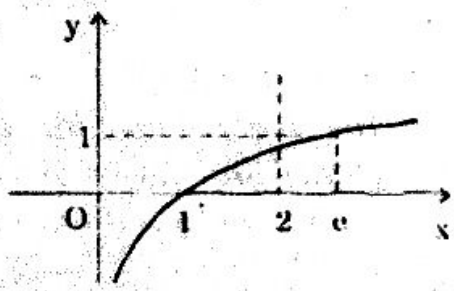
$$\Rightarrow \quad V = \pi\int_0^1 \left[\left(1 + \sqrt{1-y}\right)^2 - \left(1 - \sqrt{1-y}\right)^2\right] dy$$

$$\Rightarrow \quad V = \pi\int_0^1 4\sqrt{1-y}\ dy = 4\pi\left(-\frac{2}{3}\right)(1-y)\sqrt{1-y}\Big|_0^1$$

$$\Rightarrow \quad V = -\frac{8\pi}{3}[0-1] = \frac{8\pi}{3}. \quad \blacksquare$$

21 Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên khi quay quanh Ox miền D giới hạn bởi $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$.

$$V = \pi\int_1^e (\ln x)^2 dx$$



Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x}$

$dv = \ln x\,dx \Rightarrow v = x(\ln x - 1)$

Do đó : $V = \pi x \ln x(\ln x - 1)\Big|_1^e - \pi\int_1^e (\ln x - 1)dx = (e-2)\pi$ ■

22 Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay quanh trục Ox hình S giới hạn bởi $y = xe^x$, $x = 1$, $y = 0$ với $0 \le x \le 1$.

$$V = \pi\int_0^1 (xe^x)^2 dx = \pi\int_0^1 x^2 e^{2x} dx$$

Đặt $u = x^2 \Rightarrow 2x\,dx$

$dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \dfrac{1}{2}e^{2x}$

Do đó : $V = \dfrac{\pi}{2}x^2e^{2x}\Big|_0^1 - \pi\int_0^1 xe^{2x}dx$

Đặt $u_1 = x \Rightarrow du_1 = dx$

$v_1 = e^{2x} \Rightarrow dv_1 = \dfrac{1}{2}e^{2x}$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{\pi}{2}e^2 - \left(\frac{\pi}{2}xe^{2x}\right)\Big|_0^1 + \frac{\pi}{4}e^{2x}\Big|_0^1$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{\pi e^2}{2} - \frac{\pi}{2}e^2 + \frac{\pi}{4}\left(e^{2x}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}(e^2 - 1) \quad \blacksquare$$

23 Cho hình H giới hạn bởi các đường $y = x\ln x$, $y = 0$, $x = e$.
Tính thể tích khối tròn xoay khi quay H quanh trục Ox.

Tuyển sinh Đại học Khối B 2007

Phương trình hoành độ (C) và trục hoành :

$$x\ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ (do } x > 0)$$

Ta có : $V = \int_1^e \pi(x \ln x)^2 dx$

Đặt : $u_1 = \pi\ln^2 x \quad \Rightarrow \quad du_1 = \frac{2\pi}{x}\ln x dx$

$$dv_1 = x^2 dx \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{x^3}{3}$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{\pi x^3}{3}\ln^2 x\Big|_1^e - \frac{2\pi}{3}\int_1^e x^2 \ln x dx$$

Đặt $u_2 = \ln x \quad \Rightarrow \quad du_2 = \frac{dx}{x}$

$$dv_2 = x^2 dx \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{x^3}{3}$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{\pi e^3}{3} - \frac{2\pi}{3}\left(\frac{x^3}{3}\ln x\right)\Big|_1^e + \frac{2\pi}{3}\int_1^e \frac{x^2}{3}dx$$

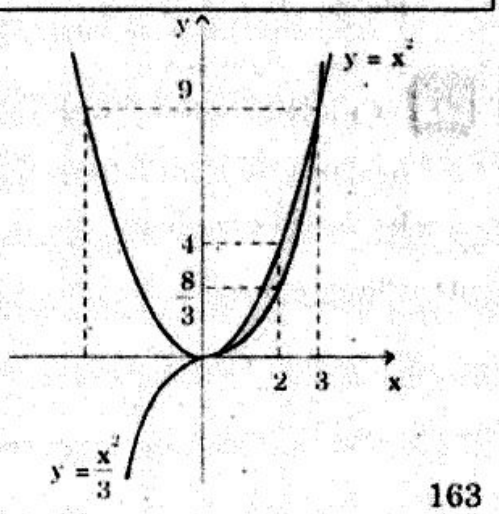
$$\Rightarrow \quad S = \frac{\pi e^3}{3} - \frac{2\pi e^3}{9} + \frac{2\pi}{9}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^e = \frac{\pi}{27}(5e^3 - 2) \quad \blacksquare$$

24 Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng giới hạn bởi $y = \frac{x^3}{3}$ và $y = x^2$ khi hình phẳng xoay quanh Ox.

$$V = \pi\int_0^3 (x^2)^2 dx - \pi\int_0^3 \left(\frac{x^3}{3}\right)^2 dx$$

$$\Rightarrow \quad V = \pi\int_0^3 x^4 dx - \frac{\pi}{9}\int_0^3 x^6 dx$$

$$\Rightarrow \quad V = \pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^3 - \frac{\pi}{63}x^7\Big|_0^3 = \frac{486}{35}\pi \quad \blacksquare$$



25 Cho D là miền giới hạn bởi 4 đường :

$$y = 0, \quad y = \sqrt{\cos^4 x + \sin^4 x}, \quad x = \frac{\pi}{2} \quad \text{và} \quad x = \pi.$$

Tính thể tích của khối tạo thành khi xoay D quanh Ox.

$$V = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos^4 x + \sin^4 x)dx = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - 2\sin^2 x \cos^2 x)dx$$

$$\Rightarrow \quad V = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right)dx = \frac{\pi}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (3 + \cos 4x)dx$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{\pi}{4}\left(3x + \frac{\sin 4x}{4}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{3\pi}{2} + 0\right) = \frac{3\pi^2}{8} \quad \blacksquare$$

26 Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi ta xoay quanh Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 0$, $y = \sqrt{x \sin x + \cos^2 x}$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \sin x + \cos^2 x)dx$$

Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \sin x\, dx \Rightarrow v = -\cos x$

Vậy $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = (\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

và $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Do đó $V = \pi\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$ $\blacksquare$

27 Cho D là miền giới hạn bởi các đường : $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$ và $y = 0$.

a) Tính diện tích của miền D.

b) Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi ta quay D quanh trục Oy.

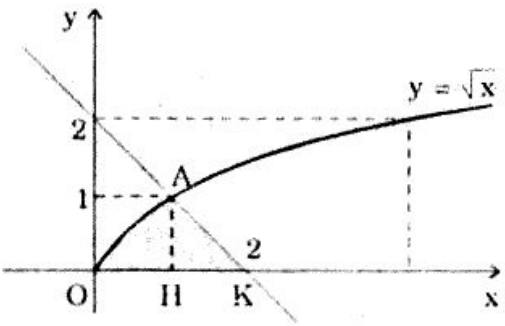
a) Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đường cong : $\sqrt{x} = 2 - x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{x} \geq 0 \\ t^2 + t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{x} \geq 0 \\ t = 1 \vee t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

Diện tích miền D :

$$S = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx + Dt(\Delta AHK)$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}(1)(1) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}.$$



b) $y = \sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = y^2$

$y = 2 - x \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 - y$

Do đó $V = \pi\int_0^1 (2-y)^2\,dy - \pi\int_0^1 (y^2)^2\,dy = \pi\int_0^1 (4 - 4y + y^2 - y^4)\,dy$

$$\Rightarrow \quad V = \pi\left(4y - 2y^2 + \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right)\Big|_1^0 = \frac{32\pi}{15} \quad \blacksquare$$

28 Cho (P) : $y = x^2 \quad (x > 0)$.

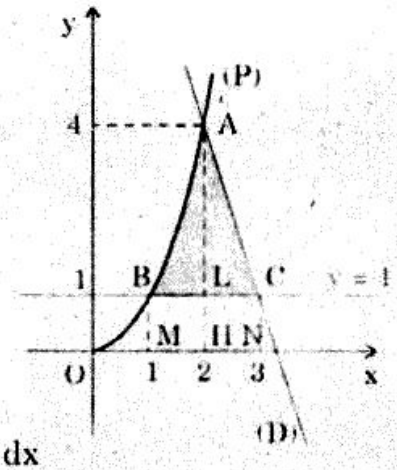
Gọi D là hình giới hạn bởi miền ngoài của (P), (d) $y = -3x + 10$, $y = 1$. Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay D quanh Ox.

Gọi V_1 là thể tích khối do ABMH quay quanh Ox.

V_2 là thể tích hình trụ do khối AHNC quay quanh Ox.

V_3 là thể tích hình trụ do hình chữ nhật BCNM quay quanh Ox.

V là thể tích cần tìm.



Ta có $V = V_1 + V_2 - V_3$

$$\Rightarrow \quad V = \pi\int_1^2 (x^2)^2\,dx + \pi\int_2^3 (-3x + 10)^2\,dx - \pi\int_1^3 1^2\,dx$$

Do đó $V = \pi\int_1^2 x^4\,dx + \pi\int_2^3 (9x^2 - 60x + 100) - \pi\int_1^3 dx$

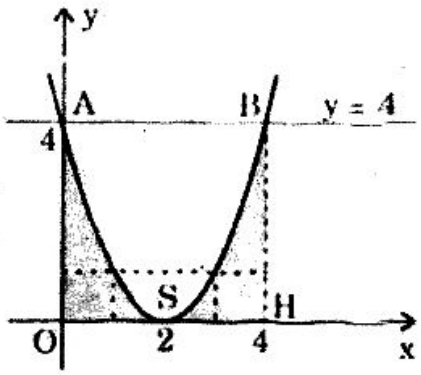
$$\Rightarrow \quad V = \pi\frac{x^5}{5}\Big|_1^2 + \pi\left(3x^3 - 30x^2 + 100x\right)\Big|_2^3 - \pi(3 - 1)$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{31\pi}{5} + 7\pi - 2\pi = \frac{56}{5}\pi \quad \blacksquare$$

29 Cho hình phẳng (D) giới hạn bởi các đường $y = (x - 2)^2$ và $y = 4$. Tính thể tích hình phẳng sinh ra bởi hình phẳng (D) khi nó xoay quanh :

a) trục Ox **b)** trục Oy.

a) Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình vuông OABH và hình phẳng OASHB khi quay quanh Ox thì :



$$V = V_1 - V_2$$

$$V_x = \pi\int_0^4 4^2dx - \pi\int_0^4 (x-2)^4dx$$

$$\Rightarrow \quad V = 16\pi x\Big|_0^4 - \pi\left(\frac{(x-2)^5}{5}\right)\Big|_0^4 = \frac{256}{5}\pi .$$

b) Ta có $y = (x-2)^2 \Leftrightarrow x - 2 = \pm\sqrt{y} \quad (y \geq 0) \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{y}$

$$V_y = \pi\int_0^4 \left(2+\sqrt{y}\right)^2 dy - \pi\int_0^4 \left(2-\sqrt{y}\right)^2 dy$$

$$\Rightarrow \quad V_y = \pi\int_0^2 \left(4+4\sqrt{y}+y\right)dy - \pi\int_0^2 \left(4-4\sqrt{y}+y\right)dy$$

$$\Rightarrow \quad V_y = \pi\int_0^4 8\sqrt{y}\,dy = \pi 8\left(\frac{2}{3}y\sqrt{y}\right)\Big|_0^4 = \frac{128\pi}{3} \quad \blacksquare$$

30 Gọi (H) là miền kín giới hạn bởi đường cong (L) : $y = x\sqrt{\ln(1+x^3)}$, trục Ox và đường thẳng $x = 1$.
Tính thể tích vật thể tạo ra khi cho (H) xoay quanh trục Ox.

Phương trình hoành độ giao điểm (L) và Ox :

$$\begin{cases} x\sqrt{\ln(1+x^3)} = 0 \\ 1+x^3 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = 0$$

Vậy $V = \pi\int_0^1 x^2\ln(1+x^3)dx$

Đặt $u = \ln(1+x^3) \Rightarrow du = \dfrac{3x^2dx}{1+x^3}$

$dv = x^2dx \Rightarrow v = \dfrac{x^3+1}{3}$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{\pi}{3}(x^3+1)\ln(x^3+1)\Big|_0^1 - \pi\int_0^2 x^2dx$$

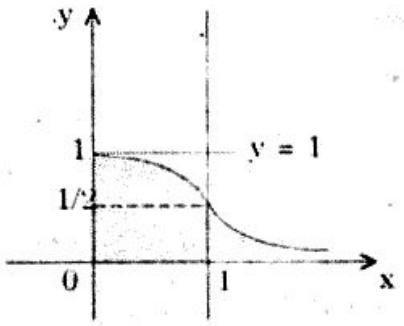
$$\Rightarrow \quad V = \frac{\pi}{3}2\ln 2 - \pi\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{3}(2\ln 2 - 1) \quad \blacksquare$$

31 Tính thể tích khối tròn xoay do quay quanh Oy phần mặt phẳng hữu hạn được giới hạn bởi hai trục tọa độ, đường thẳng x = 1 và đường cong $y = \frac{1}{1+x^2}$.

Xét $y = \frac{1}{1+x^2}$, MXĐ D = R

Ta có : $y' = \frac{-2x}{1+x^2}$

x	−2		0		2
y'		+	0	−	
y	0	↗	1 (Đ)	↘	0



Ta có : $y = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow 1 + x^2 = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{y} - 1$

Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay do quay quanh Oy của (C) : $x^2 = \frac{1}{y} - 1$, các đường thẳng x = 0, $y = \frac{1}{2}$, y = 1 thì :

$$V_1 = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy = \pi\left(\ln|y| - y\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$\Rightarrow \quad V_1 = \pi\left[(0-1) - (\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2})\right] = \pi\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right).$$

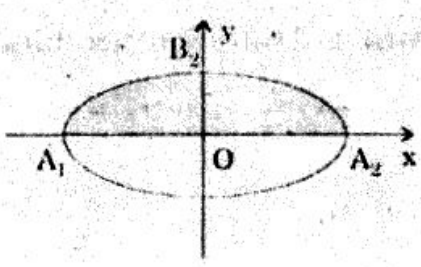
Gọi V_2 là thể tích khối trụ tròn xoay do quay quanh Oy của (D) : x = 1 và các đường thẳng x = 0 , y = 0, $y = \frac{1}{2}$ thì :

$$V_2 = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} 1 dy = \pi y\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

Do đó thể tích cần tìm là : $V = V_1 + V_2 = \pi \ln 2$ ■

32 Tính thể tích hình giới hạn bởi (E) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ quay quanh Ox.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)$$



Vậy phương trình $\overset{\frown}{A_1B_2A_2}$ của elip :

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad (-a \le x \le a)$$

$$\Rightarrow \quad V = \pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)dx \quad \Rightarrow \quad V = \frac{2\pi b^2}{a^2}\int_{0}^{a}\left(a^2 - x^2\right)dx$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a = \frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{4\pi ab^2}{3} \quad \blacksquare$$

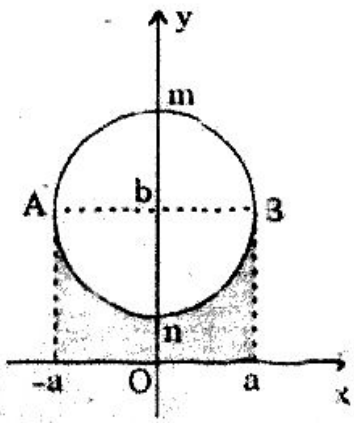
33° Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành bởi hình tròn :
$x^2 + (y - b)^2 = a^2 \quad (0 < a \le b)$ quay quanh Ox.

Ta có $(y - b)^2 = a^2 - x^2$

Vậy phương trình nửa đường tròn AmB là : $y_1 = b + \sqrt{a^2 - x^2}$

Phương trình nửa đường tròn AnB là : $y_2 = b - \sqrt{a^2 - x^2}$

Thể tích V tạo thành :



$$V = \pi\int_{-a}^{a}(y_1)^2dx - \pi\int_{-a}^{a}(y_2)^2dx$$

$$\Rightarrow \quad V = \pi\int_{-a}^{a}\left(b^2 + a^2 - x^2 + 2b\sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$$

$$- \pi\int_{-a}^{a}\left(b^2 + a^2 - x^2 - 2b\sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$$

$$\Rightarrow \quad V = \pi\int_{-a}^{a}4b\sqrt{a^2 - x^2}dx$$

x	a	-a
t	π/2	-π/2

Đặt $x = a\sin t \quad \Rightarrow \quad dx = a\cos t\,dt$

$$\Rightarrow \quad V = 4b\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a^2|\cos t|\cos t\,dt = 4a^2b\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1 + \cos 2t)dt$$

$$\Rightarrow \quad V = 2a^2b\pi\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2b\pi\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi^2a^2b \quad \blacksquare$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường :

a) $y = \sin^2x\cos^3x$, $y = 0$, $x = 0$ và $a = \dfrac{\pi}{2}$

b) $y = x^2$, $y = \dfrac{x^2}{27}$ và $y = \dfrac{27}{x}$

c) $y = x\sqrt{1+x^2}$, $y = 0$, $x = 1$ d) $y = x^2$ và $x = -y^2$

e) $y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ và $y = |x|$ f) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$

g) $y = 0$, $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ và tiếp tuyến với đường cong tại điểm có hoành độ $x = 2$.

h) $y = \sqrt{x}\sin x$, $x'Ox$ và $x = 0 \vee x = \pi$. *(Dự bị Khối B 2004)*

k) $y = x^2 - x + 3$ và $y = 2x + 1$. *(Dự bị Khối A 2006)*

Bài 2. Tính thể tích khi quay quanh Ox của hình phẳng giới hạn bởi các đường :

a) $y = x\sqrt{\ln(1+x^3)}$, $y = 0$, $x = 1$

b) $y = x^2$ và $y = \sqrt{x}$

c) $y = 0$, $y = \sqrt{1+\cos^4 x + \sin^4 x}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$

d) $y = 2x^2$ và $y = 2x + 4$

e) $y = x^2 - 4x + 6$ và $y = -x^2 - 2x + 6$.

20 CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (P) $y = x^2 - 2x$ và (d) $y = x$:

A. 9 B. $\frac{9}{2}$ C. $\frac{9}{4}$ D. $\frac{9}{8}$.

2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - x$ và $y = 3x$ bằng :

A. $\frac{32}{3}$ B. $\frac{16}{3}$ C. 0 D. 32.

3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$; $y = 0$; $x = -1$; $x = 2$ bằng :

A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{7}{3}$ C. 3 D. 9.

4. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) $y = x^3$ và (P) $y = x^2$ bằng :

A. 1 B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{12}$.

5. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) $y = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$ bằng :

A. $\frac{17}{2}$ B. $\frac{17}{4}$ C. $\frac{17}{8}$ D. 17.

6. Diện tích hình giới hạn bởi (C) $y = \cos x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$ bằng :

A. 4 B. 2 C. 1 D. 0.

7. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = e^{-x}$ và $x = 1$ là :

A. $e + \frac{1}{e}$ B. $e + \frac{1}{e} + 2$ C. $e + \frac{1}{e} - 2$ D. 2.

8. Diện tích hình giới hạn bởi (C) $y = x + \sin^2 x$, (d) $y = x$ và hai đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$ là :

A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. $\frac{3\pi}{2}$.

***9.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (C) $y = x - 1 + \frac{\ln x}{x}$, (d) $y = x - 1$ và $x = e$ là :

A. 2 B. $\frac{3}{2}$ C. 1 D. $\frac{1}{2}$.

10. Cho $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$ (C) thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành bằng :

A. $\int_{-1}^{4} f(x)dx$ B. $\left|\int_{-1}^{4} f(x)dx\right|$

C. $\int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx$ D. $\int_{-1}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{4} f(x)dx$.

11. Diện tích hình giới hạn bởi (P) $y = x^2 + 3$, tiếp tuyến của (P) tại $x_0 = 2$ và trục Oy :

A. 8 B. $\frac{8}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{2}{3}$.

12. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai nhánh của đường cong $(y - x)^2 = x^5$ và đường thẳng $x = 1$ là :

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{8}{5}$.

13. Gọi (H) là hình giới hạn bởi các đường $y = \sin x$; $y = 0$; $x = 0$ và $x = \pi$. Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi quay (H) quanh Ox bằng :

A. $\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$ B. $\pi\int_0^{\pi} \sin x\,dx$

C. $\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$ D. $\pi\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$.

14. Gọi (H) là hình giới hạn bởi các đường $y = \cos x$, $y = 0$; $x = -\frac{\pi}{2}$ và $x = \frac{\pi}{2}$

Thể tích tròn xoay sinh ra bởi quay (H) quanh Ox bằng :

A. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$ B. $\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

C. $\frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$ D. $2\pi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$

15. Thể tích khối tròn xoay tạo nên bởi hình (H) giới hạn bởi (P) $y = -x^2 + 2$ và (d) $y = 1$ khi quay quanh trục Ox bằng :

A. $\pi \int_{-1}^{1} (-x^2 + 2)^2 dx + \pi \int_{1}^{1} dx$ B. $\pi \int_{1}^{1} (-x^2 + 2)^2 dx - \pi \int_{1}^{1} dx$

C. $\pi \int_{-1}^{1} (-x^2 + 2)^2 dx$ D. $\left[\pi \int_{-1}^{1} (-x^2 + 2)dx + \pi \int_{-1}^{1} dx\right]^2$.

16. Cho hình giới hạn bởi 2 đường $y = x^2$ và $\sqrt{x} = y$ quay quanh Ox thì thể tích V bằng :

A $\frac{3\pi}{10}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $\frac{\pi}{10}$ D. $\frac{1}{10}$.

17. Cho hình phẳng giới hạn bởi (C) $y = \sin x$, trục hoành hai đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$ quay quanh x'Ox thì thể tích V

A $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. π^2 D. $\frac{\pi^2}{2}$.

18. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi (P) $y = x^2$ và (d) $y = 3x$ quay quanh trục Ox :

A $\frac{81\pi}{5}$ B. $\frac{81}{5}$ C. $\frac{9\pi}{5}$ D. $\frac{4\pi}{5}$.

19. Cho (H) hình phẳng giới hạn bởi (P) $y = x^2 - 4x + 4$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 3$. Thể tích V khi (H) quay quanh Ox là :

A. 33 B. $\frac{33}{5}$ C. $\frac{33\pi}{5}$ D. 33π.

20. Thể tích vật thể tròn xoay của vật thể sinh ra khi quay quanh trục tung của hình giới hạn bởi (P) $y = \frac{x^2}{2}$ và 2 đường thẳng $y = 2$, $y = 4$ bằng :

A. 12π B. 12 C. 24π D. 6π.

TRẢ LỜI

1. Phương trình hoành độ giao điểm : $x^2 - 2x = x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$x^2 - 3x$	$+$	0	$-$	0 $+$

$$S = \int_0^3 \left|(x^2 - 2x) - x\right| dx$$

$$S = \int_0^3 (-x^2 + 3x)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 = -9 + \frac{27}{2} = \frac{9}{2} \rightarrow \text{Chọn B}$$

2. Phương trình hoành độ giao điểm : $x^2 - x = 3x \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$

$$S = \int_0^4 \left|x^2 - 4x\right| dx = \int_0^4 (-x^2 + 4x)dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2\Bigg|_0^4 = -\frac{64}{3} + 32 = \frac{32}{3}$$

$\rightarrow$ Chọn A.

3. $S = \int_{-1}^2 \left|x^2 - 0\right| dx = \int_{-1}^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^2 = \frac{1}{3}(8 + 1) = 3 \rightarrow$ Chọn C.

4. Phương trình hoành độ giao điểm :

$$x^3 = x^2 \Leftrightarrow x^2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

$$S = \int_0^1 \left|x^3 - x^2\right| dx = \int_0^1 x^2 \left|x - 1\right| dx = \int_0^1 x^2(1 - x)dx$$

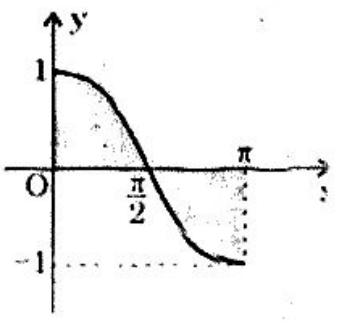
$$S = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \rightarrow \text{Chọn D.}$$

5. $S = \int_{-1}^2 \left|x^3\right| dx = \int_{-1}^0 -x^3 dx + \int_0^2 x^3 dx = -\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2 = 0 + \frac{1}{4} \cdot 4 = \frac{17}{4}$

$\rightarrow$ Chọn B.

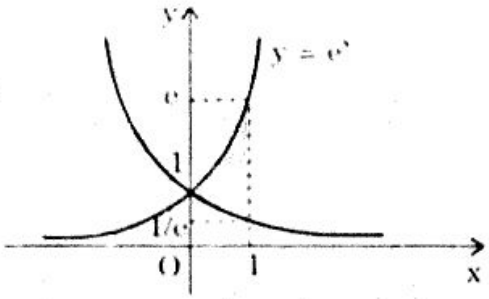
6. $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x)dx$

$$S = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(\sin x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2 \rightarrow \text{Chọn B.}$$



7. Phương trình hoành độ giao điểm :

$e^x = e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} = 1 = e^0 \Leftrightarrow x = 0$



$S = \int_0^1 \left|e^x - e^{-x}\right| dx = \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx$

$S = e^x + e^{-x}\Big|_0^1 = e + \frac{1}{e} - 2$ → Chọn C.

8. $S = \int_0^{\pi} \left|x + \sin^2 x - x\right| dx = \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$ → Chọn B.

9. Phương trình hoành độ giao điểm :

$x - 1 + \frac{\ln x}{x} = x - 1 \ (x > 0) \Leftrightarrow x = 1$

$S = \int_1^e \left|yc - yd\right| dx = \int_1^e \left|\frac{\ln x}{x}\right| dx = \int_1^e \frac{\ln x\, dx}{x}$ (do $x \geq 1 \Rightarrow \ln x \geq 0$)

$S = \int_1^e \ln x\, d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^e = \frac{1}{2}$ → Chọn D.

10. Phương trình hoành độ giao điểm (C) và x'Ox :

$x^3 - 3x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x - 4) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 4$

x		-1		0		4	
$x^3 - 3x^2 - 4x$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$S = \int_{-1}^0 \left|f(x)\right| dx + \int_0^4 \left|f(x)\right| dx = \int_{-1}^0 f(x)dx - \int_0^4 f(x)dx$ → Chọn D.

11. Ta có : $y'(x) = 2x \Rightarrow k_{TT} = 2(2) = 4$

Phương trình tiếp tuyến : $y = 4(x - 2) + 7 = 4x - 1$

$S = \int_0^2 \left|(x^2 + 3) - (4x - 1)\right| dx = \int_0^2 (x - 2)^2 dx = \frac{(x-2)^3}{3}\Big|_0^2 = 0 + \frac{8}{3}$

→ Chọn B.

12. $(y - x)^2 = x^3$ (điều kiện $x \geq 0$) $\Leftrightarrow y - x = \pm x\sqrt{x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x + x\sqrt{x} \\ y = x - x\sqrt{x} \end{array}\right.$

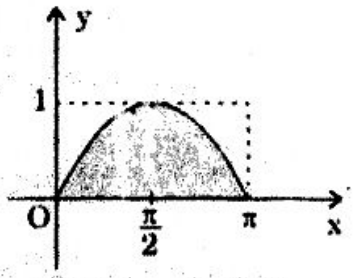
Phương trình hoành độ giao điểm :

$$x + x\sqrt{x} = x - x\sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad 2x\sqrt{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

$$S = \int_0^1 \left|x + x\sqrt{x} - (x - x\sqrt{x})\right| dx = \int_0^1 \left|2x\sqrt{x}\right| dx = 2\int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx$$

$$S = 2\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1 = \frac{4}{5} \quad \rightarrow \text{Chọn C.}$$

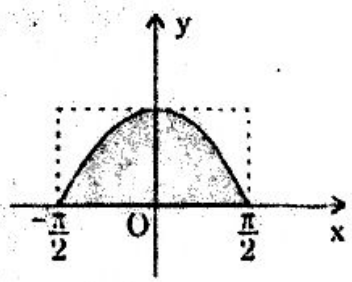
13. $V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx$ → Chọn D.



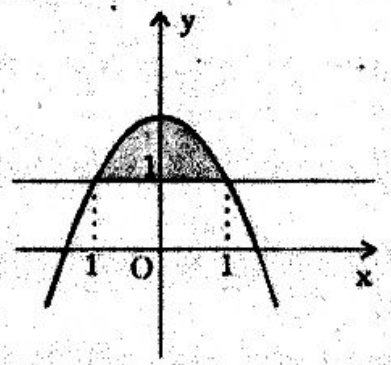
14. $V = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$

$V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$ → Chọn D

(do Oy là trục đối xứng).



15. Phương trình hoành độ giao điểm : $-x^2 + 2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1$



Gọi V_1 là thể tích do (P), $y = 0$, $x = \pm 1$ quay quanh Ox

V_2 là thể tích do (d) $y = 1$, $x = \pm 1$, $y = 0$ quay quanh Ox

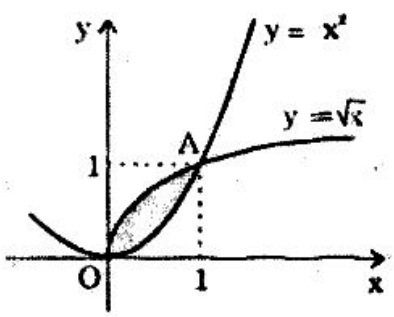
thì V cần tìm = $V_1 - V_2 = \pi \int_{-1}^{1} (-x^2 + 2)^2 dx - \pi \int_0^1 1^2 dx$ → Chọn B.

16. Nhìn vào hình vẽ ta thấy giao điểm là A(1; 1) và

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1$$

$$V = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3\pi}{10} \rightarrow \text{Chọn A.}$$



17. $V = \int_0^{\pi} \pi \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$ → Chọn D.

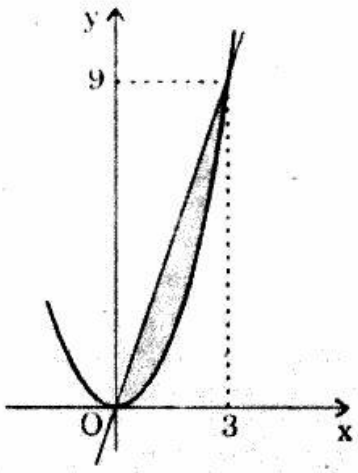
18. Phương trình hoành độ giao điểm :

$x^2 = 3x \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 3$

$V = \pi\int_0^3 (3x)^2 dx - \pi\int_0^3 (x^2)^2 dx$

$V = \pi\int_0^3 (9x^2 - x^4)dx = \pi\left(3x^3 - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^3$

$V = \pi\left(81 - \frac{324}{5}\right) = \frac{81\pi}{5}$ → Chọn A.



19. $V = \pi\int_0^3 (x-2)^4 dx = \frac{\pi}{5}(x-2)^5\Big|_0^3 = \frac{33\pi}{5}$ → Chọn C.

20. $y = \frac{x^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 2y$

$V = \int_2^4 x^2 dy = \pi\int_2^4 2y\,dy = \pi\left(y^2\right)\Big|_2^4 = 12\pi$ → Chọn A.

MỤC LỤC

Lời nói đầu 3

Bài 1. HỌ NGUYÊN HÀM

1. Định nghĩa 5
2. Họ nguyên hàm 8

Bài tập tự giải 20

50 câu hỏi trắc nghiệm 21

Bài 2. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Vấn đề 1. Áp dụng công thức Newton – Leibnitz 33

Vấn đề 2. Phương pháp đổi biến số 38

Vấn đề 3. Phương pháp tích phân từng phần 45

Bài tập tự giải 55

45 câu hỏi trắc nghiệm 56

Bài 3. VÀI DẠNG TÍCH PHÂN THƯỜNG GẶP

Vấn đề 1. Tích phân hàm hữu tỉ 69

Vấn đề 2. Tích phân hàm chứa căn 80

Vấn đề 3. Tích phân hàm chứa giá trị tuyệt đối 91

Vấn đề 4. Tích phân hàm lượng giác 96

Bài tập tự giải 111

30 câu hỏi trắc nghiệm 113

Bài 4. CÁC BÀI TOÁN ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC, GIỚI HẠN CỦA TÍCH PHÂN

Vấn đề 1. Đẳng thức tích phân 121

Vấn đề 2. Bất đẳng thức tích phân 129

Vấn đề 3. Tích phân truy hồi 134

Vấn đề 4. Tính giới hạn của tích phân 142

15 câu hỏi trắc nghiệm 145

Bài 5. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

Vấn đề 1. Tính diện tích hình phẳng 151

Vấn đề 2. Thể tích vật thể tròn xoay 161

Bài tập tự giải 168

20 câu hỏi trắc nghiệm 169