

Nhóm toán VĐ - VĐC

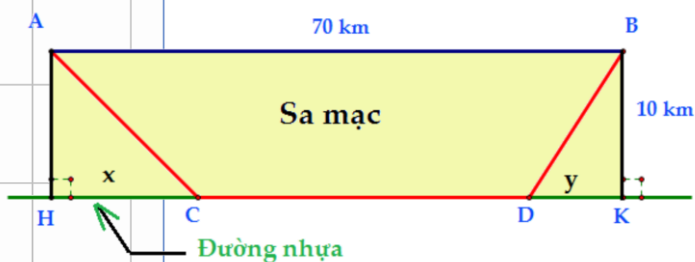
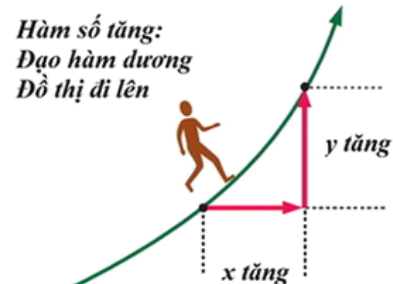
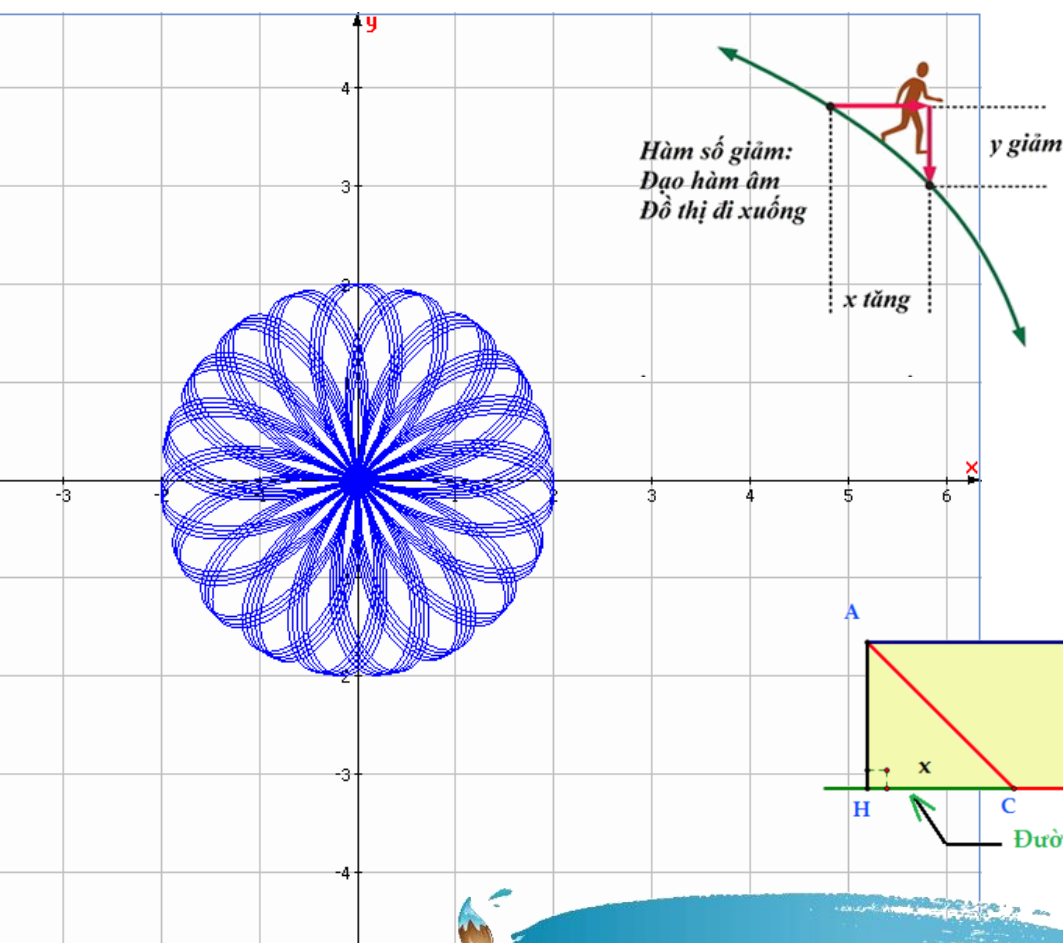
Tuyển tập chuyên đề

ĐẠO HÀM

&

ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM

VẬN DỤNG CAO
VẬN DỤNG CAO



Năm học 2018-2019

Lời nói đầu

Kỳ thi THPT Quốc gia từ năm 2016 – 2017, bài thi môn Toán chuyển từ thi tự luận sang hình thức thi trắc nghiệm nên trong cách dạy, cách kiểm tra đánh giá, cách ra đề cũng thay đổi. Sự thay đổi đó nằm trong toàn bộ chương trình môn Toán nói chung và trong kỹ năng giải toán nói riêng; trong đó thì học sinh có thể dùng máy tính cầm tay để cho kết quả dễ dàng. Do đó việc ra đề theo hình thức trắc nghiệm và hạn chế việc dùng máy tính cầm tay được ưu tiên trong toán THPT.

Bước sang kỳ thi THPT Quốc gia năm 2017- 2018 đánh giá sự đổi mới toàn bộ trong nội dung ra đề của Bộ Giáo Dục với mục tiêu chính là hạn chế “Casio hóa”, tăng cường các câu hỏi Vận dụng và Vận dụng cao nhằm phân hóa được học sinh ở các ngưỡng trung bình- khá- giỏi.

Lần đầu tiên, các câu hỏi Vận dụng và Vận dụng cao xuất hiện nhiều như “nấm mọc sau mưa” ở phần Khảo sát Hàm số- phần trước nay vẫn được coi là gỡ điểm- điều đó gây ra không ít những bất ngờ và ngỡ ngàng ở cả học sinh cũng như người dạy.

Với mong muốn đưa ra những hướng tư duy mở, những lời giải hay và đẹp cho các bài toán ứng dụng Khảo sát Hàm số và để giáo viên, học sinh tiếp cận gần hơn với những bài toán khó đó, tập thể những thầy cô chúng tôi sau rất nhiều tâm huyết xin được trân trọng giới thiệu đến bạn đọc cuốn sách “Chuyên đề Khảo sát Hàm số Vận Dụng- Vận Dụng Cao”:

- Chuyên đề 1. Tính đơn điệu của hàm số
- Chuyên đề 2. Cực trị hàm số
- Chuyên đề 3. Max min
- Chuyên đề 4. Tiệm cận
- Chuyên đề 5. Đồ thị hàm số
- Chuyên đề 6. Tương giao- Điều kiện tồn tại nghiệm
- Chuyên đề 7. Các bài toán tiếp tuyến- tiếp xúc
- Chuyên đề 8. Điểm đặc biệt của đồ thị
- Chuyên đề 9. Các bài toán thực tế ứng dụng KSHS

Chân thành gửi lời cảm ơn quý thầy cô đã dành thời gian và tâm huyết của mình cho cuốn sách này:

1. Thầy Nguyễn Chiến
2. Thầy Trương Quốc Toàn
3. Thầy Nguyễn Phương
4. Thầy Nguyễn Ngọc Hóa
5. Thầy Hoàng Xuân Bình
6. Thầy Hoàng An Đình
7. Thầy Trần Đình Cư
8. Thầy Nguyễn Hoàng Kim Sang
9. Thầy Trần Hoàn
10. Thầy Nguyễn Hoàng Việt
11. Thầy Nguyễn Khải
12. Thầy Tạ Minh Đức

Trân trọng

Hà Nội, ngày 28 tháng 08 năm 2018

Nhóm tác giả

MỤC LỤC

Trang

SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ	4
DẠNG 1. XÁC ĐỊNH ĐƯỢC KHOẢNG ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$ DỰA VÀO BẢNG BIẾN THIÊN	5
DẠNG 2. XÁC ĐỊNH ĐƯỢC KHOẢNG ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$ DỰA VÀO ĐỒ THỊ $y = f'(x)$, ĐỒ THỊ $y = h(x) - g(x)$.....	7
1. Xét tính đồng biến nghịch biến của đồ thị hàm số dựa vào đồ thị hàm $f'(x)$	7
2. Xét tính đồng biến nghịch biến của đồ thị hàm số $h(x) = f(x) + g(x)$ dựa vào đồ thị hàm $f'(x)$..	9
DẠNG 3. CHO BIỂU THỨC $f'(x, m)$ TÌM m ĐỂ HÀM SỐ $f[u(x)]$ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN.....	13
DẠNG 4. XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ THAM SỐ m ĐỂ HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU TRÊN $\mathbb{R}$; TRÊN CÁC KHOẢNG KHÁC $\mathbb{R}$.	14
DẠNG 5. XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ THAM SỐ m ĐỂ HÀM SỐ BẬC BA ĐƠN ĐIỆU THỎA MÃN NHỮNG ĐIỀU KIỆN CỤ THỂ.	15
DẠNG 6. ỨNG DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH.....	15
CHỦ ĐỀ: CỰC TRỊ HÀM SỐ	18
Dạng 1: Tìm m để hàm số bậc 3 có hai điểm cực trị thỏa mãn tính chất P	18
1.1. Ví dụ minh họa	18
1.2. Bài tập trắc nghiệm	18
Dạng 2: Tìm m để hàm số bậc 4 có 3 điểm cực trị lập thành tam giác thỏa mãn tính chất P	20
2.1. Ví dụ minh họa	20
2.2. Bài tập trắc nghiệm	21
Dạng 3. Tìm số điểm cực trị của hàm hợp, hàm ẩn dựa vào bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$, bảng xét dấu $y = f'(x)$	23
3.1. Ví dụ minh họa	23
3.2. Bài tập trắc nghiệm	23
Dạng 4: Tìm số điểm cực trị dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x); y = f'(x)$	26
4.1. Ví dụ minh họa	26
4.2. Bài tập trắc nghiệm	27
Dạng 5: Tìm m để hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối có k (hoặc có tối đa k điểm cực trị).	31
5.1. Ví dụ minh họa	31
5.2. Bài tập trắc nghiệm	32
Dạng 6: Tìm m để hàm số đạt cực trị tại điểm x_0	33
6.1. Ví dụ minh họa	33
6.2. Bài tập trắc nghiệm	33
CHUYÊN ĐỀ MAX-MIN HÀM SỐ.....	35
Chủ đề: TIỆM CẬN (VD - VDC).....	50
Dạng 1: Bài toán xác định số tiệm cận của đồ thị hàm số cụ thể không chứa tham số.	50

Dạng 2: Bài toán xác định tiệm cận của đồ thị hàm số có bảng bảng biến thiên cho trước. (5 câu)	51
Dạng 3: Cho bảng biến thiên của hàm số $f(x)$. Xác định tiệm cận của đồ thị hàm hợp của $f(x)$	53
Loại 1: Hàm hợp $y = g(f(x))$	53
Loại 2: Hàm hợp $y = g(f(u(x)))$	56
Dạng 4: TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA THAM SỐ ĐỂ ĐỒ THỊ HÀM SỐ CÓ SỐ TIỆM CẬN CHO TRƯỚC	57
1. Cơ sở lý thuyết	57
2. Phương pháp	57
3. Các ví dụ minh họa	58
Dạng 5: Tìm điều kiện của tham số để đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = a, y = b$ làm tiệm cận	59
Dạng 6: Bài toán tiệm cận và diện tích, khoảng cách...và bài toán tổng hợp	59
CHUYÊN ĐỀ ĐỒ THỊ HÀM SỐ	62
A. CÁC DẠNG TOÁN	62
Dạng 1: Các bài toán đồ thị liên quan đến khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số	62
DẠNG 2: CÁC BÀI TOÁN ĐỒ THỊ LIÊN QUAN ĐẾN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ	69
Ví dụ:	71
BÀI TẬP ÁP DỤNG	73
DẠNG 3. ĐỒ THỊ LIÊN QUAN TỚI ĐẠO HÀM CẤP I, CẤP II	74
1. Phương pháp. Sử dụng một trong các nhận xét hoặc kết hợp tất cả các nhận xét:	74
2. Một vài ví dụ.	75
3. Bài tập tương tự	77
III. ĐỒ THỊ LIÊN QUAN TỚI NGUYÊN HÀM.	79
1. Phương pháp	79
2. Các ví dụ.	79
3. Bài tập tương tự	80
BÀI TẬP ÁP DỤNG	81
DẠNG 4: CÁC BÀI TOÁN MAX-MIN KHI BIẾT ĐỒ THỊ, ĐỒ THỊ ĐẠO HÀM VÀ BBT	83
a) Phương pháp giải	83
b) Các ví dụ:	83
BÀI TẬP ÁP DỤNG	87
DẠNG 5: CÁC BÀI TOÁN GIẢI BẰNG CÁCH SỬ DỤNG	91
PHƯƠNG PHÁP SO SÁNH HAI ĐỒ THỊ	91
1. Phương pháp:	91
2. Các ví dụ mẫu:	91
BÀI TẬP ÁP DỤNG	94
DẠNG 6: CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TƯƠNG GIAO, TÍNH TIẾN	95
1. Phương pháp :Nắm vững cách xét số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của hai đồ thị và kết hợp một số kiến thức liên quan.	95
2. Ví dụ minh họa :	95
BÀI TẬP ÁP DỤNG	97
Câu 31. [2D1-2]. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ bên.	102
$\frac{2x+1}{ x-1 } = m$ có hai nghiệm thực phân biệt.	102

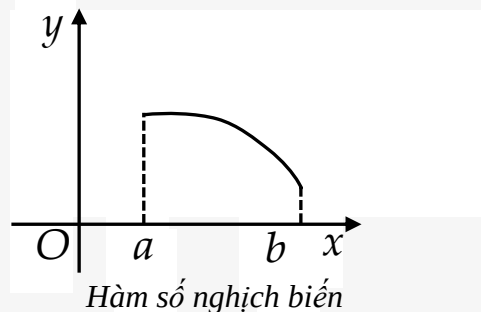
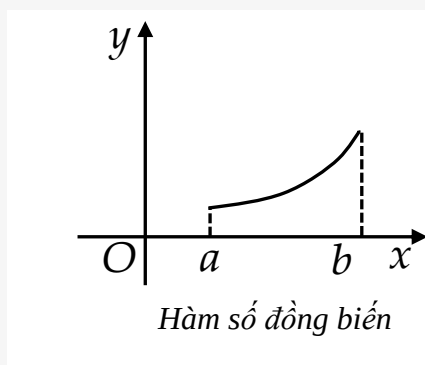
CHUYÊN ĐỀ: TIẾP TUYẾN VÀ TIẾP XÚC.....	104
Dạng 1: Phương trình tiếp tuyến tại điểm	104
1. Phương pháp.....	104
2. Các ví dụ mẫu	105
3. Bài tập tự luyện:.....	110
Dạng 2: Phương trình tiếp tuyến biết hệ số góc.....	111
1. Phương pháp.....	111
2. Các ví dụ mẫu	112
3. Bài tập tự luyện.....	117
Dạng 3: Tiếp tuyến đi qua	118
1. Phương pháp.....	118
2. Các ví dụ mẫu	119
3. Bài tập tự luyện.....	124
Dạng 4: Tiếp tuyến chung của hai đường cong	125
1. Phương pháp.....	125
2. Các ví dụ mẫu	125
3. Bài tập tự luyện.....	134
Dạng 5: Bài toán tiếp xúc của hai đồ thị	135
1. Phương pháp.....	135
2. Các ví dụ mẫu	135
3. Bài tập tự luyện.....	139
CHỦ ĐỀ 8. ĐIỂM ĐẶC BIỆT CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ.....	140
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN.....	140
I. Bài toán tìm điểm cố định của họ đường cong.....	140
II. Bài toán tìm điểm có tọa độ nguyên:.....	141
III. Bài toán tìm điểm có tính chất đối xứng:	141
IV. Bài toán tìm điểm đặc biệt liên quan đến hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị (C):.....	142
V. Bài toán tìm điểm đặc biệt khác:	144
B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	146
Chuyên đề : ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI TOÁN THỰC TẾ	159
DẠNG 1: BÀI TOÁN VỀ QUẢNG ĐƯỜNG	159
DẠNG 2: BÀI TOÁN DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG	162
Câu 18: Chu vi của một tam giác là 16 cm , biết độ dài một cạnh của tam giác là $a = 6\text{ cm}$. Tính độ dài hai cạnh còn lại của tam giác sao cho tam giác đó có diện tích lớn nhất.	166
DẠNG 3: BÀI TOÁN LIÊN HỆ DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH	167

SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa: Cho hàm số f xác định trên khoảng (đoạn hoặc nửa khoảng) K và $x_1, x_2 \in K$.

- Hàm số f gọi là đồng biến (tăng) trên K nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số f gọi là nghịch biến (giảm) trên K nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

**2. Điều kiện cần để hàm số đơn điệu:**

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K .

- Nếu hàm số đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$.
- Nếu hàm số nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$.

3. Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu:

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K .

- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K .
- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K .
- Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên khoảng K .

CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định được khoảng đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ dựa vào bảng biến thiên

Dạng 2. Xác định được khoảng đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ dựa vào đồ thị $y = f'(x)$, đồ thị $y = h(x) - g(x) \dots$

Dạng 3. Cho biểu thức $f'(x, m)$ Tìm m để hàm số $f[u(x)]$ đồng biến, nghịch biến.

Dạng 4. Xác định giá trị tham số m để hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$; trên các khoảng khác $\mathbb{R}$.

Dạng 5. Xác định giá trị tham số m để hàm số bậc ba đơn điệu thỏa mãn những điều kiện cụ thể.

Dạng 6. Ứng dụng tính đơn điệu chứng minh bất đẳng thức và giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình.

DẠNG 1. XÁC ĐỊNH ĐƯỢC KHOẢNG ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$ DỰA VÀO BẢNG BIẾN THIÊN

Câu 1: [2D1-3] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$		
$f' x$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f x$						

$-\infty$ $\nearrow$ 2018 $\searrow$ -2018 $\nearrow$ $+\infty$

Hàm số $g(x) = f(x - 2017) + 2018$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(2020; +\infty)$.

B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(2016; 2020)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 3)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 2016)$.

Câu 2: [2D1-3] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	a	2	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$								

$-\infty \nearrow 2 \searrow -2 \nearrow 2 \nearrow f(a) \searrow 2 \nearrow +\infty$

Xét hàm số $g(x) = 2f(x) - 3$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; a)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$

Câu 3: [2D1-3] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	+	0	-
y	$-\infty$	↗ 3	↘ -1	↗ 2	↘ $-\infty$	

Xét hàm số $g(x) = f(3-x)$. Chọn phát biểu đúng ?

A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 1)$.

B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 2)$.

C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(1; 3)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

Câu 4: [2D1-4] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Xét hàm số $g(x) = f(-x^2 + 3x)$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Câu 5: [2D1-4] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	a	1	b	3	$+\infty$								
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+							
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(b)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Xét hàm số $g(x) = [f(x)]^2$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(b; +\infty)$.
- B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
- D. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$.

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH ĐƯỢC KHOẢNG ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$ DỰA VÀO ĐỒ THỊ $y = f'(x)$, ĐỒ THỊ $y = h(x) - g(x)$...

1. Xét tính đồng biến nghịch biến của đồ thị hàm số dựa vào đồ thị hàm $f'(x)$

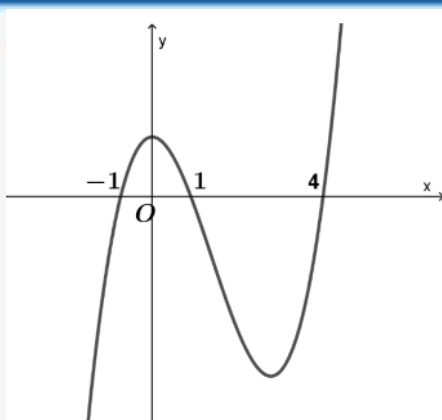
Phương pháp :

- ❖ Tính đạo hàm của hàm số $f'(u(x)) = u'(x) f'(u)$
- ❖ Phần đồ thị hàm $f'(x)$ nằm trên Ox hàm đồng biến, Phần đồ thị hàm $f'(x)$ nằm dưới Ox hàm nghịch biến,

Phát triển :

- ❖ Cho một đường cong bất kì là đồ thị hàm $f'(x)$
- ❖ Chọn hàm hợp $f(u(x))$ có đạo hàm xét được tính biến thiên dựa vào đồ thị $f'(x)$ chú ý các điểm đồ thị $f'(x)$ giao với Ox

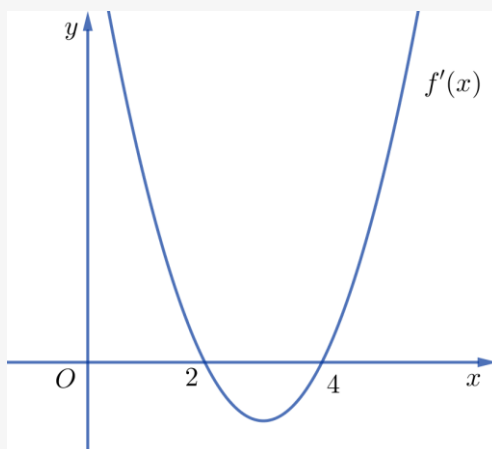
Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

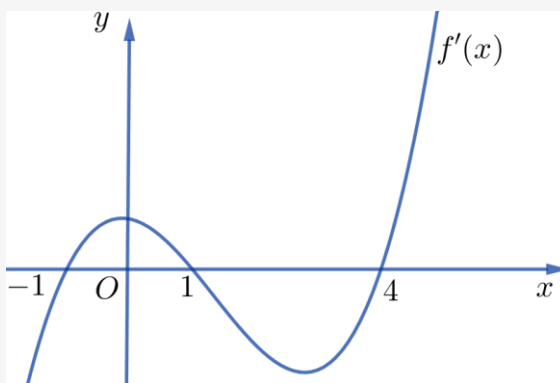
- A. $(2; +\infty)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(-1; 1)$ và $(4; +\infty)$. D. $(-\infty; -1)$ và $(1; 4)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(1+x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(\sqrt{3}; +\infty)$. B. $(-\sqrt{3}; -1)$. C. $(1; \sqrt{3})$. D. $(0; 1)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $y = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng

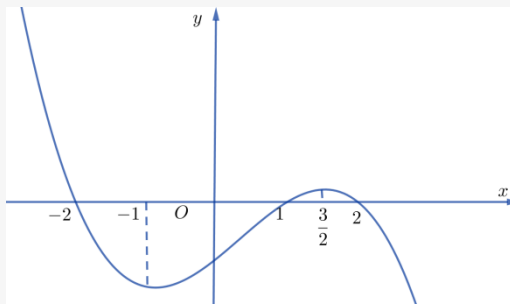
A. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

B. $(0; 2)$.

C. $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

D. $(-2; -1)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(2) = f(-2) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có dạng như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $y = (f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau:

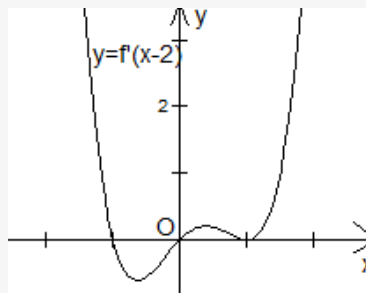
A. $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$.

B. $(-2; -1)$.

C. $(-1; 1)$.

D. $(1; 2)$.

Câu 5 Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x-2)$ có đồ thị như hình dưới. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trong khoảng nào.



A. $(-\infty; -3)$ và $(-2; +\infty)$.

B. $(-\infty; -3) \cup (-2; +\infty)$.

C. $(-3; -2)$ và $(-1; +\infty)$.

D. $(-\infty; -2)$.

2. Xét tính đồng biến nghịch biến của đồ thị hàm số $h(x) = f(x) + g(x)$ dựa vào đồ thị hàm $f'(x)$

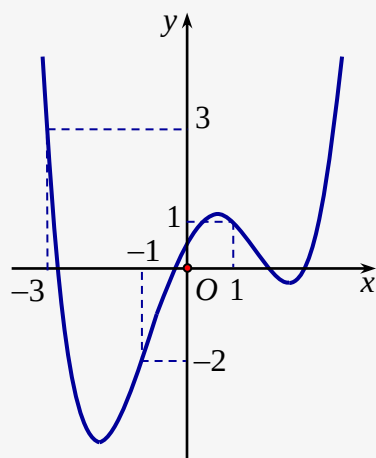
Phương pháp :

- ❖ Tính đạo hàm của hàm số $h(x) = f(x) + g(x)$
- ❖ Căn cứ đồ thị hàm $f'(x) \Rightarrow$ các điểm cực trị của hàm $h'(x)$, xét đồ thị Phần đồ thị hàm $f'(x)$ và $g'(x)$. Nếu $f'(x)$ nằm trên $g'(x)$ hàm đồng biến, Nếu $f'(x)$ nằm dưới $g'(x)$ hàm nghịch biến.

Phát triển :

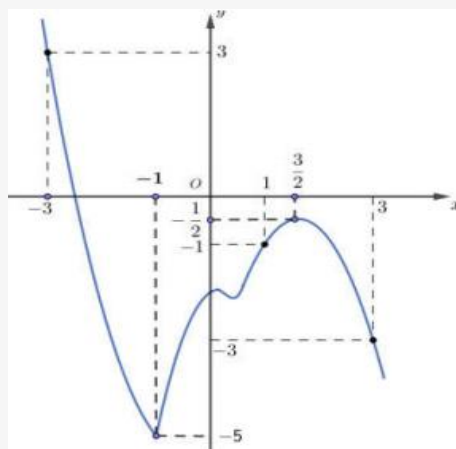
- ❖ Cho một đường cong bất kì là đồ thị hàm $f'(x)$, và đường cong $g'(x)$
- ❖ Xét tính đồng biến nghịch biến của $h(x) = f(x) + g(x)$.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. Hàm đồng biến trên khoảng $(-3; -1)$.
- B. Hàm đồng biến trên khoảng $(-3; 1)$.
- C. Nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- D. Hàm đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

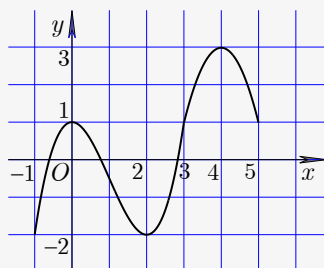
Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y = f(1-x) + \frac{x^2}{2} - x$ nghịch biến trên khoảng

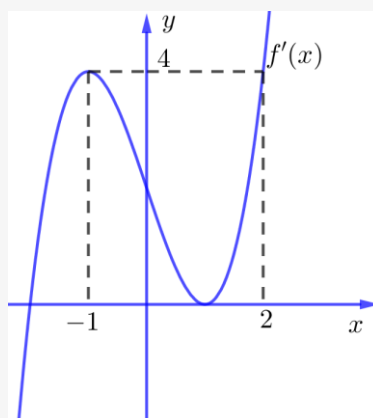
- A. $(-3; 1)$.
- B. $(-2; 0)$.
- C. $(1; 3)$.
- D. $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình bên. Hàm số $y = -2f(2-x) + x^2$ nghịch biến trên khoảng



- A. $(-3; -2)$. B. $(-2; -1)$. C. $(-1; 0)$. D. $(0; 2)$.

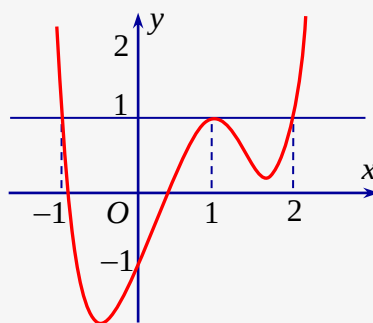
Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Hàm số $y = f(x - 2017) - 4x + 2019$ nghịch biến trên khoảng :

- A. $(-\infty; 2)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(-\infty; 2019)$. D. $(2019; +\infty)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = f(x) - x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

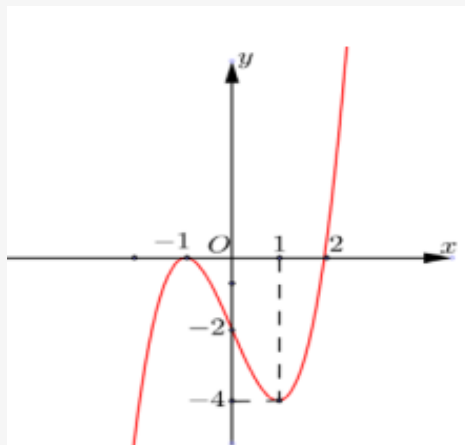


- A. $g(-1) < g(1) < g(2)$. B. $g(2) < g(1) < g(-1)$.
C. $g(2) < g(-1) < g(1)$. D. $g(1) < g(-1) < g(2)$.

Câu 6: [2D1-3] Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đường cong trong hình vẽ bên dưới là

đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ($y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$). Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$.

Mệnh đề nào dưới đây **sai**?



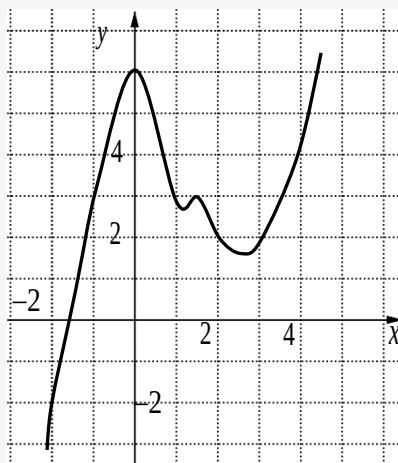
A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 0)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$.

Câu 7: [2D1-4] Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $h(x) = 2f(x) - x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



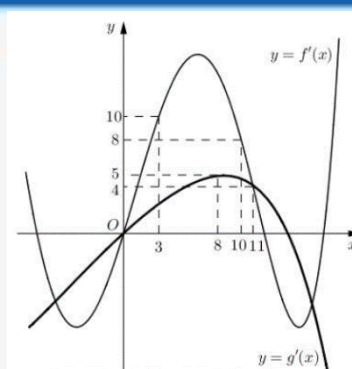
A. $(-\infty; 0)$.

B. $(3; +\infty)$

C. $(-\infty; -2)$ và $(2; 4)$.

D. $(-2; 2)$ và $(4; +\infty)$.

Câu 8: [2D1-4][THQG 2018-mã 101] Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình bên trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y = g'(x)$



Hàm số $h(x) = f(x+4) - g\left(2x - \frac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $\left(5; \frac{31}{5}\right)$. B. $\left(\frac{9}{4}; 3\right)$. C. $\left(\frac{31}{5}; +\infty\right)$. D. $\left(6; \frac{25}{4}\right)$.

DẠNG 3. CHO BIỂU THỨC $f'(x, m)$ TÌM m ĐỂ HÀM SỐ $f[u(x)]$ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m < 100$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - 8x + m)$ đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$?

- A. 18. B. 82. C. 83. D. 84.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x^2 + mx + 9)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x) = f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$?

- A. 5. B. 6. C. 7. D. 8.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x^2 + mx + 5)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 7.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(3x^4 + mx^3 + 1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x^2 + mx + 1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x) = f(\sqrt{1-x})$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$?

- A. 2. B. 3. C. 7. D. 8.

DẠNG 4. XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ THAM SỐ M ĐỂ HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU TRÊN $\mathbb{R}$; TRÊN CÁC KHOẢNG KHÁC $\mathbb{R}$.

Câu 1. [1D2-3] Tìm m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+3)x - 4$ đồng biến trên $(0;3)$.

- A. $m \geq \frac{12}{7}$. B. $m \leq -\frac{3}{7}$. C. $m \geq \frac{25}{7}$. D. $m \leq \frac{5}{7}$.

Câu 2. [1D2-4] Cho hàm số $y = (m-3)x - (2m+1)\cos x$. Tìm m để hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m \geq \frac{2}{3}$. B. $-2 \leq m \leq \frac{3}{5}$. C. $-4 \leq m \leq \frac{2}{3}$. D. $m \leq -4$.

Câu 3. [1D2-4] Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = (2m+3)\sin x + (2-m)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 4 . B. 5 . C. 3 . D. 6 .

Câu 4. [1D2-3] Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ là

- A. $(-\infty; -3]$. B. $(-\infty; -4]$. C. $(-1; +\infty)$. D. $(-1; 5)$.

Câu 5. [1D2-3] Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Số phần tử của S bằng

- A. 1 . B. 2 . C. 3 . D. 0 .

Câu 6. [1D2-3] Tìm m để hàm số $y = \frac{2x-1}{x-m}$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

- A. $m < \frac{1}{2}$. B. $m \leq 0$. C. $m \leq \frac{1}{2}$. D. $0 \leq m < \frac{1}{2}$.

Câu 7. Với mọi giá trị $m \geq a\sqrt{b}$, $(a, b \in \mathbb{Z})$ thì hàm số $y = 2x^3 - mx^2 + 2x$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$. Khi đó $a+b$ bằng?

- A. 2 . B. 1 . C. 3 . D. 4 .

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = mx^4 + 2x^2 - 1$ với m là tham số thực. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2018; 2018)$ sao cho hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{1}{2}\right)$?

- A. 2022 . B. 4032 . C. 4 . D. 2014 .

Câu 9. Gọi S là tổng tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{2x - m^2}{x - m - 4}$ đồng biến trên khoảng $(2021; +\infty)$. Khi đó giá trị của S bằng

- A.** 2035144. **B.** 2035145. **C.** 2035146. **D.** 2035143.

Câu 10. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $y = \frac{1}{3}\cos^3 x - 4\cot x - (m+1)\cos x$ đồng biến trên khoảng $(0; \pi)$?

- A. 5.** **B. 2.** **C. vô số.** **D. 3.**

DẠNG 5. XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ THAM SỐ M ĐỂ HÀM SỐ BẬC BA ĐƠN ĐIỀU THỎA MÃN NHỮNG ĐIỀU KIỆN CỤ THỂ.

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc khoảng $(-1000; 1000)$ để hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

- A.** 999. **B.** 1001. **C.** 998. **D.** 1998.

Câu 2. Biết rằng hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 3(m-1)x^2 + 9x + 1$ (với m là tham số thực) nghịch biến trên khoảng $(x_1; x_2)$ và đồng biến trên các khoảng giao với $(x_1; x_2)$ bằng rỗng. Tìm tất cả các giá trị của m để $|x_1 - x_2| = 6\sqrt{3}$.

- A.** $m = -1$. **B.** $m = 3$.
C. $m = -3$, $m = 1$. **D.** $m = -1$, $m = 3$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ nghịch biến trên đoạn có độ dài lớn nhất bằng 1.

- A.** $m = -\frac{9}{4}$. **B.** $m = 3$. **C.** $m \leq 3$. **D.** $m = \frac{9}{4}$.

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - 2x^2 + (m+3)x + m$. Tìm giá trị nguyên nhỏ nhất của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A.** $m = -4$. **B.** $m = 0$. **C.** $m = -2$. **D.** $m = 1$.

DẠNG 6. ỨNG DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỀU CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH.

Để chứng minh bất đẳng thức $h(x) \geq g(x)$, $\forall x \in K$ ta thực hiện các bước sau:

+ **Bước 1:** Chuyển bất đẳng thức về dạng $f(x) = h(x) - g(x) \geq 0, \forall x \in K$.

Xét hàm số $y = f(x)$ trên miền xác định K (K cho trước hoặc phải tìm).

- + **Bước 2:** Lập bảng biến thiên
- + **Bước 3:** Dựa vào định nghĩa đồng biến (nghịch biến) để kết luận:
- * Hàm số $f(x)$ đồng biến trên K và $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \forall x_1, x_2 \in K$.

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K và $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \forall x_1, x_2 \in K$

Để giải phương trình, bất phương trình chú ý các kết quả sau:

+ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và đơn điệu (luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến) trên miền K thì phương trình $f(x) = k$ có tối đa một nghiệm (k là hằng số).

+ Nếu hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đơn điệu ngược chiều trên miền K thì phương trình $f(x) = g(x)$ có tối đa một nghiệm trên K .

+ Nếu hàm số $f(x)$ xác định trên miền K và có $f''(x) > 0$ hoặc $f''(x) < 0$ trên miền K thì $f'(x)$ luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên K nên $f'(x) = 0$ có tối đa một nghiệm trên K do đó phương trình $f(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm trên K .

+ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và đơn điệu (luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến) trên miền K thì với $\forall u, v \in K: f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

+ Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến và liên tục trên tập xác định K thì với $\forall u, v \in K: f(u) \geq f(v) \Leftrightarrow u \geq v$.

+ Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến và liên tục trên tập xác định K thì với $\forall u, v \in K: f(u) > f(v) \Leftrightarrow u > v$.

+ Nếu hàm số $f(x)$ nghịch biến và liên tục trên tập xác định K thì với $\forall u, v \in K: f(u) \geq f(v) \Leftrightarrow u \leq v$.

+ Nếu hàm số $f(x)$ nghịch biến và liên tục trên tập xác định K thì với $\forall u, v \in K: f(u) > f(v) \Leftrightarrow u < v$.

Câu 1: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình

$(x+1)^3 + 3 - m = 3\sqrt[3]{3x+m}$ có đúng hai nghiệm thực. Tích tất cả phần tử của tập hợp S là

- A. -1. B. 1. C. 3. D. 5.

Câu 2: S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình

$x^3 - 5x^2 + 4x = \sqrt[3]{2x^2 + m} + m + 2$ có 3 nghiệm phân biệt. Tích tất cả phần tử của tập hợp S là

A. $m = \frac{-14}{27}$

B. $m > \frac{-14}{27}$

C. $m < -10$

D. $-10 < m < \frac{-14}{27}$

Câu 3: Cho phương trình $2m^2x^3 + 8x + \sqrt{x^3 + x + 2} = 2m^2 + 10$ (m là tham số). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Phương trình đã cho vô nghiệm.

B. Phương trình đã cho có đúng một nghiệm thực.

C. Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt.

D. Số nghiệm của phương trình phụ thuộc vào giá trị của tham số m .

Câu 4: Phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{3x+1} = x^2 + x + 1$ có tổng bình các nghiệm là

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 5.

Câu 5: Cho phương trình $\sqrt{x^2 - x + 4} + \sqrt{2x - 1} = m$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Phương trình đã cho có tối đa một nghiệm thực với $\forall m \in \mathbb{R}$.

B. Phương trình đã cho có tối đa hai nghiệm thực với $\forall m \in \mathbb{R}$.

C. Phương trình đã cho có tối đa ba nghiệm thực với $\forall m \in \mathbb{R}$.

D. Cả ba đáp án A, B, C đều sai.

Câu 6: Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 + x + 6\sqrt{x+2} < 18$ là

A. $(-\infty; 2)$.

B. $(-2; 2)$.

C. $(2; +\infty)$.

D. $[-2; 2)$.

Câu 7: Cho phương trình $\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = x^2 - x + 3m$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Phương trình đã cho có tối đa một nghiệm thực với $\forall m \in \mathbb{R}$.

B. Phương trình đã cho có tối đa hai nghiệm thực với $\forall m \in \mathbb{R}$.

C. Phương trình đã cho có tối đa ba nghiệm thực với $\forall m \in \mathbb{R}$.

D. Cả ba đáp án A, B, C đều sai.

Câu 8: Để phương trình: $\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} = m$ có nghiệm thì tập hợp tất cả các giá trị của m là.

A. $m \in \emptyset$.

B. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$.

C. $-1 < m < 1$.

D. $\forall m \in \mathbb{R}$.

CHỦ ĐỀ: CỰC TRỊ HÀM SỐ

Dạng 1: Tìm m để hàm số bậc 3 có hai điểm cực trị thỏa mãn tính chất P .

1.1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m-1)x^2 + (2m^2 - 3m + 2)x - m(m-1)$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai cực trị và đường thẳng đi qua hai điểm cực trị song song với đường thẳng $y = -\frac{2}{3}x$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6(m-1)x + (2m^2 - 3m + 2)$ có $\Delta' = 3(m^2 - 3m + 1)$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 3(m^2 - 3m + 1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ m > \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$.

Khi đó ta có $y = \frac{x+1-m}{3}y' - \frac{2}{3}(m^2 - 3m + 1)[x - (m-1)]$.

Tại điểm cực trị ta có $y' = 0$ nên $y = -\frac{2}{3}(m^2 - 3m + 1)[x - (m-1)]$ là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị.

Do đó bài toán tương đương

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ -\frac{2}{3}(m^2 - 3m + 1) = -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}(m-1)(m^2 - 3m + 1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \end{cases}$$

Vậy $\begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \end{cases}$.

1.2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2 - m + 1$. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho ΔABC có diện tích bằng 7, với $C(-2; 4)$. Tính tổng các phần tử của S .

A. 5. B. 1. C. -1. D. -5.

Câu 2. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$ có hai điểm cực trị là A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

- Câu 3.** Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (2m-1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.
- A. 0. B. 6. C. -6. D. 3.
- Câu 4.** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - 3$, với m là tham số. Xác định tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có điểm cực đại và cực tiểu nằm cùng một phía đối với trục tung?
- A. $m = \frac{3}{2}$. B. $m = \frac{3}{4}$. C. $m = -\frac{1}{2}$. D. $m = \frac{1}{4}$.
- Câu 5.** Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 - m^2x + 2$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho ba điểm O, A, B thẳng hàng, trong đó O là gốc tọa độ.
- A. $m = 0$. B. $m = \sqrt{3}$. C. $m = \sqrt[3]{24}$. D. $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Câu 6.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m+5)x^2 + mx$ có cực đại, cực tiểu và $|x_{CD} - x_{CT}| = 5$.
- A. $m \in \{6; 0\}$. B. $m = 0$. C. $m = -6$. D. $m \in \{0; -6\}$.
- Câu 7.** Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 12mx - 3m + 4$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC có trọng tâm là gốc tọa độ với $C\left(-1; \frac{-9}{2}\right)$.
- A. $m = \frac{12}{7}$. B. $m = \frac{-1}{2}$. C. $m \geq \frac{-1}{2}$. D. $m < \frac{-1}{2}$.
- Câu 8.** Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = (m-1)x^3 + 12x^2 + 3mx - 4$ đạt cực đại tại x_1 và đạt cực tiểu tại x_2 , đồng thời $x_1 < x_2$.
- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.
- Câu 9.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để điểm $M(2m^3; m)$ tạo với hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ (C) một tam giác có diện tích nhỏ nhất.
- A. $m = -1$. B. $m = 2$. C. $m = 1$. D. $m = 0$.
- Câu 10.** Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị A và B sao cho $AB = \sqrt{20}$. Tính tổng các phần tử của S .
- A. 0. B. 1. C. 3. D. 4.

Dạng 2: Tìm m để hàm số bậc 4 có 3 điểm cực trị lập thành tam giác thỏa mãn tính chất P .

2.1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$. Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông.

Lời giải

Ta có: $y' = 4x^3 - 4(m+1)x = 4x[x^2 - (m+1)]$.

Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt, tương đương:
 $m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$ (*).

Khi đó đồ thị hàm số có ba cực trị là: $A(-\sqrt{m+1}; -2m-1)$, $B(0; m^2)$,
 $C(\sqrt{m+1}; -2m-1)$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{BA} = (-\sqrt{m+1}; -m^2 - 2m - 1), \overrightarrow{BC} = (\sqrt{m+1}; -m^2 - 2m - 1).$$

Vì ba điểm A, B, C là tam giác cân tại B nên tam giác ABC là tam giác vuông khi và chỉ khi vuông tại B và tương đương:

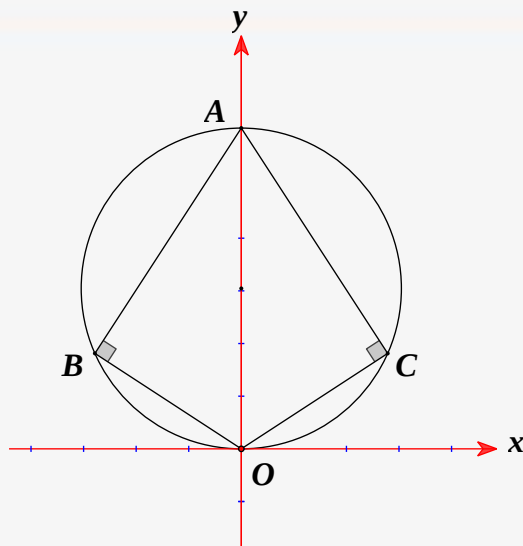
$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow -(m+1) + (m^3 + 2m + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (m+1)[(m+1)^3 - 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 0 \end{cases}.$$

Kết hợp (*) ta được $m = 0$.

Vậy $m = 0$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = 2x^4 + 2mx^2 - \frac{3m}{2}$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đã cho có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị này cùng với gốc tọa độ O tạo thành bốn đỉnh của một tứ giác nội tiếp được.

Lời giải.



Ta có: $y' = 8x^3 + 4mx = 4x(2x^2 + m)$. Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $m < 0$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{\frac{-m}{2}} \\ x = -\sqrt{\frac{-m}{2}} \end{cases}.$$

Khi đó giả sử 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$A\left(0; -\frac{3m}{2}\right), B\left(\sqrt{\frac{-m}{2}}; -\frac{m^2}{2} - \frac{3m}{2}\right), C\left(-\sqrt{\frac{-m}{2}}; -\frac{m^2}{2} - \frac{3m}{2}\right).$$

Do AO trung trực của BC và ABOC nội tiếp được nên $AB \perp OB$; $AC \perp OC$.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{\frac{-m}{2}}; \frac{-m^2}{2}\right); \overrightarrow{OB} = \left(\sqrt{\frac{-m}{2}}; \frac{-m^2}{2} - \frac{3m}{2}\right).$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow -\frac{m}{2} + \frac{m^4}{4} + \frac{3m^3}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{m}{2} \left(\frac{m^3}{2} + \frac{3m^2}{2} - 1 \right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow m = 0; m = -1; m = -1 + \sqrt{3}; m = -1 - \sqrt{3}.$$

Do $m < 0$ nên $m = -1$ hoặc $m = -1 - \sqrt{3}$

2.2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có 3 điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1

A. $\begin{cases} m=1 \\ m=\pm \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ B. $\begin{cases} m=1 \\ m=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ C. $\pm \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ D. $m=1$.

Câu 2. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - (3m-1)x^2 + 2m+1$ có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với điểm $D(7;3)$ nội tiếp được một đường tròn.

A. $m=3$. B. $m=1$. C. $m=-1$. D. Không tồn tại m .

Câu 3. Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m+3$ có ba điểm cực trị A,B,C sao cho trục hoành chia tam giác ABC thành hai đa giác sao cho: tỉ số giữa diện tích của tam giác nhỏ được chia ra và diện tích tam giác ABC bằng $\frac{4}{9}$.

A. $\frac{-1+\sqrt{15}}{2}$. B. $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{5+\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{1+\sqrt{15}}{2}$.

Câu 4. Có bao nhiêu số thực m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ có ba điểm cực trị A,B,C sao cho tứ giác ABCD nội tiếp với $D\left(\frac{3}{5}; \frac{9}{5}\right)$.

A. 4 B. 2. C. 3. D. 1

Câu 5. Tìm số thực m để đồ thị hàm số $y = x^4 + mx^2 + m+2$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác nhận O làm trọng tâm.

A. $m=1$ B. $m=-2$. C. $m=0$. D. $m=2$

Câu 6. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^4 + 2m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m các điểm cực trị tạo thành tam giác đều.

A. $m=2\sqrt{2}$ B. $m=\sqrt[3]{3}$. C. $m=\sqrt[3]{4}$. D. $m=1$

Câu 7. Cho hàm số $y = x^4 - mx^2 + 2m-1$ có đồ thị (C_m) . Tìm tất cả các giá trị thực của m để (C_m) có 3 điểm cực trị cùng với gốc tọa độ tạo thành một hình thoi.

A. $m=1+\sqrt{2}; m=-1+\sqrt{2}$. B. $m=2+\sqrt{2}; m=2-\sqrt{2}$.
C. $m=4+\sqrt{2}; m=4-\sqrt{2}$. D. $m=1+\frac{\sqrt{2}}{2}; m=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 8. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ có đồ thị là (C) , m là tham số. (C) có ba điểm cực trị A,B,C sao cho $OA=BC$, trong đó O là gốc tọa độ, A là điểm cực trị thuộc trục tung khi:

A. $m=0$ hoặc $m=2$. B. $m=2\pm 2\sqrt{2}$. C. $m=3\pm 3\sqrt{3}$. D. $m=5\pm 5\sqrt{5}$.

Câu 9. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$. Xác định m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị lập thành một tam giác vuông cân.

A. $m=0$. B. $m=1$. C. $m=0 \vee m=1$. D. Đáp số khác.

Câu 10. Cho đồ thị hàm số $(C) y = x^4 - 2mx^2 + 2$, m là tham số thỏa mãn đồ thị (C) có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác ngoại tiếp một đường tròn có bán kính $R=1$. Khi đó tổng các giá trị của m là

- A. 1. B. 0. C. $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. D. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 11. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x^4 + 2mx^2 - \frac{3m}{2}$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị này cùng với gốc tọa độ O tạo thành bốn đỉnh của một tứ giác nội tiếp được. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

- A. $2 - 2\sqrt{3}$. B. $x^2 + y^2 + z^2 = 12$. C. -1 . D. 0 .

Dạng 3. Tìm số điểm cực trị của hàm hợp, hàm ẩn dựa vào bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$, bảng xét dấu $y = f'(x)$.

3.1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của hàm số $y = f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

Lời giải

Ta có: $g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \xrightarrow{BXD} \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = 1 \\ x^2 - 2x = -1 \text{ (nghiệm kép)} \\ x^2 - 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \\ x = 1 \text{ (nghiệm kép)} \\ x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$	-1	$1 - \sqrt{2}$	1	$1 + \sqrt{2}$	3	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Do đó hàm số $f(x^2 - 2x)$ có ba điểm cực tiểu.

3.2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $y = f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
g'		-	0	+	0	-	0	+	
g	$+\infty$				4				$+\infty$

Hàm số $g(x) = 3f(x) + 1$ có giá trị cực tiểu bằng

- A. -1. B. 1. C. 7. D. 4.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f'		-	0	+	0	+	
f	$+\infty$				2		$+\infty$

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 + 1)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	-		+	0	-	
y	$-\infty$				3				$-\infty$

Gọi S là tổng các điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(3 - x)$. Tính S

- A. $S = 2$. B. $S = 3$. C. $S = 4$. D. $S = 6$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		2018		-2018		$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = |f(x - 2017) + 2018|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 6. Cho hàm bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Số điểm cực đại của hàm số $f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ là:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$								$+\infty$

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		-2		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$										$+\infty$

Hàm số $g(x) = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị

- A. 4. B. 3. C. 5. D. 2

Câu 8. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(|x|) + 2018$ có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+		
$f(x)$	$+\infty$									$+\infty$

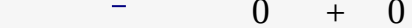
A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) < 0$, đồng thời hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	+	
$f(x)$							

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f^2(x)$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+		
$f(x)$	$+\infty$									$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}$ là

A. 1.

B. 2.

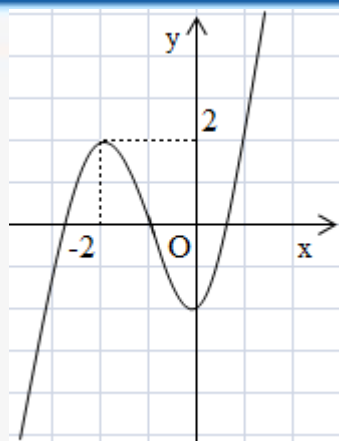
C. 3.

D. 4

Dạng 4: Tìm số điểm cực trị dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x); y = f'(x)$

4.1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tìm số điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(-x^2 + 3x)$.

Lời giải

Ta có: $g'(x) = (-2x + 3)f'(-x^2 + 3x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3 = 0 \\ f'(-x^2 + 3x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ -x^2 + 3x = -2 \\ -x^2 + 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x = 0 \\ x = 3 \end{cases}.$$

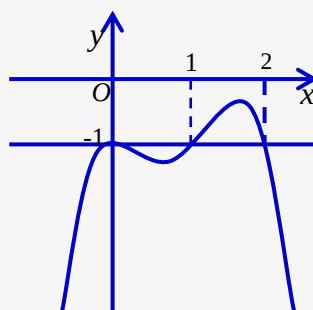
Từ đó ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$	$+\infty$
g'	+	0	-	0	+	0	-

Vậy hàm số có ba điểm cực đại.

4.2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ.



Xác định điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(x) + x$

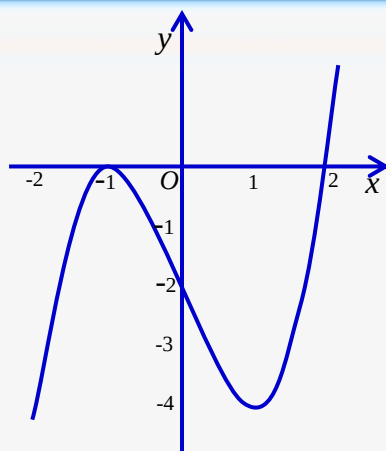
A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. Không có.

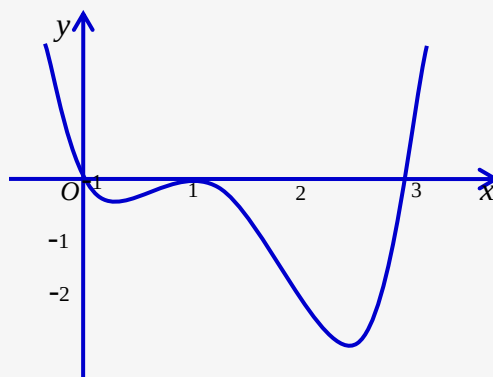
Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x) = f(2 - x^2)$. Mệnh đề nào dưới đây sai:

- A. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 2$ B. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = \sqrt{3}$
 C. Hàm số $g(x)$ không có cực trị. D. Hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

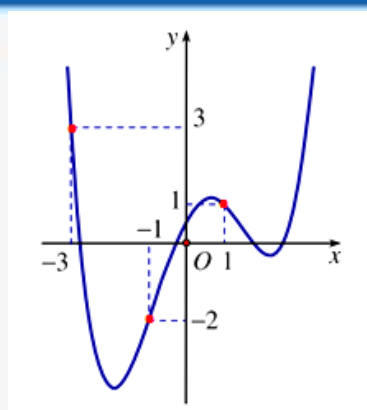
Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(-\infty; +\infty)$. Đồ thị của hàm số $f(x)$ như hình vẽ.



Hỏi đồ thị hàm số $y = g(x) = f^2(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại, điểm cực tiểu

- A. 1 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu. B. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.
 C. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu. D. 2 điểm cực tiểu, 3 điểm cực đại.

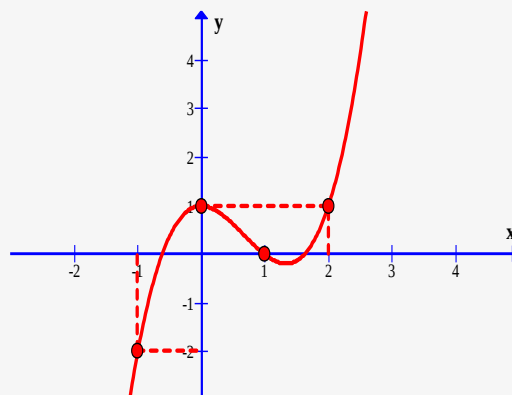
Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



Đặt $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$. Tìm điểm cực tiểu của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-3; 1]$

- A. $x_{CT} = 1$. B. $x_{CT} = \frac{1}{2}$. C. $x_{CT} = -2$. D. $x_{CT} = -1$.

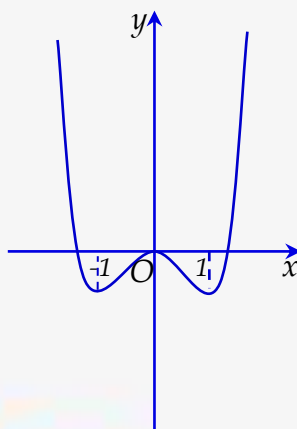
Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ đạt cực đại tại điểm nào?

- A. $x_{CD} = 1$. B. $x_{CD} = -1$. C. $x_{CD} = 0$. D. $x_{CD} = 2$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ.



Xác định điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x) + 3x$

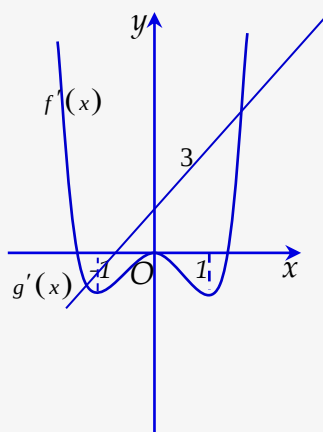
A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x), y = g'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $h(x) = g(x) - f(x)$. Mệnh đề nào dưới đây sai:

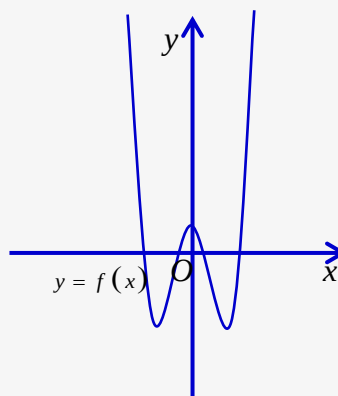
A. Hàm số $h(x)$ có một cực tiểu

B. Hàm số $h(x)$ có một cực đại

C. Hàm số $h(x)$ có hai cực trị

D. Hàm số $h(x)$ không có cực trị.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(-\infty; +\infty)$. Đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Hỏi đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị:

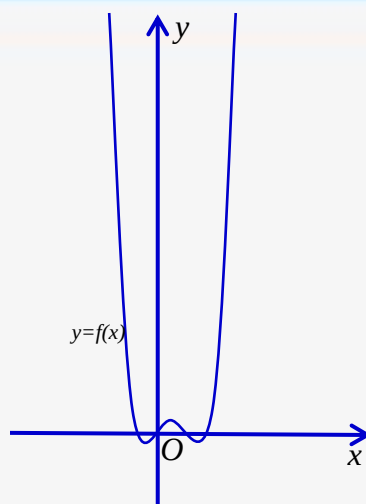
A. 4 điểm cực trị.

B. 6 điểm cực trị.

C. 7 điểm cực trị.

D. 5 điểm cực trị.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số trên $y = f(|x|)$

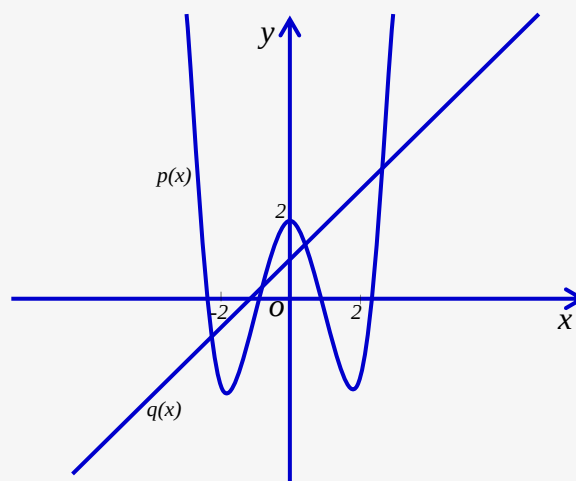
A. 4 .

B. 3 .

C. 6 .

D. 5 .

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đạo hàm $f'(x) = p(x), g'(x) = q(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = h(x) = f(x) - g(x)$. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau đúng?

A. Có hai điểm cực đại trong đó có một giá trị $x_{CD} < 2$.

B. Có hai điểm cực tiểu trong đó có một giá trị $x_{CT} < 2$.

C. Có hai điểm cực đại thỏa mãn $x_{CD} > 0$.

D. Có hai điểm cực tiểu thỏa mãn $x_{CT} > 0$.

Dạng 5: Tìm m để hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối có k (hoặc có tối đa k điểm cực trị).

5.1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$		
f'		$+$	0	$-$	0	$+$
f			11		4	$+\infty$
	$-\infty$					

Tìm m để đồ thị hàm số $g(x) = |f(x) - 2m|$ có 5 điểm cực trị.

5.2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $-5; 5$ sao cho hàm số

$$y = |x^3 - 6x^2 + (9 - m)x + 2m - 2| \text{ có 5 điểm cực trị?}$$

- A. 8. B. 12. C. 5. D. 7

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x^2 - 8x + m)$ có 5 điểm cực trị?

- A. 15. B. 17. C. 18. D. 16

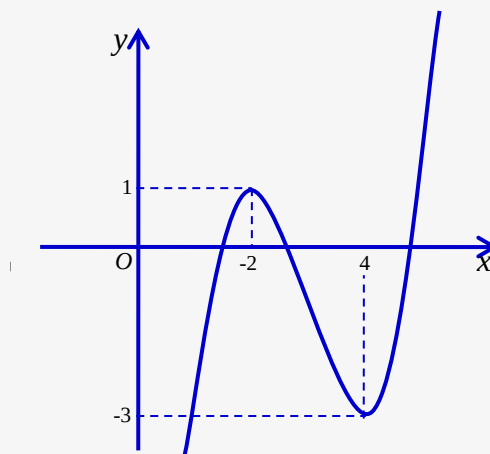
Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| x^4 - 2x^2 + \frac{m}{2018} - 7 \right|$ có 7 điểm cực trị?

- A. 2018. B. 1009. C. 2017. D. 1008

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 2018 để hàm số $y = |x^4 - 4x^2 + m|$ có 3 điểm cực trị?

- A. 2015. B. 2014. C. 2017. D. 2016.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu số nguyên $m > -10$ để hàm số $y = f(|x|) + m$ có 5 điểm cực trị.

- A. 12. B. 11. C. 14. D. 13.

Dạng 6: Tìm m để hàm số đạt cực trị tại điểm x_0 .

6.1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Tìm m để hàm số $y = x^8 + (m-2)x^5 - (m^2-4)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Lời giải

Ta có $y' = 8x^7 + 5(m-2)x^4 - 4(m^2-4)x^3$.

Hàm số đa thức đạt cực tiểu tại $x = 0$ khi và chỉ khi $\begin{cases} y'(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} y'(x) > 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} y'(x) < 0 \end{cases}$

Tương đương: hàm đạo hàm có lũy thừa nhỏ nhất của x là lẻ và hệ số của nó là dương, tức là:

$$\begin{cases} -4(m^2-4) = 0 \\ 5(m-2) = 0 \\ 8 > 0 \\ -4(m^2-4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ -2 < m < 2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} m = 3 \\ -2 < m < 2 \end{cases}$$

6.2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$. Với giá trị nào của m thì hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$.

- A. $m = 2$. B. $m = 1$. C. $m \in \{1; 2\}$. D. $m \in \emptyset$.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^4 + 3mx^2 + m^2 + m$ đạt cực tiểu tại $x = 0$

- A. $m \geq 0$. B. $m > 0$. C. $m \leq 0$. D. $m < 0$.

Câu 3. [Mã đề 105 – THQG 2018] Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-4)x^5 - (m^2-16)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

- A. 8. B. 9. C. Vô số. D. 7.

Câu 4. Cho hàm số: $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$. Tìm tất cả các giá trị nào của m để hàm số có 2 điểm cực trị thuộc khoảng $(-2; 0)$.

- A. $-\frac{10}{7} < m < -1$. B. $m > \frac{5}{4}$ C. $m < -1$ D. $-\frac{5}{2} < m < -1$

Câu 5. Tìm tất cả giá trị của m để hàm số $y = \sin 2x - m \cos x$ có điểm cực tiểu là $x = \frac{\pi}{6}$

- A. $m = -2$ B. $m = -1$ C. $\forall m \in \mathbb{R}$ D. $m \in \emptyset$.

- Câu 6.** [HSG Ninh Bình 2018] Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3(m^2 - 1)x + m$. Gọi A là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$. Khi đó tập A là tập con của tập hợp
- A. $(-\infty; -1]$. B. $(3; +\infty)$. C. $(-\infty; 1]$. D. $(2; +\infty)$.
- Câu 7.** Hàm số $y = x^3 + 2ax^2 + 4bx - 2018$ ($a, b \in \mathbb{R}$) đạt cực trị tại $x = -1$. Khi đó hiệu $a - b$ là
- A. -1 . B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $-\frac{3}{4}$.
- Câu 8.** [Chuyên ĐH Vinh] Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hàm số $y = ax + \sqrt{x^2 + 1}$ có cực tiểu.
- A. $-1 < a < 2$. B. $-1 < a < 1$. C. $0 \leq a < 1$. D. $-2 < a < 0$.
- Câu 9.** [THPT Chuyên Quang Trung lần 1] Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - ax^2 - 3ax + 4$. Để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{x_1^2 + 2ax_2 + 9a}{a^2} + \frac{x_2^2 + 2ax_1 + 9a}{a^2} = 2$ thì a thuộc khoảng nào?
- A. $a \in \left(-3; -\frac{5}{2}\right)$. B. $a \in \left(-5; -\frac{7}{2}\right)$. C. $a \in (-2; -1)$. D. $a \in \left(-\frac{7}{2}; -3\right)$.
- Câu 10.** Biết $M(-2; 5), N(0; 13)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax + b + \frac{c}{x+1}$. Tính giá trị của hàm số tại $x = 2$.
- A. $-\frac{13}{3}$. B. $\frac{16}{9}$. C. $\frac{16}{3}$. D. $\frac{47}{3}$.

CHUYÊN ĐỀ MAX-MIN HÀM SỐ

Câu 1: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2\sin^4 x + \cos^2 x + 3$ bằng

- A. $\min_{\mathbb{R}} y = 5$. B. $\min_{\mathbb{R}} y = 3$. C. $\min_{\mathbb{R}} y = 4$. D. $\min_{\mathbb{R}} y = \frac{31}{8}$

Câu 2: Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^{20} x + \cos^{20} x$. Khi đó $M.m$ bằng:

- A. $\frac{1}{512}$. B. 1. C. 0. D. $\frac{513}{512}$.

Câu 3: Hàm số $y = (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x - 3)$ có giá trị lớn nhất là:

- A. có giá trị lớn nhất là 0. B. có giá trị lớn nhất là -8.
C. có giá trị lớn nhất là 2. D. không có giá trị lớn nhất.

Câu 4: Hàm số $y = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 3]$ là:

- A. 10; $-\frac{9}{4}$. B. 120; 1. C. 10; -1. D. 120; -1.

Câu 5: Hàm số $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+3} + \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x+3}$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất là:

- A. $2\sqrt{2}-2$; 2. B. $2\sqrt{2}+2$; 2. C. $2\sqrt{2}$; 2. D. 2; 0.

Câu 6: Hàm số $y = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} + 2\sqrt{4-x^2}$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất tại điểm có hoành độ là:

- A. $2\sqrt{2}+4$; 2. B. $2\sqrt{2}-2$; 2. C. $2\sqrt{2}$; 2. D. 4; 2.

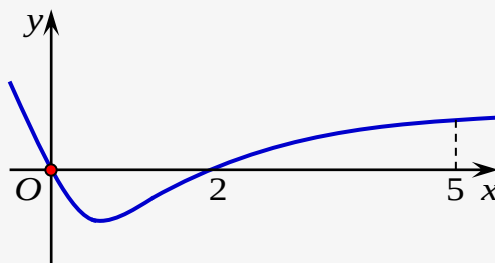
Câu 7: Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a . Người ta dựng một hình chữ nhật $MNPQ$ có cạnh MN nằm trên BC , hai đỉnh P, Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác. Xác định vị trí của điểm M sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất?

- A. $BM = \frac{2a}{3}$. B. $BM = \frac{3a}{4}$. C. $BM = \frac{a}{3}$. D. $BM = \frac{a}{4}$.

Câu 8: Trong các hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính R , hình trụ có thể tích lớn nhất bằng

- A. $\frac{4\pi R^3}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$. C. $\frac{\pi R^3}{3\sqrt{3}}$. D. $\frac{4\pi R^3}{3}$.

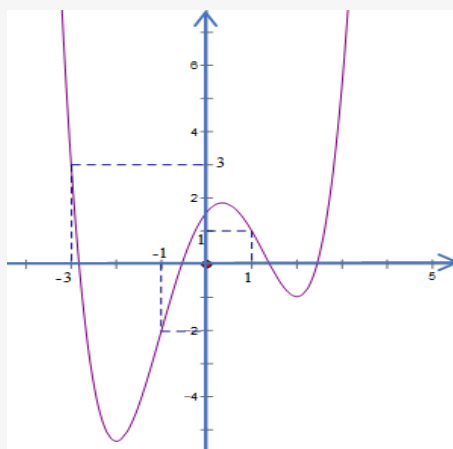
Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ lần lượt là:



- A. $f(2), f(5)$. B. $f(0), f(5)$. C. $f(0), f(2)$. D. $f(1), f(5)$.

Câu 10: [Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - KSCL - Lần 1 (2017 - 2018)] Cho đồ thị $y = f(x)$

có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$



Mệnh đề nào dưới đây đúng?.

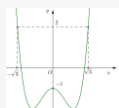
- A. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$. B. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(1)$.

- C. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$. D. $\min_{[-3;1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$.

Câu 11: Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[-1; 1]$ thỏa mãn $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $\forall x \in [-1; 1]$ và $f'(x) \geq g'(x) \geq 0$, $\forall x \in [-1; 1]$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = 2f(x)g(x) - g^2(x)$ trên đoạn $[-1; 1]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $m = h(-1)$. B. $m = h(0)$. C. $m = \frac{h(-1) + h(1)}{2}$. D. $m = h(1)$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ



Đặt $g(x) = 3f(x) - x^3 + 3x - m$, với m là tham số thực. Điều kiện cần và đủ để bất phương trình $g(x) \geq 0$ đúng với $\forall x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ là

- A. $m \leq 3f(\sqrt{3})$. B. $m \leq 3f(0)$. C. $m \geq 3f(1)$. D. $m \geq 3f(-\sqrt{3})$

Câu 13: Cho x, y là hai số không âm thỏa mãn $x + y = 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + y^2 - x + 1$ là

- A. $\min P = \frac{7}{3}$. B. $\min P = 5$. C. $\min P = \frac{17}{3}$. D. $\min P = \frac{115}{3}$.

Câu 14: [THCS, THPT Nguyễn Khuyến - KT Định kỳ - Lan 2 (2017 - 2018)] [016] Cho $x \geq 0$; $y \geq 0$ và $x + 3y = 4$. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $P = \frac{x}{x+1} + \frac{3y}{1+y}$ lần lượt là:

- A. 2; không có giá trị nhỏ nhất. B. 2; $\frac{4}{5}$..
C. $\frac{4}{5}$; 2..
D. không có giá trị lớn nhất; $\frac{4}{5}$.

Câu 15: [THCS, THPT Nguyễn Khuyến - KT Định kỳ - Lan 2 (2017 - 2018)] [013] Cho $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{x^2 + 6xy}{1 + 2xy + 2y^2}$.

- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{3}{\sqrt{2}}$. C. $\frac{6}{\sqrt{2}}$. D. $\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

Câu 16: [THCS, THPT Nguyễn Khuyến - KT Định kỳ - Lan 2 (2017 - 2018)] [027] Cho $P = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}$, với $x^2 + y^2 \neq 0$. Giá trị nhỏ nhất của P là

- A. 3. B. 1. C. 4. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 17: Cho các số thực dương x, y . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{4xy^2}{\left(x + \sqrt{x^2 + 4y^2}\right)^3}$.

- A. $\text{Max} P = 1$. B. $\text{Max} P = \frac{1}{10}$. C. $\text{Max} P = \frac{1}{8}$. D. $\text{Max} P = \frac{1}{2}$.

Câu 18: Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x - y)^2$ là:

- A. $\text{Max} P = 8$. B. $\text{Max} P = 12$. C. $\text{Max} P = 16$. D. $\text{Max} P = 4$.

Câu 19: Cho các số thực x, y thỏa mãn $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 + 2xy \leq 32$. Giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $A = x^3 + y^3 + 3(xy - 1)(x + y - 2)$ là:

- A. $m = 16$. B. $m = 0$. C. $m = \frac{17 - 5\sqrt{5}}{4}$. D. $m = 398$.

Câu 20: Xét hai số x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 + 4x + \sqrt{1 + (x + 2)^4} = \sqrt{y^4 - 8y^2 + 17}$. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $P = x^2 + y^2$. Tính $M(1 + m)$

- A. $M(1 + m) = 8$. B. $M(1 + m) = 12$. C. $M(1 + m) = 16$. D. $M(1 + m) = 4$.

Câu 21: Xét các số thực x, y, z thỏa mãn $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 8 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = x^3 + y^3 + z^3.$$

- A. $\frac{176}{9}$. B. 16. C. 17. D. $\frac{167}{9}$.

Câu 22: Cho x, y là hai số thực thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + xy + 4 = 4y + 3x$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 3(x^3 - y^3) + 20x^2 + 2xy + 5y^2 + 39x$.

- A. 100. B. 66. C. 110. D. 90.

Câu 23: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\cos \frac{x}{2} + \sin x + 1$.

- A. $1 - 2\sqrt{3}$. B. $\frac{2 - 5\sqrt{3}}{2}$. C. -1. D. $\frac{2 - 3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 24: [Chuyên Lê Quý Đôn - BRVT - KT Chuyên đề - Lần 1 (2017 - 2018)] Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = 2\sin^3 x + \cos 2x$ trên tập $D = \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$

A. $\max_{x \in D} f(x) = 1, \min_{x \in D} f(x) = \frac{19}{27}$.

B. $\max_{x \in D} f(x) = \frac{3}{4}, \min_{x \in D} f(x) = -3$.

C. $\max_{x \in D} f(x) = \frac{3}{4}, \min_{x \in D} f(x) = \frac{19}{27}$.

D. $\max_{x \in D} f(x) = 1, \min_{x \in D} f(x) = -3$.

Câu 25: [Luyện thi THPT.QG - Nguyễn Thanh Tùng - Lần 1 (2017 - 2018)] Cho hàm số $y = 3 + \sin 2x + 2(\sin x + \cos x)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất lần lượt là M, m . Khi đó giá trị M, m bằng bao nhiêu?

A. $M = 4 + 2\sqrt{2}; m = 1$. B. $M = 4 + 2\sqrt{2}; m = 4 - 2\sqrt{2}$.

C. $M = 4 - 2\sqrt{2}; m = 1$. D. $M = 4 + 2\sqrt{2}; m = 2\sqrt{2} - 4$.

Câu 26: Cho $x, y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa $\cos 2x + \cos 2y + 2\sin(x+y) = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{\sin^4 x}{y} + \frac{\cos^4 y}{x}.$$

A. $\min P = \frac{3}{\pi}$.

B. $\min P = \frac{2}{\pi}$.

C. $\min P = \frac{2}{3\pi}$.

D. $\min P = \frac{5}{\pi}$.

Câu 27: Hàm số $f(x) = |8x^4 - 8x^2 + 1|$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 1]$ tại bao nhiêu giá trị của x ?

A. 3.

B. 2.

C. 5.

D. 4.

Câu 28: Tìm câu sai trong các mệnh đề sau về GTLN và GTNN của hàm số $y = |x^3 - 3x + 1|, x \in [0; 3]$.

A. Hàm số có GTLN và GTNN.

B. $\min y = 1$.

C. $\max_{[0; 3]} y = 19$.

D. Hàm số đạt GTLN tại $x = 3$.

Câu 29: [THPT Bùi Thị Xuân - TP.HCM - Thi HKI (2016 - 2017)] Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^3 - 9x^2 + 24x - 68|$ trên đoạn $[-1; 4]$.

A. 48.

B. 52.

C. -102.

D. 0.

Câu 30: Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y + 1 = 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3})$. Giá trị lớn nhất của $x + y$ là

A. 7.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 31: [Chuyên Lê Quý Đôn - BRVT - KT Chuyên đề - Lần 1 (2017 - 2018)] Xét ba số dương a, b, c thay đổi thỏa mãn $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 13$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$.

- A. $\min P = 31$. B. $\min P = 32$. C. $\min P = 33$. D. $\min P = 34$.

Câu 32: [Chuyên Lê Quý Đôn - BRVT - KT Chuyên đề - Lần 1 (2017 - 2018)] Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^2 - 2(m+1)x + m^2 - m$ trên đoạn $[1; 3]$ là -3 . Tính tổng tất cả phần tử của S .

- A. $\frac{20}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{29}{3}$. D. $\frac{7}{3}$.

Câu 33: [Chuyên Lê Quý Đôn - BRVT - KT Chuyên đề - Lần 1 (2017 - 2018)] Cho biết giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4mx + 2m^2} + |x|$ là $\min_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $|m| \in \left[\frac{1}{10}; \frac{3}{10}\right]$. B. $|m| \in \left[\frac{3}{10}; \frac{5}{10}\right]$. C. $|m| \in \left[\frac{5}{10}; \frac{7}{10}\right]$. D. $|m| \in \left[\frac{7}{10}; \frac{9}{10}\right]$.

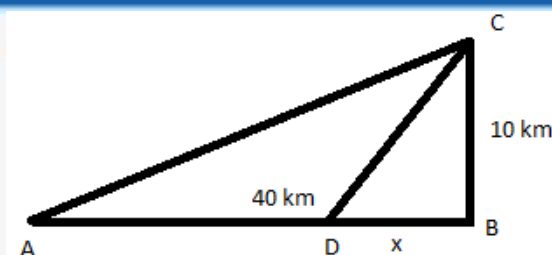
Câu 34: [THPT Chu Văn An - Hà Nội - Thi HKI (2016 - 2017)] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để bất phương trình $a\sqrt{x^2 + 6} < x + a$ nghiệm đúng với mọi giá trị thực của x .

- A. $a < 1$.. B. $a < -1$.. C. $a < -\frac{\sqrt{30}}{5}$.. D. $a = \frac{\sqrt{30}}{5}$.

Câu 35: Thầy Hồng dự định xây một bồn hoa có bề mặt là hình tròn có đường kính $AB = 10m$, để cho ấn tượng thầy Hồng thiết kế có hai hình tròn nhỏ trong hình tròn lớn bằng cách lấy điểm M giữa A và B rồi dựng các đường tròn đường kính MA và MB . Trong hai đường tròn nhỏ thầy định trồng loại hoa hồng đỏ, còn phần còn lại thầy trồng hoa hồng trắng. Biết giá hoa hồng đỏ là 5.000 đồng, hoa hồng trắng là 4.000 đồng và ít nhất $0.5 m^2$ mới trồng được một bông hoa. Hỏi chi phí thấp nhất để trồng hoa của thầy là bao nhiêu?

- A. 752000 đồng. B. 706858 đồng. C. 702000 đồng. D. 622000 đồng.

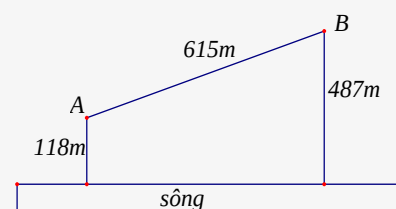
Câu 36: Một người cần đi từ khách sạn A bên bờ biển đến hòn đảo C . Biết rằng khoảng cách từ hòn đảo C đến bờ biển là 10 km, khoảng cách từ khách sạn A đến điểm gần nhất tính từ đảo C vào bờ là 40 km. Người đó có thể đi đường thủy hoặc đi đường bộ rồi đi đường thủy (như hình vẽ dưới đây). Biết kinh phí đi đường thủy là 5 USD/km, đường bộ là 3 USD/km. Hỏi người đó phải đi đường bộ khoảng bao nhiêu để kinh phí nhỏ nhất? ($AB = 40km, BC = 10km$).



- A. 10 km. B. $\frac{15}{2}$ km. C. $\frac{65}{2}$ km. D. 40 km.

Câu 37: Cho hai vị trí A, B cách nhau $615m$, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ. Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là $118m$ và $487m$. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B . Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi là:

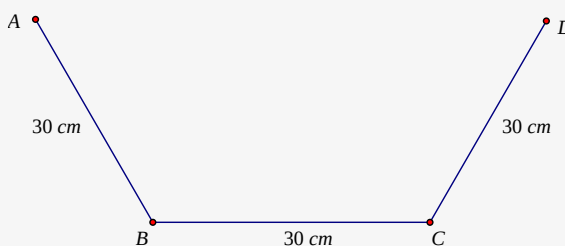
- A. $569,5m$.
B. $671,4m$.
C. $779,8m$.
D. $741,2m$



Câu 38: Một màn ảnh chữ nhật cao $1,4m$ được đặt ở độ cao $1,8m$ so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng sao cho góc nhìn lớn nhất. Hãy xác định vị trí đó? (góc BOC gọi là góc nhìn).

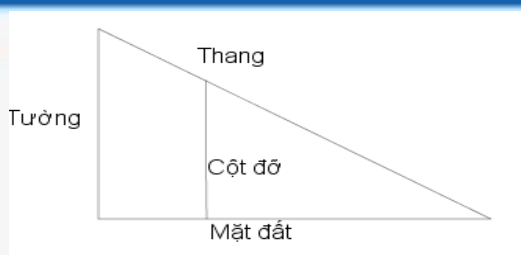
- A. $AO = 2,6m$. B. $AO = 2,4m$. C. $AO = 1,4m$. D. $AO = 2m$.

Câu 39: Từ một tấm tôn có kích thước $90cm \times 3m$, người ta làm một máng xối nước trong đó mặt cắt là hình thang $ABCD$ có hình dưới. Tính thể tích lớn nhất của máng xối.



- A. $40500\sqrt{6} \text{ cm}^3$. B. $40500\sqrt{5} \text{ cm}^3$. C. $202500\sqrt{3} \text{ cm}^3$. D. $40500\sqrt{2} \text{ cm}^3$.

Câu 40: Tính chiều dài nhỏ nhất của cái thang để nó có thể dựa vào tường và mặt đất, bắc qua một cột đỡ cao $4m$. Biết cột đỡ song song và cách tường $0,5m$, mặt phẳng chứa tường vuông góc với mặt đất- như hình vẽ, bỏ qua độ dày của cột đỡ.



A. $\frac{5\sqrt{3}}{2}..$

B. $\frac{5\sqrt{5}}{2}..$

C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}..$

D. $\frac{3\sqrt{5}}{2}.$

Câu 41: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{(m+1)x + m - 1}{x+1} \right|$ trên đoạn $[-3; -2]$ bằng $\frac{1}{2}$.

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 6.

Câu 42: (Bài tập tương tự) Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m|$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 5.

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 6.

Câu 43: Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $9x^3 + (2 - y\sqrt{3xy-5})x + \sqrt{3xy-5} = 0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^3 + y^3 + 6xy + 3(3x^2 + 1)(x + y - 2)$

A. $\frac{296\sqrt{15}-18}{9}.$

B. $\frac{36+296\sqrt{15}}{9}.$

C. $\frac{36+296\sqrt{15}}{9}.$

D. $\frac{-4\sqrt{6}+18}{9}.$

Câu 44: Cho các số thực x, y thỏa mãn $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \leq 32$.

Giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $A = x^3 + y^3 + 3(xy-1)(x+y-2)$ là :

A. $m = \frac{17-5\sqrt{5}}{4}.$

B. $m = 16.$

C. $m = 398.$

D. $m = 0$

Câu 45: Phương trình $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 6x^2 + 9x + m)2^{x-2} = 2^{x+1} + 1$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in (a; b)$. Đặt $T = b^2 - a^2$ thì:

A. $T = 36.$

B. $T = 48.$

C. $T = 64.$

D. $T = 72.$

Câu 46: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{(x+y)}(x^2 + y^2) \leq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức

là: $A = 48(x+y)^3 - 156(x+y)^2 + 133(x+y) + 4.$

- A. 29. B. $\frac{1369}{26}$. C. 30. D. $\frac{505}{36}$.

Câu 47: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ (C) và hai điểm $A(0;2)$, $B(1;2)$. M là điểm tùy ý thuộc đồ thị (C). Diện tích tam giác ABM nhỏ nhất bằng:

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. $\frac{3}{2}$. D. 2.

Câu 48: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^3 + x^2 + x}{(x^2 + 1)^2}$.

A. $\max_{\mathbb{R}} y = \frac{3}{4}; \min_{\mathbb{R}} = \frac{1}{4}$. B. $\max_{\mathbb{R}} y = \frac{1}{2}; \min_{\mathbb{R}} = -\frac{1}{2}$.

C. $\max_{\mathbb{R}} y = \frac{3}{4}; \min_{\mathbb{R}} = -\frac{1}{2}$. D. $\max_{\mathbb{R}} y = \frac{3}{4}; \min_{\mathbb{R}} y = -\frac{1}{4}$.

Câu 49: Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} - 4\sqrt{(x+4)(4-x)} + 5$.

A. $\max_{[-4;4]} y = 4; \min_{[-4;4]} = 2\sqrt{2}$.

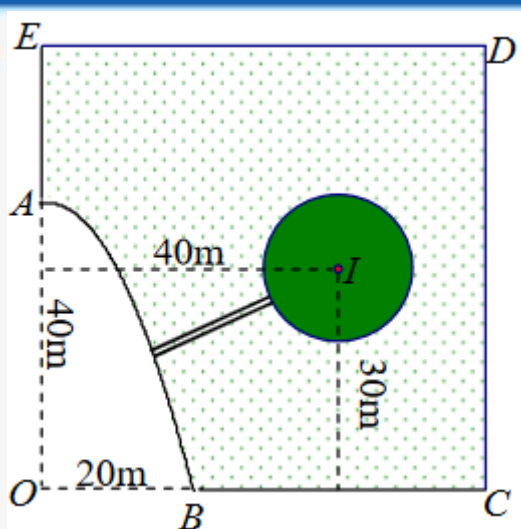
B. $\max_{[-4;4]} y = 5 + 2\sqrt{2}; \min_{[-4;4]} = -7$.

C. $\max_{[-4;4]} y = 4; \min_{[-4;4]} = -2\sqrt{2}$.

D. $\max_{[-4;4]} y = 4; \min_{[-4;4]} = -7$.

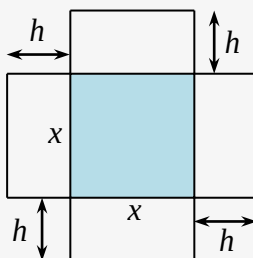
Câu 50: Một cái ao hình $ABCDE$ (như hình vẽ), ở giữa ao có một mảnh vườn hình tròn có bán kính 10m. Người ta muốn bắc một cầu từ bờ AB của ao đến vườn. Tính gần đúng độ dài tối thiểu l của cây cầu biết :

- Hai bờ AE và BC nằm trên hai đường thẳng vuông góc với nhau, hai đường thẳng này cắt nhau tại điểm O ;
- Bờ AB là một phần của một parabol có đỉnh là điểm A và có trục đối xứng là đường thẳng OA ;
- Độ dài đoạn OA và OB lần lượt là 40 m và 20 m;
- Tâm I của mảnh vườn lần lượt cách đường thẳng AE và BC lần lượt 40 m và 30 m.



- A. $l \approx 17,7$ m. B. $l \approx 25,7$ m. C. $l \approx 27,7$ m. D. $l \approx 15,7$ m.

Câu 51: Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo mẫu như hình vẽ. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh x cm, chiều cao h cm và có thể tích 500 cm^3 . Giá trị của x để diện tích của mảnh các tông nhỏ nhất bằng



- A. 100. B. 300.
C. 10. D. 1000.

Câu 52: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x \geq 0, y \geq 1; x + y = 3$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + 2y^2 + 3x^2 + 4xy - 5x$ lần lượt bằng:

- A. 20 và 18. B. 20 và 15. C. 18 và 15. D. 15 và 13.

Câu 53: (LẠNG GIANG SỐ 1) Cho x, y là các số dương thỏa mãn $xy \leq 4y - 1$. Giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{6(2x+y)}{x} + \ln \frac{x+2y}{y} \text{ là } a + \ln b. \text{ Giá trị của tích } ab \text{ là}$$

- A. 45. B. 81. C. 108. D. 115.

Câu 54: Cho hai số thực $x \neq 0, y \neq 0$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$. Giá trị lớn nhất M của biểu thức $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$ là:

A. $M = 0$.

B. $M = 1$.

C. $M = 14$.

D. $M = 16$.

Câu 55: Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y = 2(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3})$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4(x^2 + y^2) + 15xy$ là:

A. $\min P = -83$.

B. $\min P = -63$.

C. $\min P = -80$.

D. $\min P = -91$.

Câu 56: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

A. 2.250.000.

B. 2.350.000.

C. 2.450.000.

D. 2.550.000.

Câu 57: Tìm tất cả các giá trị thực khác 0 của tham số m để hàm số $y = \frac{mx}{x^2 + 1}$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$ trên đoạn $[-2; 2]$?

A. $m = -2$.

B. $m < 0$.

C. $m > 0$.

D. $m = 2$.

Câu 58: Cho $x > 0$ và y tùy ý. Tìm giá trị lớn nhất của: $M = \frac{xy^2}{(x^2 + 3y^2)(x + \sqrt{x^2 + 12y^2})}$

A. $M = 0$

B. $M = \frac{1}{2}$.

C. $M = \frac{1}{6}$.

D. $M = \frac{1}{8}$

Câu 59: Cho các số thực không âm x, y thay đổi và thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = (4x^3 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$

A. $M = \frac{25}{2}$

B. $M = 15$.

C. $M = \frac{261}{16}$.

D. $M = \frac{191}{16}$.

Câu 60: Cho hai số thực $x \geq 1, y \geq 1$ và thỏa mãn $\frac{(x+y)^3}{2xy} + 6(\frac{x}{y} + \frac{7}{2x}) + 6(\frac{y}{x} + \frac{7}{2y}) + \frac{20}{xy} + 18 = 4x^2y^2$.

Gọi M là giá trị lớn nhất của biểu thức $x + y$. Giá trị của M là

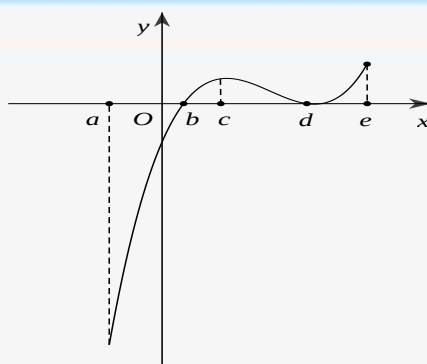
A. $M = 2$

B. $M = 10$.

C. $M = 8$.

D. $M = 6$

Câu 61: [2D1-3.1-3] (THPT Chuyên-Thái Nguyên-Lần 2-2018) Cho a, b, c, d, e là các số thực. Hàm số xác định, liên tục trên và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Biết $f(a) + f(c) = f(b) + f(d)$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[a; e]$ lần lượt là:

- A. $f(e)$ và $f(b)$. B. $f(c)$ và $f(a)$.
C. $f(d)$ và $f(b)$. D. $f(a)$ và $f(b)$.

Câu 62: [2D1-3.1-3] (THPT Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - Lần 2 - 2018) Gọi S là tập tất các các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

- A. 210. B. 105. C. -195. D. 300.

Câu 63: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-1}{x+m}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{3}$ trên $[0; 2]$.

- A. $m = 1$. B. $m = 3$. C. $m = -3$. D. $m = -1$.

Câu 64: (Trương tự câu 1) Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + m$ (Với m là tham số thực). Biết m thỏa mãn giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0; 3]$ bằng -7 . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m > 5$. B. $m < -5$. C. $m = 2$. D. $-4 \leq m \leq 4$.

Câu 65: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{18+3x-x^2} \leq m^2 - m + 1$ nghiệm đúng với $\forall x \in [-3; 6]$.

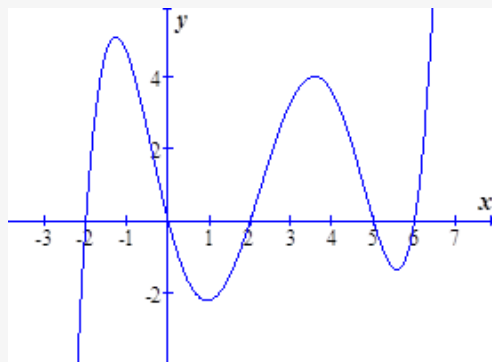
- A. $m \geq -1$. B. $-1 \leq m \leq 0$. C. $0 \leq m \leq 2$. D. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{cases}$.

Câu 66: (Trương tự câu 3) Tìm giá trị của tham số m để bất phương trình $x - \sqrt{x-1} < m$ có nghiệm.

- A. $m > 1$. B. $m > \frac{3}{4}$. C. $m < \frac{3}{4}$. D. $m < 1$.

Câu 67: (Tương tự câu 5) Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.

Đặt $M = \max_{[-2;6]} f(x)$, $m = \min_{[-2;6]} f(x)$; Đặt $T = M + m$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $T = f(5) + f(-2)$. **B.** $T = f(0) + f(2)$. **C.** $T = f(0) + f(-2)$. **D.** $T = f(5) + f(6)$.

Câu 68: Cho x, y là hai số dương thỏa mãn: $x + y = \frac{5}{4}$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y}.$$

A. $\sqrt{\frac{9801}{400}}$

B. $\frac{1}{4}$

C. 5

D. 1

Câu 69: (Tương tự câu 7) Cho x, y là hai số không âm thỏa mãn điều kiện $x + y = 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + y^2 - x + 1$ bằng.

A. $\frac{7}{3}$

B. 5

C. $\frac{17}{3}$

D. $\frac{115}{3}$

Câu 70: Xét phương trình $ax^3 - x^2 + bx - 1 = 0$ với a, b là các số thực, $a \neq 0$, $a \neq b$ sao cho 3 nghiệm đều là số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{5a^2 - 3ab + 2}{a^2(b - a)}$.

A. $15\sqrt{3}$.

B. $8\sqrt{2}$.

C. $11\sqrt{6}$.

D. $12\sqrt{3}$.

Câu 71: (Tương tự câu 9) Giả sử phương trình $x^3 - (a+b)x^2 + \frac{(a+b)^2 - 1}{2}x + 1 = 0$ có ba nghiệm.

Gọi M, m là GTLN và GTNN của $P = \frac{a^2 + b^2 - 1}{2} + ab$. Khi đó $M + m$ bằng

A. 1.

B. $\frac{1}{2}$.

C. -1.

D. 2.

Câu 72: Trên đoạn $[-2;2]$, hàm số $y = \frac{mx}{x^2 + 1}$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$ khi và chỉ khi:

- A. $m = 2$. B. $m \geq 0$. C. $m = -2$. D. $m < 0$.

Câu 73: [2D1-3.11-3] (THPT CHUYÊN ĐH VINH - LẦN 3 - 2018) Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = mx + \frac{36}{x+1}$ trên $[0;3]$ bằng 20. Mệnh đề nào sau đây đúng?

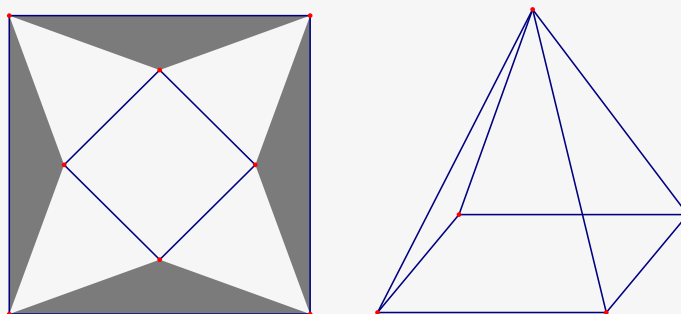
- A. $0 < m \leq 2$. B. $4 < m \leq 8$. C. $2 < m \leq 4$. D. $m > 8$.

Câu 74: [2H1-3] [Chuyên KHTN, Hà Nội, lần 2, năm 2018 - Câu 4]

Cho một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $10m \times 6m$. Người ta cắt bỏ bốn góc của tấm tôn bốn miếng hình vuông bằng nhau rồi gò lại thành một hình hộp chữ nhật không nắp. Để thể tích của khối hộp đó lớn nhất thì độ dài của cạnh hình vuông của các miếng tôn bị cắt bỏ bằng.

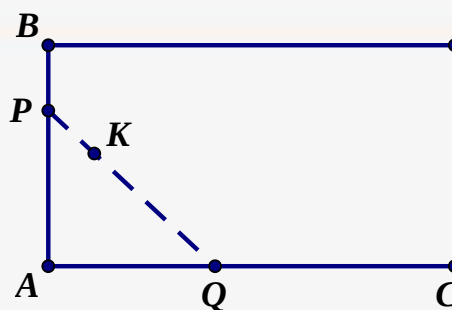
- A. Đáp án khác. B. $4m$. C. $5m$. D. $6m$.

Câu 75: [2H1-4] Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh $1m$ như hình vẽ dưới đây. Người ta cắt phần tô đậm của tấm nhôm rồi gập thành một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng x (m), sao cho bốn đỉnh của hình vuông gập lại thành đỉnh của hình chóp. Giá trị của x để khối chóp nhận được có thể tích lớn nhất là



- A. $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$. B. $x = \frac{1}{2}$. C. $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 76: [2D1-3.14-3] (TRẦN PHÚ - HÀ TĨNH - LẦN 2 - 2018) Một cái hồ rộng có hình chữ nhật. Tại một góc nhỏ của hồ người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là $1m$ và cách bờ AC là $8m$, rồi dùng một cây sào ngăn một góc nhỏ của hồ để thả bè (như hình vẽ). Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB , AC và cây cọc K (bỏ qua đường kính của sào).



- A. $\frac{5\sqrt{65}}{4}$. B. $5\sqrt{5}$. C. $9\sqrt{2}$. D. $\frac{5\sqrt{71}}{4}$.

Câu 77: [2D1-3.2-3] Cho x, y là hai số thực thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + xy + 4 = 4y + 3x$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 3(x^3 - y^3) + 20x^2 + 2xy + 5y^2 + 39x$.

- A. 100. B. 66. C. 110. D. 90.

Câu 78: [2D1-3.12-3] (THPT KINH MÔN - HẢI DƯƠNG - LẦN 1 - 2018) Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x - y)^2$ là:

- A. $\max P = 8$. B. $\max P = 16$. C. $\max P = 12$. D. $\max P = 4$.

Câu 79: [2D1-3.1-4] (SGD Bắc Giang - 2018) Tập hợp nào sau đây chứa tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m|$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 5

- A. $(-5; -2) \cup (0; 3)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(-6; -3) \cup (0; 2)$. D. $(-4; 3)$.

Câu 80: [2D1-3.1-4] (Sở GD&ĐT Quảng Nam - KSCL lớp 12 - Năm 2018) Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ bằng 4.

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Chủ đề: TIỆM CẬN (VD - VDC)

Dạng 1: Bài toán xác định số tiệm cận của đồ thị hàm số cụ thể không chứa tham số.

Câu 1: [2D1-3] Cho hàm số $y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. Đồ thị hàm số chỉ có hai tiệm cận trong đó có tiệm cận ngang là $y = 1$ và tiệm cận đứng là $x = 0$.
- B. Đồ thị có hai tiệm cận ngang.
- C. Đồ thị chỉ có một tiệm cận đứng $x = 0$.
- D. Đồ thị hàm số chỉ có hai tiệm cận trong đó có tiệm cận ngang là $y = -1$ và tiệm cận đứng là $x = 0$.

Câu 2: [2D1-3] Đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 10} + x$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 3: [2D1-3] [THPT Quảng Xương 1 lần 2] Số các đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$ là:

A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 4: [2D1-3] (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị $y = \frac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}$ là:

A. 2. B. 3. C. 4. D. 1.

Câu 5: [2D1-3] [THPT Lê Hồng Phong] Tổng số các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2017\sqrt{5-x^2}}{x^2-5x+6}$ bằng?

A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 6: [2D1-3] [THPT chuyên Phan Bội Châu lần 2] Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị $y = \frac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}$ là.

A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 7: [2D1-3] [THPT chuyên Lương Thế Vinh] Số tiệm cận của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2-x}}$.

A. hai. B. bốn. C. một. D. ba.

Câu 8: [2D1-3] [TTGDTX Cam Ranh - Khánh Hòa] Đồ thị của hàm số nào sau đây có đúng 1 tiệm cận?

A. $y = x^4 + x^2 + 1$. B. $y = \sqrt{x-1} - \sqrt{x+2}$.

C. $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$. D. $y = \frac{2x - 1}{x + 2}$.

Câu 9: [2D1-3] [TTGDTX Cam Lâm - Khánh Hòa] Đồ thị hàm số nào sau đây có đúng hai tiệm cận ngang?

A. $y = \frac{|x| - 2}{x + 1}$. B. $y = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x + 1}$. C. $y = \frac{\sqrt{x^2 - x}}{|x| + 2}$. D. $y = \frac{\sqrt{x + 2}}{|x| - 2}$.

Câu 10: [2D1-3] [THPT Yên Lạc-VP] Tìm tất cả các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$y = \frac{\sqrt{5 - x^2} - 3x^2 - 2x + 3}{x^2 - 4x + 3}$.

A. $x = 1$ và $x = 3$. B. $x = 3$. C. Không có. D. $x = 1$.

Dạng 2: Bài toán xác định tiệm cận của đồ thị hàm số có bảng biến thiên cho trước. (5 câu)

Câu 11: [2D1-2] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây **sai**?

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y	0	1	$-\infty$	0

- A. Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.
 B. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 1$.
 C. $\lim_{x \rightarrow 1} y = -\infty$.
 D. Đồ thị hàm số $y = f(x) - 1$ có đường tiệm cận ngang là $y = 0$.

Câu 12: [2D1-2] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây **sai**?

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y	0	3	$-\infty$	1

- A. Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.
 B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$.

C. Phương trình $f(x)=1$ có 3 nghiệm phân biệt.

D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (y-1) = 0$.

Câu 13: [2D1-3] Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm tổng số tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{f(x)+1}{x}$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	5			-1		3	1

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Câu 14: [2D1-3] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2; +\infty)$, có đạo hàm trên $-2; +\infty$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	-1	0	$+\infty$
y'				+	0 - -
y				2	0 -2 -3

Tìm tổng số tiệm cận đứng và ngang của hàm số $y = \frac{f(x)[f(x)-2]}{x^2(x+1)}$

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Câu 15: [2D1-3] Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm tổng số tiệm cận đứng và ngang của hàm số $y = xf\left(\frac{1}{x}\right)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	5			0		3	1

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Dạng 3: Cho bảng biến thiên của hàm số $f(x)$. Xác định tiệm cận của đồ thị hàm hợp của $f(x)$.

Loại 1: Hàm hợp $y = g(f(x))$.

Câu 16: [2D1-3] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	2	$+\infty$	3	$-\infty$	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 0. B. 4. C. 2. D. 1.

Câu 17: [2D1-4] Cho hàm số $y = f(x)$ có BBT như sau

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	5	0	$+\infty$	

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x - 2}{f^2(x) - 5f(x)}$ là

- A. 3. B. 4. C. 1. D. 2.

Câu 18: [2D1-4] Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên.

Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{2x + 1}}{(x^4 - 5x^2 + 4) \cdot f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

x	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 5$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$	

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 6.

Câu 19: [2D1-4] Cho hàm bậc bốn $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	0	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{5}{3}$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow 0$	$\nearrow \frac{1}{4}$	$\searrow 0$	$\searrow -\frac{1}{2}$	$\nearrow 0$	$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{f^2(x)\sqrt{x^2+x}}{[f^2(x)-2f(x)](2x^5+x^4-10x^3-5x^2+8x+4)}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng và ngang?

A. 7.

B. 6.

C. 5.

D. 4.

Câu 20: [2D1-3] Hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus -2; 2$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	-	-	0	+	+
y	$+\infty$	$\searrow -\infty$	$\nearrow 0$	$\nearrow +\infty$	$\searrow -1$

Gọi k, l lần lượt là số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$y = \frac{1}{f(x) - 2018}$. Tính $k+l$.

A. $k+l=2$.

B. $k+l=3$.

C. $k+l=4$.

D. $k+l=5$.

Câu 21: [2D1-3] Hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		$-$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$

Biểu đồ biến thiên: Từ $-\infty$ đến -1 , y giảm từ $+\infty$ xuống $-\infty$. Tại $x = -1$, y có cực tiểu $+\infty$. Từ -1 đến 0 , y tăng từ $+\infty$ xuống 0 . Tại $x = 0$, y có cực đại 0 . Từ 0 đến 1 , y giảm từ 0 xuống $+\infty$. Tại $x = 1$, y có cực tiểu $+\infty$. Từ 1 đến $+\infty$, y tăng từ $+\infty$ xuống -2 .

Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc đoạn $[-10; 10]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{2018}{f(x) - m}$ có đúng 2 tiệm cận đứng?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 8.

Câu 22: [2D1-3] Cho hàm số $y = f(x)$ xác định liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây :

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$+$
y	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	2	$+\infty$

Biểu đồ biến thiên: Từ $-\infty$ đến -3 , y tăng từ $-\infty$ xuống $-\infty$. Tại $x = -3$, y có cực tiểu $-\infty$. Từ -3 đến -2 , y giảm từ $-\infty$ xuống $+\infty$. Tại $x = -2$, y có cực đại $+\infty$. Từ -2 đến -1 , y tăng từ $+\infty$ xuống 2 . Tại $x = -1$, y có cực tiểu 2 . Từ -1 đến $+\infty$, y giảm từ 2 xuống $+\infty$.

Có bao nhiêu giá trị m nguyên, khác 0 , để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{f(x) - m}{f(x) + m}$ chỉ có tiệm cận ngang mà không có tiệm cận đứng.

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 8.

Câu 23: [2D1-3] Cho hàm số $y = f(x)$ xác định liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây :

x	$-\infty$	-5	-1	1	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$+$
y	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	3	$+\infty$

Biểu đồ biến thiên: Từ $-\infty$ đến -5 , y tăng từ $-\infty$ xuống $-\infty$. Tại $x = -5$, y có cực tiểu $-\infty$. Từ -5 đến -1 , y giảm từ $-\infty$ xuống $+\infty$. Tại $x = -1$, y có cực đại $+\infty$. Từ -1 đến 1 , y tăng từ $+\infty$ xuống 3 . Tại $x = 1$, y có cực tiểu 3 . Từ 1 đến $+\infty$, y giảm từ 3 xuống $+\infty$.

Tính tổng tất cả các giá trị m nguyên thuộc $[-10;10]$ để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{|f(x)|-m}$ có tất cả 5 tiệm cận

- A. 45. B. 27. C. 34. D. 40.

Loại 2: Hàm hợp $y = g(f(u(x)))$

Câu 24: [2D1-3]. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y			3		0	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(2-x)-2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 25: [2D1-3]. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	2	4	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y		3	0	3	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(4-x^2)-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 26: [2D1-3]. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$, có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	$-$	0	$+$	$-$
y	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	2

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(2x-3)+2}$ là

- A. 5. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 27: [2D1-3]. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$ $-\infty$	2

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f^2(x-2)-1}$ là

A. 5.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Dạng 4: TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA THAM SỐ ĐỂ ĐỒ THỊ HÀM SỐ CÓ SỐ TIỆM CẬN CHO TRƯỚC

Ở đây ta chỉ xét đến hai loại tiệm cận: tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.

1. Cơ sở lý thuyết

□ Tiệm cận ngang: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0.$$

□ Tiệm cận đứng: Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty.$$

□ Các quy tắc tính giới hạn.

2. Phương pháp

□ Tìm tập xác định của hàm số (hoặc điều kiện xác định của hàm số).

□ Nếu tập xác định “không chứa ký hiệu vô cực” thì hàm số không có tiệm cận ngang, nếu “có chứa ký hiệu vô cực” thì phải tìm giới hạn của hàm số (khi x tiến tới $+\infty$ hoặc $-\infty$) theo định nghĩa để tìm tiệm cận ngang.

□ Nếu tập xác định “có chứa điểm dính” (điểm không thuộc tập xác định nhưng có dãy số tiến tới nó) thì ta tìm giới hạn của hàm số khi x tiến tới điểm dính theo định nghĩa để tìm tiệm cận đứng (thường những điểm đó hàm số không xác định, hoặc cụ thể hơn là thường làm cho mẫu bằng 0).

3. Các ví dụ minh họa.

Câu 28: [2D1-3] Biết đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{(mx^2-2x+1)(4x^2+4mx+1)}$ có đúng 1 đường tiệm cận.

Khi đó m thuộc tập nào sau đây?

- A. $(-1;2)$. B. $(-\infty;-1)$. C. $\emptyset$. D. $(2;+\infty)$.

Câu 29: [2D1-3] [THPT Chuyên Bình Long – 2017] Với giá trị nào của m , đồ thị hàm số $y = \frac{x+1-\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2}$ có đúng hai đường tiệm cận?

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \\ m \neq -3 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m \leq -2 \\ m \neq -3 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{cases}$.

Câu 30: [2D1-3] [THPT CHUYÊN VINH – 2017] Tìm tất cả các giá trị của tham số a để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+a}{x^3+ax^2}$ có 3 đường tiệm cận.

- A. $a \neq 0, a \neq -1$. B. $a > 0$. C. $a < 0, a \neq -1$. D. $a \neq 0, a \neq \pm 1$.

Câu 31: [2D1-3] Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây thì đồ thị hàm số $y = 2x + \sqrt{mx^2 - x + 1} + 1$ có tiệm cận ngang?

- A. $m \in (3;6)$. B. $m \in (-1;3)$. C. $m \in (-3;-1)$. D. $m \in (-6;-3)$.

Câu 32: [2D1-3] Có bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2+3mx+1}}{x+2}$ có ba tiệm cận?

- A. Vô số. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 33: [2D1-3] Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2+1} - \frac{m}{2}x$ có tiệm cận ngang.

- A. 0. B. 1. C. Vô số. D. 2.

Câu 34: [2D1-4] [Sở GD Trà Vinh – Năm 2017 - 2018] Cho hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{ax^2+1}}$ có đồ thị (C) .

Tìm tất cả các giá trị của tham số a để đồ thị của hàm số có đường tiệm cận, đồng thời đường tiệm cận đó cách tiếp tuyến của (C) một khoảng bằng $\sqrt{2}-1$.

- A. $a > 0$. B. $a = 2$. C. $a = 3$. D. $a = 1$.

Dạng5: Tìm điều kiện của tham số để đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=a, y=b$ làm tiệm cận

Câu 35: [2D1-3] [Sở Hải Dương – 2017] Biết đồ thị hàm số $y = \frac{(2m-n)x^2 + mx + 1}{x^2 + mx + n - 6}$ nhận trục

hoành và trục tung làm hai đường tiệm cận. Tính $m+n$.

- A. 2. B. -6. C. 8. D. 9.

Câu 36: [2D1-3] Cho hàm số $y = \sqrt{ax^2 + bx} - 2x$. Đặt $P = a+b$. Tìm P biết hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = 2$.

- A. $P = 3$. B. $P = 12$. C. $P = 8$. D. $P = 0$.

Dạng 6: Bài toán tiệm cận và diện tích, khoảng cách...và bài toán tổng hợp

Nhận xét:

Ở các dạng bài toán trên ta thường xét hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất và lý thuyết tiệm cận thường gắn cùng bài toán tiếp tuyến. Bài toán có thể được cho dưới nhiều dạng, nhiều cách hỏi khác nhau song để giải quyết, hầu hết ta đều quy về việc tìm tọa độ tiếp điểm M . Ta có thể khái quát việc tìm M theo quy trình cơ bản sau:

+) Giả sử $M(m, f(m)) \in (C)$, khi đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại M có dạng:

$$(\Delta): y = f'(m)(x-m) + f(m).$$

+) Tìm tọa độ các giao điểm A, B của tiếp tuyến với các đường tiệm cận. (Các giao điểm này có tọa độ tính theo tham số m)

+) Dựa vào giả thiết của bài toán, ta xây dựng một phương trình theo tham số m rồi tìm m và kết luận.

Lưu ý

+) Nếu yêu cầu bài toán là tiếp tuyến cắt các đường tiệm cận tạo thành tam giác IAB có diện tích cho trước (I là giao các đường tiệm cận) thì ta sử dụng công thức $S_{IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB$. (Ta sẽ

chứng minh được diện tích tam giác IAB là một số không đổi).

+) Nếu yêu cầu là tiếp tuyến cắt các đường tiệm cận mà tam giác IAB vuông cân thì ta có thể sử dụng điều kiện vuông cân của tam giác hoặc quy về bài toán viết phương trình tiếp tuyến biết tiếp tuyến tạo với tiệm cận ngang một góc 45° , và chú ý rằng tiếp tuyến đó không được đi qua giao điểm của hai tiệm cận. Góc tạo bởi tiếp tuyến và tiệm cận đứng, tiệm cận ngang cũng chính là góc tạo bởi tiếp tuyến và các trục Ox, Oy .

+) Nếu yêu cầu tiếp tuyến cắt các đường tiệm cận mà tạo thành tam giác IAB có chu vi nhỏ nhất thì ta thường sử dụng đánh giá

$$C_{IAB} = IA + IB + AB = IA + IB + \sqrt{IA^2 + IB^2} \geq 2\sqrt{IA \cdot IB} + \sqrt{2IA \cdot IB}.$$

Do $IA \cdot IB$ không đổi nên chu vi tam giác IAB nhỏ nhất khi $IA = IB$.

Câu 37: [2D1-3] [208-BTN] Cho hàm số $(C): y = \frac{2x-3}{x-1}$. Gọi M là một điểm thuộc đồ thị và d là tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của đồ thị hàm số (C) . Giá trị nhỏ nhất của d có thể đạt được là:

- A. 2. B. 5. C. 6. D. 10.

Câu 38: [2D1-3] [THPT Hoàng Văn Thụ - Khánh Hòa] Gọi M là điểm bất kì thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{9}{x+2}$. Tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của (C) đạt giá trị nhỏ nhất là.

- A. 9. B. $6\sqrt{3}$. C. 6. D. $2\sqrt{3}$.

Câu 39: [2D1-3] Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ có đồ thị là C , I là giao điểm các đường tiệm cận của C và Δ là một tiếp tuyến bất kì của đồ thị C . Gọi d là khoảng cách từ điểm I đến Δ . Giá trị lớn nhất của d là:

- A. $\sqrt{3}$. B. $\sqrt{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 40: tiệm cận của C . Gọi M là điểm thuộc C sao cho tiếp tuyến của C tại M cắt hai đường tiệm cận tại A và B thỏa mãn chu vi tam giác IAB là nhỏ nhất. Khi đó có mấy điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 41: [2D1-4] Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị là C . Gọi I là giao điểm các đường tiệm cận của C và M là một điểm bất kì trên C . Gọi Δ là tiếp tuyến của C tại M và A , B lần lượt là giao điểm của Δ với các đường tiệm cận của C . Khi đó tọa độ điểm M sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất là:

- A. $M(1;1)$ hoặc $M\left(-3;\frac{9}{5}\right)$. B. $M(1;1)$ hoặc $M(3;3)$.
C. $M\left(-1;\frac{5}{3}\right)$ hoặc $M(3;3)$. D. $M\left(-3;\frac{9}{5}\right)$ hoặc $M\left(-1;\frac{5}{3}\right)$.

Câu 42: [2D1-3] Cho hàm số $y = \frac{x}{x+1}$ có đồ thị là C . Gọi Δ là phương trình tiếp tuyến của C sao cho Δ và hai tiệm cận của C cắt nhau tạo thành một tam giác cân. Khi đó phương trình của Δ là:

A. $y = x$ và $y = x + \frac{8}{3}$.

B. $y = x$ và $y = x - \frac{8}{3}$.

C. $y = -x$ và $y = x + \frac{8}{3}$.

D. $y = -x$ và $y = -x - \frac{8}{3}$.

Câu 43: [2D1-3] Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị là C . Gọi I là giao của hai đường tiệm cận, phương trình tiếp tuyến của C tại điểm M sao cho tiếp tuyến đó cắt tiệm cận đứng, tiệm cận ngang lần lượt tại A, B sao cho $\cos ABI = \frac{4}{\sqrt{17}}$ là:

A. $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ và $y = -\frac{1}{4}x - \frac{7}{2}$.

B. $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ và $y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$.

C. $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$ và $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$.

D. $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ và $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$.

Câu 44: [2D1-4] Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị là C . Gọi I là giao của hai đường tiệm cận.

Giả sử điểm $M(m; n)$ có hoành độ dương thuộc C sao cho tiếp tuyến của C tại điểm M cắt hai đường tiệm cận lần lượt tại A, B sao cho $IA^2 + IB^2 = 40$, khi đó $m + n$ có giá trị là:

A. 3.

B. -3.

C. 2.

D. 1.

Câu 45: [2D1-3] Giả sử đường thẳng $d: x = a$ ($a > 0$) cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại một điểm duy nhất, biết khoảng cách từ điểm đó đến tiệm cận đứng của đồ thị hàm số bằng 1, ký hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0 .

A. $y_0 = -1$.

B. $y_0 = 5$.

C. $y_0 = 1$.

D. $y_0 = 2$.

Câu 46: [2D1-3] [Chuyên Trần Phú – Hải Phòng – Lần 2 – Năm 2017 - 2018] Cho hàm số $y = \frac{4x-3}{x-3}$ có đồ thị (C) . Biết đồ thị (C) có hai điểm M, N và tổng khoảng cách từ M hoặc N đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất. Khi đó MN có giá trị bằng

A. $MN = 4\sqrt{2}$.

B. $MN = 6$.

C. $MN = 4\sqrt{3}$.

D. $MN = 6\sqrt{2}$.

Câu 47: [2D1-3][THPT Trần Cao Vân - Khánh Hòa] Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ có đồ thị (C) . Gọi d là khoảng cách từ giao điểm I của hai tiệm cận của đồ thị (C) đến một tiếp tuyến tùy ý của đồ thị (C) . Khi đó giá trị lớn nhất của d có thể đạt được là:

A. $2\sqrt{2}$.

B. $\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $3\sqrt{3}$.

CHUYÊN ĐỀ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

I. CHUYÊN ĐỀ 1: CÁC BÀI TOÁN ĐỒ THỊ LIÊN QUAN TÍNH ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN

A. CÁC DẠNG TOÁN

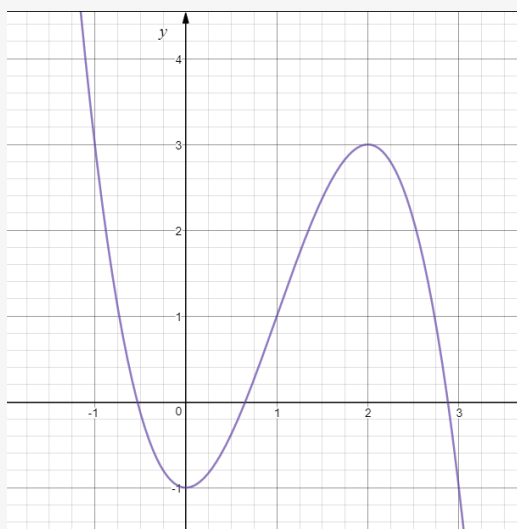
Dạng 1: Các bài toán đồ thị liên quan đến khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số

1. Phương pháp giải

Dựa vào đồ thị để suy ra các khoảng đơn điệu của hàm số.

2. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Khẳng định nào sau đây là đúng?

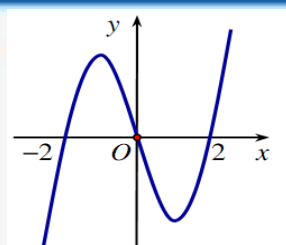
- A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-1; 3)$
- B. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$
- C. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$
- D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; 2)$

Lời giải

Chọn D

Quan sát đồ thị hàm số ta thấy: Hàm số đồng biến trên $(0; 2)$.

Ví dụ 2. (THPT Chuyên Đại Học Vinh - Nghệ An - 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.
 B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.
 C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$.
 D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Lời giải

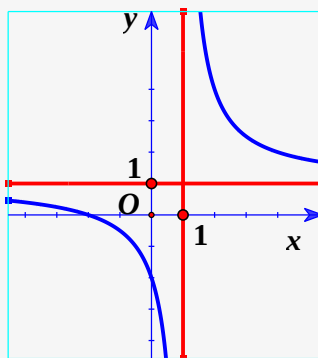
Chọn D

• Từ đồ thị ta thấy:

+ Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.

+ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Ví dụ 3. (28 – 101 – THPTQG2017) Đường cong ở hình bên là của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các hệ số thực.



Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. B. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. C. $y' > 0, \forall x \neq 1$. D. $y' < 0, \forall x \neq 1$.

Lời giải

Chọn D

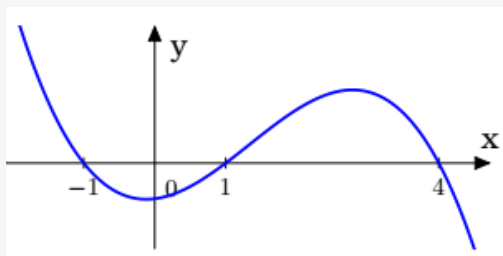
Đồ thị hàm số có xu hướng đi xuống $\Rightarrow$ Hàm số là hàm nghịch biến $\Rightarrow y' < 0$

Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng $x = 1 \Rightarrow x = 1$ là nghiệm của mẫu số

$\Rightarrow x=1$ không thuộc tập xác định của hàm số.

$\Rightarrow y' < 0, \forall x \neq 1$.

Ví dụ 4. (THPT Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ 2018 L4). Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng



A. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

B. $(0; 2)$.

C. $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

D. $(-2; -1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = [f(x^2)]' = 2x \cdot f'(x^2)$.

Cách 1.

$$\text{Hàm số đồng biến} \Leftrightarrow y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ f'(x^2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ -1 < x^2 < 1 \\ x^2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ -1 < x < 0 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

Do đó Chọn C

Cách 2.

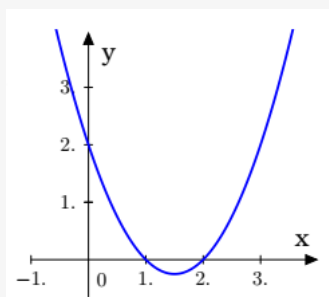
Ta có $y' = [f(x^2)]' = 2x \cdot f'(x^2)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	
y													

Dựa vào BBT ta chọn đáp án C.

Ví dụ 5. (Sở GD Hà Nam 2018). Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = f(2x - 3x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$. B. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. C. $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$. D. $\left(-2; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

+ Tính đạo hàm $y' = (2 - 6x) \cdot f'(2x - 3x^2)$.

+ Ta có

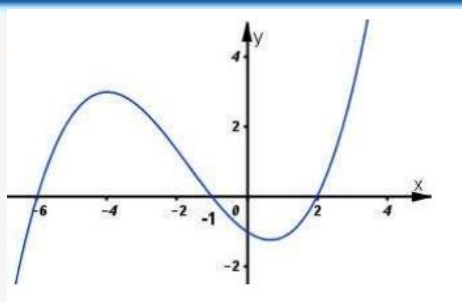
$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 6x = 0 \\ f'(2x - 3x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ 2x - 3x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Lập BBT

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
y'		-	0	+	
y					

Dựa vào BBT ta Chọn đáp án A.

Ví dụ 6. (Sở GD Điện Biên 2018) Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y = f(3 - x^2) + 2018$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(2;3)$. B. $(-2;-1)$. C. $(0;1)$. D. $(-1;0)$.

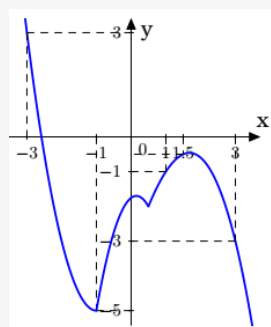
Lời giải

Chọn D.

Ta có $\left[f(3-x^2) \right]' = -2x \cdot f'(3-x^2) > 0 \Leftrightarrow f'(3-x^2)$ trái dấu với x .

Ta thấy chỉ có khoảng $(-1;0)$ là x âm và $2 < 3-x^2 < 3$ do đó $f'(3-x^2) > 0$ (theo đồ thị) nên $f(3-x^2)$ đồng biến trên $(-1;0)$.

Ví dụ 7. (THPT Chu Văn An - Hà Nội 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y = f(1-x) + \frac{x^2}{2} - x$ nghịch biến trên khoảng

- A. $(-3;1)$. B. $(-2;0)$. C. $(1;3)$. D. $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$.

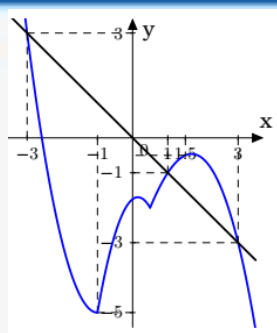
Lời giải

Chọn B.

Ta có $y' = -f'(1-x) + x - 1 = -[f'(1-x) + 1 - x]$

Đặt $t = 1 - x$. Suy ra $y' = -[f(t) - t]$

Vẽ đường thẳng $y = -x$



Từ đồ thị ta thấy $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 1 \\ t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 4 \end{cases}.$

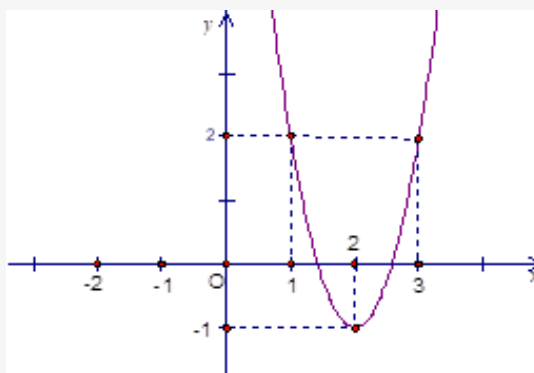
Lập BBT ta được

x	$-\infty$	-2	0	4	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	$-$
y						

Dựa vào BBT ta chọn đáp án **B**.

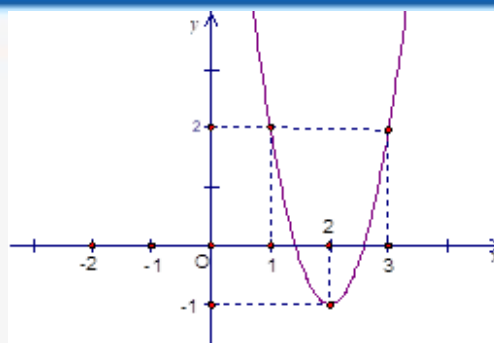
BÀI TẬP Củng Cố

Câu 1. [2D1-3] Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x-2)+2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?



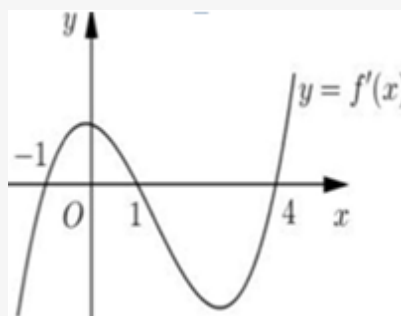
- A.** $(-\infty; 2).$
 B. $(-1; 1).$
 C. $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right).$
 D. $(2; +\infty).$

Câu 2. [2D1-3] Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x-2)+2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?



- A. $(-\infty; 3), (5; +\infty)$. B. $(-\infty; -1), (1; +\infty)$. C. $(-1; 1)$. D. $(3; 5)$.

Câu 3. [2D1-4] Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

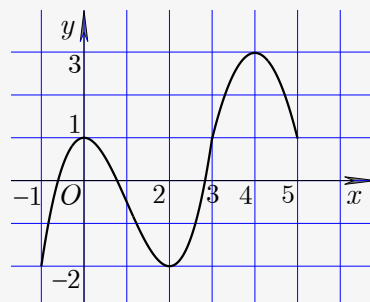


Hàm số $y = f(x^2)$ có bao nhiêu khoảng nghịch biến.

- A. 5. B. 3. C. 4. D. 2.

Câu 4. [2D1-3] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình bên.

Hàm số $y = -2f(2-x) + x^2$ nghịch biến trên khoảng



- A. $(-3; -2)$. B. $(-2; -1)$. C. $(-1; 0)$. D. $(0; 2)$.

DẠNG 2: CÁC BÀI TOÁN ĐỒ THỊ LIÊN QUAN ĐẾN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ**A. Phương pháp chung:****Bài toán 1: tìm điểm cực đại – cực tiểu của hàm số****Dấu hiệu 1:**

+) nếu $f'(x_0) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định tại x_0 và nó đổi dấu từ dương sang âm khi qua x_0 thì x_0 là điểm cực đại của hàm số.

+) nếu $f'(x_0) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định tại x_0 và nó đổi dấu từ âm sang dương khi qua x_0 thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.

***) Quy tắc 1:**

+) tính y'

+) tìm các điểm tới hạn của hàm số. (tại đó $y' = 0$ hoặc y' không xác định)

+) lập bảng xét dấu y' . dựa vào bảng xét dấu và kết luận.

Dấu hiệu 2:

cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp 2 tại x_0 .

+) x_0 là điểm cđ $\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$

+) x_0 là điểm cđ $\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$

***) Quy tắc 2:**

+) tính $f'(x), f''(x)$.

+) giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm nghiệm.

+) thay nghiệm vừa tìm vào $f''(x)$ và kiểm tra. từ đó suy kết luận.

Bài toán 2: Cực trị của hàm bậc 3

Cho hàm số: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

1. Đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$

2. Đồ thị hàm số có không cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta \leq 0$

3. Đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu.

+) Cách 1: Tìm tọa độ các điểm cực đại và cực tiểu A, B. Viết phương trình đường thẳng qua A, B.

+) Cách 2: Lấy y chia y' ta được: $y = (mx + n)y' + (Ax + B)$. Phần dư trong phép chia này là

$y = Ax + B$ chính là phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu.

Bài toán 3: Cực trị của hàm số bậc 4 trùng phương

Cho hàm số: $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đạo hàm $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$

1. Hàm số có đúng 1 cực trị khi $ab \geq 0$.

+) Nếu $\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực tiểu và không có cực đại.

+) nếu $\begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực đại và không có cực tiểu.

2. Hàm số có 3 cực trị khi $ab < 0$ (a và b trái dấu).

+) nếu $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực đại và 2 cực tiểu.

+) Nếu $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$ hàm số có 2 cực đại và 1 cực tiểu.

3. Gọi A, B, C là 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số và $A \in Oy$,

$A(0; c), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C), H(0; y_B)$.

+) Tam giác ABC luôn cân tại A

+) B, C đối xứng nhau qua Oy và $x_B = -x_C, y_B = y_C = y_H$

+) Để tam giác ABC vuông tại A: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

+) Tam giác ABC đều: $AB = BC$

+) Tam giác ABC có diện tích S: $S = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} |x_B - x_C| \cdot |y_A - y_B|$

4. Trường hợp thường gặp: Cho hàm số $y = x^4 - 2bx^2 + c$

+) Hàm số có 3 cực trị khi $b > 0$

+) A, B, C là các điểm cực trị

$A(0; c), B(\sqrt{b}, c - b^2), C(-\sqrt{b}, c - b^2)$

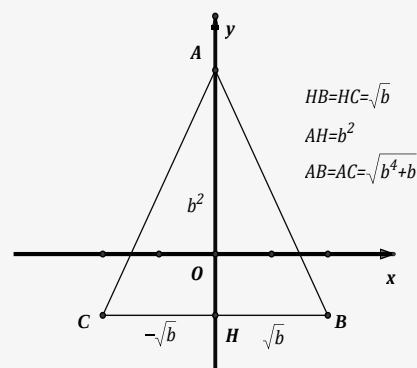
+) Tam giác ABC vuông tại A khi $b = 1$

+) Tam giác ABC đều khi $b = \sqrt[3]{3}$

+) Tam giác ABC có $\hat{A} = 120^\circ$ khi $b = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

+) Tam giác ABC có diện tích S_0 khi $S_0 = b^2 \sqrt{b}$

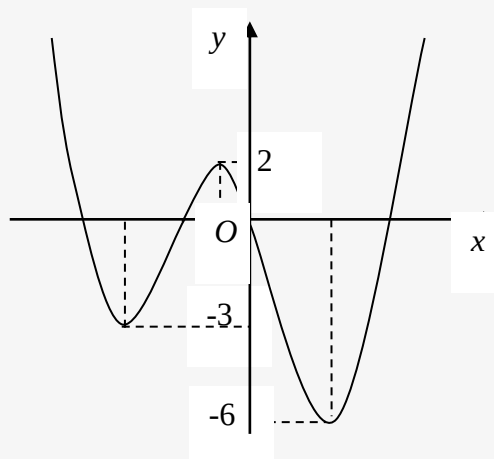
+) Tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp R_0 khi $2R_0 = \frac{b^3 + 1}{b}$



+) Tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp r_0 khi $r_0 = \frac{b^2}{\sqrt{b^3+1}+1}$

Ví dụ:

Câu 1. [2D1-4] Hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Biết $f(x)$ có đúng ba điểm cực trị.



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x+1) + m|$ có 5 điểm cực trị. Giá trị của tổng tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. 12.

B. 9.

C. 15.

D. 18.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $y = |f(x+1) + m|$ có được bằng cách thực hiện liên tiếp các bước:

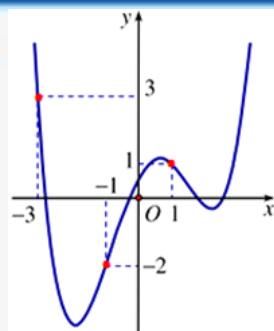
+ Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang trái 1 đơn vị

+ Tịnh tiến đồ thị nhận được theo vector $\vec{u} = (0; m)$.

+ Giữ nguyên phần đồ thị trên trục hoành, lấy đối xứng qua trục hoành đối với phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành.

Dựa vào cách dựng như trên, để đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị thì $\begin{cases} 3 \leq m < 6 \\ m \leq -2 \end{cases}$. Do đó tổng các giá trị cần tìm là $3 + 4 + 5 = 12$.

Câu 2. [2D1-4] Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Đặt $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$. Điểm cực tiểu của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-3; 1]$ là:

- A. $x_{CT} = -2$. B. $x_{CT} = -1$. C. $x_{CT} = 0$. D. $x_{CT} = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

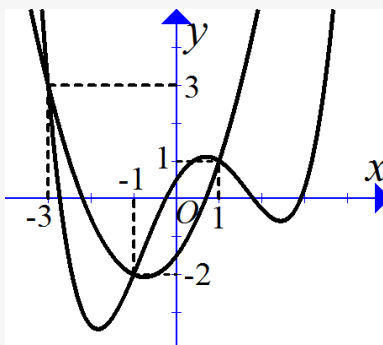
Ta có $g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = f'(x) - \left(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right)$

Căn cứ vào đồ thị ta có:
$$\begin{cases} f'(-1) = -2 \\ f'(1) = 1 \\ f'(-3) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'(-1) = 0 \\ g'(1) = 0 \\ g'(-3) = 0 \end{cases}.$$

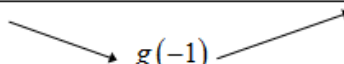
Vẽ Parabol $(P): y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ trên cùng hệ trục tọa độ với đồ thị của hàm số $y = f'(x)$.

Ta có trên $(-3; -1)$ thì $f'(x) < x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ nên $g'(x) < 0 \quad \forall x \in (-3; -1)$.

Ta có trên $(-1; 1)$ thì $f'(x) > x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ nên $g'(x) > 0 \quad \forall x \in (-1; 1)$.

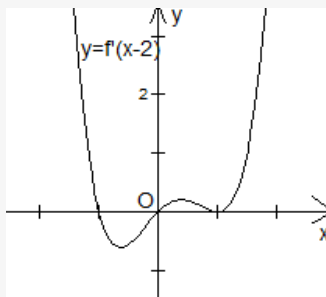


Khi đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-3; 1]$.

x	-3	-1	1
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			

Do đó $x_{CT} = -1$.

Câu 3. [2D1-4] Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x-2)$ có đồ thị như hình bên.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn B.

Ta đặt $x-2=t \Rightarrow x=t+2$.

Yêu cầu bài toán trở thành: hàm số $y = f'(t)$ có đồ thị như hình trên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(t+2)$.

Ta có: $y' = [f(t+2)]' = (t+2)' \cdot f'(t+2) = f'(t+2)$.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = f'(t+2)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f'(t)$ sang trái 2 đơn vị.

$\Rightarrow$ Hàm số $y = f(t+2)$ có hai điểm cực trị.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Câu 39: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	5	1	$+\infty$	

Đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 5.

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2018	-2018	$+\infty$	

Đồ thị của hàm số $y = |f(x - 2017) + 2018|$ có bao nhiêu điểm cực trị

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 5.

Câu 41: Cho hàm số $y = f(x) = (m^{2020} + 2)x^4 - (2m^{2020} + m^2 + 5)x^2 + (m^{2020} + 2020)$. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2019|$ là :

- A. 5. B. 3. C. 6. D. 7.

DẠNG 3. ĐỒ THỊ LIÊN QUAN TỚI ĐẠO HÀM CẤP I, CẤP II

I. ĐỒ THỊ LIÊN QUAN TỚI ĐẠO HÀM CẤP I, CẤP II.

1. Phương pháp. Sử dụng một trong các nhận xét hoặc kết hợp tất cả các nhận xét:

Nhận xét 1. Đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại những điểm là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)$.

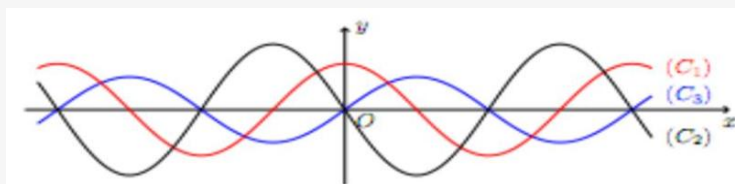
- ✓ $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại đó.
- ✓ $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại đó.

Nhận xét 2. Tìm giao điểm của các đồ thị hàm số với trục hoành (nếu có). Sau đó dựa vào tính chất:

- ✓ $f'(x) > 0, \forall x \in K \Rightarrow f(x)$ tăng trên K .
- ✓ $f'(x) < 0, \forall x \in K \Rightarrow f(x)$ giảm trên K .

2. Một vài ví dụ.

Ví dụ 1. [2D1-4] Cho các hàm số $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Khi đó $(C_1), (C_2), (C_3)$ theo thứ tự là đồ thị của hàm số nào sau đây?

- A. $f''(x), f(x), f'(x)$.
 B. $f(x), f'(x), f''(x)$.
 C. $f'(x), f(x), f''(x)$.
 D. $f'(x), f''(x), f(x)$.

Lời giải

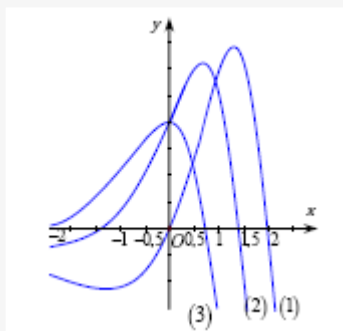
Chọn D.

Ta nhận thấy đường (C_1) đi từ dương sang âm thì đường (C_3) đạt cực đại, khi đường (C_1) đi từ âm sang dương thì đường (C_3) đạt cực tiểu. Do đó đường (C_1) là đạo hàm của đường (C_3) .

Tương tự đường (C_2) là đạo hàm của đường (C_1) , do đó **Chọn đáp án D**

*Lưu ý, với đồ thị tuần hoàn như thế này, ta có thể nghĩ đến hàm lượng giác, khi đó đường có biên độ cao nhất hoặc thấp nhất sẽ là đồ thị của $f(x)$ hoặc $f''(x)$, biên độ ở giữa là của hàm $f'(x)$.

Ví dụ 2. [2D1-4] Cho các hàm số $y = f(x), y = g(x) = f'(x), y = h(x) = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ

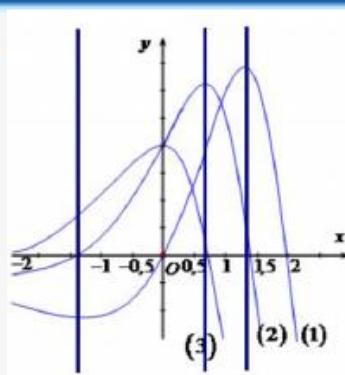


Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

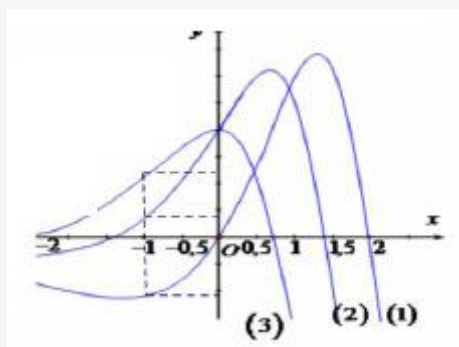
- A. $g(-1) > h(-1) > f(-1)$.
 B. $h(-1) > g(-1) > f(-1)$.
 C. $h(-1) > f(-1) > g(-1)$.
 D. $f(-1) > g(-1) > h(-1)$.

Lời giải

Chọn B.

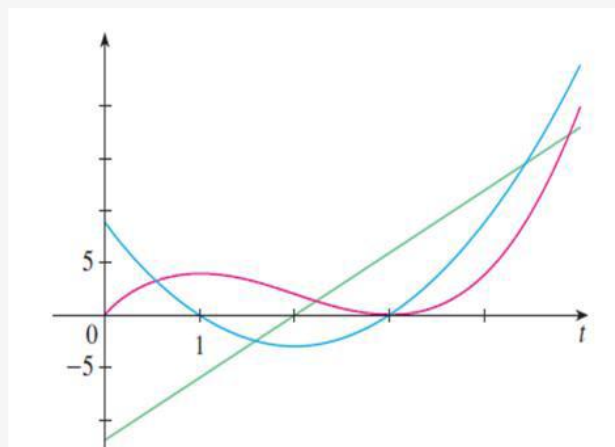


Từ đồ thị ta thấy đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x) = f'(x)$, $y = h(x) = g'(x)$ lần lượt là (1), (2), (3).



Do đó $h(-1) > g(-1) > f(-1)$. Chọn đáp án B.

Ví dụ 3. [2D1-4] Một vật chuyển động có đồ thị của hàm quãng đường $s(t)$, hàm vận tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$ theo thời gian $s(t)$ được mô tả ở hình vẽ. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A. $s(4) < v(4) < a(4)$.

B. $a(4) < v(4) < s(4)$.

C. $s(4) < a(4) < v(4)$.

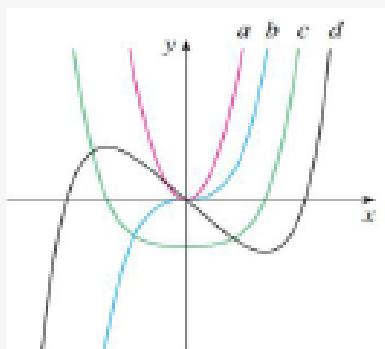
D. $v(4) < a(4) < s(4)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta nhận thấy $s(t)$ là đồ thị hàm bậc ba, $v(t)$ là đồ thị hàm số bậc hai, và $a(t)$ là đồ thị hàm bậc nhất. Do đó $s(4) < v(4) < a(4)$. **Chọn A.**

Ví dụ 4. [2D1-4] Cho đồ thị bốn hàm số $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?



A. s, d, b, a .

B. d, c, b, a .

C. d, c, a, b .

D. d, b, c, a .

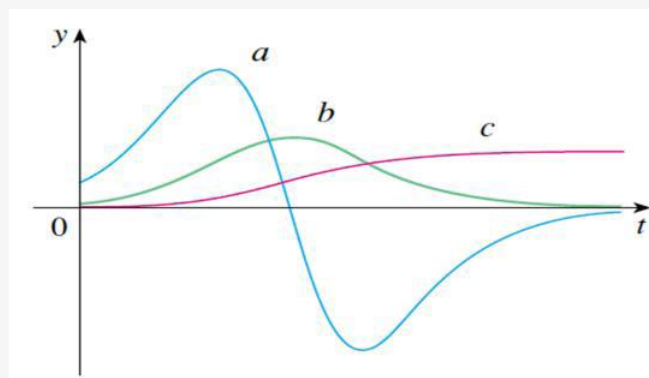
Lời giải

Chọn B.

Ta nhận thấy đường d có điểm đi từ dương sang âm mà không có hàm nào đạt cực trị tại đó, nên đường d là đồ thị hàm $f(x)$. Tại cực đại cực tiểu của $f(x)$ thì hàm số $f'(x)$ cắt trục Ox , do đó $f'(x)$ là đường c . Lập luận tương tự ta được **đáp án B.**

3. Bài tập tương tự.

Câu 1. [2D1-4] Một vật chuyển động có đồ thị là hàm quãng đường, hàm vận tốc và hàm gia tốc theo thời gian $f''(x)$, $f(x)$, $f'(x)$. được mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số quãng đường, vận tốc và gia tốc theo thứ tự là các đường cong nào?



Khi đó $(C_1), (C_2), (C_3)$ theo thứ tự là đồ thị của hàm số nào sau đây?

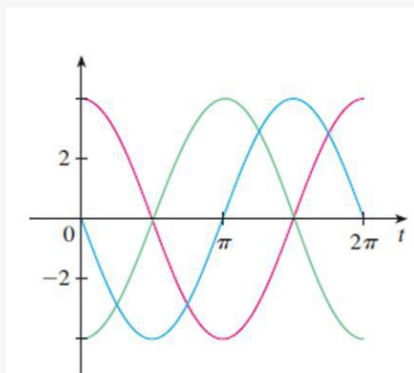
A. b, c, a .

B. c, a, b .

C. a, c, b .

D. c, b, a .

Câu 2. [2D1-4] Một vật chuyển động có đồ thị của hàm quãng đường $s(t)$, hàm vận tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$ theo thời gian $s(t)$ được mô tả ở hình vẽ. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



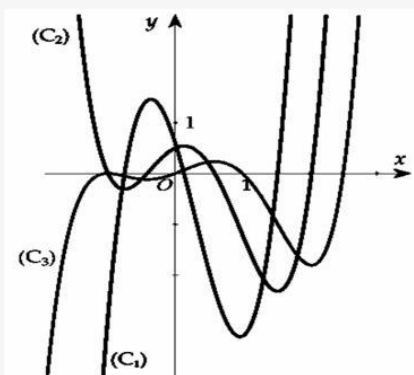
A. $s(\pi) < v(\pi) < a(\pi)$.

B. $a(\pi) < v(\pi) < s(\pi)$.

C. $s(\pi) < a(\pi) < v(\pi)$.

D. $v(\pi) < a(\pi) < s(\pi)$.

Câu 3. [2D1-4] Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hỏi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ theo thứ tự lần lượt tương ứng với đường cong nào?

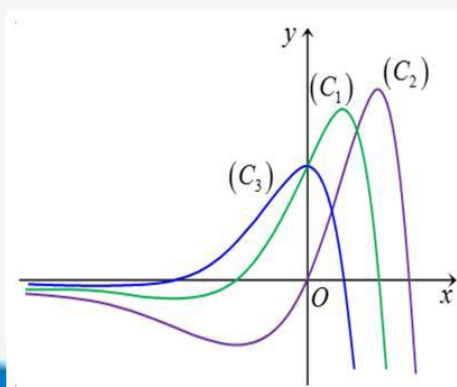
A. $(C_3); (C_2); (C_1)$.

B. $(C_2); (C_1); (C_3)$.

C. $(C_2); (C_3); (C_1)$.

D. $(C_1); (C_2); (C_3)$.

Câu 4. [2D1-4] Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hỏi đồ thị các hàm số $y = f(x), y = f'(x), y = f''(x)$ theo thứ tự lần lượt tương ứng với đường cong nào?

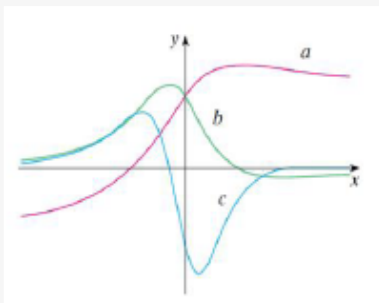
A. $(C_3); (C_2); (C_1)$.

B. $(C_2); (C_1); (C_3)$.

C. $(C_2); (C_3); (C_1)$.

D. $(C_1); (C_2); (C_3)$.

Câu 5. [2D1-4] Cho các hàm số $y = f(x), y = f'(x), y = f''(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hỏi đồ thị các hàm số $y = f(x), y = f'(x), y = f''(x)$ lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. a, b, c .

B. b, a, c .

C. a, c, b .

D. b, c, a .

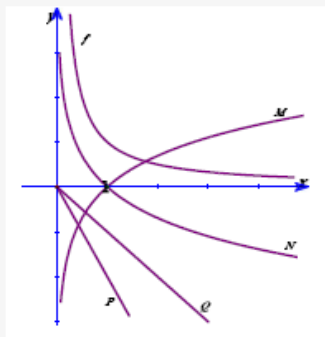
III. ĐỒ THỊ LIÊN QUAN TỚI NGUYÊN HÀM.

1. Phương pháp.

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của f , ta có $F'(x) = f(x)$, từ tính chất đồ thị như ở phần 2 ta đưa ra phương án đúng.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1. [2D1-4] Trong các đồ thị M, N, P, Q , đồ thị nào là đồ thị của một nguyên hàm của hàm số f ?



A. M .

B. N .

C. P .

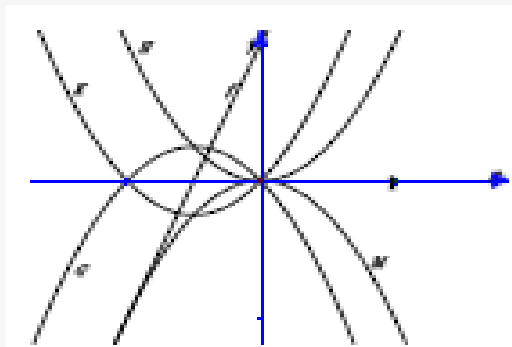
D. Q .

Lời giải

Chọn D.

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của f , ta có $F'(x) = f(x)$. Ta thấy đồ thị hàm số f nằm trên trục hoành, luôn dương, nên phải tìm đồ thị đồng biến, thấy đồ thị M phù hợp. **Chọn A.**

Ví dụ 2. [2D1-4] Trong các đồ thị M, G, H, K , đồ thị nào là đồ thị của một nguyên hàm của hàm số f ?



A. M .

B. G .

C. H .

D. K .

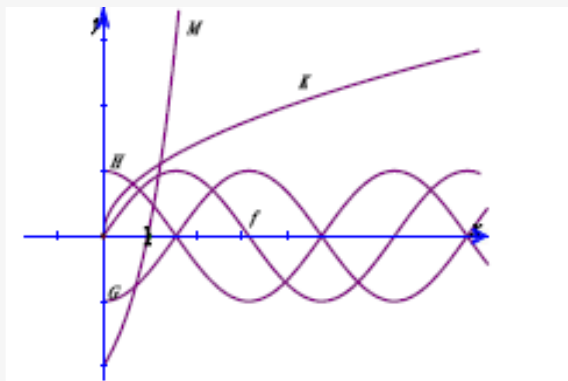
Lời giải

Chọn D.

Xét khoảng âm dương của f để tương ứng khoảng đồng biến nghịch biến của hàm số $F(x)$, và tại điểm hàm f chuyển từ âm sang dương đồ thị hàm số đạt cực tiểu. **Chọn D.**

3. Bài tập tương tự.

Câu 1. [2D1-4] Trong các đồ thị M, G, H, K , đồ thị nào là đồ thị của một nguyên hàm của hàm số f ?



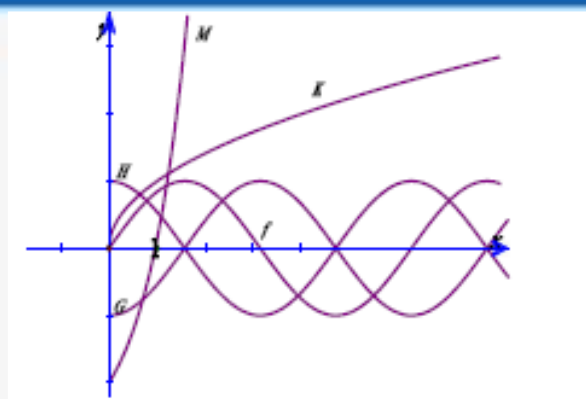
A. M .

B. G .

C. H .

D. K .

Câu 2. [2D1-4] Biết hàm số M là một nguyên hàm của hàm số f . Trong các đồ thị M, G, H, K , đồ thị nào là đồ thị của một nguyên hàm của hàm số f ?



A. M.

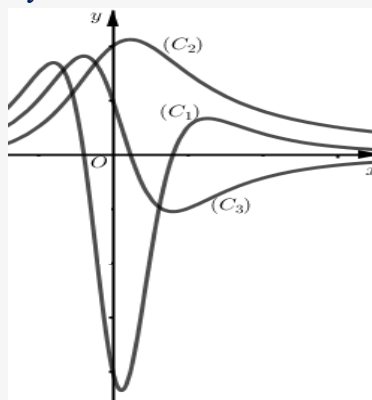
B. G.

C. H.

D. K.

BÀI TẬP ỨNG DỤNG

Câu 1. [2D1-4] Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp một $f'(x)$ và đạo hàm cấp hai $f''(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị của hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ là một trong các đường cong (C_1) , (C_2) , (C_3) ở hình vẽ bên. Hỏi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ lần lượt theo thứ tự nào dưới đây?



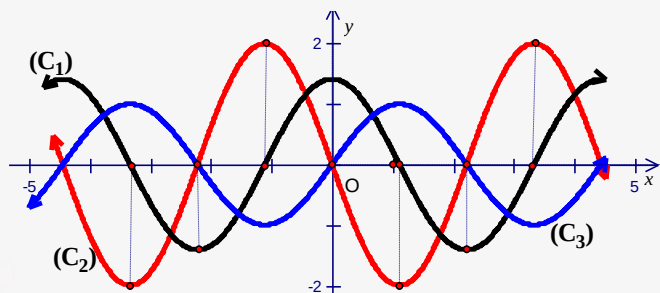
A. (C_2) , (C_1) , (C_3) .

B. (C_1) , (C_3) , (C_2) .

C. (C_2) , (C_3) , (C_1) .

D. (C_3) , (C_1) , (C_2) .

Câu 2. [2D1-4] Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khi đó (C_1) , (C_2) , (C_3) thứ tự là đồ thị các hàm số



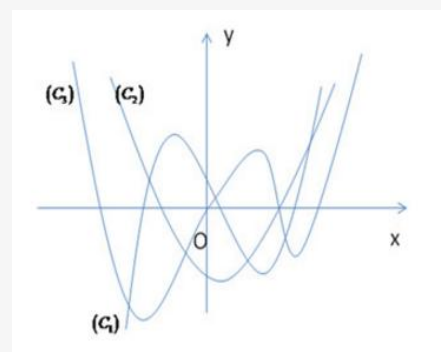
A. $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$.

B. $f'(x)$, $f(x)$, $f''(x)$.

C. $f'(x)$, $f''(x)$, $f(x)$.

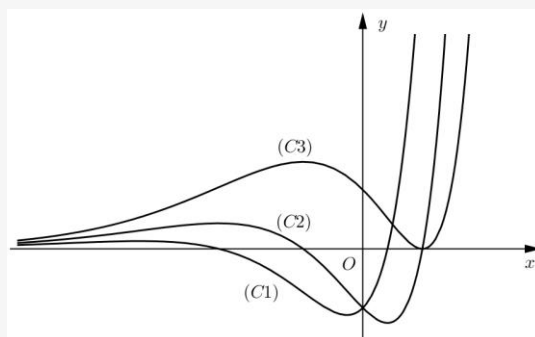
D. $f''(x)$, $f(x)$, $f'(x)$.

Câu 3. [2D1-4] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ lần lượt là các đường cong trong hình vẽ bên



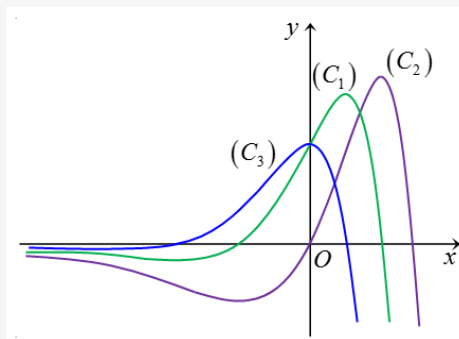
- A. $(C_1), (C_2), (C_3)$. B. $(C_1), (C_3), (C_2)$.
C. $(C_3), (C_2), (C_1)$. D. $(C_3), (C_1), (C_2)$.

Câu 4. Cho đồ thị của ba hàm số $y = f(x), y = f'(x), y = f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị của các hàm số $y = f(x), y = f'(x)$ và $y = f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào ?



- A. $(C_3); (C_2); (C_1)$. B. $(C_1); (C_2); (C_3)$. C. $(C_1); (C_3); (C_2)$. D. $(C_2); (C_3); (C_1)$.

Câu 5. Cho đồ thị của ba hàm số $y = f(x), y = f'(x), y = f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y = f(x), y = f'(x)$ và $y = f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào ?



- A. $(C_3); (C_2); (C_1)$. B. $(C_2); (C_1); (C_3)$. C. $(C_2); (C_3); (C_1)$. D. $(C_1); (C_3); (C_2)$.

DẠNG 4: CÁC BÀI TOÁN MAX-MIN KHI BIẾT ĐỒ THỊ, ĐỒ THỊ ĐẠO HÀM VÀ BBT

a) Phương pháp giải

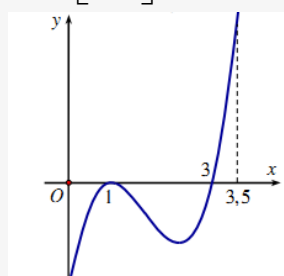
- ☐ Dựa vào đồ thị, BBT của hàm số để xác định giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất.
- ☐ Dựa vào đồ thị của đạo hàm để lập BBT, từ đó xác định giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất.

b) Các ví dụ:

Ví dụ 1. [THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ 2018 - LẦN 1] Cho hàm số $y = f(x)$

xác định và liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số

$y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ tại điểm x_0 nào dưới đây?



A. $x_0 = 2$.

B. $x_0 = 1$.

C. $x_0 = 0$.

D. $x_0 = 3$

Lời giải

Chọn D.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta có bảng biến thiên:

x	0	1	3	3,5		
y'		-	0	-	0	+
y						

Suy ra $\min_{\left[0; \frac{7}{2}\right]} y = f(3)$. Vậy $x_0 = 3$.

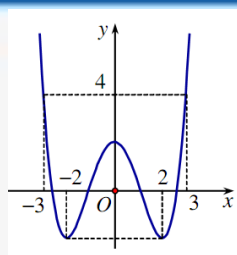
Ví dụ 2. [TRƯỜNG THPT YÊN DŨNG 3] Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình dưới đây. Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 3]$ đạt được tại điểm nào sau đây?

A. $x = -3$ và $x = 3$

B. $x = -2$

C. $x = 3$

D. $x = 0$



Lời giải

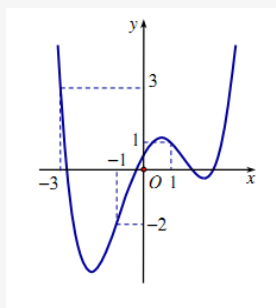
Chọn C.

Nhìn vào đồ thị suy ra trên $[-2; 3]$ thì hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 4 khi $x = 3$.

Ví dụ 3. [THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ 2018 - LẦN 1] Cho hàm số $y = f(x)$

có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

B. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(1)$.

C. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$.

D. $\min_{[-3;1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$

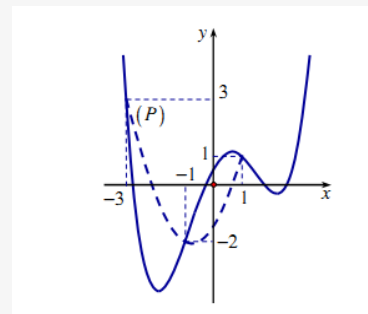
Lời giải

Chọn A.

Ta có $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018 \Rightarrow g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$

Căn cứ vào đồ thị $y = f'(x)$ ta có
$$\begin{cases} f'(-1) = -2 \\ f'(1) = 1 \\ f'(-3) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'(-1) = 0 \\ g'(1) = 0 \\ g'(-3) = 0 \end{cases}$$

Ngoài ra, vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ trên cùng hệ trục tọa độ như hình vẽ nét đứt, ta thấy (P) đi qua các điểm $(-3; 3), (-1; -2), (1; 1)$ với đỉnh $I\left(-\frac{3}{4}; -\frac{33}{16}\right)$



Rõ ràng :

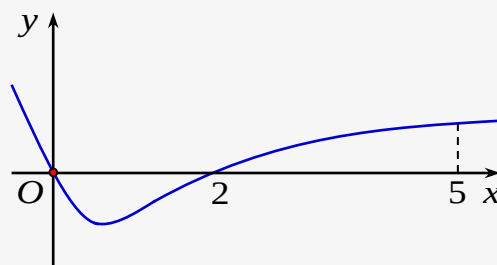
- Trên khoảng $(-1; 1)$ thì $f'(x) > x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$, nên $g'(x) > 0 \quad \forall x \in (-1; 1)$
- Trên khoảng $(-3; -1)$ thì $f'(x) < x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$, nên $g'(x) < 0 \quad \forall x \in (-3; -1)$

Từ những nhận định trên, ta có bảng biến thiên của hàm $y = g'(x)$ trên $[-3; 1]$ như sau:

x	-3	-1	1
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			

Vậy $\min_{[-3; 1]} g(x) = g(-1)$.

Ví dụ 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ lần lượt là



- A. $f(0), f(5)$. B. $f(2), f(0)$. C. $f(1), f(5)$. D. $f(2), f(5)$.

Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị $y = f'(x)$ trên đoạn $[0;5]$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

Suy ra $\max_{[0;5]} f(x) = f(2)$.

x	0	2	5
$f'(x)$		0	+
$f(x)$			

CT

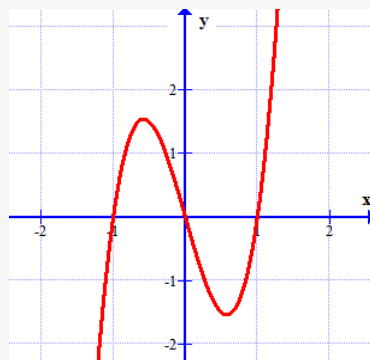
Từ giả thiết ta có $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$ nên $f(5) + f(2) - f(3) = f(0)$

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[2;5]$ nên $f(3) > f(2)$ hay $f(2) - f(3) < 0$, suy ra

$$f(0) = f(5) + f(2) - f(3) < f(5)$$

Vậy $\max_{[0;5]} f(x) = f(5)$.

Ví dụ 5. Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $[0;2]$ tại x bằng bao nhiêu?

A. $x = \frac{2}{3}$.

B. $x = 0$.

C. $x = 1$.

D. $x = 2$.

Lời giải

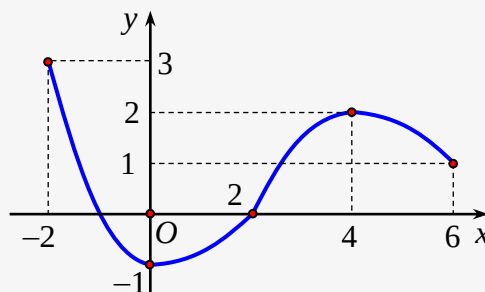
Chọn C.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có BBT như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	-	0	+	0	+
y	$+\infty$		0		$+\infty$

Dựa vào BBT suy ra hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $[0; 2]$ tại $x = 1$.

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ bên. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.



A. $\max_{x \in [-2; 6]} f(x) = f(-2)$. **B.** $\max_{x \in [-2; 6]} f(x) = f(2)$. **C.** $\max_{x \in [-2; 6]} f(x) = f(6)$. **D.**

$\max_{x \in [-2; 6]} f(x) = f(-1)$.

Lời giải

Chọn C.

☒ Từ đồ thị hàm số ta lập được bảng biến thiên như sau:

x	-2	-1	0	6
y'	+	0	-	+
y				

☒ Do vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất chỉ có thể tại $x = -1$ hoặc $x = 6$.

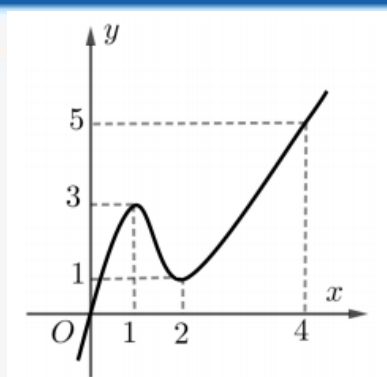
☒ Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và trục Ox ($-1 \leq x \leq 2$), S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và trục Ox ($2 \leq x \leq 6$). Ta có

$$S_1 < S_2 \Rightarrow -\int_{-1}^2 f'(x) dx < \int_2^6 f'(x) dx \Leftrightarrow -f(2) + f(-1) < f(6) - f(2) \Leftrightarrow f(-1) < f(6).$$

Vậy $\max_{x \in [-2; 6]} f(x) = f(6)$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

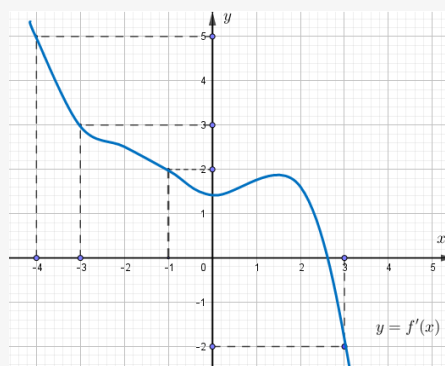
Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Đặt $M = \max_{\mathbb{R}} f\left(2\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)\right)$, $m = \min_{\mathbb{R}} f\left(2\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)\right)$. Tổng $M + m$ bằng

- A. 6. B. 4. C. 5. D. 3.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Trên đoạn $[-4;3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm



- A. $x_0 = -4$. B. $x_0 = -1$. C. $x_0 = 3$. D. $x_0 = -3$.

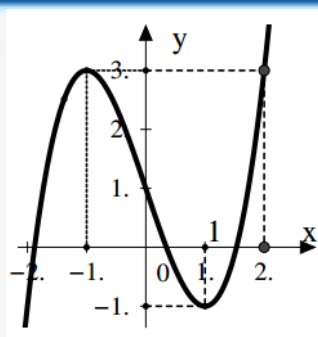
Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3$, $f'(2) = -2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	+

Hàm số $y = f(x + 2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

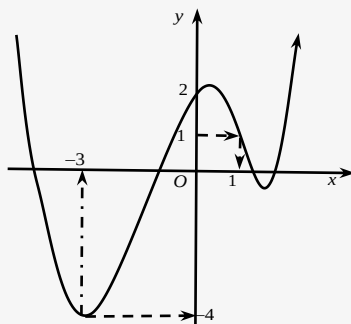
- A. $(-\infty; -2017)$. B. $(2017; +\infty)$. C. $(0; 2)$. D. $(-2017; 0)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt hàm số $y = g(x) = f(2x^3 + x - 1) + m$. Tìm m để $\max_{[0;1]} g(x) = -10$



- A. $m = -13$. B. $m = 3$. C. $m = -12$. D. $m = -1$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ.

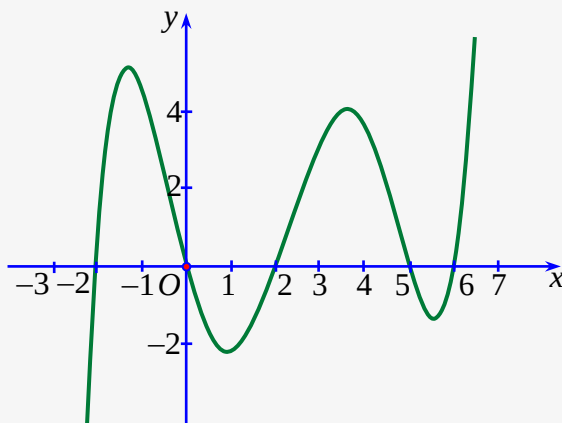


Xét hàm số $g(x) = f(x) + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{8}x^2 - 2x + 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(0)$. B. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(1)$.
C. $\min_{[-3;1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$. D. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3; 0)$.

Câu 6: [2D1-3] Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt

$M = \max_{[-2;6]} f(x)$, $m = \min_{[-2;6]} f(x)$, $T = M + m$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

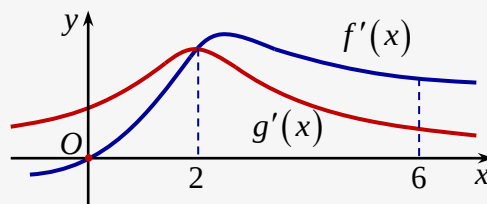


- A. $T = f(0) + f(-2)$. B. $T = f(5) + f(-2)$.

C. $T = f(5) + f(6)$.

D. $T = f(0) + f(2)$.

Câu 7: [2D1-3] Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$, $g'(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $g'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng $f(0) - f(6) < g(0) - g(6)$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ lần lượt là

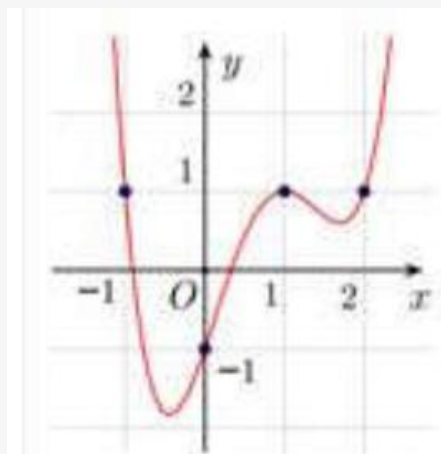
A. $h(6)$, $h(2)$.

B. $h(2)$, $h(6)$.

C. $h(0)$, $h(2)$.

D. $h(2)$, $h(0)$.

Câu 8: [2D1-3] Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = f(x) - x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(-1) < g(1) < g(2)$.

B. $g(2) < g(1) < g(-1)$.

C. $g(2) < g(-1) < g(1)$.

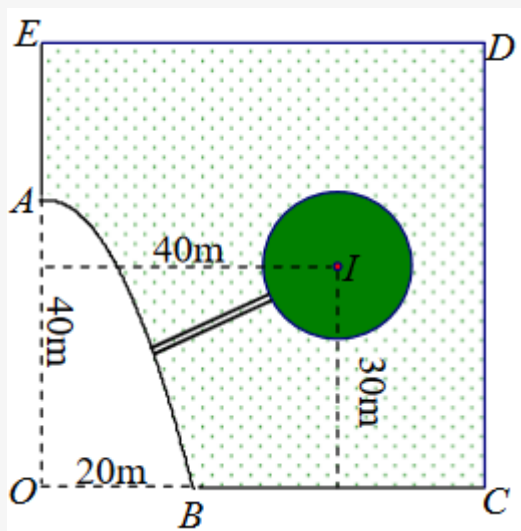
D. $g(1) < g(-1) < g(2)$.

Câu 9: [2D1-4] (SGD Thanh Hóa – năm 2017 – 2018) Một cái ao hình $ABCDE$ (như hình vẽ), ở giữa ao có một mảnh vườn hình tròn có bán kính 10m. Người ta muốn bắc một cầu cầu từ bờ AB của ao đến vườn. Tính gần đúng độ dài tối thiểu l của cây cầu biết :

- Hai bờ AE và BC nằm trên hai đường thẳng vuông góc với nhau, hai đường thẳng này cắt nhau tại điểm O ;

- Bờ AB là một phần của một parabol có đỉnh là điểm A và có trục đối xứng là đường thẳng OA ;

- Độ dài đoạn OA và OB lần lượt là 40 m và 20 m;
- Tâm I của mảnh vườn lần lượt cách đường thẳng AE và BC lần lượt 40 m và 30 m.



- A. $l \approx 17,7$ m. B. $l \approx 25,7$ m. C. $l \approx 27,7$ m. D. $l \approx 15,7$ m.

DẠNG 5: CÁC BÀI TOÁN GIẢI BẰNG CÁCH SỬ DỤNG

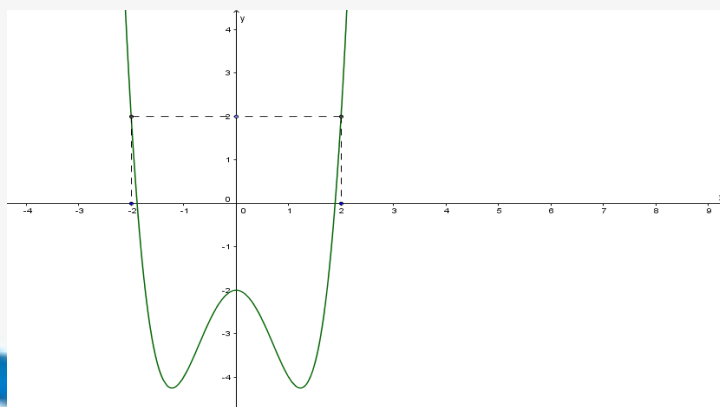
PHƯƠNG PHÁP SO SÁNH HAI ĐỒ THỊ

1. Phương pháp:

- Biến đổi bài toán và cô lập tham số, đưa bài toán về tìm min, max của hàm số $y = h(x)$ trên đoạn $[a; b]$.
- Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = g(x)$ nào đó để xét dấu biểu thức $h'(x) = k[f'(x) - g(x)]$ trên đoạn $[a; b]$.
- Tìm được min, max của hàm số $y = h(x)$ trên đoạn $[a; b]$ và kết luận.

2. Các ví dụ mẫu:

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $3f(x) - x^3 + 6x - m \geq 0$ đúng với mọi $x \in [-2; 2]$

- A.** $m \leq 3f(2) + 4$. **B.** $m \geq 3f(-2) - 4$. **C.** $m \leq 3f(0)$. **D.** $m \geq 3f(2) + 4$

Lời giải

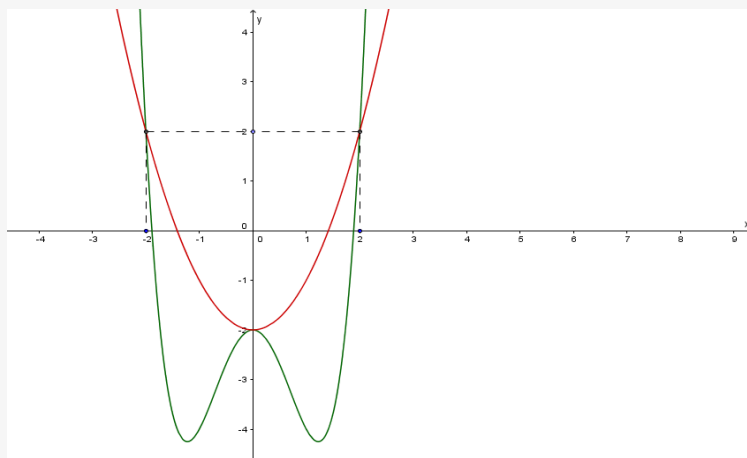
Chọn A.

Ta có: $3f(x) - x^3 + 6x - m \geq 0$ đúng với mọi $x \in [-2; 2]$

$$\Leftrightarrow h(x) = 3f(x) - x^3 + 6x \geq m, \forall x \in [-2; 2] \Leftrightarrow m \leq \min_{[-2; 2]} h(x).$$

$$\text{Ta có } h'(x) = 3[f'(x) - (x^2 - 2)].$$

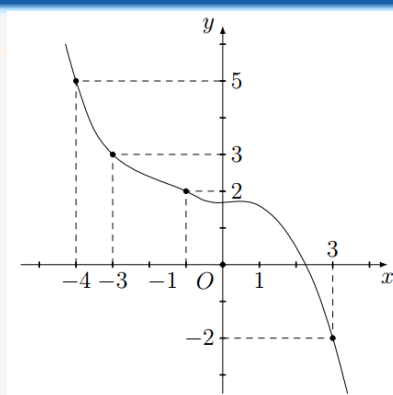
Vẽ hai đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = x^2 - 2$ trên cùng một hệ trục tọa độ (hình vẽ)



Từ đồ thị ta thấy $h'(x) = 3[f'(x) - (x^2 - 2)] \leq 0, \forall x \in [-2; 2]$ và $h(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ do đó hàm số $h(x)$ nghịch biến trên $[-2; 2]$. Suy ra $\min_{[-2; 2]} h(x) = h(2) = 3f(2) + 4$.

$$\text{Vậy } m \leq 3f(2) + 4$$

Ví dụ 2. [1D1-4] Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới.



Trên đoạn $[-4; 3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

- A. $x_0 = -4$. B. $x_0 = -1$. C. $x_0 = 3$. D. $x_0 = -3$.

Lời giải

Chọn B.

Trên đoạn $[-4; 3]$, ta có $g'(x) = 2f'(x) - 2(1-x)$. Ta có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = 1-x$ như hình bên

Từ đồ thị suy ra

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1-x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

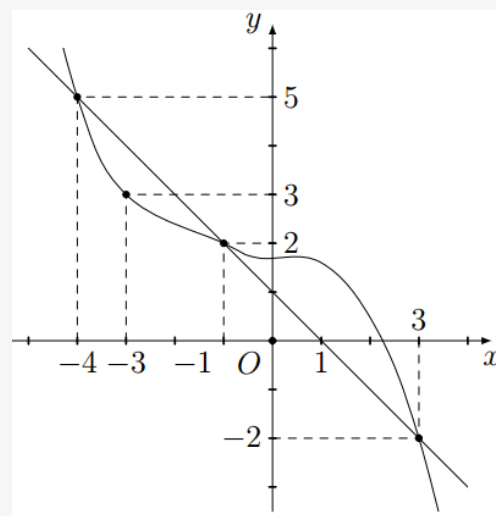
$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 1-x \Leftrightarrow x \in (-1; 3).$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 1-x \Leftrightarrow x \in (-4; -1).$$

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

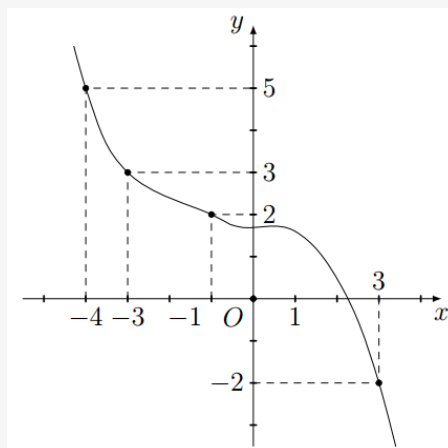
x	-4		-1		3
$g'(x)$	0	-	0	+	0
$g(x)$					

Suy ra hàm số $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0 = -1$.



BÀI TẬP ÁP DỤNG

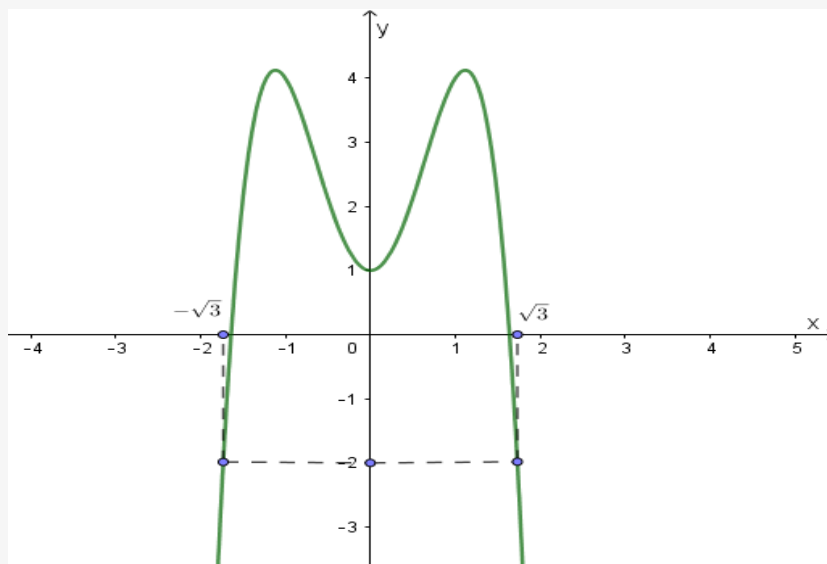
Câu 1: [1D1-4] Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới.



Trên đoạn $[-4; 3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

- A. $x_0 = -4$. B. $x_0 = -1$. C. $x_0 = 3$. D. $x_0 = -3$.

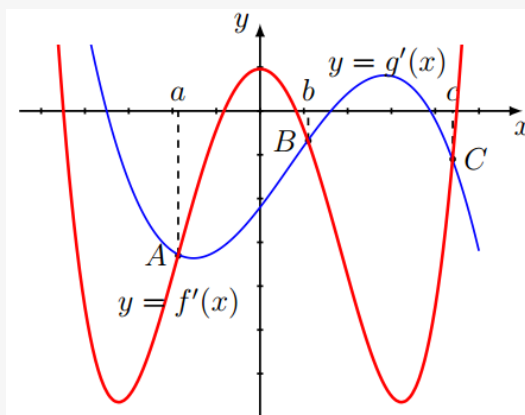
Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $6f(x) + 2x^3 - 6x - m \leq 0$ đúng với mọi $x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

- A. $m \geq 6f(\sqrt{3})$. B. $m \geq 6f(-\sqrt{3})$.
C. $m \geq 3f(0)$. D. $6f(-\sqrt{3}) \leq m \leq 6f(\sqrt{3})$

Câu 3: [1D1-3] Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong nét đậm và $y = g'(x)$ là đường cong nét mảnh như hình vẽ dưới đây.



Gọi ba giao điểm A, B, C của hai đường cong trên hình vẽ lần lượt có hoành độ a, b, c . Khẳng định nào sau đây là đúng?

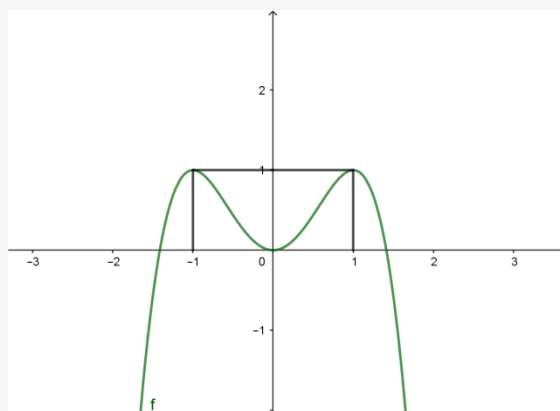
- A. $\min_{[a;c]} h(x) = h(0)$. B. $\min_{[a;c]} h(x) = h(a)$. C. $\min_{[a;c]} h(x) = h(b)$. D. $\min_{[a;c]} h(x) = h(c)$.

DẠNG 6: CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TƯƠNG GIAO, TÍNH TIẾN

1. Phương pháp : Nắm vững cách xét số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của hai đồ thị và kết hợp một số kiến thức liên quan.

2. Ví dụ minh họa :

Câu 1: Cho đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Hỏi có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn nghiệm của phương trình $f(f(\cos 2x)) = 0$?



- A. 3 điểm.
B. 4 điểm.
C. 2 điểm.
D. 1 điểm.

Lời giải

Chọn B.

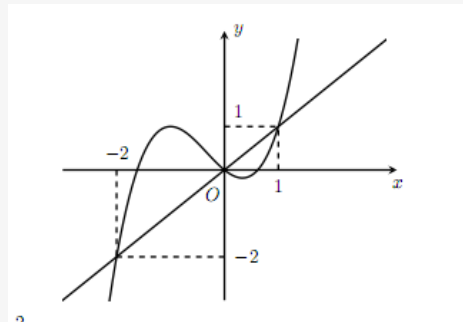
Từ đồ thị ta có: $f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(\cos 2x) = \pm a$ ($a > 1$) hoặc $f(\cos 2x) = 0$.

*) Nếu $f(\cos 2x) = a > 1$, phương trình vô nghiệm.

*) Nếu $f(\cos 2x) = -a < -1$ thì $|\cos 2x| > 1$, phương trình vô nghiệm.

*) Nếu $f(\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \pm a$ (vô nghiệm) và $\cos 2x = 0$. Do đó, tập nghiệm có 4 điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là hình vẽ sau



Đặt $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$. Điều kiện cần và đủ để đồ thị hàm số $y = g(x)$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt là

A. $\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(1) < 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(1) < 0 \\ g(1) \cdot g(-2) > 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(-2) > 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(-2) \leq 0 \\ g(1) \leq 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị suy ra $g'(x) = f'(x) - x \Rightarrow g'(0) = 0; g'(1) = 0; g'(-2) = 0$

Mặt khác từ đồ thị suy ra $f'(x) < x, \forall x \in (0; 1) \cup (-\infty; -2)$ và $f'(x) > x, \forall x \in (1; +\infty) \cup (-2; 0)$

Bảng biến thiên

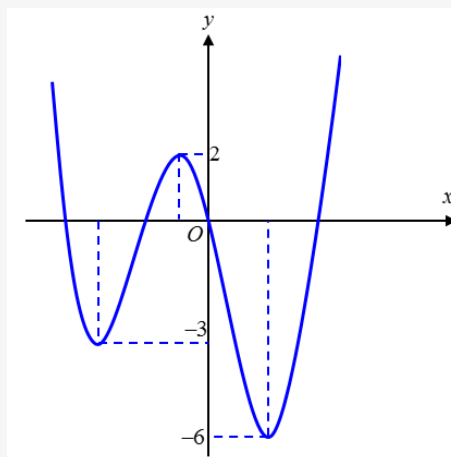
x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	$g(-2)$	$g(0)$	$g(1)$	$+\infty$

Từ BBT suy ra Điều kiện cần và đủ để đồ thị hàm số $y = g(x)$ cắt trục hoành tại bốn điểm

$$\text{phân biệt là } \begin{cases} g(0) > 0 \\ g(1) < 0 \\ g(1) \cdot g(-2) > 0 \end{cases}$$

BÀI TẬP ỨNG DỤNG

Câu 1: (Đoàn Thượng – Hải Dương – Lần 1 - 2018) Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số

$$y = \left| f(x + 2018) + \frac{1}{3}m^2 \right| \text{ có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các giá trị của các phần tử của tập}$$

S bằng:

A. 7.

B. 6.

C. 5.

D. 9.

Câu 2: (Thăng Long – Hà Nội – Lần 1 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-2018	2018	$-\infty$

Hỏi phương trình $|f(x + 2017) - 2018| = 2019$ có bao nhiêu nghiệm ?

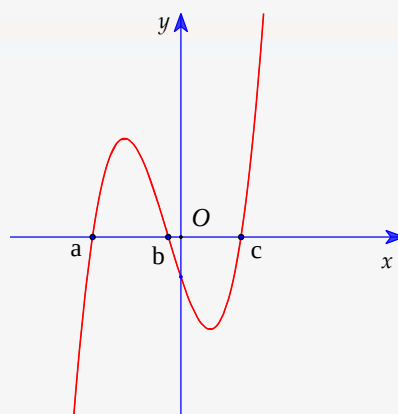
A. 6.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Biết $f(a) > 0$, hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại nhiều nhất bao nhiêu điểm?

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Chủ đề 6: Tương giao

Câu 1. (Lương Thế Vinh – Đồng Nai – Lần 1 – 2017) Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y		↗ 1	↘ 0	↗	

Khi đó $|f(x)| = m$ có bốn nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3 < \frac{1}{2} < x_4$ khi và chỉ khi

- A. $\frac{1}{2} < m < 1$. B. $\frac{1}{2} \leq m < 1$. C. $0 < m < 1$. D. $0 < m \leq 1$.

Câu 2. Cho hàm số $y = x^3 - x^2(2m+3) + x(6m+7) - 4m - 3$ và đường thẳng $d: y = x + 1$. Tìm các giá trị thực m để đường thẳng d cắt đồ thị hàm số đã cho tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho $x_A = 1$ và diện tích tam giác OBC bằng $\sqrt{5}$, với O là gốc tọa độ.

- A. $\{-2; 4\}$. B. $\{2; 4\}$. C. $\{-2; 3\}$. D. $\{-2; 5\}$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + \frac{3}{2}$. Phương trình $\frac{f(f(x))}{2f(x)-1} = 1$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

- A. 4. B. 9. C. 6. D. 5.

- Câu 4. (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa – Lần 3)** Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 4$. Gọi m là số nghiệm thực của phương trình $\sqrt{f(f(x)-2)} - 2 = 3 - f(x)$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $m = 7$. B. $m = 4$. C. $m = 6$. D. $m = 9$.
- Câu 5. (SGD Bắc Ninh)** Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Nếu phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt thì phương trình $2f(x).f''(x) = [f'(x)]^2$ có bao nhiêu nghiệm?
- A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.
- Câu 6.** Trong các hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$, $g(x) = -x^3 + x^2 + x - 1$, $h(x) = 2x^3 - 3x + 1$ số hàm số có hai cực trị đồng thời các giá trị cực trị trái dấu là
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
- Câu 7.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - mx^2 + 4$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt
- A. $m \neq 0$ B. $m > 3$ C. $m \neq 3$ D. $m > 0$
- Câu 8.** Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 - x + m$, tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số có hai cực trị đồng thời các giá trị cực trị trái dấu là:
- A. $m > 1$ B. $m < -1$ C. $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ D. $m \in [-1; 1]$
- Câu 9.** Tìm tất cả các giá trị thực của m để đường thẳng $d: y = -mx$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - m + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$.
- A. $m \in (1; +\infty)$ B. $m \in (-\infty; 3)$ C. $m \in (-\infty; -1)$ D. $m \in \mathbb{R}$
- Câu 10.** Số các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 6mx - 8$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
- Câu 11.** Tất cả giá trị tham số m để đồ thị $y = x^4 - (3m+4)x^2 + m^2$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt là:
- A. $m \in (-\infty; -4) \cup \left(-\frac{5}{4}; 0\right) \cup (0; +\infty)$. B. $m \in (-1; 0) \cup (0; +\infty)$.
- C. $m \in \left(-\frac{4}{5}; 0\right) \cup (0; +\infty)$. D. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Câu 12.** Cho hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$. Tìm m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ tại 4 điểm phân biệt.
- A. $1 < m < 3$. B. $m > 3$. C. $m = 0$. D. $m \in (1; 3) \cup \{0\}$.

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y = -1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 + (3m - 2)x^2 - 3m$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 3.

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2

Câu 14. Cho hàm số $y = x^4 - (3m + 4)x^2 + m^2$ có đồ thị là (C_m) . Tìm tổng các giá trị m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

- A. $\frac{216}{19}$ B. $\frac{240}{19}$ C. -1 D. 12

Câu 15. Gọi m là số thực dương sao cho đường thẳng $y = m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 2$ tại đúng hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn tam giác OAB vuông tại O (O là gốc tọa độ). Kết luận nào sau đây đúng?

- A. $m \in \left(\frac{7}{4}; \frac{9}{4}\right)$. B. $m \in \left(\frac{7}{4}; \frac{9}{4}\right)$. C. $m \in \left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$. D. $m \in \left(\frac{5}{4}; \frac{7}{4}\right)$

Câu 16. Cho hàm số $y = x^4 - mx^2 + m - 1$ có đồ thị (C_m) . Xác định tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

- A. $m \in (1; 2) \cup (2; +\infty)$. B. $m \in (1; +\infty)$. C. $m \in (2; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

Câu 17. Cho hàm số $y = x^4 - 4(m + 1)x^2 + 4m + 3$. Với giá trị m không âm đồ thị hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3, x_4 . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$.

- A. $\min T = 2$. B. $\min T = 3$. C. $\min T = 8$. D. $\min T = 20$

Câu 18. Cho đường cong $y = x^4 - (3m + 1)x^2 + 3m - 1$. Tính tổng của hai giá trị nguyên liên tiếp nhỏ nhất của m để đường thẳng $y = -1$ cắt đường cong trên tại bốn điểm phân biệt trong đó có hai điểm có hoành độ lớn hơn $\frac{1}{3}$.

- A. 3. B. 6. C. 1. D. 5.

Câu 19. Cho hàm số $y = x^4 - (m^2 + 10)x^2 + 9$ có đồ thị (C_m) . Với giá trị $m = m_0$ thì đồ thị (C_m) của hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 20$.

- A. $m_0 \in (-1; 1)$. B. $m_0 \in \left(\frac{5}{2}; 4\right)$. C. $m_0 \in (-2; 0)$. D. $m_0 \in (1; 3)$.

Câu 20. Cho hàm số $y = x^4 - (m^2 + 10)x^2 + 9$ có đồ thị (C_m) . Với giá trị $m = m_0$ thì đồ thị (C_m) của hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = 8$.

- A. $m_0 \in (-2; 1)$. B. $m_0 \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$. C. $m_0 \in \left(-\frac{5}{2}; -1\right)$. D. $m_0 \in \left(\frac{1}{2}; 3\right)$.

Câu 21. Cho hàm số $y = x^4 - 4(m+1)x^2 + 4m+3$. Với giá trị m không âm đồ thị hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3, x_4 . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$.

- A. $\min T = 2$. B. $\min T = 3$. C. $\min T = 8$. D. $\min T = 20$

Câu 22. Phương trình $x^2|x^2 - 2| = m$ có đúng 6 nghiệm thực khi:

- A. $m > 1$ B. $m > 0$ C. $0 < m < 1$ D. $m < 0$

Câu 23. Cho hàm số $(C): y = |x^4 - 4x^2 + 1|$ và đường thẳng $d: y = m - 1$. Giá trị của m để đường thẳng d và đồ thị (C) có bốn điểm chung là:

- A. $0 < m < 3$ B. $m = 4$ C. $\begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m = 1 \\ m = 4 \end{cases}$

Câu 24. Cho (C) là đồ thị hàm số $y = x^4 + mx^3 + x^2 + mx + 1$. Giá trị của m để (C) cắt trục hoành tại ít nhất hai điểm có hoành độ âm là:

- A. $-2 < m < 2$ B. $m > \frac{3}{2}$ C. $2 \leq m \leq 3$ D. $1 < m < \frac{3}{2}$

Câu 25. Cho hàm số $y = x^4 - 6x^2 + 4x + 6$ có đồ thị (C) . Đường thẳng d tiếp xúc với (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ là $x_1; x_2$. Khi đó $x_1 + x_2$ bằng:

- A. -2 B. 0 C. 2 D. 4

Câu 26. Cho hàm số $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 11x - 1$ có đồ thị (C) . Giá trị m để (C) giao với đường thẳng $d: y = -x + m$ tại 2 điểm phân biệt là:

- A. $-10 < m < 6$ B. $\begin{cases} m = -10 \\ m > 6 \end{cases}$ C. $m > -10$ D. $\begin{cases} m > 10 \\ m = -6 \end{cases}$

Câu 27. [2D1-2]. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x-1}$ và đường thẳng $y = x - 2$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$. Tính $y_A + y_B$.

- A. $y_A + y_B = 2$. B. $y_A + y_B = 0$. C. $y_A + y_B = 4$. D. $y_A + y_B = -2$

Câu 28. [2D1-3]. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+1}$. Tìm tất cả các giá thực của tham số m để đường thẳng $y = mx + m - 1$ cắt đồ thị hàm số tại hai điểm thuộc về hai nhánh của đồ thị.

A. $m < 0$. B. $m = 0$. C. $m > 0$. D. $m < 1$.

Câu 29. [2D1-2]. Cho hàm số $y = \frac{4x-5}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $M(1;4)$. Xét điểm A bất kì trên (C) có $x_A = a$. Đường thẳng MA cắt (C) tại điểm B khác A . Hoành độ điểm B là:

A. $a+1$. B. $1-a$. C. $2-a$. D. $2a-1$.

Câu 30. [2D1-2]. Cho hàm số $y = \frac{2x+4}{x+1}$ có đồ thị là (C) . Biết rằng đường thẳng $y = 2x + m$ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B . Tìm m để đoạn AB là nhỏ nhất.

A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = 4$.

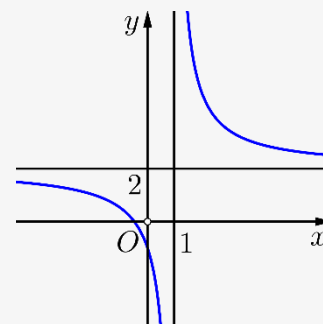
Câu 31. [2D1-2]. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Tìm tất cả các giá thực của tham số m để phương trình

$$\frac{2x+1}{|x-1|} = m \text{ có hai nghiệm thực phân biệt.}$$

A. $m \in (0; 2) \cup (2; +\infty)$. B. $m > 2$.

C. $m > -2$. D. $m < 2$.



Câu 32. [2D1-3]. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2+3}$ và đường thẳng $y = m(x+1)$ cắt nhau tại ít nhất một điểm.

A. $m \in (-\infty; -1)$. B. $m \in (-\infty; -1) \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$.

C. $m \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$. D. $m \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right]$.

Câu 33. [2D1-3]. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2+3}$ và đường thẳng $y = m(x+1)$ cắt nhau tại đúng một điểm.

A. $m \in (-\infty; -1)$.

B. $m \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$.

C. $m \in (-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$.

D. $m \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; 1 \right]$.

Câu 34. [2D1-3]. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2 + 3}$ và đường thẳng $y = m(x+1)$ cắt nhau tại đúng hai điểm.

A. $m \in (-\infty; -1)$.

B. $m \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1 \right)$.

C. $m \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; 1 \right)$.

D. $m \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; 1 \right]$.

Câu 35. [2D1-3]. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \ln x$ và đường thẳng $y = mx$ cắt nhau tại đúng hai điểm.

A. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{e} \right)$.

B. $m \in \left(0; \frac{1}{e} \right)$.

C. $m \in [0; 1)$.

D. $m \in \left[0; \frac{1}{e} \right]$.

Câu 36. [2D1-3]. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \ln x$ và đường thẳng $y = mx$ cắt nhau tại ít nhất một điểm.

A. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{e} \right)$.

B. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{e} \right]$.

C. $m \in [0; 1)$.

D. $m \in \left[0; \frac{1}{e} \right]$.

Câu 37. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{2x - 2}$ có đồ thị là (C) . Gọi T là tập tất cả các tham số m sao cho đường thẳng $y = m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B thỏa $AB = 2$. Tổng tất cả các phần tử của T bằng

A. -2 .

B. -1 .

C. 0 .

D. 1 .

Câu 38. Cho hàm số $y = \frac{x^2}{x-1}$ có đồ thị là (C) . Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m < 2019$ sao cho đường thẳng $y = m + 9$ cắt (C) tại các điểm có hoành độ $x_1 \leq x_2$ thỏa $1 < x_1 \leq 2 \leq x_2$?

A. 2021 .

B. 2022 .

C. 2024 .

D. 2023 .

Câu 39. Gọi m_0 là giá trị của tham số m để Parabol $(P): y = x^2 + m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số

$y = f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$. Tính $f(m_0)$.

A. $f(m_0) = -\frac{1}{2}$.

B. $f(m_0) = -\frac{2}{3}$.

C. $f(m_0) = -\frac{3}{2}$.

D. $f(m_0) = -2$.

Câu 40. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ có đồ thị là (C) và đường thẳng $(d): y = -x + m$. Gọi m_0 là giá trị của m sao cho (d) cắt (C) tại hai điểm T và R đối xứng nhau qua đường thẳng $(\Delta): y = x + 3$. Tính tích $m_0 \cdot x_T \cdot x_R$ ($x_T; x_R$ lần lượt là hoành độ các điểm T và R).

A. $\frac{99}{2}$.

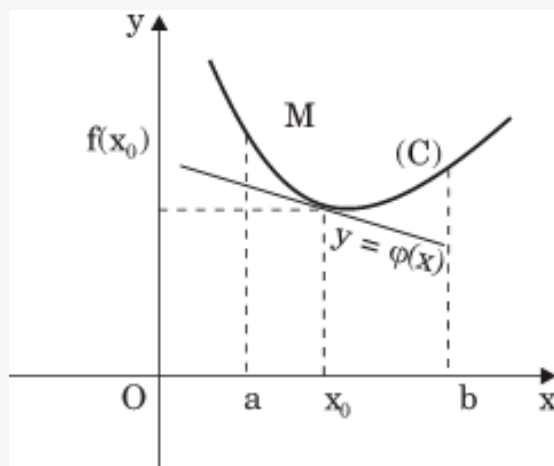
B. $\frac{11}{2}$.

C. $\frac{99}{4}$.

D. $\frac{11}{4}$.

CHUYÊN ĐỀ: TIẾP TUYẾN VÀ TIẾP XÚC**A. CÁC DẠNG TOÁN**

- **Dạng 1:** Viết phương trình tiếp tuyến tại một điểm (Biết tọa độ điểm, biết hoành độ, biết tung độ, tại giao điểm,...)
- **Dạng 2:** Viết phương trình tiếp tuyến biết hệ số góc (cho hệ số góc, hệ số góc lớn nhất nhỏ nhất, tiếp tuyến song song, tiếp tuyến vuông góc,...)
- **Dạng 3:** Tiếp tuyến đi qua (đi qua điểm, từ 1 điểm trên đường thẳng hoặc trên các trục tọa độ kẻ được một số tiếp tuyến
- **Dạng 4:** Tiếp tuyến chung
- **Dạng 5:** Bài toán tiếp xúc giữa hai đồ thị

NỘI DUNG CHÍNH**Dạng 1: Phương trình tiếp tuyến tại điểm****1. Phương pháp**

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ có dạng

$$\Delta: y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

- Điểm $M_0(x_0; y_0)$ được gọi là tiếp điểm.
- x_0 là hoành độ tiếp điểm và y_0 là tung độ tiếp điểm.
- $f'(x_0)$ được gọi là hệ số góc của tiếp tuyến tại M_0 .

Chú ý

- Nếu cho x_0 thì tìm $y_0 = f(x_0)$. Nếu cho y_0 thì tìm x_0 là nghiệm của phương trình

$$f(x) = y_0.$$

$$\bullet \text{ Tính } y'(x) = f'(x). \text{ Suy ra } y'(x_0) = f'(x_0).$$

2. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = \frac{2x+m}{x-1}$ tại điểm M có hoành độ bằng 2 chắn hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{1}{2}$. Tính tổng các phần tử của tập S .

A. $-\frac{22}{9}$.

B. -3 .

C. -1 .

D. $-\frac{49}{9}$.

Phân tích

Điểm $M \in (C)$ nên từ $x_M = 2$ thay vào hàm số ta được $M(2; 4+m)$.

Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị tại điểm $M(2; 4+m)$.

Để ý rằng Δ cắt hai trục tọa độ tại hai điểm A, B tạo thành tam giác vuông.

$$\text{Do đó } S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB.$$

Lời giải

Chọn D

$$\text{TXĐ } D = \mathbb{R} \setminus \{1\}. \text{ Ta có } y' = \frac{-2-m}{(x-1)^2}, M(2; 4+m)$$

$$\text{Với } x_M = 2 \Rightarrow y_M = 4+m \text{ và } f'(2) = -2-m.$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến tại } M \text{ có dạng } \Delta: y = (-2-m)(x-2) + (4+m).$$

$$\Delta \cap Ox = A(3m+8; 0); \Delta \cap Oy = B\left(0; \frac{8+3m}{m+2}\right).$$

$$\text{Ta có: } S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \Leftrightarrow OA \cdot OB = 1 \Leftrightarrow |3m+8| \cdot \left| \frac{8+3m}{m+2} \right| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{22}{9} \\ m = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \left\{ -\frac{22}{9}; -3 \right\}.$$

$$\text{Vậy tổng các phần tử của } S \text{ là } -\frac{22}{9} - 3 = -\frac{49}{9}.$$

Bài tập tương tự:

Câu 1: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$, có đồ thị (C) với m là tham số thực. Gọi A là điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ bằng 1. Tìm m để tiếp tuyến Δ với đồ thị (C) tại A cắt đường tròn $(\gamma): x^2 + (y-1)^2 = 4$ tạo thành một dây cung có độ dài nhỏ nhất

- A. $\frac{16}{13}$. B. $-\frac{13}{16}$. C. $\frac{13}{16}$. D. $-\frac{16}{13}$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = x^3 + 3x$ có đồ thị là (C) . M_1 là điểm trên (C) có hoành độ bằng 1. Tiếp tuyến tại điểm M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1 . Tiếp tuyến tại điểm M_2 cắt (C) tại điểm M_3 khác M_2 . Tiếp tuyến tại điểm M_{n-1} cắt (C) tại điểm M_n khác M_{n-1} ($n \geq 4, n \in \mathbb{N}$)? Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện $y_n - 3x_n + 2^{21} = 0$.

- A. $n = 7$. B. $n = 8$. C. $n = 22$. D. $n = 21$.

Phân tích

Từ đề bài ta thấy cần quy đổi x_n, y_n theo n .

Mặt khác hoành độ các điểm $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, M_n$ có thể có mối liên hệ với nhau và ta cần tìm mối liên hệ này.

Các điểm $M_2, \dots, M_{n-1}, M_n$ là giao điểm của các tiếp tuyến tại $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ với (C) nên ta có thể thực hiện như sau:

+ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M_n(x_n; y_n)$.

+ Tìm giao điểm M_{n+1} của tiếp tuyến với (C) từ đó chỉ ra mối liên hệ giữa x_n và x_{n+1} từ đó thiết lập liên hệ giữa x_n và n .

Lời giải

Chọn B

Phương trình tiếp tuyến Δ_n của (C) tại điểm $M_n(x_n; x_n^3 + 3x_n)$:

$$\Delta_n: y = (3x_n^2 + 3)(x - x_n) + x_n^3 + 3x_n.$$

Gọi M_{n+1} là giao điểm khác M_n của (C) và tiếp tuyến Δ_n .

Hoành độ x_{n+1} của M_{n+1} là nghiệm phương trình:

$$x^3 + 3x = (3x_n^2 + 3)(x - x_n) + x_n^3 + 3x_n$$

$$\Leftrightarrow (x - x_n)(x^2 + x_n x - 2x_n^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_n \\ x = -2x_n \end{cases}$$

Do đó $x_{n+1} = -2x_n$ nên hoành độ các điểm $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, M_n$ lập thành cấp số nhân (x_n) có $x_1 = 1$ và công bội $q = -2 \Rightarrow x_n = (-2)^{n-1} x_1 = (-2)^{n-1}$.

Từ giả thiết $y_n - 3x_n + 2^{21} = 0$

Suy ra $x_n^3 + 2^{21} = 0 \Leftrightarrow (-2)^{3n-3} + 2^{21} = 0 \Rightarrow n = 8$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+2}$ có đồ thị (C) và điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ ($x_0 \neq 0$). Biết rằng khoảng cách từ $I(-2; 2)$ đến tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2x_0 + y_0 = 0$. **B.** $2x_0 + y_0 = 2$. **C.** $2x_0 + y_0 = -2$. **D.** $2x_0 + y_0 = -4$.

Phân tích

- + Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại $M(x_0; y_0)$ theo ẩn x_0 .
- + Tính khoảng cách d từ $I(-2; 2)$ đến Δ ta được một biểu thức với biến x_0 .
- + Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức vừa lập ta chỉ ra được x_0 .

Lời giải

Chọn D

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M có dạng $\Delta: y = y'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$.

Ta có $M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = \frac{2x_0}{x_0 + 2}$

Lại có $y' = \frac{4}{(x+2)^2} \Rightarrow y'(x_0) = \frac{4}{(x_0 + 2)^2}$.

Do đó $\Delta: y = \frac{4}{(x_0 + 2)^2} \cdot (x - x_0) + \frac{2x_0}{x_0 + 2}$

$\Rightarrow \Delta: y(x_0 + 2)^2 = 4x - 4x_0 + 2x_0(x_0 + 2) \Rightarrow \Delta: 4x - (x_0 + 2)^2 y + 2x_0^2 = 0$

$\Rightarrow d(I; \Delta) = \frac{|-8 - 2(x_0 + 2)^2 + 2x_0^2|}{\sqrt{4^2 + (x_0 + 2)^4}} = \frac{|-16 - 8x_0|}{\sqrt{(x_0 + 2)^4 + 16}} = \frac{8}{\sqrt{(x_0 + 2)^2 + \frac{16}{(x_0 + 2)^2}}}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$(x_0 + 2)^2 + \frac{16}{(x_0 + 2)^2} \geq 2\sqrt{(x_0 + 2)^2 \cdot \frac{16}{(x_0 + 2)^2}} = 8 > 0 \Rightarrow d(I; d) \leq 1$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow (x_0 + 2)^2 = \frac{16}{(x_0 + 2)^2} \Leftrightarrow (x_0 + 2)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -4 \end{cases}$

Do $x_0 \neq 0$ nên $x_0 = -4 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow 2x_0 + y_0 = -4$.

Bài tập tương tự:

Câu 1: Cho hàm số $y = x(x^2 - 3)$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị (C) thỏa mãn tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại điểm A (khác M) và cắt Ox tại điểm B sao cho M là trung điểm của đoạn AB ?

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Ví dụ 4: Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = f(f(x))$, $y = f(x^2 + 4)$ có đồ thị lần lượt là (C_1) , (C_2) , (C_3) . Đường thẳng $x = 1$ cắt (C_1) , (C_2) , (C_3) lần lượt tại M , N , P . Biết phương trình tiếp tuyến của (C_1) tại M và của (C_2) tại N lần lượt là $y = 3x + 2$ và $y = 12x - 5$. Phương trình tiếp tuyến của (C_3) tại P là

- A. $y = 4x + 3$. B. $y = 8x - 1$. C. $y = 2x + 5$. D. $y = 3x + 4$.

Phân tích

Để viết phương trình tiếp tuyến của $(C_3): y = h(x) = f(x^2 + 4)$ ta cần tính $h'(1)$ và $h(1) = f(5)$

Phương trình tiếp tuyến của $(C_1): y = f(x)$ là $y = 3x + 2$ suy ra $f'(1) = 3$ và $f(1) = 5$.

Phương trình tiếp tuyến của $(C_2): y = g(x) = f(f(x))$ là $y = 12x - 5$ tính được $h'(1)$ và $f(5)$

Lời giải

Chọn B

Tiếp tuyến của (C_1) tại $M(1; f(1))$ là $y = 3x + 2 \Leftrightarrow y = 3(x - 1) + 5$ nên suy ra $\begin{cases} f'(1) = 3 \\ f(1) = 5 \end{cases}$.

Tiếp tuyến của (C_2) tại $M(1; f(f(1)))$ là $y = 12x - 5 \Leftrightarrow y = 12(x - 1) + 7$ nên suy ra

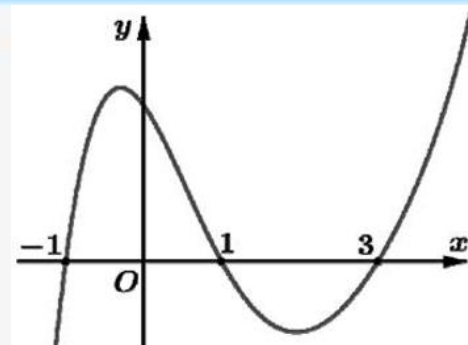
$$\begin{cases} f'(f(1)) \cdot f'(1) = 12 \\ f(f(1)) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(5) = 4 \\ f(5) = 7 \end{cases}.$$

Do đó $P(1; f(5))$ hay $P(1; 7)$.

Hơn nữa $[f(x^2 + 4)]' = 2x \cdot f'(x^2 + 4)$, do đó $f'(1) = 2 \cdot f'(5) = 8$.

Phương trình tiếp tuyến $y = 8(x - 1) + 7 \Leftrightarrow y = 8x - 1$.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị là đường cong (C) và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 cắt (C) tại hai điểm phân biệt lần lượt có hoành độ là a, b . Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:



A. $-4 \leq a - b \leq 4$. **B.** $a, b < 3$.

C. $a^2 + b^2 > 10$. **D.** $a, b \geq 0$.

Phân tích

Từ đồ thị $f'(x)$ ta có thể lập được bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ và suy ra $f'(1) = 0$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 là $y = f'(1)(x-1) + f(1) = f(1)$

Như vậy giao điểm của tiếp tuyến và (C) là giao điểm của đường thẳng $y = f(1)$ và (C) nên ta có thể sử dụng bảng biến thiên để chỉ ra giá trị của a, b .

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị của $f'(x)$ ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$							

$f(-1)$ $f(1)$ $f(3)$

Để thấy $f'(1) = 0$ do đó phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 là $y = f'(1)(x-1) + f(1) = f(1)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của tiếp tuyến và (C) : $f(x) = f(1)$.

x	$-\infty$	a	-1		1		3		b	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$										

Từ bảng biến thiên suy ra $a < -1$ và $b > 3$ nên $a^2 + b^2 > 10$.

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho hàm số $y = x^3 - 2018x$ có đồ thị là (C) . M_1 là điểm trên (C) có hoành độ $x_1 = 1$. Tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1 , tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại điểm M_3 khác M_2 , tiếp tuyến của (C) tại điểm M_{n-1} cắt (C) tại điểm M_n khác M_{n-1} ($n = 4; 5; \dots$), gọi $(x_n; y_n)$ là tọa độ điểm M_n . Tìm n để: $2018x_n + y_n + 2^{2019} = 0$.

A. $n = 647$.

B. $n = 675$.

C. $n = 674$.

D. $n = 627$.

Bài tập 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu cặp điểm thuộc đồ thị (C) mà tiếp tuyến với đồ thị tại chúng là hai đường thẳng song song?

A. Không tồn tại cặp điểm nào.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số cặp điểm.

Bài tập 3: Biết rằng hàm số $y = \frac{x+m}{x-2}$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ và tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $x_0 = 1$ cắt hai trục tọa độ tạo thành một tam giác vuông cân. Tìm giá trị của tham số m .

A. $m = -3$.

B. $m = -4$.

C. $m = -5$.

D. $m = 0$.

Bài tập 4: Cho hàm số $y = \frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2}$ (C) và điểm $M \in (C)$ có hoành độ $x_M = a$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại hai điểm phân biệt khác M .

A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Bài tập 5: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{2x-2}$ có đồ thị (C) . Gọi $M(x_0; y_0)$ với $x_0 > 1$ là điểm thuộc (C) .

Biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A và B sao cho $S_{\Delta OIB} = 8S_{\Delta OIA}$, trong đó I là giao điểm hai tiệm cận. Tính giá trị của $S = x_0 + 4y_0$.

A. $S = 8$.

B. $S = \frac{17}{4}$.

C. $S = \frac{23}{4}$.

D. $S = 2$.

Bài tập 6: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $[f(1+2x)]^2 = x - [f(1-x)]^3$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

- A. $y = -\frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$. B. $y = \frac{1}{7}x - \frac{8}{7}$. C. $y = -\frac{1}{7}x + \frac{8}{7}$. D. $y = -x + \frac{6}{7}$.

Bài tập 7: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$. Biết tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ của hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = \frac{f(x)}{f(x^2)}$ có hệ số góc lần lượt là 1 và -2 . Tính $f(1)$

- A. $f(1) = 2$. B. $f(1) = 1$. C. $f(1) = 4$. D. $f(1) = \frac{1}{2}$

Bài tập 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi d_1, d_2 lần lượt là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = x^2 f(3x-4)$ tại điểm có hoành độ $x = 2$. Biết rằng hai đường thẳng d_1, d_2 vuông góc với nhau. Khẳng định nào sau đây là đúng

- A. $\sqrt{3} < |f(2)| < 2$. B. $|f(2)| \leq \sqrt{3}$. C. $|f(2)| \geq \sqrt{3}$. D. $2 \leq |f(2)| < 2\sqrt{3}$

Dạng 2: Phương trình tiếp tuyến biết hệ số góc.

1. Phương pháp

Bài toán: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của $(c): y = f(x)$, biết Δ có hệ số góc k cho trước.

Cách 1: Tìm tọa độ tiếp điểm.

- Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Tính $f'(x_0)$.
- Δ có hệ số góc $k \Rightarrow f'(x_0) = k$ (1)
- Giải phương trình (1), tìm được x_0 và tính $y_0 = f(x_0)$. Từ đó viết phương trình của Δ .

Cách 2: Dùng điều kiện tiếp xúc.

- Phương trình đường thẳng Δ có dạng: $y = kx + m$.
- Δ tiếp xúc với (c) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = kx + m \\ f'(x) = k \end{cases} \quad (*)$$

- Giải hệ (*), tìm được m . Từ đó viết phương trình của Δ .

Ch ý: Hệ số góc k của tiếp tuyến Δ có thể được cho gián tiếp như sau:

+ Δ tạo với chiều dương trục hoành góc α thì $k = \tan \alpha$.

+ Δ song song với đường thẳng $d: y = ax + b$ thì $k = a$.

+ Δ vuông góc với đường thẳng $d: y = ax + b$ ($a \neq 0$) thì $k = -\frac{1}{a}$

+ Δ tạo với đường thẳng $d: y = ax + b$ một góc α thì $\left| \frac{k-a}{1+ka} \right| = \tan \alpha$

2. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 + (4-3m)x + 1$ có đồ thị là (C_m) . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho trên đồ thị (C_m) tồn tại đúng hai điểm có hoành độ dương mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $(d): x + 2y - 3 = 0$.

A. $m \in \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$.

B. $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{3}\right)$.

C. $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{8}{3}\right)$.

D. $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$.

Phân tích

Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow k = 2 \Leftrightarrow y' = 2$

Trên đồ thị (C_m) tồn tại đúng hai điểm có hoành độ dương $\Leftrightarrow y' = 2$ có đúng 2 nghiệm dương phân biệt.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = mx^2 + 2(m-1)x + 4 - 3m$; $d: y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Theo yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 2$ có đúng 2 nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow mx^2 + 2(m-1)x + 2 - 3m = 0$ có đúng 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} < m < \frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy, với $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$ thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = -x^3 + 6x + 2$ có đồ thị là (C) và đường thẳng $d: y = mx - m - 1$. Tìm giá trị của tham số m để d cắt (C) tại ba điểm A, B, C sao cho tổng các hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị (C) tại A, B, C bằng -6 .

A. $m = -3$

B. $m = -1$

C. $m = 1$

D. $m = 2$

Phân tích

d cắt (C) tại ba điểm $A, B, C \Leftrightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 . Áp dụng Vi-et. Tổng các hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị (C) tại A, B, C bằng $-6 \Leftrightarrow y'(x_1) + y'(x_2) + y'(x_3) = -6$.

Lời giải

Chọn D.

+ Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d :

$$-x^3 + 6x + 2 = mx - m - 1 \Leftrightarrow x^3 + (m-6)x - m - 3 = 0(1).$$

+ Giả sử phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 . Khi đó:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = m-6 \\ x_1x_2x_3 = m+3 \end{cases}$$

+ Theo giả thiết ta có: $(-3x_1^2 + 6) + (-3x_2^2 + 6) + (-3x_3^2 + 6) = -6$

$$\Leftrightarrow -3(x_1 + x_2 + x_3)^2 + 6(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) + 24 = 0(*)$$

$$\Leftrightarrow -3 \cdot 0 + 6(m-6) + 24 = 0 \Leftrightarrow m = 2.$$

+ Thử lại $m = 2$ thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 3. Tìm một tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$, biết tiếp tuyến cắt trục Ox , Oy lần lượt tại A, B thỏa mãn $OB = 9OA$.

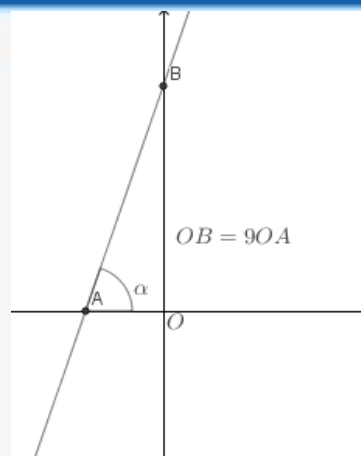
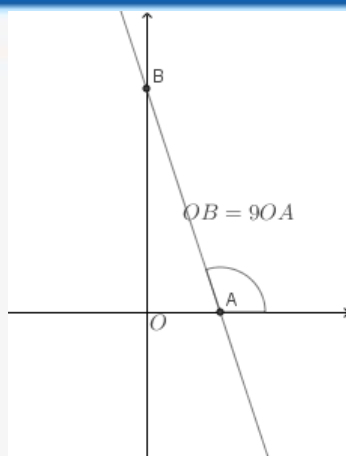
A. $y = 9x + 7$.

B. $y = 9x - 25$.

C. $y = 9x + 25$.

D. $y = 9x - 7$.

Phân tích



Dựa vào hình vẽ $\Rightarrow \begin{cases} k = \tan \alpha = \frac{OB}{OA} = 9 \\ k = -\tan \alpha = -9 \end{cases}$

Tìm được $x_0 \Rightarrow y_0$.

Viết phương trình tiếp tuyến.

Lời giải

Chọn A.

Gọi điểm $M(x_0; x_0^3 - 3x_0^2 + 2)$ là toạ độ tiếp điểm. Do $OB = 9OA$, suy ra

$$\begin{cases} k = 9 \\ k = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 9 \\ f'(x_0) = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0 \\ x_0^2 - 2x_0 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}.$$

Suy ra $\begin{cases} y = 9x + 7 \\ y = 9x - 25 \end{cases}$.

Ví dụ tương tự: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến này cắt các trục Ox , Oy lần lượt tại các điểm A và B thỏa mãn $OA = 4OB$.

Lời giải

Giả sử tiếp tuyến d của (C) tại $M(x_0; y_0) \in (C)$ cắt Ox tại A, Oy tại B sao cho $OA = 4OB$.

Do $\triangle OAB$ vuông tại O nên $\tan A = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{4} \Rightarrow$ Hệ số góc của d bằng $\frac{1}{4}$ hoặc $-\frac{1}{4}$.

$$\text{Hệ số góc của } d \text{ là } y'(x_0) = -\frac{1}{(x_0-1)^2} < 0 \Rightarrow -\frac{1}{(x_0-1)^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 & (y_0 = \frac{3}{2}) \\ x_0 = 3 & (y_0 = \frac{5}{2}) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó có 2 tiếp tuyến thỏa mãn là: } \begin{cases} y = -\frac{1}{4}(x+1) + \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{4}(x-3) + \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} \\ y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4} \end{cases}$$

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có đồ thị là (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) , biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d: y = -x + 1$ một góc α thỏa $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$.

A. $y = -\frac{1}{9}\left(x - \frac{9 \pm \sqrt{321}}{9}\right) + 9.$

B. $y = -\frac{1}{9}\left(x - \frac{9 \pm \sqrt{321}}{9}\right) + 34.$

C. $y = -\frac{1}{9}\left(x - \frac{9 \pm \sqrt{321}}{9}\right) + 7.$

D. Đáp án khác.

Phân tích

Tiếp tuyến có hệ số góc $k = y'(x_0)$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến Δ tại M .

Từ đó suy ra vecto pháp tuyến.

Áp dụng công thức góc giữa hai đường thẳng. Tìm được k .

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 3(x^2 - 2x - 3)$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

Phương trình tiếp tuyến Δ tại M : $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Hay $kx - y + b = 0$, Với $k = y'(x_0)$

Theo bài ra ta có: $\cos \alpha = \frac{|k-1|}{\sqrt{k^2+1}\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{41}}$

$$\Leftrightarrow 41(k-1)^2 = 50(k^2+1) \Leftrightarrow 9k^2 + 82k + 9 = 0 \Leftrightarrow k = -9, k = -\frac{1}{9}.$$

- $k = -9 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0, x_0 = 2$

Từ đó ta tìm được hai tiếp tuyến: $y = -9x + 1$ và $y = -9x - 3$.

$$\bullet \quad k = -\frac{1}{9} \Leftrightarrow 27x_0^2 - 54x_0 - 80 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{9 \pm \sqrt{321}}{9}.$$

Từ đó ta tìm được hai tiếp tuyến là: $y = -\frac{1}{9}\left(x - \frac{9 \pm \sqrt{321}}{9}\right) + y(x_0)$.

Ví dụ tương tự: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết rằng tiếp tuyến tạo với trục hoành một góc bằng 45°

Lời giải

Ta có: $y' = \frac{-1}{(2x+3)^2}$

Vì tiếp tuyến tạo với Ox một góc 45° nên hệ số góc là: $k = \pm 1$

Khi đó gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị (C) ta có $y'(x_0) = \pm 1$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{(2x_0+3)^2} = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ x_0 = -1 \end{cases}$$

Với $x_0 = -1$ thì $y_0 = 1$ lúc đó tiếp tuyến có dạng $y = -x$

Với $x_0 = -2$ thì $y_0 = -4$ lúc đó tiếp tuyến có dạng $y = -x - 2$

Vậy tiếp tuyến cần tìm là $y = -x$ và $y = -x - 2$

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 + (4-3m)x + 1$ có đồ thị là (C_m) . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho trên đồ thị (C_m) tồn tại một điểm duy nhất có hoành độ âm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $(d): x + 2y - 3 = 0$.

A. $m < 12$ hoặc $m > \frac{2}{3}$. **B.** $m < 0$ hoặc $m > 1$. **C.** $m < 1$ hoặc $m > \frac{1}{3}$. **D.** $m < 0$ hoặc $m > \frac{2}{3}$.

Phân tích: Dễ thấy (d) có hệ số góc $-\frac{1}{2} \Rightarrow$ tiếp tuyến có hệ số góc $k = 2$ hay $y' = 2$.

Giải và biện luận phương trình $y' = 2$ ta được giá trị m cần tìm {Lưu ý rằng phương trình $y' = 2$ phải có một nghiệm âm}

Lời giải

Chọn D

(d) có hệ số góc $-\frac{1}{2} \Rightarrow$ tiếp tuyến có hệ số góc $k = 2$. Gọi x là hoành độ tiếp điểm thì:

$$y' = 2 \Leftrightarrow mx^2 + 2(m-1)x + (4-3m) = 2 \Leftrightarrow mx^2 + 2(m-1)x + 2 - 3m = 0 \quad (*)$$

Theo bài toán, phương trình (*) có đúng một nghiệm âm.

Nếu $m = 0$ thì (*) $\Leftrightarrow -2x = -2 \Leftrightarrow x = 1$ (không thỏa)

Nếu $m \neq 0$ thì dễ thấy phương trình (*) có 2 nghiệm là $x = 1$ hay $x = \frac{2-3m}{m}$.

Do đó để (*) có một nghiệm âm thì $\frac{2-3m}{m} < 0 \Leftrightarrow m < 0$ hoặc $m > \frac{2}{3}$.

3. Bài tập tự luyện.

Bài 1. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của (C) đi qua điểm nào dưới đây?

- A. (1;5). B. (2;4). C. (3;-5). D. (0;-4).

Bài tập tương tự: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (3m-2)x + m^2 + 2m$, với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị hàm số đi qua $A(-1;3)$. Khi đó tổng các phần tử của S bằng

- A. 1. B. 9. C. -9. D. -1.

Bài 2. Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ có đồ thị (C). Đường thẳng (d) tiếp xúc với (C) tại điểm có tung độ dương, cắt các trục Ox , Oy lần lượt tại A , B ($A \neq B$) mà $4OA = 9OB$. Tính độ dài đoạn AB .

- A. $AB = \frac{11\sqrt{97}}{36}$. B. $AB = \frac{37\sqrt{97}}{36}$. C. $AB = \frac{11\sqrt{13}}{6}$. D. $AB = \frac{37\sqrt{13}}{6}$.

Bài 3. Cho hàm số $y = \frac{3x-2}{x+1}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) , biết tiếp tuyến cắt đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của (C) lần lượt tại A, B mà $\cos BAI = \frac{5}{\sqrt{26}}$.

A. $y = 5x - 2$ và $y = 5x - 18$.

B. $y = 5x + 2$ và $y = 5x - 18$.

C. $y = -5x + 2$ và $y = -5x + 18$.

D. $y = 5x - 2$ và $y = 5x + 18$

Bài 4. Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x+1}$ có đồ thị (C) . Tìm các giá trị thực của k biết tồn tại hai tiếp tuyến phân biệt của (C) có cùng hệ số góc bằng k , đồng thời đường thẳng đi qua hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến đó cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $OA = OB$

A. $k = 1$.

B. $k = -1$

C. $k = 2$.

D. $k = 1$ và $k = -1$.

Bài 5. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) . Trên (C) có hai điểm A, B sao cho tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau và $AB = 4\sqrt{2}$. Tính $y_A^2 + y_B^2$.

A. 8.

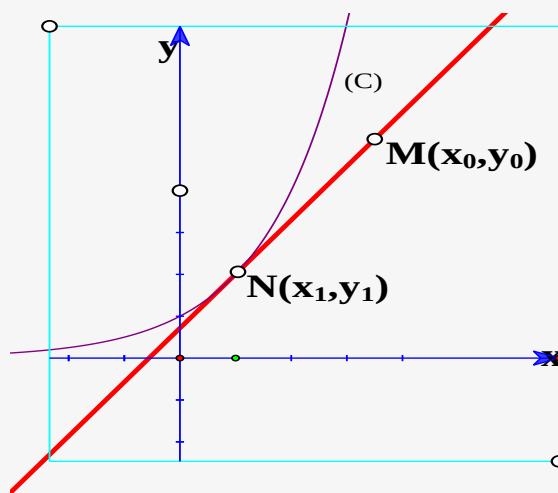
B. 13.

C. 10.

D. 17.

Dạng 3: Tiếp tuyến đi qua

1. Phương pháp



Để viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ biết tiếp tuyến đi qua $M(x_0; y_0)$ ta có thể dùng 2 phương pháp sau:

Phương pháp 1:

□ Gọi d là đường thẳng qua $M(x_0; y_0)$ với hệ số góc là k , khi đó d có phương trình:

$$y = k(x - x_0) + y_0$$

□ Điều kiện để d tiếp xúc với (C) là:
$$\begin{cases} k(x - x_0) + y_0 = f(x) \\ k = f'(x) \end{cases} \quad (I)$$

□ Giải hệ (I) bằng cách thay k từ phương trình dưới lên phương trình trên.

Chú ý: số nghiệm của hệ (I) chính là số tiếp tuyến kẻ từ $M(x_0; y_0)$ đến đồ thị (C)

Phương pháp 2:

□ Gọi $N(x_1; f(x_1)) \in (C)$ là tiếp điểm (nếu có) của tiếp tuyến cần tìm, phương trình tiếp tuyến tại N là: $y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) \quad (*)$.

□ Tiếp tuyến này qua $M(x_0; y_0)$ nên thay tọa độ M vào ta được một phương trình theo x_1 .

□ Giải phương trình này, thay x_1 vừa tìm được vào phương trình $(*)$ ta được phương trình các tiếp tuyến cần tìm.

2. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = 3x - 4x^3$ có đồ thị (C) . Từ điểm $M(1; 3)$ có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị hàm số (C) ?

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Phân tích:

Bài này hỏi số tiếp tuyến nên ta giải theo cách tìm phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua M . Ta có thể dùng phương pháp 1 hoặc phương pháp 2 đều được nhưng chỉ cần tìm ra bao nhiêu hệ số góc k là được. Cụ thể:

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đường thẳng đi qua $M(1; 3)$ có hệ số góc k có dạng: $y = k(x - 1) + 3 \quad (d)$.

Điều kiện để (d) là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 3x - 4x^3 = k(x - 1) + 3 & (1) \\ 3 - 12x^2 = k & (2) \end{cases} \quad \text{Thay (2) vào (1) ta được:}$$

$$3x - 4x^3 = (3 - 12x^2)(x - 1) + 3 \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = -24 \end{cases}$$

Vậy có 2 tiếp tuyến.

Ví dụ tương tự: Cho đồ thị $(C): y = x^3 - 3x + 1$, phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(-2; -1)$ có phương trình

A. $y = -1, y = 9x + 17$

B. $y = 9x + 17, y = -9x + 17$

C. $y = 1, y = 9x + 17$

D. $y = 9x - 17, y = -9x - 17$

Hướng dẫn giải :

Chọn A

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$

Gọi $M(x_0; x_0^3 - 3x_0 + 1)$ là tiếp điểm. Hệ số góc của tiếp tuyến là $y'(x_0) = 3x_0^2 - 3$.

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M là $\Delta: y - (x_0^3 - 3x_0 + 1) = (3x_0^2 - 3)(x - x_0)$

Δ qua $A(-2; -1)$ nên ta có: $-1 - (x_0^3 - 3x_0 + 1) = (3x_0^2 - 3)(-2 - x_0) \Leftrightarrow x_0^3 + 3x_0^2 - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 1)(x_0^2 + 4x_0 + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -1 \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -1 \end{cases}$$

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm có phương trình là: $\Delta: y = -1; \Delta: y = 9x + 17$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C) . Gọi I là giao điểm hai tiệm cận của (C)

. Tìm điểm M thuộc (C) có hoành độ lớn hơn 1 sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng MI .

A. $M(2; 3)$.

B. $M\left(3; \frac{5}{2}\right)$.

C. $M\left(4; \frac{7}{3}\right)$.

D. $M(5; 3)$.

Phân tích:

Trước tiên xác định tọa độ I , sau đó viết phương trình tiếp tuyến tổng quát tại một điểm $M \in (C)$. Dùng điều kiện IM vuông góc với tiếp tuyến tại M để tìm M .

Chú ý: Đối với trắc nghiệm ta có thể thử tại các điểm M của đáp án. Tức là ta tính $y'(x_M)$ và hệ số góc của đường thẳng IM . Nếu tích $k_{IM} \cdot y'(x_M) = -1$ thì điểm M đó thỏa yêu cầu bài toán.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Giao điểm của hai tiệm cận là $I(1; 2)$. Gọi $M\left(x_0; \frac{2x_0-1}{x_0-1}\right) \in (C)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y = -\frac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0-1}{x_0-1}$.

Phương trình đường thẳng MI : $y = \frac{1}{(x_0-1)^2}(x-1) + 2$.

Tiếp tuyến tại M vuông góc với MI nên ta có:

$$-\frac{1}{(x_0-1)^2} \cdot \frac{1}{(x_0-1)^2} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \text{ (loại)} \\ x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 3 \end{cases}$$

Vậy điểm cần tìm là $M(2; 3)$.

Ví dụ 3: Gọi (C) là đồ thị của hàm số: $y = \frac{2x-2}{x+1}$, khoảng cách từ điểm $I(-1; 2)$ đến các tiếp tuyến của (C) lớn nhất là:

- A. 4 B. $2\sqrt{2}$ C. $3\sqrt{2}$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Phân tích:

Bài này chúng ta cũng giải theo hướng viết phương trình tổng quát một tiếp tuyến bất kì của (C) , sau đó đánh giá khoảng cách từ I đến tiếp tuyến đó để suy ra khoảng cách lớn nhất.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Gọi Δ là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại tiếp điểm $M\left(a; \frac{2a-2}{a+1}\right)$, $(M \in (C))$.

Ta có: $y' = \frac{4}{(x+1)^2} \Rightarrow y'(a) = \frac{4}{(a+1)^2}$, $(a \neq -1)$

$$\text{Vậy } \Delta: y - \frac{2a-2}{a+1} = \frac{4}{(a+1)^2} (x-a) \Leftrightarrow 4x - (a+1)^2 y + 2a^2 - 4a - 2 = 0 \quad (*)$$

$$d(I; \Delta) = \frac{|4(-1) - (a+1)^2 \cdot 2 + 2a^2 - 4a - 2|}{\sqrt{4 + (a+1)^4}} = \frac{8|a+1|}{\sqrt{4 + (a+1)^4}}.$$

$$\text{Ta có: } 4 + (a+1)^4 = 2^2 + [(a+1)^2]^2 \geq 2 \cdot 2(a+1)^2 \Rightarrow \sqrt{4 + (a+1)^4} \geq \sqrt{2 \cdot 2(a+1)^2} = 2|a+1|$$

$$\Rightarrow d(I; \Delta) \leq \frac{8|a+1|}{2|a+1|} = 4. \text{ Vậy } d(I; \Delta) \text{ lớn nhất khi } d(I; \Delta) = 4$$

$$\Leftrightarrow 2^2 = (a+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a+1=2 \\ a+1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-3 \end{cases}. \text{ Cả hai giá trị đều thỏa mãn } a \neq 1$$

Vậy khoảng cách lớn nhất từ I đến các tiếp tuyến của (C) là 4.

Ví dụ 4: Có bao nhiêu điểm trên Oy mà từ đó kẻ được đúng 1 tiếp tuyến đến đồ thị (C) :

$$y = \frac{x+2}{x-2}?$$

A. 2

B. 3

C. 1

D. 0

Phân tích :

Ta giải theo hướng viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đó đi qua một điểm trên Oy , sau đó tìm điều kiện để hệ phương trình (nếu giải theo phương pháp 1) hay phương trình (nếu giải theo phương pháp 2) có đúng một nghiệm.

Chú ý : Phương trình bậc hai có một nghiệm khi $\Delta = 0$

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Lấy $A(0; a) \in Oy$. Đường thẳng d đi qua A có hệ số góc k có phương trình $y = kx + a$.

$$d \text{ là tiếp tuyến với } (C) \Leftrightarrow \begin{cases} kx + a = \frac{x+2}{x-2} & (1) \\ k = \frac{-4}{(x-2)^2} & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$\Rightarrow \frac{x+2}{x-2} = \frac{-4x}{(x-2)^2} + a \Leftrightarrow g(x) = (a-1)x^2 - 4(a+1)x + 4a + 4 = 0 \quad (*)$$

Đề từ A kẻ được đúng 1 tiếp tuyến đến (C) thì phương trình (*) có duy nhất 1 nghiệm x khác 2.

Xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $a-1=0 \Leftrightarrow a=1$. Khi đó (*) trở thành: $-8x+8=0 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2:
$$\begin{cases} a-1 \neq 0 \\ g(2) = -8 \neq 0 \Leftrightarrow a = -1. \text{ Khi đó (*) có nghiệm } x = 0 \text{ (thỏa mãn)} \\ \Delta' = 8a+8 = 0 \end{cases}$$

Vậy tìm được 2 điểm thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 9$ có đồ thị (C). Gọi (d) là tiếp tuyến của (C) tại $A \in (C)$ có $x_A = 4$. Tìm trên (d) các điểm M sao cho từ mỗi điểm ấy vẽ được đúng 3 tiếp tuyến với (C).

A. Các điểm M có hoành độ m thỏa mãn $m \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{10}{3}; +\infty\right) / \{4\}$.

B. Các điểm M có hoành độ m thỏa mãn $m \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{10}{3}; +\infty\right)$.

C. Các điểm M có hoành độ m thỏa mãn

D. Không có điểm M nào thỏa mãn.

Phân tích:

Ví dụ này khá tương tự ví dụ 4, trước tiên ta viết phương trình của d. Sau đó viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đi qua 1 điểm trên d. Cuối cùng tìm điều kiện để hệ phương trình (hoặc phương trình) có đủ ba nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Do A thuộc (C) nên $A(4;5)$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại A là:

$$y = f'(4)(x-4) + 5 \Leftrightarrow y = -9x + 41$$

Giả sử $M(m; -9m+41)$ là một điểm trên (d). Xét đường thẳng Δ bất kì qua M và có hệ số góc k khi đó $\Delta: y = k(x-m) + 41 - 9m$.

$$\Delta \text{ tiếp xúc với (C)} \Leftrightarrow \text{Hệ} \begin{cases} -x^3 - 6x^2 - 9x + 9 = k(x-m) + 41 - 9m & (1) \\ -3x^2 + 12x - 9 = k & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$-x^3 - 6x^2 - 9x + 9 = (x - m)(-3x^2 + 12x - 9) + 41 - 9m$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)[2x^2 + (2 - 3m)x + 8] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 2x^2 + (2 - 3m)x + 8 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Để từ M kẻ được 3 tiếp tuyến với (C) thì (3) phải có 2 nghiệm phân biệt và khác 4

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9m^2 - 12m - 60 > 0 \\ 48 - 12m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > \frac{10}{3} \\ m \neq 4 \end{cases}$$

Vậy, những điểm trên (d) mà từ đó vẽ được 3 tiếp tuyến với (C) là những điểm có hoành độ

$$m \text{ thỏa mãn: } m \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{10}{3}; +\infty\right) \setminus \{4\}.$$

3. Bài tập tự luyện

Bài tập 1: Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C) , điểm M thay đổi thuộc đường thẳng

$d: y = 1 - 2x$ sao cho qua M có hai tiếp tuyến của (C) với hai tiếp điểm tương ứng là A, B . Biết rằng đường thẳng AB luôn đi qua điểm cố định là K . Độ dài đoạn thẳng OK là

A. $\sqrt{58}$. B. $\sqrt{34}$. C. $\sqrt{29}$. D. $\sqrt{10}$

Bài tập 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C) và điểm $A(a; 2)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để có đúng ba tiếp tuyến của (C) đi qua A . Tập hợp S bằng

A. $S = (-\infty; -1)$. B. $S = \emptyset$.

C. $S = \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup (2; +\infty)$. D. $S = \left[-\frac{2}{3}; 2\right]$

Bài tập 3: Cho hàm số $y = |x^3| - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) . Hỏi trên trục Oy có bao nhiêu điểm A mà qua A có thể kẻ đến (C) đúng ba tiếp tuyến?

A. 0. B. 3. C. 1. D. 2

Bài tập 4: Cho đồ thị $(C): y = \frac{x}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}$. Gọi $M(0; m)$ là điểm trên trục tung mà từ đó ta kẻ được ít nhất một tiếp tuyến đến đồ thị (C) . Biết tập hợp các giá trị của m là nửa khoảng $(a; b]$. Giá trị của $a + b$ bằng

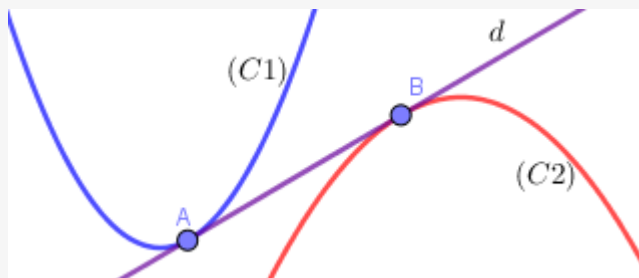
A. 1. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 1

- Bài tập 5:** Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0;a)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để từ A kẻ được hai tiếp tuyến AM, AN đến (C) với M, N là các tiếp điểm và $MN = 4$. Tổng các phần tử của S bằng
- A. 4. B. 3. C. 6. D. 8.

Dạng 4: Tiếp tuyến chung của hai đường cong

Bài toán tổng quát: Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đồ thị hàm số $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$.

1. Phương pháp



* **Bước 1.** Gọi d tiếp tuyến chung của $(C_1), (C_2)$ và x_0 là hoành độ tiếp điểm của d với (C_1) thì phương trình d có dạng:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \quad (*)$$

* **Bước 2.** Dùng điều kiện tiếp xúc của d và (C_2) , ta tìm được x_0 .

* **Bước 3.** Thế x_0 vào $(*)$ ta được tiếp tuyến cần tìm.

* **Chú ý.** Số nghiệm x_0 chính là số tiếp tuyến chung của C_1 và C_2 .

2. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho parabol $P: y = x^2 - 8x + 4$ và đồ thị $C: y = x^3 - 4x^2$. Giả sử tiếp tuyến chung của parabol P và đồ thị C có phương trình là $y = ax + b$. Giá trị của $a^3 + b$ bằng

- A. -27. B. 27. C. -64 D. 64.

Phân tích:

Gọi d là tiếp tuyến chung của parabol P và đồ thị C .

Ta nên gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của d với (P) hay C ???

* Nếu ta gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của d với (P) thì đường thẳng d có phương trình dạng:

$$y = 2x_0 - 8 \quad x - x_0 + x_0^2 - 8x_0 + 4 \Rightarrow y = 2x_0 - 8 \quad x - x_0^2 + 4$$

Khi đó d tiếp xúc với C khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^3 - 4x^2 = 2x_0 - 8x - x_0^2 + 4 & 1 \\ 3x^2 - 8x = 2x_0 - 8 & 2 \end{cases}$$

Rút x_0 từ 2 rồi thay vào 1 ta được phương trình đa thức theo ẩn x . Giải phương trình này sẽ

tìm được x . Thay x vào 2 ta sẽ tìm được x_0 từ đó suy ra phương trình tiếp tuyến.

* Nếu ta gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của d với (C) thì đường thẳng d có phương trình dạng:

$$y = 3x_0^2 - 8x_0(x - x_0) + x_0^3 - 4x_0^2 \Rightarrow y = 3x_0^2 - 8x_0x - 2x_0^3 + 4x_0^2$$

Khi đó d tiếp xúc với P khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 4 = 3x_0^2 - 8x_0x - 2x_0^3 + 4x_0^2 & 3 \\ 2x - 8 = 3x_0^2 - 8x_0 & 4 \end{cases}$$

Rút x từ 4 thay vào 3 ta được phương trình đa thức theo x_0 . Giải phương trình này sẽ tìm được x_0 từ đó suy ra phương trình tiếp tuyến.

* Như vậy ta có thể gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của d với (P) hay C đều thực hiện được lời

giải. Tuy nhiên cách gọi phía trên cho ta phép thế đơn giản hơn.

Lời giải

Chọn C

Gọi d là tiếp tuyến chung của parabol P và đồ thị C .

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của d với (P) thì đường thẳng d có phương trình dạng:

$$y = 2x_0 - 8(x - x_0) + x_0^2 - 8x_0 + 4 \Rightarrow y = 2x_0 - 8x - x_0^2 + 4 \quad *$$

Khi đó d tiếp xúc với C khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^3 - 4x^2 = 2x_0 - 8x - x_0^2 + 4 & 1 \\ 3x^2 - 8x = 2x_0 - 8 & 2 \end{cases}$$

Thay x_0 từ 2 vào 1 ta có:

$$x^3 - 4x^2 = 3x^2 - 8x - \left(\frac{3x^2 - 8x + 8}{2} \right)^2 + 4 \quad 3$$

Rút gọn phương trình 3, ta được phương trình tương đương:

$$9x^4 - 56x^3 + 128x^2 - 128x + 48 = 0 \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(9x^3 - 38x^2 + 52x - 24) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2(9x^2 - 20x + 12) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Với $x = 2$ thay vào (2) ta có $x_0 = 2$ thay vào (*) ta có phương trình tiếp tuyến là: $y = -4x$.

Do

$$\text{đó } a = -4, b = 0 \Rightarrow a^3 + b = -64.$$

Bình luận:

* Mấu chốt của bài toán là ta cần giải phương trình bậc cao (phương trình (4)):

+ Sử dụng mode 7 ta sẽ rà được nghiệm đẹp $x = 2$, từ đó đưa được về phương trình bậc 3, sử dụng mode 5, 4 ta sẽ tìm được các nghiệm còn lại.

+ Nếu phương trình bậc cao có nghiệm vô tỷ (không có nghiệm hữu tỷ) thì ta thường đưa về nhân tử có chứa bậc hai $ax^2 + bx + c$.

Bài tập tương tự ví dụ 1: Cho parabol $P: y = x^2 + 1$ và đồ thị $C: y = x^4 - x^2 + 2$. Giả sử các

tiếp tuyến chung của parabol P và đồ thị C có phương trình là $y = ax + b, y = cx + d$. Giá trị

của $a + b + c + d$ bằng

A. 2.

B. 4.

C. 6.

D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Gọi d là tiếp tuyến chung của parabol P và đồ thị C .

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của d với (P) thì đường thẳng d có phương trình dạng:

$$y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2 + 1 \Rightarrow y = 2x_0x - x_0^2 + 1 \quad (*)$$

$$\text{Khi đó } d \text{ tiếp xúc với } C \text{ khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm: } \begin{cases} x^4 - x^2 + 2 = 2x_0x - x_0^2 + 1 & (1) \\ 2x^3 - x = x_0 & (2) \end{cases}$$

Thay x_0 từ (2) vào (1) ta có:

$$4x^3 - 2x^2 - 4x^6 - 4x^4 + x^2 + 1 = x^4 - x^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow 4x^6 - 7x^4 + 2x^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Với $x = 1$ thay vào (2) ta có $x_0 = 1$ thay vào (*) ta có phương trình tiếp tuyến là: $y = 2x$. Do đó $a = 2, b = 0$.

Với $x = -1$ thay vào (2) ta có $x_0 = -1$ thay vào (*) ta có phương trình tiếp tuyến là: $y = -2x$. Do đó $c = -2, d = 0$.

Vậy $a + b + c + d = 0$.

Ví dụ 2: Cho các đồ thị $C_1 : y = x^3 - 3x - \frac{1}{3}$ và $C_2 : y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 4x$. Giả sử tiếp tuyến chung của các đồ thị C_1 và C_2 có phương trình là $y = ax + b$. Giá trị của $a.b$ là

A. 1.

B. 3.

C. -1.

D. -3.

Phân tích:

Gọi d là tiếp tuyến chung của các đồ thị C_1 và C_2 .

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của d với C_1 thì đường thẳng d có phương trình dạng:

$$y = 3x_0^2 - 3x - x_0 + x_0^3 - 3x_0 - \frac{1}{3} \Rightarrow y = 3x_0^2 - 3x - 2x_0^3 - \frac{1}{3}$$

Khi đó d tiếp xúc với C_2 khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 4x = 3x_0^2 - 3x - 2x_0^3 - \frac{1}{3} & (1) \\ -x^2 + 2x - 4 = 3x_0^2 - 3 & (2) \end{cases}$$

Đến đây ta nhận thấy các biến x và x_0 trong hai phương trình đều có bậc lớn hơn hoặc bằng 2.

Do đó dùng phương pháp thế như trong ví dụ 1 sẽ không khả thi.

Cách giải quyết ???

Xét phương trình (2) ta có:

$$\begin{cases} VP: 2 = 3x_0^2 - 3 \geq -3, \forall x_0 \\ VT: 2 = -x - 1 \leq -3, \forall x \end{cases} \Rightarrow (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Sau đó ta sẽ suy ra kết quả.

Lời giải

Chọn A

Gọi d là tiếp tuyến chung của các đồ thị C_1 và C_2 .

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của d với C_1 thì đường thẳng d có phương trình dạng:

$$y = 3x_0^2 - 3x - x_0 + x_0^3 - 3x_0 - \frac{1}{3} \Rightarrow y = 3x_0^2 - 3x - 2x_0^3 - \frac{1}{3} \quad *$$

Khi đó d tiếp xúc với C_2 khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 4x = 3x_0^2 - 3x - 2x_0^3 - \frac{1}{3} & 1 \\ -x^2 + 2x - 4 = 3x_0^2 - 3 & 2 \end{cases}$$

Ta có:
$$\begin{cases} VP \quad 2 = 3x_0^2 - 3 \geq -3, \forall x_0 \\ VT \quad 2 = -x - 1^2 - 3 \leq -3, \forall x \end{cases}$$

Do đó $2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0^2 - 3 = -3 \\ -x - 1^2 - 3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ thay vào 1 thỏa mãn.

Với $x_0 = 0$ thay vào phương trình $*$ ta có phương trình tiếp tuyến chung của các đồ thị

C_1

và C_2 là: $y = -3x - \frac{1}{3} \Rightarrow a.b = 1$.

Bình luận:

Mấu chốt của cách giải bài toán là ta đánh giá được hai vế của phương trình 2.

Bài tập tương tự ví dụ 2: Cho các đồ thị $C_1 : y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x$ và

$C_2 : y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x + \frac{1}{3}$. Giả sử tiếp tuyến chung của các đồ thị C_1 và C_2 có phương trình là $y = ax + b$. Giá trị của $a.b$ bằng

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $-\frac{3}{2}$.

D. $-\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Gọi d là tiếp tuyến chung của C_1 và C_2 .

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của d với C_2 thì đường thẳng d có phương trình dạng:

$$y = -x_0^2 + 2x - x_0 - \frac{1}{3}x_0^3 + 2x_0 + \frac{1}{3} \Rightarrow y = 2 - x_0^2 x + \frac{2}{3}x_0^3 + \frac{1}{3} *$$

Khi đó d tiếp xúc với C_1 khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x = 2 - x_0^2 x + \frac{2}{3}x_0^3 + \frac{1}{3} \\ x^2 - 2x + 3 = 2 - x_0^2 \end{cases} \quad 1$$

Từ 1 ta có $x^2 - 2x + 3 = 2 - x_0^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = -x_0^2$

Vì $(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $-x_0^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên 2 có nghiệm $x_0 = 0$.

Với $x_0 = 0$ thay vào * ta có tiếp tuyến $d: y = 2x + \frac{1}{3} \Rightarrow a = 2, b = \frac{1}{3}$

Vậy $a.b = \frac{2}{3}$

Ví dụ 3: Cho parabol $P: y = x^2 - 3x + 6$ và đồ thị $C: y = x^3 - x^2 + 3$. Có bao tiếp tuyến chung của parabol P và đồ thị C ?

A. 1.

B. 4.

C. 3

D. 2.

Phân tích:

Làm tương tự như ví dụ 1, sau đó đưa về bài toán tìm số nghiệm của phương trình bậc cao (phương trình bậc 4).

Lời giải

Chọn D

Gọi d là tiếp tuyến chung của parabol P và đồ thị C .

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của d với (P) thì đường thẳng d có phương trình dạng:

$$y = 2x_0 - 3x - x_0^2 + 3x_0 + 6 \Rightarrow y = 2x_0 - 3x - x_0^2 + 6$$

Khi đó d tiếp xúc với C khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^3 - x^2 + 3 = 2x_0 - 3x - x_0^2 + 6 & 1 \\ 3x^2 - 2x = 2x_0 - 3 & 2 \end{cases}$$

Thay x_0 từ 2 vào 1 ta có:

$$x^3 - x^2 + 3 = 3x^2 - 2x - \left(\frac{3x^2 - 2x + 3}{2} \right)^2 + 6 \quad 3$$

Rút gọn phương trình 3, ta được phương trình tương đương:

$$9x^4 - 20x^3 + 26x^2 - 12x - 3 = 0 \Leftrightarrow x - 1 \mid 9x^3 - 11x^2 + 15x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 9x^3 - 11x^2 + 15x + 3 = 0 \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = 9x^3 - 11x^2 + 15x + 3$. Ta có

$f'(x) = 27x^2 - 22x + 15 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số $f(x) = 9x^3 - 11x^2 + 15x + 3$ đồng biến trên

$\mathbb{R}$. Mà phương trình bậc ba luôn luôn có ít nhất một nghiệm thực. Do đó phương trình

$9x^3 - 11x^2 + 15x + 3 = 0$ có duy nhất một nghiệm thực (nghiệm duy nhất này khác 1). Tức là có

hai tiếp tuyến thỏa mãn đề bài.

Bình luận:

Chúng ta có thể sử dụng mode 5,4 để biết phương trình $9x^3 - 11x^2 + 15x + 3 = 0$ có duy nhất một

nghiệm khác 1.

Bài tập tương tự ví dụ 3:

Cho parabol $P: y = x^2 + 5x + 1$ và đồ thị $C: y = x^3 - 2x^2 + 4x$. Có bao nhiêu tiếp tuyến chung của parabol P và đồ thị C ?

A. 1.

B. 4.

C. 3

D. 2.

Ví dụ 4: Cho parabol $P: y = x^2 + m$ và đồ thị $C: y = \frac{-4}{x-1}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của

tham số m nhỏ hơn 2019 sao cho parabol P và đồ thị C có tiếp tuyến chung?

A. 2025.

B. 2026.

C. 2024

D. 2027.

Phân tích:

Làm tương tự ví dụ 1, sau đó quy về bài toán tìm điều kiện của tham số m để phương trình có nghiệm.

Lời giải

Chọn B

Gọi d là tiếp tuyến chung của parabol P và đồ thị C .

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của d với (P) thì đường thẳng d có phương trình dạng:

$$y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2 + m \Rightarrow y = 2x_0x - x_0^2 + m$$

Khi đó d tiếp xúc với C khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \frac{-4}{x-1} = 2x_0x - x_0^2 + m & 1 \\ \frac{4}{(x-1)^2} = 2x_0 & 2 \end{cases} \quad x \neq 1$$

Thay x_0 từ 2 vào 1 ta có:

$$\frac{-4}{x-1} = \frac{4x}{x-1} - \frac{4}{x-1} + m \Leftrightarrow m = \frac{4}{x-1} - \frac{4(x-1)+4}{(x-1)^2} - \frac{4}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{4}{x-1} - \frac{4}{x-1} - \frac{8}{x-1} = -\frac{8}{x-1}, t = \frac{1}{x-1} \neq 0$$

Xét hàm số $f(t) = 4t^4 - 4t^2 - 8t, t \neq 0$

Ta có $f'(t) = 16t^3 - 8t - 8 = 0 \Leftrightarrow 2t^3 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2 + 2t + 1) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Bảng biến thiên của $f(t) = 4t^4 - 4t^2 - 8t, t \neq 0$

t	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$	$+\infty$		-8	$+\infty$

YCBT $\Leftrightarrow 1$ có nghiệm $t \neq 0$ khi và chỉ khi $m \in -8; +\infty \setminus 0$.

Do m nguyên nhỏ hơn 2019 nên có 2026 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Bình luận:

+ Sau khi thay x_0 từ 2 vào 1 ta đã đưa phương trình về phương trình đa thức theo $\frac{1}{x-1}$.

+ Học sinh dễ mắc sai lầm khi không xét $m = 0$.

Bài tập tương tự ví dụ 4: Cho parabol $P : y = x^2 + x + m$ và đồ thị $C : y = \frac{-x+2}{x+1}$. Có bao

hiệu giá trị nguyên của tham số m không lớn hơn 100 sao cho parabol P và đồ thị C có tiếp tuyến chung ?

- A. 119. B. 120. C. 121 D. 122.

Ví dụ 5: Cho parabol $P : y = x^2 + 4x + m$ và đồ thị $C : y = \frac{8x-5}{2x-1}$. Tìm tất cả các giá trị của

tham số m sao cho parabol P và đồ thị C có tiếp tuyến chung thỏa mãn hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến chung đó với đồ thị C thuộc nửa khoảng $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$.

- A. $m \geq 0$. B. $m \geq 1$. C. $m \geq -1$. D. $m \geq -2$.

Phân tích:

Làm tương tự ví dụ 4, sau đó quy về bài toán tìm điều kiện của tham số m để phương trình có nghiệm thuộc một miền cho trước.

Lời giải

Chọn A.

Gọi d là tiếp tuyến chung của parabol P và đồ thị C .

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của d với (P) thì đường thẳng d có phương trình dạng:

$$y = 2x_0 + 4 \quad x - x_0 + x_0^2 + 4x_0 + m \Rightarrow y = 2x_0 + 4 \quad x - x_0^2 + m$$

Khi đó d tiếp xúc với C khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \frac{8x-5}{2x-1} = 2x_0 + 4 \quad x - x_0^2 + m & 1 \\ \frac{2}{2x-1} = 2x_0 + 4 & 2 \end{cases} \quad x \neq 1$$

$$\text{Thay } x_0 \text{ từ 2 vào 1 ta có: } \frac{8x-5}{2x-1} = \frac{2x}{2x-1} - \left[\frac{1}{2x-1} - 2 \right]^2 + m$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{1}{2x-1} - \frac{5}{2x-1} - \frac{2}{2x-1} + 8 \Leftrightarrow m = t^4 - 5t^2 - 2t + 8, t = \frac{1}{2x-1} \neq 0 \quad 1$$

$$\text{Ta có } x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right] \Leftrightarrow 0 < 2x - 1 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2x-1} \geq 2 \Leftrightarrow t \geq 2.$$

YCBT $\Leftrightarrow 1$ có nghiệm $t \geq 2$.

Xét hàm số: $f(t) = t^4 - 5t^2 - 2t + 8, t \geq 2$ ta có:

$$f'(t) = 4t^3 - 10t - 2 = 2t(2t^2 - 5) - 2 > 0, \forall t \geq 2$$

Do đó $f(t) = t^4 - 5t^2 - 2t + 8$ đồng biến $\forall t \geq 2$.

Do đó 1 có nghiệm $t \geq 2 \Leftrightarrow m \geq f(2) = 0$.

Bài tập tương tự ví dụ 5: Cho parabol $P: y = \frac{1}{2}x^2 + m$ và đồ thị $C: y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$. Có bao

hiệu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 20 sao cho parabol P và đồ thị C có tiếp tuyến chung?

- A. 20. B. 21. C. 18. D. 19.

3. Bài tập tự luyện

Câu 42: Cho hàm số $y = x^2 + 2x + 2$ có đồ thị (C_1) và hàm số $y = -x^2 + m$ có đồ thị (C_2) . Có bao nhiêu giá trị m nguyên dương để đồ thị (C_1) và (C_2) có đúng hai tiếp tuyến chung.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 43: Biết rằng đường thẳng $\Delta: y = ax + b$ là tiếp tuyến chung của đồ thị hàm số $(C_1): y = x^3 - x - 2$ và đồ thị hàm số $(C_2): y = x^2 - 3$. Tính $P = a - 3b$.

- A. -7. B. -10. C. 12. D. 14.

Câu 44: Đồ thị hàm số $(C_1): y = x^3 - 3x - 1$ và đồ thị hàm số $(C_2): y = -\frac{x^3}{3} - x^2 - 4x + 1$ có bao nhiêu đường tiếp tuyến chung?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 45: S là tập tất cả các giá trị của tham số m để hai đồ thị hàm số $(C_1): y = -x^3 + 2x - 1$ và đồ thị hàm số $(C_2): y = \frac{x^5}{5} - \frac{8x^3}{3} + 18x + m$ có tiếp tuyến chung. Tính tổng các phần tử của S .

- A. 1. B. 2. C. 3. D. -2.

Câu 46: Cho các đồ thị $C_1: y = -x^3 + 6x - 8$ và $C_2: y = x^3 - \frac{3}{x}$. Có bao nhiêu tiếp tuyến

chung của các đồ thị C_1 và C_2 ?

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Câu 47: Cho parabol $P : y = -x^2 + 2x$ và đồ thị $C : y = x^3 - x^2 - x + m - 1$ (m là tham số thực).

S là tập tất cả các số m để parabol (P) và đồ thị (C) tiếp xúc với nhau. Tổng bình phương tất cả các phần tử của tập S là

A. 13.

B. 8.

C. 18

D. 9.

Dạng 5: Bài toán tiếp xúc của hai đồ thị.

1. Phương pháp

Điều kiện tiếp xúc của hai đồ thị:

Hai đường cong $y = f(x)$ có đồ thị (C) và $y = g(x)$ có đồ thị (C'). Khi đó (C) tiếp xúc

với (C') khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm.

Chú ý: Cho đường thẳng (d): $y = k.x + m$. Khi đó (d) tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ

phương trình $\begin{cases} k.x + m = f(x) \\ k = f'(x) \end{cases}$ có nghiệm và (d) được gọi là tiếp tuyến của đồ thị (C).

2. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = 2x^3 - 3(m+3)x^2 + 18mx - 8$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị m để đồ thị (C_m) tiếp xúc với trục hoành.

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Phân tích:

Trục hoành có phương trình là: $y = 0 \Rightarrow y' = 0$.

$$y = 2x^3 - 3(m+3)x^2 + 18mx - 8 \Rightarrow y' = 6x^2 - 6(m+3)x + 18m.$$

Áp dụng điều kiện tiếp xúc của hai đường cong ta có hệ sau

$$\begin{cases} 2x^3 - 3(m+3)x^2 + 18mx - 8 = 0 \\ 6x^2 - 6(m+3)x + 18m = 0. \end{cases} (*)$$

Bài toán trở thành tìm tham số m để hệ (*) có nghiệm.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 6x^2 - 6(m+3)x + 18m$. Đồ thị (C_m) tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} 2x^3 - 3(m+3)x^2 + 18mx - 8 = 0 \\ 6x^2 - 6(m+3)x + 18m = 0. \end{cases}.$$

Nhận thấy PT thứ hai của hệ có biệt thức $\Delta' = 9(m-3) \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên luôn có hai nghiệm $x=3; x=m$.

- Với $x=3$, thay vào PT đầu của hệ, ta được

$$54 - 27(m+3) + 54m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{35}{27}.$$

- Với $x=m$, thay vào PT đầu của hệ và thu gọn, ta được

$$(m-1)(m^2 - 8m - 8) = 0 \Leftrightarrow m=1 \text{ hoặc } m=4 \pm 2\sqrt{6}.$$

Vậy có bốn giá trị cần tìm của m là $m = \frac{35}{27}; m=1; m=4+2\sqrt{6}; m=4-2\sqrt{6}$.

Bài tập tương tự ví dụ 1: Tổng các giá trị của tham số m để đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - (3m+4)x^2 + m^2$ tiếp xúc với trục hoành.

A. $-\frac{4}{5}$.

B. $-\frac{24}{5}$.

C. $\frac{24}{5}$.

D. $-\frac{16}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có (C) tiếp xúc với trục hoành khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^4 - (3m+4)x^2 + m^2 = 0, & (1) \\ 4x^3 - 2(3m+4)x = 0, & (2) \end{cases}.$$

Từ (2) ta có $2x(2x^2 - (3m+4)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2 = \frac{1}{2}(3m+4) \end{cases}.$

Với $x=0$ thay vào (1) ta có $m^2 = 0 \Leftrightarrow m=0$.

Với $x^2 = \frac{1}{2}(3m+4)$ thay vào (1) ta có:

$$\left(\frac{3m+4}{2}\right)^2 - \frac{(3m+4)^2}{2} + m^2 = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - (3m+4)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{4}{5} \\ m = -4 \end{cases} \Rightarrow m = -\frac{4}{5} \text{ (vì } 3m+4 \geq 0).$$

Vậy ta có tổng các giá trị của tham số m là $0 + \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{4}{5}$.

Chú ý: Ta có $x^2 = \frac{1}{2}(3m+4)$ nên $3m+4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{4}{3}$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \frac{1}{x}$ có đồ thị (C) và đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$ với $a, b \neq 0$. Đường thẳng (d) cắt trục Ox , Oy lần lượt tại M và N . Tính diện tích tam giác OMN biết (d) tiếp xúc với (C) .

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Phân tích:

Ta có đường thẳng (d) cắt trục Ox , Oy lần lượt tại M và N nên ta có $M\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$, $N(0; b)$.

Hay ta có $S_{\Delta OMN} = \frac{1}{2} OM \cdot ON = \frac{1}{2} \left| \frac{b}{a} \right| \cdot |b|$, ta thấy diện tích tam giác OMN phụ thuộc vào a và b .

Vậy ta tìm mối liên hệ giữa a và b từ giả thiết (d) tiếp xúc với (C) .

Qua phân tích trên ta có hướng giải bài toán như sau.

Lời giải

Chọn A

+ Ta có (d) tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = ax + b \\ -\frac{1}{x^2} = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 + bx = 1 \\ x^2 = -\frac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + bx = 1 \\ ax^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{b} \\ ax^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow b^2 + 4a = 0 \Leftrightarrow b^2 = -4a.$$

+ Ta có đường thẳng (d) cắt trục Ox , Oy lần lượt tại M và N nên ta có $M\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$, $N(0; b)$.

$$\text{Hay ta có } S_{\Delta OMN} = \frac{1}{2} OM \cdot ON = \frac{1}{2} \left| \frac{b}{a} \right| \cdot |b| \Rightarrow S_{\Delta OMN} = \frac{1}{2} \left| \frac{b^2}{a} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{-4a}{a} \right| = 2.$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1$ có đồ thị (C) . Biết đồ thị (C) luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định $d: y = ax + b$ với mọi giá trị tham số m . Tính $T = a + b$.

A. $T = 0$.

B. $T = 2$.

C. $T = -1$.

D. $T = -2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có đường thẳng d luôn tiếp xúc với (C) với mọi giá trị của tham số m khi hệ

$$\begin{cases} x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1 = ax + b, & (1) \\ a = 2x + (2m+1), & (2) \end{cases} (*) \text{ có nghiệm với mọi } m \in \mathbb{R}.$$

Thay (2) vào (1) ta có $x^2 = m^2 - 1 - b \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{m^2 - 1 - b}$, (với $b \leq -1$).

+ Với $x = \sqrt{m^2 - 1 - b}$ thay vào (2) ta có:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{m^2 - 1 - b} &= (a-1) - 2m \Rightarrow 4(m^2 - 1 - b) = ((a-1) - 2m)^2 \\ \Leftrightarrow -4(a-1)m + (a-1)^2 + 4 + 4b &= 0 \text{ có nghiệm } \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} a-1=0 \\ (a-1)^2 + 4 + 4b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}. \end{aligned}$$

+ Với $x = -\sqrt{m^2 - 1 - b}$ thay vào (2) ta có:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{m^2 - 1 - b} &= 2m + (1-a) \Rightarrow 4(m^2 - 1 - b) = (2m + (1-a))^2 \\ \Leftrightarrow 4(1-a)m + (1-a)^2 + 4 + 4b &= 0 \text{ có nghiệm } \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} 1-a=0 \\ (1-a)^2 + 4 + 4b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy đồ thị (C) luôn tiếp xúc với đường thẳng $d: y = x - 1$ với mọi giá trị của tham số m .

Hay ta có $T = a + b = 1 + (-1) = 0$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + mx + m}{x+1}$ có đồ thị (C) . Xác định tất cả các giá trị của tham số m

sao cho qua điểm $A(0;1)$ không có đường thẳng nào tiếp xúc với đồ thị (C) .

A. $m < 1$. **B.** $m \leq 2$. **C.** $m > -1$. **D.** $m \neq 1$.

Phân tích:

Gọi đường thẳng d đi qua $A(0;1)$ có phương trình $y = kx + 1$.

$$\text{Đường thẳng } d \text{ không tiếp xúc với } (C) \text{ khi hệ phương trình } \begin{cases} \frac{2x^2 + mx + m}{x+1} = kx + 1 \\ \frac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2} = k \end{cases} \text{ vô}$$

nghiệm.

Lời giải

Chọn A

Gọi đường thẳng d đi qua $A(0;1)$ có phương trình $y = kx + 1$.

$$\text{Đường thẳng } d \text{ không tiếp xúc với } (C) \text{ khi hệ phương trình } \begin{cases} \frac{2x^2 + mx + m}{x+1} = kx + 1, & (1) \\ \frac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2} = k, & (2) \end{cases}$$

$(*)$ vô nghiệm.

Thay (2) vào (1) ta có phương trình $(m-3)x^2 + 2(m-1)x + (m-1) = 0, (x \neq -1)$ (3).

Khi đó (*) vô nghiệm khi phương trình (3) có nghiệm $x = -1$ hoặc phương trình (3) vô nghiệm.

+ Phương trình (3) có nghiệm $x = -1 \Leftrightarrow (m-3) - 2(m-1) + m - 1 = 0 \Leftrightarrow -2 = 0$ (vô lí).

+ Phương trình (3) vô nghiệm.

Với $m = 3$ từ (3) ta có $4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$, hay $m = 3$ không thỏa mãn.

Với $m \neq 3$ ta có phương trình (3) vô nghiệm khi $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 2(m-1) < 0 \Leftrightarrow m < 1$.

KL: Vậy $m < 1$ thì d không tiếp xúc với (C).

Ví dụ 5: Với các giá trị của tham số $m = b_1$ và $m = b_2$ thì đồ thị (C) hàm số $y = x^4 - 2x + 1$ và đồ thị (P) của hàm số $y = 2x^2 + m$ tiếp xúc với nhau. Tính $T = b_1.b_2$.

A. $T = -3$.

B. $T = -2$.

C. $T = 0$.

D. $T = -6$.

Lời giải

Chọn A

Ta có (P) tiếp xúc với (C) khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^4 - 2x^2 + 1 = 2x^2 + m \\ 4x^3 - 4x = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 2x^2 + 1 = 2x^2 + m \\ x = 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ m = 1 \\ x^2 = 2 \\ m = -3 \end{cases}.$$

Hay ta có $T = 1.(-3) = -3$.

3. Bài tập tự luyện

Bài tập 1: Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ tiếp xúc với parabol $y = x^2 + m$.

A. $m = -2$.

B. $m = 0$.

C. $m = -1$.

D. $m = 3$.

Bài tập 2: Tìm m để đồ thị hai đồ thị hàm số $(C_1): y = mx^3 + (1-2m)x^2 + 2mx$ và $(C_2): y = 3mx^3 + 3(1-2m)x + 4m - 2$ tiếp xúc với nhau.

A. $m = \frac{1}{2}, m = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{2}$. B. $m = \frac{1}{2}, m = \frac{8 \pm \sqrt{6}}{12}$. C. $m = \frac{5}{2}, m = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{12}$. D. $m = \frac{1}{2}, m = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{12}$.

Bài tập 3: Tìm m để $(C_m): y = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}(m+2)x^2 + 2mx + 1$ tiếp xúc với đường thẳng $y = 1$.

- A. $m \in \left\{0; \frac{2}{3}; 2\right\}$. B. $m \in \left\{4; \frac{2}{3}; 6\right\}$. C. $m \in \{0; 4; 6\}$. D. $m \in \left\{0; \frac{2}{3}; 6\right\}$.

Bài tập 4: Viết phương trình tiếp tuyến d tiếp xúc với đồ thị $(H): y = (x^2 - 1)^2$ của hàm số tại đúng 2 điểm phân biệt.

- A. $y = 2x$. B. $y = 0$. C. $y = 2x + 1$. D. $y = 1$.

Bài tập 5: Cho hàm số: $y = -4x^3 + 3x + 2$, có đồ thị là (C) . Tìm những điểm trên đường thẳng $y = 3$ để từ đó có thể vẽ được ba đường thẳng tiếp xúc với đồ thị (C) .

- A. $m < -1$ hoặc $\frac{1}{3} < m \neq 2$. B. $m < -1$ hoặc $\frac{1}{3} < m \neq \frac{1}{2}$.
C. $m < -2$ hoặc $\frac{1}{3} < m \neq \frac{1}{2}$. D. $m < -3$ hoặc $1 < m \neq \frac{1}{2}$.

CHỦ ĐỀ 8. ĐIỂM ĐẶC BIỆT CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Bài toán tìm điểm cố định của họ đường cong

Xét họ đường cong (C_m) có phương trình $y = f(x, m)$, trong đó f là hàm đa thức theo biến x với m là tham số sao cho bậc của m không quá 2. Hãy tìm những điểm cố định thuộc họ đường cong khi m thay đổi?

□ Phương pháp giải:

o **Bước 1:** Đưa phương trình $y = f(x, m)$ về dạng phương trình theo ẩn m có dạng sau:

$$Am + B = 0 \text{ hoặc } Am^2 + Bm + C = 0.$$

o **Bước 2:** Cho các hệ số bằng 0, ta thu được hệ phương trình và giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

o **Bước 3:** Kết luận

- Nếu hệ vô nghiệm thì họ đường cong (C_m) không có điểm cố định.
- Nếu hệ có nghiệm thì nghiệm đó là điểm cố định của (C_m) .

II. Bài toán tìm điểm có tọa độ nguyên:

Cho đường cong (C) có phương trình $y = f(x)$ (hàm phân thức). Hãy tìm những điểm có tọa độ nguyên của đường cong?

Những điểm có tọa độ nguyên là những điểm sao cho cả hoành độ và tung độ của điểm đó đều là số nguyên.

□ Phương pháp giải:

- o **Bước 1:** Thực hiện phép chia đa thức chia tử số cho mẫu số.
- o **Bước 2:** Lí luận để giải bài toán.

III. Bài toán tìm điểm có tính chất đối xứng:

Cho đường cong (C) có phương trình $y = f(x)$. Tìm những điểm đối xứng nhau qua một điểm, qua đường thẳng.

Bài toán 1: Cho đồ thị $(C): y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ trên đồ thị (C) tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua điểm $I(x_I, y_I)$.

□ Phương pháp giải:

- Gọi $M(a; Aa^3 + Ba^2 + Ca + D)$, $N(b; Ab^3 + Bb^2 + Cb + D)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua điểm I .
- Ta có
$$\begin{cases} a + b = 2x_I \\ A(a^3 + b^3) + B(a^2 + b^2) + C(a + b) + 2D = 2y_I \end{cases}$$

Giải hệ phương trình tìm được a, b từ đó tìm được tọa độ M, N .

Trường hợp đặc biệt : Cho đồ thị $(C): y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Trên đồ thị (C) tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

□ Phương pháp giải:

- Gọi $M(a; Aa^3 + Ba^2 + Ca + D)$, $N(b; Ab^3 + Bb^2 + Cb + D)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua gốc tọa độ.
- Ta có
$$\begin{cases} a + b = 0 \\ A(a^3 + b^3) + B(a^2 + b^2) + C(a + b) + 2D = 0 \end{cases}$$
- Giải hệ phương trình tìm được a, b từ đó tìm được tọa độ M, N .

Bài toán 2: Cho đồ thị $(C): y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ trên đồ thị (C) tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y = A_1x + B_1$.

□ **Phương pháp giải:**

□ Gọi $M(a; Aa^3 + Ba^2 + Ca + D)$, $N(b; Ab^3 + Bb^2 + Cb + D)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua đường thẳng d .

□ Ta có: $\begin{cases} I \in d & (1) \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_d = 0 & (2) \end{cases}$ (với I là trung điểm của MN và $\vec{u}_d$ là vector chỉ phương của đường thẳng d).

□ Giải hệ phương trình tìm được M, N .

IV. Bài toán tìm điểm đặc biệt liên quan đến hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ **có đồ thị (C) :**

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, nên $M\left(x_0; \frac{ax_0+b}{cx_0+d}\right)$

Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có tiệm cận đứng: $\Delta_1: x + \frac{d}{c} = 0$, tiệm cận ngang $\Delta_2: y - \frac{a}{c} = 0$.

Khoảng cách từ M đến Δ_1, Δ_2 là: $d_1 = \left|x_0 + \frac{d}{c}\right| = \left|\frac{cx_0+d}{c}\right|$, $d_2 = \left|y_0 - \frac{a}{c}\right| = \left|\frac{ad-bc}{c(cx_0+d)}\right|$

Ta có kết quả sau: $d_1 \cdot d_2 = \left|\frac{cx_0+d}{c}\right| \cdot \left|\frac{ad-bc}{c(cx_0+d)}\right| = p$, với $p = \left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|$ thì $p = \text{const}$

Bài toán 1: Tìm trên đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ những điểm M sao cho tổng khoảng cách từ điểm M đến Δ_1 và Δ_2 nhỏ nhất.

□ **Phương pháp giải:**

$$\square \quad d_1 + d_2 = \left|\frac{cx_0+d}{c}\right| + \left|\frac{ad-bc}{c(cx_0+d)}\right| \geq 2\sqrt{\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|} \Rightarrow \min d = 2\sqrt{\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|}$$

$$\square \quad \text{Dấu "=" xảy ra khi} \quad \left|\frac{cx_0+d}{c}\right| = \left|\frac{ad-bc}{c(cx_0+d)}\right| \Leftrightarrow (cx_0+d)^2 = |ad-bc|$$

$$\Leftrightarrow x_0 = -\frac{d}{c} \pm \sqrt{|ad-bc|}$$

Bài toán 2: Tìm trên đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ những điểm M sao cho khoảng cách từ điểm M đến Δ_1 bằng $k > 0$ lần khoảng cách từ M đến Δ_2 .

□ **Phương pháp giải:**

$$\square d_1 = kd_2 \Leftrightarrow \left| \frac{cx_0 + d}{c} \right| = k \left| \frac{ad - bc}{c(cx_0 + d)} \right| \Rightarrow x_0 = -\frac{d}{c} \pm \sqrt{kp}$$

Bài toán 3: Tìm trên đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ những điểm M sao cho khoảng cách từ điểm M đến I là ngắn nhất, biết I là giao điểm hai đường tiệm cận.

□ **Phương pháp giải:**

$$\square M\left(x_0; \frac{ax_0+b}{cx_0+d}\right), I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right) \Rightarrow \min IM = \sqrt{2p} \text{ khi } x_0 = -\frac{d}{c} \pm \sqrt{p}$$

Bài toán 4: Tìm trên đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ những điểm M sao cho tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M vuông góc với đường thẳng IM , I là giao điểm hai đường tiệm cận.

□ **Phương pháp giải:**

$$\text{Hệ số góc đường thẳng } IM \text{ là } k = \frac{y_0 - y_I}{x_0 - x_I} = -\frac{ad - bc}{(cx_0 + d)^2}; \text{ tiếp tuyến của đồ thị}$$

Bài toán 5: Biết rằng M là điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$; tiếp tuyến (t) của đồ thị hàm số tại M cắt hai đường tiệm cận tại hai điểm phân biệt A, B và diện tích ΔAIB luôn là hằng số không đổi, I là giao điểm hai đường tiệm cận.

Phương pháp giải:

$$\square (t): y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

$$\square (t) \cap \Delta_1 \Rightarrow A\left(-\frac{d}{c}; \frac{2bc - ad + acx_0}{c(cx_0 + d)}\right) \Rightarrow IA = \left| -\frac{2(ad - bc)}{c(cx_0 + d)} \right|$$

$$\square (t) \cap \Delta_2 \Rightarrow B\left(\frac{d + 2acx_0}{c}; \frac{a}{c}\right) \Rightarrow IB = \left| \frac{2(cx_0 + d)}{c} \right|, M \text{ luôn luôn là trung điểm } AB$$

$$\square \Delta AIB \text{ vuông tại } I \text{ nên: } S_{\Delta AIB} = \frac{1}{2} \cdot IA \cdot IB = 2p \text{ và } S_{\Delta AIB} = \frac{IA \cdot IB \cdot AB}{4R}$$

$$\square R \text{ là bán kính đường tròn ngoại tiếp } \Delta AIB \text{ nên } \min R = 8\sqrt{p} \text{ và } \min AB^2 = 8\sqrt{\frac{ad - bc}{c}}$$

$$\square \text{hàm số tại } M \text{ có hệ số góc: } y'(x_0) = \frac{ad - bc}{(cx_0 + d)^2}$$

$$\square \text{Theo bài toán, ta phải có: } y'(x_0) \cdot k = -1 \Rightarrow (cx_0 + d)^2 = |ad - bc|$$

V. Bài toán tìm điểm đặc biệt khác:

1. Lí thuyết:

Loại 1. Cho hai điểm $P(x_1; y_1); Q(x_2; y_2) \Rightarrow PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Cho điểm $M(x_0; y_0)$ và đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$, thì khoảng cách từ M đến d là $h(M; d) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Loại 2. Khoảng cách từ $M(x_0; y_0)$ đến tiệm cận đứng $x = a$ là $h = |x_0 - a|$.

Loại 3. Khoảng cách từ $M(x_0; y_0)$ đến tiệm cận ngang $y = b$ là $h = |y_0 - b|$.

Chú ý: Những điểm cần tìm thường là hai điểm cực đại, cực tiểu hoặc là giao của một đường thẳng với một đường cong (C) nào đó. Vì vậy trước khi áp dụng công thức, ta cần phải tìm điều kiện tồn tại rồi tìm tọa độ của chúng.

2. Các bài toán thường gặp:

Bài toán 1: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$) có đồ thị (C). Hãy tìm trên (C) hai điểm A và B thuộc hai nhánh đồ thị hàm số sao cho khoảng cách AB ngắn nhất.

□ Phương pháp giải:

□ (C) có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$ do tính chất của hàm phân thức, đồ thị nằm về hai phía của tiệm cận đứng. Nên gọi hai số α, β là hai số dương.

□ Nếu A thuộc nhánh trái thì $x_A < -\frac{d}{c} \Rightarrow x_A = -\frac{d}{c} - \alpha < -\frac{d}{c}; y_A = f(x_A)$.

□ Nếu B thuộc nhánh phải thì $x_B > -\frac{d}{c} \Rightarrow x_B = -\frac{d}{c} + \beta > -\frac{d}{c}; y_B = f(x_B)$.

□ Sau đó tính $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = [(a + \beta) - (a - \alpha)]^2 + (y_B - y_A)^2$.

□ Áp dụng bất đẳng thức Côsi (Cauchy), ta sẽ tìm ra kết quả.

Bài toán 2: Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y = f(x)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) để tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ nhỏ nhất.

□ Phương pháp giải:

□ Gọi $M(x; y)$ và tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là d thì $d = |x| + |y|$.

- ☐ Xét các khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ khi M nằm ở các vị trí đặc biệt: Trên trục hoành, trên trục tung.
- ☐ Sau đó xét tổng quát, những điểm M có hoành độ, hoặc tung độ lớn hơn hoành độ hoặc tung độ của M khi nằm trên hai trục thì loại đi không xét đến.
- ☐ Những điểm còn lại ta đưa về tìm giá trị nhỏ nhất của đồ thị hàm số dựa vào đạo hàm rồi tìm được giá trị nhỏ nhất của d .

Bài toán 3: Cho đồ thị (C) có phương trình $y = f(x)$. Tìm điểm M trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến Ox bằng k lần khoảng cách từ M đến trục Oy .

☐ **Phương pháp giải:**

- ☐ Theo đầu bài ta có $|y| = k|x| \Leftrightarrow \begin{cases} y = kx \\ y = -kx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = kx \\ f(x) = -kx \end{cases}$.

Bài toán 4: Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$). Tìm tọa độ điểm M trên (C) sao cho độ dài MI ngắn nhất (với I là giao điểm hai tiệm cận).

☐ **Phương pháp giải:**

- ☐ Tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$; tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.
- ☐ Ta tìm được tọa độ giao điểm $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ của hai tiệm cận.
- ☐ Gọi $M(x_M; y_M)$ là điểm cần tìm. Khi đó:

$$IM^2 = \left(x_M + \frac{d}{c}\right)^2 + \left(y_M - \frac{a}{c}\right)^2 = g(x_M)$$

- ☐ Sử dụng phương pháp tìm GTLN - GTNN cho hàm số g để thu được kết quả.

Bài toán 5: Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y = f(x)$ và đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$. Tìm điểm I trên (C) sao cho khoảng cách từ I đến d là ngắn nhất.

☐ **Phương pháp giải**

- ☐ Gọi I thuộc $(C) \Rightarrow I(x_0; y_0); y_0 = f(x_0)$.
- ☐ Khoảng cách từ I đến d là $g(x_0) = h(I; d) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

□ Khảo sát hàm số $y = g(x)$ để tìm ra điểm I thỏa mãn yêu cầu.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: [2D1-7.5-3] Số điểm có tọa độ là các số nguyên thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x+2}$ là:

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

Câu 2: [2D1-7.5-3] Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 2x - 5}{x - 1}$ có đồ thị là (C) . Hỏi trên đồ thị (C) có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên?

- A. 4. B. 6. C. 3. D. 5.

Câu 3: [2D1-8.5-3] Trên đồ thị hàm số $y = \frac{2x-5}{3x-1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ là các số nguyên?

- A. 4. B. vô số. C. 2. D. 0.

Câu 4: [2D1-8.4-3] Cho đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 + 3x - 2$ và điểm $I(2;18)$. Gọi A, B là hai điểm thuộc đồ thị (C) và đối xứng nhau qua I . Tính độ dài đoạn AB .

- A. $2\sqrt{101}$. B. $2\sqrt{257}$. C. $4\sqrt{101}$. D. $\sqrt{257}$.

Câu 5: [2D1-8.4-3] Cho đồ thị (C_m) của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên bé thua 10 của m để trên đồ thị (C_m) tồn tại cặp điểm đối xứng với nhau qua gốc tọa độ?

- A. 7. B. 8. C. 9. D. 10.

Câu 6: [2D1-8.1-3] Cho đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ và điểm $A(a;b) \in (C)$. Tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại điểm B khác A . Tìm hoành độ điểm B .

- A. $2a$. B. $3a$. C. $4a$. D. $2a + 1$.

Câu 7: [2D1-7.4-3] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

- A. $m > 1$. B. $m > 0$. C. $m \leq 0$. D. $0 < m < 1$.

Câu 8: [2D1-7.4-3] Đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3mx^2 - 3m + 2$ có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ O khi m là.

- A. $m < 0, m \geq \frac{2}{3}$. B. $m > -\frac{1}{3}$. C. $m < 0$. D. $m < -\frac{1}{3}, m > 0$.

Câu 9: [2D1-7.3-3] Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + (6-m)x + 2}{mx + 2}$ có đồ thị là (C_m) . Hỏi đồ thị hàm số luôn đi qua bao nhiêu điểm cố định?

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 10: [2D1-7.3-3] Cho họ đồ thị $(C_m): y = x^4 + mx^2 - m - 1$. Tọa độ các điểm mà mọi đồ thị của họ (C_m) luôn đi qua với mọi giá trị thực của m là:

- A. $(1;0), (0;1)$. B. $(-2;1), (-2;3)$. C. $(-1;0), (1;0)$. D. $(2;1), (0;1)$.

Câu 11: [2D1-8.1-3] Tìm m để tâm đối xứng của đồ thị hàm số $(C): y = x^3 + (m+3)x^2 + 1 - m$ trùng với tâm đối xứng của đồ thị hàm số $(H): y = \frac{14x-1}{x+2}$.

- A. $m = 2$. B. $m = 1$. C. $m = 3$. D. $m = 0$.

Câu 12: [2D1-8.1-3] Tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ sao cho khoảng cách từ điểm M đến tiệm cận đứng bằng 1 là

- A. $M(0;1), M(2;3)$. B. $M(2;1)$. C. $M\left(-1; \frac{3}{2}\right)$. D. $M\left(3; \frac{5}{2}\right)$.

Câu 13: [2D1-8.1-3] Tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ mà có khoảng cách đến tiệm cận ngang của (C) bằng 1 là

- A. $M(3;2)$. B. $M(5;2)$.
C. $M(5;2), M(-1;0)$. D. $M\left(4; \frac{5}{2}\right), M\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

Câu 14: [2D1-8.1-3] Tọa độ các điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ mà có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận của (C) bằng 4 là

- A. $(4;3), (-2;1)$. B. $(2;5), (0;-1)$.
C. $(2;5), (0;-1), (4;3), (-2;1)$. D. $(2;5), (4;3)$.

Câu 15: [2D1-8.1-3] Tọa độ điểm M có hoành độ dương thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ sao cho tổng khoảng cách từ M đến 2 tiệm cận của đồ thị hàm số đạt giá trị nhỏ nhất là

- A. $M(4;3)$. B. $M(3;5)$. C. $M(1;-3)$. D. $M(0;-1)$.

Câu 16: [2D1-8.1-3] Cho điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x-7}{x+1}$, biết M có hoành độ a và khoảng cách từ M đến trục Ox bằng ba lần khoảng cách từ M đến trục Oy . Giá trị có thể có của a là

A. $a = 1$ hoặc $a = \frac{7}{3}$.

B. $a = -1$ hoặc $a = \frac{7}{3}$.

C. $a = -1$ hoặc $a = -\frac{7}{3}$.

D. $a = 1$ hoặc $a = -\frac{7}{3}$.

Câu 17: [2D1-7.1-3] Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ sao cho khoảng cách từ M đến trục tung bằng hai lần khoảng cách từ M đến trục hoành.

A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Câu 18: [2D1-8.0-2] Cho hàm số $y = x^3 - 2x + 1$. Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số sao cho khoảng cách từ M đến trục tung bằng 1.

A. $M(1; 0)$ hoặc $M(-1; 2)$.

B. $M(1; 0)$.

C. $M(2; -1)$.

D. $M(0; 1)$ hoặc $M(2; -1)$.

Câu 19: [2D1-7.1-3] Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ sao cho khoảng cách từ M đến trục tung bằng hai lần khoảng cách từ M đến trục hoành.

A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Câu 20: [2D1-7.1-3] Tính tổng các hoành độ của những điểm thuộc đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$ cách đều hai điểm $A(12; 1)$, $B(-6; 3)$.

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 0.

Câu 21: [2D1-8.1-3] Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai điểm bất kỳ thuộc hai nhánh của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ là

A. $2\sqrt{3}$.

B. $2\sqrt{5}$.

C. 1.

D. $2\sqrt{2}$.

Câu 22: [2D1-8.1-3] Tìm trên mỗi nhánh của đồ thị $(C): y = \frac{4x-9}{x-3}$ các điểm $M_1; M_2$ để độ dài M_1M_2 đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị nhỏ nhất đó bằng:

A. $2\sqrt{5}$.

B. $2\sqrt{2}$.

C. $2\sqrt{6}$.

D. $3\sqrt{2}$.

Câu 23: [2D1-8.1-3] Hai điểm M, N thuộc hai nhánh của đồ thị $y = \frac{3x-1}{x-3}$. Khi đó độ dài đoạn thẳng MN ngắn nhất bằng?

- A. 4. B. 8. C. 3. D. $8\sqrt{2}$.

Câu 24: [2D1-8.1-3] Cho hàm số $y = x^3 + 3x + 1$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến gốc tọa độ bằng 2?

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

Câu 25: [2D1-7.1-3] Hai điểm A, B thuộc hai nhánh của đồ thị $y = 3 + \frac{7}{x-3}$. Khi đó độ dài đoạn thẳng AB ngắn nhất bằng bao nhiêu?

- A. $4\sqrt{14}$. B. $\sqrt{28}$. C. $\sqrt{14}$. D. $2\sqrt{14}$.

Câu 26: [2D1-7.1-3] Cho $y = \frac{x+2}{x-2}$ (C). Tìm M có hoành độ dương thuộc (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến 2 tiệm cận nhỏ nhất.

- A. $M(1; -3)$. B. $M(0; -1)$. C. $M(2; 2)$. D. $M(4; 3)$.

Câu 27: [2D1-8.1-3] Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ có đồ thị là (C) . Gọi I là giao điểm của 2 đường tiệm cận của (C) . Tìm tọa độ điểm M trên (C) sao cho độ dài IM là ngắn nhất?

- A. $M_1(0; -3)$ và $M_2(-2; 5)$. B. $M_1(1; -1)$ và $M_2(-3; 3)$.
C. $M_1\left(2; -\frac{1}{3}\right)$ và $M_2\left(-4; \frac{7}{3}\right)$. D. $M_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{3}\right)$ và $M_2\left(-\frac{5}{2}; \frac{11}{3}\right)$.

Câu 28: [2D1-8.1-3] Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và A là điểm thuộc (C) . Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ A đến các tiệm cận của (C) .

- A. $2\sqrt{2}$. B. 2. C. 3. D. $2\sqrt{3}$

Câu 29: [2D1-8.1-3] Tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1; 2)$ đến tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất.

- A. $M_1(-1+\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}), M_2(-1-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3})$.
B. $M_1(-1+\sqrt{3}; 2-\sqrt{3}), M_2(-1+\sqrt{3}; 2+\sqrt{3})$.

C. $M_1(-1+\sqrt{3}; 2-\sqrt{3}), M_2(-1-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3})$.

D. $M_1(-1-\sqrt{3}; 2-\sqrt{3}), M_2(-1-\sqrt{3}; -2-\sqrt{3})$.

Câu 30: [2D1-8.1-4] Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-3}$ có đồ thị (C). Tổng khoảng cách từ một điểm M thuộc (C) đến hai trục tọa độ đạt giá trị nhỏ nhất bằng?

A. 2.

B. $\frac{2}{3}$.

C. 1.

D. $\frac{1}{6}$.

Câu 31: [2D1-8.1-4] Khoảng cách nhỏ nhất từ một điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^2+4x+5}{x+2}$ đến đường thẳng $d: y+3x+6=0$ bằng

A. 2.

B. 4.

C. $\sqrt{10}$.

D. $\frac{4}{\sqrt{10}}$.

Câu 32: [2D1-8.1-4] Khoảng cách ngắn nhất từ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^2+2x-2}{x-1}$ đến $I(1;4)$ là

A. 2.

B. $2\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{2+2\sqrt{2}}$.

D. $\sqrt{2\sqrt{2}-2}$.

Câu 33: [2D1-8.1-3] Tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ cách đều hai đường tiệm cận của (C) là

A. $M(2;1)$.

B. $M(0;-1), M(4;3)$.

C. $M\left(5;\frac{7}{3}\right), M\left(-3;\frac{1}{5}\right)$.

D. $M(-2;2)$.

Câu 34: [2D1-8.1-3] Tọa độ điểm M có hoành độ nguyên thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có khoảng cách đến đường thẳng $\Delta: x-y+1=0$ bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$ là

A. $M(-2;0)$.

B. $M(2;4)$.

C. $M(2;4); M(-2;0)$.

D. $M(2;-2)$.

Câu 35: [2D1-8.1-3] Khi đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ có hai điểm cực trị là A, B và đường tròn (C) có phương trình là $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 3$ cắt đường thẳng AB tại 2 điểm phân biệt M, N sao cho MN lớn nhất. Khi đó giá trị của m là.

- A. 1. B. $\frac{3}{2}$. C. $m = 2$. D. $m = \frac{1}{2}$.

Câu 36: [2D1-8.1-3] Khi đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx - 1$ có hai điểm cực trị là A, B và đường tròn (C) có phương trình là $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$ cắt đường thẳng AB tại 2 điểm phân biệt M, N sao cho MN nhỏ nhất. Khi đó giá trị của m là.

- A. 1. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $m = \frac{1}{8}$.

Câu 37: [2D1-8.1-3] Tìm tất cả các giá trị của m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx + m - 1$ tại điểm có hoành độ bằng 1 cắt đường tròn $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 11$ theo một dây cung có độ dài nhỏ nhất.

- A. $\frac{10}{3}$. B. 2. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{11}{3}$.

Câu 38: [2D1-8.1-3] Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C) . Biết rằng tiếp tuyến tại điểm M bất kì của (C) luôn cắt hai tiệm cận của (C) tại A và B . Độ dài ngắn nhất của đoạn thẳng AB là

- A. 4. B. $2\sqrt{2}$. C. $\sqrt{2}$. D. 2.

Câu 39: [2D1-8.1-3] Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ (C) . Tiếp tuyến bất kì của đồ thị (C) tại M cắt hai đường tiệm cận của đồ thị (C) lần lượt tại hai điểm A và B . Khi đó $MA = k \cdot MB$, giá trị của k là

- A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. 2. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 40: [2D1-8.1-3] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = mx$ cắt đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 12x^2 + m + 8$ tại ba điểm phân biệt M, N, P sao cho $MN = NP$.

- A. $m \in (-\infty; 3)$. B. $m \in (-\infty; 1)$. C. $m \in (-12; +\infty)$. D. $m \in (12; +\infty)$.

Câu 41: [2D1-8.1-3] Cho hàm số $y = \frac{3x+2}{x+2}$ có đồ thị (C) . Đường thẳng $y = x$ cắt (C) tại hai điểm A, B . Đường thẳng $y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm C, D sao cho $ABCD$ là hình bình hành. Chọn mệnh đề đúng.

A. Không tồn tại giá trị m .

B. m là số nguyên tố.

C. m là số tự nhiên chia hết cho 3.

D. m là số tự nhiên chia hết cho 5.

Câu 42: [2D1-7.1-4] Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có đồ thị (C) . Gọi A, B là hai điểm phân biệt trên đồ thị (C) có hoành độ x_1, x_2 thỏa $x_1 < 1 < x_2$. Giá trị nhỏ nhất của AB là:

A. $\sqrt{8\sqrt{2} + 8}$.

B. $12\sqrt[3]{4}$.

C. $8\sqrt{2} - 8$.

D. $2\sqrt{5}$.

Câu 43: [2D1-8.1-3] Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}$. Điểm trên đồ thị mà tiếp tuyến tại đó lập với hai đường tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất thì có hoành độ bằng

A. $2 \pm \sqrt[4]{10}$.

B. $2 \pm \sqrt[4]{6}$.

C. $2 \pm \sqrt[4]{12}$.

D. $2 \pm \sqrt[4]{8}$.

Câu 44: [2D1-8.1-3] Tìm M trên $(H): y = \frac{x+1}{x-3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $d: y = x + 2016$.

A. $(1; -1)$ hoặc $(2; -3)$. B. $(5; 3)$ hoặc $(2; -3)$. C. $(5; 3)$ hoặc $(1; -1)$. D. $(1; -1)$ hoặc $(4; 5)$.

Câu 45: [2D1-8.1-3] Cho hàm số $y = \frac{x+3}{1-x}$ có đồ thị là (C) . Tìm $M \in (C)$ sao cho M cách đều các trục tọa độ.

A. $\begin{bmatrix} M(-1; 3) \\ M(2; -3) \end{bmatrix}$.

B. $\begin{bmatrix} M(2; 2) \\ M(3; 3) \end{bmatrix}$.

C. $\begin{bmatrix} M(4; 4) \\ M(-4; -4) \end{bmatrix}$.

D. $\begin{bmatrix} M(-1; 1) \\ M(3; -3) \end{bmatrix}$.

Câu 46: [2D1-8.1-3] Tọa độ điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-1}$ cách đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số một khoảng bằng 1 là

A. $(0; -1); (-2; 7)$.

B. $(-1; 0); (2; 7)$.

C. $(0; 1); (2; -7)$.

D. $(0; -1); (2; 7)$.

Câu 47: [2D1-8.1-3] Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{x-2}$ có đồ thị là (C) . Có bao nhiêu điểm trên (C) mà tổng khoảng cách từ điểm đó đến hai tiệm cận của (C) bằng 6?

A. 1.

B. 4.

C. 0.

D. 2.

Câu 48: [2D1-8.1-3] Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi M là một điểm trên (C) , có tung độ lớn hơn 2 và cách đều hai điểm $A(2; 0)$ và $B(4; 2)$. Điểm M thuộc đường thẳng nào sau đây?

A. $2x - y + 1 = 0$. B. $x + 2y - 5 = 0$. C. $x - 2y - 1 = 0$. D. $2x + y - 7 = 0$.

Câu 49: [2D1-8.1-3] Cho đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm nằm trên (C) , có hoành độ dương và có tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của (C) nhỏ nhất. Tính $T = x_0 + y_0$.

A. 7. B. 6. C. 8. D. 5.

Câu 50: [2D1-8.1-4] Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+2}$ có đồ thị (C) và điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ ($x_0 \neq 0$). Biết rằng khoảng cách từ $I(-2; 2)$ đến tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2x_0 + y_0 = 0$. B. $2x_0 + y_0 = 2$. C. $2x_0 + y_0 = -2$. D. $2x_0 + y_0 = -4$.

Câu 51: [2D1-8.1-3] Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Điểm $M(a; b)$ di động trên (C) . Gọi d là tổng khoảng cách từ điểm M đến hai trục tọa độ. Khi d đạt giá trị nhỏ nhất, tính $P = ab$.

A. $3 - 2\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{2} - 3$. C. 0. D. $2\sqrt{2} - 2$.

Câu 52: [2D1-8.1-4] Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị là (C) . Gọi I là giao của hai đường tiệm cận. Gọi $M(x_0; y_0); (x_0 > 0)$ là một điểm trên (C) . Khi khoảng cách từ điểm I đến tiếp tuyến với (C) tại M lớn nhất thì tổng $x_0 + y_0$ bằng

A. 1. B. $\sqrt{3} - 1$. C. $2 - \sqrt{3}$. D. -1.

Câu 53: [2D1-8.1-4] Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C) . Gọi $M(x_M; y_M)$ là một điểm bất kỳ trên (C) . Khi tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là nhỏ nhất, tính tổng $x_M + y_M$.

A. $2\sqrt{2} - 1$. B. 1. C. $2 - 2\sqrt{2}$. D. $2 - \sqrt{2}$.

Câu 54: [2D1-8.1-3] Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. Tìm tất cả các điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại điểm thứ hai là N thỏa mãn $MN = 6\sqrt{5}$.

A. $M(-\sqrt{2}; 2 - 5\sqrt{2})$ và $M(\sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})$. B. $M(\sqrt{2}; 2 + 5\sqrt{2})$ và $M(-\sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$.

C. $M(\sqrt{2}; 2 - 5\sqrt{2})$ và $M(-\sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})$. D. $M(\sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})$ và $M(-\sqrt{2}; 2 - 5\sqrt{2})$.

Câu 55: [2D1-8.1-3] Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-2}$ (C). Số điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai tiệm cận của (C) tại hai điểm A, B thỏa mãn $AB = 2\sqrt{10}$.

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 56: [2D1-8.1-3] Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ (C). Gọi I là giao điểm 2 đường tiệm cận của (C). Điểm $M(a; b)$ thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai tiệm cận tại A, B thỏa mãn $2IA^2 + IB^2 = 12$. Tổng của $a+b$ bằng (với a, b là các số nguyên dương).

- A. 4. B. 5. C. 2. D. 3.

Câu 57: [2D1-8.2-3] Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C). Tìm trên (C) những điểm M sao cho tiếp tuyến với (C) tại M cắt hai tiệm cận của M tại A, B sao cho AB ngắn nhất.

- A. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$ B. $\left(-1; \frac{5}{3}\right), (3; 3)$ C. $(3; 3), (1; 1)$ D. $\left(4; \frac{5}{2}\right), (3; 3)$

Câu 58: [2D1-8.2-3] Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ có đồ thị (C). Gọi A, B là giao điểm của (C) và trục hoành. Số điểm $M \in (C)$ không trùng với A và B sao cho $\angle AMB = 90^\circ$ là:

- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.

Câu 59: [2D1-8.1-3] Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ có đồ thị (C). Tìm tọa độ điểm M có hoành độ dương thuộc (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận là nhỏ nhất.

- A. $M(2; 2)$. B. $M(4; 3)$. C. $M(0; -1)$. D. $M(1; -3)$.

Câu 60: [2D1-8.1-3] Cho hàm số $y = \frac{2x}{x-2}$ có đồ thị (C). Tìm giá trị nhỏ nhất h của tổng khoảng cách từ điểm M thuộc (C) tới hai đường thẳng $\Delta_1: x-1=0, \Delta_2: y-2=0$.

- A. $h=4$. B. $h=3$. C. $h=5$. D. $h=2$.

Câu 61: [2D1-8.1-3] Cho $(P): y = x^2$ và $A\left(-2; \frac{1}{2}\right)$. Gọi M là một điểm bất kì thuộc (P) . Khoảng cách MA bé nhất là:

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 62: [2D1-8.1-3] Gọi $M(a; b)$ là điểm trên đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+2}$ mà có khoảng cách đến đường thẳng $d: y = 3x + 6$ nhỏ nhất. Khi đó

- A. $a + 2b = 1$. B. $a + b = 2$. C. $a + b = -2$. D. $a + 2b = 3$.

Câu 63: [2D1-8.1-3] Gọi d là đường thẳng đi qua $A(1;0)$ và có hệ số góc m . Tìm các giá trị của tham số m để d cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt M, N thuộc hai nhánh của đồ thị.

- A. $m \neq 0$. B. $m > 0$. C. $m < 0$. D. $0 < m \neq 1$.

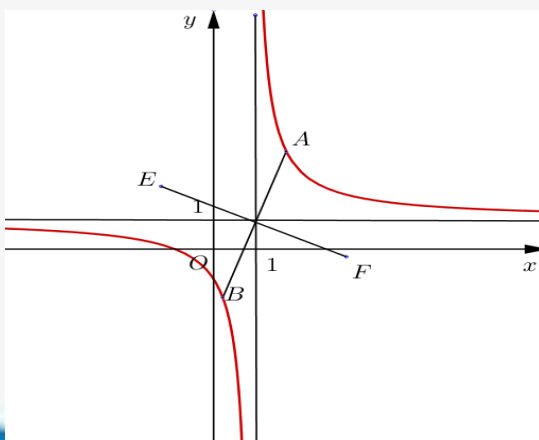
Câu 64: [2D1-8.1-3] Cho đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$. Tọa độ điểm M nằm trên (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của (C) nhỏ nhất là

- A. $M(-1;0)$ hoặc $M(3;4)$. B. $M(-1;0)$ hoặc $M(0;-2)$.
C. $M(2;6)$ hoặc $M(3;4)$. D. $M(0;-2)$ hoặc $M(2;6)$.

Câu 65: [2D1-8.4-3] Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$. M và N là hai điểm thuộc đồ thị của hàm số sao cho hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M và N song song với nhau. Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. Hai điểm M và N đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.
B. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đi qua trung điểm của đoạn thẳng MN .
C. Hai điểm M và N đối xứng với nhau qua giao điểm của hai đường tiệm cận.
D. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đi qua trung điểm của đoạn thẳng MN .

Câu 66: [2D1-8.4-3] Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Giả sử A, B là hai điểm thuộc (C) và đối xứng với nhau qua giao điểm của hai đường tiệm cận. Dựng hình vuông $AEBF$. Tìm diện tích nhỏ nhất của hình vuông $AEBF$.



A. $S_{\min} = 8\sqrt{2}$.

B. $S_{\min} = 4\sqrt{2}$.

C. $S_{\min} = 8$.

D. $S_{\min} = 16$.

Câu 67: [2D1-8.1-3] Cho hàm số $y = x(x^2 - 3)$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị (C) thỏa mãn tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại điểm A (khác M) và cắt Ox tại điểm B sao cho M là trung điểm của đoạn AB ?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Câu 68: [2D1-8.1-3] Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C) . Hỏi có bao nhiêu điểm trên đường thẳng $d: y = 9x - 14$ sao cho từ đó kẻ được hai tiếp tuyến với (C) .

A. 3 điểm.

B. 4 điểm.

C. 2 điểm.

D. 1 điểm.

Câu 69: [2D1-8.1-4] Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0; a)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của a trong đoạn $[-2018; 2018]$ để từ điểm A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành?

A. 2017.

B. 2020.

C. 2018.

D. 2019.

Câu 70: [2D1-8.1-3] Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a; 2)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để có đúng hai tiếp tuyến của (C) đi qua điểm A và có hệ số góc k_1, k_2 thỏa mãn $k_1 + k_2 + 10k_1^2 k_2^2 = 0$. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 7.

B. $\frac{7-\sqrt{5}}{2}$.

C. $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$.

D. $\frac{7}{2}$.

Câu 71: [2D1-8.1-3] Cho đồ thị hàm số: $y = \frac{1}{3}x^4 - 2x^2 + 1$ có ba điểm cực trị $A, B, C (A \in Oy)$. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc cạnh AB, AC sao cho đoạn thẳng MN chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau. Giá trị nhỏ nhất của MN là

A. $\sqrt{6}$.

B. 12..

C. 6..

D. $2\sqrt{3}$.

Câu 72: [2D1-8.1-3] Cho đồ thị hàm số: $y = \frac{1}{3}x^4 - 2x^2 + 1$ có ba điểm cực trị $A, B, C (A \in Oy)$. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc cạnh AB, AC sao cho đoạn thẳng MN chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau. Gọi tung độ của M và N lần lượt là y_M, y_N . Ta có tổng $T = y_M + y_N$ bằng :

A. $\sqrt{6} + 2$.

B. $2\sqrt{6}$.

C. $2 - \sqrt{6}$

D. 0

Câu 73: [2D1-8.1-3] Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ có đồ thị là (C) . Tìm tọa độ điểm M trên (C) sao cho diện tích tam giác ABM bằng 4, biết $A(1;3), B(-1;3)$?

- A. $M(1;-1)$ B. $M(-3;3)$ C. $M(0;-3)$ D. $M(-2;5)$

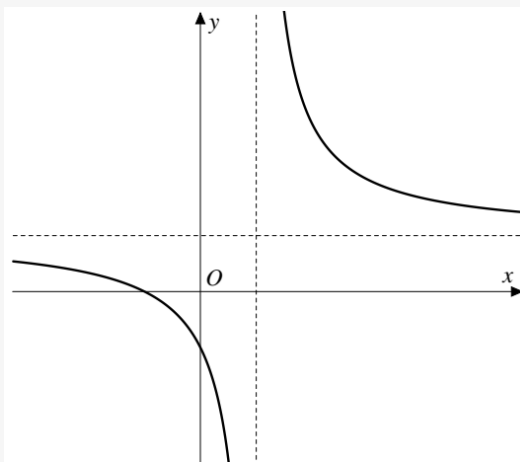
Câu 74: [2D1-8.1-3] Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+2}$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm M thuộc (C) sao cho OM là đường chéo của một hình chữ nhật có diện tích bằng $\frac{2}{3}$.

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 75: [2D1-8.1-3] Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có đồ thị. Tổng hoành độ các điểm M thuộc (C) sao cho OM là đường chéo của một hình chữ nhật có diện tích bằng $\frac{3}{2}$ bằng:

- A. 3. B. $\frac{7}{2}$. C. 2. D. $\frac{5}{2}$.

Câu 76: [2D1-8.1-4] Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Các điểm A, B, C, D nằm trên đồ thị (C) sao cho $ABCD$ là hình chữ nhật có diện tích bằng 6. Tính độ dài đoạn thẳng AB biết A, B là hai điểm thuộc cùng một nhánh của đồ thị (C) .



- A. $3\sqrt{3}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\sqrt{2}$.

Câu 77: [2D1-8.1-3] Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ có đồ thị là (C) . Tìm tọa độ điểm M trên (C) sao cho diện tích tam giác ABM bằng 2, biết $A(1;3), B(-1;3)$?

- A. $M(1;-1)$ B. $M(-3;3)$ C. $M(0;-3)$. D. $M(-2;5)$

Câu 78: [2D1-8.1-3] Tìm điểm M trên đồ thị $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$ sao cho diện tích tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất với $A(0;1), B(-3;2)$.

- A. $M(-2;1)$. B. $M(2;5)$. C. $M\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. D. $M\left(3;\frac{7}{2}\right)$.

Câu 79: [2D1-8.1-3] Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + \frac{5}{3}$ (C) . Gọi A, B là giao điểm của đồ thị với trục Ox . Trên đồ thị (C) có bao nhiêu điểm M nhìn AB dưới 1 góc vuông

- A. 4 điểm. B. 3 điểm. C. 2 điểm. D. 0 điểm.

Câu 80: [2D1-8.1-3] Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$. Tìm điểm M nằm trên đồ thị hàm số trên biết tiếp tuyến tại M cắt tiệm cận đứng, tiệm cận ngang tại 2 điểm A, B sao cho $\cos \angle ABI = \frac{4}{\sqrt{17}}$, với I là giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

- A. $M(1;1)$. B. $M\left(0;\frac{3}{2}\right)$ hoặc $M\left(4;\frac{5}{2}\right)$.
C. $M\left(4;\frac{5}{2}\right)$. D. $M(3;3)$.

Câu 81: [2D1-8.1-3] Tìm m để đồ thị $(C): y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$ có tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d: x + y + 7 = 0$ góc α sao cho $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$.

- A. $m \leq -\frac{1}{4}$ B. $m \leq -\frac{3}{4}$ C. $\begin{cases} m \leq -\frac{3}{4} \\ m \geq 1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m \leq -\frac{1}{4} \\ m \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

Câu 82: [2D1-8.1-3] Cho $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$. Trên (C) có bao nhiêu điểm M mà tiếp tuyến với (C) tại M cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $\tan \angle OAB = \frac{1}{3}$

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 83: [2D1-8.1-3] Tọa độ 2 điểm $B(a;b)$ và $C(c;d)$ thuộc 2 nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{x-1}$ sao cho tam giác ABC vuông cân tại $A(2;1)$. Khi đó $a+b+c+d$ bằng

A. 0 .

B. 1 .

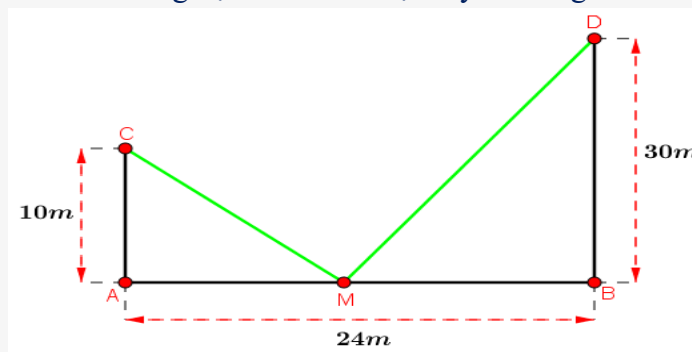
C. -1 .

D. 10

Chuyên đề : ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI TOÁN THỰC TẾ

DẠNG 1: BÀI TOÁN VỀ QUĂNG ĐƯỜNG

Câu 1: (THTT SỐ 673) Có hai chiếc cọc cao $10m$ và $30m$ lần lượt đặt tại hai vị trí A, B . Biết khoảng cách giữa hai cọc bằng $24m$. Người ta chọn một cái chốt ở vị trí M trên mặt đất nằm giữa hai chân cột để giăng dây nối đến hai đỉnh C và D của cọc (như hình vẽ). Hỏi ta phải đặt chốt ở vị trí nào để tổng độ dài của hai sợi dây đó là ngắn nhất?



A. $AM = 6m, BM = 18m$.

B. $AM = 7m, BM = 17m$.

C. $AM = 4m, BM = 20m$.

D. $AM = 12m, BM = 12m$.

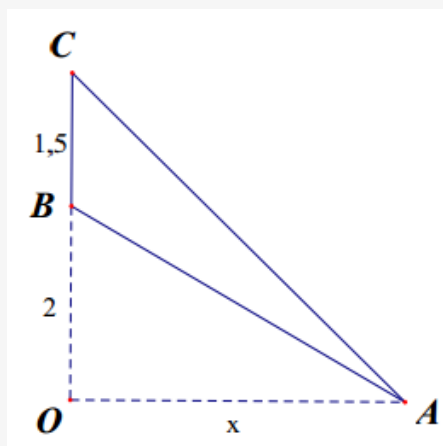
Câu 2: Một màn ảnh hình chữ nhật cao $1,5m$ được đặt trên cao $2m$ so với tầm mắt (tính từ mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng sao cho góc nhìn lớn nhất. Hãy xác định vị trí đó. (Góc BAC gọi là góc nhìn).?

A. $\sqrt{5}m$

B. $2m$

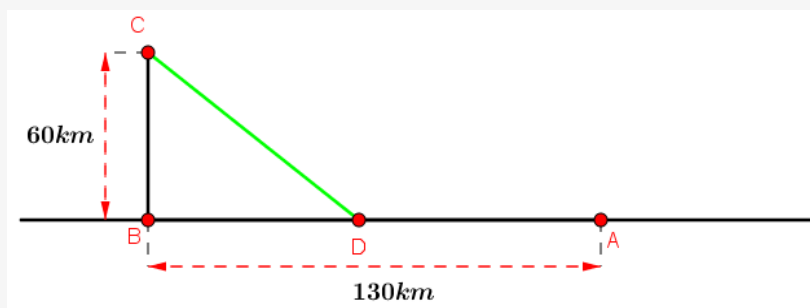
C. $\sqrt{7}m$

D. $3m$



Câu 3: (ĐỒNG QUAN 1) Một kho hàng được đặt tại vị trí A trên bến cảng cần được chuyển tới kho C trên một đảo, biết rằng khoảng cách ngắn nhất từ kho C đến bờ biển AB bằng độ dài $CB = 60km$ và khoảng cách giữa 2 điểm A, B là $AB = 130km$. Chi phí để vận chuyển toàn bộ kho hàng bằng đường bộ là 300.000 đồng/km, trong khi đó chi phí vận chuyển hàng bằng đường thủy là 500.000 đồng/km. Hỏi phải chọn điểm trung chuyển hàng D (giữa đường bộ

và đường thủy) cách kho A một khoảng bằng bao nhiêu thì tổng chi phí vận chuyển hàng từ kho A đến kho C là ít nhất?

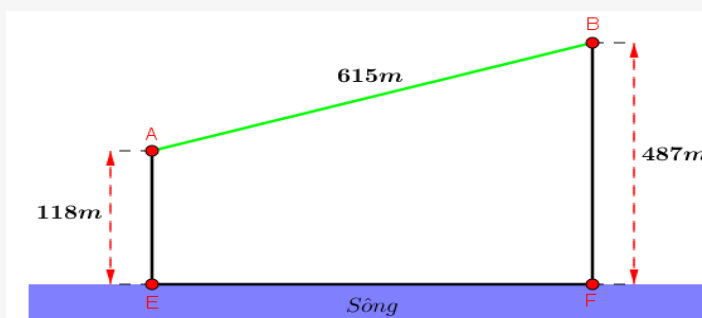


- A. 45 km . B. 65 km . C. 85 km . D. 105 km .

Câu 4: (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ LẦN 8) Một vùng đất hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 25 \text{ km}$, $BC = 20 \text{ km}$ và M , N lần lượt là trung điểm của AD , BC . Một người cưỡi ngựa xuất phát từ A đi đến C bằng cách đi thẳng từ A đến một điểm X thuộc đoạn MN rồi lại đi thẳng từ X đến C . Vận tốc của ngựa khi đi trên phần $ABNM$ là 15 km/h , vận tốc của ngựa khi đi trên phần $MNCD$ là 30 km/h . Thời gian ít nhất để ngựa di chuyển từ A đến C là mấy giờ?

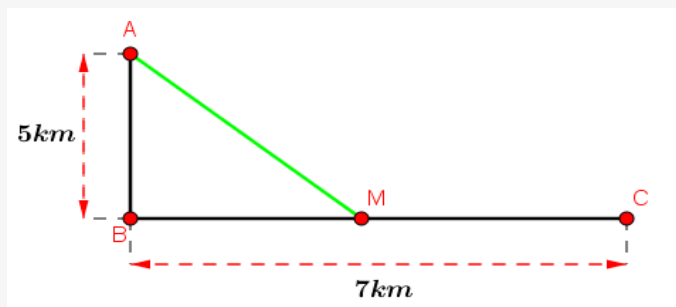
- A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{41}}{4}$. C. $\frac{4 + \sqrt{29}}{6}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Câu 5: (HÀ NỘI – AMSTERDAM) Cho hai vị trí A , B cách nhau 615 m , cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ. Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118 m và 487 m . Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B . Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi là:



- A. 569,5 m B. 671,4 m
C. 779,8 m D. 741,2 m

Câu 6: (PHÚ XUYỀN) Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 5 \text{ km}$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7 km . Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến điểm M trên bờ biển với vận tốc 4 km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km/h (xem hình vẽ ở dưới đây). Tính độ dài đoạn BM để người đó đến kho nhanh nhất.



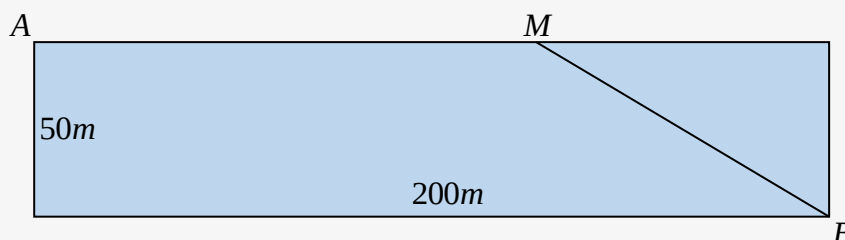
A. $\frac{\sqrt{74}}{4}$.

B. $\frac{29}{12}$.

C. $\sqrt{29}$.

D. $2\sqrt{5}$.

Câu 7: (HÀ HUY TẬP) Có một bể bơi hình chữ nhật rộng $50m$, dài $200m$. Một vận động viên chạy phối hợp với bơi như sau: Xuất phát từ điểm A , chạy đến điểm M và bơi từ điểm M đến điểm B (như hình vẽ). Hỏi nên chọn điểm M cách A gần bằng bao nhiêu mét để đến B nhanh nhất (làm tròn đến hàng đơn vị)? Biết vận tốc chạy $4,8m/s$, vận tốc bơi $2,4m/s$.



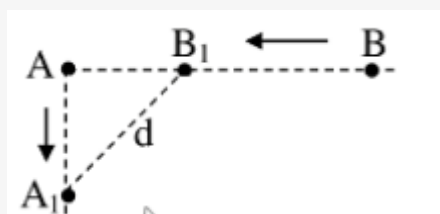
A. $AM \approx 171m$.

B. $AM \approx 182m$.

C. $AM \approx 179m$.

D. $AM \approx 181m$.

Câu 8: Hai con tàu đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 5 hải lý. Đồng thời cả hai con tàu cùng khởi hành, một chạy về hướng Nam với vận tốc 6 hải lý/ giờ., còn tàu kia chạy về vị trí hiện tại của tàu thứ nhất với vận tốc 7 hải lý/ giờ. Hãy xác định thời điểm mà khoảng cách giữa hai tàu là nhỏ nhất?



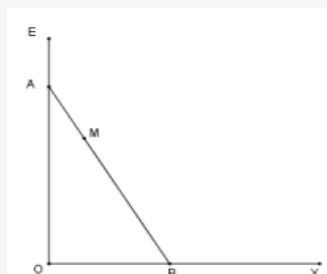
A. $t = \frac{2}{17}$ (giờ).

B. $t = \frac{7}{17}$ (giờ).

C. $t = \frac{5}{17}$ (giờ).

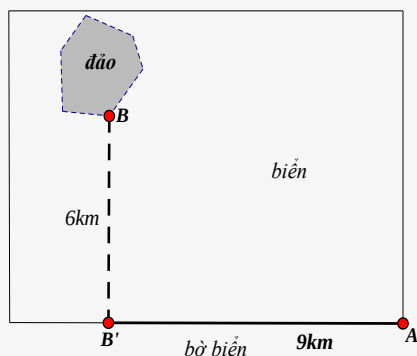
D. $t = \frac{1}{17}$ (giờ).

Câu 9: Trên một đoạn đường giao thông có 2 con đường vuông góc với nhau tại O như hình vẽ. Một địa danh lịch sử có vị trí đặt tại M , vị trí M cách đường OE $125m$ và cách đường Ox $1km$. Vì lý do thực tiễn người ta muốn làm một đoạn đường thẳng AB đi qua vị trí M , biết rằng giá trị để làm $100m$ đường là 150 triệu đồng. Chọn vị trí của A và B để hoàn thành con đường với chi phí thấp nhất. Hỏi chi phí thấp nhất để hoàn thành con đường là bao nhiêu?



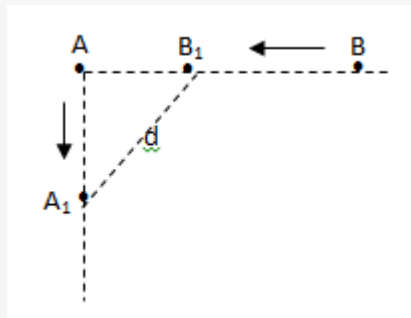
- A. 1,9063 tỉ đồng. B. 2,3965 tỉ đồng C. 2,0963 tỉ đồng. D. 3 tỉ đồng.

Câu 10: Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ đến một điểm B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6km. Giá để xây đường ống trên bờ là 50.000USD mỗi km, và 130.000USD mỗi km để xây dưới nước. B' là điểm trên bờ biển sao cho BB' vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến B' là 9km. Vị trí C trên đoạn AB' sao cho khi nối ống theo ACB thì số tiền ít nhất. Khi đó C cách A một đoạn bằng:



- A. 6.5km. B. 6 km. C. 0 km. D. 9 km.

Câu 11: Hai con tàu đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 5 hải lý. Đồng thời cả hai tàu cùng khởi hành, một chạy về hướng Nam với 6 hải lý/giờ, còn tàu kia chạy về vị trí hiện tại của tàu thứ nhất với vận tốc 7 hải lý/ giờ. Hãy xác định mà thời điểm mà khoảng cách của hai tàu là lớn nhất?



- A. $d = 2,35$ hải lý. B. $d = 3,25$ hải lý. C. $d = 4,25$ hải lý. D. $d = 5,25$ hải lý.

Câu 12: Chi phí nhiên liệu của một chiếc tàu chạy trên sông được chia làm hai phần. Phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 nghìn đồng trên 1 giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v = 10$ (km/giờ) thì phần thứ hai bằng 30 nghìn đồng/giờ. Hãy xác định vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường sông là nhỏ nhất (kết quả làm tròn đến số nguyên).

- A. 10 (km/giờ). B. 25 (km/giờ). C. 15 (km/giờ). D. 20 km/giờ).

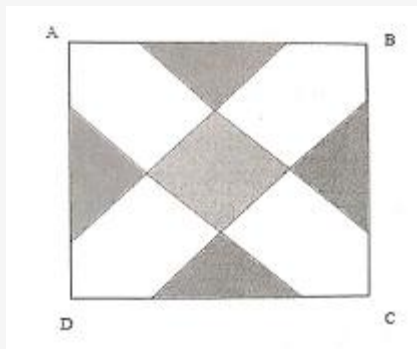
DẠNG 2: BÀI TOÁN DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

Câu 1: Ông An muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 288cm^3 . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân

công để xây bể là 500000 đồng/ m^2 . Nếu ông An biết xác định các kích thước của bể hợp lý thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi ông An trả chi phí thấp nhất để xây dựng bể đó là bao nhiêu?

- A. 108 triệu đồng B. 54 triệu đồng C. 168 triệu đồng D. 90 triệu đồng

Câu 2: Bên cạnh hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4, chính giữa có một hình vuông đồng tâm với $ABCD$. Biết rằng bốn tam giác là bốn tam giác cân. “Hỏi tổng diện tích của vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ nhất bằng bao nhiêu?”



- A. 6,61. B. 5,33. C. 5,15. D. 6,12

Câu 3: Cho một tam giác đều ABC cạnh a . Người ta dựng một hình chữ nhật $MNPQ$ có cạnh MN nằm trên cạnh BC , hai đỉnh P và Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác. Giá trị lớn nhất của diện tích hình chữ nhật là

- A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. B. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Câu 4: Thầy Tâm cần xây một hồ chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3}m^3$. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây hồ là 500.000 đồng/ m^2 . Khi đó, kích thước của hồ nước như thế nào để chi phí thuê nhân công mà thầy Tâm phải trả thấp nhất:

- A. Chiều dài $20m$, chiều rộng $15m$ và chiều cao $\frac{20}{3}m$.
 B. Chiều dài $20m$, chiều rộng $10m$ và chiều cao $\frac{5}{6}m$.
 C. Chiều dài $10m$, chiều rộng $5m$ và chiều cao $\frac{10}{3}m$.
 D. Chiều dài $30m$, chiều rộng $15m$ và chiều cao $\frac{10}{27}m$

Câu 5: Một nông dân muốn rào lại bãi cỏ hình chữ nhật dọc một con sông, cạnh dọc sông không cần phải rào. Ông có 1000 m lưới sắt để rào. Tính diện tích bãi cỏ lớn nhất mô tả ở trên có thể rào được.

A. 125 m^2

B. 1250 m^2

C. 12500 m^2

D. 125000 m^2

Câu 6: [2D1-3.10-3] Người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là $a \text{ m}$ thẳng hàng rào. Ở đó người ta tận dụng một bờ giậu có sẵn để làm một cạnh của hàng rào. Vậy để rào khu đất ấy theo hình chữ nhật sao cho có diện tích lớn nhất thì giá trị lớn nhất đó tính theo a bằng.

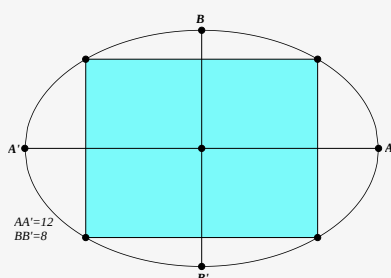
A. $\frac{a^2}{4} \text{ m}^2$

B. $\frac{a^2}{6} \text{ m}^2$

C. $\frac{a^2}{8} \text{ m}^2$

D. $\frac{a^2}{12} \text{ m}^2$

Câu 7: Một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng 12 m , độ dài trục bé bằng 8 m . Người ta dự định trồng hoa trong một hình chữ nhật nội tiếp của elip như hình vẽ. Hỏi diện tích trồng hoa lớn nhất có thể là?



A. $\frac{576}{13} \text{ m}^2$

B. 48 m^2

C. 62 m^2

D. 46 m^2

Câu 8: Một lão nông chia đất cho con trai để người con canh tác riêng, biết người con sẽ được chọn miếng đất hình chữ nhật có chu vi bằng 800 (m) . Hỏi anh ta chọn mỗi kích thước của nó bằng bao nhiêu để diện tích canh tác lớn nhất?

A. $200 \text{ m} \times 200 \text{ m}$

B. $300 \text{ m} \times 100 \text{ m}$

C. $250 \text{ m} \times 150 \text{ m}$

D. Đáp án khác

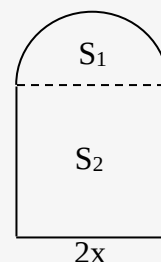
Câu 9: Cần phải làm cái cửa sổ mà, phía trên là hình bán nguyệt, phía dưới là hình chữ nhật, có chu vi là $a \text{ (m)}$ (a chính là chu vi hình bán nguyệt cộng với chu vi hình chữ nhật trừ đi độ dài cạnh hình chữ nhật là dây cung của hình bán nguyệt). Hãy xác định các kích thước của nó để diện tích cửa sổ là lớn nhất?

A. chiều rộng bằng $\frac{2a}{4 + \pi}$, chiều cao bằng $\frac{a}{4 + \pi}$

B. chiều rộng bằng $\frac{a}{4 + \pi}$, chiều cao bằng $\frac{2a}{4 + \pi}$

C. chiều rộng bằng $a(4 + \pi)$, chiều cao bằng $2a(4 + \pi)$

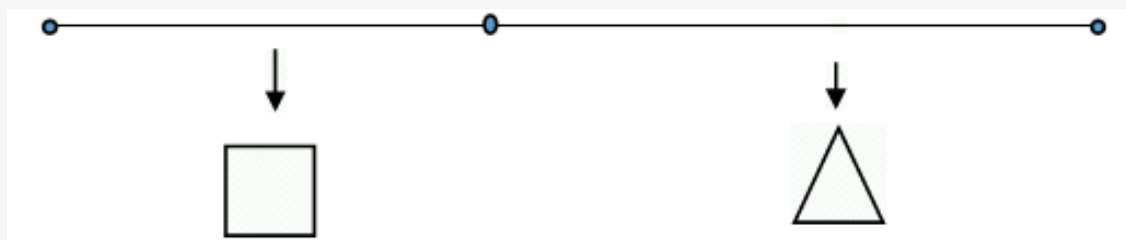
D. chiều rộng bằng $\frac{a}{(4 + \pi)}$, chiều cao bằng $\frac{a}{(4 + \pi)}$



Câu 10: Có một tấm gỗ hình vuông cạnh 200 cm. Cắt một tấm gỗ có hình tam giác vuông, có tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số 120cm từ tấm gỗ trên sao cho tấm gỗ hình tam giác vuông có diện tích lớn nhất. Hỏi cạnh huyền của tấm gỗ này là bao nhiêu?

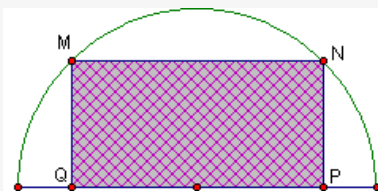
- A. 40cm. B. $40\sqrt{3}$ cm. C. 80cm. D. $40\sqrt{2}$ cm.

Câu 11: Bạn A có một đoạn dây mềm và dẻo không đàn hồi 20 m, bạn chia đoạn dây thành hai phần, phần đầu gấp thành một tam giác đều. Phần còn lại gấp thành một hình vuông. Hỏi độ dài phần đầu bằng bao nhiêu (m) để tổng diện tích hai hình trên là nhỏ nhất?



- A. $\frac{120}{9+4\sqrt{3}}$ m. B. $\frac{40}{9+4\sqrt{3}}$ m. C. $\frac{180}{9+4\sqrt{3}}$ m. D. $\frac{60}{9+4\sqrt{3}}$ m

Câu 12: Từ một miếng tôn hình bán nguyệt có bán kính $R=3$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (xem hình) có diện tích lớn nhất. Diện tích lớn nhất có thể có của miếng tôn hình chữ nhật là



- A. $6\sqrt{3}$. B. $6\sqrt{2}$. C. 7. D. 9.

Câu 13: Một miếng bìa hình tam giác đều ABC , cạnh bằng 16. Học sinh Trang cắt một hình chữ nhật $MNPQ$ từ miếng bìa trên để làm biển trông xe cho lớp trong buổi ngoại khóa (với M, N thuộc cạnh BC ; P, Q lần lượt thuộc cạnh AC và AB). Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ lớn nhất bằng bao nhiêu?

- A. $16\sqrt{3}$. B. $8\sqrt{3}$. C. $32\sqrt{3}$. D. $34\sqrt{3}$.

Câu 14: (TTLT ĐH ĐIỀU HIỂN) Một người nông dân rào một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích là $10.000m^2$. Biết rằng bờ rào ở các cạnh phía bắc và phía nam giá $1500/m$, bờ rào ở các cạnh phía đông và phía tây giá $6000/m$. Để chi phí thấp nhất thì kích thước Đông - Tây, Bắc - Nam của mảnh vườn là.

- A. 50m; 200m B. 200m; 50m. C. 40m; 250m. D. 100m; 100m.

Câu 15: Cho hình thang cân có độ dài đáy nhỏ và hai cạnh bên đều bằng 1 mét. Khi đó hình thang đã cho có diện tích lớn nhất bằng?

- A. $3\sqrt{3} (m^2)$. B. $\frac{3\sqrt{3}}{2} (m^2)$. C. $\frac{3\sqrt{3}}{4} (m^2)$. D. $1 (m^2)$.

Câu 16: Thầy Hồng dự định xây một bồn hoa có bề mặt là hình tròn có đường kính $AB=10m$, để cho ấn tượng thầy Hồng thiết kế có hai hình tròn nhỏ trong hình tròn lớn bằng cách lấy điểm M giữa A và B rồi dựng các đường tròn đường kính MA và MB . Trong hai đường tròn nhỏ thầy định trồng loại hoa hồng đỏ, còn phần còn lại thầy trồng hoa hồng trắng. Biết giá hoa hồng đỏ là 5.000 đồng, hoa hồng trắng là 4.000 đồng và ít nhất $0.5 m^2$ mới trồng được một bông hoa. Hỏi chi phí thấp nhất để trồng hoa của thầy là bao nhiêu?

- A. 752000 đồng. B. 706858 đồng. C. 702000 đồng. D. 622000 đồng.

Câu 17: Trong các tam giác vuông có tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền là a ($a > 0$), tam giác có diện tích lớn nhất là

- A. $\frac{a^2}{5\sqrt{6}}$. B. $\frac{a^2}{3\sqrt{6}}$. C. $\frac{a^2}{6\sqrt{5}}$. D. $\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$.

Câu 18: Chu vi của một tam giác là 16cm, biết độ dài một cạnh của tam giác là $a = 6$ cm. Tính độ dài hai cạnh còn lại của tam giác sao cho tam giác đó có diện tích lớn nhất.

- A. 5cm, 5cm. B. 3cm, 7cm. C. 2cm, 8cm. D. 4cm, 6cm.

Câu 19: Tìm các cạnh của hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất trong số các hình chữ nhật có diện tích bằng $48 m^2$.

- A. $\sqrt{84} m$. B. $\sqrt{50} m$. C. $\sqrt{48} m$. D. $\sqrt{45} m$.

Câu 20: Một sợi dây kim loại dài a (cm). Người ta cắt đoạn dây đó thành hai đoạn có độ dài x (cm) được uốn thành đường tròn và đoạn còn lại được uốn thành hình vuông ($a > x > 0$). Tìm x để hình vuông và hình tròn tương ứng có tổng diện tích nhỏ nhất.

- A. $x = \frac{a}{\pi+4}$ (cm). B. $x = \frac{2a}{\pi+4}$ (cm). C. $x = \frac{\pi a}{\pi+4}$ (cm). D. $x = \frac{4a}{\pi+4}$ (cm).

Câu 21: Từ một bờ tường có sẵn, người ta muốn rào quanh một khu đất theo hình chữ nhật với một số vật liệu cho trước là 100 m thẳng hàng rào. Khi khu đất được rào có diện tích lớn nhất thì chiều dài và chiều rộng hình chữ nhật là

- A. 50 m, 25 m. B. 35 m, 35 m. C. 75 m, 25 m. D. 50 m,

DẠNG 3: BÀI TOÁN LIÊN HỆ DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH

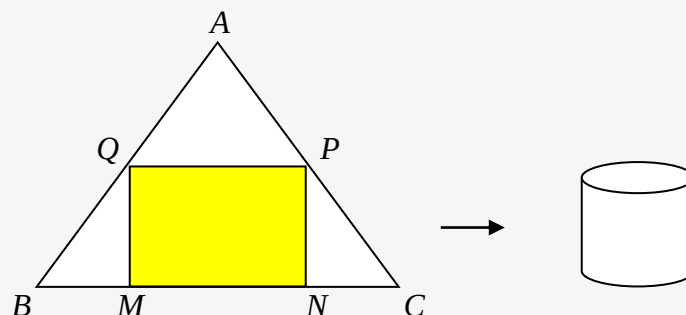
Câu 1: Bạn A muốn làm một chiếc thùng hình trụ không đáy từ nguyên liệu là mảnh tôn hình tam giác đều ABC có cạnh bằng 90 (cm) . Bạn muốn cắt mảnh tôn hình chữ nhật $MNPQ$ từ mảnh tôn nguyên liệu (với M, N thuộc cạnh BC ; P và Q tương ứng thuộc cạnh AC và AB) để tạo thành hình trụ có chiều cao bằng MQ . Thể tích lớn nhất của chiếc thùng mà bạn A có thể làm được là:

A. $\frac{91125}{4\pi}(\text{cm}^3)$.

B. $\frac{91125}{2\pi}(\text{cm}^3)$.

C. $\frac{108000\sqrt{3}}{\pi}(\text{cm}^3)$.

D. $\frac{13500\sqrt{3}}{\pi}(\text{cm}^3)$.



Câu 2: Ta có một miếng tôn phẳng hình vuông với kích thước $a(\text{cm})$, ta muốn cắt đi ở bốn góc bốn hình vuông cạnh bằng $x(\text{cm})$ để uốn thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Phải cắt như thế nào để hình hộp có thể tích lớn nhất?

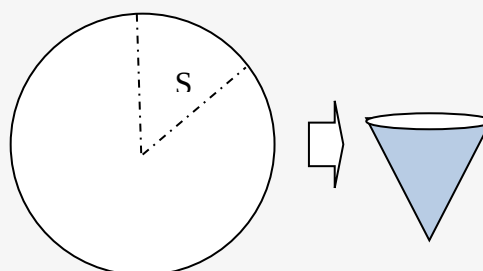
A. $x = \frac{a}{4}$.

B. $x = \frac{a}{5}$.

C. $x = \frac{a}{6}$.

D. $x = \frac{a}{7}$.

Câu 3: Từ một tấm tôn hình tròn có đường kính bằng 60 cm . Người ta cắt bỏ đi một hình quạt S của tấm tôn đó, rồi gấn các mép vừa cắt lại với nhau để được một cái nón không có nắp (như hình vẽ). Hỏi bằng cách làm đó người ta có thể tạo ra cái nón có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?



A. $1800\sqrt{3}\pi(\text{cm}^3)$.

B. $2480\sqrt{3}\pi(\text{cm}^3)$.

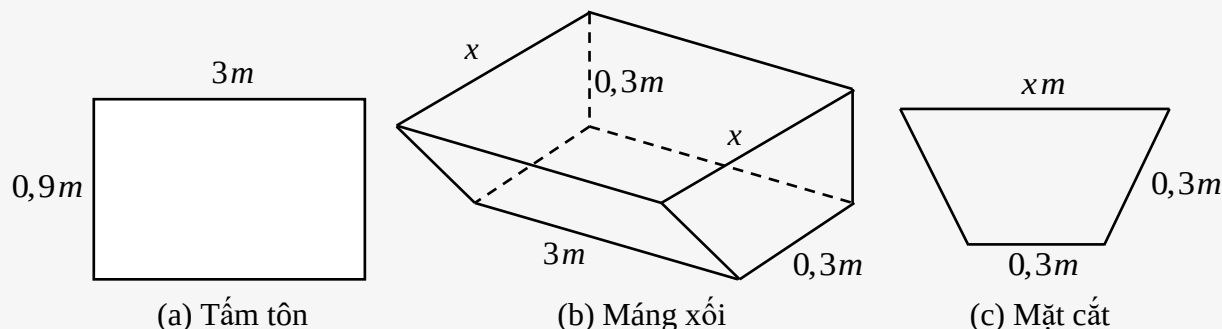
C. $2000\sqrt{3}\pi(\text{cm}^3)$.

D. $1125\sqrt{3}\pi(\text{cm}^3)$.

Câu 4: Một đĩa tròn bằng thép trắng có bán kính bằng R . Người ta phải cắt đĩa theo một hình quạt, sau đó gấp lại thành hình nón để làm một cái phễu. Cung tròn của hình quạt bị cắt đi phải bằng bao nhiêu độ để thể tích cái phễu lớn nhất?

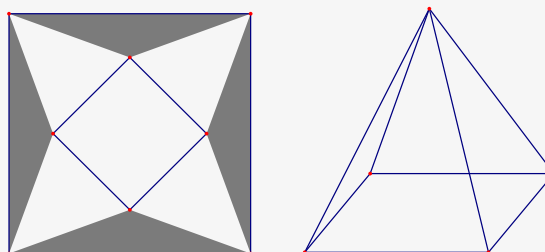
- A. $\approx 66^\circ$ B. $\approx 294^\circ$ C. $\approx 12,56^\circ$ D. $\approx 2,8^\circ$

Câu 5: Để làm một máng xối nước, từ một tấm tôn kích thước $0,9m \times 3m$ người ta gấp tấm tôn đó như hình vẽ dưới biết mặt cắt của máng xối (bởi mặt phẳng song song với hai mặt đáy) là một hình thang cân và máng xối là một hình lăng trụ có chiều cao bằng chiều dài của tấm tôn. Hỏi x (m) bằng bao nhiêu thì thể tích máng xối lớn nhất?



- A. $x = 0,5m$. B. $x = 0,65m$. C. $x = 0,4m$. D. $x = 0,6m$

Câu 6: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 1 m như hình vẽ dưới đây. Người ta cắt phần tô đậm của tấm nhôm rồi gấp thành một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng x (m), sao cho bốn đỉnh của hình vuông gấp lại thành đỉnh của hình chóp. Giá trị của x để khối chóp nhận được có thể tích lớn nhất là



- A. $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$ B. $x = \frac{1}{2}$ C. $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$

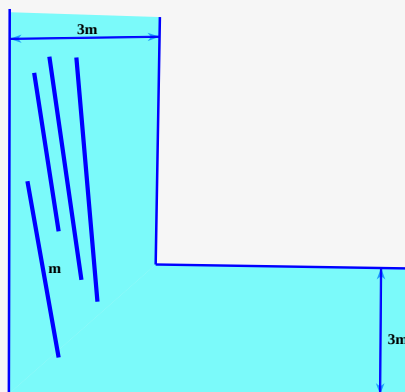
Câu 7: Người ta cần xây một hồ chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $1000 m^3$. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá để xây xung quanh hồ là 500.000 đồng/ m^2 , giá để đổ bê tông đáy hồ là 375.000 đồng/ m^2 . Số tiền ít nhất để xây được bể là:

- A. $225.000.000$ đồng. B. $1.150.900.000$ đồng.
C. $7.500.150.000$ đồng. D. $117.189.900.000$ đồng.

Câu 8: Để làm một chiếc cốc bằng thủy tinh hình trụ với đáy cốc dày 1,5cm, thành xung quanh cốc dày 0,2 cm và có thể tích thật (thể tích nó đựng được) là $480\pi\text{cm}^3$ thì người ta cần ít nhất bao nhiêu cm^3 thủy tinh?

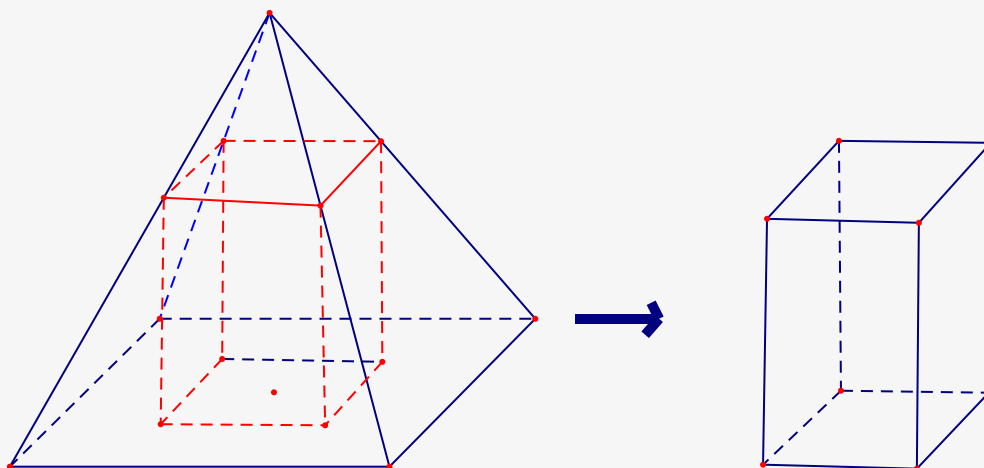
- A. $75,66\pi\text{ cm}^3$. B. $71,16\pi\text{ cm}^3$. C. $85,41\pi\text{ cm}^3$. D. $84,64\pi\text{ cm}^3$.

Câu 9: Một kênh dẫn nước theo góc vuông có bề rộng 3,0 m (như hình vẽ). Cho bốn cây luồng (thẳng) có độ dài là 6,2 m; 8,3 m; 8,4 m; 9,0 m trôi tự do trên kênh. Hỏi số cây luồng có thể trôi tự do qua góc kênh là bao nhiêu?



- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 10: Bên trong một khối gỗ đồ chơi dạng hình chóp đều có thể tích V người ta đục một khối hộp chữ nhật sao cho một mặt của khối hộp đó nằm trên mặt đáy của khối chóp, các đỉnh còn lại của khối hộp lần lượt nằm trên các cạnh bên của khối chóp (như hình vẽ). Thể tích lớn nhất của khối hộp là



- A. $\frac{V}{2}$. B. $\frac{V}{4}$. C. $\frac{4V}{9}$. D. $\frac{8V}{27}$.

Câu 11: Anh Minh muốn xây dựng một hồ ga không có nắp đậy dạng hình hộp chữ nhật có thể tích chứa được 3200cm^3 , tỉ số giữa chiều cao và chiều rộng của hồ ga bằng 2. Xác định diện tích đáy của hồ ga để khi xây hồ tiết kiệm được nguyên vật liệu nhất.

- A. 170cm^2 . B. 160cm^2 . C. 150cm^2 . D. 140cm^2 .

Câu 12: Một mảnh vườn hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 40\text{m}$, $AD = 8\text{m}$. Người ta muốn lát một đường đi từ A đến C như sau: Chọn một điểm M trên AB và lát gạch trên AM , sau đó lát tiếp trên đoạn MC . Biết chi phí trên AM là 60.000 đồng/mét; trên MC là 100.000 đồng/mét. Tính chi phí thấp nhất để lát đường đi như trên.

- A. 3.200.000 đồng. B. 3.040.000 đồng. C. 2.448.000 đồng. D. 4080.000 đồng.

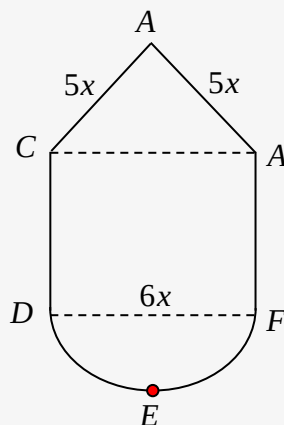
Câu 13: Một sợi dây kim loại dài 1m , được cắt thành 2 đoạn. Đoạn dây thứ nhất có độ dài l_1 uốn thành hình vuông, đoạn dây thứ nhất có độ dài l_2 uốn thành đường tròn. Tính tỷ số $k = \frac{l_1}{l_2}$ để tổng diện tích hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất.

- A. $k = \frac{\pi}{4}$. B. $k = \frac{1}{2(4+\pi)}$. C. $k = \frac{4}{\pi}$. D. $k = \frac{1}{2\pi}$.

Câu 14: Một người nông dân có 3 tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài $a(\text{m})$. Ông muốn rào một mảnh vườn dọc theo bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ (có đáy CD trùng với bờ sông không phải rào). Diện tích vườn lớn nhất có thể rào được là bao nhiêu?

- A. $a^2\sqrt{3}(\text{m}^2)$. B. $\frac{5\sqrt{3}a^2}{4}(\text{m}^2)$. C. $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}(\text{m}^2)$. D. $\frac{\sqrt{3}a^2}{2}(\text{m}^2)$

Câu 15: [2D1-4] Một đoạn dây thép dài 150cm được uốn thành khung có dạng như hình vẽ.



Khi x thay đổi, tìm x để diện tích hình phẳng thu được đạt giá trị lớn nhất.

- A. $\frac{25}{4+\pi}\text{cm}$. B. $\frac{100}{4+\pi}\text{cm}$. C. $\frac{10}{4+\pi}\text{cm}$. D. $\frac{50}{4+\pi}\text{cm}$.