



CHUYÊN ĐỀ TRẮC NGHIỆM

Môn: Toán 12

Chuyên đề: KHẢO SÁT HÀM SỐ

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Lớp Toán thầy LÊ BÁ BẢO

Trường THPT Đặng Huy Trứ
116/04 Nguyễn Lộ Trạch, TP Huế

SĐT: 0935.785.115 Facebook: Lê Bá Bảo
Trung tâm KM 10 Hường Trà, Huế.

I. MỘT SỐ KẾT QUẢ

Trong thực tế, chúng ta gặp rất nhiều các dạng bài tập khác nhau, trong phần trình bày lý thuyết, chúng tôi xin giới thiệu 2 bài toán thường gặp sau:

1. Bài toán 1

Xét hàm số $y = g(x)$ liên tục trên $(a; b)$ và $g(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	a	b
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$g(a)$	$g(b)$

Dựa vào BBT trên, các bài toán có kết quả tương ứng như sau:

- 1) $m > g(x)$ nghiệm đúng $\forall x \in (a; b) \Leftrightarrow m \geq g(b)$.
- 2) $m < g(x)$ nghiệm đúng $\forall x \in (a; b) \Leftrightarrow m \leq g(a)$.
- 3) $m > g(x)$ có nghiệm trên $(a; b) \Leftrightarrow m > g(a)$.
- 4) $m < g(x)$ có nghiệm trên $(a; b) \Leftrightarrow m < g(b)$.

2. Bài toán 2

Xét hàm số $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $g(x)$ có bảng biến thiên như sau:

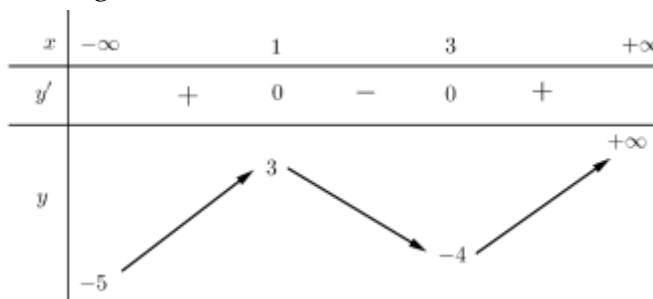
x	a	b
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$g(a)$	$g(b)$

Dựa vào BBT trên, các bài toán có kết quả tương ứng như sau:

- 1) $m > g(x)$ nghiệm đúng $\forall x \in [a; b] \Leftrightarrow m > g(b)$.
- 2) $m < g(x)$ nghiệm đúng $\forall x \in [a; b] \Leftrightarrow m < g(a)$.
- 3) $m > g(x)$ có nghiệm trên $[a; b] \Leftrightarrow m \geq g(a)$.
- 4) $m < g(x)$ có nghiệm trên $[a; b] \Leftrightarrow m \leq g(b)$.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

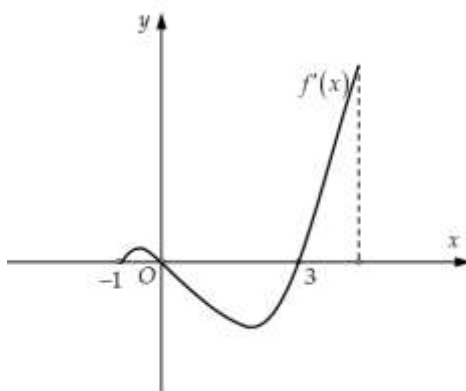
Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $f(\sqrt{x+1}+1) \leq m$ có nghiệm.

- A. $m \geq -4$. B. $m \geq 1$. C. $m \geq 2$. D. $m > -5$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 4]$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-1; 4]$ như hình vẽ dưới đây:

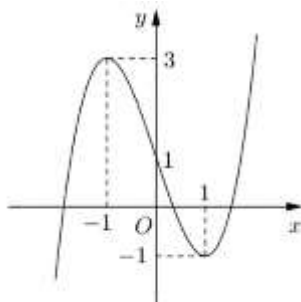


Tất cả các các trị của tham số m để bất phương trình $f(x) - m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi

$$x \in \left[\frac{3}{2}; \frac{10}{3} \right] \text{ là}$$

- A. $m \geq f(4)$. B. $m \geq f\left(\frac{10}{3}\right)$. C. $m \leq f(3)$. D. $m \leq f\left(\frac{3}{2}\right)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(f(\cos x)) \geq m$ nghiệm đúng với mọi giá trị $x \in [0; \pi]$ là

- A. $(-\infty; -1]$. B. $[-1; 1]$. C. $[-1; 3]$. D. $[-1; +\infty)$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ xác định và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Biết bất phương trình $f(x) < x^2 - x + m$ có nghiệm thuộc đoạn $[2; 4]$, trong đó m là tham số thực. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $m > f(4) - 12$. B. $m > f(2) - 2$. C. $m \geq f(2) - 2$. D. $m \geq f(4) - 12$.

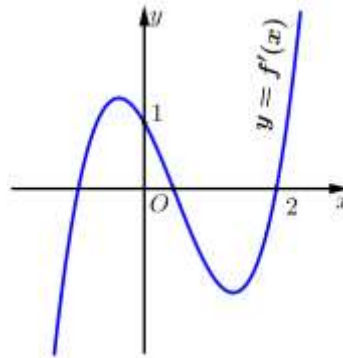
Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow 5$	$\searrow 0$	$\nearrow 3$	$\searrow -\infty$

Bất phương trình $f(x) > -x^3 + x^2 - x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng $\forall x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

- A. $m \leq f(1) + 1$. B. $m \leq f(-1) - 3$. C. $m < f(1) + 1$. D. $m < f(-1) - 3$.

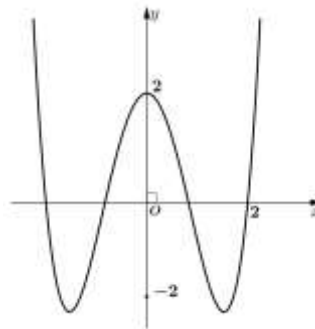
Câu 6: Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Bất phương trình $f(x) < x + m$ (m là tham số) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

- A. $m \geq f(2) - 2$. B. $m \geq f(0)$. C. $m > f(2) - 2$. D. $m > f(0)$.

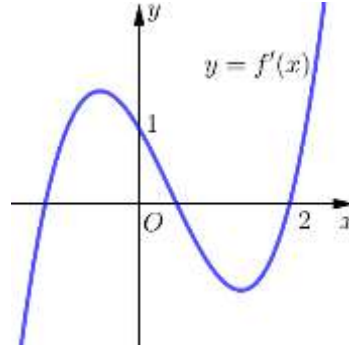
Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Bất phương trình $f(x) > 2x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

- A. $m \geq f(0)$. B. $m > f(0)$. C. $m \leq f(2) - 4$. D. $m < f(2) - 4$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Bất phương trình $f(x) < x + m$ có nghiệm $x \in (0; 2]$ khi và chỉ khi

- A. $m \geq f(2) - 2$. B. $m \leq f(0)$. C. $m > f(2) - 2$. D. $m < f(0)$.

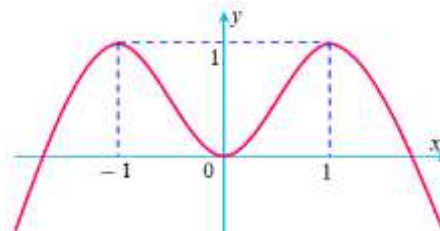
Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-1	0	$-\infty$

Bất phương trình $f(x) > x^3 + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

- A. $m > f(1) - 1$. B. $m \leq f(1) - 1$. C. $m \leq f(-1) - 3$. D. $m > f(1) - 3$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Bất phương trình $\frac{f(x)}{36} - \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} > m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 1)$ khi và chỉ khi

- A. $m < \frac{f(0)}{36} - \frac{1}{\sqrt{3}+2}$. B. $m \leq \frac{f(1)+9}{36}$. C. $m \leq \frac{f(0)}{36} - \frac{1}{\sqrt{3}+2}$. D. $m < \frac{f(1)+36}{9}$.

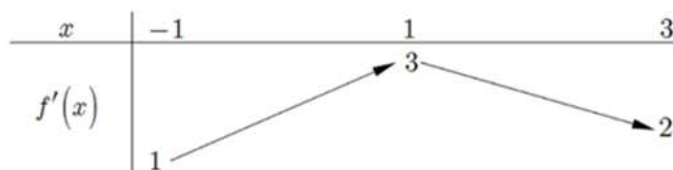
Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-4	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	3	5	$-\infty$

Bất phương trình $f(x) < m + x^2 - 2x$ có nghiệm đúng với mọi $x \in (-2; 2)$ khi chỉ khi

- A. $m \leq f(-2) - 8$. B. $m > f(2)$ C. $m < f(-2) - 8$ D. $m \geq f(2)$.

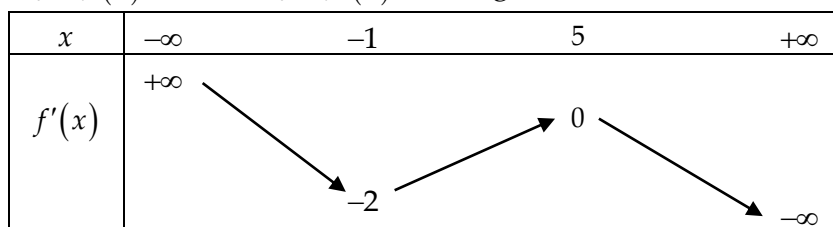
Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như sau:



Tìm tất cả giá trị của tham số m để bất phương trình $m + x^2 \leq f(x) + \frac{1}{3}x^3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 3)$.

- A. $m < f(0)$. B. $m \leq f(0)$. C. $m \leq f(3)$. D. $m < f(1) - \frac{2}{3}$.

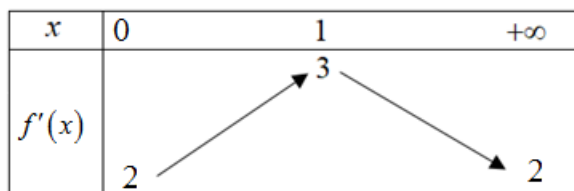
Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Bất phương trình $f(x) < -\cos x + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; \pi)$ khi và chỉ khi

- A. $m \geq f(0) + 1$. B. $m > f(0)$. C. $m > f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. D. $m > f(0) + 1$.

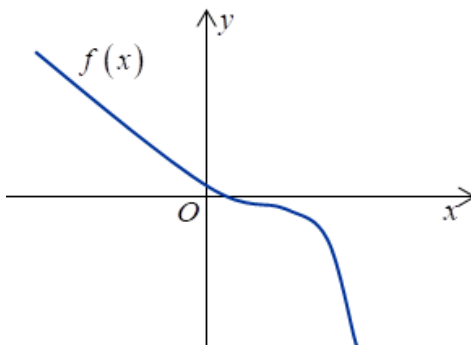
Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như sau:



Tìm m để bất phương trình $m + 2\sin x \leq f(x)$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; +\infty)$.

- A. $m \geq f(0)$. B. $m \leq f(1) - 2\sin 1$. C. $m \leq f(0)$. D. $m \geq f(1) - 2\sin 1$.

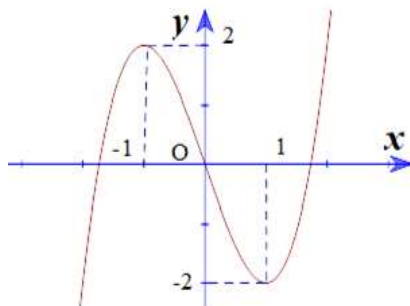
Câu 15: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ sau:



Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $f(x^2 + 2x) \leq f(mx - 10)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$?

- A. 10. B. 11. C. 12. D. 13.

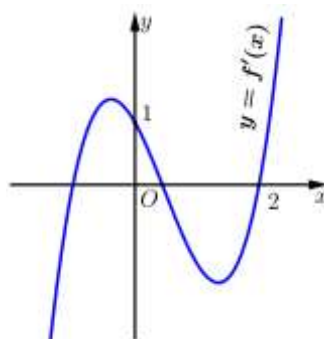
Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Bất phương trình $f(x) - x^2 + 3 < m$ có nghiệm đúng $\forall x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

- A. $m \geq f(0) + 3$. B. $m > f(0) + 3$. C. $m \geq f(1) + 3$. D. $m > f(1) + 3$.

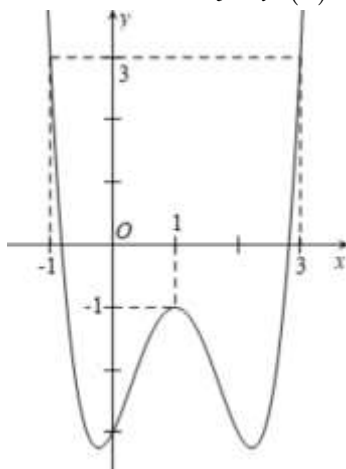
Câu 17: Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Bất phương trình $f(x) < \frac{x^2}{4} + x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

- A. $m \geq f(2) - 2$. B. $m \geq f(0)$. C. $m > f(2) - 2$. D. $m > f(0)$.

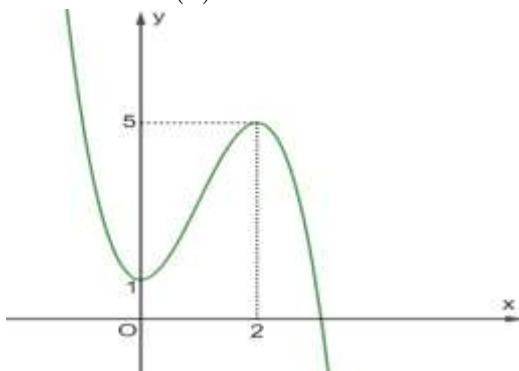
Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây:



Bất phương trình $3f(x) \leq x^3 - 3x^2 + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 3)$ khi và chỉ khi

- A. $m > 3f(3)$. B. $m \geq 3f(3)$. C. $m > 3f(-1) + 4$. D. $m \geq 3f(-1) + 4$.

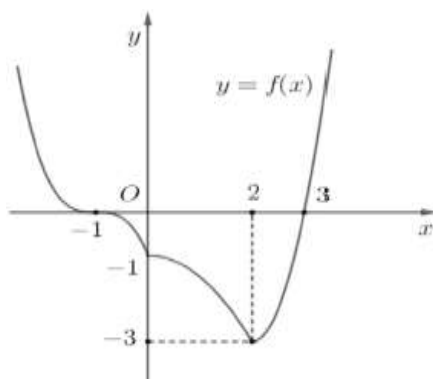
Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Bất phương trình $f(x) > m + x^3 - 3x^2 + 8x$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 3)$ khi và chỉ khi

- A. $m < f(3) - 24$. B. $m \leq f(3) - 24$. C. $m < f(0)$. D. $m \leq f(0)$.

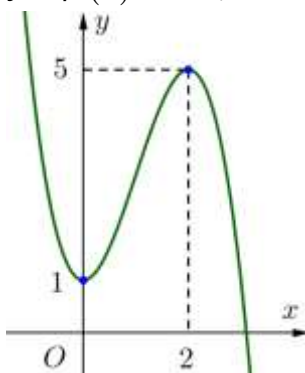
Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Bất phương trình $2f(x) + x^3 > 2m + 3x^2$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 3)$ khi và chỉ khi

- A. $m < -10$. B. $m < -5$. C. $m < -3$. D. $m < -2$.

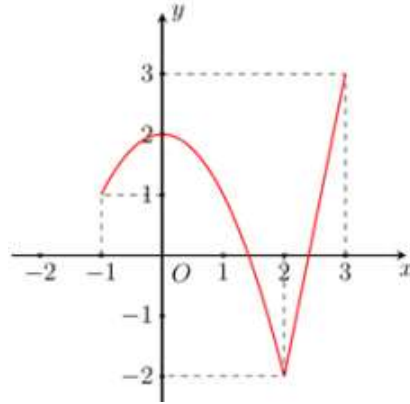
Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Bất phương trình $f(x) > m + x^3 - 3x^2 + 8x$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 3)$ khi và chỉ khi

- A. $m < f(0)$. B. $m < f(3) - 24$. C. $m \leq f(0)$. D. $m \leq f(3) - 24$.

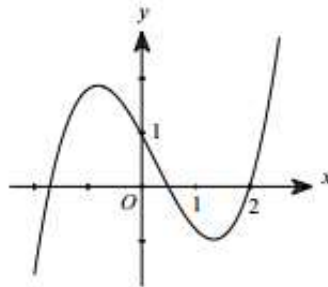
Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Bất phương trình $f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} \geq m$ có nghiệm thuộc $[-1;3]$ khi và chỉ khi

- A. $m \leq 7$. B. $m \geq 7$. C. $m \leq 2\sqrt{2} - 2$. D. $m \geq 2\sqrt{2} - 2$.

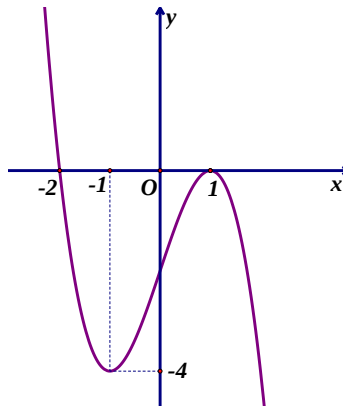
Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Bất phương trình $f(\sqrt{x+1}) < \sqrt{x+1} + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (-1;3)$ khi và chỉ

- A. $m \leq f(2) - 2$. B. $m > f(0)$. C. $m < f(2) - 2$. D. $m \geq f(0)$.

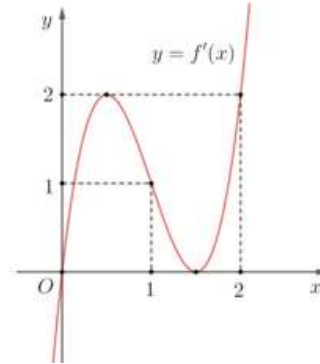
Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Bất phương trình $f(\sin x) < -4x + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

- A. $m \geq f(1) + 2\pi$. B. $m > f(-1) - 2\pi$. C. $m \geq f(-1) - 2\pi$. D. $m > f(1) + 2\pi$.

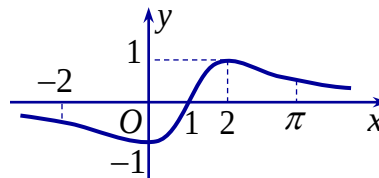
Câu 25: Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Bất phương trình $f(2\sin x) - 2\sin^2 x < m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; \pi)$ khi và chỉ khi

- A. $m > f(1) - \frac{1}{2}$. B. $m > f(2) - 2$. C. $m \geq f(1) - \frac{1}{2}$. D. $m \geq f(2) - 2$.

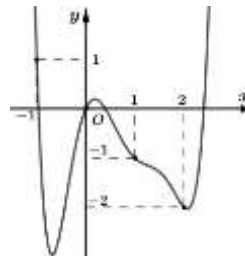
Câu 26: Cho $f(x)$ mà đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới:



Bất phương trình $f(x) > \sin \frac{\pi x}{2} + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 3]$ khi và chỉ khi

- A. $m < f(0)$. B. $m < f(1) - 1$. C. $m < f(-1) + 1$. D. $m < f(2)$.

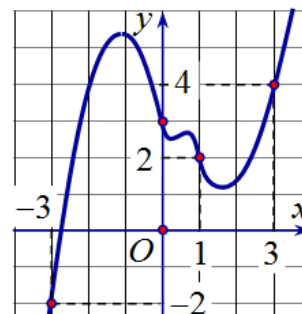
Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới:



Tìm m để bất phương trình $m - x^2 \leq 2f(x+2) + 4x + 3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-3; +\infty)$.

- A. $m \geq 2f(0) - 1$. B. $m \leq 2f(0) - 1$. C. $m \leq 2f(-1)$. D. $m \geq 2f(-1)$.

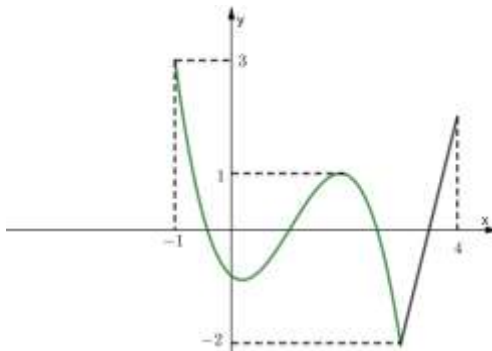
Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới



Tìm m để bất phương trình $m + x^2 + 4 \geq 2(f(x+1) - 2x)$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-4; 2]$.

- A. $m \geq 2f(0) - 1$. B. $m \geq 2f(-3) - 4$. C. $m \geq 2f(3) - 16$. D. $m \geq 2f(1) - 4$.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới:

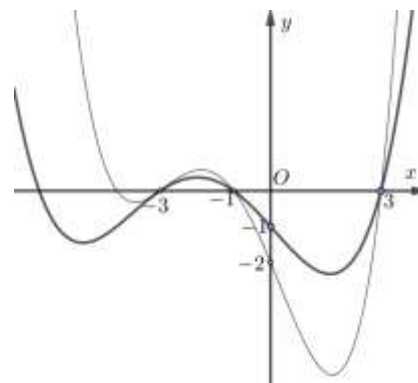


Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10;10]$ để bất phương trình $|f(x)+m| < 2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1;4]$?

- A. 6. B. 5. C. 7. D. 8.

Câu 30: Cho hai hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ, trong đó đường **đậm hơn** là đồ thị hàm số $y = f(x)$. Biết rằng hai đồ thị này tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ là -3 và cắt nhau tại hai điểm nữa có hoành độ lần lượt là -1 và 3 . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-12; 12]$ để bất phương trình $f(x) \geq g(x) + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-3; 3]$?

- A. 7.
- B. 6.
- C. 13.
- D. 12.



Câu 31: Tìm tất cả các giá trị tham số m để bất phương trình $6x + \sqrt{(2+x)(8-x)} \leq x^2 + m - 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; 8]$.

- A. $m \geq 16$. B. $m \geq 15$. C. $m \geq 8$. D. $-2 \leq m \leq 16$.

Câu 32: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình sau $x^6 + 3x^4 - m^3x^3 + 4x^2 - mx + 2 \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 3]$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

HẾT

Huế, 15h00 ngày 23 tháng 7 năm 2021

III. LỜI GIẢI CHI TIẾT BÀI

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	

y				3				$+\infty$
	-5					-4		

Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $f(\sqrt{x+1}+1) \leq m$ có nghiệm.

A. $m \geq -4$.

B. $m \geq 1$.

C. $m \geq 2$.

D. $m > -5$.

Lời giải:

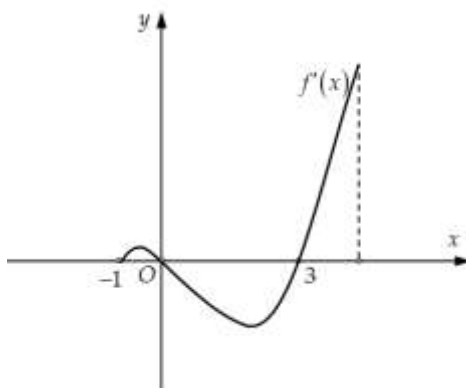
Đặt $t = \sqrt{x+1}+1 \Rightarrow t \geq 1$. Khi đó BPT $f(\sqrt{x+1}+1) \leq m$ trở thành $f(t) \leq m$ (1)

Khi đó BPT $f(\sqrt{x+1}+1) \leq m$ có nghiệm khi và chỉ khi BPT $f(t) \leq m$ (1) có nghiệm

$t \geq 1 \Leftrightarrow m \geq \min_{t \geq 1} f(t) \Leftrightarrow m \geq -4$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;4]$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-1;4]$ như hình vẽ dưới đây:



Tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $f(x) - m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left[\frac{3}{2}; \frac{10}{3}\right]$ là

A. $m \geq f(4)$.

B. $m \geq f\left(\frac{10}{3}\right)$.

C. $m \leq f(3)$.

D. $m \leq f\left(\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải:

Ta có $f(x) - m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ (1).

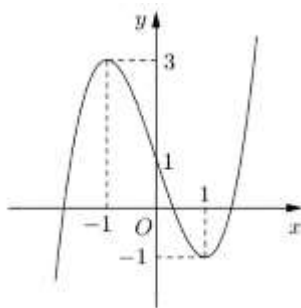
Xét bảng biến thiên:

x	-1	3	4
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(3)$	$+\infty$

Vậy từ (1) suy ra $m \leq f(3)$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(f(\cos x)) \geq m$ nghiệm đúng với mọi giá trị $x \in [0; \pi]$ là

- A. $(-\infty; -1]$. B. $[-1; 1]$. C. $[-1; 3]$. D. $[-1; +\infty)$.

Lời giải:

Đặt $t = \cos x$. Với $x \in [0; \pi]$ thì $t \in [-1; 1] \Rightarrow f(t) \in [-1; 3] \Rightarrow f(f(t)) \geq -1$.

Do đó bất phương trình $f(f(\cos x)) \geq m$ nghiệm đúng với mọi giá trị $x \in [0; \pi] \Leftrightarrow m \leq \min_{x \in [0; \pi]} f(f(\cos x)) = -1$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ xác định và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Biết bất phương trình $f(x) < x^2 - x + m$ có nghiệm thuộc đoạn $[2; 4]$, trong đó m là tham số thực. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $m > f(4) - 12$. B. $m > f(2) - 2$. C. $m \geq f(2) - 2$. D. $m \geq f(4) - 12$.

Lời giải:

Ta có: $f(x) < x^2 - x + m \Leftrightarrow m > f(x) - x^2 + x$

Đặt $g(x) = f(x) - x^2 + x$. Vì (1) có nghiệm thuộc đoạn $[2; 4]$ nên $m > \min_{x \in [2; 4]} g(x)$.

$$g'(x) = f'(x) - 2x + 1;$$

Ta có: $\begin{cases} f'(x) < 0 \quad \forall x \in [2; 4]. \\ -2x + 1 < 0 \quad \forall x \in [2; 4]. \end{cases} \Rightarrow g'(x) = f'(x) - 2x + 1 < 0 \quad \forall x \in [2; 4].$

Suy ra $\min_{x \in [2; 4]} g(x) = g(4) = f(4) - 12$. Do đó $m > f(4) - 12$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$\nearrow 5$	$\searrow 0$	$\nearrow 3$	$\searrow -\infty$
	$-\infty$				

Bất phương trình $f(x) > -x^3 + x^2 - x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng $\forall x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

A. $m \leq f(1) + 1$.

B. $m \leq f(-1) - 3$.

C. $m < f(1) + 1$.

D. $m < f(-1) - 3$.

Lời giải:

Ta có $f(x) > -x^3 + x^2 - x + m \Leftrightarrow m < f(x) + x^3 - x^2 + x$ (*).

Xét hàm số $g(x) = f(x) + x^3 - x^2 + x$ trên $(-1; 1)$.

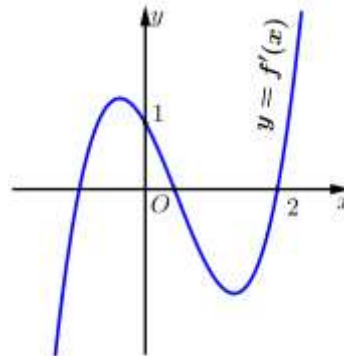
Ta có $g'(x) = f'(x) + 3x^2 - 2x + 1 > 0 \quad \forall x \in (-1; 1)$ nên hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-1; 1)$.

x	-1	1
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$g(-1)$	$g(1)$

Do đó (*) nghiệm đúng $\forall x \in (-1; 1)$ khi $m \leq g(-1) = f(-1) - 3$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Bất phương trình $f(x) < x + m$ (m là tham số) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

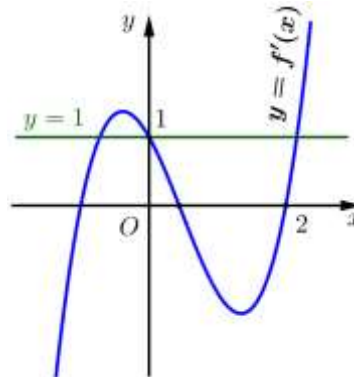
A. $m \geq f(2) - 2$.

B. $m \geq f(0)$.

C. $m > f(2) - 2$.

D. $m > f(0)$.

Lời giải:



Ta có: $f(x) < x + m \Leftrightarrow g(x) = f(x) - x < m$.

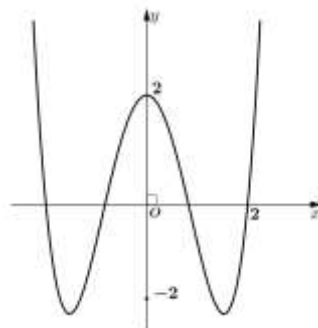
Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy: $g'(x) = f'(x) - 1 < 0 \Rightarrow \max_{(0;2)} g(x) = g(0) = f(0)$.

Do đó: bất phương trình $f(x) < x + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

$\max_{(0;2)} g(x) \leq m \Rightarrow f(0) \leq m$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Bất phương trình $f(x) > 2x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

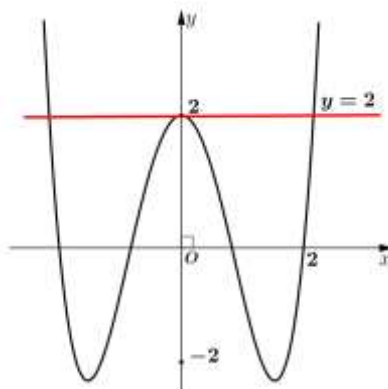
- A. $m \geq f(0)$. B. $m > f(0)$. **C. $m \leq f(2) - 4$.** D. $m < f(2) - 4$.

Lời giải:

Ta có $f(x) > 2x + m$ đúng với mọi $x \in (0; 2)$

$\Leftrightarrow m < f(x) - 2x, \forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow m < g(x), \forall x \in (0; 2)$ trong đó $g(x) = f(x) - 2x$.

Xét $g(x) = f(x) - 2x$; $g'(x) = f'(x) - 2$.



Từ đồ thị suy ra $g'(x) = f'(x) - 2 \leq 0, \forall x \in (0; 2)$.

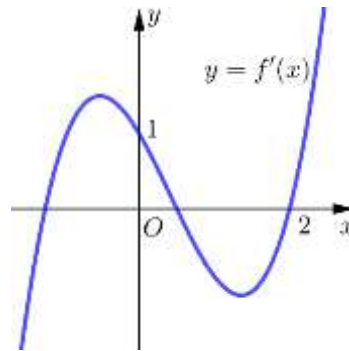
Suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(x)$:

x	0	2
$g'(x)$		-
$g(x)$	$g(0)$	$g(2)$

Do đó bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi $m \leq g(2) \Leftrightarrow m \leq f(2) - 4$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Bất phương trình $f(x) < x + m$ có nghiệm $x \in (0; 2]$ khi và chỉ khi

- A. $m \geq f(2) - 2$. B. $m \leq f(0)$. **C. $m > f(2) - 2$.** D. $m < f(0)$.

Lời giải:

Có $f(x) < x + m \Leftrightarrow m > f(x) - x$. Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$ trên $(0; 2]$.

Có $g'(x) = f'(x) - 1 < 0, \forall x \in (0; 2]$. Khi đó hàm số $g(x)$ có bảng biến thiên sau

x	0	2
$g'(x)$		-
$g(x)$	$f(0)$	$f(2) - 2$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(2) - 2 \leq g(x) < f(0), \forall x \in (0; 2]$.

Khi đó $m > g(x)$ có nghiệm $x \in (0; 2] \Leftrightarrow m > \min_{(0; 2]} g(x) \Leftrightarrow m > f(2) - 2$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-1	0	$-\infty$

Bất phương trình $f(x) > x^3 + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

- A. $m > f(1) - 1$. **B. $m \leq f(1) - 1$.** C. $m \leq f(-1) - 3$. D. $m > f(1) - 3$.

Lời giải:

Bất phương trình $f(x) > x^3 + m \Leftrightarrow m < f(x) - x^3$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - x^3$. Ta có: $g'(x) = f'(x) - 3x^2$.

Với $\forall x \in (-1; 1)$, ta có $\begin{cases} f'(x) < 0 \\ -3x^2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) < 0$.

Bảng biến thiên:

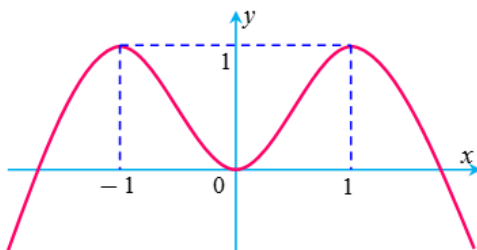
x	-1	1
$g'(x)$		$-$
$g(x)$	$g(-1)$	$g(1)$

Từ bảng biến thiên, ta có:

$$f(x) > x^3 + m, \forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow m < g(x), \forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow m \leq g(1) \Leftrightarrow m \leq f(1) - 1.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Bất phương trình $\frac{f(x)}{36} - \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} > m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 1)$ khi và chỉ khi

A. $m < \frac{f(0)}{36} - \frac{1}{\sqrt{3}+2}$. B. $m \leq \frac{f(1)+9}{36}$. C. $m \leq \frac{f(0)}{36} - \frac{1}{\sqrt{3}+2}$. D. $m < \frac{f(1)+36}{9}$.

Lời giải:

Xét hàm số $g(x) = \frac{f(x)}{36} - \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$.

Hàm số $y = g(x) = \frac{f(x)}{36} - \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$ có:

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{36} + \frac{1}{2\sqrt{x+3}(\sqrt{x+3}+2)^2} > 0, \forall x \in (0; 1)$$

(Vì $f'(x) > 0, \forall x \in (0; 1)$)

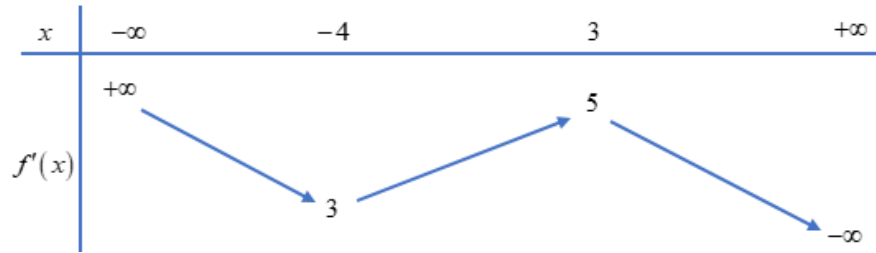
Suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(0; 1)$.

$$\Rightarrow g(x) > g(0), \forall x \in (0; 1) \Leftrightarrow g(x) > \frac{f(0)}{36} - \frac{1}{\sqrt{3}+2}, \forall x \in (0; 1).$$

$$\text{Do đó } g(x) > m, \forall x \in (0; 1) \Leftrightarrow m \leq \frac{f(0)}{36} - \frac{1}{\sqrt{3}+2}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Bất phương trình $f(x) < m + x^2 - 2x$ có nghiệm đúng với mọi $x \in (-2; 2)$ khi chỉ khi

- A. $m \leq f(-2) - 8$. B. $m > f(2)$ C. $m < f(-2) - 8$ **D. $m \geq f(2)$.**

Lời giải:

Ta có: $f(x) < m + x^2 - 2x$ với $\forall x \in (-2; 2)$ với $\forall x \in (-2; 2)$

Xét $g(x) = f(x) - x^2 + 2x$ với $x \in (-2; 2)$, có $g'(x) = f'(x) - 2x + 2$

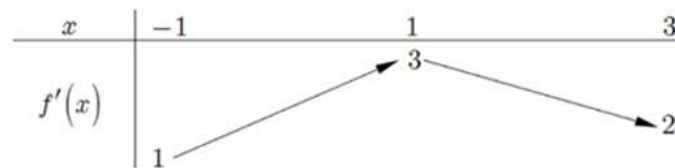
Dựa vào bảng biến thiên $f'(x)$ ta thấy $\forall x \in (-2; 2)$ thì $f'(x) > 3$ và $\forall x \in (-2; 2)$ thì $-2x + 2 > -2$. Do đó $g'(x) = f'(x) - 2x + 2 > 1 > 0$ với $\forall x \in (-2; 2)$.

$\Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-2; 2)$ và liên tục trên $[-2; 2]$

Suy ra: $\max_{[-2; 2]} g(x) = g(2) = f(2)$. Vậy $m \geq f(2)$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới:



Tìm tất cả giá trị của tham số m để bất phương trình $m + x^2 \leq f(x) + \frac{1}{3}x^3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 3)$.

- A. $m < f(0)$. **B. $m \leq f(0)$.** C. $m \leq f(3)$. D. $m < f(1) - \frac{2}{3}$.

Lời giải:

Ta có $m + x^2 \leq f(x) + \frac{1}{3}x^3 \Leftrightarrow m \leq f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

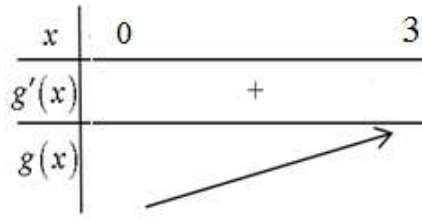
Đặt $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

Ta có $g'(x) = f'(x) + x^2 - 2x = f'(x) - (-x^2 + 2x)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x^2 + 2x$.

Mà $f'(x) > 1, \forall x \in (0; 3)$ và $-x^2 + 2x = 1 - (x-1)^2 \leq 1, \forall x \in (0; 3)$ nên $g'(x) > 0, \forall x \in (0; 3)$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của $g(x)$:



Bất phương trình $m \leq f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 3)$

$$\Leftrightarrow m \leq g(0) \Leftrightarrow m \leq f(0).$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-2	0	$-\infty$

Bất phương trình $f(x) < -\cos x + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; \pi)$ khi và chỉ khi

- A. $m \geq f(0) + 1$. B. $m > f(0)$. C. $m > f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. D. $m > f(0) + 1$.

Lời giải:

Ta có: $f(x) < -\cos x + m \Leftrightarrow m > f(x) + \cos x$ (1)

Xét hàm số $g(x) = f(x) + \cos x, x \in (0; \pi) \Rightarrow g'(x) = f'(x) - \sin x$.

Ta có: $\forall x \in (0; \pi): \begin{cases} f'(x) < 0 \\ 0 < \sin x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow g'(x) = f'(x) - \sin x < 0, \forall x \in (0; \pi) \Rightarrow f(x) + \cos x < g(0) = f(0) + 1$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \geq f(0) + 1$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như sau:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	2	3	2

Tìm m để bất phương trình $m + 2\sin x \leq f(x)$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; +\infty)$.

- A. $m \geq f(0)$. B. $m \leq f(1) - 2\sin 1$. C. $m \leq f(0)$. D. $m \geq f(1) - 2\sin 1$.

Lời giải:

Ta có $m + 2\sin x \leq f(x) \Leftrightarrow m \leq f(x) - 2\sin x$.

Đặt $g(x) = f(x) - 2\sin x$.

Ta có $g'(x) = f'(x) - 2\cos x$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2\cos x$.

Mà $f'(x) \geq 2, \forall x \in (0; +\infty)$ và $2\cos x \leq 2, \forall x \in (0; +\infty)$ nên $g'(x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 2 \\ 2\cos x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Từ đó ta có bảng biến thiên của $g(x)$:

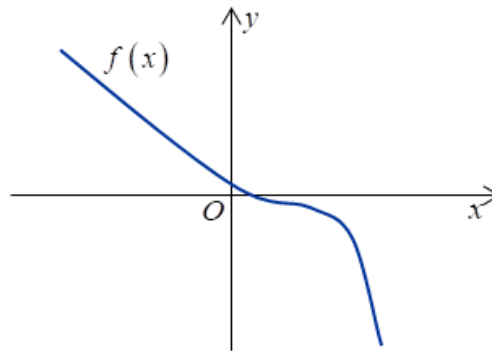
x	0	$+\infty$
$g'(x)$	0	+
$g(x)$		

Bất phương trình $m \leq 2f(x+2) + (x+1)(x+3)$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-3; +\infty)$

$$\Leftrightarrow m \leq g(0) \Leftrightarrow m \leq f(0).$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 15: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ sau:



Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $f(x^2 + 2x) \leq f(mx - 10)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. 10.

B. 11.

C. 12.

D. 13.

Lời giải:

Quan sát đồ thị ta nhận thấy hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Bất phương trình: $f(x^2 + 2x) \leq f(mx - 10) \Leftrightarrow x^2 + 2x \geq mx - 10 \Leftrightarrow x^2 + (2 - m)x + 10 \geq 0$ với

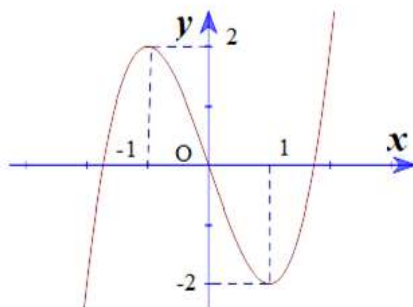
$$\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta = (2 - m)^2 - 40 \leq 0 \Leftrightarrow 2 - 2\sqrt{10} \leq m \leq 2 + 2\sqrt{10}.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên ta có $-4 \leq m \leq 8$.

Vậy có tất cả 13 giá trị m nguyên thỏa mãn bài toán.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Bất phương trình $f(x) - x^2 + 3 < m$ có nghiệm đúng $\forall x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

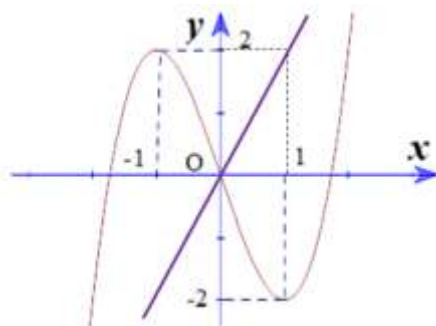
- A. $m \geq f(0) + 3$. B. $m > f(0) + 3$. C. $m \geq f(1) + 3$. D. $m > f(1) + 3$.

Lời giải:

Đặt $g(x) = f(x) - x^2 + 3$. Ta có $g'(x) = f'(x) - 2x$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x$.

Đường thẳng $y = 2x$ đi qua hai điểm $(0; 0), (1; 2)$.

Ta có đồ thị hàm số như sau:



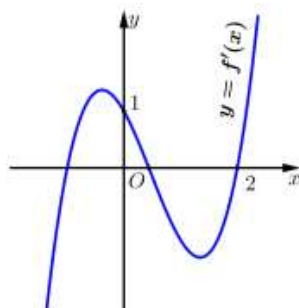
Xét bảng biến thiên:

x	-1	0	1
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$\nearrow g(0) \searrow$		

Dựa vào BBT, ta có: $m > g(x), \forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow m > g(0) \Leftrightarrow m > f(0) + 3$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Bất phương trình $f(x) < \frac{x^2}{4} + x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

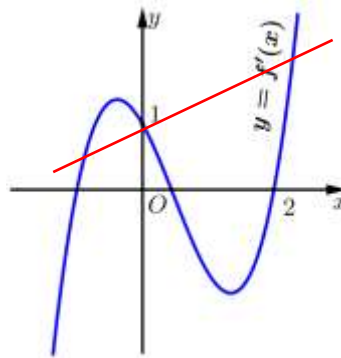
A. $m \geq f(2) - 2$.

B. $m \geq f(0)$.

C. $m > f(2) - 2$.

D. $m > f(0)$.

Lời giải:



Ta có: $f(x) < \frac{x^2}{4} + x + m \Leftrightarrow g(x) = f(x) - \left(\frac{x^2}{4} + x\right) < m$.

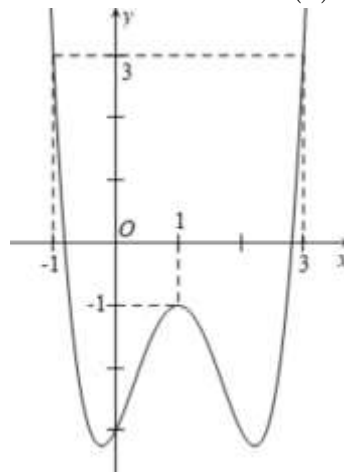
Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy:

$\forall x \in (0; 2): g'(x) = f'(x) - \left(\frac{x}{2} + 1\right) < 0 \Rightarrow \forall x \in (0; 2): g(x) < g(0) = f(0) - 0 = f(0)$.

Do đó, bất phương trình $f(x) < x + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi $m \geq f(0)$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây:



Bất phương trình $3f(x) \leq x^3 - 3x^2 + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 3)$ khi và chỉ khi

A. $m > 3f(3)$.

B. $m \geq 3f(3)$.

C. $m > 3f(-1) + 4$.

D. $m \geq 3f(-1) + 4$.

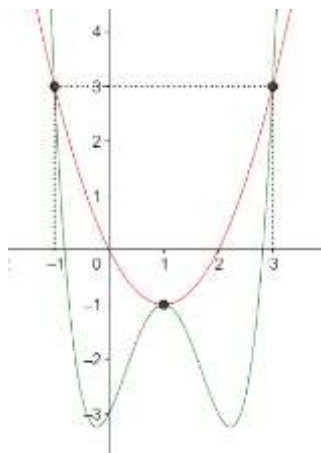
Lời giải:

Ta có: $3f(x) \leq x^3 - 3x^2 + m \Leftrightarrow 3f(x) - x^3 + 3x^2 \leq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 3)$.

Xét $g(x) = 3f(x) - x^3 + 3x^2$ với $x \in (-1; 3)$.

Khi đó: $g'(x) = 3f'(x) - 3x^2 + 6x = 3[f'(x) - x^2 + 2x]$.

Nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là hoành độ giao điểm của đồ thị $y=f'(x)$ và parabol $y=x^2-2x$.



Phương trình $g'(x)=0$ có ba nghiệm $x=-1; x=3; x=1$ trên đoạn $[-1;3]$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [3f(x) - x^3 + 3x^2] = 3f(-1) + 4; \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} [3f(x) - x^3 + 3x^2] = 3f(3).$$

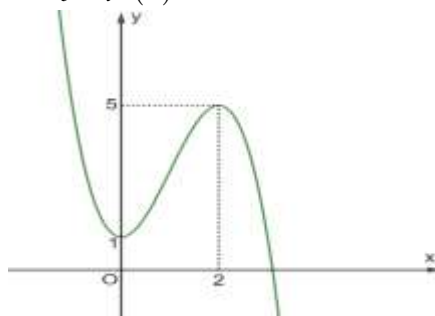
Ta có bảng biến thiên sau:

x	-1		1		3
$g'(x)$	0	-	0	-	0
$g(x)$	$3f(-1)+4 \rightarrow \rightarrow 3f(3)$				

Bất phương trình $3f(x) \leq x^3 - 3x^2 + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1;3)$ khi và chỉ khi $m \geq g(x), \forall x \in (-1;3) \Leftrightarrow m \geq 3f(-1) + 4$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Bất phương trình $f(x) > m + x^3 - 3x^2 + 8x$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0;3)$ khi và chỉ khi

- A. $m < f(3) - 24$. B. $m \leq f(3) - 24$. C. $m < f(0)$. D. $m \leq f(0)$.

Lời giải:

Ta có : $f(x) > m + x^3 - 3x^2 + 8x, \forall x \in (0;3) \Leftrightarrow f(x) - x^3 + 3x^2 - 8x > m, \forall x \in (0;3)$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - x^3 + 3x^2 - 8x, \forall x \in (0;3)$.

Ta có : $g'(x) = f'(x) - 3x^2 + 6x - 8 = f'(x) - (3x^2 - 6x + 8), \forall x \in (0;3)$.

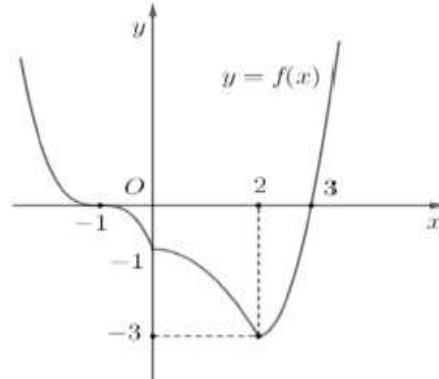
Ta có trên khoảng $(0;3) : f'(x) \leq 5$ và $5 \leq 3x^2 - 6x + 8 < 17$ nên $g'(x) \leq 0, \forall x \in (0;3)$.

Do đó hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;3)$ hay $g(3) < g(x) < g(0), \forall x \in (0;3)$.

Vậy $g(x) > m, \forall x \in (0;3) \Leftrightarrow m \leq g(3) = f(3) - 24$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Bất phương trình $2f(x) + x^3 > 2m + 3x^2$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1;3)$ khi và chỉ khi

A. $m < -10$.

B. $m < -5$.

C. $m < -3$.

D. $m < -2$.

Lời giải:

Ta có $2f(x) + x^3 > 2m + 3x^2 \Leftrightarrow 2f(x) > -x^3 + 3x^2 + 2m$

Nhận xét $\min_{(-1;3)} f(x) = f(2) = -3$

Đặt $g(x) = -x^3 + 3x^2 + 2m, \forall x \in (-1;3)$

$$g'(x) = -3x^2 + 6x, g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

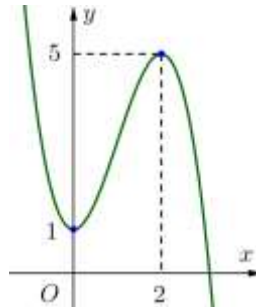
$$g(0) = 2m; g(-1) = 4 + 2m; g(3) = 2m \text{ và } g(2) = 4 + 2m$$

$$\Rightarrow \max_{(-1;3)} g(x) = g(2) = 4 + 2m$$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow 2 \min_{(-1;3)} f(x) > \max_{(-1;3)} g(x) \Leftrightarrow -6 > 2m + 4 \Leftrightarrow m < -5.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Bất phương trình $f(x) > m + x^3 - 3x^2 + 8x$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0;3)$ khi và chỉ khi

A. $m < f(0)$.

B. $m < f(3) - 24$.

C. $m \leq f(0)$.

D. $m \leq f(3) - 24$.

Lời giải:

$$f(x) > m + x^3 - 3x^2 + 8x \Leftrightarrow f(x) - x^3 + 3x^2 - 8x > m.$$

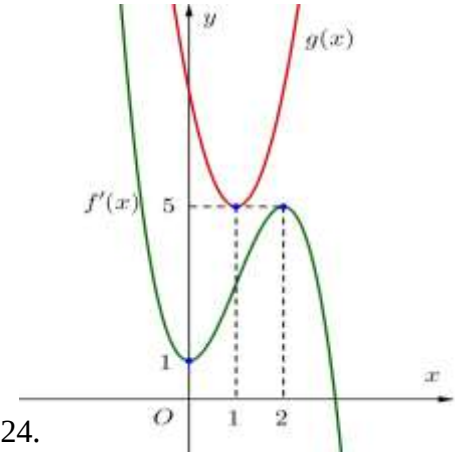
$$\text{Đặt } h(x) = f(x) - x^3 + 3x^2 - 8x \Rightarrow h'(x) = f'(x) - 3x^2 + 6x - 8 = f'(x) - (3x^2 - 6x + 8).$$

Đặt $g(x) = 3x^2 - 6x + 8$ và vẽ đồ thị của $g(x)$ lên hệ trục Oxy .

Từ hình vẽ, ta thấy $f'(x) < g(x), \forall x \in (0; 3)$.

Do đó $h'(x) < 0, \forall x \in (0; 3)$. Vì vậy ta có bảng biến thiên:

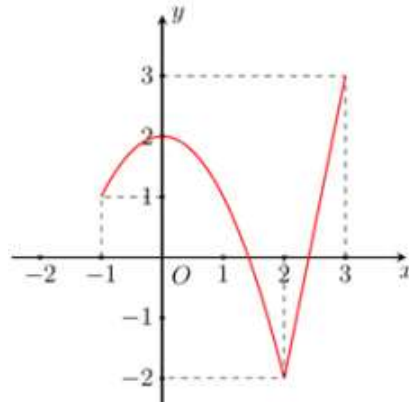
x	0	3
$h'(x)$		-
$h(x)$		



Từ bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \leq h(3) \Leftrightarrow m \leq f(3) - 24$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Bất phương trình $f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} \geq m$ có nghiệm thuộc $[-1; 3]$ khi và chỉ khi

A. $m \leq 7$.

B. $m \geq 7$.

C. $m \leq 2\sqrt{2} - 2$.

D. $m \geq 2\sqrt{2} - 2$.

Lời giải:

Bất phương trình $f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} \geq m$ có nghiệm thuộc $[-1; 3]$ khi và chỉ khi

$$m \leq \max_{[-1; 3]} (f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x}).$$

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x}$ trên đoạn $[-1; 3]$.

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{7-x}} = \frac{\sqrt{7-x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{7-x} \cdot \sqrt{x+1}}.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{7-x} - \sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

$$g(-1) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \quad g(3) = 2 + 2 = 4.$$

$$\text{Suy ra } \max_{[-1; 3]} g(x) = 4 \text{ tại } x = 3. (1)$$

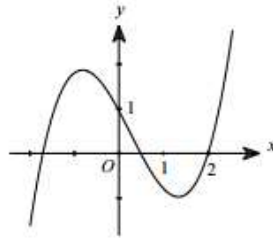
Mặt khác, dựa vào đồ thị của $f(x)$ ta có $\max_{[-1;3]} f(x) = 3$ tại $x = 3$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\max_{[1;3]} (f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x}) = 7$ tại $x = 3$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm thuộc $[-1;3]$ khi và chỉ khi $m \leq 7$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Bất phương trình $f(\sqrt{x+1}) < \sqrt{x+1} + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (-1;3)$ khi và chỉ

- A. $m \leq f(2) - 2$. B. $m > f(0)$. C. $m < f(2) - 2$. **D. $m \geq f(0)$.**

Lời giải:

Đặt $u = \sqrt{x+1}$. Vì $x \in (-1;3) \Rightarrow u \in (0;2) \Rightarrow f(u) < u + m \Leftrightarrow f(u) - u < m$.

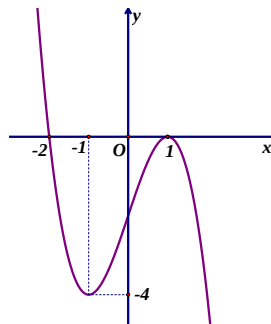
Xét hàm số $g(u) = f(u) - u$ với $u \in [0;2]$. Ta có $g'(u) = f'(u) - 1$

Dựa vào đồ thị ta thấy $u \in [0;2]$ thì $f'(u) < 1, \forall u \in [0;2] \Rightarrow g(u)$ nghịch biến trên $(0;2)$.

Vậy để $f(\sqrt{x+1}) < \sqrt{x+1} + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (-1;3)$ thì $f(u) - u < m, \forall u \in (0;2) \Leftrightarrow m \geq \max_{u \in [0;2]} g(u) = g(0) = f(0)$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Bất phương trình $f(\sin x) < -4x + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

- A. $m \geq f(1) + 2\pi$.** B. $m > f(-1) - 2\pi$. C. $m \geq f(-1) - 2\pi$. D. $m > f(1) + 2\pi$.

Lời giải:

Ta có $f(\sin x) < -4x + m, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow m > g(x) = 4x + f(\sin x), \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$g'(x) = 4 + \cos x \cdot f'(\sin x).$$

Do $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $-1 < \sin x < 1$, kết hợp với đồ thị của $f'(x)$ ta có $-4 < f'(\sin x) < 0$.

Ta lại có $0 < \cos x \leq 1 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $-4 < \cos x \cdot f'(\sin x) < 0$.

Suy ra $g'(x) = 4 + \cos x \cdot f'(\sin x) > 0 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

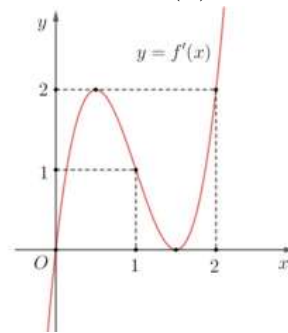
Do đó hàm $g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow g(x) < g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(1) + 2\pi$.

Bất phương trình $f(\sin x) < -4x + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow m > g(x) = 4x + f(\sin x), \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow m \geq g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(1) + 2\pi.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 25: Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Bất phương trình $f(2\sin x) - 2\sin^2 x < m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; \pi)$ khi và chỉ khi

A. $m > f(1) - \frac{1}{2}$. B. $m > f(2) - 2$. C. $m \geq f(1) - \frac{1}{2}$. D. $m \geq f(2) - 2$.

Lời giải:

Bất phương trình $f(2\sin x) - 2\sin^2 x < m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; \pi)$ khi và chỉ khi $m > \max_{x \in (0; \pi)} g(x)$ với $g(x) = f(2\sin x) - 2\sin^2 x$.

Ta đặt $t = 2\sin x$, khi $x \in (0; \pi)$ thì $t \in (0; 2]$.

Khi đó $g(x) = f(2\sin x) - 2\sin^2 x$ trở thành $g(t) = f(t) - \frac{t^2}{2}$.

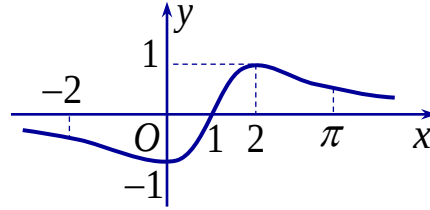
$$\text{Ta có } g'(t) = f'(t) - t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta thấy rằng $f'(t) - t \leq 0; \forall t \in [1; 2]$ nên $g(1) > g(2)$.

Khi đó $\max_{t \in (0; 1]} g(t) = g(1) = f(1) - \frac{1}{2} = \max_{x \in (0; \pi)} g(x)$. Vậy $m > f(1) - \frac{1}{2}$ thỏa yêu cầu bài toán.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 26: Cho $f(x)$ mà đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới:



Bất phương trình $f(x) > \sin \frac{\pi x}{2} + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 3]$ khi và chỉ khi

A. $m < f(0)$.

B. $m < f(1) - 1$.

C. $m < f(-1) + 1$.

D. $m < f(2)$.

Lời giải:

Xét $g(x) = f(x) - \sin \frac{\pi x}{2} \Rightarrow g'(x) = f'(x) - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$

• Với $x \in [-1; 1) \Rightarrow \frac{\pi x}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos \frac{\pi x}{2} > 0$ (1)

Đồng thời dựa vào đồ thị $f'(x)$ ta thấy $f'(x) < 0, \forall x \in [-1; 1)$ (2)

Từ (1), (2) ta suy ra $g'(x) < 0, \forall x \in [-1; 1)$.

• Với $x \in (1; 3] \Rightarrow \frac{\pi x}{2} \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos \frac{\pi x}{2} < 0$ (3)

Đồng thời dựa vào đồ thị ta thấy $f'(x) > 0, \forall x \in (1; 3]$ (4)

Từ (3), (4) ta suy ra $g'(x) > 0, \forall x \in (1; 3]$.

Tại $x = 1$: $\begin{cases} f'(1) = 0 \\ \cos \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow g'(1) = 0$. Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:

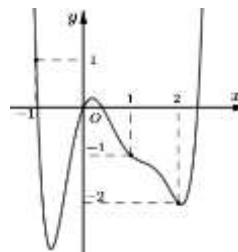
x	-1	1	3
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$		$g(1)$	

Để bất phương trình $\underbrace{f(x) - \sin \frac{\pi x}{2}}_{g(x)} > m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 3]$

$\Rightarrow m < \min_{[-1; 3]} g(x) \Rightarrow m < g(1) = f(1) - 1$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới:



Tìm m để bất phương trình $m - x^2 \leq 2f(x+2) + 4x + 3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-3; +\infty)$.

A. $m \geq 2f(0) - 1$.

B. $m \leq 2f(0) - 1$.

C. $m \leq 2f(-1)$.

D. $m \geq 2f(-1)$.

Lời giải:

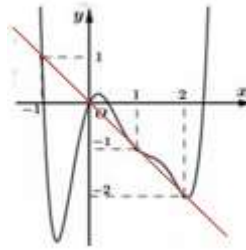
Ta có $m - x^2 \leq 2f(x+2) + 4x + 3 \Leftrightarrow m \leq 2f(x+2) + x^2 + 4x + 3$.

Đặt $g(x) = 2f(x+2) + x^2 + 4x + 3$. Ta có $g'(x) = 2f'(x+2) + 2x + 4$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x+2) = -(x+2)$.

Đặt $t = x + 2$ ta được $f'(t) = -t$. (1)

(1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f'(t)$ và đường thẳng $d: y = -t$ (hình vẽ)



Dựa vào đồ thị của $f'(t)$ và đường thẳng $y = -t$ ta có

ta có $f'(t) = -t \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \\ x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$:

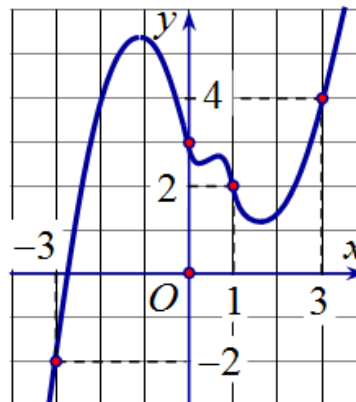
x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	

Bất phương trình $m \leq 2f(x+2) + (x+1)(x+3)$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-3; +\infty)$

$\Leftrightarrow m \leq g(-2) \Leftrightarrow m \leq 2f(0) - 1$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới



Tìm m để bất phương trình $m + x^2 + 4 \geq 2(f(x+1) - 2x)$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-4; 2]$.

A. $m \geq 2f(0) - 1$. B. $m \geq 2f(-3) - 4$. C. $m \geq 2f(3) - 16$. D. $m \geq 2f(1) - 4$.

Lời giải:

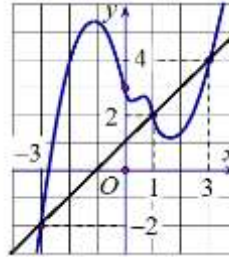
$$m + x^2 + 4 \geq 2(f(x+1) - 2x) \Leftrightarrow m \geq 2f(x+1) - (x+2)^2$$

$$\text{Đặt } g(x) = 2f(x+1) - (x+2)^2$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 2f'(x+1) - 2(x+2) = 2(f'(x+1) - (x+2)). \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x+1) = x+2$$

$$\text{Đặt } t = x+1 \text{ ta được } f'(t) = t+1 \quad (1)$$

(1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f'(t)$ và đường thẳng $d : y = t+1$ (hình vẽ)



Dựa vào đồ thị của $f'(t)$ và đường thẳng $y = t+1$ ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 1 \\ t = 3 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = -4 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Xét hàm $t = t(x) = x+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(x)$:

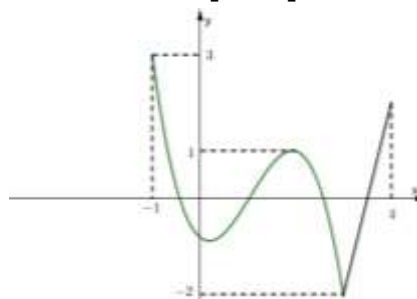
x	-4		0		2
$g'(x)$	0	+	0	-	0
$g(x)$					

Bất phương trình $m + x^2 + 4 \geq 2(f(x+1) - 2x)$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-4; 2]$.

$$\Leftrightarrow m \geq g(0) \Leftrightarrow m \geq 2f(1) - 4.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10;10]$ để bất phương trình $|f(x)+m| < 2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1;4]$?

A. 6.

B. 5.

C. 7.

D. 8.

Lời giải:

Vì $|f(x)+m| < 2m$ nên suy ra $m > 0$.

Do đó $|f(x)+m| < 2m \Leftrightarrow -2m < f(x)+m < 2m \Leftrightarrow -3m < f(x) < m$.

Ta có $\max_{[-1;4]} f(x) = 3; \min_{[-1;4]} f(x) = -2$.

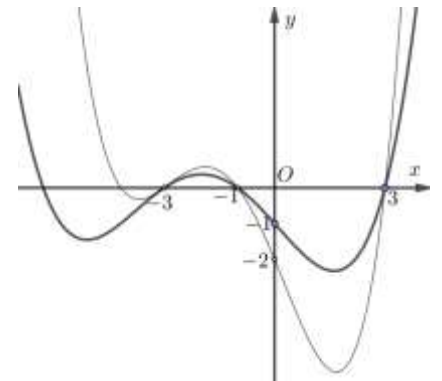
Để bất phương trình $|f(x)+m| < 2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1;4]$ thì ta phải có

$-3m < \min_{[-1;4]} f(x) < \max_{[-1;4]} f(x) < m \Leftrightarrow -3m < -2 < 3 < m \Leftrightarrow m > 3$.

Do đó trong đoạn $[-10;10]$ có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 30: Cho hai hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ, trong đó đường **đậm hơn** là đồ thị hàm số $y = f(x)$. Biết rằng hai đồ thị này tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ là -3 và cắt nhau tại hai điểm nữa có hoành độ lần lượt là -1 và 3 . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-12;12]$ để bất phương trình $f(x) \geq g(x) + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-3;3]$?



A. 7.

B. 6.

C. 13.

D. 12.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm có dạng: $f(x) - g(x) = a(x+3)^2(x+1)(x-3), a \in \mathbb{R}$.

Ta có: $f(0) - g(0) = 1 \Leftrightarrow -27a = 1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{27}$

Hay $f(x) - g(x) = -\frac{1}{27}(x+3)^2(x+1)(x-3)$

Đặt $h(x) = f(x) - g(x) \rightarrow h'(x) = f'(x) - g'(x) = -\frac{4}{27}(x+3)(x^2-3); h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$

Bảng xét dấu $h(x)$

x	-3	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	3		
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	0	$\searrow$	$\frac{12-8\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	$\frac{12+8\sqrt{3}}{9}$	$\searrow 0$

* Bất phương trình: $f(x) \geq g(x) + m \Leftrightarrow m \leq f(x) - g(x)$ nghiệm đúng $\forall x \in [-3;3]$

$$\Rightarrow m \leq \min_{[-3;3]} h(x) \leq \frac{12-8\sqrt{3}}{9}. \text{ Vậy } m \in \left(-\infty; \frac{12-8\sqrt{3}}{9}\right].$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.

Câu 31: Tìm tất cả các giá trị tham số m để bất phương trình $6x + \sqrt{(2+x)(8-x)} \leq x^2 + m - 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; 8]$.

A. $m \geq 16$.

B. $m \geq 15$.

C. $m \geq 8$.

D. $-2 \leq m \leq 16$.

Lời giải:

Xét bất phương trình: $6x + \sqrt{(2+x)(8-x)} \leq x^2 + m - 1$ (1), điều kiện $x \in [-2; 8]$.

Đặt $t = \sqrt{(2+x)(8-x)}$, $x \in [-2; 8]$. Ta có: $t' = \frac{3-x}{\sqrt{(2+x)(8-x)}}$, $t' = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Bảng biến thiên:

x	-2	3	8
t'		+	-
t	0	5	0

Suy ra $t \in [0; 5]$. Khi đó (1) trở thành: $t^2 + t - 15 \leq m$ (2).

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t - 15$, $f'(t) = 2t + 1 > 0$, $\forall t \in [0; 5]$

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; 8]$ khi và chỉ khi (2) nghiệm đúng với mọi $t \in [0; 5] \Leftrightarrow \max_{[0;5]} f(t) \leq m \Leftrightarrow m \geq 15$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

Câu 32: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $x^6 + 3x^4 - m^3x^3 + 4x^2 - mx + 2 \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 3]$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải:

Ta có: $x^6 + 3x^4 - m^3x^3 + 4x^2 - mx + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x^6 + 3x^4 + 4x^2 + 2 \geq m^3x^3 + mx$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)^3 + (x^2 + 1) \geq (mx)^3 + mx \quad (1)$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = t^3 + t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$

$$(1) \Leftrightarrow f(x^2 + 1) \geq f(mx) \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq mx$$

Bài toán trở thành tìm m để bất phương trình $x^2 + 1 \geq mx$ nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 3]$

$$x^2 + 1 \geq mx \Leftrightarrow m \leq \frac{x^2 + 1}{x} = g(x), \forall x \in [1; 3]; g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \geq 0 \forall x \in [1; 3] \Rightarrow \min_{x \in [1; 3]} g(x) = g(1) = 2$$

Vậy để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 3]$ thì $m \leq 2$

Vì m nguyên dương nên $S = \{1; 2\}$ có 2 phần tử. Tổng các phần tử bằng 3.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

HẾT

Huế, 15h00 ngày 23 tháng 7 năm 2021