

by Tư Duy Mở

198

CÂU

VDC

Hàm số và phương
trình lượng giác



TUYỂN TẬP 198 CÂU VẬN DỤNG CAO LƯỢNG GIÁC

bởi Tư Duy Mở

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sin^4 x + \cos^4 x - \cos 2x + \frac{1}{4} \sin^2 2x + m = 0$ có nghiệm.

- (A) $m < -2$. (B) $-2 \leq m \leq 0$. (C) $-2 < m < 0$. (D) $m > 0$.

Lời giải.

Ta có $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$.

Đặt $t = \cos 2x, |t| \leq 1$ phương trình đã cho thành $1 - \frac{1}{2}(1 - t^2) - t + \frac{1}{4}(1 - t^2) + m = 0$.

Hay $f(t) = -t^2 + 4t - 3 = 4m$ với $-1 \leq t \leq 1$.

Nhận thấy hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $[-1; 1]$ nên phương trình đã cho có nghiệm khi $f(-1) \leq 4m \leq f(1) \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 2. Tìm giá trị nhỏ nhất M của hàm số $y = 3 \sin x - 4 \cos x + 3$.

- (A) $M = 2$. (B) $M = 6$. (C) $M = -10$. (D) $M = -2$.

Lời giải.

Ta có $y = 3 \sin x - 4 \cos x + 3 = 5 \left(\frac{3}{5} \sin x - \frac{4}{5} \cos x \right) + 3 = 5 \sin(x - \alpha) + 3$, trong đó α thỏa $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ và $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Từ $-1 \leq \sin(x - \alpha) \leq 1$ ta được $-2 \leq y \leq 8$. Tồn tại x để $y = -2$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số là -2 .

Chọn đáp án (D)

□

Câu 3. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{\sin x}{\cot 2x}$.

- (A) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. (B) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
(C) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$. (D) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} \cot 2x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 4x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{4}$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 4. Gọi $\frac{m}{n}$ là giá trị lớn nhất của a để bất phương trình $\sqrt{a^3}(x-1)^2 + \frac{\sqrt{a}}{(x-1)^2} \leq \sqrt[4]{a^3} \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right|$ có ít nhất một nghiệm, trong đó m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = 22m + n$.

- (A) $P = 46$. (B) $P = 35$. (C) $P = 38$. (D) $P = 24$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x \neq 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình sau

$$\sqrt{a^3}(x-1)^4 - \sqrt[4]{a^3} \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right| (x-1)^2 + \sqrt{a} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\sqrt[4]{a^3}(x-1)^2 - \frac{1}{2} \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right| \right]^2 + \sqrt{a} - \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\pi x}{2} \leq 0.$$

- Nếu $a > \frac{1}{16}$ thì $\sqrt{a} - \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\pi x}{2} > 0, \forall x$, nên bất phương trình vô nghiệm.
- Nếu $a = \frac{1}{16}$ thì bất phương trình trở thành

$$\left[\frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{2} \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right| \right]^2 + \frac{1}{4} \left(1 - \sin^2 \frac{\pi x}{2} \right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 \frac{\pi x}{2} = 1 \\ \frac{1}{8}(x-1)^2 = \frac{1}{2} \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1. \end{cases}$$

Vậy $a = \frac{1}{16}$ là giá trị lớn nhất để bất phương trình có nghiệm.

Suy ra $m = 1, n = 16$. Vật $P = 22 \cdot 1 + 16 = 38$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 5. Cho các số thực x, y, z thuộc đoạn $[0, \pi]$. Có tất cả bao nhiêu bộ ba số $(x; y; z)$ thỏa mãn $\frac{\sin x}{1} = \frac{\sin y}{\sqrt{3}} = \frac{\sin z}{2}$ và $x + y + z = \pi$?

(A) 5. (B) 3. (C) 4. (D) 6.

Lời giải.

Nếu một trong ba số x, y, z có một số bằng π thì hai số còn lại bằng 0, cho nên ta có ba nghiệm $(\pi; 0; 0), (0; \pi; 0), (0; 0; \pi)$.

Xét $0 < x, y, z < \pi$, ta có $0 < \sin x, \sin y, \sin z < 1$. Theo giả thiết $\frac{\sin x}{1} = \frac{\sin y}{\sqrt{3}} = \frac{\sin z}{2}$ và $x + y + z = \pi$ suy ra $\sin x, \sin y, \sin z$ là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông với x, y, z là các góc đối diện, cho nên $x = \frac{\pi}{6}, y = \frac{\pi}{3}, z = \frac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 6. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\sin x}{\sin^2 x - 6 \sin x + 8}$.

(A) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. (B) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
(C) $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. (D) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

Do $\sin^2 x - 6 \sin x + 8 = (\sin x - 2)(\sin x - 4) \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 7. Có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn các nghiệm của phương trình $\cos^2 x + 2(\sin 3x - 1) \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) = 0$?

(A) 5 điểm. (B) 6 điểm. (C) 4 điểm. (D) 7 điểm.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (1 - \sin x)(1 + \sin x) + (\sin 3x - 1)(1 + \sin x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin 3x = \sin(\pi + x) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & x = \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy các nghiệm của phương trình đã cho biểu diễn bởi 4 điểm trên đường tròn lượng giác.

Chọn đáp án (C)

□

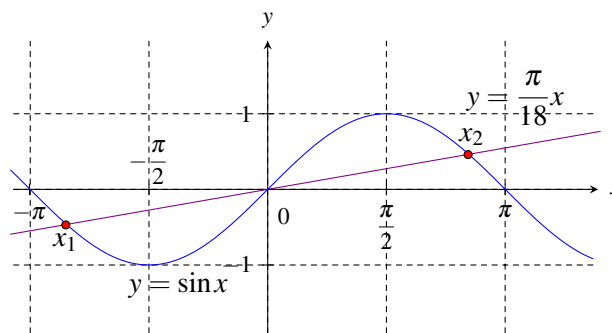
Câu 8. Số nghiệm của phương trình $\frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{18}$ là

- (A) Vô số. (B) 3. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{18} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \sin x = \frac{\pi}{18}x. \end{cases}$$

Số nghiệm của phương trình bằng số điểm chung của hai đồ thị $y = \sin x$ và $y = \frac{\pi}{18}x$.



Đường thẳng $y = \frac{\pi}{18}x$ có hệ số góc bằng $\frac{\pi}{18} < 1$ nên cắt đồ thị $y = \sin x$ tại 3 điểm có hoành độ $x_1, 0, x_2$ với $-\pi < x_1 < 0, 0 < x_2 < \pi$ và $x = 0$ thì phương trình chỉ có 2 nghiệm.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 9. Tìm số nghiệm của phương trình $\cos(\pi \sin x) = -1$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$.

- (A) 3. (B) 1. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cos(\pi \sin x) = -1 \Leftrightarrow \pi \sin x = \pi + k2\pi. (*)$$

Điều kiện để (*) có nghiệm là $-\pi \leq \pi + k2\pi \leq \pi \Rightarrow k = 0; k = -1$.

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow \sin x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \text{ Vì } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right) \text{ nên } k \in \{0; 1\}.$$

Chọn đáp án (D)

□

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sqrt{\cos^2 x - (2+m)\cos x + 2m}$ xác định trên tập $\mathbb{R}$.

- (A) $m > 1$. (B) $m \geq 1$. (C) $-1 < m < 1$. (D) $-1 \leq m \leq 1$.

Lời giải.

Ta có $\cos^2 x - (2+m)\cos x + 2m = (\cos x - 2)(\cos x - m)$, nên hàm số xác định trên tập $\mathbb{R}$ khi chỉ khi $\cos x - m \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ tương đương với $m \geq 1$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 11. Gọi x_1 là nghiệm không âm nhỏ nhất, x_2 là nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\tan x - \sin 2x - \cos 2x + 2 \left(2 \cos x - \frac{1}{\cos x} \right) = 0$. Khi đó tổng $S = x_1 + x_2$ bằng

(A) $\frac{\pi}{2}$. (B) 1. (C) $\frac{\pi}{4}$. (D) 0.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{\cos x} - \sin 2x - \cos 2x + 4 \cos x - \frac{2}{\cos x} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x - 2 \sin x \cos^2 x - \cos 2x \cos x + 2(2 \cos^2 x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x(1 - 2 \cos^2 x) - \cos 2x \cos x + 2 \cos 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow -\sin x \cos 2x - \cos 2x \cos x + 2 \cos 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos 2x(\sin x + \cos x - 2) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin x + \cos x = 2 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ với } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ta được $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = -\frac{\pi}{4}$. Vậy $S = 0$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 12. Biết tập hợp các giá trị của m để phương trình $m \sin^2 x + 2 \sin 2x + 3m \cos^2 x = 2$ có nghiệm là đoạn $[a; b]$. Tính giá trị của biểu thức $T = a + 3b$.

(A) $T = \frac{4}{3}$. (B) $T = \frac{8}{3}$. (C) $T = 8$. (D) $T = \frac{8}{9}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned} m \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) + 2 \sin 2x + 3m \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) &= 2 \\ \Leftrightarrow 2 \sin 2x + m \cos 2x &= 2 - 2m. \end{aligned} \quad (1)$$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm, hay

$$2^2 + m^2 \geq (2 - 2m)^2 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{8}{3} \Rightarrow a + 3b = 8.$$

Chọn đáp án (C)

□

Câu 13. Cho phương trình $\sin 2x - \cos 2x + |\sin x + \cos x| - \sqrt{2 \cos^2 x + m} - m = 0$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm thực là

(A) 5. (B) 9. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \sin 2x - \cos 2x + |\sin x + \cos x| - \sqrt{2 \cos^2 x + m} - m &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \sin x \cdot \cos x + 1 + |\sin x + \cos x| &= \sqrt{2 \cos^2 x + m} + 2 \cos^2 x + m \\ \Leftrightarrow (|\sin x + \cos x|)^2 + |\sin x + \cos x| &= 2 \cos^2 x + m + \sqrt{2 \cos^2 x + m} \\ \Leftrightarrow \left(|\sin x + \cos x| + \frac{1}{2} \right)^2 &= \left(\sqrt{2 \cos^2 x + m} + \frac{1}{2} \right)^2 \\ \Leftrightarrow |\sin x + \cos x| &= \sqrt{2 \cos^2 x + m} \\ \Leftrightarrow \sin 2x &= \cos 2x + m \\ \Leftrightarrow \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{m}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi $|m| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$. Nên $m \in \{-1; 0; 1\}$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 3m - 2$ có nghiệm trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$

- (A) $0 \leq m \leq \frac{4}{3}$. (B) $0 \leq m < \frac{\sqrt{3}+2}{3}$. (C) $0 \leq m \leq \frac{\sqrt{3}+2}{3}$. (D) $0 \leq m < \frac{4}{3}$.

Lời giải.

Phương trình $\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3m}{2} - 1$. Do $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ nên $2x + \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$.

Vậy $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \in \left[-1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \Rightarrow -1 \leq \frac{3m}{2} - 1 < \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 0 \leq m < \frac{\sqrt{3}+2}{3}$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 15. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$4(\sin^4 x + \cos^4 x) - 4(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin^2 4x = m$$

có nghiệm.

- (A) $m \geq 1$. (B) $\frac{-9}{16} < m < 1$. (C) $\frac{-9}{16} \leq m \leq 1$. (D) $m \leq \frac{-9}{16}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $4\sin^4 2x - 3\sin^2 2x - m = 0$

Đặt $t = \sin^2 2x$, $t \in [0; 1]$.

Phương trình đã cho trở thành $m = 4t^2 - 3t = g(t)$, $t \in [0; 1]$. Lập bảng biến thiên $g(t)$, suy ra phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\frac{-9}{16} \leq m \leq 1$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 16. Một trong các họ nghiệm của phương trình $(1 + 2\sin x)^2 \cos x = 1 + \sin x + \cos x$ có dạng $x = \alpha + k2\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$), với $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$. Tính α^3 .

- (A) $-\frac{\pi^3}{8}$. (B) $-\frac{\pi^3}{27}$. (C) $\frac{\pi^3}{8}$. (D) $\frac{\pi^3}{4}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} & 4\sin x \cos x (1 + \sin x) - (1 + \sin x) = 0 \\ & \Leftrightarrow (1 + \sin x)(2\sin 2x - 1) = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $\alpha^3 = \left(-\frac{\pi}{2}\right)^3 = -\frac{\pi^3}{8}$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 17. Cho phương trình $\sqrt[3]{(\sin x + m)^2} + \sqrt[3]{\sin^2 x - m^2} = 2\sqrt[3]{(\sin x - m)^2}$. Gọi $S = [a; b]$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình trên có nghiệm thực. Tính giá trị của $P = a^2 + b^2$.

- (A) $P = 2$. (B) $P = \frac{162}{49}$. (C) $P = 4$. (D) $P = \frac{49}{162}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{(\sin x + m)^2} + \sqrt[3]{\sin^2 x - m^2} = 2\sqrt[3]{(\sin x - m)^2} \\ \Leftrightarrow & \sqrt[3]{(\sin x + m)^2} + \sqrt[3]{\sin^2 x - m^2} - 2\sqrt[3]{(\sin x - m)^2} = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\sqrt[3]{\sin x + m} - \sqrt[3]{\sin x - m} \right) \left(\sqrt[3]{\sin x + m} + 2\sqrt[3]{\sin x - m} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sqrt[3]{\sin x + m} - \sqrt[3]{\sin x - m} = 0 \\ \sqrt[3]{\sin x + m} + 2\sqrt[3]{\sin x - m} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} m = 0 \\ \sin x = \frac{7m}{9} \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đó suy ra phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -\frac{9}{7} \leq m \leq \frac{9}{7}$, nên $a = -\frac{9}{7}$ và $b = \frac{9}{7}$ và ta có $P = \frac{162}{49}$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 18. Cho phương trình $m \sin x + (m + 1) \cos x = \frac{m}{\cos x}$. Tìm các giá trị của m sao cho phương trình đã cho có nghiệm.

- (A) $\begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq -4 \end{cases}$. (B) $\begin{cases} m \geq 0 \\ m < -4 \end{cases}$. (C) $-4 \leq m \leq 0$. (D) $-4 < m < 0$.

Lời giải.

Điều kiện $\cos x \neq 0$.

Với điều kiện đó chia hai vế của phương trình cho $\cos x$, ta được

$$m \tan x + m + 1 = m(1 + \tan^2 x) \Leftrightarrow m \tan^2 x - m \tan x - 1 = 0. \quad (1)$$

Đặt $\tan x = t$, phương trình (1) trở thành

$$mt^2 - mt - 1 = 0. \quad (*)$$

Do phương trình $\tan x = t$ có nghiệm với mọi t nên phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi (*) có nghiệm.

$$\Leftrightarrow \Delta = m^2 + 4m \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq -4 \end{cases}.$$

Chọn đáp án (A)

□

Câu 19. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos 4x + 6 \sin x \cos x = m$ có hai nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$?

- (A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Biến đổi phương trình đã cho về dạng $2 \sin^2 2x - 3 \sin 2x + m - 1 = 0$. Nếu đặt $t = \sin 2x$, $t \in [0; 1]$, thì phương trình trở thành $2t^2 - 3t + m - 1 = 0$ (1).

$$\text{Từ giả thiết suy ra } \begin{cases} 9 - 8(m - 1) \geq 0 \\ \frac{m - 1}{2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq m \leq 2.$$

- Với $m = 1$ giải phương trình được hai nghiệm $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$.
- Với $m = 2$ kiểm tra phương trình đã cho có nhiều hơn hai nghiệm trong đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Vậy, chỉ có một số nguyên m thỏa mãn bài toán đó là $m = 1$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $4\cos^2 2x - 4\cos 2x - 3 - 3m = 0$ có nghiệm.

- (A) $m \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{3}\right)$. (B) $m \in \left[-\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right]$. (C) $m \in \left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$. (D) $m \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right]$.

Lời giải.

Đặt $\cos 2x = t, |t| \leq 1$. Phương trình đã cho trở thành: $4t^2 - 4t - 3 = 3m$. (1)

Xét hàm số $g(t) = 4t^2 - 4t - 3$ trên đoạn $[-1; 1]$. Ta có bảng biến thiên:

t	-1	$\frac{1}{2}$	1	
$g'(t)$		-	0	+
$g(t)$	5		-4	-3

Phương trình đã cho có nghiệm khi phương trình (1) có nghiệm $t \in [-1; 1] \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq m \leq \frac{5}{3}$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 21. Cho phương trình $\sqrt{3}\sin^3 x - (2 - \sqrt{3})\sin^2 x \cos x - (2 + \sqrt{3})\sin x \cos^2 x = \sqrt{3}\cos^3 x$. Tìm tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình trên nằm trong khoảng $(-1; 1)$.

- (A) $\left\{-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}\right\}$. (B) $\left\{-\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{6}\right\}$. (C) $\left\{-\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right\}$. (D) $\left\{-\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{6}; -\frac{2\pi}{3}\right\}$.

Lời giải.

Nhận xét: $\cos x = 0$ không thỏa phương trình.

Do đó, chia 2 vế của phương trình cho $\cos^3 x$, ta được

$$\sqrt{3}\tan^3 x - (2 - \sqrt{3})\tan^2 x - (2 + \sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \tan x = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

So điều kiện $x \in (-1; 1)$ ta được $x \in \left\{-\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{6}\right\}$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 22. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$$m + \sqrt{m+1 + \sqrt{1+\sin x}} = \sin x$$

có nghiệm là $[\alpha; \beta]$. Giá trị $\alpha + \beta$ bằng

Ⓐ $-\frac{1}{2} + \sqrt{2}$.

Ⓑ $-\frac{1}{2} - \sqrt{2}$.

Ⓒ $-\frac{1}{4} - \sqrt{2}$.

Ⓓ $-\frac{1}{4} + \sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $m + \sqrt{m+1 + \sqrt{1+\sin x}} = \sin x \Leftrightarrow m+1 + \sqrt{m+1 + \sqrt{1+\sin x}} = 1 + \sin x$.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{1+\sin x} \\ b = \sqrt{m+1 + \sqrt{1+\sin x}} \end{cases}$, điều kiện $0 \leq a \leq \sqrt{2}$ và $b \geq 0$.

Khi đó ta có hệ $\begin{cases} a^2 = m+1+b \\ b = \sqrt{m+1+a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = m+1+b & (1) \\ b^2 = m+1+a & (2) \end{cases}$.

Lấy (2) trừ (1) về theo về ta có

$$b^2 - a^2 = a - b \Leftrightarrow (a-b)(a+b+1) = 0 \Leftrightarrow a = b \text{ (vì } 0 \leq a \leq \sqrt{2} \text{ và } b \geq 0 \text{)}.$$

Ta có phương trình $a^2 = m+1+a \Leftrightarrow a^2 - a - 1 = m$ với $0 \leq a \leq \sqrt{2}$.

Xét hàm số $f(a) = a^2 - a - 1$ với $0 \leq a \leq \sqrt{2}$. Bảng biến thiên

a	0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$
$f'(a)$		-	0
$f(a)$	-1		$1 - \sqrt{2}$
		$-\frac{5}{4}$	

Suy ra $m \in \left[-\frac{5}{4}; 1 - \sqrt{2}\right] \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{1}{4} - \sqrt{2}$.

Chọn đáp án Ⓒ

□

Câu 23. Cho phương trình

$$\sin x(2 - \cos 2x) - 2(2\cos^3 x + m + 1)\sqrt{2\cos^3 x + m + 2} = 3\sqrt{2\cos^3 x + m + 2}.$$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có đúng 1 nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$.

Ⓐ 2.

Ⓑ 1.

Ⓒ 4.

Ⓓ 3.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2\cos^3 x + m + 2 \geq 0 \\ x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$. Ta có

$$\begin{aligned} & \sin x(2 - \cos 2x) - 2(2\cos^3 x + m + 1)\sqrt{2\cos^3 x + m + 2} = 3\sqrt{2\cos^3 x + m + 2} \\ \Leftrightarrow & 2\sin^3 x + \sin x = 2\left(\sqrt{2\cos^3 x + m + 2}\right)^3 + \sqrt{2\cos^3 x + m + 2}. \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t$ có $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó, (1) $\Leftrightarrow f(\sin x) = f\left(\sqrt{2\cos^3 x + m + 2}\right) \Leftrightarrow \sqrt{2\cos^3 x + m + 2} = \sin x \quad (2)$

Vì $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$ nên $\sin x \in [0; 1]$.

Khi đó $(2) \Leftrightarrow 2\cos^3 x + m + 2 = \sin^2 x \Leftrightarrow -m - 1 = 2\cos^3 x + \cos^2 x$.

Xét hàm số $g(x) = 2\cos^3 x + \cos^2 x$, $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$, đặt $u = \cos x$, $u \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$ thì hàm số trở thành $h(u) = 2u^3 + u^2$,

$$h'(u) = 6u^2 + 2u = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right] \\ u = -\frac{1}{3} \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right] \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm $h(u)$

u	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	1			
$h'(u)$	$\vdots$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\vdots$
$h(u)$	$\begin{array}{ccccc} & & \frac{1}{27} & & 3 \\ & \nearrow & & \searrow & \nearrow \\ 0 & & & & 0 \end{array}$						

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{27} < -m - 1 \leq 3 \\ -m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq m < -\frac{28}{27} \\ m = -1 \end{cases}$$

Kết hợp $m \in \mathbb{Z}$ nên ta nhận $m \in \{-4; -3; -2; -1\}$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 24. Cho các số thực x_1, x_2, y_1, y_2 thay đổi, thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P = (1 - x_1)(1 - y_1) + (1 - x_2)(1 - y_2)$.

- (A) $P_{\max} = 4 - 2\sqrt{2}$. (B) $P_{\max} = 4 + 2\sqrt{2}$. (C) $P_{\max} = 8$. (D) $P_{\max} = 2$.

Lời giải.

Đặt $x_1 = \sqrt{2}\cos\alpha$, $x_2 = \sqrt{2}\sin\alpha$, $y_1 = \sqrt{2}\cos\beta$, $y_2 = \sqrt{2}\sin\beta$. Biểu thức P được viết lại

$$\begin{aligned} P &= 2 - \sqrt{2}\sin\alpha - \sqrt{2}\cos\alpha - \sqrt{2}\sin\beta - \sqrt{2}\cos\beta + 2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta \\ &= 2 - 2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - 2\sin\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos(\alpha - \beta) \leq 8. \end{aligned}$$

Nên giá trị lớn nhất của P bằng 8.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 25. Xác định m để phương trình $m\cos^2 2x - 4\sin x \cos x + m - 2 = 0$ có nghiệm trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

- (A) $m < -1$. (B) $1 < m < 4$. (C) Không có m . (D) $0 < m < 1$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin 2x$, với $0 < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < t < 1$. Phương trình đã cho trở thành

$$m(1 - t^2) - 2t + m - 2 = 0 \Leftrightarrow mt^2 + 2t + 2 - 2m = 0 \quad (1)$$

+ Nếu $m = 0$ thì PT(1) $\Leftrightarrow t = -1$ (loại).

+ Nếu $m \neq 0$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ PT(2) có nghiệm $t \in (0; 1)$. Từ đó tìm được $1 < m < 4$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 26. Cho phương trình $\frac{\cos 4x - \cos 2x + 2\sin^2 x}{\cos x + \sin x} = 0$. Tính diện tích đa giác có các đỉnh là các điểm biểu

diễn các nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác.

Ⓐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ⓑ $2\sqrt{2}$.

Ⓒ $\sqrt{2}$.

Ⓓ $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

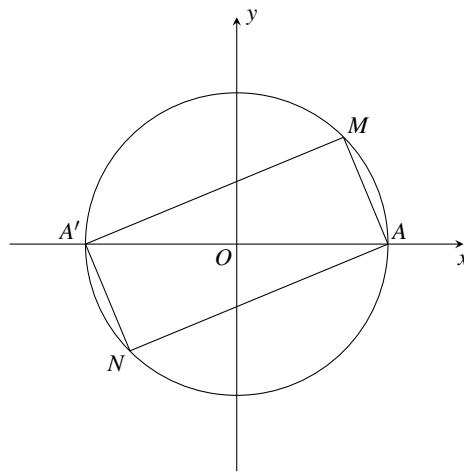
Điều kiện $\sin x + \cos x \neq 0$.

Ta có phương trình tương đương

$$2\cos^2 2x - 1 - \cos 2x + 1 - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = k\pi. \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = k\pi$.

Các họ nghiệm của phương trình biểu diễn trên đường tròn lượng giác như sau:



Khi đó $S_{AMA'N} = 2S_{\triangle AMA'} = 2 \cdot \frac{1}{2} AA' \cdot d(M, AA') = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án Ⓒ

□

Câu 27. Có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn các nghiệm của phương trình $(1 + \sin x + \cos x) \tan(\pi - x) = \sin 2x + 2 \sin x + 2 \cos x + 2$?

Ⓐ 2 điểm.

Ⓑ 3 điểm.

Ⓒ 4 điểm.

Ⓓ 5 điểm.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình $\cos x \neq 0$. Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & -(1 + \sin x + \cos x) \tan x = (\sin x + \cos x)^2 + 2(\sin x + \cos x) + 1 \\ \Leftrightarrow & -(1 + \sin x + \cos x) \tan x = (1 + \sin x + \cos x)^2 \\ \Leftrightarrow & (1 + \sin x + \cos x)(\sin x + \cos x + 1 + \tan x) = 0 \\ \Leftrightarrow & (1 + \sin x + \cos x)[\cos x(\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x)] = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[1 + \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right] \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) (\cos x + 1) = 0. \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pi + k2\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy các nghiệm của phương trình đã cho được biểu diễn bởi 3 điểm trên đường tròn lượng giác.

Chọn đáp án Ⓑ

□

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sin^4 x + \cos^4 x + \cos^2 4x = m$ có bốn nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

- Ⓐ $\frac{47}{64} \leq m \leq \frac{3}{2}$. Ⓑ $\frac{47}{64} < m \leq \frac{3}{2}$. Ⓒ $\begin{cases} m > \frac{3}{2} \\ m \leq \frac{47}{64} \end{cases}$. Ⓓ $\frac{47}{64} < m < \frac{3}{2}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho viết lại như sau $4\cos^2 4x + \cos 4x + 3 = 4m$.

Đặt $t = \cos 4x$ với $t \in [-1; 1]$. Với $t = \pm 1$ thì mỗi t chỉ cho duy nhất một giá trị của $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$;

Với mỗi $-1 < t < 1$ thì mỗi t cho hai giá trị x .

Xét hàm số $f(t) = 4t^2 + t + 3$ với $-1 \leq t \leq 1$ có bảng biến thiên như sau

t	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{8}$	1	$+\infty$
$f(t)$	$+\infty$	$\downarrow$		$\downarrow$	$+\infty$
		6		8	
			$\frac{47}{16}$		

Từ bảng biến thiên, yêu cầu bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi $\frac{47}{16} < 4m \leq 6 \Leftrightarrow \frac{47}{64} < m \leq \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án Ⓑ

□

Câu 29. Phương trình $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) - \sin x \cos x = 1$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0; 2\pi)$?

- Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x + \cos x$ ($-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$) $\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$. Phương trình trở thành

$$\sqrt{2}t - \frac{t^2 - 1}{2} = 1 \Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2} + 1 \text{ (loại)} \\ t = \sqrt{2} - 1. \end{cases}$$

Ta có $t = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Từ đó suy ra trong khoảng $(0; 2\pi)$ phương trình đã cho có hai nghiệm.

Chọn đáp án Ⓒ

□

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\cos^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{m}{4}$ có nghiệm.

- Ⓐ $m \in (-\infty; 3 - 2\sqrt{2}]$. Ⓑ $m \in (3 - 2\sqrt{2}; 3 + 2\sqrt{2})$.
 Ⓒ $m \in [3 + 2\sqrt{2}; +\infty)$. Ⓓ $m \in [3 - 2\sqrt{2}; 3 + 2\sqrt{2}]$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(1 + \cos 2x)^2 + \frac{1}{4}\left[1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\right]^2 &= \frac{m}{4} \\ \Leftrightarrow (1 + \cos 2x)^2 + (1 + \sin 2x)^2 &= m \\ \Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x &= \frac{m-3}{2} \\ \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{m-3}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \leq \frac{m-3}{2\sqrt{2}} \leq 1 \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{2} \leq m \leq 3 + 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x$ và đường thẳng $y = m$ có điểm chung.

- (A) $\frac{1}{4} \leq m \leq 1$. (B) $m \geq \frac{1}{4}$. (C) $m \leq 1$. (D) $\begin{cases} m < \frac{1}{4} \\ m > 1 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $y = \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x$. Vì $-1 \leq \cos 4x \leq 1$ nên để đồ thị hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x$ và đường thẳng $y = m$ có điểm chung thì $\frac{5}{8} - \frac{3}{8} \leq m \leq \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq m \leq 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$\sin 2x - (2m + \sqrt{2})(\sin x + \cos x) + 2m\sqrt{2} + 1 = 0$$

có đúng hai nghiệm thuộc $\left(0; \frac{5\pi}{4}\right)$.

- (A) $m > \frac{-\sqrt{2}}{2}$. (B) $m \geq \frac{1}{2}$. (C) $m \leq \frac{1}{2}$. (D) $\frac{-\sqrt{2}}{2} < m \leq \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x + \cos x$, $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Với $x \in \left(0; \frac{5\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2 - (2m + \sqrt{2})t + 2m\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2} \\ t = 2m \end{cases}$.

• Với $t = \sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ là một nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• Do đó, phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thuộc $\left(0; \frac{5\pi}{4}\right) \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < m \leq \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Cho các số thực a, b thay đổi, thỏa mãn $a^2 + b^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P = \frac{a+2b+3}{2a-b+4}$.

- (A) $P_{\max} = 6$. (B) $P_{\max} = 2$. (C) $P_{\max} = \frac{5}{3}$. (D) $P_{\max} = \frac{6}{5}$.

Lời giải.

Đặt $a = \sin x, b = \cos x$. Khi đó $P = \frac{\sin x + 2\cos x + 3}{2\sin x - \cos x + 4}$.

Gọi P là một giá trị của hàm số đã cho. Khi đó phương trình $P = \frac{\sin x + 2\cos x + 3}{2\sin x - \cos x + 4}$ có nghiệm hay phương trình $(2P - 1)\sin x - (P + 2)\cos x = 3 - 4P$ có nghiệm, điều này tương đương với

$$(2P - 1)^2 + (P + 2)^2 \geq (3 - 4P)^2 \Leftrightarrow \frac{2}{11} \leq P \leq 2.$$

Nên giá trị lớn nhất của P bằng 2.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 34. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để tập hợp các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $\sin 2x + 2\sqrt{2}m(\sin x - \cos x) + 1 - 4m = 0$ chỉ là một điểm trên đường tròn lượng giác.

(A) $\begin{cases} m < 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} m < 0 \\ m > 1 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} m \leq 0 \\ m > 1 \end{cases}$

Lời giải.

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Khi đó, phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 2\sqrt{2}mt + 4m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2} & (1) \\ t = \sqrt{2}(2m - 1) & (2) \end{cases}$$

Ta có $t = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. Để tập hợp các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình chỉ là một điểm trên đường tròn lượng giác thì

$$\begin{cases} \sqrt{2}(2m - 1) < -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}(2m - 1) \geq \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 < -1 \\ 2m - 1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \geq 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án (A)

□

Câu 35. Giả sử đoạn $[m, M]$ là tập giá trị của hàm số $y = \frac{\sin x + \cos x - 1}{\cos x - \sin x + 2}$. Tính $S = M^2 + m^2$.

(A) $S = 4$.

(B) $S = \frac{11}{2}$.

(C) $S = 5$.

(D) $S = 6$.

Lời giải.

Vì $\cos x - \sin x + 2 \neq 0 \forall x$ nên

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sin x + \cos x - 1}{\cos x - \sin x + 2} \\ \Leftrightarrow y \cos x - y \sin x + 2y &= \sin x + \cos x - 1 \\ \Leftrightarrow (1 + y) \sin x + (1 - y) \cos x &= 2y + 1. \end{aligned}$$

Phương trình này có nghiệm x nên

$$\begin{aligned} (1 + y)^2 + (1 - y)^2 &\geq (2y + 1)^2 \\ \Leftrightarrow 2y^2 + 4y - 1 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-2 - \sqrt{6}}{2} &\leq y \leq \frac{-2 + \sqrt{6}}{2}. \end{aligned}$$

Tồn tại x để xảy ra các dấu bằng nên ta có $M = \frac{-2 + \sqrt{6}}{2}$ và $m = \frac{-2 - \sqrt{6}}{2}$. Từ đó $M^2 + m^2 = 5$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 36. Tìm tất cả các giá trị m để $\frac{m \cos x + m - 1}{3 + \sin x + \cos x} < 1$ đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

(A) $m \leq \frac{7}{3}$.

(B) $m = \frac{7}{3}$.

(C) $m < -\frac{7}{3}$.

(D) $m < \frac{7}{3}$.

Lời giải.

Đặt $y = \frac{m \cos x + m - 1}{3 + \sin x + \cos x} \Leftrightarrow y \sin x + (y - m) \cos x = m - 3y - 1$.

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*, ta có

$(m - 3y - 1)^2 \leq (y^2 + (y - m)^2)(\sin^2 x + \cos^2 x) \Leftrightarrow 7y^2 - 2(2m - 3)y + 1 - 2m \leq 0$

$\frac{1}{7} \left(2m - 3 - \sqrt{4m^2 + 2m + 2} \right) \leq y \leq \frac{1}{7} \left(2m - 3 + \sqrt{4m^2 + 2m + 2} \right)$.

Ta có $y < 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \max y = \frac{1}{7} \left(2m - 3 + \sqrt{4m^2 + 2m + 2} \right) < 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{4m^2 + 2m + 2} < 10 - 2m \Leftrightarrow \begin{cases} 10 - 2m > 0 \\ 4m^2 + 2m + 2 < (10 - 2m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{7}{3}$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 37. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \tan x - \cot x$.

(A) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(B) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(C) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(D) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 38. Giả sử phương trình $(1 - \sin x) \sin^2 x - (1 + \cos x) \cos^2 x = 0$ có tập nghiệm dạng

$$S = \{ \alpha + k2\pi, \beta + k2\pi, \gamma + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

, trong đó $\alpha, \beta \in [0; \pi]$ và $\gamma \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Tính giá trị biểu thức $P = \alpha + \beta + \gamma$.

(A) $P = \frac{5\pi}{4}$.

(B) $P = \frac{5\pi}{2}$.

(C) $P = \frac{\pi}{4}$.

(D) $P = \frac{7\pi}{4}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (1 - \sin x)(1 - \cos x)(1 + \cos x) - (1 + \cos x)(1 - \sin x)(1 + \sin x) = 0 \\ \Leftrightarrow & (1 - \sin x)(1 + \cos x)(\sin x + \cos x) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = -1 \\ \sin x + \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi. \end{cases}$$

Vậy $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} + \pi + \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{4}$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 39. Có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn tất các nghiệm của phương trình $\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{8}$?

(A) 16 điểm.

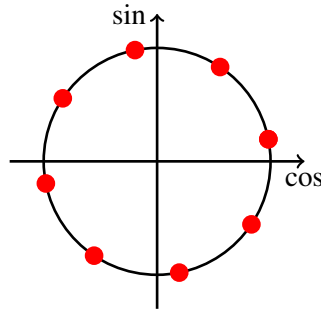
(B) 4 điểm.

(C) 2 điểm.

(D) 8 điểm.

Lời giải.

Phương trình tương đương $\sin 8x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{16} + \frac{k2\pi}{8}$.



Vậy có 8 điểm biểu diễn.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 40. Tìm tất cả giá trị của m để phương trình $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - m \cos^2 x = 2$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \frac{\pi}{4}]$.

(A) $m \geq -1$.

(B) $-\frac{3}{2} < m \leq -1$.

(C) $-2 < m < -1$.

(D) $-2 < m \leq -1$.

Lời giải.

- Với $\cos x = 0$ thì phương trình tương đương $1 = 2 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.
- Với $\cos x \neq 0$. Chia cả hai vế cho $\cos^2 x$ ta được

$$-\tan^2 x + 2 \tan x - (m + 2) = 0 \Leftrightarrow -\tan^2 x + 2 \tan x - 2 = m.$$

Đặt $t = \tan x$, với $x \in (0; \frac{\pi}{4}] \Rightarrow t \in (0; 1]$.

Lập bảng biến thiên cho hàm bậc 2 $f(t) = -t^2 + 2t - 2$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(t)$			+	0
$f(t)$			-1	

Dựa vào bảng biến thiên ta được $-2 < m \leq -1$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 41. Có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn các nghiệm của phương trình $\cot x = \cos x + \tan x + \cos 3x$?

(A) 7 điểm.

(B) 6 điểm.

(C) 5 điểm.

(D) 4 điểm.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình $\sin x \cos x \neq 0$. Khi đó phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} \cot x - \tan x &= \cos x + \cos 3x \\ \Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} &= 2 \cos 2x \cos x \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin 2x \cos x = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}. \end{aligned}$$

Vậy các nghiệm của phương trình đã cho được biểu diễn bởi 4 điểm trên đường tròn lượng giác.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 42. Tìm nghiệm của phương trình $\sin^4 x + \cos^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$.

(A) $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(B) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(C) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(D) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x\right) + \frac{1}{2} \left(\sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin 2x\right) - \frac{3}{2} = 0 \\ \Leftrightarrow &\left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x\right) + \frac{1}{2} (\sin 2x - \cos 4x) - \frac{3}{2} = 0 \\ \Leftrightarrow &\left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x\right) + \left(\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} + \sin^2 2x\right) - \frac{3}{2} = 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{1}{2} \sin^2 2x + \frac{1}{2} \sin 2x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -2 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D)

□

Câu 43. Tìm tập hợp S tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$m \cos\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) + (2m - 1) \sin(7\pi - x) + 5m - 7 = 2 \cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right).$$

có đúng một nghiệm thuộc $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

(A) $S = \left\{\frac{5}{4}; m = 0\right\}$.

(B) $S = \left\{\frac{5}{4}\right\} \cup \left[\frac{17}{13}; \frac{11}{7}\right]$.

(C) $S = \left\{\frac{5}{4}\right\} \cup \left(\frac{17}{13}; \frac{11}{7}\right]$.

(D) $S = \left\{\frac{5}{4}\right\}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $3(m-1) \sin x = 7-5m$ (1)

Với $m=1$ phương trình đã cho vô nghiệm.

Với $m \neq 1$ Phương trình đã cho trở thành $\sin x = \frac{7-5m}{3(m-1)}$

Vì $x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right] \Rightarrow \sin x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Dựa vào đường tròn lượng giác suy ra phương trình có 1 nghiệm tương đương với

$$\begin{cases} m \neq 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \leq \frac{7-5m}{3(m-1)} < \frac{1}{2} \\ \frac{7-5m}{3(m-1)} = 1 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{5}{4} \text{ hoặc } \frac{17}{13} < m \leq \frac{11}{7}.$$

Chọn đáp án (C)

□

Câu 44. Gọi $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ là nghiệm của phương trình $\tan 3x = \tan x$ trong đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}, 11\pi\right]$. Tính tổng

$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$.

(A) 125π .

(B) 65π .

(C) 126π .

(D) 66π .

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Khi đó: $\tan 3x = \tan x \Leftrightarrow 3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

So điều kiện ta có nghiệm của phương trình là: $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Mà $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 11\pi\right]$ nên $-\frac{\pi}{2} \leq k\pi \leq 11\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq 11 \Leftrightarrow k \in 0, 1, 2, \dots, 11.$

Suy ra tổng các nghiệm cần tìm là: $\sum_{k=0}^{11} k\pi = 66\pi.$

Chọn đáp án (D)

□

Câu 45.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số

$y = \tan x$ trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Tìm số nghiệm của

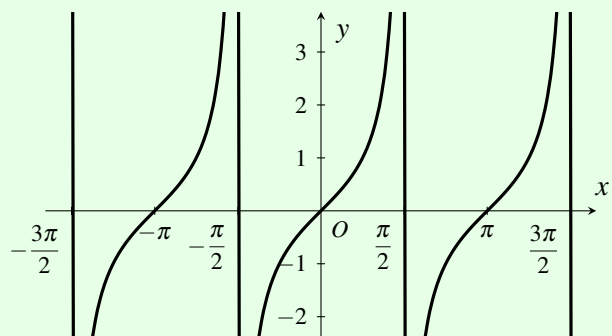
phương trình $|\tan x| = \pi$ trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

(A) 6.

(B) 5.

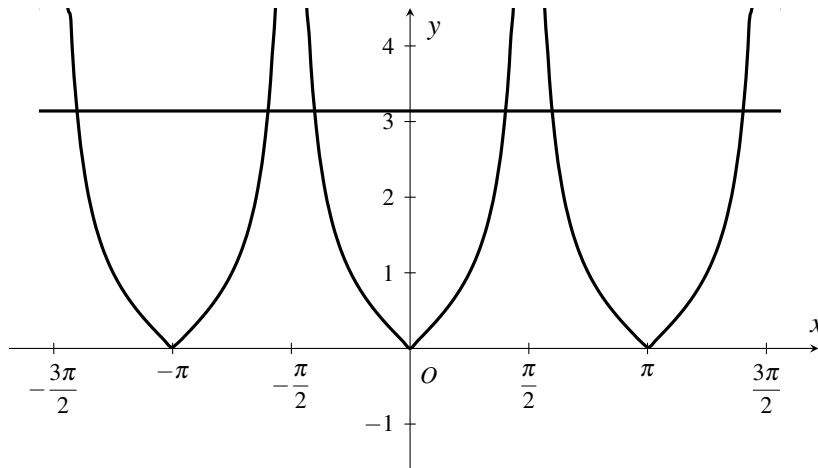
(C) 3.

(D) 4.



Lời giải.

Số nghiệm của phương trình $|\tan x| = \pi$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |\tan x|$ và đường thẳng $y = \pi$.



Từ đồ thị suy ra phương trình có 6 nghiệm trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 46. Tính tổng S tất cả các nghiệm trên khoảng $(0; 100\pi)$ của phương trình $\cos x = 0$.

- (A) $S = 5050\pi$. (B) $S = 5000\pi$. (C) $S = 4950\pi$. (D) $S = 5100\pi$.

Lời giải.

Ta có $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Vì $x \in (0; 100\pi)$ nên $k \in [0; 99], k \in \mathbb{Z}$. Vậy $S = \sum_{k=0}^{99} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 5000\pi$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 47. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số của hàm số $y = \frac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$ lần lượt là:

- (A) $M = -1; m = -2$. (B) $M = 2; m = 1$. (C) $M = 2; m = -1$. (D) $M = 1; m = -2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y = \frac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2} &\Leftrightarrow y\sin x + y\cos x + 2y = \sin x + 2\cos x + 1 \\ &\Leftrightarrow (y-1)\sin x + (y-2)\cos x = 1-2y(*). \end{aligned}$$

y thuộc tập giá trị của hàm số khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm

$$\Leftrightarrow (y-1)^2 + (y-2)^2 \geq (1-2y)^2 \Leftrightarrow y^2 + y - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 1.$$

Từ đó suy ra $M = 1$ và $m = -2$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 48. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $7 + 2\cos x + m\sqrt{5 + 2\cos 2x} = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt trên $\left[0; \frac{4\pi}{3}\right]$

- (A) 4. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương

$$7 + 2\cos x + m\sqrt{4\cos^2 x + 3} = 0$$

Đặt $t = \cos x$. Vì $x \in \left[0; \frac{4\pi}{3}\right]$ nên $t \in [-1; 1]$. Khi đó ta có phương trình

$$7 + 2t + m\sqrt{4t^2 + 3} = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{7 + 2t}{\sqrt{4t^2 + 3}}.$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{2t + 7}{\sqrt{4t^2 + 3}}$, $\forall t \in [-1; 1]$. Có $f'(t) = \frac{6 - 28t}{(4t^2 + 3)\sqrt{4t^2 + 3}}$, $\forall t \in [-1; 1]$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$\frac{3}{14}$	1	$+\infty$
y'			+	0	-
y			$\frac{5\sqrt{7}}{7}$	$\frac{2\sqrt{39}}{3}$	$\frac{9\sqrt{7}}{7}$

Phương trình có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5\sqrt{7}}{7} < -m \leq 3 \\ \frac{9\sqrt{7}}{7} \leq -m < \frac{2\sqrt{39}}{3} \end{cases}$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $\begin{cases} m = -2, m = -3 \\ m = -4 \end{cases}$

Chọn đáp án (D)

□

Câu 49. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\sqrt{3} \sin x}{\cos x + 2}$. Tính $M \cdot m$.

(A) 2.

(B) 0.

(C) -2.

(D) -1.

Lời giải.

Ta có

$$y = \frac{\sqrt{3} \sin x}{\cos x + 2} \Leftrightarrow y(\cos x + 2) = \sqrt{3} \sin x \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x - y \cos x = 2y. \quad (1)$$

Chia cả hai vế của (1) cho $\sqrt{3 + y^2}$ ta được

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3 + y^2}} \cdot \sin x - \frac{y}{\sqrt{3 + y^2}} \cdot \cos x = \frac{2y}{\sqrt{3 + y^2}}. \quad (2)$$

Đặt $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3 + y^2}}$ và $\sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{3 + y^2}}$, từ (2) suy ra

$$\sin x \cos \alpha - \cos x \sin \alpha = \frac{2y}{\sqrt{3 + y^2}} \Leftrightarrow \sin(x - \alpha) = \frac{2y}{\sqrt{3 + y^2}}. \quad (3)$$

Từ (3) suy ra

$$\left| \frac{2y}{\sqrt{3 + y^2}} \right| \leq 1 \Leftrightarrow 4y^2 \leq 3 + y^2 \Leftrightarrow y^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 1.$$

Cách khác: Điều kiện để phương trình (1) (ẩn x) luôn có nghiệm là

$$(\sqrt{3})^2 + (-y)^2 \geq (2y)^2 \Leftrightarrow 3y^2 \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 1.$$

Do đó, $M = 1$ và $m = -1$. Vậy $M \cdot m = -1$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 50. Nghiệm của phương trình $\cos 2x + 3 \sin 2x + 5 \sin x - 3 \cos x = 3$ được biểu diễn bởi bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác?

- (A) 4. (B) 5. (C) 2. (D) 6.

Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} & 1 - 2 \sin^2 x + 6 \sin x \cos x + 5 \sin x - 3 \cos x - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow & (-2 \sin^2 x + 5 \sin x - 2) + 3 \cos x (2 \sin x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & (2 \sin x - 1)(2 - \sin x) + 3 \cos x (2 \sin x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & (2 \sin x - 1)(3 \cos x - \sin x + 2) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2 \sin x = 1 \\ 3 \cos x - \sin x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ \sin x - 3 \cos x = 2. \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Phương trình (1) tương đương

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{10}} \sin x - \frac{3}{\sqrt{10}} \cos x = \frac{2}{\sqrt{10}} \\ \Leftrightarrow & \sin(x - \alpha) = \frac{2}{\sqrt{10}} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \alpha + \arcsin \frac{2}{\sqrt{10}} + k2\pi \\ x = \alpha + \pi - \arcsin \frac{2}{\sqrt{10}} + k2\pi, \end{cases} \end{aligned}$$

ở đó $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Vậy các nghiệm của phương trình đã cho được biểu diễn bởi bốn điểm trên đường tròn lượng giác.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 51. Tìm số nghiệm của phương trình $5 \sin^2 x + \sin 2x = 2 \sin^4 \frac{x}{2} + 2 \cos^4 \frac{x}{2}$ trong khoảng $(-1; 3)$.

- (A) 3. (B) 4. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Ta biến đổi $\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2} = \frac{(1 - \cos x)^2}{4} + \frac{(1 + \cos x)^2}{4} = \frac{1 + \cos^2 x}{2}$ và $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, phương trình đã cho trở thành $5 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 1$.

Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$, phương trình không thỏa nên ta loại $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Với $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$, ta được

$$\begin{aligned} & 5 \tan^2 x + 2 \tan x - 1 = 1 + \tan^2 x \Leftrightarrow 4 \tan^2 x + 2 \tan x - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan \frac{1}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện $x \in (-1; 3)$ ta được số nghiệm thỏa là 3 nghiệm.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 52. Tìm tập nghiệm của phương trình $2\sin^4 x + 7\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 2$.

- (A) $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 (B) $\left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi; -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 (C) $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 (D) $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải.

Với $\cos x = 0$ thì $\sin^2 x = 1$ nên phương trình thỏa mãn.

Ta được $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ là một họ nghiệm của phương trình.

Với $\cos x \neq 0$, chia hai vế cho $\cos^4 x$, ta được

$$\begin{aligned}
 2\tan^4 x + 7\tan^2 x + 1 &= 2(1 + \tan^2 x)^2 \Leftrightarrow 3\tan^2 x - 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

Kết hợp các họ nghiệm với nhau, ta được $x = \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 53. Có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn các nghiệm của phương trình $\frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x} = 1 + \cot 2x$?

- (A) 2 điểm.
 (B) 1 điểm.
 (C) 4 điểm.
 (D) 3 điểm.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình $\sin 2x \neq 0$. Khi đó phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
 1 - \cos 2x &= \sin^2 2x(1 + \cot 2x) \\
 \Leftrightarrow 1 - \cos 2x &= \sin^2 2x + \sin 2x \cos 2x \\
 \Leftrightarrow \cos^2 2x - \cos 2x - \sin 2x \cos 2x &= 0 \\
 \Leftrightarrow \cos 2x(\cos 2x - \sin 2x - 1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \cos 2x \left[\sqrt{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) - 1 \right] &= 0 \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Vậy các nghiệm của phương trình đã cho được biểu diễn bởi 4 điểm trên đường tròn lượng giác.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 54. Tìm tập nghiệm của phương trình $2\tan x + \cot x = \sqrt{3} + \frac{2}{\sin 2x}$.

- (A) $\left\{ -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 (B) $\left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 (C) $\left\{ k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 (D) $\left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải.

Điều kiện để phương trình có nghĩa: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} 2 \tan x + \cot x &= \sqrt{3} + \frac{2}{\sin 2x} \Leftrightarrow 2 \sin^2 x + \cos^2 x = \sqrt{3} \sin x \cos x + 1 \\ &\Leftrightarrow 2 \sin^2 x + (\cos^2 x - 1) - \sqrt{3} \sin x \cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow \tan^2 x - \sqrt{3} \tan x = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 0 & (\text{loại}) \\ \tan x = \sqrt{3} & (\text{nhận}) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (\text{nhận}). \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 55. Phương trình $\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$ có hai họ nghiệm dạng $x = \alpha + k2\pi; x = \beta + k2\pi$ ($\alpha, \beta \in [0; \pi]$). Tính $\alpha + \beta$.

- (A)** $\alpha + \beta = \pi$. **(B)** $\alpha + \beta = \frac{5\pi}{2}$. **(C)** $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$. **(D)** $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x - \cos x, t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$, phương trình trở thành:

$$1 - t^2 - 12t + 12 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 12t - 13 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 & (\text{nhận}) \\ t = -13 & (\text{loại}) \end{cases}.$$

Với $t = 1 \Leftrightarrow \sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy $\alpha = \frac{\pi}{2}$ và $\beta = \pi$, do đó $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 56. Cho phương trình $\frac{\sin x}{\cos^2 x - 3 \cos x + 2} = 0$. Tính tổng tất cả các nghiệm trong đoạn $[0; 2018\pi]$ của phương trình trên.

- (A)** 1018081π . **(B)** 1018018π . **(C)** 1020100π . **(D)** 1018080π .

Lời giải.

Điều kiện $\cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Phương trình đã cho tương đương $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm trong đoạn $[0; 2018\pi]$ của phương trình là

$$\pi \cdot (1 + 3 + 5 + \dots + 2017) = 1018081\pi.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 57. Giải phương trình $\sin 2x - 3\sqrt{3} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 4 = 0$.

- (A)** $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$ **(B)** $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Ⓒ
$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ⓓ
$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Lời giải.

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Khi đó, phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 1 - \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}t + 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - \frac{3\sqrt{6}}{2}t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{6} \text{ (loại)} \\ t = \frac{\sqrt{6}}{2}. \end{cases}$$

Ta có $t = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Chọn đáp án Ⓐ

□

Câu 58. Tìm số nghiệm của phương trình $\cos(3 \sin x) = 0$ trên khoảng $(-\pi; 3\pi)$.

Ⓐ 8.

Ⓑ 5.

Ⓒ 6.

Ⓓ 7.

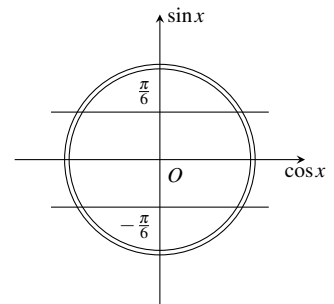
Lời giải.

Ta có $\cos(3 \sin x) = 0 \Leftrightarrow 3 \sin x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (*).

Điều kiện để (*) có nghiệm là $-3 \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \leq 3 \Rightarrow k = 0; k = -1$.

Do đó (*) $\Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{\pi}{6}$.

Dựa vào đường tròn lượng giác, phương trình có 8 nghiệm trên khoảng $(-2\pi; 4\pi)$.



Chọn đáp án Ⓐ

□

Câu 59. Phương trình $|\cos x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ có bao nhiêu nghiệm trên đoạn $\left[-\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$?

Ⓐ 10.

Ⓑ 9.

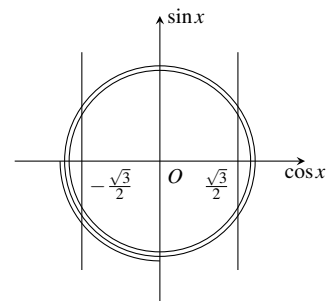
Ⓒ 8.

Ⓓ 11.

Lời giải.

$$|\cos x| = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

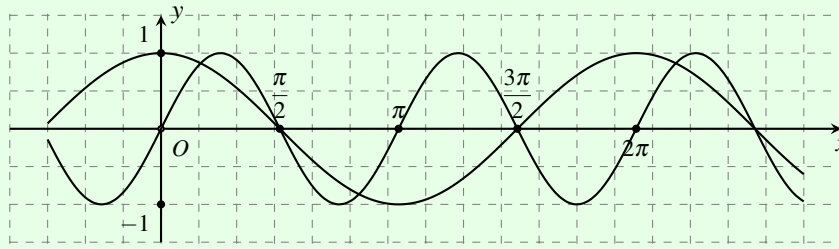
Dựa vào đường tròn lượng giác, phương trình có 9 nghiệm trên đoạn $\left[-\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.



Chọn đáp án Ⓑ

□

Câu 60. Cho các hàm số $y = \sin 2x$ và $y = \cos x$ có đồ thị trong cùng hệ tọa độ như sau



Hỏi hai đồ thị cắt nhau tại bao nhiêu điểm có hoành độ thuộc khoảng $(0; 2018)$?

- (A) 1285 điểm. (B) 1284 điểm. (C) 321 điểm. (D) 4036 điểm.

Lời giải.

- Hai đồ thị gặp nhau điểm đầu tiên có hoành độ nhỏ hơn 1, điểm thứ hai tại $x = \frac{\pi}{2} > \frac{3}{2}$ và có 4 giao điểm trong khoảng $(0; 2\pi)$; hơn nữa, các hàm số đã cho tuần hoàn sau mỗi khoảng 2π .

- Lại có $2018 = 321 \cdot 2\pi + a$ với $a \simeq 1,098 < \frac{\pi}{2}$. Như vậy ngoài $4 \cdot 321 = 1284$ giao điểm trong 321 chu kỳ 2π đầu tiên, hai đồ thị còn gặp nhau thêm 1 lần nữa.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 61. Cho $y = \frac{m \sin x + 1}{2 + \cos x}$. Tìm m để $\min y < -1$.

- (A) $m < -3$. (B) $m > 2$.
(C) $m < 0$. (D) $m > 2\sqrt{2} \vee m < -2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $y = \frac{m \sin x + 1}{2 + \cos x} \Leftrightarrow 2y + y \cos x = m \sin x + 1 \Leftrightarrow y \cos x - m \sin x = 1 - 2y$ (1).

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} y^2 + m^2 &\geq (1 - 2y)^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 - m^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{3m^2 + 1}}{3} \leq y \leq \frac{2 + \sqrt{3m^2 + 1}}{3} \\ &\Rightarrow \min y = \frac{2 - \sqrt{3m^2 + 1}}{3}. \end{aligned}$$

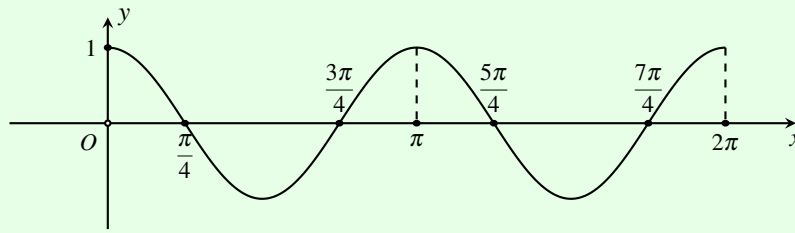
Do đó:

$$\begin{aligned} \min y < -1 &\Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{3m^2 + 1}}{3} < -1 \\ &\Leftrightarrow 2 - \sqrt{3m^2 + 1} \leq -3 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3m^2 + 1} > 5 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m > 2\sqrt{2} \\ m < -2\sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D)

□

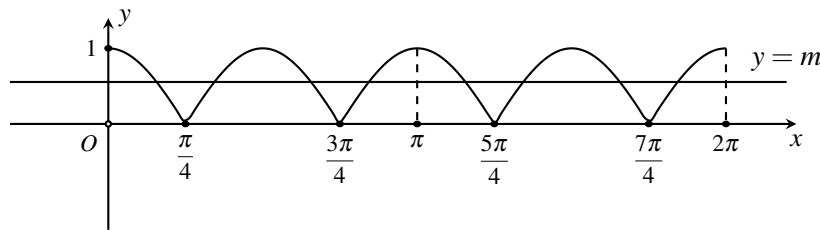
Câu 62. Xét hàm số $f(x) = \cos 2x$ trên tập hợp $\mathcal{D} = [0; 2\pi]$ và có đồ thị cho ở hình vẽ. Tìm số giao điểm tối đa của đường thẳng $y = m$ với $m \in \mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $g(x) = |f(x)|$.



- (A) 9. (B) 10. (C) 8. (D) 7.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $g(x) = |f(x)|$ và đường thẳng $y = m$ như sau:



Chọn đáp án (C)

□

Câu 63. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\cos 2x - (2m - 1)\cos x - m + 1 = 0$ có đúng hai nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

- (A) $0 \leq m < 1$. (B) $-1 < m < 1$. (C) $0 \leq m \leq 1$. (D) $-1 < m \leq 0$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $(\cos x - m)(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = m \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$. Vì phương trình $\cos x = -\frac{1}{2}$ không

có nghiệm trong đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ nên yêu cầu bài toán tương đương với điều kiện $m \in [0; 1]$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 64. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $m(\sin x + \cos x) + \sin 2x = 0$ có nghiệm.

- (A) $m \in \mathbb{R}$. (B) $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$. (C) $\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$. (D) $-1 \leq m \leq 1$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$, suy ra $\sin 2x = t^2 - 1$.

Khi đó phương trình tương đương $mt + t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow f(t) = t^2 + mt - 1 = 0$, $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Nhận thấy phương trình bậc hai $f(t) = 0$ với $\Delta = m^2 + 4 > 0$, $\forall t$ luôn có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 .

Theo định lý Viét, ta có $t_1 \cdot t_2 = -1 \Rightarrow |t_1| \cdot |t_2| = 1 \Rightarrow \begin{cases} t_1 \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \\ t_2 \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \end{cases}$.

Vậy phương trình luôn có nghiệm với $\forall m \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 65. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để phương trình $3\sin x + 4\cos x = (m^3 - 4m + 3)x + m + 5$ vô nghiệm?

- (A) Vô số. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Với $m = 1$ ta có phương trình $3 \sin x + 4 \cos x = 6$ (vô nghiệm.)

Với $m = 3$ ta có phương trình $3 \sin x + 4 \cos x = 8$ (vô nghiệm.)

Với mọi $m \neq 1$ và $m \neq 3$ thì ta thấy đồ thị hàm số $y = 3 \sin x + 4 \cos x$ và đồ thị hàm số bậc nhất $y = (m^3 - 4m + 3)x + m + 5$ luôn có ít nhất một giao điểm nên phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Vậy chỉ có 2 giá trị thực của m để phương trình đã cho vô nghiệm.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 66. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số của hàm số $y = \frac{\sin x + 2 \cos x - 1}{\sin x + \cos x + 2}$ lần lượt là:

(A) $M = 1; m = -2.$

(B) $M = 2; m = 1.$

(C) $M = 2; m = -1.$

(D) $M = \frac{-5 + \sqrt{33}}{2}; m = \frac{-5 - \sqrt{33}}{2}.$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y = \frac{\sin x + 2 \cos x - 1}{\sin x + \cos x + 2} &\Leftrightarrow y(\sin x + \cos x + 2) = \sin x + 2 \cos x - 1 \\ &\Leftrightarrow (y - 1) \sin x + (y - 2) \cos x = -1 - 2y \quad (*). \end{aligned}$$

Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} (y - 1)^2 + (y - 2)^2 &\geq (-1 - 2y)^2 \Leftrightarrow -2y^2 - 10y + 4 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-5 - \sqrt{33}}{2} \leq y \leq \frac{-5 + \sqrt{33}}{2}. \end{aligned}$$

Từ đó ta có $M = \frac{-5 + \sqrt{33}}{2}; m = \frac{-5 - \sqrt{33}}{2}.$

Chọn đáp án (D)

□

Câu 67. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\cot x}{\cos x - 1}.$

(A) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

(B) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

(C) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

(D) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 68. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{2}{\cos 3x + \cos x}.$

(A) $\mathcal{D} = \mathbb{R}.$

(B) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

(C) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

(D) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Lời giải.

Điều kiện $\cos 3x + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow 2 \cos 2x \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 69. Cho phương trình $\sqrt{5\sin x + \cos 2x} + 2\cos x = 0$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- (A) Phương trình vô nghiệm trên khoảng $(\pi; 2\pi)$.
 (B) Phương trình có nghiệm trên khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$.
 (C) Một họ nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 (D) Mọi nghiệm x_0 của phương trình đều thỏa mãn $\sin 3x_0 = 1$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sqrt{5\sin x + \cos 2x} + 2\cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \leq 0 \\ 5\sin x + \cos 2x = 4\cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Mặt khác, $\sin 3\left(\frac{5\pi}{6} + k2\pi\right) = \sin \frac{5\pi}{2} = 1$. nên mọi nghiệm x_0 của phương trình đều thỏa mãn $\sin 3x_0 = 1$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 70. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{\cot x}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1}$.

- (A) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi; -\frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
 (B) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
 (C) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{k2\pi; -\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
 (D) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi; -\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ (\cos x - 1)(2\cos x - 1) \neq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 1 \\ \cos x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq k2\pi \\ x \neq \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A)

□

Câu 71. Các họ nghiệm của phương trình $2\cos 2x + \sin x = \sin 3x$ có dạng $x = \alpha + 2k\pi; x = \beta + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$,

với $\alpha, \beta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Tính $P = \alpha\beta$.

- (A) $P = \frac{\pi^2}{4}$.
 (B) $P = \frac{3\pi^2}{4}$.
 (C) $P = \frac{\pi^2}{16}$.
 (D) $P = \frac{\pi^2}{8}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} & 2\cos 2x = 2\cos 2x \sin x \\ \Leftrightarrow & 2\cos 2x(1 - \sin x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \alpha\beta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Chọn đáp án (D)



Câu 72. Tập nghiệm S của phương trình $\tan^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan x - 1$ là

(A) $S = \left\{k2\pi, \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

(B) $S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

(C) $S = \left\{k2\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

(D) $S = \left\{k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$

PT $\Leftrightarrow \left(\frac{\sin x - \cos x}{\cos x + \sin x}\right)^3 = \tan x - 1$

$\Leftrightarrow \left(\frac{\tan x - 1}{1 + \tan x}\right)^3 = \tan x - 1, \quad \tan x \neq -1$

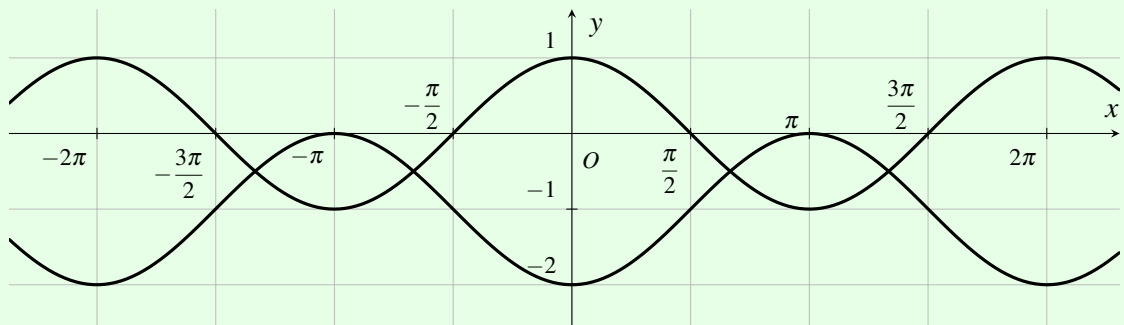
$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan^3 x + 2\tan^2 x + 5\tan x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Chọn đáp án (D)

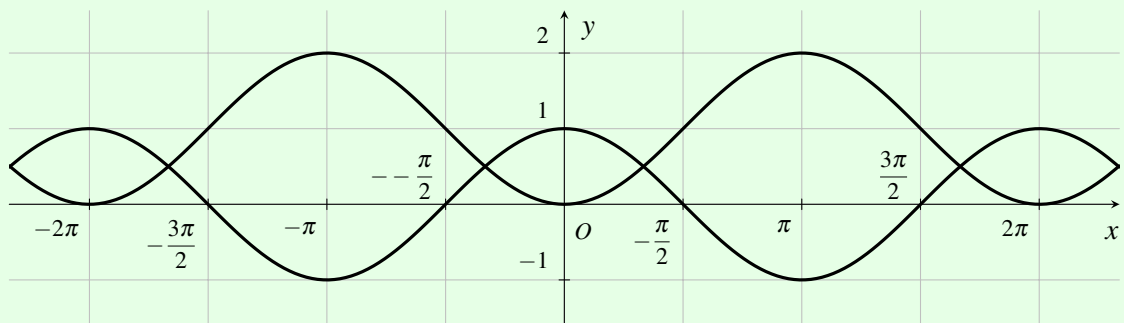


Câu 73. Đồ thị các hàm số $y = \sqrt{\frac{\cos 2x + 4\cos x + 3}{2}}$ và $y = \cos x$ là các đường cong trong hình nào dưới đây?

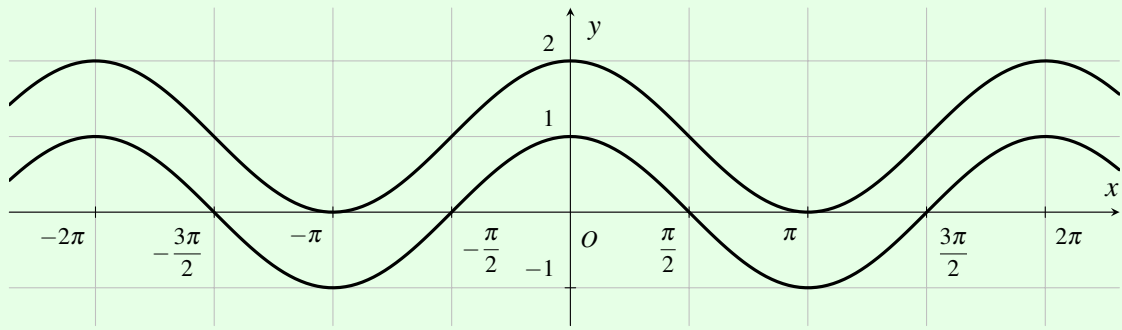
(A)



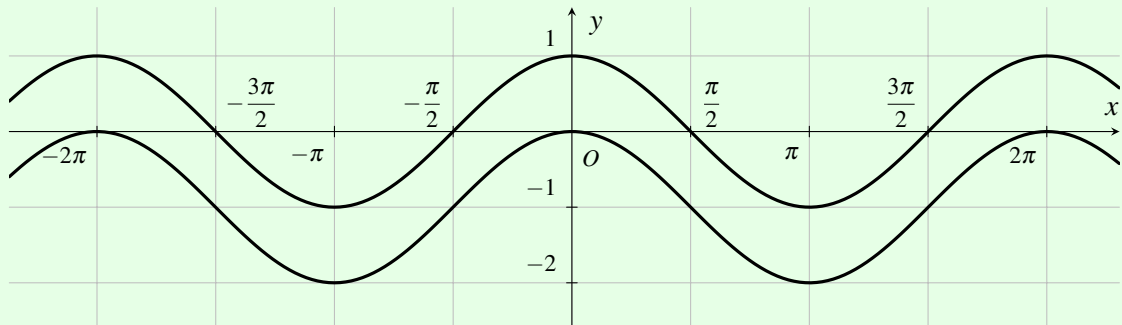
(B)



Ⓒ



Ⓓ



Lời giải.

Để thấy ở cả bốn phương án đều có đồ thị hàm $y = \cos x$.

$$\text{Ta có } y = \sqrt{\frac{\cos 2x + 4\cos x + 3}{2}} = \sqrt{(\cos x + 1)^2} = \cos x + 1.$$

Suy ra đồ thị hàm số $y = \sqrt{\frac{\cos 2x + 4\cos x + 3}{2}}$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = \cos x$ lên trên 1 đơn vị.

Chọn đáp án Ⓒ

□

Câu 74. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + \sin 2x$ lần lượt là:

Ⓐ $M = \frac{1}{2}$ và $m = -\frac{1}{2}$.

Ⓑ $M = 0$ và $m = -1$.

Ⓒ $M = \frac{1}{2}$ và $m = -\frac{3}{2}$.

Ⓓ $M = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$ và $m = -\sqrt{2} - \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y &= 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + \sin 2x \\ &= \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) + \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) + \sin 2x \\ &= \cos 2x + \sin 2x - \frac{1}{2} = \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ta có $-1 \leq \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$ nên $-\sqrt{2} - \frac{1}{2} \leq y \leq \sqrt{2} - \frac{1}{2}$.

Vậy $\max y = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$, đạt được khi $x = \frac{\pi}{8}$; $\min y = -\sqrt{2} - \frac{1}{2}$, đạt được khi $x = -\frac{3\pi}{8}$.

Chọn đáp án Ⓓ

□

Câu 75. Trong tất cả các nghiệm của phương trình $\sin x - \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$, gọi x_1, x_2 lần lượt là nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất. Biết rằng $x_1 + 3x_2 = \frac{a\pi}{b}$, với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính tổng $T = 2a + b$.

(A) $T = 15$.

(B) $T = 17$.

(C) $T = 5$.

(D) $T = 16$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) &= \sin \frac{\pi}{4} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{13\pi}{12} + k2\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Ta tìm được $x_1 = -\frac{11\pi}{12}$ và $x_2 = \frac{7\pi}{12}$. Lúc đó, $x_1 + 3x_2 = \frac{5\pi}{6}$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 76. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $2(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 4x + 2 \sin 2x + m = 0$ có ít nhất một nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

(A) $m \in \left[-\frac{1}{3}; 0\right]$.

(B) $m \in \left[-\frac{10}{3}; -2\right]$.

(C) $m \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$.

(D) $m \in \left[-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}\right]$.

Lời giải.

Ta có: $\sin^4 x + \cos 4x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$, $\cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x$.

Do đó phương trình đã cho tương đương với: $3 \sin^2 2x - 2 \sin 2x = m + 3$. (1)

Đặt $t = \sin 2x$, với $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ thì $t \in [0; 1]$.

Phương trình (1) trở thành $3t^2 - 2t = m + 3$. (2)

Xét hàm số $g(t) = 3t^2 - 2t$ trên đoạn $[0; 1]$. Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{3}$	1
$g'(t)$		0	+
$g(t)$	0	$-\frac{1}{3}$	1

Phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ khi phương trình (2) có nghiệm $t \in [0; 1]$, hay

$$-\frac{1}{3} \leq m + 3 \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{10}{3} \leq m \leq -2.$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 77. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhận được cho bởi hàm số

$$d(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{182}(t - 80) \right] + 12 \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

Vào ngày nào trong năm thì thành phố có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

- (A) Ngày thứ 172 trong năm. (B) Ngày thứ 171 trong năm.
(C) Ngày thứ 170 trong năm. (D) Ngày thứ 173 trong năm.

Lời giải.

Ngày có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất khi

$$\sin \left[\frac{\pi}{182}(t - 80) \right] = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t - 80) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = 171 + 364k (k \in \mathbb{Z}).$$

Suy ra $0 < 171 + 364k \leq 365 \Leftrightarrow k = 0$. Vậy $t = 171$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 78. Tập giá trị của hàm số $y = 3 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x - \cos^2 x + 1$ là

- (A) $[-2\sqrt{2} + 2; 2\sqrt{2} + 2]$. (B) $[-\sqrt{2}; \sqrt{2} + 1]$.
(C) $[0; 2]$. (D) $[-\sqrt{2} - 1; \sqrt{2} - 1]$.

Lời giải.

$$y = 3 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + 2 \sin 2x - \frac{1 + \cos 2x}{2} + 1 = 2 \sin 2x - 2 \cos 2x + 2 = 2\sqrt{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) + 2$$

Do đó: $-2\sqrt{2} + 2 \leq y \leq 2\sqrt{2} + 2$.

Vậy tập giá trị của hàm số là $T = [-2\sqrt{2} + 2; 2\sqrt{2} + 2]$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 79. Gọi x_0 là một nghiệm của phương trình $\sin 2x = \cos x$ trên $\left(\frac{\pi}{2}; \pi \right)$. Tính giá trị của biểu thức $S = \sin x_0 + \sin 2x_0 + \sin 3x_0 + \dots + \sin 2018x_0$.

- (A) $S = 0$. (B) $S = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$. (C) $S = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$. (D) $S = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

- Trên $\left(\frac{\pi}{2}; \pi \right)$ thì $\cos x < 0$ nên $\sin 2x = \cos x \Leftrightarrow 2 \sin x \cdot \cos x = \cos x \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6}$.
- Với $x_0 = \frac{5\pi}{6}$ thì $\sin kx_0 + \sin(k+6)x_0 = \sin kx_0 + \sin(kx_0 + 5\pi) = \sin kx_0 - \sin kx_0 = 0$. Suy ra $\sin kx_0 + \sin(k+1)x_0 + \sin(k+2)x_0 + \dots + \sin(k+6)x_0 + \sin(k+7)x_0 + \dots + \sin(k+11)x_0 = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$.
Vậy $S = \sin x_0 + \sin 2x_0 + (\sin 3x_0 + \dots + \sin 14x_0) + (\sin 15x_0 + \dots + \sin 26x_0) + \dots + (\sin 2007x_0 + \dots + \sin 2018x_0) = \sin x_0 + \sin 2x_0 = \frac{1}{2} + \frac{-\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 80. Tập nghiệm S của phương trình $\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \sin^3 3x + \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) \cos^3 x = 0$ là

- (A) $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. (B) $S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
(C) $S = \left\{ -\frac{\pi}{4} \right\}$. (D) $S = \left\{ -\frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải.

$$PT \Leftrightarrow (\sin x + \cos x) \sin^3 3x + (\cos 3x - \sin 3x) \cos^3 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x) \sin^3 3x = (\sin 3x - \cos 3x) \cos^3 x \quad (*)$$

- $\cos x = 0, \sin 3x = 0$ không thỏa mãn.
- Với $\cos x \neq 0, \sin 3x \neq 0$, chia hai vế cho $\cos^3 x \cdot \sin^3 3x$ ta có

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \frac{\sin x + \cos x}{\cos^3 x} = \frac{\sin 3x - \cos 3x}{\sin^3 3x} \\ &\Leftrightarrow \tan x(1 + \tan^2 x) + (1 + \tan^2 x) = (1 + \cot^2 3x) - \cot 3x(1 + \cot^2 3x) \\ &\Leftrightarrow (1 + \tan x)(1 + \tan^2 x) = (1 - \cot 3x)(1 + \cot^2 3x) \\ &\Leftrightarrow (1 + \tan x)(1 + \tan^2 x) = (1 + \cot(-3x))(1 + \cot^2(-3x)) \quad (**)\end{aligned}$$

Xét hàm số $y = f(t) = (1+t)(1+t^2) = t^3 + t^2 + t + 1, t \in \mathbb{R}$.

- **Cách 1:** Với mọi $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ ta có $f(t_2) - f(t_1) = (t_2 - t_1)(t_2^2 + t_2 t_1 + t_1^2 + t_2 + t_1 + 1)$.
Suy ra $2(f(t_2) - f(t_1)) = (t_2 - t_1)((t_2 + t_1)^2 + (t_2 + 1)^2 + (t_1 + 1)^2)$.
Vậy $f(t_2) - f(t_1) = 0 \Leftrightarrow t_2 = t_1$. Suy ra

$$(**) \Leftrightarrow f(\tan x) = f(\cot(-3x)) \Leftrightarrow \tan x = \cot(-3x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 3x + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

- **Cách 2:** Ta có $f'(t) = 3t^2 + 2t + 1 > 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra

$$(**) \Leftrightarrow f(\tan x) = f(\cot(-3x)) \Leftrightarrow \tan x = \cot(-3x) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Chọn đáp án (D)



Câu 81. Tính tổng S của tất cả các nghiệm của phương trình $\cos 2x \cos x = 1 + \sin 2x \sin x$ trên đoạn $[-\pi; 4\pi]$.

- (A) $S = 5\pi$. (B) $S = 3\pi$. (C) $S = 4\pi$. (D) $S = 6\pi$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\cos 2x \cos x &= 1 + \sin 2x \sin x \\ \Leftrightarrow \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x &= 1 \\ \Leftrightarrow \cos x &= 1.\end{aligned}$$

Vì $x \in [-\pi; 4\pi]$ nên ta có các nghiệm là $x = 0; x = 2\pi; x = 4\pi$. Vậy $S = 6\pi$.

Chọn đáp án (D)



Câu 82. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $2\sin^2 2x - 3\sin 2x + m - 1 = 0$ có đúng hai nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

- (A) $m \in \left[2; \frac{17}{8}\right]$. (B) $m \in \left(1; \frac{17}{8}\right)$. (C) $m \in (1; 2)$. (D) $m \in \left[2; \frac{17}{8}\right]$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin 2x$, với $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow 2x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0; 1]$.

Phương trình đã cho trở thành: $-2t^2 + 3t + 1 = m$. (1)

Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ nếu phương trình (1) có đúng hai nghiệm $t \in [0; 1]$. Xét hàm số $g(t) = -2t^2 + 3t + 1$ trên đoạn $[0; 1]$. Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{3}{4}$	1
$g'(t)$	+	0	-
$g(t)$	1	$\frac{17}{8}$	2

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình $g(t) = m$ có hai nghiệm trên đoạn $[0; 1]$ khi $2 \leq m < \frac{17}{8}$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 83. Tập tất cả những giá trị thực của m để phương trình $m \cos x + \cos 3x = 1 + \cos 2x$ có tám nghiệm phân biệt trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$ là khoảng $(a; b)$. Tính giá trị $P = b - a$.

- (A) 2. (B) $\frac{9}{4}$. (C) $\frac{25}{4}$. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $m \cos x + \cos 3x = 1 + \cos 2x \Leftrightarrow \cos x(4 \cos^2 x - 2 \cos x - 3 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 4 \cos^2 x - 2 \cos x - 3 + m = 0. \end{cases}$ Phương

trình $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, vì $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right) \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$.

Đặt $t = \cos x$.

- Với $0 < t < 1 \Rightarrow \cos x = t$ có nghiệm $x = \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $x = -\alpha$, $x = \alpha + 2\pi$, $x = -\alpha + 2\pi$.
- Với $-1 < t < 0 \Rightarrow \cos x = t$ có nghiệm $x = \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ và $x = 2\pi - \alpha$.
- Với $t = 0 \Rightarrow \cos x = t = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$.
- Với $t = -1 \Rightarrow \cos x = t = -1 \Leftrightarrow x = \pi$.
- Với $t = 1 \Rightarrow \cos x = t = 1 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2\pi$

Phương trình ban đầu có 8 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $4 \cos^2 x - 2 \cos x - 3 + m = 0$ có 6 nghiệm, tương đương với phương trình $f(t) = 4t^2 - 2t - 3 + m = 0$ có hai nghiệm thỏa mãn $-1 < t_1 < 0 < t_2 < 1$ hoặc $0 < t_1 < t_2 = 1$.

- $-1 < t_1 < 0 < t_2 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) > 0 \\ f(1) > 0 \\ f(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0 \\ m + 3 > 0 \\ m - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 3.$
- $0 < t_1 < t_2 = 1$, khi đó $t = 1$ là nghiệm của phương trình, suy ra $m = 1$, phương trình trở thành $4t^2 - 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$ không thỏa mãn $0 < t_1 < t_2 = 1$.

Vậy $m \in (1; 3) \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow b - a = 2.$

Chọn đáp án (A)

□

Câu 84. Cho phương trình $\sin x \cos x = 2(\sin^4 x + \cos^4 x) - \frac{3}{2}$. Tính tổng S tất cả các nghiệm thuộc $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ của

phương trình đã cho.

(A) $S = \frac{\pi}{2}$.

(B) $S = \frac{\pi}{12}$.

(C) $S = \frac{5\pi}{12}$.

(D) $S = \frac{5\pi}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4x}{4}$. Khi đó

$$\sin x \cos x = 2(\sin^4 x + \cos^4 x) - \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{2} \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 4x \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{4} - k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Suy ra các nghiệm thuộc $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là $\frac{5\pi}{12}; \frac{\pi}{12}$. Vậy $S = \frac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 85. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \cot(\sin x)$ và trục hoành.

(A) 1.

(B) Vô số.

(C) 2.

(D) 0.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \cot(\sin x)$ và trục hoành:

$$\cot(\sin x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Phải có $-1 \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \leq 1 \Leftrightarrow k \in \emptyset$. Do đó phương trình vô nghiệm.

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \cot(\sin x)$ và trục hoành là 0.

Chọn đáp án (D) □

Câu 86. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm

$$\sin^6 x + \cos^6 x = m(\sin^4 x + \cos^4 x).$$

(A) $\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}$.

(B) $\frac{1}{2} \leq m \leq 1$.

(C) $m \in (-\infty; 1] \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

(D) $m \in (-\infty; 1]$.

Lời giải.

Ta có:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$= 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x.$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x.$$

Vậy phương trình đã cho tương đương với:

$$1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = m \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \right) \Leftrightarrow 4 - 3\sin^2 2x = 4m - 2m\sin^2 2x$$

$$\Leftrightarrow (2m-3)\sin^2 2x = 4m-4. \quad (1)$$

- Khi $2m-3=0 \Leftrightarrow m=\frac{3}{2}$, phương trình (1) trở thành

$$0 \cdot \sin^2 2x = 2 \text{ (vô nghiệm).}$$

- Khi $m \neq \frac{3}{2}$, phương trình (1) trở thành:

$$\sin^2 2x = \frac{4m-4}{2m-3}. \quad (2)$$

Phương trình (2) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{4m-4}{2m-3} \leq 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4m-4}{2m-3} \geq 0 \\ \frac{4m-4}{2m-3} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; 1] \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right) \\ \frac{2m-1}{2m-3} \leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; 1] \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right) \\ m \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\frac{1}{2} \leq m \leq 1$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 87. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos^2 x - 2m \cos x + 6m - 9 = 0$ có nghiệm $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

(A) $\frac{3}{2} < m \leq 2$.

(B) $\frac{3}{2} \leq m \leq 2$.

(C) $m \leq 2$.

(D) $m = 2$.

Lời giải.

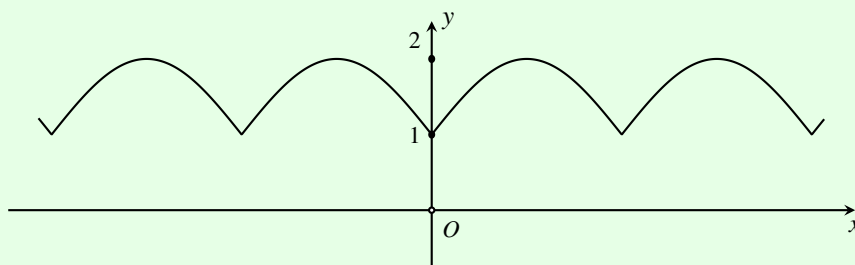
Phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} \cos x = 3 \text{ (loại)} \\ \cos x = 2m - 3. \end{cases}$

Phương trình đã cho có nghiệm thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 0 < 2m - 3 \leq 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} < m \leq 2$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 88. Hình sau là đồ thị hàm số nào trong các hàm số dưới đây?



(A) $y = 1 + |\sin x|$.

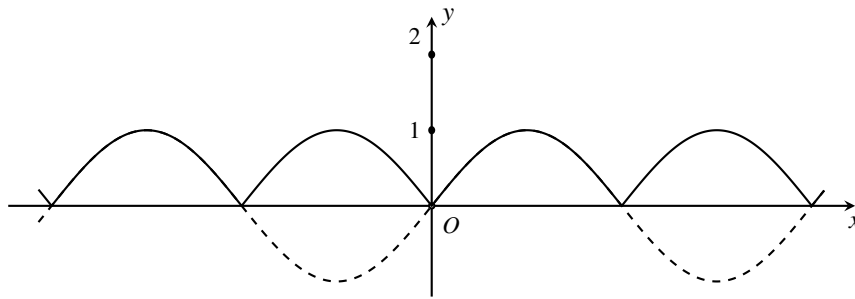
(B) $y = 1 + |\cos x|$.

(C) $y = 1 + \sin |x|$.

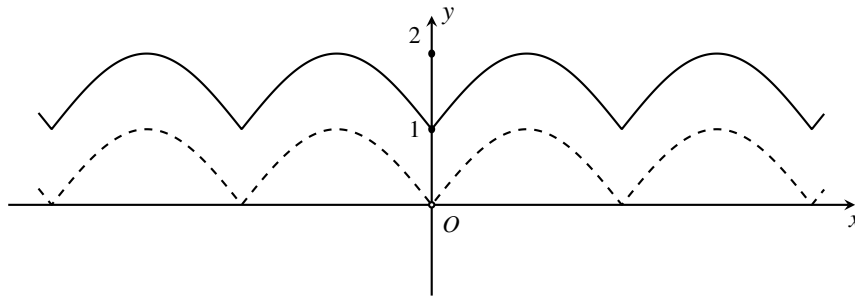
(D) $y = 1 + |\sin |x||$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = \sin x$, giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = \sin x$ nằm phía trên trục hoành và lấy đối xứng phần bên dưới trục hoành qua trục hoành ta được đồ thị hàm số $y = |\sin x|$ như hình sau:



Sau đó dịch chuyển phần đồ thị này lên trên theo phương thẳng đứng một đơn vị, ta được đồ thị như hình trong đề bài.



Vậy ta khẳng định hàm số cần tìm là hàm $y = 1 + |\sin x|$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 89. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m^2 - 3) \sin 3x - \cos^2 3x + m^2 - 3 = 0$ có đúng 4 nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$.

(A) Không có m .

(B) $m = -2$.

(C) $m = \pm 2$.

(D) $m = 2$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $\sin^2 3x + (m^2 - 3) \sin 3x + m^2 - 4 = 0$.

Đặt $t = \sin 3x, |t| \leq 1$ ta được phương trình $t^2 + (m^2 - 3)t + m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 4 - m^2 \end{cases}$.

Với $t = -1 \Rightarrow \sin 3x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. Do $x \in \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$ nên $x = \frac{7\pi}{6}$.

ycbt $\Leftrightarrow \sin 3x = 4 - m^2$ có đúng 3 nghiệm khác $\frac{7\pi}{6}$ thuộc $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$.

Vì $x \in \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right] \Rightarrow 3x \in [2\pi; 4\pi]$ nên điều kiện là $\sin 3x = 4 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 90. Cho phương trình $(1 + \cos x)(\cos 4x - m \cos x) = m \sin^2 x$. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

(A) $m \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

(B) $m \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right)$.

(C) $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

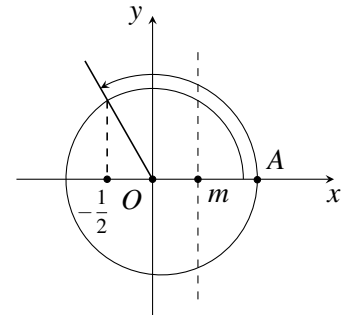
(D) $m \in (-1; 1)$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} (1 + \cos x)(\cos 4x - m \cos x) &= m(1 - \cos x)(1 + \cos x) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \cos x = 0 \\ \cos 4x - m \cos x = m - m \cos x \end{cases} \\ \Leftrightarrow \cos 4x = m &\quad \left(\text{do } 1 + \cos x > 0, \forall x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right] \right) \end{aligned}$$

Do $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ nên $4x \in \left[0; \frac{8\pi}{3}\right]$. Hình vẽ bên biểu diễn cung lượng giác có số đo $\frac{8\pi}{3}$. Phương trình đã cho có hai nghiệm khi và chỉ khi đường thẳng thẳng $x = m$ cắt cung lượng giác đó tại 3 điểm. Vậy $-\frac{1}{2} \leq m < 1$.



Chọn đáp án (B)

□

Câu 91. Với mỗi cặp $(a; b)$ ($a, b \in \mathbb{R}$), ta đặt $M(a; b)$ là giá trị lớn nhất của $f(x) = |\cos x + a \cos 2x + b \cos 3x|$. Gọi $M = \min_{a, b \in \mathbb{R}} M(a; b)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $M \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. (B) $M \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$. (C) $M \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$. (D) $M \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

Lời giải.

$$\max f(x) \geq \max \left\{ f\left(\frac{\pi}{3}\right); f\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right\} = \max \left\{ \left| \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2} \right|; \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2} \right| \right\} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Do đó } M(a; b) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow M \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mặt khác xét $g(x) = \cos x - \frac{1}{6} \cos 3x$.

$$\text{Ta có: } g'(x) = 0 \Leftrightarrow -\sin x + \frac{1}{2} \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 4 \sin^3 x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}.$$

$$g(k\pi) = \frac{5}{6}, g\left(\pm \frac{\pi}{6} + k\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Vậy } \max g(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ hay } M \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Như vậy ta có $M = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 92. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\sin^6 x + \cos^6 x = m$ có nghiệm.

- (A) $m \in [0; \sqrt{2}]$. (B) $m \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$. (C) $m \in [0; 1]$. (D) $m \in [1; \sqrt{2}]$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right).$$

$$\text{Phương trình đã cho tương đương với } \cos 4x = \frac{8m - 5}{3}.$$

$$\text{Phương trình đã cho có nghiệm khi } -1 \leq \frac{8m - 5}{3} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq m \leq 1.$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 93. Tìm m để bất phương trình $\sin x + \cos x \leq m + \sin 2x$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

(A) $m \geq \frac{5}{4}$.

(B) $m \geq \sqrt{2} - 1$.

(C) $m > \frac{5}{4}$.

(D) $m \geq -\sqrt{2} - 1$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Điều kiện $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$. Khi đó:

$$t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1.$$

Bất phương trình đã cho trở thành:

$$t \leq m + t^2 - 1 \Leftrightarrow m \geq -t^2 + t + 1. \quad (1)$$

Yêu cầu bài toán là (1) nghiệm đúng với mọi $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Do đồ thị hàm số $f(t) = -t^2 + t + 1$ là một Parabol có đỉnh là $I\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$, bề lõm hướng xuống nên ta có bảng biến thiên như sau

t	$-\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$
$-t^2 + t + 1$	$-\sqrt{2} - 1$	$\frac{5}{4}$	$-\sqrt{2} + 1$

Vậy yêu cầu bài toán là $m \geq \frac{5}{4}$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 94. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt[3]{4 \sin x + m} + \sin x = \sqrt[3]{\sin^3 x + 4 \sin x + m - 8} + 2$ có nghiệm thực?

(A) 22.

(B) 18.

(C) 21.

(D) 20.

Lời giải.

Đặt $a = \sqrt[3]{4 \sin x + m}$ và $b = \sqrt[3]{\sin^3 x + 4 \sin x + m - 8}$.

Khi đó: $a^3 + \sin^3 x = b^3 + 8$ và

$$\begin{aligned} a + \sin x = b + 2 &\Leftrightarrow (a + \sin x)^3 = (b + 2)^3 \\ &\Leftrightarrow a^3 + \sin^3 x + 3a \sin x(a + \sin x) = b^3 + 8 + 3 \cdot b \cdot 2(b + 2) \\ &\Leftrightarrow (a + \sin x)(a \sin x - 2b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + \sin x = 0 \\ a \sin x - 2b = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

TH 1. $a + \sin x = 0 \Leftrightarrow m = -\sin^3 x - 4 \sin x$.

Do $\sin x \in [-1; 1]$ nên $-\sin^3 x - 4 \sin x \in [-5; 5]$ hay phương trình có nghiệm khi $m \in [-5; 5]$.

TH 2. $a \sin x - 2b = 0 \Leftrightarrow \sin^3 x(4 \sin x + m) = 8(\sin^3 x + 4 \sin x + m - 8)$

$$\Leftrightarrow (8 - \sin^3 x)m = 4 \sin^4 x - 8 \sin^3 x - 32 \sin x + 64 \Leftrightarrow (8 - \sin^3 x)m = 4(\sin x - 2)(\sin^3 - 8)$$

$$\Leftrightarrow m = 8 - 4 \sin x.$$

Do $\sin x \in [-1; 1]$ nên $(8 - 4 \sin x) \in [4; 12]$ hay phương trình có nghiệm khi $m \in [4; 12]$.

Từ hai trường hợp ta thu được $m \in [-5; 12]$ hay có 18 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 95. Giải phương trình $2(\tan x - \sin x) + 3(\cot x - \cos x) + 5 = 0$.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{\text{A}} \quad & \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \\
 \textcircled{\text{B}} \quad & \begin{cases} x = \arctan\left(-\frac{3}{2}\right) + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \\
 \textcircled{\text{C}} \quad & \begin{cases} x = \arctan\left(-\frac{3}{2}\right) + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + k2\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \\
 \textcircled{\text{D}} \quad & \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right) + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right) + k2\pi \\ x = \arctan\left(-\frac{3}{2}\right) + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

Lời giải.

Điều kiện $\sin 2x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 & 2\sin x(\sin x - \sin x \cos x) + 3\cos x(\cos x - \sin x \cos x) + 5\sin x \cos x = 0 \\
 \Leftrightarrow & (2\sin x + 3\cos x)(\sin x + \cos x - \sin x \cos x) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 2\sin x + 3\cos x = 0 & (1) \\ \sin x + \cos x - \sin x \cos x = 0 & (2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Giải (1): Do $\cos x = 0$ không thỏa mãn (1) nên (1) tương đương với

$$\tan x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \arctan\left(-\frac{3}{2}\right) + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Giải (2): Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Khi đó, (2) trở thành

$$t - \frac{t^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + \sqrt{2} \text{ (loại)} \\ t = 1 - \sqrt{2}. \end{cases}$$

$$\text{Ta có } t = 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Chọn đáp án $\textcircled{\text{A}}$

□

Câu 96. Tìm số nghiệm của phương trình $\cos(3\pi \sin x) = \cos(\pi \sin x)$ trên đoạn $[-\pi; 4\pi]$.

(A) 22.

(B) 20.

(C) 21.

(D) 19.

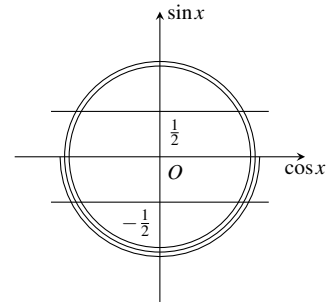
Lời giải.

$$\cos(3\pi \sin x) = \cos(\pi \sin x) \Leftrightarrow 3\pi \sin x = \pm \pi \sin x + k2\pi \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = k \\ \sin x = \frac{k}{2} \end{cases}$$

Vì $-1 \leq \sin x \leq 1$ và $k \in \mathbb{Z}$ nên $\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \pm 1 \\ \sin x = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$. Dựa vào đường tròn lượng giác, phương

trình có 21 nghiệm trên đoạn $[-\pi; 4\pi]$.

$$\text{Hoặc } \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Rightarrow k \text{ có 21 giá trị.}$$



Chọn đáp án (C)

□

Câu 97. Cho phương trình $m(\sin x + \cos x) + \sin 2x = 0$. Tìm m để phương trình có đúng 2 nghiệm thuộc $[0; \pi]$.

(A) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq m \leq 0$.

(B) $0 \leq m \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(C) $-\sqrt{2} \leq m \leq 0$.

(D) $0 \leq m \leq \sqrt{2}$.

Lời giải.

$$\text{Đặt } \sin x + \cos x = t, |t| \leq \sqrt{2}, \text{ suy ra } \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

Khi đó, phương trình đã cho trở thành: $mt + t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + mt - 1 = 0$ (1).

Với $x \in [0; \pi]$ thì:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq \pi &\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4} \\ &\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow -1 \leq t \leq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Vậy để phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm thuộc $[0; \pi]$ thì (1) có đúng 2 nghiệm thỏa $-1 \leq t \leq \sqrt{2}$. Nghĩa là ta cần có:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \Delta > 0 \\ -1 \leq t_1 < t_2 \leq \sqrt{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4 > 0 \\ (t_1 + 1)(t_2 + 1) \geq 0 \\ t_1 + t_2 + 2 \geq 0 \\ (t_1 - \sqrt{2})(t_2 - \sqrt{2}) \geq 0 \\ t_1 + t_2 - 2\sqrt{2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 + t_1 t_2 + 1 \geq 0 \\ t_1 + t_2 + 2 \geq 0 \\ t_1 t_2 - \sqrt{2}(t_1 + t_2) + 2 \geq 0 \\ t_1 + t_2 - 2\sqrt{2} \leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -m - 1 + 1 \geq 0 \\ -m + 2 \geq 0 \\ -1 + \sqrt{2}m + 2 \geq 0 \\ -m - 2\sqrt{2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \leq 2 \\ m \geq \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ m \geq -2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-\sqrt{2}}{2} \leq m \leq 0. \end{aligned}$$

Vậy $\frac{-\sqrt{2}}{2} \leq m \leq 0$ là giá trị cần tìm của m .

Chọn đáp án (A)

□

Câu 98. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để phương trình $\sqrt[3]{m+3\sqrt[3]{m+3\cos x}} = \cos x$ có nghiệm thực?

(A) 5.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 7.

Lời giải.

- Ta có: $\sqrt[3]{m+3\sqrt[3]{m+3\cos x}} = \cos x \Leftrightarrow m+3\sqrt[3]{m+3\cos x} = \cos^3 x$.
- Đặt $\sqrt[3]{m+3\cos x} = u \Rightarrow m+3\cos x = u^3$ thì phương trình trên trở thành $m+3u = \cos^3 x$.
- Đặt $\cos x = v$ thì ta được

$$\begin{cases} m+3v = u^3 \\ m+3u = v^3 \end{cases} \Rightarrow 3(v-u) + (v-u)(v^2+uv+u^2) = 0 \Leftrightarrow (v-u)(3+v^2+uv+u^2) = 0.$$

Do $3+v^2+uv+u^2 > 0, \forall u, v$ nên phương trình trên tương đương $u = v$.
Suy ra $\sqrt[3]{m+3\cos x} = \cos x \Leftrightarrow m = \cos^3 x - 3\cos x$.

- Đặt $\cos x = t, (-1 \leq t \leq 1)$ và xét hàm $f(t) = t^3 - 3t$ trên $[-1; 1]$.
Ta có $f'(t) = 3t^2 - 3 \leq 0, \forall t \in [-1; 1]$.
Nên hàm số nghịch biến trên $[-1; 1] \Rightarrow -1 = f(1) \leq f(t) \leq f(-1) = 2 \Rightarrow -2 \leq m \leq 2$.
- Vậy $m \in \{-2; -1\}$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 99. Cho $m < p$ là hai số nguyên dương trong đó m chẵn, p lẻ. Gọi n là số nghiệm của phương trình $\sin mx + \sin px = 0$ trên khoảng $(0; \pi)$. Tính giá trị của n theo m và p .

(A) $p - m$.

(B) $2p - m - 3$.

(C) $p - 1$.

(D) $m - 1$.

Lời giải.

$$\sin mx + \sin px = 0 \Leftrightarrow \sin px = \sin(-mx) \Leftrightarrow x = \frac{k2\pi}{m+p} \text{ hoặc } x = \frac{\pi}{p-m} + \frac{k2\pi}{p-m}.$$

- $0 < \frac{k2\pi}{m+p} < \pi \Leftrightarrow 0 < k < \frac{m+p}{2} \Leftrightarrow k = 1, 2, \dots, \frac{m+p-1}{2}$.
- $0 < \frac{\pi}{p-m} + \frac{k2\pi}{p-m} < \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{p-m-1}{2} \Leftrightarrow k = 0, 1, \dots, \frac{p-m-3}{2}$.
- Giả sử tồn tại hai số nguyên r, s sao cho $\frac{r2\pi}{m+p} = \frac{\pi}{p-m} + \frac{s2\pi}{p-m} \Rightarrow 2r(p-m) = (1+2s)(p+m)$, do p lẻ, m chẵn nên không thể xảy ra đẳng thức.

Vậy phương trình có $\frac{m+p-1}{2} + \frac{p-m-3}{2} + 1 = p - 1$ nghiệm.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 100. Cho phương trình $\sin 2x + 2\sqrt{2}m(\sin x - \cos x) + 1 - 4m = 0$. Tìm m để tập nghiệm của phương trình được biểu diễn bởi nhiều hơn 1 điểm trên đường tròn lượng giác?

(A) $0 \leq m < 1$.

(B) $m < -\frac{1}{2} \vee m \geq \frac{1}{2}$.

(C) $-\frac{1}{2} \leq m < \frac{1}{2}$.

(D) $m < 0 \vee m \geq 1$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $|t| \leq \sqrt{2}$.

Khi đó, phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 - 2\sqrt{2}mt + 4m - 2 = 0$$

$$\Delta' = 2m^2 - 4m + 2 = 2(m-1)^2$$

Suy ra phương trình có nghiệm là: $t = \sqrt{2}$ hoặc $t = \sqrt{2}(2m-1)$.

- $t = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Những nghiệm này được biểu diễn bởi 1 điểm trên đường tròn lượng giác.
- $t = \sqrt{2}(2m-1)$ nhận được khi $|t| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow |2m-1| \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1$.
Do đó, để tập nghiệm của phương trình có nhiều hơn 1 điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác thì m phải thỏa 2 điều kiện:

$$\begin{cases} 0 \leq m \leq 1 \\ \sqrt{2}(2m-1) \neq \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 1.$$

Vậy $0 \leq m < 1$ thì tập nghiệm của phương trình được biểu diễn nhiều hơn 1 điểm trên đường tròn lượng giác.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 101. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

- (A) 0. (B) $\frac{1}{2}$. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $y = \sin^4 x + \cos^4 x = \sin^4 x + (1 - \sin^2 x)^2 = 2\sin^4 x - 2\sin^2 x + 1$.

Đặt $u = \sin^2 x$, ta có $0 \leq u \leq 1$.

Do đó $y = f(u) = u^2 - 2u + 1$.

$$\min_{x \in [0; \frac{\pi}{2}]} y = \min_{u \in (0; 1)} f(u) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $u = \frac{1}{2}$ hay $x = \frac{\pi}{4}$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 102. Tìm tập giá trị của m để phương trình $2\sin^2 x - m\sin 2x + (m+1)\cos^2 x = 1$ **không** có 2 nghiệm thuộc $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

- (A) $(-\infty; 1]$. (B) $[0; 1]$. (C) $(-\infty; 0)$. (D) $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Phương trình $\Leftrightarrow \sin^2 x - 2m\sin x \cos x + m\cos^2 x = 0$.

Nhận thấy $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

Với $\cos x \neq 0$, chia cả hai vế cho $\cos^2 x$ ta được $\tan^2 x - 2m\tan x + m = 0$.

Đặt $t = \tan x$, với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $t > 0$. Phương trình trở thành $t^2 - 2mt + m = 0$.

Để phương trình có hai nghiệm thuộc $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì phương trình theo ẩn t phải có hai nghiệm thuộc $(0; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m > 0 \\ 2m > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

Vậy để phương trình đã cho không có 2 nghiệm thuộc $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $m \leq 1$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 103. Định tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos^4 x + (1 - \cos x)^4 = m$ vô nghiệm.

- (A) $m \leq 0$. (B) $m < 0$ hoặc $m > 2$. (C) $m < \frac{1}{8}$. (D) $m < \frac{1}{8}$ hoặc $m > 17$.

Lời giải.

Đặt $t = \frac{1}{2} - \cos x$, ta có $t^2 \in \left[0; \frac{9}{4}\right]$. Phương trình đã cho trở thành $2t^4 + 3t^2 + \frac{1}{8} - m = 0$ (*). Yêu cầu bài toán tương đương với các trường hợp sau đây

- TH1: Phương trình (*) vô nghiệm, tương ứng với $m < -1$;
- TH2: Phương trình (*) có các nghiệm đều âm, tương ứng với $-1 \leq m < \frac{1}{8}$;
- TH3: Phương trình (*) có một nghiệm lớn hơn $\frac{9}{4}$, từ đó tìm được $m > 17$.

Như vậy, $m < \frac{1}{8}$ hoặc $m > 17$ là các giá trị cần tìm của tham số m .

Chọn đáp án (D)

□

Câu 104. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số của hàm số $y = \frac{\cos x - 2 \sin x}{2 - \sin x}$ lần lượt là:

- (A) $M = \frac{1}{2}; m = -\frac{1}{2}$. (B) $M = \frac{1}{2}; m = -2$.
(C) $M = \frac{-2 + \sqrt{19}}{3}; m = \frac{-2 - \sqrt{19}}{3}$. (D) $M = 1; m = -\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y = \frac{\cos x - 2 \sin x}{2 - \sin x} \Leftrightarrow y(2 - \sin x) = \cos x - 2 \sin x \Leftrightarrow (y - 2) \sin x + \cos x = 2y$ (*).

Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} (y - 2)^2 + 1 &\geq (2y)^2 \Leftrightarrow y^2 - 4y + 4 + 1 \geq 4y^2 \\ &\Leftrightarrow 3y^2 + 4y - 5 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-2 - \sqrt{19}}{3} \leq y \leq \frac{-2 + \sqrt{19}}{3}. \end{aligned}$$

Từ đó ta có $M = \frac{-2 + \sqrt{19}}{3}; m = \frac{-2 - \sqrt{19}}{3}$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 105. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{\sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$.

- (A) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$. (B) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
(C) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. (D) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải.

Điều kiện $\cos^2 x - \sin^2 x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 106. Tổng giá trị lớn nhất với giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \sin^2 x + \sin x \cos x + 2 \cos^2 x$ là

- (A) $\frac{3}{2}$. (B) $\sqrt{2}$. (C) 3. (D) $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

$$A = 1 + \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} (\sin 2x + \cos 2x).$$

$$\forall 1 - \sqrt{2} \leq \sin 2x + \cos 2x \leq \sqrt{2} \text{ nên } \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq A \leq \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } \min A + \max A = 3.$$

Chọn đáp án (C)

□

Câu 107. Xét phương trình $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$. Gọi M, m lần lượt là nghiệm lớn nhất và nhỏ nhất của phương trình trong khoảng $(0; 100\pi)$. Tính tổng $M + m$.

(A) 98π .

(B) 101π .

(C) 100π .

(D) 99π .

Lời giải.

$$\text{Phương trình tương đương với } 2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -2 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Phương trình } \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi.$$

$$\text{Trong khoảng } (0; 100\pi) \text{ giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của họ nghiệm } x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \text{ lần lượt là } \frac{2\pi}{3} \text{ và } \frac{296\pi}{3}.$$

$$\text{Trong khoảng } (0; 100\pi) \text{ giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của họ nghiệm } x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \text{ lần lượt là } \frac{4\pi}{3} \text{ và } \frac{298\pi}{3}.$$

$$\text{Vậy } M + m = 100\pi.$$

Chọn đáp án (C)

□

Câu 108. Phương trình $\frac{1 + \cos 2x}{\cos x} = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$ tương đương với

(A) $\begin{cases} x = \frac{k\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}). \\ x = \frac{\pi}{2} - k2\pi \end{cases}$

(B) $1 - \cos^2 2x = \sin 2x \cos x.$

(C) $\sin 2x(\sin 2x + \cos x) = 0.$

(D) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} - k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Lời giải.

Điều kiện: $\sin x \cos x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương

$$\frac{2\cos^2 x}{\cos x} = \frac{2\sin x \cos x}{2\sin^2 x} \Leftrightarrow 2\sin x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi. \end{cases}$$

Chọn đáp án (D)

□

Câu 109. Xét phương trình $\cos^2 x + (a + b)\cos x + 2a - b = 0$ với a, b là tham số. Có bao nhiêu bộ số thực (a, b) để các nghiệm của phương trình đã cho có điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác là ba đỉnh của một tam giác đều?

(A) 2.

(B) 0.

(C) Vô số.

(D) 1.

Lời giải.

$$\text{Đặt } t = \cos x, \text{ ta được phương trình } t^2 + (a + b)t + 2a - b = 0 \quad (1).$$

Các điểm biểu diễn các họ nghiệm của phương trình $\cos x = t$ đối xứng nhau qua trục Ox .

Từ giả thiết, phương trình (1) phải có một nghiệm $t = 1$ và một nghiệm $t = -\frac{1}{2}$ hoặc $t = -1$ và một nghiệm $t = \frac{1}{2}$.

Từ đó có hai hệ phương trình $\begin{cases} a+b = -\frac{1}{2} \\ 2a-b = -\frac{1}{2} \end{cases}$ và $\begin{cases} a+b = \frac{1}{2} \\ 2a-b = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Giải các hệ này, được 2 bộ số (a, b) .

Chọn đáp án (A)

□

Câu 110. Xét phương trình $2\sin^2 x + (m^2 - 1)\sin x + 2m + 1 = 0$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình đã cho trên đường tròn lượng giác là bốn đỉnh của một hình chữ nhật?

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x$, được phương trình $2t^2 + (m^2 - 1)t + 2m + 1 = 0$ (1).

Các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $\sin x = t$ đối xứng nhau qua trục Oy .

Từ giả thiết, phải có hai điểm biểu diễn nghiệm của phương trình đối xứng nhau qua gốc tọa độ, từ đó phương trình (1) phải có hai nghiệm đối nhau, từ đó có $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Với $m = 1$ thì (1) trở thành $2t^2 + 3 = 0$. Phương trình này vô nghiệm.

Với $m = -1$ thì (1) trở thành $2t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Để thấy các nghiệm của phương trình thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 111. Giải phương trình $\tan^2 x = \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sin^3 x}$.

(A) $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{-1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{-1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

$\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$

(B) $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{-1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{-1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

$\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{-1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{-1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

$\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$

(D) $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{-1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{-1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

$\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện $\cos x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} &= \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sin^3 x} \\ \Leftrightarrow (1 - \cos^2 x)(1 - \sin^3 x) &= (1 - \cos^3 x)(1 - \sin^2 x) \\ \Leftrightarrow (1 - \cos x)(1 + \cos x)(1 - \sin x)(1 + \sin x + \sin^2 x) \\ &= (1 - \sin x)(1 + \sin x)(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x) \\ \Leftrightarrow (1 - \cos x)(1 + \cos x)(1 + \sin x + \sin^2 x) &= (1 + \sin x)(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \cos x = 0 & (1) \\ (1 + \cos x)(1 + \sin x + \sin^2 x) = (1 + \sin x)(1 + \cos x + \cos^2 x) & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Giải (1): $1 - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Giải (2):

$$\begin{aligned} (1 + \cos x)(1 + \sin x + \sin^2 x) &= (1 + \sin x)(1 + \cos x + \cos^2 x) \\ \Leftrightarrow 1 + \sin x + \sin^2 x + \cos x + \cos x \sin x + \cos x \sin^2 x \\ &= 1 + \cos x + \cos^2 x + \sin x + \sin x \cos x + \sin x \cos^2 x \\ \Leftrightarrow \sin^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x + \sin x \cos x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos x & (3) \\ \sin x + \cos x + \sin x \cos x = 0. & (4) \end{cases} \end{aligned}$$

Giải (3): $\sin x = \cos x \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Giải (4): Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Khi đó, (4) trở thành

$$t + \frac{t^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 - \sqrt{2} \text{ (loại)} \\ t = -1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } t = -1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{-1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{-1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + k2\pi \end{cases}$$

với $k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 112. Phương trình $\cos(\sin x) = 1$ có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $(-2\pi; 4\pi)$?

- (A) 6. (B) 8. (C) 5. (D) 7.

Lời giải.

Ta có $\cos(\sin x) = 1 \Leftrightarrow \sin x = k2\pi$ (*).

Điều kiện để (*) có nghiệm là $-1 \leq k2\pi \leq 1 \Rightarrow k = 0$.

Do đó (*) $\Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = l\pi$. Vì $x \in (-2\pi; 4\pi)$ nên $l \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 113. Gọi S là tập hợp tất cả các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2023)$ của phương trình lượng giác $\sqrt{3}(1 - \cos 2x) + \sin 2x - 4\cos x + 8 = 4(\sqrt{3} + 1)\sin x$. Tổng tất cả các phần tử của S là

- (A) $\frac{312341}{3}\pi$. (B) 104760 π . (C) 102827 π . (D) $\frac{310408}{3}\pi$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sqrt{3}(1 - \cos 2x) + \sin 2x - 4\cos x + 8 = 4(\sqrt{3} + 1)\sin x$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 4\cos x + 8 = 4(\sqrt{3} + 1)\sin x$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x(\sin x - 2) + 2\cos x(\sin x - 2) = 4(\sin x - 2)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x + 2\cos x = 4 \text{ (vì } \sin x \leq 1 < 2 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x + \cos x = 2 \Leftrightarrow \sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Theo đề bài } x \in (0; 2023) \Rightarrow \frac{\pi}{3} + k2\pi \in (0; 2023) \Rightarrow 2k + \frac{1}{3} \in \left(0; \frac{2023}{\pi}\right) \Rightarrow k \in \{0; 1; \dots; 321\}.$$

Tổng tất cả các phần tử của S là

$$322 \cdot \frac{\pi}{3} + (0 + 1 + 2 + \dots + 321)2\pi = 322 \cdot \frac{\pi}{3} + 51681 \cdot 2\pi = \frac{310408}{3}\pi.$$

Chọn đáp án (D)

□

Câu 114. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sin^4 x + (\sin x - 1)^4 = m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$.

(A) $\frac{1}{8} \leq m \leq 1.$

(B) $m \geq \frac{1}{8}.$

(C) $\frac{1}{8} < m \leq 1.$

(D) $m \leq 1.$

Lời giải.

$$\text{Đặt } t = \sin x - \frac{1}{2}, x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \Rightarrow t \in \left[0; \frac{1}{2}\right].$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành } 2t^4 + 3t^2 + \frac{1}{8} = m.$$

$$\text{Đặt } u = t^2, u \in \left[0; \frac{1}{4}\right], \text{ lập bảng biến thiên của } g(u) = 2u^2 + 3u + \frac{1}{8}, u \in \left[0; \frac{1}{4}\right].$$

$$\text{Phương trình } m = g(u) \text{ có nghiệm tương đương } \frac{1}{8} \leq m \leq 1.$$

Chọn đáp án (A)

□

Câu 115. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$\sin 2x - 4(\sin x - \cos x) - m = 0$$

có nghiệm.

(A) $m \leq 4\sqrt{2} - 1.$

(B) $-4\sqrt{2} - 1 \leq m \leq 4\sqrt{2} - 1.$

(C) $m < 4\sqrt{2} - 1.$

(D) $m \geq -4\sqrt{2} - 1.$

Lời giải.

$$\text{Phương trình đã cho tương đương với } \sin 2x - 4(\sin x - \cos x) = m.$$

$$\text{Đặt } t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), |t| \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành } -t^2 - 4t + 1 = m, t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}].$$

$$\text{Lập bảng biến thiên của } f(t) = -t^2 - 4t + 1 \Rightarrow m = f(t) \text{ có nghiệm khi và chỉ khi } -1 - 4\sqrt{2} \leq m \leq -1 + 4\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 116. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình $\sin^3 x - \cos^3 x = m$ có nghiệm.

(A) $-1 \leq m \leq 1.$

(B) $-1 < m < 1.$

(C) $\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}.$

(D) $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}.$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sin^3 x - \cos^3 x = m \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x) = m.$$

$$\text{Đặt } t = \sin x - \cos x, t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}], \text{ phương trình trên trở thành } -t^3 + 3t = 2m.$$

Cách 1: Xét hàm số $f(t) = -t^3 + 3t$ trên $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

- Ta có $f(t) + 2 = -t^3 + 3t + 2 = (t+1)^2(2-t) \geq 0, \forall t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Đẳng thức xảy ra khi $t = -1 \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.
Suy ra $\min_{[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]} f(t) = -2$.
- Ta có $f(t) - 2 = -t^3 + 3t - 2 = -(t-1)^2(2+t) \leq 0, \forall t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Đẳng thức xảy ra khi $t = 1 \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.
Suy ra $\max_{[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]} f(t) = 2$.

Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-2 \leq 2m \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$.

Cách 2: Xét hàm số $f(t) = -t^3 + 3t$ trên $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ ta có bảng biến thiên sau:

t	$-\sqrt{2}$	-1	1	$\sqrt{2}$	
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	$-\sqrt{2}$		2		$\sqrt{2}$

Từ đó suy ra phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \leq m \leq 1$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 117. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3\sin^4 x + \cos 4x$ lần lượt là

- (A) 3 và -5 . (B) 4 và -5 . (C) 4 và $-\frac{5}{11}$. (D) 3 và $-\frac{5}{11}$.

Lời giải.

$$y = 3\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + 2\cos^2 2x - 1 = \frac{11}{4}\cos^2 2x - \frac{3}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}$$

Đặt $t = \cos 2x, -1 \leq t \leq 1$. Ta có hàm số $y = \frac{11}{4}t^2 - \frac{3}{2}t - \frac{1}{4}$.

Bảng biến thiên

t	-1	$\frac{3}{11}$	1
y	4	$-\frac{5}{11}$	1

Vậy $\max y = 4$ và $\min y = -\frac{5}{11}$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 118. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số của hàm số $y = \frac{2 + \cos x}{\sin x + \cos x - 2}$ lần lượt là:

- (A) $M = \frac{1}{3}; m = -3$. (B) $M = -\frac{1}{3}; m = -3$.
(C) $M = 3; m = -\frac{1}{3}$. (D) $M = \frac{-5 + \sqrt{19}}{2}; m = \frac{-5 - \sqrt{19}}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y &= \frac{2 + \cos x}{\sin x + \cos x - 2} \Leftrightarrow y(\sin x + \cos x - 2) = 2 + \cos x \\ \Leftrightarrow y \cdot \sin x + y \cdot \cos x - 2y &= 2 + \cos x \Leftrightarrow y \cdot \sin x + (y - 1) \cdot \cos x = 2 + 2y \end{aligned}$$

Phương trình trên có nghiệm khi và chỉ khi $y^2 + (y-1)^2 \geq (2+2y)^2$

$$\Leftrightarrow 2y^2 + 10y + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-5 - \sqrt{19}}{2} \leq y \leq \frac{-5 + \sqrt{19}}{2}.$$

Vậy $\max y = \frac{-5 + \sqrt{19}}{2}$, $\min y = \frac{-5 - \sqrt{19}}{2}$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 119. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$.

(A) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(B) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(C) $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

(D) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

Điều kiện $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \geq 0$.

Vì $-1 \leq \cos x \leq 1$ nên $1 - \cos x \geq 0$ và $1 + \cos x \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó điều kiện xác định là $1 + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 120. Phương trình $\sin^2 x - \sin 2x + 2\cos^2 x = 1$ tương đương với phương trình nào?

(A) $-2\tan x + 1 = 0$.

(B) $\cos x(2\sin x - 1) = 0$.

(C) $\sin x(2\sin x - 1) = 0$.

(D) $\tan x(-2\tan x + 1) = 0$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \sin^2 x - \sin 2x + 2\cos^2 x &= 1 \\ \Leftrightarrow -(1 - \sin^2 x) - 2\sin x \cos x + 2\cos^2 x &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos x(-2\sin x + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 121. Cho phương trình chứa tham số thực m

$$(m - 2\sin x)(m \sin x - 2) = (m \cos x - 2)(m - 2\cos x)$$

Khi $m \neq 0$, phương trình đã cho có bao nhiêu nghiệm nằm trong đoạn $[20\pi; 25\pi]$?

(A) 6.

(B) 5.

(C) 4.

(D) 3.

Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$(\cos x - \sin x) [2m(\cos x + \sin x) - (m^2 + 4)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{m^2 + 4}{2m\sqrt{2}} (*) \end{cases}$$

Phương trình (*) có nghiệm tương đương với $\frac{m^2 + 4}{2|m|\sqrt{2}} \leq 1 \Leftrightarrow (|m| - \sqrt{2})^2 + 2 \leq 0$ (vô lí).

Với $m \neq 0$ có $20\pi \leq \frac{\pi}{4} + k\pi \leq 25\pi \Rightarrow k \in \{20, 21, 22, 23, 24\}$. Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 122. Tìm số nghiệm của phương trình $\frac{(1 + \cos 2x + \sin 2x)\cos x + \cos 2x}{1 + \tan x} = \cos x$ trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ⓐ 1.

Ⓑ 2.

Ⓒ 0.

Ⓓ 3.

Lời giải.Trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
 & (\sin x + \cos x)[(\sin x + \cos x + \cos x - \sin x) \cos x + \cos x - \sin x - 1] = 0 \\
 & \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x + 1) = 0 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ \cos x - \sin x = 0 \\ \sin x + \cos x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi. \end{cases}
 \end{aligned}$$

 $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $x = \frac{\pi}{4}$.

Chọn đáp án Ⓐ

□

Câu 123. Gọi $x_1, x_2, \dots, x_n$ là tất cả các nghiệm của phương trình $\cos 1009x - \cos 1008x = 0$ với $0 < x < \pi$.
 Tính tổng $S = \cos x_1 + \cos x_2 + \dots + \cos x_n$.

Ⓐ 0.

Ⓑ $-\frac{1}{2}$.Ⓒ $-\frac{3}{4}$.

Ⓓ -1.

Lời giải.
 $\cos 1009x - \cos 1008x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k2\pi}{2017}$ hoặc $x = k2\pi$ (loại).

Ta có $0 < \frac{k2\pi}{2017} < \pi \Leftrightarrow k = 1, 2, \dots, 1008$.
 $2 \sin \frac{2\pi}{2017} \times S = \sin \frac{4\pi}{2017} + \sin \frac{6\pi}{2017} - \sin \frac{2\pi}{2017} + \sin \frac{8\pi}{2017} - \sin \frac{4\pi}{2017} + \sin \frac{10\pi}{2017} - \sin \frac{6\pi}{2017} + \dots + \sin \frac{2018\pi}{2017} - \sin \frac{2014\pi}{2017} = -\sin \frac{2\pi}{2017} \Rightarrow S = -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án Ⓑ

□

Câu 124. Tính tổng S của tất cả các nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$ trên đoạn $[-\pi; 2\pi]$.

Ⓐ $S = 6\pi$.Ⓑ $S = 4\pi$.Ⓒ $S = -\pi$.Ⓓ $S = 2\pi$.**Lời giải.**

Ta có

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi.$$

 $\forall x \in [-\pi; 2\pi]$ nên ta có các nghiệm là $x = -\pi; x = 0; x = \pi; x = 2\pi$. Vậy $S = 2\pi$.

Chọn đáp án Ⓓ

□

Câu 125. Tìm m để phương trình $\sin x \cos x - \sin x - \cos x + m = 0$ có nghiệm.

Ⓐ $\frac{-1-2\sqrt{2}}{2} \leq m \leq 1$.Ⓑ $m > \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$.Ⓒ $m < 1$.Ⓓ $\frac{3-2\sqrt{2}}{2} < m < 1$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$, $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Khi đó, phương trình đã cho trở thành

$$\frac{t^2 - 1}{2} - t + m = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 1 = -2m. \quad (*)$$

Đặt $f(t) = t^2 - 2t - 1$ với $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Ta có $f(-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 1$, $f(\sqrt{2}) = 1 - 2\sqrt{2}$ và $f(1) = -2$.

t	$-\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$
$a > 0$	-	0	+
$f(t)$	$f(-\sqrt{2})$	$f(1)$	$f(\sqrt{2})$

Số nghiệm của (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(t)$ với $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ và đường thẳng $y = -2m$. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy (*) có nghiệm $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ khi và chỉ khi $-2 \leq -2m \leq 2\sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow \frac{-1 - 2\sqrt{2}}{2} \leq m \leq 1$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 126. Tìm số nghiệm của phương trình $\sqrt{x - x^2} \cdot \sin 2017x = 0$.

- (A) 643 nghiệm. (B) 644 nghiệm. (C) 645 nghiệm. (D) 642 nghiệm.

Lời giải.

Tập xác định của phương trình là $x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0; 1]$. Khi đó

$$\sqrt{x - x^2} \cdot \sin 2017x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x - x^2} = 0 \\ \sin 2017x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0; 1] \\ x = \frac{k\pi}{2017} \end{cases}.$$

Kết hợp với tập xác định, ta có $0 \leq k \leq \frac{2017}{\pi} \Leftrightarrow k \in \{0; 1; 2; \dots; 642\}$. Vậy phương trình có 644 nghiệm.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 127. Tổng tất cả các nghiệm thuộc $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ của phương trình $8 \sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$ là

- (A) $\frac{7\pi}{12}$. (B) $\frac{\pi}{6}$. (C) $\frac{3\pi}{2}$. (D) $\frac{\pi}{12}$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq k\frac{\pi}{2}$ với $k \in \mathbb{Z}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 8 \sin^2 x \cos x &= \sqrt{3} \sin x + \cos x \Leftrightarrow 4(1 - \cos 2x) \cos x = \sqrt{3} \sin x + \cos x \\ \Leftrightarrow -4 \cos 2x \cos x &= \sqrt{3} \sin x - 3 \cos x \Leftrightarrow -2(\cos 3x + \cos x) = \sqrt{3} \sin x - 3 \cos x \\ \Leftrightarrow \cos 3x &= \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \Leftrightarrow \cos 3x = \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó các nghiệm của phương trình thuộc $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{12}$. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình thuộc $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ bằng $\frac{7\pi}{12}$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 128. Gọi m là số nghiệm của phương trình $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$ thuộc đoạn $[0; 50]$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- (A) $m > 17$. (B) $0 < m \leq 8$. (C) $13 < m \leq 17$. (D) $8 < m \leq 13$.

Lời giải.

Ta có

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{8} + k\pi.$$

Vì $x \in [0; 50]$ nên $0 \leq k \leq 15$. Suy ra $m = 16$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 129. Kí hiệu M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3 \sin x}{\cos x + 2}$ trên đoạn $[0; \pi]$. Tính tổng $T = M + m$.

- (A) $T = 1$. (B) $T = \sqrt{3}$. (C) $T = 0$. (D) $T = \frac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y = \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} \Leftrightarrow 3 \sin x - y \cos x = 2y$. (1)

Điều kiện có nghiệm của phương trình (1) cho ta $|y| \leq \sqrt{3}$.

Mặt khác với $x \in [0; \pi]$ thì $y = \frac{3 \sin x}{\cos x + 2} \geq 0$.

Do đó $M = \sqrt{3}, m = 0$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 130. Tìm m để phương trình $\sin x + \cos x = m + \sin 2x$ vô nghiệm.

- (A) $\begin{cases} m > \frac{5}{4} \\ m < -1 - \sqrt{2} \end{cases}$. (B) $\begin{cases} m \geq \frac{5}{4} \\ m \leq -1 - \sqrt{2} \end{cases}$. (C) $\begin{cases} m > \frac{5}{4} \\ m \leq -1 - \sqrt{2} \end{cases}$. (D) $\begin{cases} m \geq \frac{5}{4} \\ m < -1 - \sqrt{2} \end{cases}$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Khi đó, phương trình đã cho trở thành

$$t = t^2 + m - 1 \Leftrightarrow t^2 - t = 1 - m. \quad (*)$$

Đặt $f(t) = t^2 - t$ với $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Ta có $f(-\sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2}, f(\sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2}$ và $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.

t	$-\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$
$a > 0$	—	0	+
$f(t)$	$f(-\sqrt{2})$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$f(\sqrt{2})$

Số nghiệm của (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(t)$ với $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ và đường thẳng $y = 1 - m$. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy (*) vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 1 - m < -\frac{1}{4} \\ 1 - m > 2 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{5}{4} \\ m < -1 - \sqrt{2} \end{cases}.$$

Chọn đáp án (A)



Câu 131. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2\sin x + m\cos x = 1 - m$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

(A) $-2 \leq m \leq 6$.

(B) $1 \leq m \leq 3$.

(C) $-3 \leq m \leq 1$.

(D) $-1 \leq m \leq 3$.

Lời giải.

Cách 1.

Ta có $\cos \frac{x}{2}$ không là nghiệm của phương trình. Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$. Từ phương trình và giả thiết, yêu cầu bài toán trở thành tìm m để phương trình $f(t) = t^2 - 4t + 1 = 2m$ có nghiệm $t \in [-1; 1]$. Bảng biến thiên

t	-1	1
y	$f(-1)$	$f(1)$

Trên đoạn $[-1; 1]$ hàm $f(t)$ nghịch biến, vì vậy phương trình $f(t) = 2m$ có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Leftrightarrow f(1) \leq 2m \leq f(-1) \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 3.$$

Cách 2. Do $m + 1 - m \neq 0$ nên $\cos \frac{x}{2} = 0$ không là nghiệm của phương trình (1).

Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$. Khi đó $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Phương trình (1) trở thành

$$f(t) = t^2 - 4t + 1 - 2m = 0 \quad (2)$$

Để (1) có nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$, thì phương trình (2) có nghiệm $t \in [-1; 1]$.

Trường hợp 1. Phương trình (2) có một nghiệm $t \in (-1; 1)$ và một nghiệm $t \notin [-1; 1]$

$$\Leftrightarrow f(-1) \cdot f(1) < 0 \Leftrightarrow (6 - 2m)(-2 - 2m) < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 3$$

Trường hợp 2. Phương trình có hai nghiệm thỏa

$$-1 < t_1 \leq t_2 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ 1 \cdot f(-1) > 0 \\ 1 \cdot f(1) > 0 \\ -1 < \frac{S}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 3 \geq 0 \\ 6 - 2m > 0 \\ -2 - 2m > 0 \\ -1 < 2 < 1 \end{cases}$$

hệ vô nghiệm.

Trường hợp 3. Xét $f(-1) = 0 \Leftrightarrow m = 3$, thỏa mãn.

Trường hợp 4. Xét $f(1) = 0 \Leftrightarrow m = -1$, thỏa mãn.

Vậy $-1 \leq m \leq 3$.

Chọn đáp án (D)



Câu 132. Phương trình $\frac{\tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{\cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{2}$ có bao nhiêu nghiệm trong đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}, 6\pi\right]$?

(A) 19.

(B) 12.

(C) 18.

(D) 11.

Lời giải.

$$\frac{\tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{\cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{2} \Leftrightarrow \tan 2x = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right). \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Khi đó: } (1) \Leftrightarrow \cot\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2x = x + \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Trong đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}, 6\pi\right]$ có 19 nghiệm, nhưng do điều kiện nên còn 12 nghiệm.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 133. Phương trình $\tan 2x + \tan x = 0$ có bao nhiêu nghiệm trong đoạn $[-4\pi; 5\pi]$?

(A) 27.

(B) 18.

(C) 28.

(D) 19.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Khi đó:

$$\tan 2x + \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = -\tan x \Leftrightarrow \tan 2x = \tan(-x) \Leftrightarrow 2x = -x + k\pi$$

$$\Leftrightarrow 3x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \text{ (thỏa điều kiện)}$$

$$\text{Mà } x \in [-4\pi, 5\pi] \text{ nên } -4\pi \leq \frac{k\pi}{3} \leq 5\pi \Leftrightarrow -12 \leq k \leq 15$$

Vậy, số nghiệm là 28.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 134. Cho phương trình $\sin 2x + 2\cos x + \cos 2x - 2\sin x - 1 = 0$. Tính tổng S tất cả các nghiệm thuộc $(-\pi; \pi)$ của phương trình đã cho.

(A) $S = \frac{2\pi}{3}$.

(B) $S = -\pi$.

(C) $S = \frac{6\pi}{7}$.

(D) $S = 2\pi$.

Lời giải.

$$\sin 2x + 2\cos x + \cos 2x - 2\sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)(\sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi. \end{cases}$$

Suy ra các nghiệm thuộc $(-\pi; \pi)$ là $\frac{\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}$. Vậy $S = -\pi$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 135. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|\sin x + \cos 2x| = m$ có nghiệm?

(A) 0.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 1.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x$, ta có phương trình $m = |2t^2 - t - 1|$.

Xét hàm số $f(t) = |2t^2 - t - 1|$ với $t \in [-1; 1]$, được miền giá trị của $f(t)$ là $[0; 2]$.

Do đó, có 3 giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 136. Phương trình $\sin 5x - \sin x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-2018\pi; 2018\pi]$?

- (A) 16144. (B) 20179. (C) 16145. (D) 20181.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \sin 5x - \sin x = 0 &\Leftrightarrow \sin 5x = \sin x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = x + k2\pi \\ 5x = \pi - x + k2\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{2} & (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{5\pi}{6} + m\pi & (m \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{\pi}{6} + n\pi & (n \in \mathbb{Z}). \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Vì } x \in [-2018\pi; 2018\pi] \text{ nên } \begin{cases} -2018\pi \leq k\frac{\pi}{2} \leq 2018\pi \\ -2018\pi \leq \frac{5\pi}{6} + m\pi \leq 2018\pi \\ -2018\pi \leq \frac{\pi}{6} + n\pi \leq 2018\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4036 \leq k \leq 4036 \\ -\frac{12113}{6} \leq m \leq \frac{12103}{6} \\ -\frac{12109}{6} \leq n \leq \frac{12107}{6} \end{cases}.$$

Do đó có 8073 giá trị k , 4036 giá trị m , 4036 giá trị n , suy ra số nghiệm cần tìm là 16145 nghiệm.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 137. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\cos^2 x + (m-4)\cos x - 2m + 4 = 0$ có đúng hai nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; 2\pi\right]$.

- (A) $\begin{cases} m = 1 \\ \frac{3}{2} \leq m \leq 3 \end{cases}$. (B) $1 \leq m < \frac{3}{2}$. (C) $1 \leq m \leq \frac{3}{2}$. (D) $\begin{cases} m = 1 \\ \frac{3}{2} < m < 3 \end{cases}$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình đã cho tương đương với } (\cos x - 2)(\cos x + m - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 2 - m \\ \cos x = 2 > 1 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Dựa vào đường tròn lượng giác ta thấy phương trình có hai nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; 2\pi\right]$ khi

$$\begin{cases} 2 - m = 1 \\ -1 < 2 - m < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ \frac{3}{2} < m < 3. \end{cases}$$

Chọn đáp án (D)

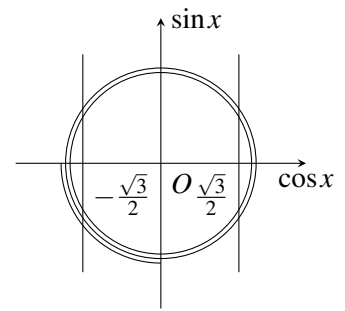
□

Câu 138. Phương trình $|\cos x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ có bao nhiêu nghiệm trên đoạn $\left[-\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$?

- (A) 10. (B) 9. (C) 11. (D) 8.

Lời giải.

$$|\cos x| = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$



Dựa vào đường tròn lượng giác, phương trình có 9 nghiệm trên đoạn $\left[-\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 139. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sin^2 x + 3 \cos x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$.

- (A) $M = 4$. (B) $M = \frac{9}{4}$. (C) $M = \frac{13}{4}$. (D) $M = 3$.

Lời giải.

Đặt $t = \cos x$, $t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Hàm số được viết lại $y = -t^2 + 3t + 1$. Lập bảng biến thiên của hàm số bậc hai $f(t) = -t^2 + 3t + 1$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ ta thu được $M = 3$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 140. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình $m \sin x + (m+1) \cos x + 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1, x_2 \in [0; 2\pi]$ và hai nghiệm này cách nhau một khoảng $\frac{\pi}{2}$.

- (A) $m = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$. (B) $m = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$. (C) $m = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$. (D) $m \neq \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện cần: Giả sử phương trình có nghiệm $x_1 = \alpha; x_2 = \alpha + \frac{\pi}{2}$, khi đó

$$\begin{aligned} \begin{cases} m \sin \alpha + (m+1) \cos \alpha + 1 = 0 \\ m \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + (m+1) \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m \sin \alpha + (m+1) \cos \alpha + 1 = 0 \\ m \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - (m+1) \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m(\sin \alpha + \cos \alpha) = -1 - \cos \alpha \\ m(\cos \alpha - \sin \alpha) = \sin \alpha - 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \alpha - 1) = (\cos \alpha + 1)(\sin \alpha - \cos \alpha) \\ &\Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{6} \\ \alpha = \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Điều kiện đủ: Thử lại ta thấy $m = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$ thỏa mãn điều kiện.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 141. Gọi S là tập hợp các nghiệm của phương trình $\frac{\sqrt{1+\cos x} + \sqrt{1-\cos x}}{\cos x} = 4 \sin x$ trong khoảng $(0; \pi)$. Tổng các phần tử của S là

- (A) $\frac{13\pi}{15}$. (B) $\frac{7\pi}{15}$. (C) $\frac{4\pi}{15}$. (D) $\frac{8\pi}{15}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{\sqrt{2} \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right)}{\cos x} = 4 \sin x \Leftrightarrow 2 \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \sin 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k4\pi}{3} \\ x = \frac{3\pi}{10} + \frac{k4\pi}{5} \end{cases}$$

Vậy hai nghiệm là $x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{3\pi}{10}$ nên tổng các phần tử của S là $\frac{7\pi}{15}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 142. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để phương trình $\frac{a^2}{1 - \tan^2 x} = \frac{\sin^2 x + a^2 - 2}{\cos 2x}$ có nghiệm.

(A) $a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

(B) $a \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

(C) $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

(D) $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. Khi đó, ta biến đổi phương trình về dạng $\sin^2 x = \frac{2}{1+a^2}$. Từ đây dễ thấy để

phương trình ban đầu có nghiệm thì $a^2 > 1$ và $a^2 \neq 3$, tương đương với điều kiện $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 143. Số nghiệm của phương trình $4 \sin^3 x \cos 3x + 4 \cos^3 x \sin 3x + 3\sqrt{3} \cos 4x = 3$ thuộc khoảng $(0; \pi)$ là

(A) 4.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 4 \sin^3 x (4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 4 \cos^3 x (3 \sin x - 4 \sin^3 x) + 3\sqrt{3} \cos 4x = 3 \\ \Leftrightarrow & -12 \sin^3 x \cos x + 12 \cos^3 x \sin x + 3\sqrt{3} \cos 4x = 3 \\ \Leftrightarrow & 4 \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) + \sqrt{3} \cos 4x = 1 \\ \Leftrightarrow & 2 \sin 2x \cos 2x + \sqrt{3} \cos 4x = 1 \Leftrightarrow \sin 4x + \sqrt{3} \cos 4x = 1 \\ \Leftrightarrow & \sin \left(4x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ với } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Vậy có tất cả 4 nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ là $x = \frac{11\pi}{24}, x = \frac{23\pi}{24}, x = \frac{\pi}{8}, x = \frac{5\pi}{8}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 144. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \sqrt{\frac{2 - \sin x}{1 - \sin x}}$.

(A) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(B) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(C) $\mathcal{D} = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(D) $\mathcal{D} = \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải.

Điều kiện $\frac{2 - \sin x}{1 - \sin x} \geq 0$. Vì $-1 \leq \sin x \leq 1$ nên $2 - \sin x > 0$ và $1 - \sin x \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó điều kiện xác định là $1 - \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 145. Để phương trình $\sin^6 x + \cos^6 x = m$ có nghiệm, tham số m phải thỏa mãn điều kiện nào dưới đây?

- (A) $1 \leq m \leq 2$. (B) $-2 \leq m \leq -1$. (C) $\frac{1}{4} \leq m \leq 1$. (D) $-\frac{7}{4} \leq m \leq -\frac{1}{4}$.

Lời giải.

Cách 1: Dùng phương pháp loại trừ vì $0 \leq \sin^6 x + \cos^6 x \leq 1$.

Cách 2: Ta có $\sin^6 x + \cos^6 x = m \Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x = m \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = m$.

Từ đó suy ra phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\frac{1}{4} \leq m \leq 1$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 146. Tìm tập nghiệm của phương trình $\frac{\sqrt{3} \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x}{(2 \sin x + \sqrt{3})(4 \cos^2 x - 3)} = 0$.

- (A) $\left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. (B) $\left\{ -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
(C) $\left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi; -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. (D) $\left\{ -\frac{\pi}{6} + (4k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{3} \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0$.

Xét thấy $\cos x = 0$ không thỏa phương trình nên ta chia 2 vế cho $\cos^2 x$. Ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \tan^2 x - 2 \tan x - \sqrt{3} &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \sqrt{3} \\ \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi = -\frac{\pi}{6} + (4k+1)\frac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 147. Phương trình $(1 + \sqrt{2})(\sin x - \cos x) + \sqrt{2} \sin x \cos x = 1 + \sqrt{2}$ có bao nhiêu nghiệm trong đoạn $[-\pi; \pi]$?

- (A) 4. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x - \cos x, t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Khi đó, $\sin x \cos x = \frac{1-t^2}{2}$, phương trình trở thành

$$(1 + \sqrt{2})t + \frac{\sqrt{2}(1-t^2)}{2} = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}t^2 - 2(1 + \sqrt{2})t + 2 + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 + \sqrt{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Ta có $t = 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy trong đoạn $[-\pi; \pi]$ có 3 nghiệm là $-\pi; \frac{\pi}{2}; \pi$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 148. Tìm nghiệm của phương trình $|\sin 9x| + |\sin 4x| = 0$.

- (A) $x = \frac{n\pi}{2} (n \in \mathbb{Z})$. (B) $x = n3\pi (n \in \mathbb{Z})$. (C) $x = n\pi (n \in \mathbb{Z})$. (D) $x = n2\pi (n \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 9x = 0 \\ \sin 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{9} \\ x = \frac{t\pi}{4} \end{cases} (k, t \in \mathbb{Z}). \text{ Xét phương trình nghiệm nguyên}$$

$$\frac{k\pi}{9} = \frac{t\pi}{4} \Leftrightarrow k = 2 + \frac{t}{4}.$$

Do $k, t \in \mathbb{Z} \Rightarrow t = 4n (n \in \mathbb{Z})$. Vậy $x = \frac{t\pi}{4} = \frac{4n\pi}{4} = n\pi (n \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 149. Cho hàm số $y = \frac{1 - m \sin x}{\cos x + 2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0; 10]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số nhỏ hơn -2 ?

- (A) 3. (B) 6. (C) 9. (D) 1.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = \frac{1 - m \sin x}{\cos x + 2} \Leftrightarrow y \cos x + m \sin x = 1 - 2y$.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$y^2 + m^2 \geq 1 - 4y + 4y^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 - m^2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{1 + 3m^2}}{3} \leq y \leq \frac{2 + \sqrt{1 + 3m^2}}{3}$$

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}} y = \frac{2 - \sqrt{1 + 3m^2}}{3} < -2 \\ m \in [0; 10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1 + 3m^2} > 8 \\ m \in [0; 10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 > 63 \\ m \in [0; 10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 21 \\ m \in [0; 10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\} \end{aligned}$$

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 150. Tính tổng các nghiệm của phương trình $\sin^{2016} x + \cos^{2016} x = 2 (\sin^{2018} x + \cos^{2018} x)$ trong khoảng $(0; 2018)$.

- (A) $\left(\frac{1285}{2}\right)^2 \pi$. (B) $(642)^2 \pi$. (C) $\left(\frac{1285}{4}\right)^2 \pi$. (D) $(643)^2 \pi$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 & \sin^{2016} x + \cos^{2016} x = 2 (\sin^{2018} x + \cos^{2018} x) \\
 \Leftrightarrow & \sin^{2016} x - 2 \sin^{2018} x + \cos^{2016} x - 2 \cos^{2018} x = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sin^{2016} x (1 - 2 \sin^2 x) + \cos^{2016} x (1 - 2 \cos^2 x) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sin^{2016} x \cos 2x - \cos^{2016} x \cos 2x = 0 \\
 \Leftrightarrow & \cos 2x (\sin^{2016} x - \cos^{2016} x) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin^{2016} x - \cos^{2016} x = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin x = \pm \cos x \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \cos 2x = 0 \\
 \Leftrightarrow & x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

Theo yêu cầu bài toán, ta tìm nghiệm thuộc $(0; 2018)$ nên

$$\begin{aligned}
 & 0 < x < 2018 \\
 \Leftrightarrow & 0 < \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} < 2018 \\
 \Leftrightarrow & -\frac{\pi}{4} < \frac{k\pi}{2} < 2018 - \frac{\pi}{4} \\
 \Leftrightarrow & -\frac{1}{2} < k < \frac{4036}{\pi} - \frac{1}{2} \approx 1284,2 \\
 \Leftrightarrow & k \in \{0, 1, 2, \dots, 1284\}, \quad (\text{vì } k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; 2018)$ là

$$S = 1285 \cdot \frac{\pi}{4} + (0 + 1 + 2 + \dots + 1284) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} (1285 + 1284 \cdot 1285) = \left(\frac{1285}{2} \right)^2 \pi.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 151. Tìm m để phương trình $\sin x + \cos x = m + \sin 2x$ có nghiệm.

(A) $m > \frac{5}{4}$. **(B)** $-\sqrt{2} + 1 \leq m \leq \frac{5}{4}$. **(C)** $-\sqrt{2} - 1 \leq m \leq \frac{5}{4}$. **(D)** $m \leq \frac{5}{4}$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$. Điều kiện $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$. Khi đó

$$t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1.$$

Phương trình đã cho trở thành $t = m + t^2 - 1 \Leftrightarrow m = -t^2 + t + 1$ (1)

Yêu cầu bài toán là (1) nghiệm đúng $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Do đồ thị hàm số $f(t) = -t^2 + t + 1$ là một Parabol có đỉnh là $I \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{4} \right)$, bề lõm hướng xuống nên ta có bảng biến thiên như sau

t	$-\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$
$-t^2 + t + 1$	$-\sqrt{2} - 1$	$\frac{5}{4}$	$-\sqrt{2} + 1$

Vậy yêu cầu bài toán là $-\sqrt{2} - 1 \leq m \leq \frac{5}{4}$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 152. Cho phương trình $\cos 2x - (2m + 1)\cos x + m + 1 = 0$. Tìm m để phương trình có nghiệm $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

(A) $-1 \leq m \leq 1$.

(B) $-1 \leq m \leq 0$.

(C) $-1 < m < 0$.

(D) $-1 \leq m < 0$.

Lời giải.

Phương trình tương đương

$$2\cos^2 x - (2m + 1)\cos x + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = m \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (*)$$

Với $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, ta có $-1 \leq \cos x < 0$. Từ (*), ta loại trường hợp $\cos x = \frac{1}{2}$ và phương trình đã cho có nghiệm $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi $-1 \leq m < 0$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 153. Có tất cả bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $\sin^2 x + \sqrt{m + \sin x} = m$ có nghiệm thực?

(A) 5.

(B) 4.

(C) 2.

(D) 3.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{m + \sin x} \geq 0$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sin^2 x + t = m \\ t^2 = m + \sin x \end{cases} \Leftrightarrow \sin^2 x - t^2 = -t - \sin x \Leftrightarrow (\sin x + t)(\sin x - t + 1) = 0.$$

$$\text{Nếu } \sin x + t = 0 \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{m + \sin x} = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x - \sin x = m \quad (1).$$

Để phương trình (1) có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{4}$ và $|\sin x| \leq 1$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1 + \sqrt{4m + 1}}{2} \\ \sin x = \frac{1 - \sqrt{4m + 1}}{2} \end{cases}$$

$$\left| \frac{1 + \sqrt{4m + 1}}{2} \right| \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq m \leq 0.$$

$$\left| \frac{1 - \sqrt{4m + 1}}{2} \right| \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq m \leq 2.$$

Nếu $\sin x - t + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x + \sin x + 1 - m = 0$.

Giải tương tự như trên ta được $\frac{3}{4} \leq m \leq 1$ hoặc $\frac{3}{4} \leq m \leq 3$.

Vậy có 3 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 154. Họ nghiệm của phương trình $\sin 2x - \cos 2x + \sin x - \cos x = 1$ được biểu diễn bởi bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác?

(A) 3.

(B) 4.

(C) 6.

(D) 2.

Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} 2\sin x \cos x - 2\cos^2 x + \sin x - \cos x &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\cos x(\sin x - \cos x) + \sin x - \cos x &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(2\cos x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = 0 \\ 2\cos x + 1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 155. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \tan x + 2\cot x$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$.

(A) $m = 2\sqrt{2}$.

(B) $m = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

(C) $m = 3$.

(D) $m = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Đặt $t = \tan x, t \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right]$. Khi đó $y = t + \frac{2}{t} = \left(t + \frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t} \geq 2 + 1 = 3$. Nên giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 3.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 156. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để phương trình $(m+1)\cos x + (m-1)\sin x = 2m+3$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = \frac{\pi}{3}$?

(A) Vô số.

(B) Không tồn tại.

(C) 2.

(D) 1.

Lời giải.

$$\begin{aligned} (m+1)\cos x + (m-1)\sin x &= 2m+3 \\ \Leftrightarrow \frac{m+1}{\sqrt{2m^2+2}}\cos x + \frac{m-1}{\sqrt{2m^2+2}}\sin x &= \frac{2m+3}{\sqrt{2m^2+2}} \\ \Leftrightarrow \cos(x+\alpha) = \cos\beta &\text{ với điều kiện } -1 \leq \frac{2m+3}{\sqrt{2m^2+2}} \leq 1 \\ (\text{trong đó } \cos\alpha = \frac{m+1}{\sqrt{2m^2+2}}, \cos\beta = \frac{2m+3}{\sqrt{2m^2+2}}) & \\ \Leftrightarrow x = \beta \pm \alpha + k2\pi. & \end{aligned}$$

Do đó x_1, x_2 có dạng $x_1 = \beta + \alpha + k_1 2\pi$ và $x_2 = \beta - \alpha + k_2 2\pi$ (vì nếu x_1, x_2 thuộc cùng một họ nghiệm thì $|x_1 - x_2| = m2\pi$ với $m \in \mathbb{Z}$). Do đó $|x_1 - x_2| = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow |2\alpha + (k_1 - k_2)2\pi| = \frac{\pi}{3}$

Suy ra $\cos|2\alpha + (k_1 - k_2)2\pi| = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \cos 2\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2\alpha = \frac{1}{2}$.

Mặt khác $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ nên

$$\frac{1}{2} = 2\left(\frac{m+1}{\sqrt{2m^2+2}}\right)^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{(m+1)^2}{2m^2+2} \Leftrightarrow m^2 - 4m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \pm \sqrt{3}, \text{ loại}$$

Vậy không tồn tại m thỏa mãn bài.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 157. Tập nghiệm S của phương trình $\sin 5x = 5 \cos^3 2x \sin x$ là

- Ⓐ $S = \left\{ k\pi, \arctan \left(\pm \sqrt{\frac{6+\sqrt{21}}{3}} \right) + k\pi, \arctan \left(\pm \sqrt{\frac{6-\sqrt{21}}{3}} \right) + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$
- Ⓑ $S = \left\{ \arctan \left(\frac{6+\sqrt{21}}{3} \right) + k\pi, \arctan \left(\frac{6-\sqrt{21}}{3} \right) + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$
- Ⓒ $S = \left\{ \arctan \left(\pm \sqrt{\frac{6+\sqrt{21}}{3}} \right) + k\pi, \arctan \left(\pm \sqrt{\frac{6-\sqrt{21}}{3}} \right) + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$
- Ⓓ $S = \left\{ k\pi, \arctan \left(\frac{6+\sqrt{21}}{3} \right) + k\pi, \arctan \left(\frac{6-\sqrt{21}}{3} \right) + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Lời giải.

Ta có

$$\sin 5x = 5 \cos^3 2x \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x \cos x + \cos 4x \sin x = 5 \cos^2 2x (\cos^2 x - \sin^2 x) \sin x$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 2x \cos 2x \cos x + (\cos^2 2x - \sin^2 2x) \sin x = 5 \cos^2 2x (\cos^2 x - \sin^2 x) \sin x (*)$$

- $\cos 2x = 0, \cos x = 0$ không thỏa mãn.
- Với $\cos x \neq 0$ và $\cos 2x \neq 0$, chia hai vế cho $\cos^2 2x \cdot \cos^3 x$ ta có

$$(*) \Leftrightarrow 2 \tan 2x (1 + \tan^2 x) + (1 - \tan^2 2x) \tan x (1 + \tan^2 x) = 5 (1 - \tan^2 x) \tan x$$

$$\Leftrightarrow 2 \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} (1 + \tan^2 x) + \left(1 - \frac{4 \tan^2 x}{(1 - \tan^2 x)^2} \right) \tan x (1 + \tan^2 x) = 5 (1 - \tan^2 x) \tan x (**)$$

- Xét $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình.

- Xét $\tan x \neq 0$, đặt $t = \tan^2 x, t \neq 0, t \neq 1$, ta có

$$(**) \Leftrightarrow \frac{4}{1-t} (1+t) + \left(1 - \frac{4t}{(1-t)^2} \right) (1+t) = 5(1-t)$$

$$\Leftrightarrow 6t^3 - 24t^2 + 10t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{6+\sqrt{21}}{3} \\ t = \frac{6-\sqrt{21}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \pm \sqrt{\frac{6+\sqrt{21}}{3}}, \\ \tan x = \pm \sqrt{\frac{6-\sqrt{21}}{3}}. \end{cases}$$

Chọn đáp án Ⓐ

□

Câu 158. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $(1-m) \tan^2 x - \frac{2}{\cos x} + 1 + 3m = 0$ có nhiều hơn một nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

- Ⓐ $\begin{cases} \frac{1}{3} \leq m \leq 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}.$ Ⓑ $\begin{cases} \frac{1}{3} < m < 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}.$ Ⓒ $\begin{cases} m < 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}.$ Ⓓ $\begin{cases} m \leq 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}.$

Lời giải.

Điều kiện xác định $\cos x \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $\frac{1-m}{\cos^2 x} - \frac{2}{\cos x} + 4m = 0 (*)$

Nhận thấy với $m = 1$ phương trình đã cho có 1 nghiệm $x = \frac{\pi}{3} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ (loại).

Với $m \neq 1$ Phương trình (*) là phương trình bậc hai ẩn $\frac{1}{\cos x}$ có $\Delta = (1 - 2m)^2$.

$$\text{Khi đó (*)} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\cos x} = 2 \\ \frac{1}{\cos x} = \frac{2m}{1-m} \end{cases}, \text{ yêu bài toán tương đương với } \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ \frac{2m}{1-m} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} < m < 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 159. Phương trình $2\tan^2 x + 3\tan x + 2\cot^2 x + 3\cot x + 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm trong nửa khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{23\pi}{4}\right]$?

(A) 8.

(B) 6.

(C) 5.

(D) 7.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} 2\tan^2 x + 3\tan x + 2\cot^2 x + 3\cot x + 2 = 0 &\Leftrightarrow 2(\tan^2 x + \cot^2 x) + 3(\tan x + \cot x) + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(\tan x + \cot x)^2 + 3(\tan x + \cot x) - 2 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \tan x + \cot x. \text{ Khi đó } (1) \Leftrightarrow 2t^2 + 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = -2. \end{cases}$$

$$\bullet t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \tan x + \cot x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x \cdot \sin x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x \cos x = 2 \text{ (vô nghiệm).}$$

$$\bullet t = -2 \Leftrightarrow \tan x + \cot x = -2 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x \cdot \sin x} = -2 \Leftrightarrow \sin x \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ (thỏa điều kiện).}$$

$$\text{Do } x \in \left(-\frac{5\pi}{4}; \frac{23\pi}{4}\right] \text{ nên } -\frac{5\pi}{4} < \frac{-\pi}{4} + k\pi \leq \frac{23\pi}{4} \Leftrightarrow -\pi < k\pi \leq 6\pi \Leftrightarrow -1 < k \leq 6.$$

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm trong nửa khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{23\pi}{4}\right]$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 160. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x + 2$$

Tính giá trị của biểu thức $M^2 + m^2$.

(A) 15.

(B) 10.

(C) 12.

(D) 9.

Lời giải.

$$\begin{aligned} y &= \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x + 2 \\ &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) - \sin 2x - \frac{3}{2}(1 + \cos 2x) + 2 \\ &= 1 - 2 \cos 2x - \sin 2x \\ &= 1 - \sqrt{5} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \sin 2x + \frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2x \right) \\ &= 1 - \sqrt{5} (\sin 2x \cos \alpha + \cos 2x \sin \alpha) \\ &= 1 - \sqrt{5} \sin(2x + \alpha). \end{aligned}$$

trong đó $\frac{2}{\sqrt{5}} = \cos \alpha$ và $\frac{1}{\sqrt{5}} = \sin \alpha$.

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin(2x + \alpha) \leq 1 \\ \Leftrightarrow 1 + \sqrt{5} &\geq 1 - 2\sqrt{2}\sin(2x + \alpha) \geq 1 - \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Tồn tại x để $y = 1 - \sqrt{5}$ và cũng tồn tại x để $y = 1 + \sqrt{5}$. Do đó $M = 1 + \sqrt{5}$ và $m = 1 - \sqrt{5}$. Ta tính được $M^2 + m^2 = 12$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 161. Các họ nghiệm của phương trình $\sin 2x \cos x = \cos 2x + \sin x$ có dạng $x = \alpha + k2\pi$; $x = \beta + \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$), với $\alpha, \beta \in [0; \frac{\pi}{2}]$. Tính $S = \alpha + \beta$.

(A) $S = \frac{\pi}{2}$.

(B) $S = \frac{\pi}{4}$.

(C) $S = \frac{\pi}{3}$.

(D) $S = \frac{3\pi}{4}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} \sin x (2\cos^2 x - 1) - \cos 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos 2x (\sin x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 162. Cho phương trình $\frac{2\sin^2 x + \cos 4x - \cos 2x}{\sin x - \cos x} = 0$. Tính diện tích đa giác có đỉnh là các điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo α trên đường tròn lượng giác, với α là nghiệm của phương trình đã cho.

(A) $\sqrt{2}$.

(B) $2\sqrt{2}$.

(C) $2\sqrt{3}$.

(D) $\sqrt{3}$.

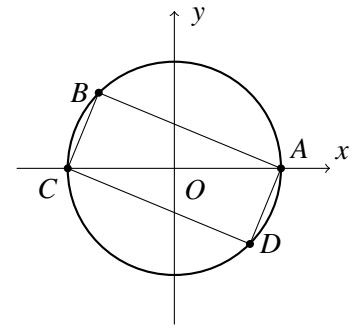
Lời giải.

Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$, với điều kiện trên phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{2\sin^2 x + \cos 4x - \cos 2x}{\sin x - \cos x} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \cos 4x - \cos 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 - \cos 2x + 2\cos^2 2x - 1 - \cos 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 2\cos 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases} &\quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Biểu diễn nghiệm $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = k\pi$ trên đường tròn lượng giác ta được hình chữ nhật $ABCD$ như hình vẽ.

Xét hình chữ nhật $ABCD$, ta có $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$.



Chọn đáp án (A)

□

Câu 163. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của x thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ sao cho biểu thức $P = \frac{\sin x + 1}{2 + \cos x}$ nhận giá trị nguyên. Tính số phần tử của tập hợp S .

(A) 2.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 1.

Lời giải.

$$P = \frac{\sin x + 1}{2 + \cos x} \Leftrightarrow P \cos x - \sin x = 1 - 2P. \text{ Điều kiện có nghiệm } P^2 + 1 \geq (1 - 2P)^2 \Leftrightarrow 0 \leq P \leq \frac{4}{3}.$$

Từ đây, P nguyên nên $P = 0$ hoặc $P = 1$.

$$\bullet \text{ Với } P = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Với } P = 1 \Rightarrow \cos x - \sin x = -1 \Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \pi \end{cases}$$

Chọn đáp án (C)

□

Câu 164. Phương trình $\sqrt{4 - x^2} (\sin 2\pi x - 3 \cos \pi x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 6.

(B) 10.

(C) 4.

(D) Vô số.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ \begin{cases} 4 - x^2 = 0 \\ \sin 2\pi x - 3 \cos \pi x = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ \begin{cases} x = \pm 2 \\ \cos \pi x (2 \sin \pi x - 3) = 0 \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ \begin{cases} x = \pm 2 \\ \cos \pi x = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = \frac{1}{2} + k \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & x \in \left\{-2; -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2\right\}. \end{aligned}$$

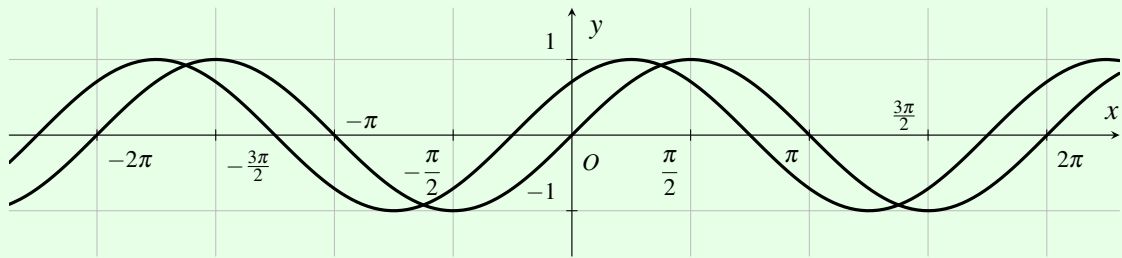
Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm.

Chọn đáp án (A)

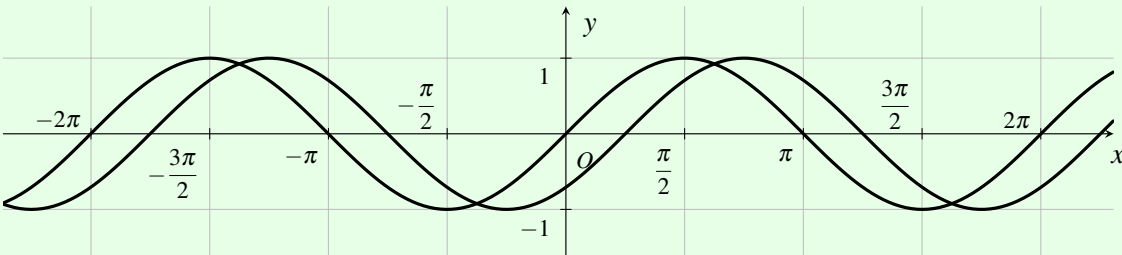
□

Câu 165. Đồ thị các hàm số $y = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x)$ và $y = \sin x$ là các đường cong trong hình nào dưới đây?

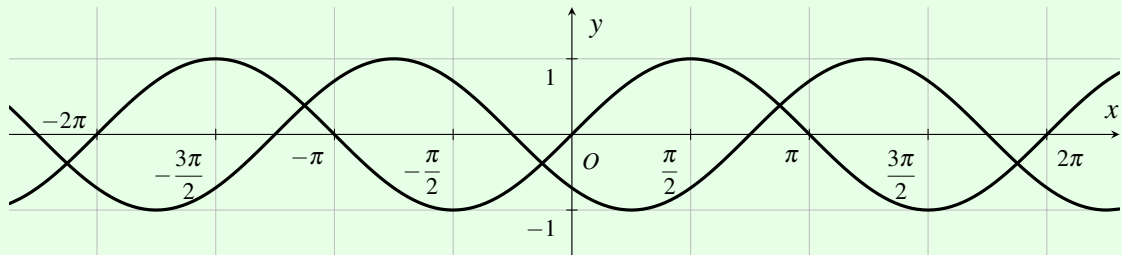
(A)



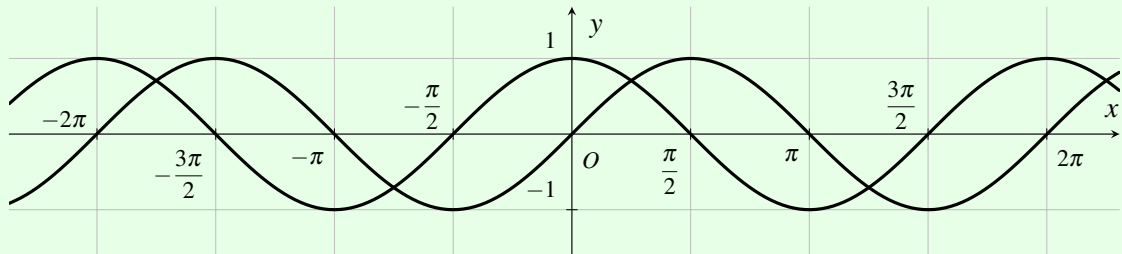
(B)



(C)



(D)



Lời giải.

Để thấy ở cả bốn phương án đều có đồ thị hàm $y = \sin x$.

Ta có $y = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x) = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$.

Suy ra đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = \sin x$ sang trái $\frac{\pi}{4}$ đơn vị.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 166. Số nghiệm của phương trình $1 + \sin^3 2x + \cos^3 2x = \frac{1}{2} \sin 4x$ thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi \right)$ là

(A) 2.

(B) 1.

(C) 3.

(D) 4.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2 - \sin 4x + 2(\sin 2x + \cos 2x)(1 - \sin 2x \cos 2x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2 - \sin 4x) + (\sin 2x + \cos 2x)(2 - \sin 4x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2 - \sin 4x)(\sin 2x + \cos 2x + 1) &= 0 \Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x = -1 \\ \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \text{ với } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Như vậy có 3 nghiệm thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ là $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 167. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sin^3 x - (m + \sqrt{3} \cos x)^3 - m = 2 \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$ có nghiệm?

(A) 6.

(B) Vô số.

(C) 5.

(D) 4.

Lời giải.

$$\sin^3 x - (m + \sqrt{3} \cos x)^3 - m = 2 \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x + \sin x = (m + \sqrt{3} \cos x)^3 + m + \sqrt{3} \cos x$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \sin x = m + \sqrt{3} \cos x$.

Do đó để phương trình đã cho có nghiệm thì điều kiện cần và đủ là $1 + (\sqrt{3})^2 \geq m^2 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 168.

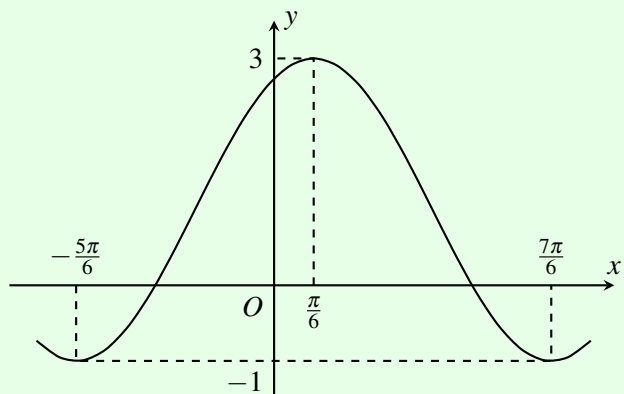
Đường cong trong hình dưới mô tả đồ thị của hàm số $y = A \sin(x + \alpha) + B$ (A, B, α là các hằng số, $\alpha \in [-\pi; 0]$). Tính $S = A + B - \frac{3\alpha}{\pi}$.

(A) $S = 1$.

(B) $S = 2$.

(C) $S = 3$.

(D) $S = 0$.



Lời giải.

GTLN và GTNN của hàm số lần lượt là $|A| + B$ và $-|A| + B$. Kết hợp với đồ thị đã cho, ta suy ra $|A| = 2, B = 1$. Hơn nữa, GTLN của hàm số đạt tại $x = \frac{\pi}{6}$ nên $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) = \pm 1$, mà $\alpha \in [-\pi; 0]$ nên ta suy ra $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) = -1$ và

$\alpha = -\frac{2\pi}{3}$. Vậy $S = 1$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 169. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\cos 2x + 3 \sin^2 x - 3m + 1 = 0$ có nghiệm trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$.

- Ⓐ $m \in \left(-\frac{2}{3}; 1\right]$. Ⓑ $m \in \left(\frac{2}{3}; 1\right]$. Ⓒ $m \in \left[-\frac{2}{3}; 1\right)$. Ⓓ $m \in \left[\frac{2}{3}; 1\right)$.

Lời giải.

Phương trình $\Leftrightarrow \sin^2 x + 2 = 3m$, do $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $0 < \sin^2 x \leq 1$.

Vậy $2 < \sin^2 x + 2 \leq 3$ nên $2 < 3m \leq 3 \Leftrightarrow \frac{2}{3} < m \leq 1$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 170. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình

$$4 \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = m^2 + \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x$$

có nghiệm?

- Ⓐ 5. Ⓑ 7. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & 4 \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = m^2 + \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x \\ \Leftrightarrow & 2 \left[\sin \left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin \left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \right] = m^2 + \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x \\ \Leftrightarrow & \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x + 2 = m^2 + \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x \\ \Leftrightarrow & \cos 2x = \frac{m^2 - 2}{2}. \end{aligned}$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \leq \frac{m^2 - 2}{2} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 \geq 0 \\ m^2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$.

Các giá trị nguyên của m là $-2; -1; 0; 1; 2$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 171. Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\cos \pi \left(x^2 + 2x - \frac{1}{2}\right) = \sin(\pi x^2)$ là

- Ⓐ $x = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$. Ⓑ $x = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$. Ⓒ $x = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$. Ⓓ $x = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \cos \left[\frac{\pi}{2} - \pi(x^2 + 2x) \right] = \sin(\pi x^2) \\ \Leftrightarrow & \sin [\pi(x^2 + 2x)] = \sin(\pi x^2) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \pi(x^2 + 2x) = \pi x^2 + k2\pi \\ \pi(x^2 + 2x) = \pi - \pi x^2 + k2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = k \\ 2x^2 + 2x - (2k + 1) = 0 \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}), \end{aligned}$$

Do $x > 0, k \in \mathbb{Z}$ nên suy ra $x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{4k + 3}}{2}$.

Để x dương và nhỏ nhất với $k \in \mathbb{Z}$ và $4k + 3 \geq 0$ thì $k = 0$.

$$\Rightarrow \min x = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

Chọn đáp án (D)

□

Câu 172. Số nghiệm của phương trình $\cos^4 x - \cos 2x + 2018 \sin^2 \frac{x}{3} = 0$ trong đoạn $[0; 16]$ là

(A) 1.

(B) 3.

(C) 0.

(D) 2.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \cos^4 x - \cos 2x + 2018 \sin^2 \frac{x}{3} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{4} (1 + \cos 2x)^2 - \cos 2x + 2018 \sin^2 \frac{x}{3} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4} (1 - \cos 2x)^2 + 2018 \sin^2 \frac{x}{3} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \sin \frac{x}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m\pi \\ \frac{x}{3} = n\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = 3n \\ x = m\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Theo giả thiết $0 \leq m\pi \leq 16 \Rightarrow m = 0, m = 3$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 173. Cho phương trình $\sin x \cos 4x - \sin^2 2x = 4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) - \frac{7}{2}$. Tìm số nghiệm của phương trình thỏa mãn $|x - 1| < 3$.

(A) 1.

(B) 4.

(C) 2.

(D) 3.

Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} \sin x \cos 4x - \frac{1 - \cos 4x}{2} &= 2(1 - \sin x) - \frac{7}{2} \\ \Leftrightarrow 2 \sin x \cos 4x + \cos 4x + 2(2 \sin x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\cos 4x + 2)(2 \sin x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \sin x + 1 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Do $|x - 1| < 3$ nên ta có các nghiệm $x = -\frac{\pi}{6}$ và $x = \frac{7\pi}{6}$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 174. Gọi S là tập hợp tất cả các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2018)$ của phương trình $\sqrt{3}(1 - \cos 2x) + \sin 2x - 4 \cos x + 8 = 4(\sqrt{3} + 1) \sin x$. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

(A) 103255π .

(B) 102827π .

(C) $\frac{312341\pi}{3}$.

(D) $\frac{310408\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{3}(1 - \cos 2x) + \sin 2x - 4\cos x + 8 = 4(\sqrt{3} + 1)\sin x \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{3}(1 - \cos 2x - 4\sin x) + \sin 2x - 4\cos x + 8 - 4\sin x = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{3}(2\sin^2 x - 4\sin x) + 2\sin x \cdot \cos x - 4\cos x - 4\sin x + 8 = 0 \\
 \Leftrightarrow & 2\sqrt{3}\sin x \cdot (\sin x - 2) + 2(\sin x - 2) \cdot (\cos x - 2) = 0 \\
 \Leftrightarrow & 2(\sin x - 2) \cdot (\sqrt{3}\sin x + \cos x - 2) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (\sin x - 2) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x - 1 \right) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (\sin x - 2) \left[\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) - 1 \right] = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 1 \quad (\text{vì } \sin x - 2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}) \\
 \Leftrightarrow & x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\
 \Leftrightarrow & x = \frac{\pi}{3} + k2\pi.
 \end{aligned}$$

$$\text{Xét } x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \in (0; 2018) \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{3} + k2\pi < 2018 \Leftrightarrow -\frac{1}{6} < k < \frac{1009}{\pi}.$$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0; 1; 2; \dots; 321\}$.

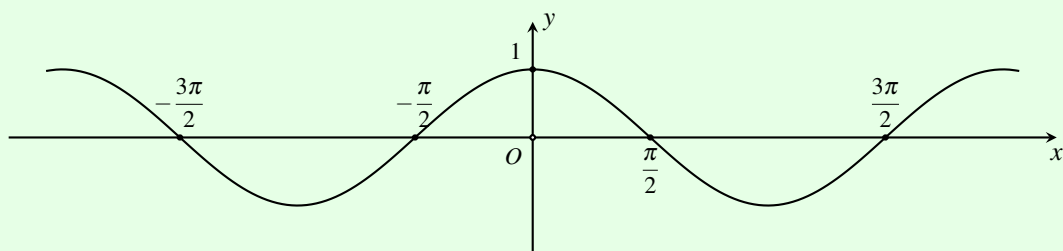
Tổng tất cả các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2018)$ là

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{\pi}{3} + \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi \right) + \left(\frac{\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi \right) + \dots + \left(\frac{\pi}{3} + 321 \cdot 2\pi \right) \\
 &= 322 \cdot \frac{\pi}{3} + (1 + 2 + \dots + 321) \cdot 2\pi \\
 &= \frac{322\pi}{3} + \frac{321 \cdot (321 + 1)}{2} \cdot 2\pi \\
 &= \frac{310408\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D)

□

Câu 175. Dựa vào đồ thị hàm số $y = \cos x$ (tham khảo hình vẽ dưới đây), hãy tìm tất cả các giá trị của x để $\cos x < 0$.



(A) $-\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2}.$

(B) $\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

(C) $-\frac{3\pi}{2} + k2\pi < x < -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

(D) $\begin{cases} -\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

Lời giải.

Ta thấy trên các khoảng $\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, đồ thị nằm bên dưới trục hoành, ứng với $\cos x < 0$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 176. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = 2m \cdot \tan 2x$ có nghiệm?

- (A) $m \leq -1$ hoặc $m \geq 1$.
 (B) $m < -\frac{1}{8}$ hoặc $m > \frac{1}{8}$.
 (C) $m \leq -\frac{1}{4}$ hoặc $m \geq \frac{1}{4}$.
 (D) $m \leq -2$ hoặc $m \geq 2$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$. Ta có

$$\frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = 2m \cdot \tan 2x \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = 2m \cdot \sin 2x.$$

Đặt $\sin 2x = t, (-1 \leq t \leq 1)$, ta được phương trình

$$-3t^2 - 8mt + 4 = 0. \quad (*)$$

(*) có $\Delta' = 16m^2 + 12 > 0$ nên (*) luôn có hai nghiệm phân biệt. Do $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq \pm 1$ nên phương trình đã cho có nghiệm thì (*) phải có nghiệm thuộc khoảng $(-1; 1)$. Khi đó một trong các trường hợp sau xảy ra

- Trường hợp (*) có 2 nghiệm thuộc $(-1; 1)$, tức là

$$-1 < t_1 < t_2 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \cdot f(-1) > 0 \\ -3 \cdot f(1) > 0 \\ -1 < \frac{S}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3(1+8m) > 0 \\ -3(1-8m) > 0 \\ -1 < -\frac{4m}{3} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{1}{8} \\ m > \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{4} < m < \frac{3}{4} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hệ vô nghiệm.

- Trường hợp (*) có 1 nghiệm thuộc $(-1; 1)$, tức là

$$\begin{cases} -1 < t_1 < 1 < t_2 \\ t_1 < -1 < t_2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(-1) \cdot f(1) < 0 \Leftrightarrow (1+8m)(1-8m) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{1}{8} \\ m > \frac{1}{8} \end{cases}$$

Vậy với $m < -\frac{1}{8}$ hoặc $m > \frac{1}{8}$ thì phương trình có nghiệm.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 177. Trong khoảng $(0; 20\pi)$ phương trình $\frac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- (A) 20. (B) 10. (C) 30. (D) 15.

Lời giải.

Điều kiện xác định $2\cos x - \sqrt{3} \neq 0$.

Khi đó, phương trình tương đương với $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Phương trình $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. Để thấy các giá trị này thỏa mãn điều kiện xác định và trong khoảng $(0; 20\pi)$ họ này có 10 nghiệm.

Phương trình $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$. Để thấy các giá trị $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$ thỏa mãn điều kiện xác định và trong

khoảng $(0; 20\pi)$ họ này có 10 nghiệm.

Vậy trong khoảng $(0; 20\pi)$ phương trình có 20 nghiệm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 178. Tìm tất cả các số thực m để phương trình $\cos 3x + (m+1)\cos x - \cos 2x = 1$ có 7 nghiệm phân biệt trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.

(A) $1 < m < 3$.

(B) $0 < m < 2$.

(C) $-2 < m < 2$.

(D) $-1 < m < 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\cos 3x + (m+1)\cos x - \cos 2x = 1 &\Leftrightarrow \cos 3x + \cos x + m\cos x = 2\cos^2 x \\ &\Leftrightarrow 2\cos 2x\cos x + m\cos x - 2\cos^2 x = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos x [2(2\cos^2 x - 1) - 2\cos x + m] = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos x (4\cos^2 x - 2\cos x + m - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 4\cos^2 x - 2\cos x + m - 2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 4\cos^2 x - 2\cos x + m - 2 = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Để thấy phương trình $\cos x = 0$ có hai nghiệm $x = \frac{\pi}{2}$ và $x = \frac{3\pi}{2}$ trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Xét phương trình $4\cos^2 x - 2\cos x + m - 2 = 0$ với $\Delta' = 9 - 4m$. Trường hợp $\Delta' \leq 0$, để kiểm tra phương trình $4\cos^2 x - 2\cos x + m - 2 = 0$ có tối đa 4 nghiệm. Do đó ta xét trường hợp $\Delta' > 0$, ta có

$$4\cos^2 x - 2\cos x + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1 + \sqrt{9 - 4m}}{4} \\ \cos x = \frac{1 - \sqrt{9 - 4m}}{4} \end{cases}.$$

Ta có $m < \frac{9}{4}$, suy ra $\frac{1 + \sqrt{9 - 4m}}{4} \in \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

- Với $\frac{1 + \sqrt{9 - 4m}}{4} \in (1; +\infty)$, ta được $\frac{1 - \sqrt{9 - 4m}}{4} \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$. Khi đó phương trình

$$\cos x = \frac{1 - \sqrt{9 - 4m}}{4}$$

có tối đa 3 nghiệm trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$, hay phương trình ở đề bài có tối đa 5 nghiệm.

- Với $\frac{1 + \sqrt{9 - 4m}}{4} \in \{1\}$, ta được $\frac{1 - \sqrt{9 - 4m}}{4} \in \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. Suy ra tập nghiệm của phương trình ở đề bài là

$$S = \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 0; -\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\}.$$

- Với $\frac{1 + \sqrt{9 - 4m}}{4} \in \left(\frac{1}{4}; 1\right)$, ta được $\frac{1 - \sqrt{9 - 4m}}{4} \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$. Khi đó phương trình

$$\cos x = \frac{1 + \sqrt{9 - 4m}}{4}$$

có 2 nghiệm trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.

- Với $\frac{1 - \sqrt{9 - 4m}}{4} \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, phương trình $\cos x = \frac{1 - \sqrt{9 - 4m}}{4}$ có 3 nghiệm trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.
Nên phương trình ở đề bài có 7 nghiệm.
- Với $\frac{1 - \sqrt{9 - 4m}}{4} \in \left[0; \frac{1}{4}\right)$, phương trình $\cos x = \frac{1 - \sqrt{9 - 4m}}{4}$ có 2 nghiệm trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.
Nên phương trình ở đề bài có 6 nghiệm.

Vậy các giá trị của m phải thỏa mãn $\frac{1 - \sqrt{9 - 4m}}{4} \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ hay $0 < m < 2$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 179. Tìm m để phương trình $\sin^4 x + \cos 2x + m \cos^6 x = 0$ có nghiệm trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

- (A) $m \in (1; 2)$. (B) $m \in (-\infty; -1)$. (C) $m \in (-2; -1)$. (D) $m \in (-2; 0)$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(1 - \cos^2 x)^2 + 2\cos^2 x - 1 + m\cos^6 x = 0 \Leftrightarrow \cos^4 x + m\cos^6 x = 0. \quad (1)$$

Đặt $t = \cos^2 x$. Do $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ nên $\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < t < 1$. Từ (1) ta có

$$t^2 + mt^3 = 0 \stackrel{\text{do } t > 0}{\Leftrightarrow} 1 + mt = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{m}.$$

Vậy điều kiện để phương trình đã cho nghiệm trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ là

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} < -\frac{1}{m} < 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{m} + \frac{1}{2} < 0 \\ \frac{1}{m} + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2+m}{2m} < 0 \\ \frac{m+1}{m} > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-2; 0) \\ m \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-2; -1). \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C)

□

Câu 180. Tìm điều kiện của m để phương trình $\sin^2 x + \cos 2x = m$ có nghiệm trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$.

- (A) $m < 1$. (B) $\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{1}{2}$. (C) $\frac{1}{4} \leq m \leq 1$. (D) $0 \leq m \leq 1$.

Lời giải.

Cách 1. Ta có

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos 2x = m &\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} + \cos 2x = m \\ &\Leftrightarrow 1 - \cos 2x + 2\cos 2x = 2m \Leftrightarrow \cos 2x = 2m - 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Ta có $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leq 2x \leq \frac{2\pi}{3}$. Do đó $-\frac{1}{2} \leq \cos 2x \leq 1$. Vậy phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$-\frac{1}{2} \leq 2m - 1 \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 2m \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq m \leq 1.$$

Cách 2. Ta có

$$\sin^2 x + \cos 2x = m \Leftrightarrow \sin^2 x + 1 - 2\sin^2 x = m \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - m. \quad (2)$$

Do $x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ nên $-\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, do đó $0 \leq \sin^2 x \leq \frac{3}{4}$.

Vậy (2) có nghiệm $\Leftrightarrow 0 \leq 1 - m \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq m \leq 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 181. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{x}{\tan x}$.

(A) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(B) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(C) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(D) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} \tan x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 182. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$$2\sin^2 x + 3\sin 2x - (m+2)\cos^2 x = 3$$

có nghiệm trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$.

(A) $-12 < m < 4$.

(B) $-2 < m < 1$.

(C) $m \leq 4$.

(D) $-12 < m < 0$.

Lời giải.

Nhận thấy $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình. Chia hai vế về phương trình cho $\cos^2 x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với:

$2\tan^2 x + 6\tan x - m - 2 = 3\tan^2 x + 3$, đặt $t = \tan x$

Phương trình đã cho trở thành

$-t^2 + 6t - 5 = m$, với $t \in (-1; 1)$.

Từ BBT, để phương trình có nghiệm thì $-12 < m < 0$.

Chọn đáp án (D) □

t	-1	1
$-t^2 + 6t - 5$	-12	0

Câu 183. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt[3]{m+3}\sqrt[3]{m+3}\cos x = \cos x$ có nghiệm thực là

(A) 3.

(B) 7.

(C) 2.

(D) 5.

Lời giải.

Đặt $\sqrt[3]{m+3}\cos x = t, a = \cos x \Rightarrow \begin{cases} t^3 = m+3a & (1) \\ a^3 = m+3t & (2) \end{cases}$.

Lấy (1) trừ (2) ta được $t^3 - a^3 = -3(t-a) \Rightarrow (t-a)(t^2 + at + t^2 + 3) = 0 \Rightarrow t = a$.

Với $t = a$, thay vào (1) ta được $t^3 - 3t = m$.

Xét $f(t) = t^3 - 3t$ trên đoạn $[-1; 1]$, ta có $f'(t) = 3t^2 - 3 = 0 \Rightarrow t = \pm 1 \Rightarrow$ bảng biến thiên

t	-1	1
$f'(t)$	0	0
$f(t)$	2	-2

Để phương trình có nghiệm thì $-2 \leq m \leq 2$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên có 5 giá trị của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 184. Phương trình $2017^{\sin x} = \sin x + \sqrt{2 - \cos^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-5\pi; 2017\pi]$.
 (A) 20177. (B) 2023. (C) 0. (D) 2022.

Lời giải.

Ta có $2017^{\sin x} = \sin x + \sqrt{2 - \cos^2 x} \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x} - 2017^{\sin x} = 0$ (*).

Đặt $t = \sin x, t \in [-1; 1]$, phương trình (*) trở thành $t + \sqrt{1 + t^2} - 2017^t = 0$.

Đặt $f(t) = t + \sqrt{1 + t^2} - 2017^t \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} - 2017^t \ln 2017$.

Đặt $g(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}, h(t) = 2017^t \ln 2017 \Rightarrow f'(t) = g(t) - h(t)$.

Tại $t = -1 \Rightarrow f(-1) = \sqrt{2} - 1 - \frac{1}{2017} > 0$.

Tại $t = 1 \Rightarrow f(1) = \sqrt{2} + 1 - 2017 < 0$.

Trên $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ ta có $g'(t) = \frac{1}{(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}} > 0, h'(t) = 2017^t \ln^2 2017 > 0 \Rightarrow g(t)$ và $h(t)$ là hàm đồng biến.

Mà $h(-\frac{1}{2}) < g(-1) \Rightarrow$ trên khoảng xét ta có $f'(t) = g(t) - h(t) > 0 \Rightarrow f(t) > 0$.

Trên $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ ta có $g'(t) = \frac{1}{(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}} < 1, h'(t) > 1 \Rightarrow f''(t) = g'(t) - h'(t) < 0 \Rightarrow f'(t)$ đơn điệu giảm $\Rightarrow f(t)$ đến lúc nào đó sẽ đơn điệu giảm. Nên phương trình $f(t) = 0$ có tối đa một nghiệm. Để thấy đó là

$$t = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy trong $[-5\pi; 2017\pi]$ có 2023 nghiệm thuộc dạng $k\pi$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 185. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số của hàm số $y = \frac{2 \sin x + \cos x + 3}{2 \cos x - \sin x + 4}$ lần lượt là:
 (A) $M = \frac{2}{3}; m = 0$. (B) $M = 2; m = \frac{2}{11}$. (C) $M = 1; m = -1$. (D) $M = 1; m = -2$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} y = \frac{2 \sin x + \cos x + 3}{2 \cos x - \sin x + 4} &\Leftrightarrow 2y \cdot \cos x - y \cdot \sin x + 4y = 2 \sin x + \cos x + 3 \\ &\Leftrightarrow (2y - 1) \cos x - (y + 2) \cdot \sin x = 3 - 4y \quad (1) \end{aligned}$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$(2y - 1)^2 + (y + 2)^2 \geq (3 - 4y)^2 \Leftrightarrow 11y^2 - 24y + 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{11} \leq y \leq 2.$$

Vậy $\max y = 2, \min y = \frac{2}{11}$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 186. Cho phương trình $\sin^2 4x + (m^2 - 3) \sin 4x + m^2 - 4 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

(A) $-2 \leq m < 2$. (B) $m = 2, m = -2$. (C) $-2 \leq m \leq 2$. (D) $-2 < m < 2$.

Lời giải.

Ta có:

$$\sin^2 4x + (m^2 - 3) \sin 4x + m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x = -1 \\ \sin 4x = 4 - m^2 \end{cases} \quad (1)$$

Trong các nghiệm $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) của phương trình $\sin 4x = -1$ chỉ có nghiệm $\frac{15\pi}{8}$ thuộc đoạn $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Vậy từ (1) suy ra điều kiện để phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm x thuộc $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ là phương trình $\sin 4x = 4 - m^2$ có đúng ba nghiệm $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$, tức là phương trình $\sin u = 4 - m^2$ có đúng ba nghiệm $u \in [6\pi; 8\pi]$, nghĩa là

$$4 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2.$$

Khi $m = \pm 2$, phương trình $\sin u = 4 - m^2$ trở thành:

$$\sin 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Trong đoạn $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ chỉ có các nghiệm $\frac{6\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{8\pi}{4}$.

Kết luận: Điều kiện để phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm x thuộc $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ là $m = \pm 2$ và bốn nghiệm đó là $\frac{15\pi}{8}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 187. Nghiệm của phương trình: $\sin^2 x + \sin^2 3x = \cos^2 2x + \cos^2 4x$ được biểu diễn bởi bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác?

(A) 16.

(B) 14.

(C) 18.

(D) 12.

Lời giải.

Hạ bậc ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{1}{2}(1 - \cos 6x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 8x) \\ \Leftrightarrow & \Leftrightarrow -(\cos 2x + \cos 6x) = \cos 4x + \cos 8x \\ \Leftrightarrow & 2\cos 2x(\cos 4x + \cos 6x) = 0 \\ \Leftrightarrow & 4\cos 2x\cos 5x\cos x = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 2x = 0 \\ \cos 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đó các nghiệm của phương trình đã cho được biểu diễn bởi 14 điểm trên đường tròn lượng giác.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 188. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left| \sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \right|$.

(A) $\sqrt{2} - 1$.

(B) $\sqrt{2} + 1$.

(C) $2\sqrt{2} - 1$.

(D) $2\sqrt{2} + 1$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x + \cos x$, $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ và $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$. Ta có

$$\begin{aligned} y &= \left| \sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \right| \\ &= \left| \frac{(\sin x + \cos x) \sin x \cos x + 1 + \sin x + \cos x}{\sin x \cos x} \right| \end{aligned}$$

$$= \left| t - 1 + \frac{2}{t-1} + 1 \right|.$$

Với $t - 1 > 0$ áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có $y \geq 2\sqrt{2} + 1$.

Với $t - 1 < 0$ áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có $1 - t + \frac{2}{1-t} \geq 2\sqrt{2}$ nên $y \leq 1 - 2\sqrt{2}$.

Từ đó $y \geq 2\sqrt{2} - 1$. Đẳng thức xảy ra khi $t = 1 - 2\sqrt{2}$, hay $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ nên tồn tại x .

Chọn đáp án (C)

□

Câu 189. Tìm điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{\tan x}{\cot x - 1}$.

(A) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x \neq k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

(B) $x \neq \frac{k\pi}{2}$ và $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

(C) $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x \neq k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

(D) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Hàm $\tan x$ xác định khi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, hàm $\cot x$ xác định khi $x \neq k\pi$. Phân thức có nghĩa khi $\cot x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Vậy hàm số có nghĩa khi $x \neq \frac{k\pi}{2}$ và $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 190. Phương trình $\frac{(3 + 2\sin x)\cos x - (2 + \cos^2 x)}{\sin 2x} = 1$ có bao nhiêu nghiệm trên $[0; 4\pi]$?

(A) 3.

(B) 2.

(C) 1.

(D) 0.

Lời giải.

Điều kiện: $\sin 2x \neq 0$.

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow 3\cos x + \sin 2x - 2 - \cos^2 x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = 2 \end{cases}.$$

Phương trình $\cos x = 2$ vô nghiệm.

Phương trình $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ không thỏa điều kiện $\sin 2x \neq 0$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 191. Cho hàm số $f(x) = (m - 1)\sin 4x - \cos 4x + 4mx + 2018$, m là tham số. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m trong đoạn $[-6; 2018]$ để phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm.

(A) 2018.

(B) 6.

(C) 8.

(D) 4.

Lời giải.

$$\text{Ta có } f'(x) = 4(m - 1)\cos(4x) + 4\cos(4x) + 4m \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow (m - 1)\cos(4x) + \cos(4x) = -m.$$

Để phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi $(m - 1)^2 + 1 \geq m^2 \Leftrightarrow m \leq 1$.

Vì $m \in [-6; 2018] \Rightarrow -6 \leq m \leq 1$. Vậy có tất cả 8 giá trị nguyên của m để phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 192. Cho phương trình $3\sin x \cos^2 x - \sin^3 x = \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$ (1). Gọi $(\mathcal{H})$ là hình tạo bởi các điểm biểu diễn nghiệm của (1) trên đường tròn lượng giác. Tính diện tích hình $(\mathcal{H})$.

(A) $\frac{2 + \sqrt{2}}{4}$.

(B) $\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})$.

(C) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$.

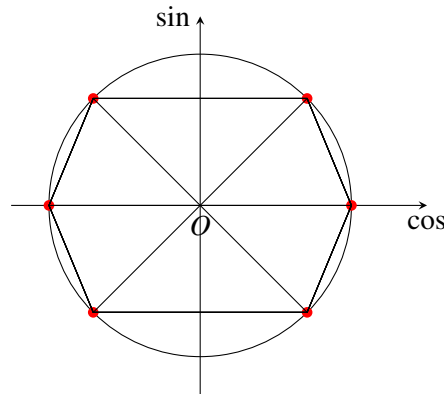
(D) $1 + \sqrt{2}$.

Lời giải.

• Ta có (1) $\Leftrightarrow 3\sin x \cos^2 x - \sin^3 x = \sin x$

- Với $\cos x = 0$, phương trình trở thành $-\sin^3 x = \sin x \Leftrightarrow \sin x = 0$ (loại).
- Với $\cos x \neq 0$, ta có

$$(1) \Leftrightarrow 3 \tan x - \tan^3 x = \tan x(1 + \tan^2 x) \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 0 \\ \tan x = \pm 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$



Các điểm biểu diễn nghiệm được cho như hình vẽ. Ta có diện tích của hình ($\mathcal{H}$) bằng

$$4 \cdot 1 \cdot 1 \sin 45^\circ + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 90^\circ = 1 + \sqrt{2}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 193. Cho phương trình $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x - 2(\sqrt{3} \sin x + \cos x) - m = 0$. Để phương trình chỉ có hai nghiệm x_1, x_2 thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ thì $m \in (a; b)$. Giá trị của $b - a$ là

- (A)** 4. **(B)** $4\sqrt{3} - 2$. **(C)** $4 - 2\sqrt{3}$. **(D)** $3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{3} \sin x + \cos x$ (*)

$$\Rightarrow t^2 = 3 \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x = 2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x + 1$$

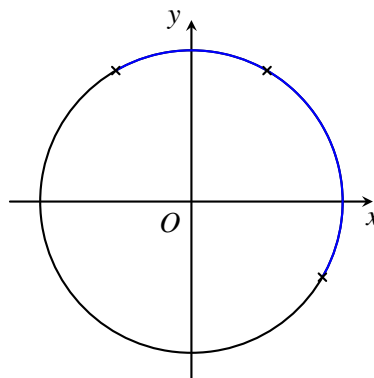
$$\Rightarrow 2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = t^2 - 1.$$

Phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 1 = 2t - m = 0 \Leftrightarrow m + 1 = t^2 - 2t. \quad (1)$$

Do $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $t = \sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right) \in [-1; 2]$.

Với mỗi $t \in [-1; \sqrt{3})$ thì tương ứng sẽ cho một nghiệm x thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ và mỗi $t \in [\sqrt{3}; 2]$ thì sẽ cho hai nghiệm x thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$. Vậy yêu cầu bài toán tương đương với tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thuộc $[-1; \sqrt{3})$ hoặc chỉ có một nghiệm thuộc $[\sqrt{3}; 2]$ và không có nghiệm thuộc $[-1; \sqrt{3})$.



Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2t$ có bảng biến thiên

t	-1	1	$\sqrt{3}$	2
$f(t)$	3		$3 - 2\sqrt{3}$	0

$\swarrow$ $\searrow$
 -1

Dựa vào bảng biến thiên ta được

$$-1 < m + 1 < 3 - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow -2 < m < 2 - 2\sqrt{3}.$$

Suy ra $a = -2, b = 2 - 2\sqrt{3} \Rightarrow b - a = 4 - 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 194. Phương trình $\cos \left[2 \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right] + 4 \cos \left(\frac{\pi}{6} - x \right) = \frac{5}{2}$ có nghiệm là

- (A) $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. (B) $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.
 (C) $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. (D) $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \cos \left[2 \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right] + 4 \cos \left(\frac{\pi}{6} - x \right) &= \frac{5}{2} \Leftrightarrow 1 - 2 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 4 \cos \left[\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right] = \frac{5}{2} \\ &\Leftrightarrow 1 - 2 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 4 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{5}{2} \\ &\Leftrightarrow 4 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - 8 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D)

□

Câu 195. Có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn các nghiệm của phương trình $\cos 3x + (2 \sin 2x + 1)(\sin 2x - \cos x) = 0$?

- (A) 7 điểm. (B) 10 điểm. (C) 8 điểm. (D) 9 điểm.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} &\cos x [4 \cos^2 x - 3 + (2 \sin 2x + 1)(2 \sin x - 1)] = 0 \\ \Leftrightarrow &\cos x (4 \cos^2 x - 4 + 4 \sin 2x \sin x - 2 \sin 2x + 2 \sin x) = 0 \\ \Leftrightarrow &\cos x (-4 \sin^2 x + 4 \sin 2x \sin x - 4 \sin x \cos x + 2 \sin x) = 0 \\ \Leftrightarrow &\sin 2x (-2 \sin x + 2 \sin 2x - 2 \cos x + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow &\sin 2x (2 \cos x - 1)(2 \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đó có 8 điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn các nghiệm của phương trình đã cho.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 196. Tập nghiệm S của phương trình $\sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2}\right)$ là

- (A) $S = \left\{ \frac{7\pi}{15} + k\pi, \frac{2\pi}{15} + k\pi, \frac{3\pi}{10} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$
 (B) $S = \left\{ \frac{14\pi}{15} + k2\pi, \frac{4\pi}{15} + k2\pi, \frac{3\pi}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$
 (C) $S = \left\{ \frac{14\pi}{15} + k\pi, \frac{4\pi}{15} + k\pi, \frac{3\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$
 (D) $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Phương trình} &\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{30} + \frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} \left(3 \sin\left(\frac{\pi}{30} + \frac{x}{2}\right) - 4 \sin^3\left(\frac{\pi}{30} + \frac{x}{2}\right)\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{30} + \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{30} + \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(3 \sin\left(\frac{\pi}{30} + \frac{x}{2}\right) - 4 \sin^3\left(\frac{\pi}{30} + \frac{x}{2}\right)\right) \\ &\Leftrightarrow 4 \sin^3\left(\frac{\pi}{30} + \frac{x}{2}\right) - 4 \sin\left(\frac{\pi}{30} + \frac{x}{2}\right) + \sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{30} + \frac{x}{2}\right) = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

- $\sin\left(\frac{\pi}{30} + \frac{x}{2}\right) = 0$ không thỏa mãn.
- Với $\sin\left(\frac{\pi}{30} + \frac{x}{2}\right) \neq 0$, chia hai vế của (*) cho $\sin^3\left(\frac{\pi}{30} + \frac{x}{2}\right)$ và đặt $t = \cot\left(\frac{\pi}{30} + \frac{x}{2}\right)$ ta được phương trình

$$\begin{aligned} 4 - 4(1 + t^2) + \sqrt{3}t(1 + t^2) &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}t^3 - 4t^2 + \sqrt{3}t = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \sqrt{3} \\ t = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{14\pi}{15} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{15} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{5} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 197. Tập nghiệm S của phương trình $\cos\left(x + \frac{3\pi}{7}\right) - 3 \cos\left(\frac{\pi}{14} - x\right) + \frac{2 \sin\left(x + \frac{3\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{7} - 2x\right)} = 0$ là

- (A) $S = \left\{ -\frac{19\pi}{28} + k\pi, -\frac{3\pi}{7} - \arctan(2) + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$
 (B) $S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, -\arctan(2) + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$
 (C) $S = \left\{ -\frac{5\pi}{28} + k\pi, -\frac{3\pi}{7} + \arctan(2) + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$
 (D) $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, \arctan(2) + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \sin\left(\frac{\pi}{7} - 2x\right) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{7} - 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{14} - k\frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Phương trình} &\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{3\pi}{7}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{3\pi}{7} + x\right)\right) + \frac{2\sin\left(x + \frac{3\pi}{7}\right)}{\sin\left(\pi - \left(\frac{6\pi}{7} + 2x\right)\right)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{3\pi}{7}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{3\pi}{7} + x\right)\right) + \frac{2\sin\left(x + \frac{3\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{6\pi}{7} + 2x\right)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{3\pi}{7}\right) - 3\sin\left(x + \frac{3\pi}{7}\right) + \frac{1}{\cos\left(x + \frac{3\pi}{7}\right)} = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - 3\tan\left(x + \frac{3\pi}{7}\right) + 1 + \tan^2\left(x + \frac{3\pi}{7}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \tan\left(x + \frac{3\pi}{7}\right) = 1, \\ \tan\left(x + \frac{3\pi}{7}\right) = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5\pi}{28} + k\pi \\ x = -\frac{3\pi}{7} + \arctan(2) + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 198. Gọi a, b là các số để phương trình $x^2 + 5 = 2[x - 2\cos(ax + b)]$ có nghiệm. Tính tổng $T = a + b$.

(A) $T = \frac{k\pi}{3}$.

(B) $T = \pi + k2\pi$.

(C) $T = k2\pi$.

(D) $T = k\pi$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $x^2 - 2x + 5 = -4\cos(ax + b)$.

- Ta có $x^2 - 2x + 5 = (x - 1)^2 + 4 \geq 4$ và $-4\cos(ax + b) \leq 4$.
- Do đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 5 = 4 \\ -4\cos(ax + b) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ a + b = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Chọn đáp án (B) □