

Câu 1 (1,5 điểm). Cho hàm số $y = \frac{-x-1}{x-3}$ có đồ thị (C).

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C).
b) Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C). Tìm các số thực m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B tạo thành tam giác ABI có trọng tâm nằm trên (C).

Câu 2 (0,5 điểm). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x\sqrt{(5-x)^3}$ trên đoạn $[0; 5]$.

Câu 3 (1,0 điểm)

- a) Xác định phần thực và phần ảo của số phức z biết rằng: $\bar{z} = \frac{1+3i}{1-i} + 3 - i$.
b) Giải phương trình sau: $\log_3(3^{x+2} - 6) = 2x + 1$

Câu 4 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx$

Câu 5 (1,0 điểm). Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 2 = 0$. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm là điểm I nằm trên đường thẳng d đồng thời (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) và mặt phẳng (yOz) .

Câu 6 (1,0 điểm).

- a) Giải phương trình: $\frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$
b) Một hộp có 30 viên bi, trong đó có 13 viên màu xanh, 9 viên bi màu đỏ và 8 viên bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên ra 4 viên bi. Tính xác suất để trong 4 viên bi lấy ra, có ít nhất một viên bi màu đỏ

Câu 7 (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh a , $BD = a$. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM = 2AM$. Biết hai mặt phẳng (SAC) và (SDM) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt bên (SAB) tạo với mặt đáy một góc 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a và cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng OM và SA .

Câu 8 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) , cho hình chữ nhật $ABCD$, gọi M là trung điểm của AB . Đường thẳng d đi qua M và D có phương trình $x - 2y + 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D , biết $A(1; 4)$ và đỉnh C nằm trên đường thẳng $\Delta: x + y - 5 = 0$ và hoành độ điểm C lớn hơn 3.

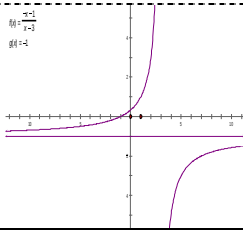
Câu 9 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y^3 + y^2 + 4(x - y - 1) = xy^2 \\ (x^2 + 1)y^2 + x^2(2y + 1) = x^2 - 3x - 2 \end{cases}$$

Câu 10 (1,0 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{(a\sqrt{2} + 1)(b\sqrt{2} + 1)(c\sqrt{2} + 1)}{abc}$.

-----HẾT-----

ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM

CÂU	NỘI DUNG	ĐIỂM																								
1	a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C): $y = \frac{-x-1}{x-3}$	1đ																								
	* Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ * Sự biến thiên: Chiều biến thiên: $y' = \frac{4}{(x-3)^2} > 0, \forall x \in D$ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$	0,25																								
	* Giới hạn và tiệm cận: Tiệm cận ngang: $y = -1$ vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -1, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -1$ Tiệm cận đứng: $x = 3$ vì $\lim_{x \rightarrow 3^-} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow 3^+} y = -\infty$	0,25																								
	Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>3</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td align="center">+</td><td></td><td align="center">+</td><td></td></tr><tr><td>y</td><td align="center">-1</td><td align="center" colspan="2">$\nearrow +\infty$</td><td align="center" colspan="2">$\nearrow -1$</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td align="center">$-\infty$</td><td></td><td></td></tr></table>	x	$-\infty$		3		$+\infty$	y'		+		+		y	-1	$\nearrow +\infty$		$\nearrow -1$					$-\infty$			0,25
	x	$-\infty$		3		$+\infty$																				
	y'		+		+																					
y	-1	$\nearrow +\infty$		$\nearrow -1$																						
			$-\infty$																							
Đồ thị : Nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng Đi qua: A (0; 1/3); B(-1; 0)		0,25																								
b) Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C). Tìm các số thực m để đường thẳng $d : y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B tạo thành tam giác ABI có trọng tâm nằm trên (C).	0,5đ																									
	- Giao điểm của hai đường tiệm cận I (3; -1) - Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{-x-1}{x-3} = x + m$ $\Leftrightarrow -x-1 = (x+m)(x-3)$ (do $x = 3$ không là nghiệm) $\Leftrightarrow x^2 + x(m-2) - 3m+1 = 0$ (*) - Vậy để đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow x^2 + x(m-2) - 3m+1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = m(m+8) > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -8) \cup (0; +\infty)$ Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của pt (*) Khi đó ta có $A(x_1; x_1 + m), B(x_2; x_2 + m)$ Khi đó trọng tâm G của tam giác ABI có tọa độ $G\left(\frac{x_1 + x_2 + 3}{3}; \frac{x_1 + x_2 + 2m - 1}{3}\right)$ Mặt khác ta có $x_1 + x_2 = 2 - m$ Vậy $G\left(\frac{5-m}{3}; \frac{m+1}{3}\right)$ Vậy để trọng tâm G thuộc (C) khi đó: $\frac{m+1}{3} = -1 - \frac{4}{\frac{5-m}{3} - 3} \Leftrightarrow \frac{m+1}{3} = -1 + \frac{12}{4+m} \Leftrightarrow m^2 + 8m - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -10 \end{cases}$ Kết luận: so với điều kiện, vậy với $m = 2; m = -10$ thỏa mãn yêu cầu bài toán	0,25																								

2	Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x\sqrt{(5-x)^3}$ trên đoạn $[0; 5]$.	0,5đ
	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 35x + 50 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ Ta có $f(0) = 0$; $f(5) = 0$; $f(2) = 6\sqrt{3}$ Vậy $\max f(x) = 6\sqrt{3}$; $\min f(x) = 0$ trên đoạn $[0; 5]$.	0,25 0,25
3	a)) Xác định phần thực và phần ảo của số phức z biết rằng: $\bar{z} = \frac{1+3i}{1-i} + 3 - i$.	0,5đ
	$\bar{z} = \frac{1+3i}{1-i} + 3 - i = (-1 + 2i) + 3 - i = 2 + i$ Số phức z là: $z = 2 - i$. Vậy phần thực là 2; phần ảo là -1	0,25 0,25
	b) Giải bất phương trình: $\log_3(3^{x+2} - 6) = 2x + 1$	0,5đ
	Điều kiện: $3^{x+2} - 6 > 0 \Leftrightarrow x > \log_3 \frac{2}{3}$. Pt $\Leftrightarrow 3^{x+2} - 6 = 3 \cdot 3^{2x}$	0,25
	$\Leftrightarrow 3 \cdot 3^{2x} - 9 \cdot 3^x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 1 \\ 3^x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad (tm) \\ x = \log_3 2 \quad (tm) \end{cases}$ Kết luận: Phương trình có 2 nghiệm: $x = 0$; $x = \log_3 2$	0,25
4	Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx$	0,5đ
	$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x dx}{\cos 2x} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x dx}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{1 - \tan^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$	0,25
	Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}}$.	0,25
	$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x dx}{\cos 2x} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t^4 dt}{1-t^2} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(-t^2 - 1 - \frac{1}{t^2-1} \right) dt$ $= \left(-\frac{t^3}{3} - t \right) \Big _0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt$	0,25
	$= -\frac{10\sqrt{3}}{27} - \frac{1}{2} \ln \left \frac{t-1}{t+1} \right \Big _0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\frac{10\sqrt{3}}{27} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ $= \frac{1}{2} \ln(2+\sqrt{3}) - \frac{10\sqrt{3}}{27}$	0,25

	Trong không gian tọa độ Oxyz cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) lần lượt có phương trình là $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$ và $x+2y-2z+2=0$. Lập phương trình mặt cầu (S) tâm là điểm I nằm trên đường thẳng (d) đồng thời (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) và mặt phẳng (yOz)	1đ
5	+) Điểm I nằm trên đường thẳng (d) Suy ra $I(-1+t; 1+2t), t \in \mathbb{R}$.	0,25
	+) Do (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P): $x+2y-2z+2=0$ ta có $d(I, (P)) = \frac{ t+2(-1+t)-2(2t+1)+2 }{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \frac{ t+2 }{3}$	0,25
	+) Do (S) tiếp xúc với mặt phẳng (yOz): $x=0$ ta có $d(I, (yOz)) = t$	0,25
	+) Ta có $\frac{ t+2 }{3} = t \Leftrightarrow \begin{cases} t+2=3t \\ t+2=-3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(1; 0; 3) \\ I(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; 0) \end{cases}, \begin{cases} R=1 \\ R=\frac{1}{2} \end{cases}$ *) Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 1 \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$	0,25
6	a) Giải phương trình: $\frac{(1+\sin x + \cos 2x)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x$	0,5đ
	ĐK: $\cos x \neq 0$ và $\tan x \neq -1$ Pt đã cho $\Leftrightarrow (1+\sin x + \cos 2x)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x \left(\frac{\sin x + \cos x}{\cos x}\right)$ $\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)(1+\sin x + \cos 2x) = \sin x + \cos x$ $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1+\sin x + \cos 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \quad (L) \\ \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (L) \\ 3x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \quad (k/h \text{ với đk})$ KL: Pt có 2 họ nghiệm: $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$; $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$	0,25
	b) Một hộp có 30 viên bi, trong đó có 13 viên màu xanh, 9 viên bi màu đỏ và 8 viên bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên ra 4 viên bi. Tính xác suất để trong 4 viên bi lấy ra, có ít nhất một viên bi màu đỏ.	0,5đ
	Chọn ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp có 30 viên bi thì số phần tử không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{30}^4 = 27405$ Gọi A là biến cố: “Trong 4 viên bi lấy ra có ít nhất một viên bi màu đỏ” $\Rightarrow \bar{A}$: “Trong 4 viên bi lấy ra không có viên bi màu đỏ nào” Ta có số phần tử của $\bar{A} \Rightarrow n(\bar{A}) = C_{21}^4 = 5985$. Vậy: $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 19/87$.	

	Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh a, $BD = a$. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM = 2AM$. Biết hai mặt phẳng (SAC) và (SDM) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt bên (SAB) tạo với mặt đáy một góc 60°. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a và cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng OM và SA.	1đ
7	Gọi $H = AC \cap DM$, Vì $(SAC) \perp (ABCD)$ và $(SDM) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$ Từ H kẻ HK vuông góc với B, $SK \perp AB \Rightarrow \angle SKH = 60^\circ$ chính là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$	0,25
	Do $AM \parallel CD$ nên suy ra: $\frac{HA}{HC} = \frac{AM}{CD} = \frac{1}{3} \Rightarrow AH = \frac{1}{4} AC = \frac{AO}{2}$ Mà tam giác ABD đều, AO là đường cao $AH = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow HK = AH \sin \widehat{HAK} = \frac{a\sqrt{3}}{8} \Rightarrow SH = HK \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{8}$ Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{8} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$	0.25
	Ta có $\cos(OM; SA) = \frac{ \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{SA} }{ \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{SA} }$, Mà ta có: $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{SA} = (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{AM}) \cdot (\overrightarrow{SH} + \overrightarrow{AH})$ $= \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AH}$ $= \frac{1}{2} AO^2 - AM \cdot AH \cdot \cos 30^\circ$ $= \frac{1}{2} \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \frac{a}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{4}$ Vậy $\cos(OM; SA) = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{a\sqrt{13}}{6} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{8}} = \frac{12}{\sqrt{273}}$	0.25
8	Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), cho điểm hình chữ nhật $ABCD$, M là trung điểm của AB. Đường thẳng (d) đi qua M và D có phương trình $x - 2y + 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D biết $A(1; 4)$, đỉnh C nằm trên đường thẳng $\Delta: x + y - 5 = 0$ và hoành độ điểm C lớn hơn 3.	1đ
	+) Ta có C nằm trên đường thẳng $\Delta: x + y - 5 = 0 \Rightarrow C(t; 5-t), (t \in \mathbb{R}, t > 3)$. +) Lại có $d(C, MD) = 2 \cdot d(A, MD) = 2 \cdot \frac{ 1 - 2 \cdot 4 + 2 }{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = 2\sqrt{5}$ $\Rightarrow \frac{ t - 2(5-t) + 2 }{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow 3t - 8 = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-2}{3} \\ t = 6 \end{cases} \Rightarrow C(6; -1)$ +) Ta có điểm D nằm trên đường thẳng $(d): x - 2y + 2 = 0 \Rightarrow D(2t - 2; t), (t \in \mathbb{R})$. Lại có $\overrightarrow{AD} = (2t - 3; t - 4); \overrightarrow{CD} = (2t - 8; t + 1)$ +) Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên	

	$\overline{AD} \cdot \overline{CD} = 0 \Leftrightarrow (2t-3)(2t-8) + (t-4)(t+1) = 0 \Leftrightarrow 5t^2 - 25t + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=4 \end{cases}$ KL: $C(6; -1), D(0; 1) \Rightarrow B(7; 2)$ hoặc $C(6; -1), D(6; 4) \Rightarrow B(1; -1)$	
9	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^3 + y^2 + 4(x-y-1) = xy^2 \\ (x^2+1)y^2 + x^2(2y+1) = x^2 - 3x - 2 \end{cases}$	1đ
	Biến đổi pt ban đầu về dạng $(y-2)(y+2)(y+1-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ y=-2 \\ y=x-1 \end{cases}$	0,25
	TH 1: Với $y=2$ thay vào pt (2): $8x^2 + 3x + 6 = 0$ vô nghiệm TH 2: Với $y=-2$ thay vào (2): $3x + 6 = 0 \Rightarrow x = -2$ suy ra nghiệm $(x; y) = (-2; -2)$	0,25
	TH 3: Với $y=x-1$ thay vào (2): $x^4 + x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - \frac{1}{2})^2 + (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{2} = 0$ (vn)	0,25
	KL: hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (-2; -2)$	0,25
10	Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{(a\sqrt{2}+1)(b\sqrt{2}+1)(c\sqrt{2}+1)}{abc}$.	1đ
	Sử dụng bất đẳng thức trung bình cộng và trung bình nhân cho ba số dương ta được: $1 = a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow \sqrt[3]{abc} \leq \frac{1}{3}$.	0,25
	Ta có $P = \frac{(a\sqrt{2}+1)(b\sqrt{2}+1)(c\sqrt{2}+1)}{abc} = \left(\sqrt{2} + \frac{1}{a}\right)\left(\sqrt{2} + \frac{1}{b}\right)\left(\sqrt{2} + \frac{1}{c}\right)$ $= 2\sqrt{2} + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \sqrt{2}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + \frac{1}{abc}$	0,25
	$\geq 2\sqrt{2} + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{abc}} + \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^3$ $= 2\sqrt{2} + 3 \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} + \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^3 = \left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^3$	0,25
	$\geq \left(\sqrt{2} + \frac{1}{\frac{1}{3}}\right)^3 = (\sqrt{2} + 3)^3$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng $(\sqrt{2} + 3)^3$.	0,25