

Câu 1. (5,0 điểm) Cho dãy số (a_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} a_1 = a \in \mathbb{R}, \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1-a_n^2}{na_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

a) Với $a = 2$, chứng minh rằng dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn.

b) Với $a > 0$, chứng minh rằng $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq n$ với mọi $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

Câu 2. (5,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) có ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H . Gọi M là trung điểm cạnh BC và P là hình chiếu vuông góc của H lên EF . Gọi Q là giao điểm của EF và BC .

a) Gọi R là giao điểm thứ hai của đường thẳng AP và đường tròn (O) . Chứng minh rằng đường thẳng DR đi qua điểm đối xứng của A qua đường thẳng OM .

b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và X là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DMR . Chứng minh rằng đường thẳng XH vuông góc với QG .

Câu 3. (5,0 điểm) Cho đa thức $P(x) = 4x^3 - 20x^2 + 25x$. Xét dãy các đa thức $(P_n(x))$ xác định bởi:

$$P_1(x), P_{n+1}(x) = P_1(P_n(x)) \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Với $P_1(x) = P(x)$, xác định số nghiệm thực phân biệt của $P_n(x)$ theo n .

b) Với $P_1(x) = P(1-x) + 8x^2 - 9$, gọi a_n là nghiệm dương nhỏ nhất của đa thức $P_n(x)$

với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng $T = \sum_{n=1}^{2026} a_n > \frac{3}{4}$.

Câu 4. (5,0 điểm) Cho hai dãy số $(a_n), (b_n)$ xác định như sau:

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n, \forall n \in \mathbb{N} \text{ và } b_0 = 0, b_1 = 1, b_{n+2} = 2b_{n+1} + b_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì

a) $a_n + b_n\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^n$ và cặp số a_n, b_n nguyên tố cùng nhau.

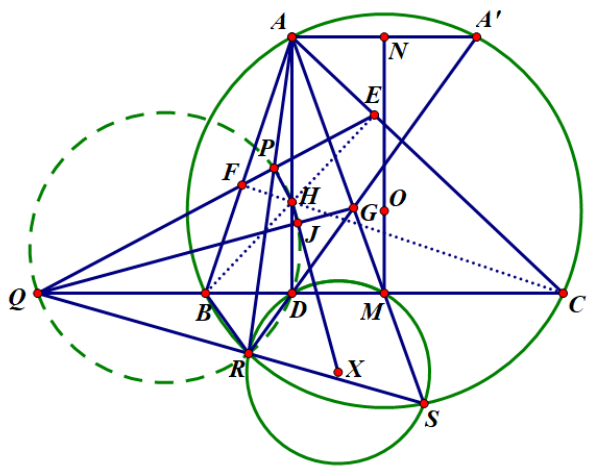
b) $\frac{b_{4n}}{2}$ là số nguyên nhưng không là số chính phương.

===== **HẾT** =====

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.
Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

(Hướng dẫn chấm có 06 trang)

Câu	Đáp án	Điểm
1	Cho dãy số (a_n) xác định bởi: $\begin{cases} a_1 = a \in \mathbb{R}, \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1-a_n^2}{na_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$ a) Với $a = 2$, chứng minh rằng dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn. b) Với $a > 0$, chứng minh rằng $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq n$ với mọi $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.	5,0
1.a. (2,5 điểm)	Ta có $a_1 = 2, a_2 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{5}{4}, a_4 = \frac{11}{10}$. Ta sẽ chứng minh quy nạp $a_n > 1$ với mọi $n \geq 3$. Thật vậy, giả sử mệnh đề đúng đến $n = k$. Xét $n = k+1$ ta có $a_{k+1} - 1 = a_k - 1 + \frac{1}{ka_k}(1 - a_k^2) = (a_k - 1) \left(1 - \frac{1}{ka_k}(a_k + 1) \right) = (a_k - 1) \cdot \frac{(k-1)a_k - 1}{ka_k}$ Theo giả thiết quy nạp thì $a_k > 1 > \frac{1}{k-1}, (k \geq 3)$ nên suy ra $a_{k+1} > 1$. Do đó mệnh đề đúng với mọi $n \geq 3$.	1,0
	Ta sẽ chứng minh quy nạp (a_n) giảm từ a_3 trở đi. Thật vậy, $a_3 > a_4 > 1$. Giả sử $a_3 > a_4 > \dots > a_n$. Ta sẽ chứng minh $a_n > a_{n+1}$. Thật vậy, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{na_n}(1 - a_n^2) < 0$ nên $a_{n+1} < a_n$. Vậy dãy (a_n) giảm và bị chặn dưới nên tồn tại giới hạn hữu hạn.	1,5
1.b. (2,5 điểm)	Ta có $a_{n+1} = a_n + \frac{1-a_n^2}{na_n} = a_n - \frac{a_n}{n} + \frac{1}{na_n}, n \geq 1$. Từ $a_1 = a > 0$ và quy nạp suy ra $a_n > 0$ với mọi $n \geq 1$.	0,5
	Ta có $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{na_n} - \frac{a_n}{n} \Leftrightarrow a_{n+1} = \left(a_n - \frac{a_n}{n} \right) + \frac{1}{na_n} \Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{n-1}{n} a_n + \frac{1}{na_n}$. Suy ra $\frac{1}{a_n} = na_{n+1} - (n-1)a_n$ với mọi $n \geq 1$. Khi đó $\begin{aligned} & \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \\ &= a_2 + (2a_3 - a_2) + (3a_4 - 2a_3) + \dots + (na_{n+1} - (n-1)a_n) \\ &= na_{n+1}. \end{aligned}$	0,5

	Ta chứng minh $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq n$ với mọi $n \geq 2$ bằng quy nạp. Với $n = 2$, ta có $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = a_2 + \frac{1}{a_2} \geq 2$. Giả sử $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq n$. Ta chứng minh $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} \geq n+1$.	0,5
	Nếu $a_{n+1} < 1$ thì $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} \geq n+1$. Nếu $a_{n+1} \geq 1$ thì ta có $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}}$ $= na_{n+1} + \frac{1}{a_{n+1}} = (n-1)a_{n+1} + \left(a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+1}}\right) \geq n-1+2 = n+1.$ Vậy theo quy nạp ta có điều phải chứng minh.	1,0
2	Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) có ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Gọi M là trung điểm cạnh BC và P là hình chiếu vuông góc của H lên EF. Gọi Q là giao điểm của EF và BC. a) Gọi R là giao điểm thứ hai của đường thẳng AP và đường tròn (O). Chứng minh rằng đường thẳng DR đi qua điểm đối xứng của A qua đường thẳng OM. b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và X là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DMR. Chứng minh rằng đường thẳng XH vuông góc với QG.	5,0
		
2.a. (2,0 điểm)	Gọi A' là điểm đối xứng của A qua đường thẳng OM. Ta có: $\angle PRB = \angle ARB = \angle ACB = \angle AFE = \angle AFP$ Suy ra tứ giác $FPRB$ nội tiếp. Khi đó ta có: $\overline{AP} \cdot \overline{AR} = \overline{AB} \cdot \overline{AF} = \overline{AH} \cdot \overline{AD}$. Suy ra R nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác PHD.	1,0
	Chú ý rằng $\angle HPQ = \angle HDQ = 90^\circ$ nên HQ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác PHD. Vậy năm điểm Q, P, H, D, R cùng nằm trên đường tròn đường kính HQ. Khi đó ta có: $\angle RDQ = \angle RPQ = 180^\circ - \angle ABR = \angle AA'R$ Kết hợp với $AA' \parallel QD$ ta có ba điểm R, D, A' thẳng hàng.	1,0

2.b. (3,0 điểm)	Gọi N là trung điểm AA'. Khi đó $DMNA$ là hình chữ nhật, suy ra $AA' = 2DM$. Ta có: $\frac{DM}{AA'} = \frac{GM}{GA} = \frac{1}{2}$ Mà $AA' \parallel QD$ nên theo định lý Thales đảo ta có D, G, A' thẳng hàng. Kết hợp với R, D, A' thẳng hàng, suy ra bốn điểm R, D, G, A' thẳng hàng.	0,5																
	Gọi $S \neq R$ là giao điểm thứ hai của QR và đường tròn (O) ta có: $\overline{QR} \cdot \overline{QS} = \overline{QB} \cdot \overline{QC} = \overline{QE} \cdot \overline{QF} = \overline{QD} \cdot \overline{QM}.$ Suy ra điểm S nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác DMR. Khi đó ta có: $\angle RSM = \angle RDQ = \angle RA'A = \angle RSA$ Suy ra S nằm trên đường thẳng AM, do đó G nằm trên MS.	1,0																
	Gọi J là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $RDMS.QG$, ta có $J \in QG$ và $XJ \perp QG$. (1) Lại có J nằm trên đường tròn (QDR) hay J nằm trên đường tròn đường kính QH, suy ra $\angle QJH = 90^\circ$. (2) Từ (1) và (2) ta có ba điểm X, J, H thẳng hàng và $XH \perp QG$.	1,5																
3	Cho đa thức $P(x) = 4x^3 - 20x^2 + 25x$. Xét dãy các đa thức $(P_n(x))$ xác định bởi: $P_1(x), P_{n+1}(x) = P_1(P_n(x)) \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$ a) Với $P_1(x) = P(x)$, xác định số nghiệm thực phân biệt của $P_n(x)$ theo n. b) Với $P_1(x) = P(1-x) + 8x^2 - 9$, gọi a_n là nghiệm dương nhỏ nhất của đa thức $P_n(x)$ với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng $T = \sum_{n=1}^{2026} a_n > \frac{3}{4}$.	5,0																
3.a. (2,5 điểm)	Với $P_1(x) = P(x) = 4x^3 - 20x^2 + 25x$. Ta có $P(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 20x^2 + 25x = 0 \Leftrightarrow x(2x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$. $P'(x) = 12x^2 - 40x + 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = \frac{5}{6} \end{cases}.$ Lập bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$\frac{5}{6}$</td><td>$\frac{5}{2}$</td><td>3</td></tr><tr><td>$P'(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>0</td><td>$\nearrow \frac{250}{27}$</td><td>$\searrow 0$</td><td>$\nearrow 3$</td></tr></table>	x	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{2}$	3	$P'(x)$	+	0	-	0	+	$P(x)$	0	$\nearrow \frac{250}{27}$	$\searrow 0$	$\nearrow 3$	0,5
x	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{2}$	3														
$P'(x)$	+	0	-	0	+													
$P(x)$	0	$\nearrow \frac{250}{27}$	$\searrow 0$	$\nearrow 3$														

	Ta thấy $P_2(x) = 0 \Leftrightarrow P(P_1(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P_1(x) = 0 \\ P_1(x) = \frac{5}{2} \end{cases}$ Từ bảng biến thiên suy ra $P_1(x) = \frac{5}{2}$ có 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;3)$ đồng thời khác 0 và $\frac{5}{2}$. Suy ra $P_2(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt. Ta chứng minh quy nạp rằng: số nghiệm thực phân biệt của phương trình $P_n(x) = t$ với $t \in (0;3)$ bằng 3^n, $\forall n \geq 1$. (*) Thật vậy, như trên đã chứng minh, mệnh đề (*) đúng với $n = 1$. Giả sử mệnh đề đúng đến $n = k$. Xét $n = k + 1$ ta có $P_{k+1}(x) = t \Leftrightarrow \begin{cases} P_k(x) = m \\ P_k(x) = n \\ P_k(x) = p \end{cases}$ với m, n, p phân biệt thuộc khoảng $(0;3)$. Theo giả thiết quy nạp mỗi phương trình trên có 3^k nghiệm thực phân biệt nên phương trình $P_{k+1}(x) = t$ có 3^{k+1} nghiệm thực phân biệt. Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề đúng với mọi $n \geq 1$.	1,0
	Gọi T_n là số nghiệm của $P_n(x)$. Ta có $T_1 = 2$. Với $n \geq 2$, ta có $P_n(x) = 0 \Leftrightarrow P(P_{n-1}(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P_{n-1}(x) = 0 \\ P_{n-1}(x) = \frac{5}{2} \end{cases}$ Ta thấy $P_{n-1}(x) = 0$ có T_{n-1} nghiệm phân biệt. Theo (*), phương trình $P_{n-1}(x) = \frac{5}{2}$ có 3^{n-1} nghiệm thực phân biệt nên $T_n = T_{n-1} + 3^{n-1}$. Khi đó $T_n = T_{n-1} + 3^{n-1} = T_{n-2} + 3^{n-2} + 3^{n-1} = \dots = T_1 + (3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}) = \frac{3^n + 1}{2}.$	1,0
3.b. (2,5 điểm)	Với $P_1(x) = P(1-x) + 8x^2 - 9 = 3x - 4x^3$.	0,5
	Nếu $x > 1$ thì $P_1(x) = x(4x^2 - 3) > 1$ nên $P_1(x)$ không có nghiệm thỏa mãn $x > 1$. Bằng quy nạp, ta suy ra $P_n(x) > 1$ nên $P_n(x)$ không có nghiệm thỏa mãn $x > 1$. Với $x \leq 1$, đặt $x = \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Khi đó $P_1(x) = 3 \sin t - 4 \sin^3 t = \sin(3t)$. Bằng quy nạp, ta chứng minh được $P_n(x) = \sin(3^n t)$. Do đó $P_n(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(3^n t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{k\pi}{3^n}$, $k \in \mathbb{Z}$.	1,0

	Do $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{k\pi}{3^n} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{3^n}{2} \leq k \leq \frac{3^n}{2}$. Do a_n là nghiệm dương nhỏ nhất nên $a_n = \sin \frac{\pi}{3^n}$.	
	Khảo sát hàm số, ta chứng minh được $\sin x \geq \frac{x}{2}, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.	0,5
	Khi đó ta có: $T = \sum_{n=1}^{2026} a_n = \sum_{n=1}^{2026} \sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right) > \sum_{n=1}^{2026} \frac{\pi}{2 \cdot 3^n} = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\sum_{n=1}^{2026} \frac{1}{3^n}\right) = \frac{\pi}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^{2026}}\right) > \frac{3}{4}.$	0,5
4	Cho hai dãy số $(a_n), (b_n)$ xác định như sau: $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n, \forall n \in \mathbb{N} \text{ và } b_0 = 0, b_1 = 1,$ $b_{n+2} = 2b_{n+1} + b_n, \forall n \in \mathbb{N}.$ Chứng minh rằng, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì a) $a_n + b_n \sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^n$ và cặp số a_n, b_n nguyên tố cùng nhau. b) $\frac{b_{4n}}{2}$ là số nguyên nhưng không là số chính phương.	5,0
4.a. (2,0 điểm)	Xét phương trình đặc trưng của dãy truy hồi tuyến tính cấp 2: $x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases}.$ Áp dụng công thức số hạng tổng quát cho từng dãy, ta có: $a_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n}{2}; b_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}.$ Ta kiểm tra ngay được đẳng thức $a_n + b_n \sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^n$.	0,5
	Ta có: $a_{n+1} + b_{n+1} \sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^{n+1} = (1 + \sqrt{2})(a_n + b_n \sqrt{2})$.	0,5
	Suy ra $a_{n+1} + b_{n+1} \sqrt{2} = (a_n + 2b_n) + (a_n + b_n) \sqrt{2}$. Do $(a_n), (b_n)$ là hai dãy số nguyên nên suy ra: $a_{n+1} = a_n + 2b_n, b_{n+1} = a_n + b_n$.	0,5
	Ta sẽ chứng minh quy nạp: với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, cặp số a_n, b_n nguyên tố cùng nhau. (1) Với $n = 1$, ta có $(a_1; b_1) = 1$. Vậy mệnh đề (1) đúng với $n = 1$. Giả sử mệnh đề (1) đúng với $n = k$, tức là: $(a_k; b_k) = 1$. Ta sẽ chứng minh mệnh đề (1) đúng với $n = k + 1$. Thật vậy, ta có: $(a_{k+1}; b_{k+1}) = (a_k + 2b_k; a_k + b_k) = (a_k + 2b_k; b_k) = (a_k; b_k) = 1$. Vậy mệnh đề (1) đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp ta suy ra mệnh đề (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.	0,5

4.b. (3,0 điểm)	Ta có: $\frac{b_{4n}}{2} = \frac{(1+\sqrt{2})^{4n} - (1-\sqrt{2})^{4n}}{4\sqrt{2}}$ $= \frac{\left[(1+\sqrt{2})^{2n} + (1-\sqrt{2})^{2n} \right] \left[(1+\sqrt{2})^{2n} - (1-\sqrt{2})^{2n} \right]}{2 \cdot 2\sqrt{2}}$ $= a_{2n} \cdot b_{2n}.$ Do a_{2n}, b_{2n} là các số nguyên nên $\frac{b_{4n}}{2}$ là số nguyên.	0,5
	Giả sử $\frac{b_{4n}}{2}$ là số chính phương. Do $\frac{b_{4n}}{2} = a_{2n} \cdot b_{2n}$ và $(a_{2n}; b_{2n}) = 1$ (theo kết quả phần a) nên suy ra a_{2n}, b_{2n} cũng đồng thời là các số chính phương. (*)	0,5
	Nếu n chẵn ta có $a_{2n} = \frac{\left[(\sqrt{2}+1)^{2n} + (\sqrt{2}-1)^{2n} \right]}{2}$ $a_{2n} = \frac{\left[(\sqrt{2}+1)^{2n} + (\sqrt{2}-1)^{2n} \right] - 2(\sqrt{2}+1)^n \cdot (\sqrt{2}-1)^n + 2(\sqrt{2}+1)^n \cdot (\sqrt{2}-1)^n}{2}$ $a_{2n} = \frac{\left[(\sqrt{2}+1)^n - (\sqrt{2}-1)^n \right]^2}{2} + 1 = \left[\frac{(\sqrt{2}+1)^n - (\sqrt{2}-1)^n}{\sqrt{2}} \right]^2 + 1.$ Khi đó $a_{2n} = m^2 + 1$ với $m = \frac{(\sqrt{2}+1)^n - (\sqrt{2}-1)^n}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Z}^+$ nên a_{2n} không là số chính phương.	1,0
	Nếu n lẻ ta có $a_{2n} = \frac{\left[(\sqrt{2}+1)^{2n} + (\sqrt{2}-1)^{2n} \right]}{2}$ $a_{2n} = \frac{\left[(\sqrt{2}+1)^{2n} + (\sqrt{2}-1)^{2n} \right] + 2(\sqrt{2}+1)^n \cdot (\sqrt{2}-1)^n - 2(\sqrt{2}+1)^n \cdot (\sqrt{2}-1)^n}{2}$ $a_{2n} = \frac{\left[(\sqrt{2}+1)^n + (\sqrt{2}-1)^n \right]^2}{2} - 1 = \left[\frac{(\sqrt{2}+1)^n + (\sqrt{2}-1)^n}{\sqrt{2}} \right]^2 - 1.$ Khi đó $a_{2n} = m^2 - 1$ với $m = \frac{(\sqrt{2}+1)^n + (\sqrt{2}-1)^n}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Z}^+$ nên a_{2n} không là số chính phương. Do đó, a_{2n} không là số chính phương với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, mâu thuẫn với (*). Vậy giả sử sai hay $\frac{b_{4n}}{2}$ không là số chính phương.	1,0
HẾT		

Câu 5. (6,0 điểm) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

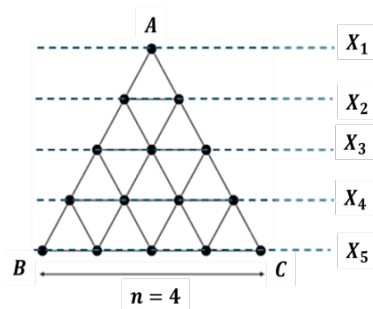
$$f(x + yf(x)) + f(xy) = f(x) + f(2026y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 6. (7,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O) . Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DE, DF .

a) Giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDM và đường tròn ngoại tiếp tam giác CDN là K . Chứng minh rằng K nằm trên đường tròn (I) .

b) Gọi P là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDM và đường tròn (O) , Q là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác CDN và đường tròn (O) . Chứng minh rằng bốn điểm P, Q, M, N cùng thuộc một đường tròn.

Câu 7. (7,0 điểm) Một dàn đèn LED dạng lưới tam giác đều ABC có cạnh bằng n (với $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 4$) được chia thành các tam giác đều có cạnh bằng 1, mỗi nút của lưới có một bóng đèn (tham khảo hình vẽ). Mỗi đèn có hai trạng thái: bật và tắt. Ban đầu, tất cả các đèn đều ở trạng thái tắt. Kí hiệu X_i, Y_i, Z_i là các đường thẳng lần lượt song song hoặc trùng với BC, AB, AC chứa đúng i đèn



($i = 1, 2, \dots, n+1$). Với mỗi thao tác, người ta tác động vào một trong các đường thẳng X_i, Y_j, Z_k làm cho trạng thái của tất cả các đèn nằm trên đó thay đổi: đèn đang tắt sẽ bật, đèn đang bật sẽ tắt.

a) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để ba đường thẳng X_i, Y_j, Z_k cùng đi qua một đèn là $i + j + k = 2n + 3$.

b) Từ trạng thái ban đầu, hãy chỉ ra một dãy thao tác trong đó số lần tác động vào mỗi đường thẳng X_i, Y_j, Z_k nhiều nhất bằng 1, đồng thời mỗi nhóm $(X_1, \dots, X_{n+1}), (Y_1, \dots, Y_{n+1})$ và $(Z_1, \dots, Z_{n+1})$ đều có ít nhất một đường thẳng được tác động, để sau dãy thao tác này tất cả các đèn đều tắt.

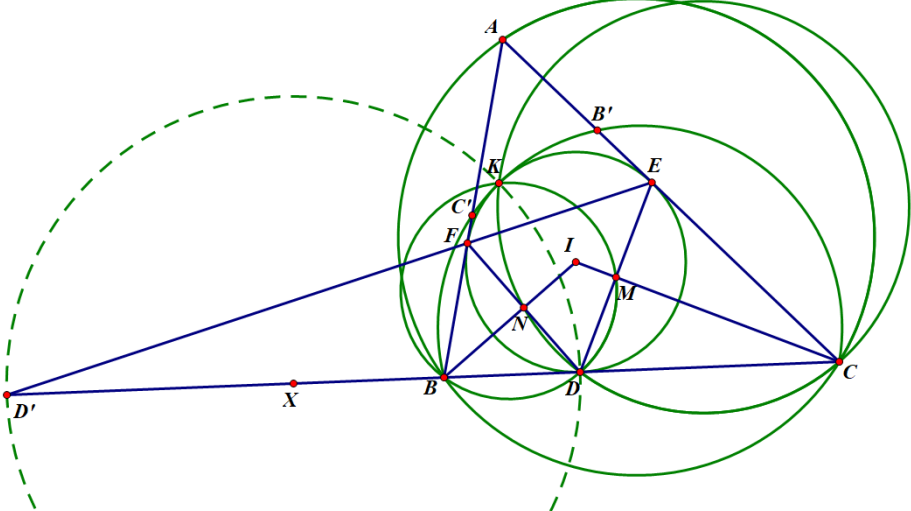
c) Với mỗi trạng thái H có thể xảy ra của dàn đèn LED, gọi $s(H)$ là số thao tác ít nhất cần thực hiện để tạo ra H từ trạng thái ban đầu. Tìm giá trị lớn nhất của $s(H)$.

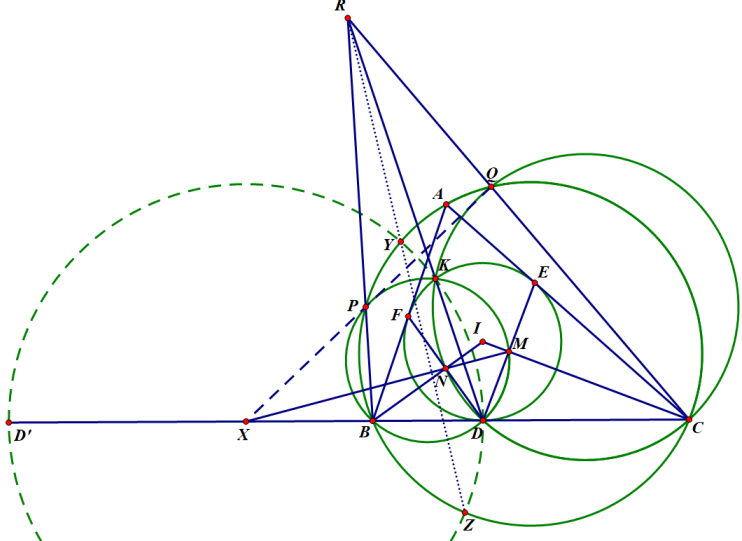
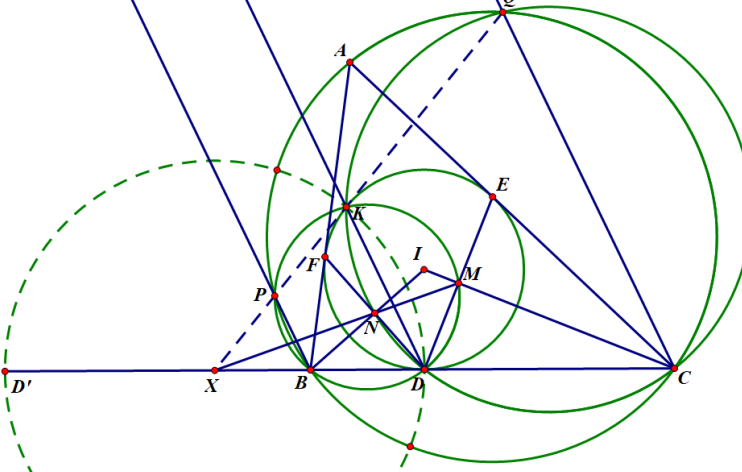
===== HẾT =====

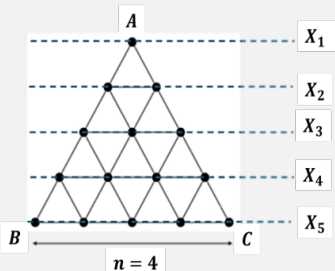
Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.
Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

(Hướng dẫn chấm có 07 trang)

Câu	Lời giải	Điểm
5	Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x + yf(x)) + f(xy) = f(x) + f(2026y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$	6,0
	Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn (1). Đặt $c = 2026$. Thay $x = c$ vào (1) ta được $f(c + yf(c)) = f(c), \forall y \in \mathbb{R}. \quad (2)$ *) Nếu $f(c) = k \neq 0$ thì từ (2) suy ra $f(c + ky) = k, \forall y \in \mathbb{R}$ nên $f(x) \equiv k, k \neq 0$. Mặt khác ta thấy $f(x) \equiv 0$ thỏa mãn, nên thử lại $f(x)$ là hàm hằng bất kì thỏa mãn.	1,5
	*) Nếu $f(c) = 0$. Ta sẽ tìm $f(x)$ khác hàm hằng. Đặt $S = \{a \in \mathbb{R} : f(a) = 0\}$. Ta thấy $c \in S$ nên $S \neq \emptyset$. - TH1: $ S = 1$. Thay $y = 1$ vào (1) ta có $f(x + f(x)) = f(c) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $x + f(x) = c = 2026, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(x) = 2026 - x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thỏa mãn.	1,5
	- TH2: $ S > 1$. Thay $x = a \in S$ vào (1) ta được $f(ay) = f(cy), \forall y \in \mathbb{R}, \forall a \in S. \quad (4)$ Lấy $a \neq b \in S$. Thay $x = ax_0$ vào (1), ta có: $f(ax_0 + yf(ax_0)) = f(ax_0) + f(cy) - f(ax_0y)$ $\Rightarrow f(ax_0 + yf(cx_0)) = f(cx_0) + f(cy) - f(cx_0y)$ Thay $x = bx_0$ vào (1), ta được $f(bx_0 + yf(cx_0)) = f(cx_0) + f(cy) - f(cx_0y)$ Suy ra $f(ax_0 + yf(cx_0)) = f(bx_0 + yf(cx_0))$. Chọn $T = (b - a)x_0$ ta có $f(ax_0 + yf(cx_0)) = f(ax_0 + yf(cx_0) + T)$.	1,5
	+) Nếu $S \neq \mathbb{R}^*$ thì tồn tại $x_0 \neq 0$ sao cho $f(cx_0) \neq 0$. Suy ra $f(y) = f(y + T), \forall y \in \mathbb{R}$. Thay $x = T$ vào (1) ta có $f(T + yf(T)) + f(Ty) = f(T) + f(cy) \Rightarrow f(yf(0)) + f(Ty) = f(0) + f(cy)$. Vì $f(0) \in S$ nên $f(yf(0)) = f(cy)$. Suy ra $f(Ty) = f(0), \forall y \in \mathbb{R}$. (Mâu thuẫn) +) Nếu $S = \mathbb{R}^*$ thì dễ kiểm tra $f(x) = \begin{cases} a, & \text{khi } x = 0 \\ 0, & \text{khi } x \neq 0 \end{cases} (a \neq 0)$ thỏa mãn. Kết luận: $f(x) = \begin{cases} a, & \text{khi } x = 0 \\ 0, & \text{khi } x \neq 0 \end{cases} (a \neq 0)$ hoặc $f(x)$ là hàm hằng hoặc $f(x) = 2026 - x, \forall x \in \mathbb{R}$.	1,5

6	Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DE, DF. a) Giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDM và đường tròn ngoại tiếp tam giác CDN là K. Chứng minh rằng K nằm trên đường tròn (I). b) Gọi P là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDM và đường tròn (O), Q là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác CDN và đường tròn (O). Chứng minh rằng bốn điểm P, Q, M, N cùng thuộc một đường tròn.	7,0
6.a. (3,0 điểm)		
	Kí hiệu (UVT) là đường tròn ngoại tiếp tam giác UVT. Gọi D' là giao điểm của EF và BC, X là trung điểm của đoạn thẳng DD'. Ta có $(D'DBC) = -1$ nên $\overline{XD}^2 = \overline{XB} \cdot \overline{XC}$.	0,5
	Gọi Γ là đường tròn tâm X, đường kính DD'. Định nghĩa lại K là giao điểm thứ hai của đường tròn Γ và đường tròn (I). Do $\overline{XK}^2 = \overline{XD}^2 = \overline{XB} \cdot \overline{XC}$ nên XK là tiếp tuyến chung tại K của hai đường tròn (I) và (BKC).	1,0
	Gọi B', C' lần lượt là giao điểm thứ hai của AC, AB và đường tròn (BKC). Khi đó đường tròn (I) tiếp xúc với đường tròn (BKC) tại K đồng thời tiếp xúc với các dây CB, CB' của đường tròn (BKC) lần lượt tại D, E. Suy ra KD, KE lần lượt là phân giác của $\angle BKC, \angle CKB'$.	0,5
	Lại có KC là đường đối trung từ đỉnh K của $\triangle DKE$ nên ta có: $\angle BKM = \angle BKD + \angle DKM = \frac{\angle BKC + \angle CKB'}{2} = \frac{\angle BKB'}{2} = \angle CDM$ Suy ra tứ giác $BKMD$ nội tiếp, hay $K \in (BDM)$, chứng minh tương tự ta có $K \in (CDN)$.	1,0

6.b. (4,0 điểm)	Ta sẽ chứng minh ba điểm P, Q, X thẳng hàng. Thật vậy, xét ba đường tròn $(O), (BDM), (CDN)$ có các trục đẳng phương BP, CQ, DK đồng quy hoặc đôi một song song.	0,5
		
	+ Trường hợp 1: Ba đường thẳng BP, CQ, DK đồng quy tại một điểm, gọi điểm đó là R. Gọi l là trục đẳng phương của hai đường tròn (I) và (O). Ta có: $P_{R/(O)} = \overline{RB} \cdot \overline{RP} = \overline{RK} \cdot \overline{RD} = P_{R/(I)} \Rightarrow R \in l \Rightarrow R = l \cap DK$ Lại có: $P_{X/(O)} = \overline{XB} \cdot \overline{XC} = \overline{XD}^2 = P_{X/(I)} \Rightarrow X \in l$ Gọi Y và Z là các giao điểm của hai đường tròn (O) và Γ. Xét ba đường tròn (I), (O) và Γ ta có ba trục đẳng phương YZ, KD và l đồng quy tại R. Khi đó R thuộc YZ là đường đối cực của X đối với (O).	1,0
	Vì R thuộc đường đối cực của X đối với (O) nên theo định lý La Hire thì X thuộc đường đối cực của R đối với (O). Vậy X là giao điểm của BC và đường đối cực của R đối với (O). Mà BC, PQ và đường đối cực của R đối với (O) đồng quy nên ba điểm X, P, Q thẳng hàng.	1,0
		

	+ Trường hợp 2: Ba đường thẳng BP, CQ, DK đôi một song song. Khi đó các tứ giác $BPKD, DKQC, BPQC$ là các hình thang cân có các đáy BP, DK, CQ. Suy ra các điểm P, K, Q lần lượt đối xứng với các điểm B, D, C qua đường trung trực của đoạn DK. Mà X nằm trên đường trung trực của DK và ba điểm X, B, C thẳng hàng nên ba điểm X, P, Q thẳng hàng.	0,5
	Do X là trung điểm DD' nên X, N, M thẳng hàng. Mặt khác, tứ giác $BNMC$ nội tiếp do $\overline{IN} \cdot \overline{IB} = \overline{ID}^2 = \overline{IM} \cdot \overline{IC}$. Khi đó ta có: $\overline{XP} \cdot \overline{XQ} = \overline{XB} \cdot \overline{XC} = \overline{XM} \cdot \overline{XN}$. Suy ra bốn điểm P, Q, M, N nằm trên một đường tròn. (đpcm)	1,0
7	Một dàn đèn LED dạng lưới tam giác đều ABC có cạnh bằng n (với $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 4$) được chia thành các tam giác đều có cạnh bằng 1, mỗi nút của lưới có một bóng đèn (tham khảo hình vẽ). Mỗi đèn có hai trạng thái: bật và tắt. Ban đầu, tất cả các đèn đều ở trạng thái tắt. Kí hiệu X_i, Y_i, Z_i là các đường thẳng lần lượt song song hoặc trùng với BC, AB, AC chứa đúng i đèn ($i = 1, 2, \dots, n+1$). Với mỗi thao tác, người ta tác động vào một trong các đường thẳng X_i, Y_j, Z_k làm cho trạng thái của tất cả các đèn nằm trên đó thay đổi: đèn đang tắt sẽ bật, đèn đang bật sẽ tắt.  a) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để ba đường thẳng X_i, Y_j, Z_k cùng đi qua một đèn là $i + j + k = 2n + 3$. b) Từ trạng thái ban đầu, hãy chỉ ra một dãy thao tác trong đó số lần tác động vào mỗi đường thẳng X_i, Y_j, Z_k nhiều nhất bằng 1, đồng thời mỗi nhóm $(X_1, \dots, X_{n+1}), (Y_1, \dots, Y_{n+1})$ và $(Z_1, \dots, Z_{n+1})$ đều có ít nhất một đường thẳng được tác động, để sau dãy thao tác này tất cả các đèn đều tắt. c) Với mỗi trạng thái H có thể xảy ra của dàn đèn LED, gọi $s(H)$ là số thao tác ít nhất cần thực hiện để tạo ra H từ trạng thái ban đầu. Tìm giá trị lớn nhất của $s(H)$.	7,0
7.a. (2,0 điểm)	Gọi khoảng cách từ vị trí đèn led P bất kì đến ba cạnh AB, AC, BC lần lượt là $d_{AB}(P), d_{AC}(P), d_{BC}(P)$. *) Chứng minh chiều thuận: Giả sử ba đường thẳng X_i, Y_j, Z_k cùng đi qua một đèn led P. Ta có $d_{BC}(P) = \frac{\sqrt{3}}{2}(n+1-i); d_{AB}(P) = \frac{\sqrt{3}}{2}(n+1-j); d_{AC}(P) = \frac{\sqrt{3}}{2}(n+1-k).$ Mà tổng khoảng cách từ một điểm nằm trên lưới tới ba cạnh của tam giác luôn bằng $n \frac{\sqrt{3}}{2}$. Từ đó suy ra $\frac{\sqrt{3}}{2}(n+1-i) + \frac{\sqrt{3}}{2}(n+1-j) + \frac{\sqrt{3}}{2}(n+1-k) = n \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow i + j + k = 2n + 3$	1,0

	*) Chứng minh chiều đảo: Giả sử có ba chỉ số $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ thỏa mãn $i + j + k = 2n + 3$. Xét hai đường thẳng X_i và Y_j cắt nhau tại duy nhất một điểm P. $d_{BC}(P) = (n+1-i)\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad d_{AB}(P) = (n+1-j)\frac{\sqrt{3}}{2}$ $k \leq n+1 \Rightarrow (i+j) \geq n+2 \Rightarrow d_{BC}(P) + d_{AB}(P) = (2n+2-(i+j))\frac{\sqrt{3}}{2} \leq n\frac{\sqrt{3}}{2}$ Suy ra điểm P nằm trên lưới tam giác đều. Khi đó: $d_{AC}(P) = n\frac{\sqrt{3}}{2} - (n+1-i)\frac{\sqrt{3}}{2} - (n+1-j)\frac{\sqrt{3}}{2} = (i+j-n-2)\frac{\sqrt{3}}{2}$ $= [(2n+3-k) - n - 2]\frac{\sqrt{3}}{2} = (n+1-k)\frac{\sqrt{3}}{2}.$ Suy ra P nằm trên đường thẳng Z_k. Do đó, X_i, Y_j, Z_k đồng quy tại đúng một đèn led P.	1,0
7.b. (1,0 điểm)	Ta chỉ ra một dãy thao tác thỏa mãn là tác động vào tất cả các đường X_{2m}, Y_{2m}, Z_{2m} với $1 \leq 2m \leq n+1$ và không tác động vào các đường còn lại. Khi đó với mỗi đèn P bất kì tồn tại duy nhất bộ ba đường thẳng X_i, Y_j, Z_k cùng đi qua P thỏa mãn $i + j + k = 2n + 3$. Do $2n + 3$ là số lẻ, nên trong ba số i, j, k có 2 số chẵn, 1 số lẻ hoặc 3 số lẻ. Theo cách thao tác ở trên, thì đèn P được tác động đúng hai lần hoặc không được tác động lần nào. Do đó trạng thái đèn P vẫn là tắt.	1,0
7.c. (4,0 điểm)	Do ta cần tìm số lần tác động ít nhất và nếu ta tác động hai lần trên cùng một đường thẳng thì trạng thái của các đèn không thay đổi nên ta có thể biểu diễn tất cả các tổ hợp thao tác dưới dạng bộ $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, b_1, b_2, \dots, b_{n+1}, c_1, c_2, \dots, c_{n+1}),$ trong đó mỗi phần tử a_i, b_i, c_i tương ứng với thao tác được thực hiện trên các đường thẳng X_i, Y_i, Z_i; nhận giá trị 0 (không được tác động) hoặc 1 (được tác động). Gọi A là tập hợp tất cả các bộ $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, b_1, b_2, \dots, b_{n+1}, c_1, c_2, \dots, c_{n+1})$. Khi đó $A = 2^{3n+3}$.	0,5
	Gọi B là tập hợp tất cả các trạng thái của dàn đèn LED, trong đó mỗi trạng thái của dàn đèn LED trong B được mô tả bằng một bộ $N = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ phần tử $(d_1, d_2, \dots, d_N)$, trong đó mỗi phần tử bằng 0 hoặc 1 (tương ứng đèn tắt hoặc bật). Xét ánh xạ $f: A \rightarrow B$ với $f(x)$ là phần tử thuộc B thu được sau khi thực hiện x. Từ đây, ta quy ước phép cộng hai phần tử trong A hoặc trong B được tính trên từng cặp số ở vị trí tương ứng của hai phần tử đó và được tính theo modulo 2 (tức là $1+1=0+0=0, 0+1=1+0=1$). Ta thấy $f(x+x') = f(x) + f(x')$ với mọi $x, x' \in A$.	0,5

	*) Gọi K là tập hợp tất cả các $x \in A$ sao cho $f(x)$ là trạng thái tất cả các đèn đều tắt. Để thấy tám phần tử sau đây thuộc K : $((0,0,\dots,0),(0,0,\dots,0),(0,0,\dots,0)) = \text{id}$ $((0,0,\dots,0),(1,1,\dots,1),(1,1,\dots,1)) = a$ $((1,1,\dots,1),(1,1,\dots,1),(0,0,\dots,0)) = b$ $((1,1,\dots,1),(0,0,\dots,0),(1,1,\dots,1)) = a + b$ $((0,1,0,1,\dots),(0,1,0,1,\dots),(0,1,0,1,\dots)) = c$ $((0,1,0,1,\dots),(1,0,1,0,\dots),(1,0,1,0,\dots)) = a + c$ $((1,0,1,0,\dots),(1,0,1,0,\dots),(0,1,0,1,\dots)) = b + c$ $((1,0,1,0,\dots),(0,1,0,1,\dots),(1,0,1,0,\dots)) = a + b + c$	1,0
	Ta sẽ chứng minh tập K có đúng 8 phần tử. Giả sử $L = ((a_1, a_2, \dots, a_{n+1}), (b_1, b_2, \dots, b_{n+1}), (c_1, c_2, \dots, c_{n+1}))$ thuộc K. Khi đó $a_i + b_j + c_k = 0$ với $i + j + k = 2n + 3$. Bằng cách cộng thêm a hoặc b nếu cần thiết, ta có thể giả sử rằng $b_{n+1} = c_{n+1} = 0$. Vì $a_2 + b_n + c_{n+1} = a_2 + b_{n+1} + c_n = 0$, ta có $b_n = c_n$. Có hai trường hợp: (a) $b_n = c_n = 0$. Khi đó từ $a_3 + b_{n-1} + c_{n+1} = a_3 + b_n + c_n = a_3 + b_{n+1} + c_{n-1}$, suy ra $b_{n-1} = c_{n-1} = 0$. Tương tự ta thấy tất cả các phần tử b_i và c_i đều bằng 0, từ đó suy ra $L = \text{id}$. (b) $b_n = c_n = 1$. Khi đó từ $a_3 + b_{n-1} + c_{n+1} = a_3 + b_n + c_n = a_3 + b_{n+1} + c_{n-1}$, suy ra $b_{n-1} = c_{n-1} = 0$. Làm tương tự ta thu được $(b_1, b_2, \dots, b_{n+1}) = (c_1, c_2, \dots, c_{n+1}) = (\dots, 1, 0, 1, 0)$, từ đó suy ra $L = c$ hoặc $L = a + c$. Do đó L là một trong tám phần tử được liệt kê ở trên.	1,0
	Như vậy, với mỗi $x \in A$ tồn tại đúng 7 phần tử x' khác thuộc tập A thỏa mãn $f(x) = f(x')$. Do đó, ta có thể phân hoạch $2^{3(n+1)}$ phần tử của A thành 2^{3n} tập con, mỗi tập tương ứng duy nhất với một phần tử của B. *) Xét mỗi tập con S chứa 8 phần tử như trên: Với mỗi phần tử $x \in S$, gọi x_1 là số lượng các phần tử $a_1, a_3, \dots$ bằng 1, và gọi x_2 là số lượng các phần tử $a_2, a_4, \dots$ bằng 1. Định nghĩa tương tự y_1, y_2, z_1, z_2 cho dãy b_i và c_i. Khi đó, số thao tác tương ứng x là $T(x) = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2.$ Đặt $n = 4k$. Xét $x \in S$ để $T(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất.	1,0

	Để thấy $x+a, x+b, x+c, x+(a+b), x+(a+c), x+(b+c), x+(a+b+c) \in S$. Ta có: $T(x+a) = x_1 + x_2 + (n+1-y_1-y_2) + (n+1-z_1-z_2)$ $\geq T(x) = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2$ $\Rightarrow n+1 \geq y_1 + y_2 + z_1 + z_2.$ Làm tương tự ta có: $x_1 + x_2 + z_1 + z_2 \leq n+1$; $x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \leq n+1$; $x_2 + y_2 + z_2 \leq 3k; \quad (1)$ $x_1 + y_1 + z_2 \leq 3k+1; \quad x_2 + y_1 + z_1 \leq 3k+1; \quad x_1 + y_2 + z_1 \leq 3k+1 \quad (2)$ Cộng vế với vế của bốn bất đẳng thức trong (1), (2) rồi chia cho 4, ta được $T \leq 6k+1$. Dấu “=” xảy ra khi $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = z_2 = k$ và $z_1 = k+1$.	
HẾT		

Xem thêm: ĐỀ THI HSG TOÁN 12
<https://toanmath.com/de-thi-hsg-toan-12>