

Câu 1. (1,0 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 1$.

Câu 2. (1,0 điểm) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ tại điểm có tung độ bằng 3.

Câu 3. (1,0 điểm)

a) Tìm số phức z , biết $3\bar{z} - 2z + (3+2i)(-1-2i) = 0$.

b) Giải phương trình: $4^x - 2.2^{x+2} + 7 = 0$.

Câu 4. (1,0 điểm) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2\sin x + 1} dx$.

Câu 5. (1,0 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;2;1), B(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$. Tính khoảng cách giữa hai điểm A và B . Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và song song với mặt phẳng (P) .

Câu 6. (1,0 điểm)

a) Biến đổi thành tích biểu thức $A = \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$.

b) Trong kì thi THPT Quốc gia năm 2016, mỗi thí sinh có thể dự thi tối đa 8 môn: Toán, Lý, Hóa, Sinh, Văn, Sử, Địa và Tiếng anh. Một trường Đại học dự kiến tuyển sinh dựa vào tổng điểm của 3 môn trong kì thi chung đó và có ít nhất một trong hai môn là Toán hoặc Văn. Hỏi trường Đại học đó có bao nhiêu phương án tuyển sinh?

Câu 7. (1,0 điểm) Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh C và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SC = a$, $\widehat{SCA} = \varphi$. Tính theo a thể tích khối chóp $SABC$ biết $\varphi = 30^\circ$. Xác định góc φ để thể tích khối chóp $SABC$ lớn nhất.

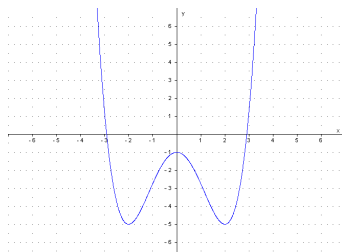
Câu 8. (1,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có $A(-1;2)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AD và DC ; K là giao điểm của BN với CM . Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác BMK , biết BN có phương trình $2x + y - 8 = 0$ và điểm B có hoành độ lớn hơn 2.

Câu 9. (1,0 điểm) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 3\sqrt{xy + x - y^2} - y = 5y + 4 \\ \sqrt{4y^2 - x - 2} + \sqrt{y - 1} = x - 1 \end{cases}$$

Câu 10. (1,0 điểm) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 3$.

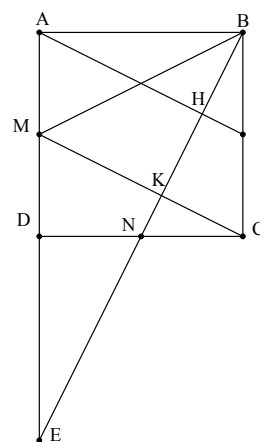
Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+a^2(b+c)} + \frac{1}{1+b^2(c+a)} + \frac{1}{1+c^2(a+b)} \leq \frac{1}{abc}$.

Hết

Câu	Đáp án	Điểm																										
1	Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 1$.	1,0																										
	Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ Đạo hàm: $y' = x^3 - 4x, \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$	0,25																										
	Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2; 0), (2; +\infty)$. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2), (0; 2)$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 2, y = -5$. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0, y = -1$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$	0,25																										
	Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-2</td><td>0</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td></td><td></td><td>-1</td><td></td><td></td><td>-5</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		y	$+\infty$			-1			-5		$+\infty$	0,25
	x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$																						
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$																				
y	$+\infty$			-1			-5		$+\infty$																			
Đồ thị: 	0,25																											
2	Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ tại điểm có tung độ bằng 3.	1,0																										
	Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của đồ thị hàm số và tiếp tuyến. Ta có $y_0 = 3 \Rightarrow x_0 = 2$	0,25																										
	$y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$. Hệ số góc của tiếp tuyến: $f'(x_0) = -1$	0,25																										
	Phương trình tiếp tuyến $y = -1(x-2) + 3$	0,25																										
	$\Leftrightarrow y = -x + 5$	0,25																										
3	a) Tìm số phức z , biết $3\bar{z} - 2z + (3+2i)(-1-2i) = 0$.	0,5																										
	a) $3\bar{z} - 2z + (3+2i)(-1-2i) = 0$ (*) Gọi $z = a+bi (a, b \in \mathbb{R}), \bar{z} = a-bi$ Pt (*) trở thành: $3(a-bi) - 2(a+bi) + 1 - 8i = 0 \Leftrightarrow a - 5bi = -1 + 8i$	0,25																										
	$\Leftrightarrow a = -1, b = -\frac{8}{5}$. Vậy $z = -1 - \frac{8}{5}i$	0,25																										

	b) Giải phương trình: $4^x - 2.2^{x+2} + 7 = 0$.	0,5
	b) $4^x - 2.2^{x+2} + 7 = 0 \Leftrightarrow 4^x - 8.2^x + 7 = 0$. Đặt $t = 2^x (t > 0)$. Phương trình trở thành: $t^2 - 8t + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 7 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1 \\ 2^x = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_2 7 \end{cases}$	0,25
	Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0, x = \log_2 7$	
4	Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2 \sin x + 1} dx$.	1,0
	Đặt $t = 2 \sin x + 1 \Rightarrow dt = 2 \cos x dx \Rightarrow \frac{dt}{2} = \cos x dx$	0,25
	Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 3$	0,25
	Suy ra $I = \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{dt}{t}$	0,25
	$I = \left(\frac{1}{2} \ln t \right) \Big _1^3 = \frac{1}{2} \ln 3$	0,25
5	Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;2;1), B(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$. Tính khoảng cách giữa hai điểm A và B . Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và song song với mặt phẳng (P) .	1,0
	$\overline{AB} = (-2; 0; 2) \Rightarrow AB = \sqrt{(-2)^2 + (0)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{2}$	0,25
	Mặt phẳng (α) đi qua $A(3;2;1)$.	
	Mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (P) nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; -2)$	0,25
	Phương trình mặt phẳng $(\alpha): 1.(x-3) + 2.(y-2) - 2.(z-1) = 0$	0,25
	Hay $x + 2y - 2z - 5 = 0$	0,25
6	a) Biến đổi thành tích biểu thức $A = \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$.	0,5
	$A = \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = (\sin 7x + \sin x) + (\sin 5x + \sin 3x)$ $= 2 \sin 4x \cos 3x + 2 \sin 4x \cos x = 2 \sin 4x (\cos 3x + \cos x)$	0,25
	$A = 2 \sin 4x (2 \cos 2x \cos x) = 4 \sin 4x \cos 2x \cos x$	0,25
	b) Trong kì thi THPT Quốc gia năm 2016, mỗi thí sinh có thể dự thi tối đa 8 môn: Toán, Lý, Hóa, Sinh, Văn, Sử, Địa và Tiếng anh. Một trường Đại học dự kiến tuyển sinh dựa vào tổng điểm của 3 môn trong kì thi chung đó và có ít nhất một trong hai môn là Toán hoặc Văn. Hỏi trường Đại học đó có bao nhiêu phương án tuyển sinh?	0,5
	TH1: Trường ĐH chỉ xét 1 trong 2 môn Toán hoặc Văn: Có: $2.C_6^2 = 30$ (cách)	0,25
	TH2: Trường ĐH xét cả hai môn Toán và Văn: Có: $1.C_6^1 = 6$ (cách)	0,25
	Vậy trường ĐH có 36 phương án tuyển sinh.	

7	Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh C và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SC = a$, $\widehat{SCA} = \varphi$. Tính theo a thể tích khối chóp $SABC$ biết $\varphi = 30^\circ$. Xác định góc φ để thể tích khối chóp $SABC$ lớn nhất.	1,0
	$BC = AC = a \cdot \cos \varphi$; $SA = a \cdot \sin \varphi$	0,25
	Với $\varphi = 30^\circ$, ta có: $V_{SABC} = \frac{a^3}{16}$	0,25
	$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{6} \cdot AC \cdot BC \cdot SA = \frac{1}{6} a^3 \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi = \frac{1}{6} a^3 \sin \varphi (1 - \sin^2 \varphi)$	0,25
	Xét hàm số: $f(x) = x - x^3$ trên khoảng $(0; 1)$ Ta có: $f'(x) = 1 - 3x^2$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ Từ đó ta thấy trên khoảng $(0; 1)$ hàm số $f(x)$ liên tục và có một điểm cực trị là điểm cực đại, nên tại đó hàm số đạt GTLN hay $\max_{x \in (0; 1)} f(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ Vậy $\max V_{SABC} = \frac{a^3}{9\sqrt{3}}$, đạt được khi $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ hay $\varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$ (với $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$)	0,25
8	Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có $A(-1; 2)$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của cạnh AD và DC ; K là giao điểm của BN với CM . Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác BMK , biết BN có phương trình $2x + y - 8 = 0$ và điểm B có hoành độ lớn hơn 2.	1,0
	Gọi $E = BN \cap AD \Rightarrow D$ là trung điểm của AE Dựng $AH \perp BN$ tại $H \Rightarrow AH = d(A, BN) = \frac{8}{\sqrt{5}}$ Trong tam giác vuông ABE: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{5}{4AB^2}$ $\Rightarrow AB = \frac{\sqrt{5} \cdot AH}{2} = 4$	0,25
	$B \in BN \Rightarrow B(b; 8 - 2b)$, $(b > 2)$ $AB = 4 \Rightarrow B(3; 2)$	0,25
	Phương trình AE: $x + 1 = 0$ $E = AE \cap BN \Rightarrow E(-1; 10) \Rightarrow D(-1; 6) \Rightarrow M(-1; 4)$	0,25
	Gọi I là tâm của $BKM \Rightarrow I$ là trung điểm của $BM \Rightarrow I(1; 3)$ $R = \frac{BM}{2} = \sqrt{5}$. Vậy phương trình đường tròn: $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$.	0,25



	Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 3\sqrt{xy + x - y^2 - y} = 5y + 4 & (1) \\ \sqrt{4y^2 - x - 2} + \sqrt{y - 1} = x - 1 & (2) \end{cases}$	1,0
9	Đk: $\begin{cases} xy + x - y^2 - y \geq 0 \\ 4y^2 - x - 2 \geq 0 \\ y - 1 \geq 0 \end{cases}$ Ta có $(1) \Leftrightarrow x - y + 3\sqrt{(x - y)(y + 1)} - 4(y + 1) = 0$ Đặt $u = \sqrt{x - y}, v = \sqrt{y + 1} \quad (u \geq 0, v \geq 0)$ Khi đó (1) trở thành : $u^2 + 3uv - 4v^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = -4v(vn) \end{cases}$	0,25
	Với $u = v$ ta có $x = 2y + 1$, thay vào (2) ta được : $\sqrt{4y^2 - 2y - 3} + \sqrt{y - 1} = 2y$ $\Leftrightarrow \sqrt{4y^2 - 2y - 3} - (2y - 1) + (\sqrt{y - 1} - 1) = 0$	0,25
	$\frac{2(y - 2)}{\sqrt{4y^2 - 2y - 3} + 2y - 1} + \frac{y - 2}{\sqrt{y - 1} + 1} = 0$ $\Leftrightarrow (y - 2) \left(\frac{2}{\sqrt{4y^2 - 2y - 3} + 2y - 1} + \frac{1}{\sqrt{y - 1} + 1} \right) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow y = 2$ (vì $\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{4y^2 - 2y - 3} + 2y - 1} + \frac{1}{\sqrt{y - 1} + 1} > 0, \forall y \geq 1$) Với $y = 2$ thì $x = 5$. Đối chiếu Đk ta được nghiệm của hệ PT là $(5; 2)$	0,25
10	Cho các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1 + a^2(b + c)} + \frac{1}{1 + b^2(c + a)} + \frac{1}{1 + c^2(a + b)} \leq \frac{1}{abc}$.	1,0
	Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số dương ta có: $3 = ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} \Rightarrow abc \leq 1$. Suy ra: $1 + a^2(b + c) \geq abc + a^2(b + c) = a(ab + bc + ca) = 3a \Rightarrow \frac{1}{1 + a^2(b + c)} \leq \frac{1}{3a}$ (1).	0,25
	Tương tự ta có: $\frac{1}{1 + b^2(c + a)} \leq \frac{1}{3b}$ (2) ; $\frac{1}{1 + c^2(a + b)} \leq \frac{1}{3c}$ (3)	0,25
	Cộng (1), (2) và (3) theo vế với vế ta có: $\frac{1}{1 + a^2(b + c)} + \frac{1}{1 + b^2(c + a)} + \frac{1}{1 + c^2(a + b)} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$	0,25
	$\frac{1}{1 + a^2(b + c)} + \frac{1}{1 + b^2(c + a)} + \frac{1}{1 + c^2(a + b)} \leq \frac{ab + bc + ca}{3abc} = \frac{1}{abc}$ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $abc = 1, ab + bc + ca = 3 \Rightarrow a = b = c = 1, (a, b, c > 0)$.	0,25