

NEW

ĐĂNG VIỆT ĐÔNG

TRẮC NGHIỆM NÂNG CAO

SỐ PHỨC

(CHINH PHỤC ĐIỂM 8, 9, 10)

(CÓ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT)

ÔN THI THPT QUỐC GIA

A - LÝ THUYẾT CHUNG

1. Định nghĩa

- Một biểu thức dạng $a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1$ được gọi là một số phức.
- Đối với số phức $z = a + bi$, ta nói a là phần thực, b là phần ảo của z .
- Tập hợp số phức kí hiệu là $\mathbb{C}$

2. Hai số phức bằng nhau

- Hai số phức bằng nhau nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.

- Công thức: $a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$

Biểu diễn hình học của số phức.

- Điểm $M(a; b)$ trong hệ tọa độ vuông góc Oxy được gọi là điểm biểu diễn của số phức $z = a + bi$.

Môđun của số phức.

- Cho số phức $z = a + bi$ có điểm biểu diễn là $M(a; b)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là môđun của số phức z và kí hiệu là $|z|$.

- Công thức $|z| = |\overrightarrow{OM}| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

3. Số phức liên hợp

- Cho số phức $z = a + bi$, số phức dạng $\bar{z} = a - bi$ được gọi là số phức liên hợp của z .

Phép cộng, phép trừ, phép nhân, phép chia.

- Cho số phức $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$, ta có $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

- Cho số phức $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$, ta có $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.

- Cho số phức $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$, ta có $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

- Cho số phức $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$, (với $z_2 \neq 0$) ta có:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2}i.$$

Phương trình bậc hai với hệ số thực.

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$. Phương trình này có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$, nếu:

- $\Delta = 0$ phương trình có nghiệm thực $x = -\frac{b}{2a}$.

- $\Delta > 0$ phương trình có hai nghiệm thực phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

- $\Delta < 0$ phương trình có hai nghiệm phức $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{\Delta}}{2a}$.

4. Acgumen của số phức $z \neq 0$

ĐỊNH NGHĨA 1

Cho số phức $z \neq 0$. Gọi M là điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số z . Số đo (radian) của mỗi góc lượng giác tia đầu Ox , tia cuối OM được gọi là acgumen của z .

CHÚ Ý

Nếu φ là một acgumen của z (hình dưới) thì gọi acgumen của z có dạng $\varphi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. (người ta thường nói: Acgumen của $z \neq 0$ xác định sai khác $k2\pi, k \in \mathbb{Z}$).

5. Dạng lượng giác của số phức

Xét số phức $z = a + bi \neq 0 (a, b \in \mathbb{R})$. Kí hiệu r là mô đun của z và φ của một acgumen của z (hình dưới) thì dễ thấy rằng: $a = r \cos \varphi, b = r \sin \varphi$.

Vậy $z = a + bi \neq 0$ có thể viết dưới dạng $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

ĐỊNH NGHĨA

Dạng $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, trong đó $r > 0$, được gọi là **dạng lượng giác của số phức $z \neq 0$** .

Dạng $z = a + bi \neq 0 (a, b \in \mathbb{R})$, được gọi là **dạng đại số của số phức z** .

Nhận xét. Để tìm dạng lượng giác $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ của số phức $z = a + bi \neq 0 (a, b \in \mathbb{R})$ khác 0 cho trước ta cần:

1. Tìm r : đó là mô đun của $z, r = \sqrt{a^2 + b^2}$; số r cũng là khoảng cách từ gốc O đến điểm M biểu diễn số z trong mặt phẳng phức.

2. Tìm φ : đó là một acgumen của z ; φ là số thực sao cho $\cos \varphi = \frac{a}{r}$ và $\sin \varphi = \frac{b}{r}$; số φ đó cũng là số đo một góc lượng giác tia đầu Ox , tia cuối OM .

CHÚ Ý

1. $|z| = 1$ khi và chỉ khi $z = \cos \varphi + i \sin \varphi; (\varphi \in \mathbb{R})$.

2. Khi $z = 0$ thì $|z| = r = 0$ nhưng acgumen của z không xác định (đôi khi coi acgumen của 0 là số thực tùy ý và vẫn viết $0 = 0(\cos \varphi + i \sin \varphi)$).

3. Cần để ý đòi hỏi $r > 0$ trong dạng lượng giác $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ của số phức $z \neq 0$.

6. Nhân và chia số phức lượng giác

Ta đã công thức nhân và chia số phức dưới dạng đại số. Sau đây là định lý nêu lên công thức nhân và chia số phức dưới dạng lượng giác; chúng giúp cho các quy tắc tính toán đơn giản về nhân và chia số phức.

ĐỊNH LÝ

Nếu $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi); z' = r'(\cos \varphi' + i \sin \varphi') \quad (r \geq 0, r' \geq 0)$

Thì $zz' = rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i \sin(\varphi + \varphi')]; \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}[\cos(\varphi - \varphi') + i \sin(\varphi - \varphi')]; (khi r > 0)$

Nói một cách khác, để nhân các số phức dưới dạng lượng giác, ta lấy tích các mô đun và tổng argumen; để chia các số phức dưới dạng lượng giác ta lấy thương các mô đun và hiệu các argumen.

Chứng minh

$$\begin{aligned} zz' &= [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)][r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')] \lim_{x \rightarrow \infty} \\ &= rr'[\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi' + i(\sin\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi\sin\varphi')] \\ &= rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')]. \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]$. Theo công thức nhân số phức,

$$\text{Ta có: } \frac{z}{z'} = z \cdot \frac{1}{z'} = \frac{r}{r'}[\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi')].$$

7. Công thức Moa-vơ (Moivre)

Từ công thức nhân số phức dưới dạng lượng giác, bằng quy nạp toán học dễ dàng suy ra rằng với mọi số nguyên dương n .

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Và khi $r=1$, ta có

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

Cả hai công thức đó đều được gọi là công thức Moa – vơ.

8. Căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác

Từ công thức Moa – vơ, dễ thấy số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r > 0$ có căn bậc hai là

$$\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) \text{ và } -\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)\right).$$

B - BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**DẠNG 1: TÍNH TOÁN TRÊN SỐ PHỨC**

Câu 1: Cho số phức z thỏa mãn $\frac{5(\bar{z}+i)}{z+1} = 2-i$ (1). Tính mô đun của số phức $\omega = 1+z+z^2$.

A. $\sqrt{13}$

B. $\sqrt{15}$

C. $\sqrt{17}$

D. $\sqrt{19}$

Hướng dẫn giải:

Giả sử $z = a+bi$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{5(a-bi+i)}{a+bi+1} = 2-i \Leftrightarrow 5a-5i(b-1) = 2a+2bi+2-ai-bi^2-i$$

$$\Leftrightarrow 3a-2-b-i(5b-5-2b+a+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2-b=0 \\ 3b+a-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow z=1+i$$

$$\omega = 1+1+i+1+2i-1 = 2+3i \Rightarrow |\omega| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

Chọn A.

Câu 2: Cho z_1, z_2 là hai số phức liên hợp của nhau và thỏa mãn $\frac{z_1}{z_2^2} \in \mathbb{R}$ và $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{3}$. Tính mô đun của số phức z_1 .

A. $|z_1| = \sqrt{5}$.

B. $|z_1| = 3$.

C. $|z_1| = 2$.

D. $|z_1| = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $z_1 = a+bi \Rightarrow z_2 = a-bi$; ($a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}$). Không mất tính tổng quát ta gọi $b \geq 0$.

$$\text{Do } |z_1 - z_2| = 2\sqrt{3} \Rightarrow |2bi| = 2\sqrt{3} \Rightarrow b = \sqrt{3}.$$

$$\text{Do } z_1, z_2 \text{ là hai số phức liên hợp của nhau nên } z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}, \text{ mà } \frac{z_1}{z_2^2} = \frac{z_1^3}{(z_1 z_2)^2} \in \mathbb{R} \Rightarrow z_1^3 \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ta có: } z_1^3 = (a+bi)^3 = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3a^2b - b^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ 3a^2 = b^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 = 1.$$

$$\text{Vậy } |z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = 2.$$

Chọn C.

Câu 3: Cho số phức $z = \left(\frac{2+6i}{3-i}\right)^m$, m nguyên dương. Có bao nhiêu giá trị $m \in [1; 50]$ để z là số thuần ảo?

A. 24.

B. 26.

C. 25.

D. 50.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $z = \left(\frac{2+6i}{3-i} \right)^m = (2i)^m = 2^m \cdot i^m$

z là số thuần ảo khi và chỉ khi $m = 2k+1, k \in \mathbb{N}$ (do $z \neq 0; \forall m \in \mathbb{N}^*$).

Vậy có 25 giá trị m thỏa yêu cầu đề bài.

Chọn C.

Câu 4: Nếu $|z|=1$ thì $\frac{z^2-1}{z}$

A. lấy mọi giá trị phức. **B.** là số thuần ảo.

C. bằng 0.

D. lấy mọi giá trị thực.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\frac{z^2-1}{z} = z - \frac{1}{z} = z - \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = z - \frac{\bar{z}}{|z|^2} = z - \bar{z}$ là số thuần ảo.

Chọn B.

Câu 5: Nếu $|z|=a; (a > 0)$ thì $\frac{\bar{z}^2-a}{\bar{z}}$

A. lấy mọi giá trị phức. **B.** là số thuần ảo.

C. bằng 0.

D. lấy mọi giá trị thực.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\frac{\bar{z}^2-a}{\bar{z}} = \bar{z} - \frac{a}{\bar{z}} = \bar{z} - \frac{a^2 z}{\bar{z} \cdot z} = \bar{z} - \frac{a^2 z}{|z|^2} = \bar{z} - z$ là số thuần ảo.

Chọn B.

Câu 6: Có bao nhiêu số phức z thỏa $\left| \frac{z+1}{i-z} \right| = 1$ và $\left| \frac{z-i}{2+z} \right| = 1$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\begin{cases} \left| \frac{z+1}{i-z} \right| = 1 \\ \left| \frac{z-i}{2+z} \right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z+1| = |i-z| \\ |z-i| = |2+z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ 4x + 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow z = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i.$

Chọn A.

Câu 7: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1; |z_1 + z_2| = \sqrt{3}$. Tính $|z_1 - z_2|$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Nhận xét: Bài này nhìn vào có vẻ khá khó, nhưng các em cần phải bình tĩnh, chỉ cần gọi $z_1 = a_1 + b_1 i; z_2 = a_2 + b_2 i$ ($a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$) sau đó viết hết các giả thiết đề bài cho:

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| = 1 \\ |z_1 + z_2| = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1 \\ (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = 3 \end{cases}$$

Và viết cái cần tính ra $|z_1 - z_2|^2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2$. Hãy quan sát cái cần tính và thấy rằng chỉ cần bình phương lên là có thể dùng được giả thiết.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $z_1 = a_1 + b_1i; z_2 = a_2 + b_2i$ ($a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| = 1 \\ |z_1 + z_2| = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1 \\ (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow 2(a_1b_1 + a_2b_2) = 1 \Rightarrow (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 1$$

Vậy: $|z_1 - z_2|^2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 1$.

Chọn A.

Câu 8: Tính $z = i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2008}$ có kết quả:

A. 0

B. 1

C. $-i$

D. i

Hướng dẫn giải:

Ta có $iz = i^2 + i^3 + \dots + i^{2008} + i^{2009}$ và $z = i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2008}$.

Suy ra $z(i - 1) = i^{2009} - i = i(i^{2008} - 1) = 0 \Rightarrow z = 0$

Chọn A.

Câu 9: Tính $S = 1009 + i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 2017i^{2017}$.

A. $S = 2017 - 1009i$.

B. $1009 + 2017i$.

C. $2017 + 1009i$.

D. $1008 + 1009i$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có

$$\begin{aligned} S &= 1009 + i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + \dots + 2017i^{2017} \\ &= 1009 + (4i^4 + 8i^8 + \dots + 2016i^{2016}) + (i + 5i^5 + 9i^9 + \dots + 2017i^{2017}) + \\ &\quad + (2i^2 + 6i^6 + 10i^{10} + \dots + 2014i^{2014}) + (3i^3 + 7i^7 + 11i^{11} + \dots + 2015i^{2015}) \\ &= 1009 + \sum_{n=1}^{504} (4n) + i \sum_{n=1}^{505} (4n-3) - \sum_{n=1}^{504} (4n-2) - i \sum_{n=1}^{504} (4n-1) \\ &= 1009 + 509040 + 509545i - 508032 - 508536i = 2017 + 1009i. \end{aligned}$$

Cách khác:

Đặt

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2017}$$

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + 2017x^{2016}$$

$$xf'(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + 2017x^{2017} \quad (1)$$

Mặt khác:

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2017} = \frac{x^{2018} - 1}{x - 1}$$

$$f'(x) = \frac{2018x^{2017}(x-1) - (x^{2018} - 1)}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow xf'(x) = x \cdot \frac{2018x^{2017}(x-1) - (x^{2018} - 1)}{(x-1)^2} \quad (2)$$

Thay $x = i$ vào (1) và (2) ta được:

$$S = 1009 + i \cdot \frac{2018i^{2017}(i-1) - (i^{2018} - 1)}{(i-1)^2} = 1009 + i \cdot \frac{-2018 - 2018i + 2}{-2i} = 2017 + 1009i$$

Câu 10: Cho số phức z có mô đun bằng 2017 và w là số phức thỏa mãn biểu thức $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w}$.

Mô đun của số phức w bằng:

A. 1

B. 2

C. 2016

D. 2017

Hướng dẫn giải:

$$\text{Từ } \frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w} \Leftrightarrow \frac{z+w}{zw} - \frac{1}{z+w} = 0 \Leftrightarrow \frac{(z+w)^2 - zw}{zw(z+w)} = 0$$

$$\Rightarrow z^2 + w^2 + zw = 0 \Leftrightarrow z^2 + zw + \frac{1}{4}w^2 + \frac{3}{4}w^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{2}w\right)^2 = -\frac{3}{4}w^2 \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{2}w\right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{3}w}{2}\right)^2$$

$$\text{Từ } \left(z + \frac{w}{2}\right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{3}w}{2}\right)^2 \Rightarrow z = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)w \Rightarrow w = \frac{z}{\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$\text{Suy ra: } |w| = \frac{2017}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}} = 2017$$

Chọn D.

Câu 11: Cho số phức z thỏa mãn: $z - \frac{\bar{z}}{1+3i} = \frac{6+7i}{5}$. Tìm phần thực của số phức z^{2017} .

A. -2^{1008}

B. 2^{1008}

C. 2^{504}

D. 2^{2017}

Hướng dẫn giải:

$$\text{Cho số phức } z \text{ thỏa mãn: } z - \frac{\bar{z}}{1+3i} = \frac{6+7i}{5}. \text{ Tìm phần thực của số phức } z^{2013}.$$

$$\text{Gọi số phức } z = a + bi \quad (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = a - bi \text{ thay vào (1) ta có } a + bi - \frac{a - bi}{1+3i} = \frac{6+7i}{5}$$

$$a+bi - \frac{(a-bi)(1-3i)}{10} = \frac{6+7i}{5} \Leftrightarrow 10a+10bi - a+3b+i(b+3a) = 12+14i$$

$$\Leftrightarrow 9a+3b+i(11b+3a) = 12+14i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9a+3b=12 \\ 11b+3a=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

$$a=b=1 \Rightarrow z=1+i \Rightarrow z^{2017} = \left((1+i)^4\right)^{504} (1+i) = (-4)^{504} (1+i) = 2^{1008} + 2^{1008}i$$

Chọn B.

Câu 12: Cho các số phức z_1, z_2 khác nhau thỏa mãn: $|z_1| = |z_2|$. Chọn phương án đúng:

A. $\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2} = 0$. **B.** $\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ là số phức với phần thực và phần ảo đều khác 0.

C. $\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ là số thực. **D.** $\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ là số thuần ảo.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Phương pháp tự luận:

Vì $|z_1| = |z_2|$ và $z_1 \neq z_2$ nên cả hai số phức đều khác 0. Đặt $w = \frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ và $|z_1| = |z_2| = a$, ta có

$$\overline{w} = \overline{\left(\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1+z_2}}{\overline{z_1-z_2}} = \frac{\frac{a^2}{z_1} + \frac{a^2}{z_2}}{\frac{a^2}{z_1} - \frac{a^2}{z_2}} = \frac{z_1+z_2}{z_2-z_1} = -w$$

Từ đó suy ra w là số thuần ảo.

Chọn D.

Phương pháp trắc nghiệm:

Số phức z_1, z_2 khác nhau thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$ nên chọn $z_1=1; z_2=i$, suy ra $\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2} = \frac{1+i}{1-i} = i$ là số thuần ảo.

Câu 13: Cho hai số phức u, v thỏa mãn $|u| = |v| = 10$ và $|3u-4v| = \sqrt{2016}$. Tính $M = |4u+3v|$.

A. $\sqrt{2984}$ **B.** $\sqrt{2884}$ **C.** $\sqrt{2894}$ **D.** $\sqrt{24}$

Hướng dẫn giải:

Ta có $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$. Đặt $N = |3u-4v|$.

$$\text{Khi đó } N^2 = (3u-4v)(3\overline{u}-4\overline{v}) = 9|u|^2 + 16|v|^2 - 12(u\overline{v} + v\overline{u}).$$

Tương tự ta có $M^2 = 16|u|^2 + 9|v|^2 - 12(u\bar{v} + v\bar{u})$.

Do đó $M^2 + N^2 = 25(|u|^2 + |v|^2) = 5000$.

Suy ra $M^2 = 5000 - N^2 = 5000 - 2016 = 2984 \Rightarrow M = \sqrt{2984}$.

Câu 4(Số phức).Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 2$.Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = 3 - 2i + (2 - i)z$ là một đường tròn.Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. 20

B. $\sqrt{20}$

C. $\sqrt{7}$

D. 7

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Đặt $w = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$

$$w = 3 - 2i + (2 - i)z \Rightarrow x + yi = 3 - 2i + (2 - i)z$$

$$\Rightarrow z = \frac{x - 3 + (y + 2)i}{2 - i} = \frac{2x - y - 8}{5} + \frac{x + 2y + 1}{5}i \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{2x - y - 8}{5}\right)^2 + \left(\frac{x + 2y + 1}{5}\right)^2} = 2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 4y - 7 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 20$$

Bán kính của đường tròn là $r = \sqrt{20}$

Câu 14: Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $z_1 + z_2 + z_3 = 1$. Mệnh đề nào sau đây là sai.

A. Trong ba số đó có hai số đối nhau.

B. Trong ba số đó phải có một số bằng 1.

C. Trong ba số đó có nhiều nhất hai số bằng 1.

D. Tích của ba số đó luôn bằng 1.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $z_1 + z_2 + z_3 = 1 \Leftrightarrow 1 - z_1 = z_2 + z_3$.

Nếu $1 - z_1 = 0$ thì $z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow z_2 = -z_3$.

Nếu $1 - z_1 \neq 0$ thì điểm P biểu diễn số phức $1 - z_1 = z_2 + z_3$ không trùng với gốc tọa độ O.

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức $-z_1$ và A là điểm biểu diễn của số 1.

Khi đó ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP}$ (do P là điểm biểu diễn của số $1 + (-z_1)$) nên OAPM là hình bình hành. Mà $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ nên các điểm biểu diễn cho ba số z_1, z_2, z_3 đều nằm trên đường tròn đơn vị. Ta cũng có $OA = OM = 1$ nên OAPM là hình thoi. Khi đó ta thấy M, A là giao điểm của đường trung trực đoạn OP với đường tròn đơn vị.

Tương tự do P cũng là điểm biểu diễn của $z_2 + z_3$, nếu M' và A' là hai điểm biểu diễn của số z_2, z_3 thì ta cũng có M', A' là giao điểm đường trung trực của OP và đường tròn đơn vị.

Vậy $M' \equiv M$, $A' \equiv A$ hoặc ngược lại. Nghĩa là $z_2 = 1, z_3 = -z_1$ hoặc $z_3 = 1, z_2 = -z_1$.

Do đó A, B là mệnh đề đúng.

C đúng là hiển nhiên, vì nếu ba số đều 1 một thì tổng bằng 3.

D sai vì với $z_1 = 1, z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ thỏa hai tính chất trên của đề bài nhưng $z_1 z_2 z_3 \neq 1$.

Chọn D.

Câu 15: Cho số phức $z = \frac{m+1}{1+m(2i-1)}$ ($m \in \mathbb{R}$). Số các giá trị nguyên của m để $|z-i| < 1$ là

A. 0

B. 1

C. 4

D. Vô số

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } z-i = \frac{m+1}{1+m(2i-1)} - i = \frac{m+1-i(1+2mi-m)}{1+m(2i-1)} = \frac{3m+1+(m-1)i}{1-m+2mi}$$

$$\Rightarrow |z-i| = \left| \frac{3m+1+(m-1)i}{1-m+2mi} \right| = \frac{|3m+1+(m-1)i|}{|1-m+2mi|} < 1$$

$$\Leftrightarrow |3m+1+(m-1)i| < |1-m+2mi| \Leftrightarrow (3m+1)^2 + (m-1)^2 < (1-m)^2 + 4m^2$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 + 6m + 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < -\frac{1}{5}$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ Không có giá trị của m thỏa mãn.

Câu 16: Cho z là số phức có mô đun bằng 2017 và w là số phức thỏa mãn $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w}$. Mô đun của số phức z là:

A. 2015

B. 1

C. 2017

D. 0

Hướng dẫn giải:

$$\text{Từ } \frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w} \text{ ta suy ra } z^2 + w^2 + zw = 0$$

$$\Rightarrow \left(z + \frac{w}{2}\right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{3}w}{2}\right)^2 \Rightarrow z = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)w$$

Lấy mô đun hai vế ta có $|z| = |w| = 2017$.

Chọn C.

Câu 17: Cho số phức z thỏa mãn $|z| \leq 1$. Đặt $A = \frac{2z-i}{2+iz}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $|A| \leq 1$.

B. $|A| \geq 1$.

C. $|A| < 1$.

D. $|A| > 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.Đặt Có $a = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow a^2 + b^2 \leq 1$ (do $|z| \leq 1$)

$$|A| = \left| \frac{2z-i}{2+iz} \right| = \left| \frac{2a+(2b-1)i}{2-b+ai} \right| = \sqrt{\frac{4a^2+(2b+1)^2}{(2-b)^2+a^2}}$$

Ta chứng minh $\frac{4a^2+(2b+1)^2}{(2-b)^2+a^2} \leq 1$.Thật vậy ta có $\frac{4a^2+(2b+1)^2}{(2-b)^2+a^2} \leq 1 \Leftrightarrow 4a^2+(2b+1)^2 \leq (2-b)^2+a^2 \Leftrightarrow a^2+b^2 \leq 1$ Dấu “=” xảy ra khi $a^2+b^2=1$.Vậy $|A| \leq 1$.**Câu 18:** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^2+4|=2|z|$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\frac{\sqrt{3}-1}{6} \leq |z| \leq \frac{\sqrt{3}+1}{6}$. **B.** $\sqrt{5}-1 \leq |z| \leq \sqrt{5}+1$.

C. $\sqrt{6}-1 \leq |z| \leq \sqrt{6}+1$. **D.** $\frac{\sqrt{2}-1}{3} \leq |z| \leq \frac{\sqrt{2}+1}{3}$.

Hướng dẫn giải:Áp dụng bất đẳng thức $|u|+|v| \geq |u+v|$, ta được

$$2|z|+|-4| = |z^2+4|+|-4| \geq |z|^2 \Rightarrow |z|^2-2|z|-4 \leq 0 \Rightarrow |z| \leq \sqrt{5}+1.$$

$$2|z|+|z|^2 = |z^2+4|+|-z^2| \geq 4 \Rightarrow |z|^2+2|z|-4 \geq 0 \Rightarrow |z| \geq \sqrt{5}-1.$$

Vậy, $|z|$ nhỏ nhất là $\sqrt{5}-1$, khi $z = -i+i\sqrt{5}$ và $|z|$ lớn nhất là $\sqrt{5}+1$, khi $z = i+i\sqrt{5}$.**Chọn B.****Câu 19:** Cho z_1, z_2, z_3 là các số phức thỏa mãn $z_1+z_2+z_3=0$ và $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. Khẳng định nào dưới đây là **sai** ?

A. $|z_1^3+z_2^3+z_3^3| = |z_1^3|+|z_2^3|+|z_3^3|$.

B. $|z_1^3+z_2^3+z_3^3| \leq |z_1^3|+|z_2^3|+|z_3^3|$.

C. $|z_1^3+z_2^3+z_3^3| \geq |z_1^3|+|z_2^3|+|z_3^3|$.

D. $|z_1^3+z_2^3+z_3^3| \neq |z_1^3|+|z_2^3|+|z_3^3|$.

Hướng dẫn giải:**Chọn D.****Cách 1:** Ta có: $z_1+z_2+z_3=0 \Leftrightarrow z_2+z_3=-z_1$

$$(z_1+z_2+z_3)^3 = z_1^3+z_2^3+z_3^3+3(z_1z_2+z_1z_3)(z_1+z_2+z_3)+3z_2z_3(z_2+z_3)$$

$$= z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3 \Rightarrow z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 3z_1z_2z_3.$$

$$\Rightarrow |z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| = |3z_1z_2z_3| = 3|z_1||z_2||z_3| = 3$$

Mặt khác $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ nên $|z_1|^3 + |z_2|^3 + |z_3|^3 = 3$. Vậy phương án D sai.

Cách 2: thay thử $z_1 = z_2 = z_3 = 1$ vào các đáp án, thấy đáp án D bị sai

Câu 20: Cho z_1, z_2, z_3 là các số phức thỏa $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|.$

B. $|z_1 + z_2 + z_3| > |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|.$

C. $|z_1 + z_2 + z_3| < |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|.$

D. $|z_1 + z_2 + z_3| \neq |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|.$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Cách 1: Kí hiệu Re : là phần thực của số phức.

Ta có $|z_1 + z_2 + z_3|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + 2\text{Re}(\bar{z}_1z_2 + \bar{z}_2z_3 + \bar{z}_3z_1) = 3 + 2\text{Re}(\bar{z}_1z_2 + \bar{z}_2z_3 + \bar{z}_3z_1)$
(1).

$$\begin{aligned} |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|^2 &= |z_1z_2|^2 + |z_2z_3|^2 + |z_3z_1|^2 + 2\text{Re}(\bar{z}_1\bar{z}_2z_2z_3 + \bar{z}_2\bar{z}_3z_3z_1 + \bar{z}_3\bar{z}_1z_1z_2) \\ &= |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 + |z_2|^2 \cdot |z_3|^2 + |z_3|^2 \cdot |z_1|^2 + 2\text{Re}(\bar{z}_1|z_2|^2z_3 + \bar{z}_2|z_3|^2z_1 + \bar{z}_3|z_1|^2z_2) \\ &= 3 + 2\text{Re}(\bar{z}_1z_3 + \bar{z}_2z_1 + \bar{z}_3z_2) = 3 + 2\text{Re}(\bar{z}_1z_2 + \bar{z}_2z_3 + \bar{z}_3z_1) \quad (2). \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|.$

Các h khác: B hoặc C đúng suy ra D đúng Loại B, C.

Chọn $z_1 = z_2 = z_3 \Rightarrow$ A đúng và D sai

Cách 2: thay thử $z_1 = z_2 = z_3 = 1$ vào các đáp án, thấy đáp án D bị sai

Câu 21: Tìm số phức z có $|z| = 1$ và $|z + i|_{\max}$:

A. 1

B. -1

C. i

D. $-i$

Hướng dẫn giải:

Đặt $z = a + bi$ thì $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}; |z + i| = \sqrt{a^2 + (b+1)^2}$

Khi đó ta có:

$$|z| = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow |b| \leq 1; |z + i| = \sqrt{a^2 + (b+1)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2b + 1} = \sqrt{2b + 2} \leq 2$$

Do đó giá trị lớn nhất đạt được bằng 2 khi $a = 0; b = 1; z = i$.

Chọn C.

Câu 22: Tìm phần thực của số phức $z = (1 + i)^n, n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn phương trình:

$$\log_4(n - 3) + \log_4(n + 9) = 3$$

A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

Hướng dẫn giải:Điều kiện $n > 3, n \in \mathbb{N}$ Phương trình: $\log_4(n-3) + \log_4(n+9) = 3 \Leftrightarrow \log_4(n-3)(n+9) = 3 \Leftrightarrow n = 7$ (so đk)

$$z = (1+i)^7 = (1+i) \left[(1+i)^2 \right]^3 = (1+i)(2i)^3 = 8-8i$$

Vậy phần thực của số phức z là 8.**Chọn D.**

Câu 23: Cho hai số phức phân biệt $z_1; z_2$ thỏa mãn điều kiện $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ là số ảo. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|z_1| = 1; |z_2| = 1$

B. $z_1 = \overline{z_2}$

C. $|z_1| = |z_2|$

D. $z_1 = -z_2$

Hướng dẫn giải:

$$z_1 \neq z_2 \Leftrightarrow z_1 - z_2 \neq 0$$

$$\text{Thì } \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \text{ là số ảo} \Leftrightarrow \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} + \overline{\left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \right)} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} + \frac{\overline{z_1 + z_2}}{\overline{z_1 - z_2}} = 0 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)(\overline{z_1 - z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = 0.$$

$$\Leftrightarrow 2(z_1 \overline{z_1} - z_2 \overline{z_2}) = 0 \Leftrightarrow z_1 \overline{z_1} - z_2 \overline{z_2} = 0 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|.$$

Chọn C.

Câu 24: Trong mặt phẳng phức Oxy , các số phức z thỏa $|z + 2i - 1| = |z + i|$. Tìm số phức z được biểu diễn bởi điểm M sao cho MA ngắn nhất với $A(1, 3)$.

A. $3+i$.

B. $1+3i$.

C. $2-3i$.

D. $-2+3i$.

Hướng dẫn giải:Gọi $M(x, y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)Gọi $E(1, -2)$ là điểm biểu diễn số phức $1 - 2i$ Gọi $F(0, -1)$ là điểm biểu diễn số phức $-i$

Ta có: $|z + 2i - 1| = |z + i| \Leftrightarrow ME = MF \Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường trung trực $EF: x - y - 2 = 0$.

Để MA ngắn nhất khi $MA \perp EF$ tại $M \Leftrightarrow M(3, 1) \Rightarrow z = 3 + i$

Câu 25: Trong các số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm số phức z để $|1+z| + 3|1-z|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $z = -\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i, z = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.$

B. $z = -\frac{3}{5}i, z = \frac{3}{5}i.$

C. $z = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i, z = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.$

D. $z = -\frac{3}{5}i, z = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.$

Hướng dẫn giải:

Giả sử $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$

Vì $|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

Khi đó:

$$\begin{aligned} |1+z| + 3|1-z| &= \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + 3\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ &= \sqrt{(x+1)^2 + 1-x^2} + 3\sqrt{(x+1)^2 + 1-x^2} = \sqrt{2}(\sqrt{1+x} + 3\sqrt{1-x}) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2}(\sqrt{1+x} + 3\sqrt{1-x})$ trên đoạn $[-1; 1]$ ta có:

$$f'(x) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{3}{2\sqrt{1-x}}\right); f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5}$$

Ta có: $f(-1) = 6; f\left(-\frac{4}{5}\right) = 2\sqrt{10}$

$$\text{Vậy } f_{\max} = f\left(-\frac{4}{5}\right) = 2\sqrt{10} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{5} \\ y^2 = 1-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{5}; y = -\frac{3}{5} \\ x = -\frac{4}{5}; y = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Vậy $z = -\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i, z = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.$

Chọn A.

DẠNG 2: PHƯƠNG TRÌNH TRÊN SỐ PHỨC

- Câu 1:** Tính tổng mô-đun tất cả các nghiệm của phương trình: $(z+i)(z^2-1)(z^3+i)=0$
A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8

Hướng dẫn giải:

$$(z+i)(z^2-1)(z^3+i)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z=-i \\ z=\pm 1 \\ z^3-i^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-i \\ z=\pm 1 \\ z=i \\ z^2+iz-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-i \\ z=\pm 1 \\ z=i \\ z=\frac{-i\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Suy ra tổng mô-đun các nghiệm bằng 6.

Chọn C.

- Câu 2:** Gọi z_1, z_2 là 2 nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 2 = 0$ trên tập số phức. Tìm mô-đun của số phức $\omega = (z_1 - 1)^{2015} + (z_2 - 1)^{2016}$.
A. $|\omega| = \sqrt{5}$ **B.** $|\omega| = \sqrt{2}$ **C.** $|\omega| = 1$ **D.** $|\omega| = \sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:

Phương trình $z^2 - 2z + 2 = 0$ có $\Delta' = 1 - 2 = -1 = i^2$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm $\begin{cases} z_1 = 1 - i \\ z_2 = 1 + i \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} z_1 = 1 + i \\ z_2 = 1 - i \end{cases}$

Thay $\begin{cases} z_1 = 1 - i \\ z_2 = 1 + i \end{cases}$ vào ω ta được: $\omega = (-i)^{2015} + i^{2016} = -(i^2)^{1007} \cdot i + (i^2)^{1013} = -1 + i$.

Thay $\begin{cases} z_1 = 1 + i \\ z_2 = 1 - i \end{cases}$ vào $\omega = i^{2015} + (-i)^{2016} = (i^2)^{1002} \cdot i + (i^2)^{1003} = -1 + i$.

Vậy $|\omega| = \sqrt{2}$.

Chọn B.

- Câu 3:** Tìm các số thực b, c để phương trình (với ẩn z) $z^2 + bz + c = 0$ nhận $z = 1 + i$ là một nghiệm.
A. $b = 2; c = -2$ **B.** $b = 2; c = 2$ **C.** $b = -2; c = -2$ **D.** $b = -1; c = 1$

Hướng dẫn giải:

Nếu $z = 1 + i$ là nghiệm thì:

$$(1+i)^2 + b(1+i) + c = 0 \Leftrightarrow b + c + (b+2)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 0 \\ b + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$$

Một phương trình bậc hai với hệ số thực, nếu có một nghiệm phức z thì cũng nhận $\bar{z}$ làm nghiệm. Vậy nếu $z = 1 + i$ là một nghiệm thì $\bar{z} = 1 - i$ cũng là nghiệm. Theo định lý Vi-ét:

$$\begin{cases} (1+i) + (1-i) = -b \Rightarrow b = -2 \\ (1+i)(1-i) = 2 = c \end{cases}$$

Chọn A.

Câu 4: Tìm điều kiện cần và đủ về các số thực m, n để phương trình $z^4 + mz^2 + n = 0$ **không** có nghiệm thực.

A. $m^2 - 4n > 0$.

B. $m^2 - 4n < 0$ hoặc $\begin{cases} m^2 - 4n > 0 \\ m < 0 \\ n > 0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} m^2 - 4n \geq 0 \\ m > 0 \\ n > 0 \end{cases}$.

D. $m^2 - 4n < 0$ hoặc $\begin{cases} m^2 - 4n \geq 0 \\ m > 0 \\ n > 0 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải:

Phương trình $z^4 + mz^2 + n = 0$ không có nghiệm thực trong các trường hợp:

TH1: Phương trình vô nghiệm, tức là $m^2 - 4n < 0$.

TH2: Phương trình $t^2 + mt + n = 0$; ($t = z^2$) có hai nghiệm âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4n \geq 0 \\ m > 0 \\ n > 0 \end{cases}$.

Chọn D.

Câu 5: Trong mặt phẳng phức, các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $(iz - 1)(z + 3i)(\bar{z} - 2 + 3i) = 0$ là các điểm nào sau đây?

A. $A(0; -1); B(0; -3); C(2; 3)$

B. $A(1; 0); B(3; 0); C(2; -3)$

C. $A(0; -2); B(0; 1); C(-2; 3)$

D. $A(2; -2); B(-1; 1); C(-1; 0)$

Hướng dẫn giải:

$$(iz - 1)(z + 3i)(\bar{z} - 2 + 3i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} iz - 1 = 0 \\ z + 3i = 0 \\ \bar{z} - 2 + 3i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{i} = -i \\ z = -3i \\ \bar{z} = 2 - 3i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -i \\ z = -3i \\ z = 2 + 3i \end{cases}$$

Vậy các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình đã cho là $A(0; -1); B(0; -3); C(2; 3)$.

Chọn A.

Câu 6: Tìm các số thực a, b, c sao cho hai phương trình $az^2 + bz + c = 0, cz^2 + bz + a + 16 - 16i = 0$ có nghiệm chung là $z = 1 + 2i$

A. $(a, b, c) = (1; -2; 5)$

B. $(a, b, c) = (1; 2; 5)$

C. $(a, b, c) = (-1; -2; 5)$

D. $(a, b, c) = (1; -2; -5)$

Hướng dẫn giải:

Theo giả thiết phương trình $az^2 + bz + c = 0$ có nghiệm $z = 1 + 2i$ khi

$$a(1+2i)^2 + b(1+2i) + c = 0 \Leftrightarrow -3a + b + c + (4a + 2b)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3a + b + c = 0 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Tương tự phương trình $cz^2 + bz + a + 16 - 16i = 0$ có nghiệm $z = 1 + 2i$ khi

$$c(1+2i)^2 + b(1+2i) + a + 16 - 16i = 0 \Leftrightarrow c(-3 + 4i) + b + 2bi + a + 16 - 16i = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b - 3c + 16) + 2(b + 2c - 8)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b - 3c + 16 = 0 \\ b + 2c - 8 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $(a, b, c) = (1; -2; 5)$.

Chọn A.

Câu 7: Tìm các số thực a, b, c để phương trình (với ẩn z) $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ nhận $z = 1 + i$ làm nghiệm và cũng nhận $z = 2$ làm nghiệm.

A. $a = -4; b = 6; c = -4$

B. $a = -4; b = 5; c = -4$

C. $a = -3; b = 4; c = -2$

D. $a = -1; b = 0; c = 2$

Hướng dẫn giải:

$$z = 1 + i \text{ là nghiệm thì } (1+i)^3 + a(1+i)^2 + b(1+i) + c = 0$$

$$z = 2 \text{ là nghiệm thì } 8 + 4a + 2b + c = 0$$

$$\text{Từ đó ta có hệ phương trình } \begin{cases} b + c - 2 = 0 & (1) \\ 2a + b + 2 = 0 & (2) \\ 4a + 2b + c + 8 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1) suy ra } c = 2 - b$$

$$\text{Từ (2) suy ra } b = -2 - 2a \Rightarrow c = 2 - (-2 - 2a) = 4 + 2a$$

$$\text{Thay vào (3) ta có: } 4a + 2(-2 - 2a) + 4 + 2a + 8 = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$\text{Với } a = -4 \Rightarrow b = 6; c = -4.$$

Chọn A.

Câu 8: Phương trình $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^4 = 1$ có bao nhiêu nghiệm.

A. 1 nghiệm

B. 2 nghiệm

C. 3 nghiệm

D. 4 nghiệm

Hướng dẫn giải:

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 = 1, (1) \\ \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 = -1, (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z+1}{z-1} = 1 \\ \frac{z+1}{z-1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z+1 = z-1 \\ z+1 = -z+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i = -i \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 0$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z+1}{z-1} = i \\ \frac{z+1}{z-1} = -i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z+1 = iz+1 \\ z+1 = -iz-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm phương trình là: $z = 0; z = 1; z = -1$ **Chọn C.****Câu 9:** Số nghiệm phức của phương trình $\bar{z} + \frac{25}{z} = 8 - 6i$ là?

A. 1 nghiệm

B. 2 nghiệm

C. 3 nghiệm

D. 4 nghiệm

Hướng dẫn giải:Giả sử $z = a + bi$ với; $a, b \in \mathbb{R}$ và a, b không đồng thời bằng 0.

$$\text{Khi đó } \bar{z} = a - bi; \frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

Khi đó phương trình

$$\bar{z} + \frac{25}{z} = 8 - 6i \Leftrightarrow a - bi + \frac{25(a - bi)}{a^2 + b^2} = 8 - 6i \Leftrightarrow \begin{cases} a(a^2 + b^2 + 25) = 8(a^2 + b^2) & (1) \\ b(a^2 + b^2 + 25) = 6(a^2 + b^2) & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) chia (2) theo vế ta có $b = \frac{3}{4}a$, thế vào (1). Ta có $a = 0$ hoặc $a = 4$.Với $a = 0 \Rightarrow b = 0$ (Loại)Với $a = 4 \Rightarrow b = 3$. Ta có số phức $z = 4 + 3i$.**Chọn B.****Câu 10:** Gọi $z_1; z_2; z_3; z_4$ là 4 nghiệm phức của phương trình $z^4 + (4 + m)z^2 + 4m = 0$. Tìm tất cả các giá trị m để $|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = 6$.A. $m = -1$ B. $m = \pm 2$ C. $m = \pm 3$ D. $m = \pm 1$ **Hướng dẫn giải:**

$$z^4 + (4+m)z^2 + 4m = 0 \Leftrightarrow (z^2 + 4)(z^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_{1,2} = \pm 2i \\ z_{3,4} = \pm \sqrt{-m} \end{cases}$$

$$\text{Nếu } m \leq 0 \text{ hoặc } \Leftrightarrow \begin{cases} z_{1,2} = \pm 2i \\ z_{3,4} = \pm i\sqrt{m} \end{cases} \text{ nếu } m > 0$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} 6 = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = 4 + 2\sqrt{-m} \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$$

$$\text{Hoặc } \begin{cases} 6 = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = 4 + 2\sqrt{m} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

Kết hợp lại $m = \pm 1$ thỏa mãn bài toán.

Chọn D.

Câu 11: Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là các nghiệm của phương trình $\left(\frac{z-1}{2z-i}\right)^4 = 1$. Tính giá trị biểu thức $P = (z_1^2 + 1)(z_2^2 + 1)(z_3^2 + 1)(z_4^2 + 1)$.

A. $P = 2$.

B. $P = \frac{17}{9}$.

C. $P = \frac{16}{9}$.

D. $P = \frac{15}{9}$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có phương trình } \Leftrightarrow f(z) = (2z-i)^4 - (z-1)^4 = 0.$$

$$\text{Suy ra: } f(z) = 15(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4). \text{ Vì}$$

$$z_1^2 + 1 = (z_1 - i)(z_1 + i) \Rightarrow P = \frac{f(i) \cdot f(-i)}{225} \quad (1).$$

$$\text{Mà } f(i) = i^4 - (i-1)^4 = 5; f(-i) = (-3i)^4 - (i+1)^4 = 85. \text{ Vậy từ (1) } \Rightarrow P = \frac{17}{9}.$$

Chọn B.

Câu 12: Tìm số thực $m = a - b\sqrt{20}$ (a, b là các số nguyên khác 0) để phương trình $2z^2 + 2(m-1)z + (2m+1) = 0$ có hai nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| + |z_2| = \sqrt{10}$. Tìm a .

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Hướng dẫn giải:

$$\Delta' = m^2 - 6m - 1 \in \mathbb{R}$$

$$\text{TH1: } \Delta' > 0 \text{ hay } m \in (-\infty; 3 - \sqrt{10}) \cup (3 + \sqrt{10}; +\infty)$$

$$\text{Khi đó } |z_1| + |z_2| = \sqrt{10} \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + 2|z_1 z_2| = 10$$

$$\Leftrightarrow (1-m)^2 - (2m+1) + |2m+1| = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 \geq 0 \\ (1-m)^2 = 10 \\ 2m+1 < 0 \\ m^2 - 6m - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 + \sqrt{10} \\ m = 3 - \sqrt{20} \end{cases} \quad (\text{loại})$$

TH2: $\Delta' < 0$ hay $m \in (3 - \sqrt{10}; 3 + \sqrt{10})$

$$\text{Khi đó: } |z_1| + |z_2| = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left| \frac{1-m+i\sqrt{-(m^2-6m-1)}}{2} \right| + \left| \frac{1-m-i\sqrt{-(m^2-6m-1)}}{2} \right| = \sqrt{10}$$

$$\text{Hay } \sqrt{(1-m)^2 + (-m^2+6m+1)} = \sqrt{10} \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy $m = 2$ hoặc $m = 3 - \sqrt{20}$

DẠNG 3: TÌM TẬP HỢP ĐIỂM, BIỂU DIỄN SỐ PHỨC

Câu 1: Tìm tập hợp (T) các điểm M biểu diễn các số phức z sao cho $\log_{\frac{1}{2}}|z-2| > \log_{\frac{1}{2}}|z|$.

A. Miền phẳng nằm bên phải đường thẳng $x=1$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Hình vành khăn gồm các điểm giữa hai hình tròn $(O;1)$ và $(O;2)$ kể cả các điểm nằm trên đường tròn $(O;2)$; không kể các điểm nằm trên đường tròn $(O;1)$

D. Đường thẳng $x=1$

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $z \neq 0, z \neq 2$

Cách 1: Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

$$\log_{\frac{1}{2}}|z-2| > \log_{\frac{1}{2}}|z| \Leftrightarrow |z-2| < |z| \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 < x^2 + y^2 \Leftrightarrow x > 1.$$

Do đó, tập hợp (T) các điểm M biểu diễn các số phức z là miền phẳng nằm bên phải đường thẳng $x=1$.

Cách 2: Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}|z-2| > \log_{\frac{1}{2}}|z| \Leftrightarrow |z-2| < |z|$.

Gọi A là điểm biểu diễn số phức $z_1 = 2 \Rightarrow A(2;0)$

Xét trường hợp $|z-2| = |z| \Leftrightarrow MA = MO$

Khi đó M chạy trên đường trung trực Δ của đoạn OA , có phương trình $x=1$.

Với trường hợp $|z-2| < |z| \Leftrightarrow MA < MB$

$\Rightarrow M$ nằm bên phải đường thẳng Δ .

Do đó, tập hợp (T) các điểm M biểu diễn các số phức z là miền phẳng nằm bên phải đường thẳng Δ , trung trực của đoạn thẳng OA là miền phẳng nằm bên phải đường thẳng $x=1$.

Chọn A.

Câu 2: Tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $|z+1| + |z-1| = 4$ là:

A. $x^2 + y^2 = 4$

B. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$

C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

D. $3x^2 + 4y^2 - 36 = 0$

Hướng dẫn giải:

Xét hai điểm: $F_1(-1;0), F_2(1;0)$, theo giả thiết ta có:

$$|z+1|+|z-1|=4 \Leftrightarrow MF_1+MF_2=4, \forall M(z).$$

Vậy tập hợp điểm cần tìm là elip có các tiêu điểm $F_1(-1;0), F_2(1;0)$, nửa trục lớn $a=2$,

nửa trục nhỏ $b=\sqrt{3}$. Phương trình elip $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

Chọn C.

Câu 3: Tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $|z-2|-|z+2|=3$ là:

A. $x^2-y^2=1$

B. $(x-2)^2+(y+2)^2=9$

C. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$

D. $\frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=1$

Hướng dẫn giải:

Xét hai điểm $F_1(-2;0), F_2(2;0)$, theo giả thiết ta có:

$$|z-2|-|z+2|=3 \Leftrightarrow MF_1-MF_2=3, \forall M(z).$$

Vậy tập hợp các điểm cần tìm là hyperbol có các tiêu điểm $F_1(-2;0), F_2(2;0)$, nửa trục lớn

$a=\frac{3}{2}$, nửa trục nhỏ $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Phương trình của hyperbol $\frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=1$.

Chọn D.

Câu 4: Cho 3 số phức: $1; 3i; -3-5i$ biểu diễn bởi các điểm A, B, C . Điểm I thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ biểu diễn số phức nào sau đây?

A. $4+19i$

B. $4-19i$

C. $-4-19i$

D. $4-6i$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $A(1;0), B(0;3), C(-3;-5)$

$$2\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OI})-3(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OI})+2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OI})=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI}=2\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC} \Rightarrow I(-4;-19)$$

Vậy điểm I biểu diễn số phức $z=-4-19i$.

Chọn C.

Câu 5: Tập hợp điểm biểu diễn số phức $|z - 2i| = 3$ là đường tròn tâm I . Tất cả giá trị m thỏa mãn khoảng cách từ I đến $\Delta: 3x + 4y - m = 0$ bằng $\frac{1}{5}$ là:

- A.** $m = -7; m = 9$ **B.** $m = -8; m = 8$ **C.** $m = 7; m = 9$ **D.** $m = 8; m = 9$

Hướng dẫn giải:

$$|z - 2i| = 3 \Leftrightarrow |x + (y - 2)i| = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = 3 \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 9 \Rightarrow I(0; 2)$$

$$d(I, \Delta) = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 - m|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{5} |8 - m|$$

$$d(I, \Delta) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{5} |8 - m| = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - m = 1 \\ 8 - m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 7 \\ m = 9 \end{cases}$$

Chọn C.

Câu 6: Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ thỏa mãn điều kiện: $|z|^2 - 5z - 5\bar{z} = 0$.

- A.** Đường thẳng qua gốc tọa độ. **B.** Đường tròn bán kính 1.
C. Đường tròn tâm $I(5; 0)$ bán kính 5 **D.** Đường tròn tâm $I(5; 0)$ bán kính 3

Hướng dẫn giải:

Đặt $z = x + yi$, ta có $\bar{z} = x - yi$.

$$\text{Do đó: } |z|^2 - 5z - 5\bar{z} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 5x - 5yi - 5x + 5yi = 0 \Leftrightarrow (x - 5)^2 + y^2 = 25$$

Trên mặt phẳng tọa độ, đó là tập hợp các điểm thuộc đường tròn bán kính bằng 5 và tâm là $I(5; 0)$.

Chọn C.

Câu 7: Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z sao cho $u = \frac{z + 2 + 3i}{z - i}$ là một số thuần ảo.

- A.** Đường tròn tâm $I(-1; -1)$, bán kính bằng $\sqrt{5}$, khuyết 2 điểm $(0; 1)$ và $(-2; -3)$.
B. Đường tròn tâm $I(-1; -3)$, bán kính bằng $\sqrt{5}$, khuyết 2 điểm $(0; 1)$ và $(-2; -3)$.
C. Đường tròn tâm $I(-1; -4)$, bán kính bằng $\sqrt{5}$, khuyết 2 điểm $(0; 1)$ và $(-2; -3)$.
D. Đường tròn tâm $I(-2; -1)$, bán kính bằng $\sqrt{5}$, khuyết 2 điểm $(0; 1)$ và $(-2; -3)$.

Hướng dẫn giải:

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), ($z \neq i$), khi đó:

$$u = \frac{a + 2 + bi + 3i}{a + (b - 1)i} = \frac{(a + 2 + (b + 3)i)(a - (b - 1)i)}{a^2 + (b - 1)^2}$$

Từ số bằng $a^2 + b^2 + 2a + 2b - 3 + 2(2a - b + 1)i$ là số thuần ảo khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + 2a + 2b - 3 = 0 \\ 2a - b + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)^2 + (b+1)^2 = 5 \\ (a;b) \neq (0;1), (-2;-3) \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-1;-1)$, bán kính bằng $\sqrt{5}$, khuyết 2 điểm $(0;1)$ và $(-2;-3)$.

Chọn A.

Câu 8: Tìm trong mặt phẳng tập hợp (λ) các điểm M biểu diễn số phức z sao cho $Z = z + \frac{4}{z}$ là một số thực.

A. Trục hoành $x'Ox$ ngoại trừ điểm gốc và đường tròn tâm O , bán kính $R = 2$

B. Trục hoành $x'Ox$ ngoại trừ điểm gốc và đường tròn tâm O , bán kính $R = 1$

C. Đường tròn tâm O , bán kính $R = 1$

D. Trục hoành $x'Ox$ ngoại trừ điểm gốc

Hướng dẫn giải:

Đặt $z = x + yi, (z \neq 0)$ với $x, y \in \mathbb{R}$

$$\text{Ta có: } Z = z + \frac{4}{z} = x + yi + \frac{4}{x + yi} = x + yi + \frac{4(x - yi)}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{x(x^2 + y^2 + 4) + y(x^2 + y^2 - 4)i}{x^2 + y^2}$$

$$Z \text{ là một số thực: } \Leftrightarrow \begin{cases} y(x^2 + y^2 + 4) = 0 \\ x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \vee x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases}$$

Do đó (λ) gồm:

- Trục hoành $x'Ox$ ngoại trừ điểm gốc.

- Đường tròn tâm O , bán kính $R = 2$.

Chọn A.

Câu 9: Trong mặt phẳng phức, cho M là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi, M \neq 0$. Xem số phức $Z = \frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{1}{z^2} \right)$. Tìm tập hợp điểm M sao cho Z là một số thực.

A. Trục tung (hay trục hoành), không kể điểm O .

B. Trục tung hay trục hoành

C. Đường thẳng $y = 1$

D. Đường thẳng $x = 1$

Hướng dẫn giải:

Trường hợp Z là một số thực $\Leftrightarrow$ Phần ảo bằng 0.

$$\Leftrightarrow \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \left[(x^2 + y^2)^2 + 1 \right] = 0 \Leftrightarrow xy = 0, x^2 + y^2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y \neq 0 \\ y = 0, x \neq 0 \end{cases}$$

Tập hợp điểm M trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z là

- Trục tung, không kể điểm O .
- Trục hoành, không kể điểm O .

Chọn A.

Câu 10: Trong mặt phẳng phức, cho M là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi, M \neq 0$. Xem số phức $Z = \frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{1}{z^2} \right)$. Tìm tập hợp điểm M sao cho Z là một số thuần ảo.

- A.** Đường tròn tâm O , bán kính $R=1$
- B.** Đường tròn tâm $I(0;1)$ bán kính $R=1$
- C.** Đường thẳng $y=1$
- D.** Đường thẳng $x=1$

Hướng dẫn giải:

Trường hợp Z là một số thuần ảo $\Leftrightarrow$ Phần thực bằng 0.

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Tập hợp điểm M là đường tròn tâm O , bán kính $R=1$.

Chọn A.

Câu 11: Cho $Z = \frac{1-iz}{1+iz}, z \in \mathbb{C}, z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Tìm tập hợp điểm M sao cho Z là một số thực.

- A.** Trục tung ngoại trừ điểm $A(0;1)$
- B.** Trục hoành ngoại trừ điểm $A(0;1)$
- C.** Đường thẳng $y=1$
- D.** Đường thẳng $x=1$

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } z = x + yi; x, y \in \mathbb{R} &\Rightarrow Z = \frac{1-iz}{1+iz} = \frac{1-i(x+yi)}{1+i(x+yi)} \\ &\Rightarrow Z = \frac{1-yi^2-xi}{1+yi^2+xi} = \frac{1+y-xi}{1-y+xi} = \frac{(1+y-xi)(1-y-xi)}{(1-y+xi)(1-y-xi)} \\ &= \frac{(1-xi)^2 - y^2}{(1-y)^2 - x^2i^2} = \frac{1+x^2i^2-2xi-y^2}{(1-y)^2 + x^2} = \frac{1-x^2-y^2-2xi}{(1-y)^2 + x^2} \end{aligned}$$

Z là một số thực $\Leftrightarrow x=0, y \neq 0$

Ta có $z = yi, y \neq 1$.

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là trục tung ngoại trừ điểm $A(1;0)$.

Chọn A.

Câu 12: Cho $Z = \frac{1-iz}{1+iz}$, $z \in \mathbb{C}$, $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Tìm tập hợp điểm M sao cho Z là một số thuần ảo.

A. Đường tròn tâm O , bán kính $R=1$ ngoại trừ điểm $A(0;1)$

B. Đường tròn tâm O , bán kính $R=1$

C. Đường thẳng $y=1$

D. Đường thẳng $x=1$

Hướng dẫn giải:

Số phức Z là một số thuần ảo khi và chỉ khi:
$$\begin{cases} 1-x^2-y^2=0 \\ (1-y)^2+x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x \neq 0, y \neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn tâm O , bán kính $R=1$ ngoại trừ điểm $A(0;1)$

Chọn A.

Câu 13: Trong mặt phẳng phức, cho m và M là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, $M \neq 0$.

$Z = X + Yi = \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right)$. Tìm tập hợp điểm M sao cho Z là một số thực.

A. Đường tròn tâm O , bán kính $R=1$ và trục hoành Ox , không kể điểm gốc O

B. Đường tròn tâm O , bán kính $R=1$

C. Đường thẳng $y=1$.

D. Đường thẳng $x = -\frac{1}{2}$ và trục hoành Ox

Hướng dẫn giải:

Ta có: $Z = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2} \left(x + yi + \frac{1}{x + yi} \right) = \frac{(x^2 + y^2 + 1)x}{2(x^2 + y^2)} + \frac{(x^2 + y^2 - 1)y}{2(x^2 + y^2)}i$

Z là số thực khi và chỉ khi: $Y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2 - 1)y = 0 \\ x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases} \quad (1)$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Tập hợp các điểm M phải gồm:

+ Trục hoành Ox , không kể điểm gốc O .

+ Đường tròn tâm O , bán kính $R=1$

Chọn A.

Câu 14: Trong mặt phẳng phức, cho m và M theo thứ tự là điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$ và $Z = \frac{z-1}{z+2i}$. Tìm tập hợp các điểm m sao cho: Z là một số thuần ảo.

A. Đường tròn tâm $I\left(\frac{1}{2}; -1\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Đường thẳng $y = 2x - 2$

D. Đường thẳng $x = 1$

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } Z &= \frac{z-1}{z+2i} = \frac{(x+yi)-1}{(x+yi)+2i} = \frac{x-1+yi}{x+(y+2)i} = \frac{(x-1+yi)(x-(y+2)i)}{(x+(y+2)i)(x-(y+2)i)} \\ \Rightarrow Z &= \frac{x(x-1)+y(y+2)+(y-2x+2)i}{x^2+(y+2)^2} \end{aligned}$$

Z là một số thuần ảo khi và chỉ khi: $x(x-1)+y(y+2)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-x+2y=0$

Tập hợp các điểm m là đường tròn tâm $I\left(\frac{1}{2}; -1\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Chọn A.

Câu 15: Trong mặt phẳng phức, tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z sao cho: $|z| = 2|z-i|$.

A. $x^2 + y^2 - \frac{8}{3}y + \frac{4}{3} = 0$

B. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$

C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

D. $3x^2 + 4y^2 - 36 = 0$

Hướng dẫn giải:

Cách 1. Đặt $z = x + yi$, ($z \neq 0$) với $x, y \in \mathbb{R}$

$$\text{Ta có: } |z| = 2|z-i| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4(x^2 + (y-1)^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{8}{3}y + \frac{4}{3} = 0$$

Cách 2. Ta có: $|z| = 2|z-i| \Leftrightarrow |\vec{OM}| = 2|\vec{OM} - \vec{OB}| \Leftrightarrow |\vec{OM}| = 2|\vec{BM}|$

Với $B(1;0)$ là điểm biểu diễn số i .

$$\text{Do đó ta có: } OM = 2BM \Leftrightarrow \frac{MO}{MB} = 2$$

Ta suy ra tập hợp các điểm M là đường tròn Apollonius đường kính IJ , với I, J thuộc trục tung và:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OI} &= 2\overrightarrow{IB} \\ \overrightarrow{OJ} &= -2\overrightarrow{JB}\end{aligned} \Rightarrow I\left(0; \frac{2}{3}\right) \text{ và } J(0; 2)$$

$$\text{Phương trình đường tròn: } x^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 (y - 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{8}{3}y + \frac{4}{3} = 0$$

Chọn A.

Câu 16: Cho A là điểm biểu diễn của các số phức: $z = 1 - 2i$; M_1, M_2 lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1 và z_2 . Điều kiện để ΔAM_1M_2 cân tại A là:

A. $|z_1| = |z_2|$ **B.** $|z_1 - 1 + 2i| = |z_2 - 1 + 2i|$

C. $|z_1 - z_2| = |1 - 2i|$ **D.** $|z_1 - 1 + 2i| = |z_1 - z_2|$

Hướng dẫn giải:

$$\Delta AM_1M_2 \text{ cân tại } A \text{ nên } M_1A = M_1M_2 \text{ hay: } z_1 - 1 + 2i = z_2 - 1 + 2i$$

Chọn B.

Câu 17: Trong mặt phẳng phức, cho số phức a bất kì, tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z sao cho: $|z - a| \cdot |\bar{z} - \bar{a}| = a\bar{a}$.

A. Đường tròn tâm A , bán kính $R = AO$

B. Đường tròn tâm A , bán kính $R = 2$

C. Một hyperbol vuông góc

D. Đường thẳng $x = 1$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } |z - a| \cdot |\bar{z} - \bar{a}| = a\bar{a} \Leftrightarrow |z - a|^2 = |a|^2 \quad (1)$$

Gọi A là điểm biểu diễn số phức a trong mặt phẳng phức.

$$\text{Ta có: } (1) \Leftrightarrow |\overrightarrow{MA}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 \Leftrightarrow AM^2 = OA^2 \Rightarrow AM = AO$$

Do đó, tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A , bán kính $R = AO$.

Chọn A.

Câu 18: Trong mặt phẳng phức, cho số phức a bất kì, tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z sao cho: $z^2 - a^2 = \bar{z}^2 - \bar{a}^2$.

A. Đường tròn tâm A , bán kính $R = AO$

B. Đường tròn tâm A , bán kính $R = 2$

C. Một hyperbol vuông góc

D. Đường thẳng $x = 1$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } z^2 - a^2 = \bar{z}^2 - \bar{a}^2 \Leftrightarrow z^2 - \bar{z}^2 = a^2 - \bar{a}^2 \Leftrightarrow (z + \bar{z})(z - \bar{z}) = (a + \bar{a})(a - \bar{a}) \quad (2)$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} z = x + yi \\ a = \alpha + \beta i \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } (2) \Leftrightarrow 2x(2yi) = 2\alpha(2\beta i) \Leftrightarrow xy = \alpha\beta$$

Do đó, tập hợp các điểm M là một hyperbol vuông góc.

Chọn C.

Câu 19: Trong mặt phẳng phức, tìm tập hợp các điểm M là ảnh của số phức z sao cho: Ảnh của các số i, z, iz thẳng hàng.

A. Đường tròn $x^2 + y^2 - x - y = 0$, có tâm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ngoại trừ điểm $(0;1)$

B. Đường tròn $x^2 + y^2 - x - y = 0$, có tâm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$

C. Một hyperbol vuông góc

D. Đường thẳng $x = 1$

Hướng dẫn giải:

Cách 1: Gọi điểm biểu diễn số phức z là $M(x; y)$.

Gọi điểm biểu diễn số phức i là $N(0;1)$.

Gọi điểm biểu diễn số phức iz là $P(-y; x)$.

$$\overrightarrow{NM} = (x; y-1); \overrightarrow{NP} = (-y; x-1)$$

Vì 3 điểm M, N, P thẳng hàng nên ta có: $x(x-1) = -y(y-1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - y = 0$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn $x^2 + y^2 - x - y = 0$, có tâm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, bán kính

$R = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ngoại trừ điểm $(0;1)$.

Cách 2: Kí hiệu $M(z)$ dùng để chỉ M là điểm biểu diễn số phức z hay ảnh của số phức z .

Giả sử các điểm $A(i), M(z), M'(iz)$ thẳng hàng:

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = k\overrightarrow{MA}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow iz - z = k(i - z) \Leftrightarrow k = \frac{iz - z}{i - z}$$

$$\text{Đặt } z = x + yi \Rightarrow k = \frac{i(x + yi) - (x + yi)}{i - (x + yi)} \Rightarrow k = \frac{[-y - x] + (x - y)i}{[-x - (y - 1)i]} = \frac{[-x + (y - 1)i]}{[-x - (y - 1)i]}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{x^2 + y^2 + x - y}{x^2 + (y-1)^2} - \frac{x^2 + y^2 - x - y}{x^2 + (y-1)^2}i$$

k là một số thực. Do đó ta có:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 \neq 0 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn $x^2 + y^2 - x - y = 0$, có tâm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, bán kính

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ngoại trừ điểm } (0;1).$$

Chọn A.

Câu 20: Trong mặt phẳng phức, tìm tập hợp các điểm M là ảnh của số phức z sao cho: Ảnh của các số z, z^2, z^4 thẳng hàng.

A. Đường tròn $x^2 + y^2 - x - y = 0$, có tâm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R=1$ ngoại trừ điểm $(0;1)$

B. Đường tròn $x^2 + y^2 - x - y = 0$, có tâm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$

C. Một hyperbol vuông góc và trục hoành Ox

D. Đường thẳng $x = -\frac{1}{2}$ và trục hoành Ox

Hướng dẫn giải:

Các điểm $M(z), M'(z^2), M''(z^4)$ thẳng hàng.

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MM''} = k\overrightarrow{MM'}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^4 - z = k(z^2 - z) \Leftrightarrow z(z^3 - 1) - kz(z - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow z(z-1)(z^2 + z + 1 - k) = 0, z \neq 0, 1 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 - k = 0$$

Đặt $z = x + yi; x, y \in \mathbb{R}$

$$\text{Ta có: } k = z^2 + z + 1 = (x + yi)^2 + (x + yi)i + 1 \Leftrightarrow k = x^2 - y^2 + x - 1 + (2xy + y)i$$

$$k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2xy + y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee x = -\frac{1}{2}$$

Vậy tập hợp điểm M gồm:

+ Trục hoành Ox .

+ Đường thẳng $x = -\frac{1}{2}$.

Chọn D.

Câu 21: Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z sao cho: $z + \bar{z} = k|z|$. Với k là một số thực cho trước.

A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Nửa trục Ox , nửa trục Ox'

D. Nửa trục Ox'

Hướng dẫn giải:

Đặt $z = x + yi; x, y \in R$

Ta có: $z + \bar{z} = k|z| \quad (1) \Leftrightarrow 2x = k\sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$

Nếu $k=0$, ta có: $x=0$

Tập hợp các điểm M là trục tung.

Xét $k \neq 0$:

Ta có: $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 = k^2(x^2 + y^2) \\ kx \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4 - k^2)x^2 = k^2y^2 \\ kx \geq 0 \end{cases}$

Với $-2 \leq k \leq 2$ và $k \neq 0$, ta có:

$$y^2 = \frac{4 - k^2}{k^2} x^2 \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{4 - k^2}}{k} x \quad (kx \geq 0)$$

Do đó, tập hợp M phải tìm là:

- Các đường thẳng $y = \pm \frac{\sqrt{4 - k^2}}{k} x$

+ Giới hạn bởi $0 < k < 2, x \geq 0$.

+ Hoặc giới hạn bởi $-2 < k < 0, x \leq 0$.

- Nửa trục Ox nếu $k=2$.

- Nửa trục Ox' nếu $k=-2$.

Chọn C.

Câu 22: Cho hai số phức: $p = a + bi; q = c + di$

Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z sao cho số $(z - p)(z - q)$ là số thực.

A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Một hyperbol vuông góc có tiệm cận là $x = \frac{a+c}{2}; y = \frac{b+d}{2}$

D. Các đường thẳng $y = 2x$, trừ gốc tọa độ $O(0;0)$

Hướng dẫn giải:

Đặt $z = x + yi; x, y \in R$

Ta có: $z - p = x - a + (y - b)i$; $z - q = x - c + (y - d)i$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (z - p)(z - q) &= [x - a + (y - b)i][x - c + (y - d)i] \\ &= (x - a)(x - c) - (y - b)(y - d) + [(x - a)(y - d) + (x - c)(y - b)]i \end{aligned}$$

$(z - p)(z - q)$ là một số thực.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (x - a)(x - c) - (y - b)(y - d) &= 0 \\ \Leftrightarrow [(x - a) + (x - c)]y &= (x - a)d + (x - c)b \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{(b + d)x - (ad + bc)}{2x - (a + c)} \text{ với } x \neq \frac{a + c}{2}$$

Do đó ta có tập hợp các điểm M là một hyperbol vuông góc có tiệm cận là

$$x = \frac{a + c}{2}; y = \frac{b + d}{2}$$

Chọn C.

Câu 23: Trong mặt phẳng phức, cho M, M' theo thứ tự là điểm biểu diễn của hai số phức z và z' : $z = x + yi, z' = \frac{z - 1 + i}{z - 1}$. Tìm tập hợp điểm (E) các điểm M sao cho: Điểm M' nằm trên trục tung và $M' \neq 0$.

A. Đường tròn tâm $I\left(1; -\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{1}{2}$ ngoại trừ các điểm $(1; 0)$ và $(1; -1)$.

B. Đường tròn tâm $I(0; 1)$, bán kính $R = 1$ ngoại trừ các điểm $(1; 0)$ và $(1; -1)$.

C. Đường thẳng $y = 1$ ngoại trừ các điểm $(1; 0)$ và $(1; -1)$.

D. Đường thẳng $x = 1$ ngoại trừ các điểm $(1; 0)$ và $(1; -1)$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } z' = \frac{z - 1 + i}{z - 1} = \frac{(x - 1) + (y + 1)i}{(x - 1) + yi} = \frac{(x - 1)^2 + y(y + 1) + (x - 1)i}{(x - 1)^2 + y^2}$$

Trường hợp M' nằm trên trục tung và $M' \neq 0$.

$\Rightarrow z'$ là một số thuần ảo khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 + y(y + 1) = 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + y - 1 = 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow (E)$ là đường tròn tâm $I\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ bán kính $R = \frac{1}{2}$ ngoại trừ các điểm $(1; 0)$ và $(1; -1)$.

Chọn A.

Câu 24: Trong mặt phẳng phức, cho M, M' theo thứ tự là điểm biểu diễn của hai số phức z và z' : $z = x + yi, z' = \frac{z-1+i}{z-1}$. Tìm tập hợp điểm (E) các điểm M sao cho: Điểm M' nằm trên trục hoành và $M' \neq 0$.

A. Đường tròn tâm $I\left(1; -\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{1}{2}$ ngoại trừ các điểm $(1;0)$ và $(1;-1)$.

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$ ngoại trừ các điểm $(1;0)$ và $(1;-1)$.

C. Đường thẳng $y=1$ ngoại trừ các điểm $(1;0)$ và $(1;-1)$.

D. Đường thẳng $x=1$ ngoại trừ các điểm $(1;0)$ và $(1;-1)$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } z' = \frac{z-1+i}{z-1} = \frac{(x-1)+(y+1)i}{(x-1)+yi} = \frac{(x-1)^2 + y(y+1) + (x-1)i}{(x-1)^2 + y^2}$$

Trường hợp M' nằm trên trục tung và $M' \neq 0$.

$\Rightarrow z'$ là một số thực.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y(y+1) \neq 0 \\ x-1 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (E)$ là đường thẳng $x=1$ ngoại trừ các điểm $(1;0)$ và $(1;-1)$.

Chọn D.

Câu 25: Tìm quỹ tích các điểm M biểu diễn số phức $w = (1+i\sqrt{3})z + 2$ biết số phức z thỏa mãn: $|z-1| \leq 2(1)$.

A. Hình tròn $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 \leq 16$

B. Hình tròn $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 \leq 9$

C. Hình tròn $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 \leq 25$

D. Hình tròn $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 \leq 36$

Hướng dẫn giải:

Giả sử $w = a + bi$

$$\text{Ta có: } a + bi = (1+i\sqrt{3})z + 2 \Leftrightarrow z = \frac{a-2+bi}{1+i\sqrt{3}} \Leftrightarrow z-1 = \frac{a-3+(b-\sqrt{3}i)}{1+i\sqrt{3}}$$

$$(1) \Leftrightarrow \left| \frac{a-3+(b-\sqrt{3}i)}{1+i\sqrt{3}} \right| \leq 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(a-3)^2 + (b-\sqrt{3})^2}}{2} \leq 2 \Leftrightarrow (a-3)^2 + (b-\sqrt{3})^2 \leq 16$$

Vậy quỹ tích các điểm M biểu diễn số phức là hình tròn $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 \leq 16$ (kể cả những điểm nằm trên biên)

Chọn A.

Câu 26: Trong mặt phẳng phức, gọi N, M, A, B theo thứ tự là điểm biểu diễn các số: $z = x + yi; Z = X + Yi = \frac{z+1}{z-1}; 1; -1$. Tìm tập hợp điểm M khi N chạy trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

A. Đường tròn tâm $I(2 + \sqrt{2}; 0)$, bán kính $R = \sqrt{5 + 4\sqrt{2}}$

B. Đường tròn tâm $I(0; 1)$, bán kính $R = 1$

C. Trục tung

D. Trục hoành

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } Z = X + Yi = \frac{z+1}{z-1} \Leftrightarrow X = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2}; Y = \frac{-2y}{(x-1)^2 + y^2}$$

Vì N chạy trên đường tròn: $(x-1)^2 + y^2 = 1$ nên ta có $(x-1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow X = 0$

Vậy tập hợp điểm M là trục tung.

Chọn C.

Câu 27: Gọi M và A là các điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số phức $z = x + yi; a = 10 + 6i$. Tìm tập hợp E_1 các điểm M sao cho tích $z(z-a)$ là một số thực.

A. Đường tròn tâm $I(2 + \sqrt{2}; 0)$, bán kính $R = \sqrt{5 + 4\sqrt{2}}$

B. Đường tròn tâm $I(0; 1)$, bán kính $R = 1$

C. Là một hyperbol vuông góc $y = \frac{3x}{x-5}, x \neq 5$

D. Là một hyperbol $y = \frac{3x}{x-5}, x \neq 5$

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } z(z-a) &= (x+yi)(x+yi-10-6i) = (x+yi)[(x-10)+(y-6)i] \\ &= x(x-10) - y(y-6) + (2xy-10y-6x)i \end{aligned}$$

Tích $z(z-a)$ là một số thực.

$$\Leftrightarrow 2xy - 10y - 6x = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3x}{x-5}, x \neq 5$$

Trong mặt phẳng phức, tập hợp E_1 là một hyperbol vuông góc có phương trình:

$$y = \frac{3x}{x-5}, x \neq 5.$$

Chọn C.

Câu 28: Gọi M và A là các điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số phức $z = x + yi; a = 10 + 6i$. Tìm tập hợp E_2 các điểm M sao cho tích $z(z - a)$ là một số thuần ảo.

A. Đường tròn tâm $I(2 + \sqrt{2}; 0)$, bán kính $R = \sqrt{5 + 4\sqrt{2}}$

B. Đường tròn tâm $I(0; 1)$, bán kính $R = 1$

C. Là một hyperbol vuông góc có tâm đối xứng $I(-5; -3)$, có trục thực nằm trên trục Ox , độ dài các trục đều bằng 8.

D. Là một hyperbol có tâm đối xứng $I(5; 3)$, có trục thực nằm trên trục Ox , độ dài các trục đều bằng 8.

Hướng dẫn giải:

Tích $z(z - a)$ là một số thuần ảo $\Leftrightarrow$ Phần thực bằng 0.

$$\Leftrightarrow x(x - 10) - y(y - 6) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 10x) - (y^2 - 6y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)^2 - (y - 3)^2 = 16 \Leftrightarrow \frac{(x - 5)^2}{16} - \frac{(y - 3)^2}{16} = 1$$

Trong mặt phẳng phức, tập hợp E_2 là một hyperbol có tâm đối xứng $I(5; 3)$, có trục thực nằm trên trục Ox , độ dài các trục đều bằng 8.

Chọn C.

Câu 29: Tìm tập hợp (T) các điểm M trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z thỏa mãn hệ thức $z + \bar{z} = |z|$

A. Đường tròn tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = 1$

B. Đường tròn tâm $I(0; 1)$, bán kính $R = 1$

C. Đường thẳng $x = y\sqrt{3}, x = -y\sqrt{3}$

D. Đường thẳng $y = x\sqrt{3}, y = -x\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$

$$\text{Ta có } z + \bar{z} = |z| \Leftrightarrow (x + yi) + (x - yi) = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow 2x = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 4x^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y = \pm x\sqrt{3} \end{cases}$$

Tập hợp các điểm M trong mặt phẳng biểu diễn số phức $z = x + yi$ gồm hai đường thẳng:

$$D_1: y = x\sqrt{3}$$

$$D_2: y = -x\sqrt{3}$$

Chọn D.

Câu 30: Điểm M biểu diễn số phức $z \neq 0$ và điểm M' biểu diễn số phức $z' = \frac{1}{z}$. Nếu điểm M di động trên đường tròn tâm A(-1;1) bán kính $R = \sqrt{2}$ thì M' di động trên đường nào?

A. $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$

B. $2x + 2y + 1 = 0$

C. $2x - 2y + 1 = 0$

D. $2x + 2y - 1 = 0$

Đáp án: C

Giải: Ta có $z' = \frac{1}{z} = \frac{z}{|z|^2}$. Do đó
$$\begin{cases} x' = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ y' = \frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

M di động trên đường tròn tâm A(-1;1) bán kính $R = \sqrt{2}$ nên

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 + 2x - 2y}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow 2x' - 2y' + 1 = 0$$

Câu 31: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 3 + 4i| \leq 2$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình tròn có diện tích

A. $S = 9\pi$.

B. $S = 12\pi$.

C. $S = 16\pi$.

D. $S = 25\pi$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$w = 2z + 1 - i \Rightarrow z = \frac{w - 1 + i}{2}$$

$$|z - 3 + 4i| \leq 2 \Leftrightarrow \left| \frac{w - 1 + i}{2} - 3 + 4i \right| \leq 2 \Leftrightarrow |w - 1 + i - 6 + 8i| \leq 4 \Leftrightarrow |w - 7 + 9i| \leq 4 \quad (1)$$

Giả sử $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), khi đó $(1) \Leftrightarrow (x - 7)^2 + (y + 9)^2 \leq 16$

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn tâm $I(7; -9)$, bán kính $r = 4$.

Vậy diện tích cần tìm là $S = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$.

Câu 32: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và điểm A trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của z .

Biết rằng trong hình vẽ bên, điểm biểu diễn của số phức $w = \frac{1}{iz}$ là một trong bốn điểm M, N, P, Q. Khi đó điểm biểu diễn của số phức w là

A. điểm Q.

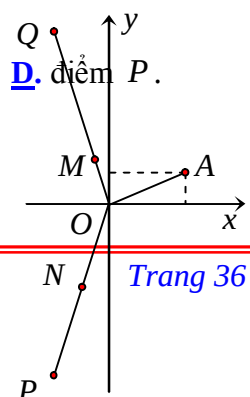
B. điểm M.

C. điểm N.

D. điểm P.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Do điểm A là điểm biểu diễn của z nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng Oxy nên gọi $z = a + bi$ ($a, b > 0$).

$$\text{Do } |z| = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ nên } \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Lại có $w = \frac{1}{iz} = \frac{-b}{a^2 + b^2} - \frac{a}{a^2 + b^2}i$ nên điểm biểu diễn w nằm trong góc phần tư thứ ba của mặt phẳng Oxy .

$$|w| = \left| \frac{1}{iz} \right| = \frac{1}{|i| \cdot |z|} = \sqrt{2} = 2|z| = 2OA.$$

Vậy điểm biểu diễn của số phức w là điểm P .

Câu 33: Biết số phức z thỏa điều kiện $3 \leq |z - 3i + 1| \leq 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z tạo thành một hình phẳng. Diện tích của hình phẳng đó bằng

A. 16π

B. 4π

C. 9π

D. 25π

Đáp án chi tiết :

Đặt $z = x + yi$

$$|z - 3i + 1| = |x - 1 + (y - 3)i| = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2}$$

Do đó

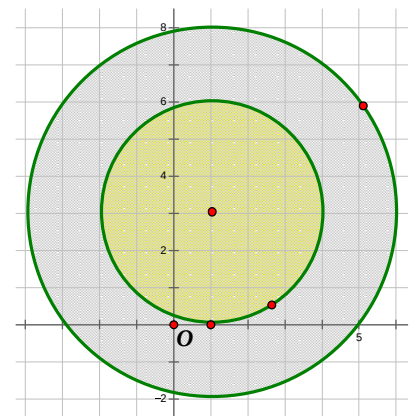
$$3 \leq |z - 3i + 1| \leq 5 \Leftrightarrow 9 \leq (x - 1)^2 + (y - 3)^2 \leq 25$$

Tập hợp các điểm biểu diễn của Z là hình phẳng nằm trong đường tròn

Tâm $I(1; 3)$ với bán kính bằng $R = 5$ đồng thời nằm ngoài đường tròn tâm $I(1; 3)$ với bán kính $r = 3$

Diện tích của hình phẳng đó là

$$S = \pi \cdot 5^2 - \pi \cdot 3^2 = 16\pi$$



Câu 34: Gọi M là điểm biểu diễn số phức $w = \frac{z + 2\bar{z} - 3i}{z^2 + 2}$, trong đó z là số phức thỏa mãn $(2 + i)(z + i) = 3 - i + z$. Gọi N là điểm trong mặt phẳng sao cho $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{ON}) = 2\varphi$, trong đó $\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ là góc lượng giác tạo thành khi quay tia Ox tới vị trí tia OM . Điểm N nằm trong góc phần tư nào?

A. Góc phần tư thứ (I).

B. Góc phần tư thứ (II).

C. Góc phần tư thứ (III).

D. Góc phần tư thứ (IV).

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } (2 + i)(z + i) = 3 - i + z \Rightarrow z = 1 - i \Rightarrow w = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}i \Rightarrow M\left(\frac{5}{4}; \frac{1}{4}\right) \Rightarrow \tan \varphi = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Lúc đó: } \sin 2\varphi = \frac{2 \tan \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} = \frac{5}{13} > 0; \quad \cos 2\varphi = \frac{1 - \tan^2 \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} = \frac{12}{13} > 0.$$

Chọn A.

Câu 35: Gọi điểm A, B lần lượt biểu diễn các số phức z và $z' = \frac{1+i}{2}z$ ($z \neq 0$) trên mặt phẳng tọa độ (A, B, C và A', B', C' đều không thẳng hàng). Với O là gốc tọa độ, khẳng định nào sau đây đúng?

A. Tam giác OAB đều.

B. Tam giác OAB vuông cân tại O .

C. Tam giác OAB vuông cân tại B .

D. Tam giác OAB vuông cân tại A .

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } OA = |z|; OB = |z'| = \left| \frac{1+i}{2} \cdot z \right| = \left| \frac{1+i}{2} \right| \cdot |z| = \frac{\sqrt{2}}{2} |z|.$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \Rightarrow BA = \left| z - z' \right| = \left| z - \frac{1+i}{2}z \right| = \left| \frac{1-i}{2} \right| \cdot |z| = \frac{\sqrt{2}}{2} |z|.$$

Suy ra: $OA^2 = OB^2 + AB^2$ và $AB = OB \Rightarrow OAB$ là tam giác vuông cân tại B .

Chọn C.

Câu 36: Cho A, B, C, D là bốn điểm trong mặt phẳng tọa độ theo thứ tự biểu diễn các số phức $1+2i; 1+\sqrt{3}+i; 1+\sqrt{3}-i; 1-2i$. Biết $ABCD$ là tứ giác nội tiếp tâm I . Tâm I biểu diễn số phức nào sau đây?

A. $z = \sqrt{3}$.

B. $z = 1 - \sqrt{3}i$.

C. $z = 1$.

D. $z = -1$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $\overrightarrow{AB}$ biểu diễn số phức $\sqrt{3}-i$; $\overrightarrow{DB}$ biểu diễn số phức $\sqrt{3}+3i$. Mặt khác $\frac{\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}-i} = \sqrt{3}i$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$. Tương tự (hay vì lí do đối xứng qua Ox), $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Từ đó suy ra AD là một đường kính của đường tròn đi qua A, B, C, D . Vậy $I(1;0) \Rightarrow z = 1$.

Chọn C.

Câu 37: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , lấy điểm M là điểm biểu diễn số phức $z = (2+i)^2(4-i)$ và gọi φ là góc tạo bởi chiều dương trục hoành và vectơ $\overrightarrow{OM}$. Tính $\cos 2\varphi$.

A. $-\frac{425}{87}$.

B. $\frac{475}{87}$.

C. $-\frac{475}{87}$.

D. $\frac{425}{87}$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } z = (2+i)^2(4-i) = 16+13i \Rightarrow M(16;13) \Rightarrow \tan \varphi = \frac{13}{16}.$$

$$\text{Ta có: } \cos 2\varphi = \frac{1 + \tan^2 \varphi}{1 - \tan^2 \varphi} = \frac{425}{87}.$$

Chọn D.

Câu 38: Gọi điểm A, B lần lượt biểu diễn các số phức $z_1; z_2; (z_1, z_2 \neq 0)$ trên mặt phẳng tọa độ (A, B, C và A', B', C' đều không thẳng hàng) và $z_1^2 + z_2^2 = z_1 \cdot z_2$. Với O là gốc tọa độ, khẳng định nào sau đây đúng?

A. Tam giác OAB đều.

B. Tam giác OAB vuông cân tại O .

C. Tam giác OAB vuông cân tại B .

D. Diện tích tam giác OAB không đổi.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } z_1^2 + z_2^2 = z_1 \cdot z_2 \Rightarrow z_1^2 = z_1(z_2 - z_1); |z_1|^2 = |z_1| \cdot |z_2 - z_1|. \text{ Do } z_1 \neq 0 \Rightarrow |z_2 - z_1| = \frac{|z_2|^2}{|z_1|};$$

(1)

$$\text{Mặt khác: } z_1^2 = z_2(z_1 - z_2) \Rightarrow |z_1|^2 = |z_2| \cdot |z_1 - z_2| \Leftrightarrow |z_1 - z_2| = \frac{|z_1|^2}{|z_2|} \text{ (do } z_2 \neq 0) \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{|z_2|^2}{|z_1|} = \frac{|z_1|^2}{|z_2|} \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|. \text{ Vậy ta có:}$$

$$|z_1| = |z_2| = |z_2 - z_1| \Rightarrow OA = OB = AB.$$

Chọn A.

Câu 39: Gọi M là điểm biểu diễn số phức $w = \frac{2z + \bar{z} + 1 - i}{z^2 + i}$, trong đó z là số phức thỏa mãn $(1-i)(z-i) = 2-i+z$. Gọi N là điểm trong mặt phẳng sao cho $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{ON}) = 2\varphi$, trong đó $\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ là góc lượng giác tạo thành khi quay tia Ox tới vị trí tia OM . Điểm N nằm trong góc phần tư nào?

A. Góc phần tư thứ (I). **B.** Góc phần tư thứ (II).

C. Góc phần tư thứ (III). **D.** Góc phần tư thứ (IV).

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } (1-i)(z-i) = 2-i+z \Rightarrow z = 3i \Rightarrow w = -\frac{7}{82} - \frac{19}{82}i \Rightarrow M\left(-\frac{7}{82}; -\frac{19}{82}\right) \Rightarrow \tan \varphi = \frac{19}{7}.$$

$$\text{Lúc đó: } \sin 2\varphi = \frac{2 \tan \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} = \frac{133}{205} > 0; \cos 2\varphi = \frac{1 - \tan^2 \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} = -\frac{156}{205} < 0.$$

Chọn C.

Câu 40: Biết số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z-3-4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $M = |z+2|^2 - |z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính môđun của số phức $z+i$.

A. $|z+i| = 2\sqrt{41}$

B. $|z+i| = 3\sqrt{5}$.

C. $|z+i| = 5\sqrt{2}$

D. $|z+i| = \sqrt{41}$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Gọi } z = x + yi; (x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}). \text{ Ta có: } |z-3-4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (C): (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5: \text{ tâm } I(3;4) \text{ và } R = \sqrt{5}.$$

Mặt khác:

$$M = |z+2|^2 - |z-i|^2 = (x+2)^2 + y^2 - [(x^2) + (y-1)^2] = 4x+2y+3 \Leftrightarrow d: 4x+2y+3-M=0.$$

Do số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện nên d và (C) có điểm chung

$$\Leftrightarrow d(I; d) \leq R \Leftrightarrow \frac{|23-M|}{2\sqrt{5}} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow |23-M| \leq 10 \Leftrightarrow 13 \leq M \leq 33$$

$$\Rightarrow M_{\max} = 33 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y-30=0 \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-5 \end{cases} \Rightarrow z+i=5-4i \Rightarrow |z+i|=\sqrt{41}.$$

Chọn D.

Câu 41: Các điểm A, B, C và A', B', C' lần lượt biểu diễn các số phức z_1, z_2, z_3 và z'_1, z'_2, z'_3 trên mặt phẳng tọa độ (A, B, C và A', B', C' đều không thẳng hàng). Biết $z_1 + z_2 + z_3 = z'_1 + z'_2 + z'_3$, khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau.
- B.** Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trục tâm.
- C.** Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.
- D.** Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng tâm đường tròn ngoại tiếp.

Hướng dẫn giải:

Gọi $z_1 = x_1 + y_1i; z_2 = x_2 + y_2i; z_3 = x_3 + y_3i; (x'_k; y'_k \in \mathbb{R}; k = \overline{1;3})$.

Khi đó: $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2); C(x_3; y_3)$, gọi G là trọng tâm

$$\Delta ABC \Rightarrow G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$

Tương tự, gọi $z'_1 = x'_1 + y'_1i; z'_2 = x'_2 + y'_2i; z'_3 = x'_3 + y'_3i; (x'_k; y'_k \in \mathbb{R}; k = \overline{1;3})$.

Khi đó: $A'(x'_1; y'_1); B'(x'_2; y'_2); C'(x'_3; y'_3)$,

$$\text{gọi } G' \text{ là trọng tâm } \Delta A'B'C' \Rightarrow G'\left(\frac{x'_1+x'_2+x'_3}{3}, \frac{y'_1+y'_2+y'_3}{3}\right).$$

Do $z_1 + z_2 + z_3 = z'_1 + z'_2 + z'_3 \Leftrightarrow (x_1+x_2+x_3) + (y_1+y_2+y_3)i = (x'_1+x'_2+x'_3) + (y'_1+y'_2+y'_3)i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3 = x'_1+x'_2+x'_3 \\ y_1+y_2+y_3 = y'_1+y'_2+y'_3 \end{cases} \Rightarrow G \equiv G'.$$

Chọn C.

Câu 42: Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = \sqrt{3}, |z_2| = 2$ được biểu diễn trong mặt phẳng phức lần lượt là các điểm M, N . Biết $\angle(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \frac{\pi}{6}$, tính giá trị của biểu thức $\left| \frac{z_1+z_2}{z_1-z_2} \right|$.

A. $\sqrt{13}$

B. 1

C. $\frac{7\sqrt{3}}{2}$

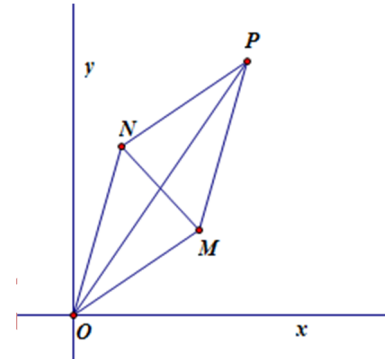
D. $\frac{1}{\sqrt{13}}$

Hướng dẫn giải:

Dựng hình bình hành $OMPN$ trong mặt phẳng phức, khi đó biểu diễn của :

$$\begin{cases} |z_1 + z_2| = OP \\ |z_1 - z_2| = MN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z_1 + z_2| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|\cos(150^\circ)} = 1 \\ |z_1 - z_2| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2|\cos(30^\circ)} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{|z_1 + z_2|}{|z_1 - z_2|} = \frac{|z_1 + z_2|}{|z_1 - z_2|} = 1.$$

**Chọn B.**

Câu 43: Cho thỏa mãn $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $(2+i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} + 1 - 2i$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = (3-4i)z - 1 + 2i$ là đường tròn I , bán kính R . Khi đó.

A. $I(-1; -2), R = \sqrt{5}$. B. $I(1; 2), R = \sqrt{5}$. C. $I(-1; 2), R = 5$. D. $I(1; -2), R = 5$.

Hướng dẫn giải:**Chọn C.**

Đặt $z = a + bi$ và $|z| = c > 0$, với $a; b; c \in \mathbb{R}$.

Lại có $w = (3-4i)z - 1 + 2i \Leftrightarrow z = \frac{w+1-2i}{3-4i}$.

Gọi $w = x + yi$ với $x; y \in \mathbb{R}$.

Khi đó $|z| = c \Rightarrow \left| \frac{w+1-2i}{3-4i} \right| = c \Leftrightarrow \frac{|w+1-2i|}{|3-4i|} = c \Leftrightarrow |x+yi+1-2i| = 5c$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = 5c \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 25c^2.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của số phức w là đường tròn $I(-1; 2)$.

Khi đó chỉ có đáp án C có khả năng đúng và theo đó $R = 5 \Rightarrow 5c = 5 \Rightarrow c = 1$.

Thử $c = 1$ vào phương trình (1) thì thỏa mãn.

Câu 44: Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z trong mặt phẳng phức, biết số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z+4| + |z-4| = 10$.

A. Tập hợp các điểm cần tìm là đường tròn có tâm $O(0;0)$ và có bán kính $R = 4$.

B. Tập hợp các điểm cần tìm là đường elip có phương trình $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

C. Tập hợp các điểm cần tìm là những điểm $M(x; y)$ trong mặt phẳng Oxy thỏa mãn phương trình $\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 12$.

D. Tập hợp các điểm cần tìm là đường elip có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$.

Gọi $A(4; 0)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = 4$.

Gọi $B(-4; 0)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = -4$.

Khi đó: $|z + 4| + |z - 4| = 10 \Leftrightarrow MA + MB = 10$. (*)

Hệ thức trên chứng tỏ tập hợp các điểm M là elip nhận A, B là các tiêu điểm.

Gọi phương trình của elip là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b > 0, a^2 = b^2 + c^2)$

Từ (*) ta có: $2a = 10 \Leftrightarrow a = 5$.

$AB = 2c \Leftrightarrow 8 = 2c \Leftrightarrow c = 4 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 9$

Vậy quỹ tích các điểm M là elip: $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Câu 45: Trong mặt phẳng phức Oxy, các số phức z thỏa $|z + 2i - 1| = |z + i|$. Tìm số phức z được biểu diễn bởi điểm M sao cho MA ngắn nhất với $A(1, 3)$.

A. $3 + i$.

B. $1 + 3i$.

C. $2 - 3i$.

D. $-2 + 3i$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $M(x, y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$

Gọi $E(1, -2)$ là điểm biểu diễn số phức $1 - 2i$

Gọi $F(0, -1)$ là điểm biểu diễn số phức $-i$

Ta có: $|z + 2i - 1| = |z + i| \Leftrightarrow ME = MF \Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường trung trực $EF: x - y - 2 = 0$.

Để MA ngắn nhất khi $MA \perp EF$ tại $M \Leftrightarrow M(3, 1) \Rightarrow z = 3 + i$

Chọn A.

Câu 46: Trong mặt phẳng phức Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức Z thỏa mãn $\left| z^2 + \left(\bar{z}\right)^2 + 2|z|^2 \right| = 16$ là hai đường thẳng d_1, d_2 . Khoảng cách giữa 2 đường thẳng d_1, d_2 là bao nhiêu?

A. $d(d_1, d_2) = 2$. **B.** $d(d_1, d_2) = 4$. **C.** $d(d_1, d_2) = 1$. **D.** $d(d_1, d_2) = 6$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $M(x, y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$\text{Ta có: } \left| z^2 + (\bar{z})^2 + 2|z|^2 \right| = 16 \Leftrightarrow \left| x^2 + 2xyi - y^2 + x^2 - 2xyi - y^2 + 2x^2 + 2y^2 \right| = 16$$

$$\Leftrightarrow |4x^2| = 16 \Leftrightarrow x = \pm 2 \Rightarrow d(d_1, d_2) = 4$$

Chọn B.

Ở đây lưu ý hai đường thẳng $x = 2$ và $x = -2$ song song với nhau.

Câu 47: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2| + |z + 2| = 10$.

A. Đường tròn $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 100$. **B.** Elip $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$.

C. Đường tròn $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 10$. **D.** Elip $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi $M(x, y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Gọi A là điểm biểu diễn số phức 2

Gọi B là điểm biểu diễn số phức -2

$$\text{Ta có: } |z + 2| + |z - 2| = 10 \Leftrightarrow MB + MA = 10.$$

Ta có $AB = 4$. Suy ra tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là Elip với 2 tiêu điểm là $A(2; 0)$, $B(-2; 0)$, tiêu cự $AB = 4 = 2c$, độ dài trục lớn là $10 = 2a$, độ dài trục bé là $2b = 2\sqrt{a^2 - c^2} = 2\sqrt{25 - 4} = 2\sqrt{21}$.

Vậy, tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2| + |z + 2| = 10$ là

$$\text{Elip có phương trình } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1.$$

Câu 48: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = m^2 + 2m + 5$ với m là số thực. Biết rằng tập hợp điểm của số phức $w = (3 + 4i)z - 2i$ là đường tròn. Tìm bán kính R nhỏ nhất của đường tròn đó.

A. $R = 5$. **B.** $R = 10$. **C.** $R = 15$. **D.** $R = 20$

Hướng dẫn giải:

$$w + 2i = (3 + 4i)z \Rightarrow |w + 2i| = |(3 + 4i)z| = |(3 + 4i)||z| = 5[(m + 1)^2 + 4] \geq 20.$$

$$\Rightarrow |w + 2i| \geq 20. \text{ Vậy đường tròn có bán kính } R_{\min} = 20 \text{ với tâm } I(0; 2)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = -1$.

Câu 49: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và điểm A trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của z .

Biết rằng trong hình vẽ bên, điểm biểu diễn của số phức $w = \frac{1}{iz}$ là một trong bốn điểm M, N, P, Q . Khi đó điểm biểu diễn của số phức w là:

- A.** Điểm Q . **C.** Điểm M . **B.** Điểm N . **D.** Điểm P

Hướng dẫn giải:

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là điểm biểu diễn số phức A .

Do z thuộc góc phần tư thứ nhất trong mặt phẳng Oxy , nên $a, b > 0$.

$$\text{Lại có } w = \frac{1}{iz} = \frac{-b}{a^2 + b^2} - \frac{a}{a^2 + b^2}i$$

$\Rightarrow$ Điểm biểu diễn w nằm trong góc phần tư thứ ba của mặt phẳng Oxy .

$$|w| = \left| \frac{1}{iz} \right| = \frac{1}{|i| \cdot |z|} = \sqrt{2} = 2|z| = 2OA.$$

Vậy điểm biểu diễn của số phức w là điểm P .

Câu 50: Trong mặt phẳng phức cho các điểm O (gốc tọa độ), A biểu diễn số 1, B biểu diễn số phức z không thực, A' biểu diễn số phức $z' \neq 0$ và B' biểu diễn số phức zz' . Nhận định nào sau đây đúng?

- A.** Tam giác OAB đều
B. Hai tam giác $OAB, OA'B'$ là hai tam giác đồng dạng
C. O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác $AA'B'$
D. Trọng tâm của $\triangle OAB$ là điểm biểu diễn của số phức $z_1 + z_2 + z_3$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } |z| = |\overrightarrow{OB}|, 1 = |\overrightarrow{OA}|, |z'| = |\overrightarrow{OA'}|, |zz'| = |z| \cdot |z'| = |\overrightarrow{OB}| \cdot y$$

$$\text{Ta có: } |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}| = |z - 1| \quad B$$

$$|\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'}| = |zz' - z'| = |z'| \cdot |z - 1| \quad B'$$

Từ trên ta suy ra

$$\frac{|z'|}{1} = \frac{|z| \cdot |z'|}{|z|} = \frac{|z'| \cdot |z - 1|}{|z - 1|} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} \quad A$$

$$\Rightarrow \triangle OA'B' \sim \triangle OAB. \quad O A' \times$$

Chọn B.

Câu 51: Cho $z_1 = 1 + i; z_2 = -1 - i$. Tìm $z_3 \in \mathbb{C}$ sao cho các điểm biểu diễn z_1, z_2, z_3 tạo thành tam giác đều.

A. $z_3 = -\sqrt{2}(1+i)$ và $z_3 = \sqrt{2}(1-i)$

B. $z_3 = -\sqrt{3}(1+i)$ và $z_3 = \sqrt{3}(1-i)$

C. $z_3 = \sqrt{2}(1+i)$ và $z_3 = -\sqrt{2}(1-i)$

D. $z_3 = \sqrt{3}(1+i)$ và $z_3 = -\sqrt{3}(1-i)$

Hướng dẫn giải:

Để giải bài toán này ta cần chú ý đến kiến thức sau:

Giả sử $M_1(x_1; y_1)$ biểu diễn số phức $z_1 = x_1 + y_1 i$

Giả sử $M_2(x_2; y_2)$ biểu diễn số phức $z_2 = x_2 + y_2 i$

Khi đó khoảng cách giữa 2 điểm $M_1 M_2$ bằng mô đun của số phức $z_1 - z_2$.

$$\text{Vậy } M_1 M_2 = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Áp dụng vào bài toán: Giả sử $z_3 = x + yi$

Để các điểm biểu diễn của z_1, z_2, z_3 tạo thành một tam giác đều thì

$$\begin{cases} |z_1 - z_2| = |z_1 - z_3| \\ |z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4+4} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \\ \sqrt{4+4} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8 \\ x+y=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2y^2 = 6 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = \mp\sqrt{3}$$

Vậy có hai số phức thỏa mãn là: $z_3 = \sqrt{3}(1+i)$ và $z_3 = -\sqrt{3}(1-i)$

Chọn D.

Câu 52: Gieo một con súc sắc cân đối đồng chất 2 lần. Ký hiệu $(a; b)$ là kết quả sẽ xảy ra sau khi gieo, trong đó a, b lần lượt là số chấm xuất hiện lần thứ nhất, thứ hai. Gọi A là biến cố số chấm xuất hiện trên hai lần gieo như nhau. Tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố A là tập hợp con của tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn điều kiện nào sau đây?

A. $|z + 2 + 3i| \leq 12$

B. $|z + 2 + 3i| = 10$

C. $|z + 2 + 3i| \leq 13$

D. $|z + 2 + 3i| \leq 11$

Hướng dẫn giải:

Ta có $A = \{(1;1), (2;2), (3;3), (4;4), (5;5), (6;6)\}$

Gọi $z = x + yi; x, y \in \mathbb{R}$ khi đó $|z + 2 + 3i| = \sqrt{(x+2)^2 + (y+3)^2}$

$$\text{Giả sử } |z + 2 + 3i| \leq R \Rightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y+3)^2} \leq R$$

$\Rightarrow (x+2)^2 + (y+3)^2 \leq R^2$. Khi đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là những điểm thuộc miền trong và trên đường tròn tâm $I(-2; -3)$ và bán kính R .

Để tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố A là tập hợp con của tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thì $IM \leq R, \forall M \in A$.

Khi đó ta được $R = 13$

Chọn C.

Câu 53: Cho 3 số phức z_1, z_2, z_3 phân biệt thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$ và $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_3}$. Biết z_1, z_2, z_3 lần lượt được biểu diễn bởi các điểm A, B, C trong mặt phẳng phức. Tính góc $\angle ACB$.

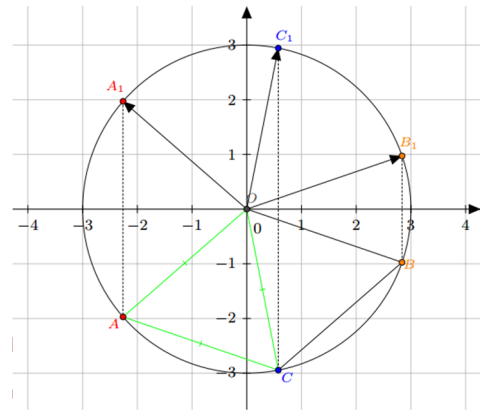
Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_3} &\Leftrightarrow \frac{\bar{z}_1}{z_1 \cdot z_1} + \frac{\bar{z}_2}{z_2 \cdot z_2} = \frac{\bar{z}_3}{z_3 \cdot z_3} \\ \text{Ta có:} \quad &\Leftrightarrow \frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2} + \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{\bar{z}_3}{|z_3|^2} \Leftrightarrow \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \bar{z}_3 \end{aligned}$$

Do tính đối xứng trục Ox nên C là điểm thứ 3 của hình bình hành $OACB$.

$$\text{Từ đó ta có: } \begin{cases} OB = AC \\ OB = OA = OC \end{cases} \Rightarrow OA = OC = AC.$$

$\Rightarrow \triangle OAC$ là tam giác đều $\Rightarrow$ Góc $\angle ACB = 120^\circ$.



Câu 54: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa: $|z_1 + z_2| = 5$. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa: $|z - z_1| = 2|z + z_2|$ là đường tròn và có bán kính R . Tính giá trị của R .

A. $R = \frac{5}{3}$.

B. $R = \frac{7}{3}$.

C. $R = \frac{10}{3}$.

D. $R = \frac{14}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Trong mặt phẳng phức, gọi Z, Z_1, Z_2 lần lượt là hai điểm biểu diễn số phức z, z_1, z_2 .

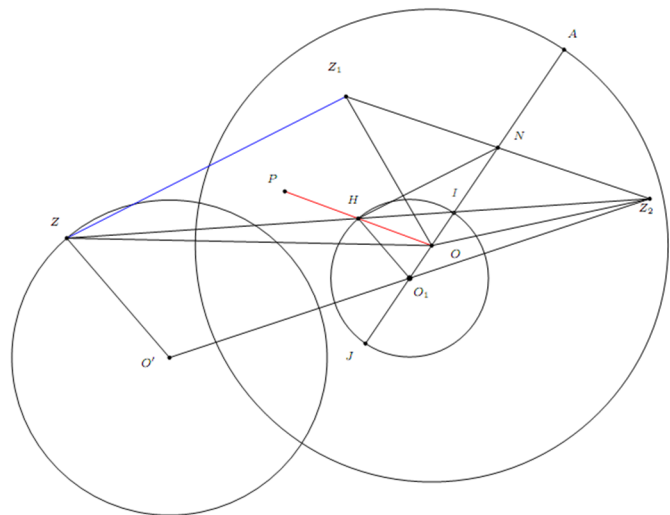
A là điểm thứ tư của hình bình hành OZ_2AZ_1 .

$$\Rightarrow \overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_2} = \overrightarrow{OA}$$

$$\Rightarrow |z_1 + z_2| = OA = 5$$

Ta có: $|z - z_1| = |\overrightarrow{OZ} - \overrightarrow{OZ_1}| = ZZ_1$ và

$|z + z_2| = |\overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{OZ_2}| = OP$ với P là điểm thứ tư của hình bình hành OZ_2PZ .



Gọi N là trung điểm $OA \Rightarrow ON = 2,5$ và H là trung điểm cạnh $OP \Rightarrow OP = 2OH$ và H cũng là trung điểm cạnh ZZ_2 .

Ta có HN là đường trung bình của $\triangle ZZ_1Z_2$

$$\Rightarrow ZZ_1 = 2HN.$$

$$|z - z_1| = 2|z + z_2| \Leftrightarrow ZZ_1 = 2OP \Leftrightarrow 2HN = 4OH \Leftrightarrow HN = 2HO.$$

$$\text{Gọi } I, J \text{ lần lượt là hai điểm thỏa: } \begin{cases} \overrightarrow{IN} = -2\overrightarrow{IO} \Rightarrow OI = \frac{ON}{3} = \frac{2,5}{3} \\ \overrightarrow{JN} = 2\overrightarrow{JO} \Rightarrow OJ = ON = 2,5 \end{cases}.$$

Ta chứng minh được HI, HJ lần lượt đường phân giác trong và phân giác ngoài tại đỉnh H của $\triangle HON \Rightarrow HI \perp HJ \Rightarrow H$ thuộc đường tròn đường kính $IJ = \frac{10}{3}$.

$$\text{Gọi } O_1 \text{ là trung điểm } IJ \Rightarrow O_1I = \frac{5}{3}.$$

Gọi O' là điểm sao cho O_1 là trung điểm $O'Z_2$.

$$\text{Ta có: } O_1H \text{ là đường trung bình của } O'ZZ_2 \Rightarrow O'Z = 2O_1H = \frac{10}{3}.$$

Với z_1, z_2 không đổi thì $A, Z_1, Z_2 \Rightarrow N$ cố định $\Rightarrow I, J$ cố định $\Rightarrow O_1$ cố định $\Rightarrow O'$ cố định.

$$\text{Vậy } Z \text{ thuộc đường tròn tâm } O', \text{ bán kính } R = \frac{10}{3}.$$

Câu 55: Trong mặt phẳng phức Oxy, tập hợp biểu diễn số phức Z thỏa mãn $|z|^2 + z + \bar{z} = 0$ là đường tròn (C) . Diện tích S của đường tròn (C) bằng bao nhiêu?

A. $S = 4\pi$.

B. $S = 2\pi$.

C. $S = 3\pi$.

D. $S = \pi$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Đặt } z = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R}), \text{ ta có } \bar{z} = x - yi \text{ và } |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\text{Khi đó, giả thiết } |z|^2 + z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x + yi + x - yi = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1.$$

Suy ra tập hợp biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-1;0)$, bán kính $R=1 \Rightarrow S_{(C)} = \pi$.

Chọn D.

Câu 56: Trong mặt phẳng phức Oxy, tập hợp biểu diễn số phức Z thỏa $1 \leq |z+1-i| \leq 2$ là hình vành khăn. Chu vi P của hình vành khăn là bao nhiêu?

A. $P = 4\pi$.

B. $P = \pi$.

C. $P = 2\pi$.

D. $P = 3\pi$

Hướng dẫn giải:

Đặt $z = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R})$, khi đó ta có

$$\square |z+1-i| = |x+1+(y-1)i| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} \geq 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 \geq 1 \rightarrow \text{Tập hợp các điểm biểu diễn số phức } z \text{ nằm bên ngoài hình tròn có tâm } I_1(-1;1), \text{ bán kính } R_1 = 1.$$

$\square |z+1-i| = |x+1+(y-1)i| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} \leq 2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 4 \rightarrow$ Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z nằm bên trong hình tròn có tâm $I_2(-1;1)$, bán kính $R_2 = 2$.

Vì hai đường tròn đồng tâm nên chu vi P hình vành khăn là
 $P = C_2 - C_1 = 2\pi(R_2 - R_1) = 2\pi$.

Chọn C.

Câu 57: Trong mặt phẳng phức Oxy, giả sử M là điểm biểu diễn số phức Z thỏa mãn $|z+2| + |z-2| = 8$. Tập hợp những điểm M là?

A. $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$. **B.** $(E): \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$.

C. $(T): (x+2)^2 + (y-2)^2 = 64$.

D. $(T): (x+2)^2 + (y-2)^2 = 8$

Hướng dẫn giải:

Xét điểm $F_1(2;0)$ và $F_2(-2;0)$, ta có $MF_1 + MF_2 = 8 = 2a \Rightarrow a = 4$

$F_1F_2 = 4 = 2c \Rightarrow c = 2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 12 \Rightarrow$ Tập hợp điểm là Elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

Chọn A.

Câu 58: Trong mặt phẳng phức Oxy, các số phức z thỏa $|z+2i-1| = |z+i|$. Tìm số phức z được biểu diễn bởi điểm M sao cho MA ngắn nhất với $A(1;3)$

A. $3+i$.

B. $1+3i$.

C. $2-3i$.

D. $-2+3i$

Hướng dẫn giải:

Xét điểm $B(1;-2), C(0;-1) \Rightarrow MB = MC \Rightarrow$ Tập hợp điểm M là đường thẳng trung trực của BC .

Ta có: $(BC): x+y+1=0$ và trung điểm BC là $H\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right) \Rightarrow$ Phương trình đường trung trực BC là:

$\Delta: x-y-2=0$. Lại có: $AM \leq d(A, \Delta) = 2\sqrt{2}$. Dấu bằng khi M là hình chiếu của A lên Δ

Khi đó: $AM = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (x_M - 1)^2 + (y_M - 3)^2 = 8 \Leftrightarrow (x_M - 1)^2 + (x_M - 5)^2 = 8$

$\Leftrightarrow (x_M - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x_M = 3 \Rightarrow M(3;1)$.

Chọn A.

Câu 59: Xét 3 điểm A, B, C của mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn ba số phức phân biệt z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Nhận định nào sau đây đúng:

A. Tam giác ABC đều

B. O là tâm của tam giác ABC

C. O là trọng tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

D. Trọng tâm của ΔABC là điểm biểu diễn của số phức $z_1 + z_2 + z_3$

Hướng dẫn giải:

Từ điều kiện $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ chứng tỏ A, B, C nằm trên một đường tròn tâm O bán kính $R = |z_1|$.

Nếu ABC là tam giác đều thì tâm O là trọng tâm của tam giác ABC .

Theo tính chất trọng tâm ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ hay $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

Đảo lại, nếu $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, ta có:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = -(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = -\overrightarrow{OD}$$

Điểm D cũng nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC (vì $|\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OD}|$, $OADB$ là hình bình hành có $OA = OB = BD = DA$). Các tam giác OAD và OBD là các tam giác đều. Suy ra $\widehat{AOB} = 120^\circ$.

Làm tương tự ta chứng minh được $\widehat{AOC} = 120^\circ$.

Suy ra ΔABC đều.

Chọn A.

Câu 60: Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (3 + 4i)z + i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r = 4$.

B. $r = 5$.

C. $r = 20$.

D. $r = 22$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Gọi } w = a + bi, \text{ ta có } w = a + bi = (3 + 4i)z + i \Leftrightarrow z = \frac{a + (b-1)i}{3 + 4i} = \frac{[a + (b-1)i](3 - 4i)}{9 - 16i^2}$$

$$= \frac{3a + 4b - 4}{25} + \frac{(3b - 4a - 3)}{25}i \Rightarrow |z| = \frac{\sqrt{(3a + 4b - 4)^2 + (3b - 4a - 3)^2}}{25}$$

$$\text{Mà } |z| = 4 \text{ nên } \Leftrightarrow (3a + 4b - 4)^2 + (3b - 4a - 3)^2 = 100^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2b = 399$$

Theo giả thiết, tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (3 + 4i)z + i$ là một đường tròn nên ta có

$$a^2 + b^2 - 2b = 399 \Leftrightarrow a^2 + (b-1)^2 = 400 \Rightarrow r = \sqrt{400} = 20$$

Chọn C.

DẠNG 4: SỐ PHỨC CÓ MODDUN NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT

Câu 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z+1+2i|=4\sqrt{5}$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ lần lượt là

- A. $\sqrt{5}$. B. $3\sqrt{5}$. C. $5\sqrt{5}$. D. $5\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:

Ta có $4\sqrt{5}=|z+1+2i|\leq|z|+|1+2i|=|z|+\sqrt{5}\Rightarrow|z|\geq 3\sqrt{5}$.

Chọn B.

Câu 2: Cho số phức z thỏa mãn $|(1+i)z+1-7i|=\sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$

- A. $\max|z|=4$. B. $\max|z|=3$. C. $\max|z|=7$. D. $\max|z|=6$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Đặt } w=(1+i)z+1-7i\Rightarrow z=\frac{w-(1-7i)}{1+i}$$

Ta có: $|w|=\sqrt{2}$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm I là điểm biểu diễn số phức $\frac{0-(1-7i)}{1+i}=3+4i$, tức là $I(3;4)$. Bán kính $r=\frac{\sqrt{2}}{|1+i|}=1$

$$\text{Vậy } \max|z|=OI+r=6$$

Câu 3: Cho số phức z thỏa mãn $|z+2-2i|=1$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ lần lượt là

- A. $2\sqrt{2}+1; 2\sqrt{2}-1$. B. $\sqrt{2}+1; \sqrt{2}-1$. C. $2; 1$. D. $\sqrt{3}+1; \sqrt{3}-1$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } |z+2-2i|+|-z|\geq|z+2-2i-z|=2\sqrt{2}\Rightarrow|z|\geq 2\sqrt{2}-1.$$

$$\text{Lại có } |z+2-2i|+|2i-2|\geq|z+2-2i+2i-2|=|z|\Rightarrow|z|\leq 1+2\sqrt{2}.$$

Chọn A.

Câu 4: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=3$. Tìm môđun lớn nhất của số phức $z-2i$.

- A. $\sqrt{26+6\sqrt{17}}$. B. $\sqrt{26-6\sqrt{17}}$. C. $\sqrt{26+8\sqrt{17}}$. D. $\sqrt{26-4\sqrt{17}}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $z=x+yi$; ($x\in\mathbb{R}; y\in\mathbb{R}$) $\Rightarrow z-2i=x+(y-2)i$. Ta có:

$$|z-1+2i|=9\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+2)^2=9.$$

$$\text{Đặt } x=1+3\sin t; y=-2+3\cos t; t\in[0;2\pi].$$

$$\Rightarrow|z-2i|^2=(1+3\sin t)^2+(-4+3\cos t)^2=26+6(\sin t-4\cos t)=26+6\sqrt{17}\sin(t+\alpha); (\alpha\in\mathbb{R}).$$

$$\Rightarrow\sqrt{26-6\sqrt{17}}\leq|z-2i|\leq\sqrt{26+6\sqrt{17}}\Rightarrow|z-2i|_{\max}=\sqrt{26+6\sqrt{17}}.$$

Chọn A.**Câu 5:** Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 2$. Tìm môđun lớn nhất của số phức z .

A. $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$.

B. $\sqrt{11 + 4\sqrt{5}}$

C. $\sqrt{6 + 4\sqrt{5}}$

D. $\sqrt{5 + 6\sqrt{5}}$

Hướng dẫn giải:Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$). Ta có: $|z - 1 + 2i| = 2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$.Đặt $x = 1 + 2\sin t$; $y = -2 + 2\cos t$; $t \in [0; 2\pi]$.

Lúc đó:

$$|z|^2 = (1 + 2\sin t)^2 + (-2 + 2\cos t)^2 = 9 + (4\sin t - 8\cos t) = 9 + \sqrt{4^2 + 8^2} \sin(t + \alpha); (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow |z|^2 = 9 + 4\sqrt{5} \sin(t + \alpha) \Rightarrow z \in \left[-\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}; \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}\right]$$

$$\Rightarrow z_{\max} = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} \text{ đạt được khi } z = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} + \frac{-10 + 4\sqrt{5}}{5}i.$$

Chọn A.**Câu 6:** Cho số phức z thỏa mãn $|(1 - i)z - 6 - 2i| = \sqrt{10}$. Tìm môđun lớn nhất của số phức z .

A. $4\sqrt{5}$

B. $3\sqrt{5}$.

C. 3.

D. $3 + \sqrt{5}$

Hướng dẫn giải:Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có: } |(1 - i)z - 6 - 2i| = \sqrt{10} \Leftrightarrow |(1 - i)| \cdot \left|z + \frac{-6 - 2i}{1 - i}\right| = \sqrt{10} \Leftrightarrow |z - 2 - 4i|$$

$$= \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 5.$$

Đặt $x = 2 + \sqrt{5}\sin t$; $y = 4 + \sqrt{5}\cos t$; $t \in [0; 2\pi]$.

Lúc đó:

$$|z|^2 = (2 + \sqrt{5}\sin t)^2 + (4 + \sqrt{5}\cos t)^2 = 25 + (4\sqrt{5}\sin t + 8\sqrt{5}\cos t)$$

$$= 25 + \sqrt{(4\sqrt{5})^2 + (8\sqrt{5})^2} \sin(t + \alpha); (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow |z|^2 = 25 + 20\sin(t + \alpha) \Rightarrow z \in [\sqrt{5}; 3\sqrt{5}]$$

$$\Rightarrow z_{\max} = 3\sqrt{5} \text{ đạt được khi } z = 3 + 6i.$$

Chọn B.**Câu 7:** Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 4i| = 2$. Gọi A và B lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$. Tính giá trị của biểu thức $P = A^2 - 2B$.

A. $P = 43$.

B. $P = 80$.

C. $P = 8$.

D. $P = 48$

Hướng dẫn giải:

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(3; -4)$ bán kính $R = 2$

Khi đó $A = |z|_{\max} = OI + R = 5 + 2 = 7$; $B = |z|_{\min} = |OI - R| = 3$

Suy ra $P = 43$.

Chọn A.

Câu 8: Trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$. Tìm môđun nhỏ nhất của số phức $z + 2i$.

A. $\sqrt{5}$

B. $3\sqrt{5}$.

C. $3\sqrt{2}$

D. $3 + \sqrt{2}$

Hướng dẫn giải:

Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$).

Ta có: $|z - 2 - 4i| = |z - 2i| \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} \Leftrightarrow x + y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 4 - x$.

Ta có: $|z + 2i|^2 = x^2 + (y+2)^2 = x^2 + (6-x)^2 = 2x^2 - 12x + 36 = 2(x-3)^2 + 18 \geq 18$

$\Rightarrow |z + 2i|_{\min} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ khi $z = 3 + i$.

Chọn C.

Câu 9: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 3$. Tìm môđun nhỏ nhất của số phức $z - 1 + i$.

A. 4.

B. $2\sqrt{2}$.

C. 2.

D. $\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow z - 1 + i = (x-1) + (y+1)i$. Ta có:

$|z - 1 + 2i| = 9 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$.

Đặt $x = 1 + 3\sin t$; $y = -2 + 3\cos t$; $t \in [0; 2\pi]$.

$\Rightarrow |z - 1 + i|^2 = (3\sin t)^2 + (-1 + 3\cos t)^2 = 10 - 6\cos t \Rightarrow 2 \leq |z - 1 + i| \leq 4 \Rightarrow |z - 1 + i|_{\min} = 2$, khi $z = 1 + i$.

Chọn C.

Câu 10: Trong các số phức z thỏa mãn: $|z - 3 + 4i| = |z|$ thì số phức z có môđun nhỏ nhất là

A. $z = \frac{11}{2} + i$.

B. $z = \frac{3}{2} - 2i$.

C. $z = -5 - \frac{5}{2}i$.

D. $z = -3 + \frac{1}{6}i$

Hướng dẫn giải:

Ta có $|a + bi - 3 + 4i| = |a + bi| \Rightarrow (a-3)^2 + (b+4)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 25 - 6a + 8b = 0 \Leftrightarrow a = \frac{8b+25}{6}$

$\Rightarrow |z|^2 = \left(\frac{8b+25}{6}\right)^2 + b^2 = \frac{25}{9}b^2 + \frac{100}{9}b + \frac{625}{36} = \left(\frac{5}{3}b + \frac{10}{3}\right)^2 + \frac{25}{4} \geq \frac{25}{4} \Rightarrow b = -2 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$.

Chọn B.

Câu 11: Trong các số phức z thỏa mãn: $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$ thì số phức z có môđun nhỏ nhất là

A. $z = -2 + 2i$.

B. $z = -2 - 2i$.

C. $z = 2 - 2i$.

D. $z = 2 + 2i$

Hướng dẫn giải:

Ta có $|a + bi - 2 - 4i| = |a + bi - 2i| \Rightarrow (a - 2)^2 + (b - 4)^2 = a^2 + (b - 2)^2$

$$\Leftrightarrow 20 - 4a - 8b = 4 - 4b \Leftrightarrow 4a + 4b = 16 \Leftrightarrow b = 4 - a$$

$$\Rightarrow |z|^2 = a^2 + (4 - a)^2 = 2a^2 - 8a + 16 = 2(a - 2)^2 + 8 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 2.$$

Chọn D.**Câu 12:** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 + 3i| = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$

A. $\sqrt{13} - 3$.

B. 2.

C. $\sqrt{13} - 2$.

D. 2

Hướng dẫn giải:

Các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 2 + 3i| = 3$ nằm trên đường tròn (C) tâm $I(2; -3)$ và bán kính $R = 3$.

(Ý nghĩa hình học của $|z|$: độ dài OM)

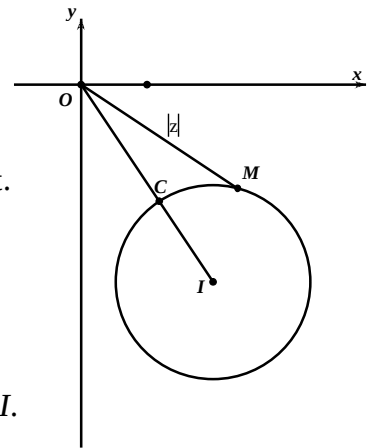
Ta có $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ điểm $M \in (C)$ và OM nhỏ nhất.

(Bài toán hình học giải tích quen thuộc)

Ta có: $OM \geq OI - IM = OI - R = \sqrt{13} - 3$.

Dấu « = » xảy ra khi M là giao điểm của (C) và đoạn thẳng OI .

Vậy GTNN của $|z|$ là: $\sqrt{13} - 3$.

**Chọn A.****Câu 13:** Cho số phức z thỏa mãn: $|z - 2 - 2i| = 1$. Số phức $z - i$ có môđun nhỏ nhất là:

A. $\sqrt{5} - 1$

B. $\sqrt{5} + 1$

C. $\sqrt{5} - 2$

D. $\sqrt{5} + 2$.

Hướng dẫn giải:**Chọn A.**

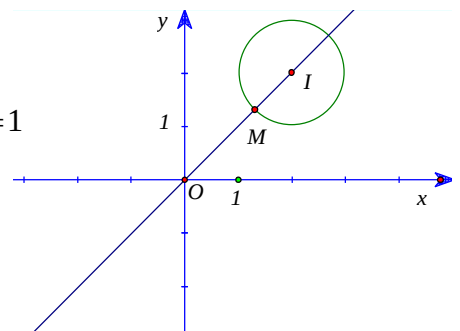
Gọi $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có:

$$|z - 2 - 2i| = 1 \Leftrightarrow |(x - 2) + (y - 2)i| = 1 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$$

Tập hợp các điểm trong mặt phẳng Oxy biểu diễn của số phức z là đường tròn (C) tâm $I(2; 2)$ và bán kính $R = 1$.

$$|z - i| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = IM, \text{ với } I(2; 2) \text{ là tâm đường}$$



tròn, M là điểm chạy trên đường tròn. Khoảng cách này ngắn nhất khi M là giao điểm của đường thẳng nối hai điểm $N(0;1) \in Oy, I(2;2)$ với đường tròn (C) .

$$IM_{\min} = IN - R = \sqrt{5} - 1$$

Câu 14: Trong các số phức z thỏa $|z + 3 + 4i| = 2$, gọi z_0 là số phức có mô đun nhỏ nhất. Khi đó

A. Không tồn tại số phức z_0 .

B. $|z_0| = 2$.

C. $|z_0| = 7$.

D. $|z_0| = 3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Cách 1:

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó

$$|z + 3 + 4i| = 2 \Leftrightarrow (a + 3)^2 + (b + 4)^2 = 4.$$

Suy ra biểu diễn hình học của số phức z là đường tròn (C) tâm $I(-3; -4)$ và bán kính $R = 2$.

Gọi $M(z)$ là điểm biểu diễn số phức z . Ta có:

$$M(z) \in (C).$$

$$|z| = OM \geq OI - R = 3.$$

Vậy $|z|$ bé nhất bằng 3 khi $M(z) = (C) \cap IM$.

Cách 2:

$$\text{Đặt } \begin{cases} a + 3 = 2 \cos \varphi \\ b + 4 = 2 \sin \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 + 2 \cos \varphi \\ b = -4 + 2 \sin \varphi \end{cases}.$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(2 \cos \varphi - 3)^2 + (2 \sin \varphi - 4)^2} = \sqrt{29 - 12 \cos \varphi - 16 \sin \varphi}.$$

$$= \sqrt{29 - 20 \left(\frac{3}{5} \cos \varphi + \frac{4}{5} \sin \varphi \right)} = \sqrt{29 - 20 \cos(\alpha - \varphi)} \geq \sqrt{9}.$$

$$\Rightarrow |z_0| = 3$$

A Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5}$ và $w = z + 1 + i$ có mô đun lớn nhất. Số phức z có mô đun bằng:

A. $2\sqrt{5}$.

B. $3\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{6}$.

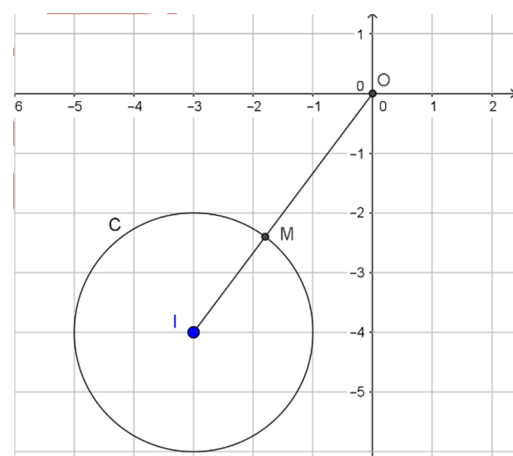
D. $5\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$$\text{Gọi } z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow z - 1 + 2i = (x - 1) + (y + 2)i$$

$$\text{Ta có: } |z - 1 + 2i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$$



Suy ra tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z thuộc đường tròn (C) tâm $I(1; -2)$ bán kính $R = \sqrt{5}$ như hình vẽ:

$$\text{Để thấy } O \in (C), N(-1; -1) \in (C)$$

Theo đề ta có:

$M(x; y) \in (C)$ là điểm biểu diễn cho số phức z thỏa mãn:

$$w = z + 1 + i = x + yi + 1 + i = (x+1) + (y+1)i \Rightarrow |z + 1 + i| = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = |\overline{MN}|$$

Suy ra $|z + 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow MN$ lớn nhất

Mà $M, N \in (C)$ nên MN lớn nhất khi MN là đường kính đường tròn (C)

$$\Leftrightarrow I \text{ là trung điểm } MN \Rightarrow M(3; -3) \Rightarrow z = 3 - 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

Câu 15: Trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z + 3i| = |z + 2 - i|$. Tìm số phức có môđun nhỏ nhất?

A. $z = 1 - 2i$. **B.** $z = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$. **C.** $z = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$. **D.** $z = -1 + 2i$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Phương pháp tự luận

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$|z + 3i| = |z + 2 - i| \Leftrightarrow |x + (y+3)i| = |(x+2) + (y-1)i| \Leftrightarrow x^2 + (y+3)^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 6y + 9 = 4x + 4 - 2y + 1 \Leftrightarrow 4x - 8y - 4 = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2y + 1$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2y+1)^2 + y^2} = \sqrt{5y^2 + 4y + 1} = \sqrt{5\left(y + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}} \geq \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Suy ra } |z|_{\min} = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ khi } y = -\frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

$$\text{Vậy } z = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i.$$

Phương pháp trắc nghiệm

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$|z + 3i| = |z + 2 - i| \Leftrightarrow |x + (y+3)i| = |(x+2) + (y-1)i| \Leftrightarrow x^2 + (y+3)^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 6y + 9 = 4x + 4 - 2y + 1 \Leftrightarrow 4x - 8y - 4 = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 1 = 0$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa điều kiện $|z + 3i| = |z + 2 - i|$ là đường thẳng $d: x - 2y - 1 = 0$.

Phương án A: $z = 1 - 2i$ có điểm biểu diễn $(1; -2) \notin d$ nên loại **A**.

Phương án B: $z = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ có điểm biểu diễn $\left(-\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right) \notin d$ nên loại **B**.

Phương án D: $z = -1 + 2i$ có điểm biểu diễn $(-1; 2) \notin d$ nên loại **B**.

Phương án C: $z = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ có điểm biểu diễn $\left(\frac{1}{5}; -\frac{2}{5}\right) \in d$

Câu 16: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 4i - 2| = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. 1

B. 3

C. 7

D. 8

Hướng dẫn giải:

Giả sử $z = a + bi$, ta có: $|a + bi - 3 + 4i| = 4 \Rightarrow (a - 3)^2 + (b + 4)^2 = 16$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a - 3 = 4 \sin \varphi \\ b + 4 = 4 \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 + 4 \sin \varphi \\ b = 4 \cos \varphi - 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |z|^2 &= a^2 + b^2 = 9 + 16 \sin^2 \varphi + 24 \sin \varphi + 16 - 32 \cos \varphi \\ &= 41 + 24 \sin \varphi - 32 \cos \varphi = 41 + 40 \left(\frac{3}{5} \sin \varphi - \frac{4}{5} \cos \varphi \right) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } \cos \varphi = \frac{3}{5}, \sin \varphi = \frac{4}{5} \Rightarrow |z|^2 = a^2 + b^2 = 41 + 40 \sin(\varphi - \alpha) \geq 1.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \varphi - \alpha = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} + \alpha + k2\pi.$$

Vậy $\min |z| = 1$.

Chọn A.

Câu 17: Trong các số phức thỏa điều kiện $|z - 4i - 2| = |2i - z|$, mô đun nhỏ nhất của số phức z bằng:

A. $2\sqrt{2}$

B. 2

C. 1

D. $3\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải:

Giả sử số phức $z = x + yi$

Theo đề

$$|z - 4i - 2| = |2i - z| \Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} \Leftrightarrow x + y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 4 - x \quad (1)$$

$$\text{Mà } |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (4 - x)^2} \quad (\text{thay (1) vào})$$

$$= \sqrt{2(x - 2)^2 + 8} \geq 2\sqrt{2}.$$

Chọn A.

Câu 18: Số phức z có mô đun lớn nhất và thỏa mãn điều kiện $|\bar{z}(1 + i) - 3 + 2i| = \frac{\sqrt{13}}{2}$ là:

A. $z = 1 + 3i$

B. $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}i$

C. $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

D. $z = \frac{3}{4} + \frac{15}{4}i$

Hướng dẫn giải:+ Gọi $z = x + yi$ Từ giả thiết ta có: $(x + y - 3)^2 + (x - y + 2)^2 = \frac{13}{4}$.+ Đồng thời $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ lớn nhất. Kiểm tra các đáp án và so sánh.**Chọn D.****Câu 19:** Trong các số phức z thỏa: $|\bar{z} - 3 + 4i| = |z|$, biết rằng số phức $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$ có modul nhỏ nhất. Khi đó, giá trị của $P = a^2 - b$ là

A. $P = \frac{1}{4}$.

B. $P = \frac{1}{2}$.

C. $P = -\frac{1}{4}$.

D. $P = -\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải:Ta có $|a - bi - 3 + 4i| = |a + bi| \Rightarrow (a - 3)^2 + (b - 4)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 25 - 6a - 8b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{25 - 6a}{8}$

$$\Rightarrow |z|^2 = a^2 + \left(\frac{25 - 6a}{8}\right)^2 = \frac{25}{16}a^2 - \frac{75}{16}a + \frac{625}{64} = \left(\frac{5}{4}a - \frac{15}{8}\right)^2 + \frac{25}{4} \Rightarrow a = \frac{3}{2} \Rightarrow b = 2.$$

Chọn A.**Câu 20:** Trong các số phức z thỏa mãn: $|z + 1 - 5i| = |\bar{z} + 3 - i|$, biết rằng số phức $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$ có modul nhỏ nhất. Khi đó, tỉ số $\frac{a}{b}$ bằng

A. 3.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $P = -\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải:

Ta có $|a + bi + 1 - 5i| = |a - bi + 3 - i| \Rightarrow (a + 1)^2 + (b - 5)^2 = (a + 3)^2 + (b + 1)^2$

$$\Leftrightarrow 26 + 2a - 10b = 10 + 6a + 2b \Leftrightarrow 4a + 12b = 16 \Leftrightarrow a = 4 - 3b$$

$$\Rightarrow |z|^2 = (4 - 3b)^2 + b^2 = 10b^2 - 24b + 16 = \left(b\sqrt{10} - \frac{12}{\sqrt{10}}\right)^2 + \frac{8}{5} \Rightarrow b = \frac{6}{5} \Rightarrow a = \frac{2}{5}.$$

Chọn B.**Câu 21:** Trong mặt phẳng phức Oxy, các số phức z thỏa $|z - 5i| \leq 3$. Nếu số phức z có môđun nhỏ nhất thì phần ảo bằng bao nhiêu?

A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 4

Hướng dẫn giải:Giả sử M là điểm biểu diễn số phức z . Xét điểm $A(0; 5) \Rightarrow AM \leq 3$

Tập hợp điểm M là các điểm không nằm ngoài đường tròn tâm A bán kính $R = 3$

$$\Rightarrow OM \geq AO - AM = 5 - 3 = 2.$$

Chọn C.

Câu 22: Trong mặt phẳng phức Oxy , trong các số phức z thỏa $|z+1-i| \leq 1$. Nếu số phức z có môđun lớn nhất thì số phức z có phần thực bằng bao nhiêu?

A. $\frac{-\sqrt{2}-2}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{2}-2}{2}$.

C. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Giả sử M là điểm biểu diễn số phức z . Xét điểm $A(-1;1) \Rightarrow AM \leq 1$

Tập hợp điểm M là các điểm không nằm ngoài đường tròn (C) tâm A bán kính $R = 1$

$$\Rightarrow OM \leq AO + AM = \sqrt{2} + 1. \text{ Dấu bằng khi } M \text{ là giao điểm của } (C) \text{ và } OA: y = -x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = -y_M \\ (x_M + 1)^2 + (y_M - 1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x_M = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x_M = \frac{-2 - \sqrt{2}}{2} \text{ (chọn điểm xa O hơn).}$$

Chọn A.

Câu 23: Trong mặt phẳng phức Oxy , trong các số phức z thỏa $|z+1-i| \leq 1$. Nếu số phức z có môđun lớn nhất thì số phức z có phần thực bằng bao nhiêu?

A. $\frac{-\sqrt{2}-2}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{2}-2}{2}$.

C. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $M(x, y)$ là điểm biểu diễn số phức

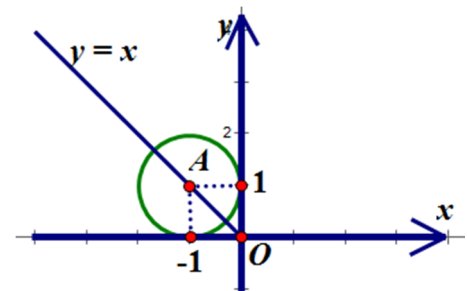
$$z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Gọi A là điểm biểu diễn số phức $-1 + i$

Ta có: $|z+1-i| \leq 1 \Leftrightarrow MA \leq 1$. Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức là hình tròn tâm $A(-1,1)$, $R = 1$ như hình vẽ

$$\text{Để } \max|z| \Leftrightarrow \max(OM)$$

$$\Rightarrow M \text{ thỏa hệ: } \begin{cases} (x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 1 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}-2}{2}, x = -\frac{\sqrt{2}+2}{2}$$



Câu 24: Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - 2z + 5| = |(z-1+2i)(z+3i-1)|$ và số phức w thỏa $w = z - 2 + 2i$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|w|$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } |z^2 - 2z + 5| = |(z-1+2i)(z+3i-1)|$$

$$\Leftrightarrow |(z-1+2i)(z-1-2i)| = |(z-1+2i)(z+3i-1)| \Leftrightarrow \begin{cases} |z-1+2i| = 0 \\ |z-1-2i| = |z+3i-1| \end{cases}$$

Trường hợp 1: $|z-1+2i| = 0 \Leftrightarrow z = 1-2i \Rightarrow |w| = 1$.

Trường hợp 2: $|z-1-2i| = |z+3i-1| \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}$ với $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$\Rightarrow w = \left(a - \frac{1}{2}i\right) - 2 + 2i = (a-2) + \frac{3}{2}i \Rightarrow |w| = \sqrt{(a-2)^2 + \frac{9}{4}} \geq \frac{3}{2}.$$

Câu 25: Cho số phức $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}; a, b \geq 0$). Đặt đa thức $f(x) = ax^2 + bx - 2$. Biết $f(-1) \leq 0$, $f\left(\frac{1}{4}\right) \leq -\frac{5}{4}$. Tính giá trị lớn nhất của $|z|$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $f(-1) \leq 0 \Leftrightarrow a - b - 2 \leq 0 \Leftrightarrow b \geq a - 2$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) \leq -\frac{5}{4} \Rightarrow \frac{a}{16} + \frac{b}{4} - 2 \leq -\frac{5}{4} \Leftrightarrow b \leq 3 - \frac{a}{4}.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng Oxy là một miền kín được giới hạn bởi các đường thẳng sau:

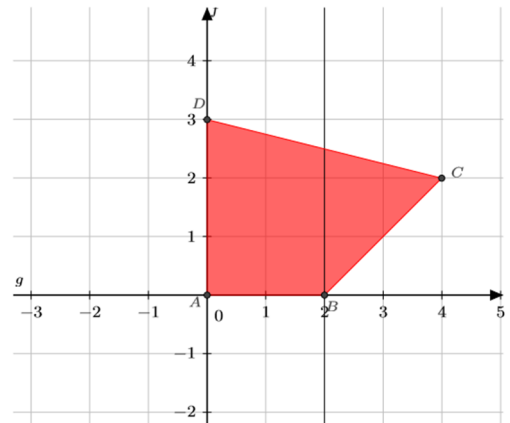
$$x = 0; y = 0; y = x - 2; y = -\frac{x}{4} + 3.$$

Gọi M là điểm biểu diễn số phức $z \Rightarrow \max |z| = \max OM$.

$\Rightarrow M$ là 1 trong các đỉnh sau

$$A(0;0), B(2;0), C(2;4), D(0;3).$$

$$\Rightarrow \max Om = OC = 2\sqrt{5}.$$



DẠNG 5: GTLN, GTNN TRÊN SỐ PHỨC

Câu 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $|\bar{z} + 1 + i|$ là:

- A. $\sqrt{13} + 2$. B. 4. C. 6. D. $\sqrt{13} + 1$

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$|z - 2 - 3i| = 1 \Leftrightarrow |\overline{z - 2 - 3i}| = 1 \Leftrightarrow |\bar{z} - \overline{2 + 3i}| = 1 \Leftrightarrow |\bar{z} - (2 - 3i)| = 1$$

Đặt $w = \bar{z} + 1 + i$

Tập hợp điểm biểu diễn w là đường tròn tâm I , tâm I là điểm biểu diễn của số phức $2 - 3i + 1 + i = 3 - 2i$, tức là $I(3; -2)$, bán kính $r = 1$

$$\text{Vậy } |w|_{\max} = OI + r = \sqrt{3^2 + (-2)^2} + 1 = \sqrt{13} + 1$$

Chọn D

Câu 2: Số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $|z| \geq 2$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \left| \frac{z+i}{z} \right|.$$

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Lời giải

$$\text{Ta có } 1 - \left| \frac{i}{z} \right| \leq \left| 1 + \frac{i}{z} \right| \leq 1 + \left| \frac{i}{z} \right| \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{|z|} \leq \left| 1 + \frac{i}{z} \right| \leq 1 + \frac{1}{|z|}.$$

$$\text{Mặt khác } |z| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{|z|} \leq \frac{1}{2} \text{ suy ra } \frac{1}{2} \leq P \leq \frac{3}{2}.$$

Suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất là $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$. Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 2.

Chọn B.

Câu 3: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \left| 1 + \frac{5i}{z} \right|$.

- A. 5. B. 4. C. 6. D. 8.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } A = \left| 1 + \frac{5i}{z} \right| \leq |1| + \left| \frac{5i}{z} \right| = 1 + \frac{5}{|z|} = 6. \text{ Khi } z = i \Rightarrow A = 6.$$

Chọn C.

Câu 4: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất $M_{\max}$ và giá trị nhỏ nhất $M_{\min}$ của biểu thức $M = |z^2 + z + 1| + |z^3 + 1|$.

A. $M_{\max} = 5; M_{\min} = 1$.

B. $M_{\max} = 5; M_{\min} = 2$.

C. $M_{\max} = 4; M_{\min} = 1$.

D. $M_{\max} = 4; M_{\min} = 2$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $M \leq |z|^2 + |z| + 1 + |z|^3 + 1 = 5$, khi $z = 1 \Rightarrow M = 5 \Rightarrow M_{\max} = 5$.

Mặt khác: $M = \frac{|1-z^3|}{|1-z|} + |1+z^3| \geq \frac{|1-z^3|}{2} + \frac{|1+z^3|}{2} \geq \frac{|1-z^3+1+z^3|}{2} = 1$, khi

$z = -1 \Rightarrow M = 1 \Rightarrow M_{\min} = 1$.

Chọn A.

Câu 5: Cho số phức z thỏa $|z| \geq 2$. Tìm tích của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \left| \frac{z+i}{z} \right|$.

A. $\frac{3}{4}$.

B. 1.

C. 2.

D. $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $P = \left| 1 + \frac{i}{z} \right| \leq 1 + \frac{1}{|z|} \leq \frac{3}{2}$. Mặt khác: $\left| 1 + \frac{i}{z} \right| \geq 1 - \frac{1}{|z|} \geq \frac{1}{2}$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{2}$, xảy ra khi $z = -2i$; giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{3}{2}$ xảy ra khi $z = 2i$.

Chọn A.

Câu 6: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |1+z| + 3|1-z|$.

A. $3\sqrt{15}$

B. $6\sqrt{5}$

C. $\sqrt{20}$

D. $2\sqrt{20}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$). Ta có: $|z|=1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x \in [-1; 1]$.

Ta có: $P = |1+z| + 3|1-z| = \sqrt{(1+x)^2 + y^2} + 3\sqrt{(1-x)^2 + y^2} = \sqrt{2(1+x)} + 3\sqrt{2(1-x)}$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2(1+x)} + 3\sqrt{2(1-x)}$; $x \in [-1; 1]$. Hàm số liên tục trên $[-1; 1]$ và với

$x \in (-1; 1)$ ta có: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2(1+x)}} - \frac{3}{\sqrt{2(1-x)}} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5} \in (-1; 1)$.

Ta có: $f(1) = 2$; $f(-1) = 6$; $f\left(-\frac{4}{5}\right) = 2\sqrt{20} \Rightarrow P_{\max} = 2\sqrt{20}$.

Chọn D.

Câu 7: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+|z^2-z+1|$. Tính giá trị của $M.m$.

A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{39}{4}$.

C. $3\sqrt{3}$.

D. $\frac{13}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$). Ta có: $|z|=1 \Leftrightarrow z.\bar{z}=1$

Đặt $t = |z+1|$, ta có $0 = |z|-1 \leq |z+1| \leq |z|+1=2 \Rightarrow t \in [0;2]$.

Ta có $t^2 = (1+z)(1+\bar{z}) = 1+z.\bar{z}+z+\bar{z} = 2+2x \Rightarrow x = \frac{t^2-2}{2}$.

Suy ra $|z^2-z+1| = |z^2-z+z.\bar{z}| = |z||z-1+\bar{z}| = \sqrt{(2x-1)^2} = |2x-1| = |t^2-3|$.

Xét hàm số $f(t) = t + |t^2-3|, t \in [0;2]$. Bằng cách dùng đạo hàm, suy ra

$$\max f(t) = \frac{13}{4}; \min f(t) = \sqrt{3} \Rightarrow M.m = \frac{13\sqrt{3}}{4}.$$

Chọn A.

Câu 8: Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là số phức thỏa mãn hai điều kiện $|z-2|^2 + |z+2|^2 = 26$ và $\left|z - \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i\right|$ đạt giá trị lớn nhất. Tính tích xy .

A. $xy = \frac{9}{4}$.

B. $xy = \frac{13}{2}$.

C. $xy = \frac{16}{9}$.

D. $xy = \frac{9}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Đặt $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Thay vào điều kiện thứ nhất, ta được $x^2 + y^2 = 36$.

Đặt $x = 3\cos t, y = 3\sin t$. Thay vào điều kiện thứ hai, ta có

$$P = \left|z - \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i\right| = \sqrt{18 - 18\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)} \leq 6.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Rightarrow t = -\frac{3\pi}{4} \Rightarrow z = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i.$$

Chọn D.

Câu 9: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z_1| + |z_2|$.

A. $P = 4\sqrt{6}$

B. $P = 2\sqrt{26}$

C. $P = 5 + 3\sqrt{5}$

D. $P = 32 + 3\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Gọi: } \begin{cases} z_1 = a + bi \\ z_2 = c + di \end{cases} (a, b, c, d \in \mathbb{R}) \Rightarrow \begin{cases} a + c + (b + d)i = 8 + 6i \\ (a - c)^2 + (b - d)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a + c)^2 + (b + d)^2 = 100 \\ (a - c)^2 + (b - d)^2 = 4 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow (a + c)^2 + (b + d)^2 + (a - c)^2 + (b - d)^2 = 104 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 52.$$

$$\text{Mặt khác: } P = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \stackrel{B.C.S}{\leq} \sqrt{(1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)} = 2\sqrt{26}.$$

Cách 2:

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 trên mặt phẳng phức và D là điểm thứ tư của hình bình hành $AOBD \Rightarrow D$ là điểm biểu diễn số phức $(z_1 + z_2) \Rightarrow OD = |z_1 + z_2| = 10$.

$|z_1 - z_2|$ chính là độ dài đoạn AB .

$\triangle OAB$ có

$$\begin{cases} AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \widehat{AOB} = 4 \\ OD^2 = OA^2 + OB^2 + 2OA \cdot OB \cdot \cos \widehat{AOB} = 100 \end{cases} \Rightarrow 104 = 2(OA^2 + OB^2) \geq (OA + OB)^2$$

$$\Rightarrow (OA + OB)_{\max} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26} \Leftrightarrow (|z_1| + |z_2|)_{\max} = 2\sqrt{26}.$$

Câu 10: Cho số phức z thỏa $|z| = 1$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z + 1| + 2|z - 1|$.

A. $\max T = 2\sqrt{5}$. **B.** $\max T = 2\sqrt{10}$. **C.** $\max T = 3\sqrt{5}$. **D.** $\max T = 3\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Gọi } z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow a^2 + b^2 = 1.$$

$$\text{Ta có: } T = |z + 1| + 2|z - 1| = \sqrt{(a + 1)^2 + b^2} + 2\sqrt{(a - 1)^2 + b^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + 2a + 1} + 2\sqrt{a^2 + b^2 - 2a + 1} = \sqrt{2a + 2} + 2\sqrt{2 - 2a} \stackrel{B.C.S}{\leq} \sqrt{(1^2 + 2^2)(4)} = 2\sqrt{5}.$$

$$\text{Vậy } \max T = 2\sqrt{5}.$$

Câu 11: Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - 2z + 5| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)|$. Tính $\min |w|$, với $w = z - 2 + 2i$.

A. $\min |w| = \frac{3}{2}$. **B.** $\min |w| = 2$. **C.** $\min |w| = 1$. **D.** $\min |w| = \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } |z^2 - 2z + 5| &= |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)| \Leftrightarrow |(z - 1 + 2i)(z - 1 - 2i)| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)| \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z - 1 + 2i = 0 \\ |(z - 1 - 2i)| = |(z + 3i - 1)| \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Trường hợp 1: } z - 1 + 2i = 0 \Rightarrow w = -1 \Rightarrow |w| = 1 \ (1).$$

$$\text{Trường hợp 2: } |z - 1 - 2i| = |z + 3i - 1|$$

Gọi $z = a + bi$ (với $a, b \in \mathbb{R}$) khi đó ta được

$$|a - 1 + (b - 2)i| = |(a - 1) + (b + 3)i| \Leftrightarrow (b - 2)^2 = (b + 3)^2 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Suy ra } w = z - 2 + 2i = a - 2 + \frac{3}{2}i \Rightarrow |w| = \sqrt{(a - 2)^2 + \frac{9}{4}} \geq \frac{3}{2} \quad (2).$$

Từ (1), (2) suy ra $\min |w| = 1$.

Câu 12: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = |z + i| + |z - 2 - i|$.

A. $\max T = 8\sqrt{2}$. **B.** $\max T = 4$. **C.** $\max T = 4\sqrt{2}$. **D.** $\max T = 8$.

Hướng dẫn giải:

$$T = |z + i| + |z - 2 - i| = |(z - 1) + (1 + i)| + |(z - 1) - (1 + i)|.$$

$$\text{Đặt } w = z - 1. \text{ Ta có } |w| = 1 \text{ và } T = |w + (1 + i)| + |w - (1 + i)|.$$

$$\text{Đặt } w = x + y.i. \text{ Khi đó } |w|^2 = 2 = x^2 + y^2.$$

$$\begin{aligned} T &= |(x + 1) + (y + 1)i| + |(x - 1) + (y - 1)i| \\ &= 1 \cdot \sqrt{(x + 1)^2 + (y + 1)^2} + 1 \cdot \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} \\ &\leq \sqrt{(1^2 + 1^2)((x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2)} \\ &= \sqrt{2(2x^2 + 2y^2 + 4)} = 4 \end{aligned}$$

Vậy $\max T = 4$.

Chọn B.

Câu 13: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $|\bar{z} + 1 + i|$ là

A. $\sqrt{13} + 2$. **B.** 4. **C.** 6. **D.** $\sqrt{13} + 1$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Gọi } z = x + yi \text{ ta có } z - 2 - 3i = x + yi - 2 - 3i = x - 2 + (y - 3)i.$$

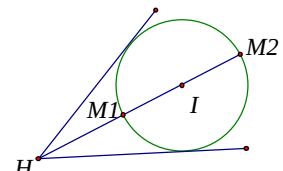
Theo giả thiết $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ nên điểm M biểu diễn cho số phức z nằm trên đường tròn tâm $I(2; 3)$ bán kính $R = 1$.

Ta có

$$|\bar{z} + 1 + i| = |x - yi + 1 + i| = |x + 1 + (1 - y)i| = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2}.$$

$$\text{Gọi } M(x; y) \text{ và } H(-1; 1) \text{ thì } HM = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2}.$$

Do M chạy trên đường tròn, H cố định nên MH lớn nhất khi M là giao của HI với đường tròn.



Phương trình $HI: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$, giao của HI và đường tròn ứng với t thỏa mãn:

$$9t^2 + 4t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{13}} \text{ nên } M\left(2 + \frac{3}{\sqrt{13}}; 3 + \frac{2}{\sqrt{13}}\right), M\left(2 - \frac{3}{\sqrt{13}}; 3 - \frac{2}{\sqrt{13}}\right).$$

Tính độ dài MH ta lấy kết quả $HM = \sqrt{13} + 1$.

Chọn D.

Câu 14: Cho số phức thỏa $|z|=1$. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = |z+1| + |z^2 - z + 1|$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Đặt } z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow a^2 + b^2 = 1.$$

$$\square |z+1| = \sqrt{(a+1)^2 + b^2} = \sqrt{2(a+1)}$$

$$\square |z^2 - z + 1| = |(a^2 + 2abi - b^2) - (a + bi) + a^2 + b^2| = |(2a^2 - a) + (2a - 1)bi|$$

$$= \sqrt{(2a^2 - a)^2 + (2a - 1)^2 b^2} = \sqrt{(2a - 1)^2 (a^2 + b^2)} = |2a - 1|.$$

$$\text{Vậy } P = \sqrt{2(a+1)} + |2a - 1|.$$

$$\text{Xét } a \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \Rightarrow \begin{cases} \max P = P(1) = 3 \\ \min P = P\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} \end{cases}. \text{ Xét } a \in \left[-1; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} \max P = P\left(\frac{-7}{8}\right) = \frac{13}{4} \\ \min P = P\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} \end{cases}.$$

$$\text{Kết luận } \begin{cases} \max_{|z|=1} P = \frac{13}{4} \Rightarrow z = -\frac{7}{8} \pm \frac{\sqrt{15}}{8}i \\ \min_{|z|=1} P = \sqrt{3} \Rightarrow z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}.$$

Câu 15: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = 1$ Giá trị lớn nhất của $|\bar{z} + 1 + i|$ là

A. $\sqrt{13} + 2$.

B. 4.

C. 6.

D. $\sqrt{13} + 1$.

Hướng dẫn giải:

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(2; 3)$ bán kính $R = 1$.

$$\text{Gọi } z = x + yi \Rightarrow |\bar{z} + 1 + i| = |x + 1 - yi + i| = |(x + 1) - (y - 1)i|. \text{ Gọi } K(-1; 1)$$

$$\text{Do đó } |\bar{z} + 1 + i|_{\max} = IK + R = 1 + \sqrt{13}.$$

Chọn D.

Câu 16: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+2i|=|z-1-2i|$. Gọi w là số phức thỏa mãn điều kiện $w=(1+i)z+2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|w|$ là:

- A. $P_{\min} = \frac{1}{5}$. B. $P_{\min} = \frac{5}{\sqrt{34}}$. C. $P_{\min} = \frac{5}{\sqrt{41}}$. D. $P_{\min} = \frac{1}{3}$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } |z+2i|=|z-1-2i| \Leftrightarrow |(1+i)z-2+2i|=|(1+i)z+1-3i|$$

$\Leftrightarrow |w-4+2i|=|w-1-3i|$. Gọi $A(4;-2); B(1;3)$ và $M(w)$ suy ra $MA=MB$ nên tập hợp điểm M là trung trực của AB có PT là: $3x-5y-5=0 (d)$

$$\text{Ta có: } |w|=OM \Rightarrow OM_{\min}=d(O;d)=\frac{5}{\sqrt{34}}.$$

Chọn B.

Câu 17: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-i|=\sqrt{2}$. Gọi A và B lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z-2+i|$. Giá trị của biểu thức $P=2A+B^2$ gần bằng.

- A. 6. B. 7. C. 8. D. 9

Hướng dẫn giải:

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(1;1)$ bán kính $R=\sqrt{2}$

$$\text{Gọi } K(2;-1) \text{ khi đó } A=|z-2+i|_{\max}=IK+R=\sqrt{5}+\sqrt{2}; B=\sqrt{5}-\sqrt{2}$$

$$\text{Do đó } P=2A+B^2 \simeq 8.$$

Chọn C.

Câu 18: Cho số phức z thỏa mãn $\left|\frac{1+i}{1-i}z-1+i\right|=2$. Giá trị lớn nhất của $A=|z-2+i|$ là.

- A. $2+\sqrt{2}$. B. $\sqrt{5}-2$. C. $2+\sqrt{5}$. D. 5

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } \left|\frac{1+i}{1-i}z-1+i\right|=2 \Leftrightarrow |iz-1+i|=2 \Leftrightarrow |i| \cdot |z+1+i|=2 \Leftrightarrow |z+1+i|=2$$

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R=2$

$$\text{Gọi } K(2;-1) \text{ suy ra } A_{\max}=IK+R=5.$$

Chọn D.

Câu 19: Trong tất cả các số phức z thỏa mãn $\left|\frac{(1+i)z}{1-i}+2\right|=1$ hãy tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

- A. $|z|_{\min}=1$. B. $|z|_{\min}=2-\sqrt{2}$. C. $|z|_{\min}=0$. D. $|z|_{\min}=2$

Hướng dẫn giải:

$$\left| \frac{(1+i)z}{1-i} + 2 \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1+i}{1-i} \right| \left| z + \frac{2(1-i)}{1+i} \right| = 1 \Leftrightarrow |z - 2i| = 1$$

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(0; 2)$ bán kính $R=1$ Ta có: $|z|_{\min} = |OI - R| = 1$.**Chọn A.****Câu 20:** Xét số phức z thỏa mãn $|z + i + 1| = |\bar{z} - 4i + 2|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z - 2i + 1|$.

A. $\frac{98}{5}$.

B. $\frac{102}{5}$.

C. $\frac{7\sqrt{10}}{5}$.

D. $\frac{\sqrt{470}}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $|a + bi + i + 1| = |a - bi - 4i + 2| \Rightarrow (a+1)^2 + (b+1)^2 = (a+2)^2 + (b+4)^2$

$$\Leftrightarrow 2 + 2a + 2b = 20 + 4a + 8b \Leftrightarrow 2a + 6b + 18 = 0 \Leftrightarrow a = -3b - 9.$$

Khi đó $|z - 2i + 1|^2 = |a + bi - 2i + 1|^2 = (a+1)^2 + (b-2)^2 = (-3b-8)^2 + (b-2)^2$

$$= 10b^2 + 44b + 68 = \left(b\sqrt{10} + \frac{22}{\sqrt{10}} \right)^2 + \frac{98}{5} \geq \frac{98}{5} \Rightarrow |z - 2i + 1| \geq \frac{7\sqrt{10}}{5}.$$

Chọn C.**Câu 21:** Xét số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|\bar{z} + i + 1|$.

A. $1 + \sqrt{13}$.

B. $2 + \sqrt{13}$.

C. 4.

D. 6.

Hướng dẫn giải:

Giả sử $|a + bi - 2 - 3i| = 1 \Rightarrow (a-2)^2 + (b-3)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 + \sin x \\ b = 3 + \cos x \end{cases}$

Ta có $|\bar{z} + i + 1|^2 = |a - bi + i + 1|^2 = (a+1)^2 + (b-1)^2 = (3 + \sin x)^2 + (2 + \cos x)^2$

$$= 14 + 2(3\sin x + 2\cos x) \leq 14 + 2\sqrt{(3^2 + 2^2)(\sin^2 x + \cos^2 x)} = 14 + 2\sqrt{13} \Rightarrow |\bar{z} + i + 1| \leq 1 + \sqrt{13}.$$

Chọn A.**Câu 22:** Cho số phức z thỏa mãn: $|z(1+i) - 1 + 2i| = 2$. Gọi A và B lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z + 1 + 3i|$. Khi đó $2A^2 - B^2$ có giá gần nhất bằng

A. 20.

B. 18.

C. 64.

D. 32

Hướng dẫn giải:

Ta có $|z(1+i) - 1 + 2i| = 2 \Leftrightarrow \left| z - \frac{1-2i}{1+i} \right| = \left| z - \left(\frac{1}{2} + \frac{3i}{2} \right) \right| = \sqrt{2}$

Giả sử M là điểm biểu diễn số phức z . Xét điểm $F(-1; -3)$ và $E\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow EM = \sqrt{2}$

Tập hợp điểm M là các điểm không nằm ngoài đường tròn (C) tâm E bán kính $R = \sqrt{2}$

Ta có: $|FE - EM| \leq MF \leq FE + EM \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{10}}{2} - \sqrt{2} \leq MF \leq \frac{3\sqrt{10}}{2} + \sqrt{2} \Rightarrow 2A^2 - B^2 \approx 64$.

Chọn C.

Câu 23: Cho số phức z thỏa mãn $|z-3|+|z+3|=8$. Gọi M, m lần lượt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất $|z|$. Khi đó $M+m$ bằng

A. $4-\sqrt{7}$. **B.** $4+\sqrt{7}$. **C.** 7. **D.** $4+\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $8 = |z-3| + |z+3| \geq |z-3+z+3| = |2z| \Leftrightarrow |z| \leq 4$.

Do đó $M = \max|z| = 4$.

Mà $|z-3| + |z+3| = 8 \Leftrightarrow |x-3+yi| + |x+3+yi| = 8 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 8$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$8 = 1 \cdot \sqrt{(x-3)^2 + y^2} + 1 \cdot \sqrt{(x+3)^2 + y^2} \leq \sqrt{(1^2 + 1^2)} \left[\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2} \right]$$

$$\Leftrightarrow 8 \leq \sqrt{2(2x^2 + 2y^2 + 18)} \Leftrightarrow 2(2x^2 + 2y^2 + 18) \geq 64$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 7 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{7} \Leftrightarrow |z| \geq \sqrt{7}.$$

Do đó $m = \min|z| = \sqrt{7}$.

Vậy $M+m = 4+\sqrt{7}$.

Chọn B.

Câu 24: Cho số phức z thỏa mãn: $|z+1-2i| = 2\sqrt{5}$. Gọi A và B lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z+i|$. Khi đó $A.B$ có giá trị bằng

A. 10. **B.** -10. **C.** 12. **D.** -12

Hướng dẫn giải:

Giả sử M là điểm biểu diễn số phức z . Xét điểm $F(0; -1)$ và $E(-1; 2) \Rightarrow EM = 2\sqrt{5}$

Tập hợp điểm M là các điểm không nằm ngoài đường tròn (C) tâm E bán kính $R = 2\sqrt{5}$

Ta có: $|FE - EM| \leq MF \leq FE + EM \Leftrightarrow 2\sqrt{5} - \sqrt{10} \leq MF \leq 2\sqrt{5} + \sqrt{10} \Rightarrow AB = 10$.

Chọn A.

Câu 25: Cho số phức z thỏa mãn: $|z-1+i|=\sqrt{2}$. Gọi A và B lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z+2|$. Khi đó A^2+B^2 có giá trị bằng

- A. 20. B. 18. C. 24. D. 32

Hướng dẫn giải:

Giả sử M là điểm biểu diễn số phức z . Xét điểm $F(-2;0)$ và $E(1;-1) \Rightarrow EM = \sqrt{2}$

Tập hợp điểm M là các điểm không nằm ngoài đường tròn (C) tâm E bán kính $R = \sqrt{2}$

Ta có: $|FE - EM| \leq MF \leq FE + EM \Leftrightarrow \sqrt{10} - \sqrt{2} \leq MF \leq \sqrt{10} + \sqrt{2} \Rightarrow A^2 + B^2 = 24$.

Chọn C.

Câu 26: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-2i|=4$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z+2+i|$. Giá trị của $T = M^2 + m^2$ là

- A. $T = 50$. B. $T = 64$. C. $T = 68$. D. $T = 16$

Hướng dẫn giải:

Đặt $w = z + 2 + i \Leftrightarrow z = w - 2 - i$, khi đó $|z-1-2i| = |w-2-i-1-2i| = |w-3-3i| = 4$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} M = |w|_{\max} = \sqrt{3^2 + 3^2} + 4 = 3\sqrt{2} + 4 \\ m = |w|_{\min} = \sqrt{3^2 + 3^2} - 4 = 3\sqrt{2} - 4 \end{cases} \rightarrow M^2 + m^2 = 68.$$

Chọn C.

Câu 27: Cho số phức z thỏa mãn $|\bar{z}-1+2i|=\sqrt{10}$. Giá trị lớn nhất của $|z+1-4i|$ bằng

- A. $\sqrt{10}$. B. $10\sqrt{3}$. C. $3\sqrt{10}$. D. $4\sqrt{10}$

Hướng dẫn giải:

Ta có $|\bar{z}-1+2i|=\sqrt{10} \Leftrightarrow |\bar{z}-1+2i|^2=10 \Leftrightarrow (\bar{z}-1+2i) \cdot \overline{\bar{z}-1+2i}=10$.

$\Leftrightarrow (\bar{z}-1+2i) \cdot (z-1+2i)=10 \Leftrightarrow |\bar{z}-1+2i| \cdot |z-1+2i|=10 \Rightarrow |z-1+2i|=\sqrt{10}$.

Đặt $w = z + 1 - 4i \Leftrightarrow z = w - 1 + 4i$, khi đó $|z-1+2i| = |w-2+6i| = \sqrt{10}$.

Vậy giá trị lớn nhất là $|w|_{\max} = \sqrt{10} + \sqrt{2^2 + 6^2} = 3\sqrt{10} \Rightarrow |z+1-4i|_{\max} = 3\sqrt{10}$.

Chọn C.

Câu 28: Cho số phức z thỏa mãn $|(2+i)z+1|=1$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z-1|$ bằng

- A. 3. B. $2\sqrt{2}$. C. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. D. $2\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:

Ta có $|(2+i)z+1|=1 \Leftrightarrow \frac{|(2+i)z+1|}{|2+i|} = \frac{1}{|2+i|} \Leftrightarrow \left|z + \frac{1}{2+i}\right| = \left|z + \frac{2}{5} - \frac{i}{5}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}}.$

Đặt $w = z - 1 \Leftrightarrow z = w + 1$, khi đó

$$\left|z + \frac{2}{5} - \frac{i}{5}\right| = \left|w + \frac{7}{5} - \frac{i}{5}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow |w|_{\max} = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Và $|w|_{\min} = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}.$ Vậy $|w|_{\min} + |w|_{\max} = 2\sqrt{2}.$

Chọn B.

Câu 29: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $|z - 1|$ là

A. $\sqrt{2} + 1$. **B.** $\sqrt{2} - 1$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 1

Đặt $w = z - 1 \Leftrightarrow z = w + 1$, khi đó $|z - 2 - i| = |w - 1 - i| = 1 \Rightarrow |w|_{\max} = \sqrt{1^2 + 1^2} + 1 = 1 + \sqrt{2}.$

Chọn A.

Câu 30: Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn điều kiện $|z + 1 - i| + |z + 2 - 3i| = \sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P = x \cdot |z|^2$. Tổng $M + 2m$ bằng

A. -54. **B.** 27. **C.** 18. **D.** -9.

Hướng dẫn giải:

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow M_{(z)} = (x; y)$ và $A(-1; 1), B(-2; 3)$ suy ra $AB = \sqrt{5}.$

Từ giả thiết ta có

$$|z + 1 - i| + |z + 2 - 3i| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} = MA + MB = AB.$$

$$\Rightarrow M \text{ thuộc đường thẳng } (AB): 2x + y + 1 = 0 \Rightarrow y = -2x - 1 \text{ với } x \in [-2; -1].$$

Khi đó $P = x \cdot |z|^2 = x \cdot [x^2 + (2x+1)^2] = 5x^3 + 4x^2 + x$. Đặt $f(x) = 5x^3 + 4x^2 + x$.

Xét hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2; -1]$, có $f'(x) = 15x^2 + 8x + 1 > 0; \forall x \in [-2; -1]$.

Suy ra $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $[-2; -1] \Rightarrow \begin{cases} M = f(-1) = -2 \\ m = f(-2) = -26 \end{cases} \Rightarrow M + 2m = -54.$

Chọn A.

Câu 31: Cho số phức $z = x + 2yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa $|z| = 1$. Tính tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = x - y$.

A. 0. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $-\sqrt{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Theo giả thiết ta có:

$$\Rightarrow \begin{cases} |z|=1 \\ P=x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4y^2=1 \\ x=P+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (P+y)^2+4y^2-1=0 \\ x=P+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y^2+2Py+P^2-1=0(*) \\ x=P+y \end{cases}.$$

Để hệ có nghiệm thì phương trình (*) có nghiệm với mọi $y \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \Delta'_{(*)} = P^2 - 5(P^2 - 1) \geq 0$$

$$\Rightarrow P^2 \leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{5}}{2} \leq P \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \max P + \min P = 0.$$

Câu 32: Cho số phức $z = \frac{i-m}{1-m(m-2i)}$ ($m \in \mathbb{R}$). Gọi k ($k \in \mathbb{R}$) là giá trị nhỏ nhất sao cho tồn tại $|z-1| \leq k$. Giá trị k thuộc khoảng nào sau đây.

A. $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right).$

B. $\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right).$

C. $\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{5}\right).$

D. $\left(\frac{4}{5}; 1\right).$

Hướng dẫn giải:

$$z = \frac{i-m}{1-m(m-2i)} = \frac{i-m}{-i^2+2mi-m^2} = \frac{-1}{i-m} \Rightarrow z-1 = \frac{(1-m)+i}{m-i}$$

Ta có: $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ ($b \neq 0$). Áp dụng $|z-1| = \frac{|(1-m)+i|}{|m-i|} = \sqrt{\frac{m^2-2m+1}{m^2+1}}$

$$\Rightarrow |z-1| \leq k \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ \frac{m^2-2m+1}{m^2+1} \leq k^2 \end{cases}. \text{ Xét } f(m) = \frac{m^2-2m+1}{m^2+1}$$

Theo yêu cầu bài toán, tồn tại $k_{\min}$ để $|z-1| \leq k \Rightarrow \min f(m) \leq k^2$

$$\text{Ta có } \min f(m) = f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4} \Rightarrow k \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (k > 0).$$

Vậy $k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ là giá trị k cần tìm $\Rightarrow B$.

Cách biến đổi khác, bình thường hơn:

$$z = \frac{i-m}{1-m(m-2i)} = \frac{i-m}{-i^2+2mi-m^2} = \frac{-1}{i-m} = \frac{m}{m^2+1} + \frac{i}{m^2+1}$$

$$\Rightarrow z-1 = \frac{m-m^2-1}{m^2+1} + \frac{i}{m^2+1} \Rightarrow |z-1| = \sqrt{\left(\frac{m-m^2-1}{m^2+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{m^2+1}\right)^2}$$

$$\Rightarrow |z-1| = \sqrt{\left[\frac{m-(m^2+1)}{m^2+1}\right]^2 + \left(\frac{1}{m^2+1}\right)^2} = \sqrt{\frac{m^2-2m(m^2+1)+(m^2+1)^2+1}{(m^2+1)^2}} = \sqrt{\frac{m^2-2m+2}{m^2+1}}.$$

Câu 33: Cho số phức $|z^{2017}-1|=1$. Gọi $P=|z|$. Tính $A=2017 \cdot (\max P) - 2017 \cdot (\min P)$.

A. $A=2017 \cdot \sqrt[2016]{2}$. **B.** $A=2017 \cdot \sqrt[2017]{3}$. **C.** $A=2017 \cdot \sqrt[2017]{2}$. **D.** $A=2017$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\max P = |z| > 0 \Leftrightarrow \max P^{2017} = |z|^{2017} = |z^{2017}|$.

$\min P = |z| > 0 \Leftrightarrow \min P^{2017} = |z|^{2017} = |z^{2017}|$.

Gọi $z^{2017} = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

$\Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z^{2017} là đường tròn tâm $I(0;1)$ có bán kính $R=1$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \max P^{2017} = 2 \\ \min P^{2017} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \max P = 2017 \cdot \sqrt[2017]{2} \\ \min P = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 2017 \cdot \sqrt[2017]{2}.$$

Câu 34: Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z+1+i| = |z+2i|$ và $P = |z-2-3i| + |z+1|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = a + 2b$:

Hướng dẫn giải:

Ta có: $|z+1+i| = |z+2i| \Leftrightarrow a-b=1$.

$$P = |z-2-3i| + |z+1| = \sqrt{(a-2)^2 + (b-3)^2} + \sqrt{(a+1)^2 + b^2}.$$

Xét trong mặt phẳng phức Oab , xét các điểm $M(a;b)$, $A(2;3)$, $B(-1;0)$ với M điểm biểu diễn số phức $z \Rightarrow M \in (d): a-b-1=0$.

Ta có: $MA+MB = \sqrt{(a-2)^2 + (b-3)^2} + \sqrt{(a+1)^2 + b^2}$. Vậy ta tìm $M \in d$ sao cho $(MA+MB)_{\min}$.

Do $(x_A - y_A - 1)(x_B - y_B - 1) > 0 \Rightarrow A, B$ cùng thuộc một phía so với đường thẳng d .

$\Rightarrow$ Gọi A' là điểm đối xứng của A qua d .

Ta có: $MA+MB = MA'+MB \geq A'B$. Dấu "=" xảy ra khi

$$M = A'B \cap d \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow P = a + 2b = \frac{5}{2}.$$

Câu 35: Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z+1+i| = |z+2i|$ và $P = |z-2-3i| + |z-1+2i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = a + 2b$:

Hướng dẫn giải:

Ta có: $|z+1+i| = |z+2i| \Leftrightarrow a-b=1$.

$$P = P = |z - 2 - 3i| + |z + 1| = \sqrt{(a-2)^2 + (b-3)^2} + \sqrt{(a-1)^2 + (b+2)^2}.$$

Xét trong mặt phẳng phức Oab , xét các điểm $M(a; b)$, $A(2; 3)$, $B(1; -2)$ với M điểm biểu diễn số phức $z \Rightarrow M \in (d): a - b - 1 = 0$.

Ta có: $MA + MB = \sqrt{(a-2)^2 + (b-3)^2} + \sqrt{(a-1)^2 + (b+2)^2}$. Vậy ta tìm $M \in d$ sao cho $(MA + MB)_{\min}$.

Do $(x_A - y_A - 1)(x_B - y_B - 1) < 0 \Rightarrow A, B$ khác phía so với đường thẳng d .

Ta có: $MA + MB \geq AB$. Dấu "=" xảy ra khi $M = AB \cap d \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow P = a + 2b = \frac{5}{2}$.

Câu 36: Cho số phức $z = a + bi$ thỏa $|z + 1 + i| = |z + 2i|$ và $P = |z - 3i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $A = a + 2b$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có: $|z + 1 + i| = |z + 2i| \Leftrightarrow a - b - 1 = 0$.

Vậy tập hợp điểm $M \in (\Delta): a - b - 1 = 0$.

Trong mặt phẳng phức xét $A(0; 3) \Rightarrow P = MA$ với $M \in (\Delta)$.

Vậy $MA_{\min} = d[A; (\Delta)] = 2\sqrt{2}$.

Câu 37: Cho số phức $z = a + 2bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) và đa thức: $f(x) = ax^2 - bx + 1$. Biết $|f(\pm 1)| \leq 1$. Tính giá trị lớn nhất của $|z|$.

A. 2.

B. $2\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{5}$.

D. $\sqrt{7}$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $|z| = \sqrt{a^2 + (2b)^2}$.

$|f(\pm 1)| \leq 1 \Leftrightarrow |a \pm b + 1| \leq 1 \Leftrightarrow |2a \pm 2b + 2| \leq 2 \quad (1)$.

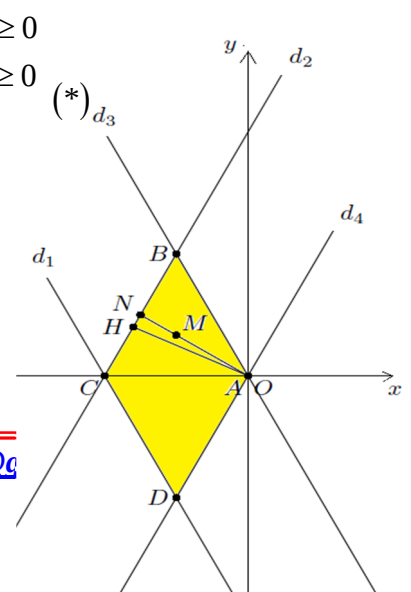
Đặt $\begin{cases} a = x \\ 2b = y \end{cases}$, ta có

$$(1) \Leftrightarrow |2x \pm y + 2| \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq 2x + y + 2 \leq 2 \\ -2 \leq 2x - y + 2 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 4 \geq 0 \\ 2x - y + 4 \geq 0 \\ 2x + y \leq 0 \\ 2x - y \leq 0 \end{cases} \quad (*)_{d_3}$$

Miền nghiệm S của $(*)$ là tứ giác $ABCD$ (kể cả cạnh).

Với $A(0; 0), B(-1; 2), C(-2; 0), D(-1; -2)$.

Dễ dàng nhận thấy $ABCD$ là hình thoi.



Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng $Oxy \Rightarrow M$ **chạy tung tăng** trong miền S .

Ta có $|z| = OM \Rightarrow |z|_{\max} = OM_{\max}$.

Ta dễ nhận thấy $OM_{\max} = OB = OD \Rightarrow |z|_{\max} = \sqrt{5}$. Nhưng nhóm muốn chứng minh thêm cho mọi người xem, phần chữ màu đỏ.

CHỨNG MINH:

Vì $\triangle OBC$ và $\triangle ODC$ đối xứng nhau qua trục Ox nên xét M **chạy tung tăng** trên $\triangle OBC$ ($O \equiv A$).

Gọi $N = OM \cap BC \Rightarrow OM \leq ON$ và N thuộc cạnh BC .

H là hình chiếu của O trên $BC \Rightarrow \begin{cases} HN \leq HB \\ HN \leq HC \end{cases}$.

Ta lại có HN là hình chiếu của ON trên BC .

HB là hình chiếu của OB trên BC .

HC là hình chiếu của OC trên BC .

Từ đó ta có $\begin{cases} ON \leq OB \\ ON \leq OC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OM \leq OB \\ OM \leq OC \end{cases} \Rightarrow OM_{\max} = \max\{OB; OC\}$.

Mà $\begin{cases} OB = \sqrt{5} \\ OC = 2 \end{cases} \Rightarrow OM_{\max} = OB = \sqrt{5} \Leftrightarrow M \equiv B$.

Do tính đối xứng nên $OM_{\max} \Leftrightarrow \begin{cases} M \equiv B(-1; 2) \\ M \equiv D(-1; -2) \end{cases} \Rightarrow |z|_{\max} = \sqrt{5}$.

Câu 38: Cho hàm số phức $f(z) = (4+i)z^2 + az + b$ với a, b là số phức. Biết $f(1), f(i)$ là số thực. Tính giá trị nhỏ nhất của $P = |a| + |b|$.

Hướng dẫn giải:

Gọi: $\begin{cases} a = x_1 + y_1 i \\ b = x_2 + y_2 i \end{cases} (x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R})$.

Ta có: $f(z) = (4+i)z^2 + az + b$.

$\Rightarrow f(1) = 4 + i + a + b = (4 + x_1 + x_2) + (y_1 + y_2 + 1)i$.

$\Rightarrow f(i) = -(4+i) + ai + b = (-4 - y_1 + x_2) + (-1 + x_1 + y_2)i$.

Do $f(1), f(i)$ là số thực $\Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 + 1 = 0 \\ x_1 + y_2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 - y_1 + 2 = 0$.

Vậy để thỏa yêu cầu bài toán thì $a \in (\Delta): x - y + 2 = 0$ trong mặt phẳng Oxy còn b là số phức tự do.

$\Rightarrow P_{\min} = |a| + |b| = d[O; (\Delta)] + 0 = \sqrt{2}$.

Câu 39: Cho số phức z thỏa $|z+1-2i| = 2\sqrt{2}$. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z-1| + 2017|\bar{z} + 3 + 4i|$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Gọi $M(a; b)$ là điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng phức.

Trong mặt phẳng phức xét các điểm $A(1; 0)$, $B(-3; 4)$.

$$\text{Ta luôn có: } \begin{cases} MA^2 + MB^2 = AB^2 \text{ (py-ta-go)} \\ P = MA + 2017MB \end{cases} \Rightarrow (P - 2017MB)^2 + MB^2 - AB^2 = 0.$$

$$\Rightarrow (2017^2 + 1)MB^2 - 2.P.2017MB + (P^2 - AB^2) = 0 \quad (*).$$

Để phương trình (*) có nghiệm thì:

$$\Delta'_{(*)} \geq 0 \Leftrightarrow 2017^2 P^2 - (2017^2 + 1)(P^2 - AB^2) \geq 0$$

$$\Rightarrow P^2 \leq AB^2 (2017^2 + 1) \Rightarrow P \leq AB \sqrt{(2017^2 + 1)}.$$

Câu 40: Cho số phức z thỏa mãn $|z - (3 + 4i)| = \sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$. Tính giá trị $A = M^2 + m^2$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có: } |z - (3 + 4i)| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a - 3)^2 + (b - 4)^2 = 5.$$

$$\Rightarrow z \text{ thuộc đường tròn } (C) \text{ có tâm } I(3; 4) \text{ và bán kính } R = \sqrt{5}.$$

$$\text{Mặt khác: } P = |z + 2|^2 - |z - i|^2 \Rightarrow 4a + 2b + 3 - P = 0.$$

$$\text{Vậy } z \text{ thuộc đường thẳng } (\Delta): 4a + 2b + 3 - P = 0.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} z \in (C) \\ z \in (\Delta) \end{cases} \Rightarrow \text{Để } \exists z \text{ thì } (C) \cap (\Delta) \Rightarrow d[I; (\Delta)] \leq R$$

$$\Rightarrow \frac{|23 - P|}{2\sqrt{5}} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow 13 \leq P \leq 33 \Rightarrow A = 1258.$$

Câu 41: Cho số phức $z \neq 0$ thỏa $|z| \geq 2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = \left| \frac{z+i}{z} \right|$. Tính $A = M^2 + m^2$:

Hướng dẫn giải:

$$\text{Gọi } T = \frac{z+i}{z} \Rightarrow (T-1)z = i. \quad T=1 \Rightarrow \text{Không có số phức nào thỏa mãn.}$$

$$\text{Xét } T \neq 1 \Rightarrow z = \frac{i}{T-1} \Leftrightarrow |z| = \left| \frac{i}{T-1} \right| \geq 2 \Rightarrow |T-1| \leq \frac{1}{2}.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức T là hình tròn tâm $I(1;0)$ có bán kính $R = \frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} M = OI + R = \frac{3}{2} \\ m = |OI - R| = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A = \frac{5}{2}.$$

Câu 42: Cho số phức z thỏa $|z| = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\left| \frac{3+4i}{z-5} \right|$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Đặt } A = \frac{3+4i}{z-5} \Rightarrow z = \frac{3+5A+4i}{A} \Rightarrow |z| = \left| \frac{3+5A+4i}{A} \right|$$

$$\Rightarrow \left| \frac{3+5A+4i}{A} \right| = 5 \Rightarrow |3+5A+4i| = 5|A|.$$

$$\text{Gọi } A = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \sqrt{(5x+3)^2 + (5y+4)^2} = 5\sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\Leftrightarrow 6x + 8y + 5 = 0.$$

Vậy tập hợp điểm của số phức $A \in (\Delta): 6x + 8y + 5 = 0$.

$$\Rightarrow \min |A| = d[O; (\Delta)] = \frac{1}{2}.$$

Câu 43: Cho số phức z thỏa $|z| = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\left| \frac{z+4i}{z-5} \right|$.

Hướng dẫn giải:

Đặt $A = \frac{z+4i}{z-5}$. Xét $A=1 \Rightarrow$ không có số phức z nào thỏa. Vậy $A \neq 1$

$$\Rightarrow z = \frac{5A+4i}{A-1} \Rightarrow |z| = \left| \frac{5A+4i}{A-1} \right| \Rightarrow \left| \frac{5A+4i}{A-1} \right| = 5 \Rightarrow |5A+4i| = 5|A-1|.$$

$$\text{Gọi } A = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \sqrt{(5x)^2 + (5y+4)^2} = 5\sqrt{(x-1)^2 + y^2}.$$

$$\Leftrightarrow 50x + 40y - 9 = 0.$$

Vậy tập hợp điểm của số phức $A \in (\Delta): 50x + 40y - 9 = 0$.

$$\Rightarrow \min |A| = d[O; (\Delta)] = \frac{9}{10\sqrt{41}}.$$

Câu 44: Cho z_1 là số phức, z_2 là số thực thỏa mãn $|z_1 - 2i| = 1$ và $\frac{z_2 - z_1}{1+i}$ là số thực. Gọi M, m lần lượt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$. Tính $A = M^2 + m^2$.

Hướng dẫn giải:

Trong mặt phẳng phức Oxy :

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn số phức

$$z_1, z_2.$$

$$\Rightarrow A \in (C): x^2 + (y-2)^2 = 1 \text{ và } B \in Ox$$

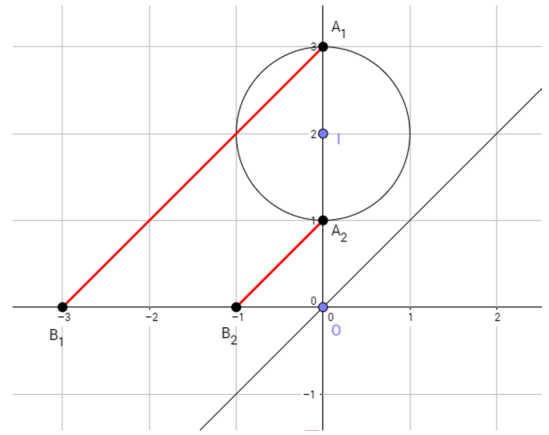
$$\Rightarrow |z_2 - z_1| = |\overline{OB} - \overline{OA}| = |\overline{AB}|.$$

Ta có $\frac{z_1 - z_2}{1 - 2i} = k \ (k \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overline{AB} = k(1; 1) \Rightarrow$

Đường thẳng AB có vectơ pháp tuyến là $(1; -1)$.

Ta có: AB tạo với trục Ox một góc 45° .

$$\Rightarrow AB = \frac{AO}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \begin{cases} \max AB = \frac{\max AO}{\sin 45^\circ} = \frac{3}{\sin 45^\circ} = 3\sqrt{2} \\ \min AB = \frac{\min AO}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow P = 20.$$



Câu 45: Cho z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $|6 - 3i + iz| = |2z - 6 - 9i|$ thỏa mãn $|z_1 - z_2| = \frac{8}{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + z_2|$. Tính $P = M + m$.

Hướng dẫn giải:

Đặt $z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R})$. Ta có: $|6 - 3i + iz| = |2z - 6 - 9i| \Leftrightarrow (a-3)^2 + (b-4)^2 = 1 \ (C)$.

Trong mặt phẳng phức Oxy, gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 và I, H lần lượt là tâm đường tròn (C) , trung điểm AB .

$$\Rightarrow \begin{cases} A, B \in (C): (x-3)^2 + (y-4)^2 = 1 \\ |z_1 + z_2| = |\overline{OA} + \overline{OB}| = 2|\overline{OH}| = 2OH \end{cases}$$

Với 3 điểm O, I, H ta có: $|OI - IH| \leq OH \leq OH + HI$.

$$\Leftrightarrow 2 \left| OI - \sqrt{IA^2 - \frac{AB^2}{4}} \right| \leq 2OH \leq 2 \left[OI + \sqrt{IA^2 - \frac{AB^2}{4}} \right] \Leftrightarrow \frac{44}{5} \leq 2OH \leq \frac{56}{5} \Rightarrow P = 20.$$

Dấu "=" xảy ra:

Khi OH đạt giá trị nhỏ nhất thì O, H, I thẳng hàng theo thứ tự đó.

Khi OH đạt giá trị lớn nhất thì O, I, H thẳng hàng theo thứ tự đó.

Câu 46: Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3 - 4i| = 1, |z_2 + 1| = |z_2 - i|$ và $\frac{z_1 - z_2}{2 - i}$ là số thực. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$. Tính $P = M + m$.

Hướng dẫn giải:

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn của số phức z_1, z_2 .

$$\Rightarrow z_2 - z_1 = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow |z_2 - z_1| = AB$$

.

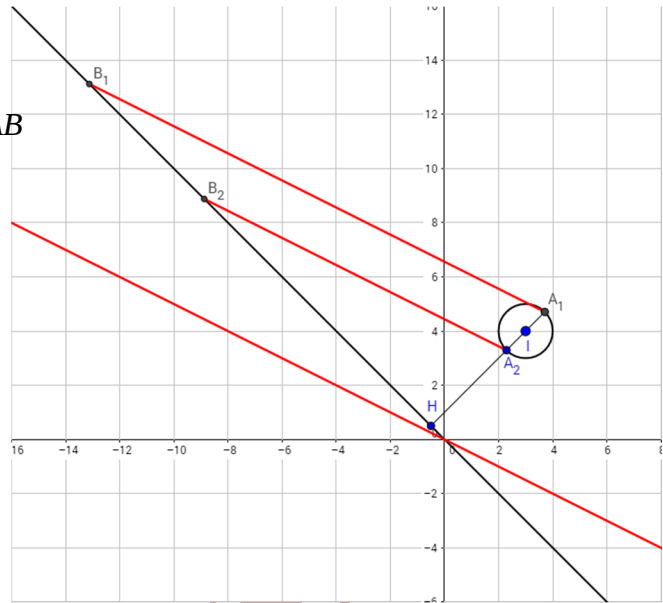
Ta có

$$\frac{z_1 - z_2}{2 - i} = k \quad (k \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = k(2; -1) \Rightarrow$$

Đường thẳng AB có vectơ pháp tuyến là $(1; 2)$.

Trong mặt phẳng phức Oxy ta có:

$$\begin{cases} z_1 \in (C): (x-3)^2 + (y-4)^2 = 1 \\ z_2 \in (d): x + y = 0 \end{cases}$$



Ta có góc giữa AB và d là:

$$\cos(AB; d) = \frac{|\overrightarrow{n_{AB}} \cdot \overrightarrow{n_d}|}{|\overrightarrow{n_{AB}}| \cdot |\overrightarrow{n_d}|} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \sin(AB; d) = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ta có (C) không cắt $(d) \Rightarrow d[I; (d)] - R_{(C)} > 0$. Gọi H là hình chiếu của A trên (d) .

$$\Rightarrow AB = \frac{AO}{\sin(AB; d)} \Rightarrow \begin{cases} \max AB = \frac{\max AH}{\sin(AB; d)} = \frac{d[I; (d)] + R_{(C)}}{\sin(AB; d)} = 7\sqrt{5} + \sqrt{10} \\ \min AB = \frac{\min AH}{\sin(AB; d)} = \frac{d[I; (d)] - R_{(C)}}{\sin(AB; d)} = 7\sqrt{5} - \sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow P = 14\sqrt{5}.$$

Câu 47: Cho số phức z thỏa mãn z không phải là số thực và $w = \frac{z}{2+z^2}$ là thực. Giá trị lớn nhất của $P = |z+1-i|$ là:

Hướng dẫn giải:

$$\text{Do } z \in \mathbb{R} \Rightarrow z \neq 0. \text{ Ta có: } w = \frac{z}{2+z^2} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{1}{w} = \frac{2+z^2}{z} = \left(\frac{2}{z} + z\right) \in \mathbb{R}.$$

Gọi $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$\Rightarrow \frac{2}{z} + z = \frac{2}{a+bi} + a+bi = \frac{2(a-bi)}{a^2+b^2} + a+bi = \left(\frac{2a}{a^2+b^2} + a\right) - b\left(\frac{2}{a^2+b^2} - 1\right)i.$$

$$\text{Do } \frac{1}{w} \in \mathbb{R} \Rightarrow b\left(\frac{2}{a^2+b^2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \text{ (loại)} \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases}$$

Vậy tập hợp điểm của số phức z là đường tròn $(C): a^2 + b^2 = 2$ trong mặt phẳng phức.

Trong mặt phẳng phức xét điểm $A(-1; 1) \Rightarrow P = MA \Rightarrow \max P = OA + R_{(C)} = 2\sqrt{2}.$

Câu 48: Cho số phức z thỏa $|z - 3 - 4i| = 2$ và $P = |z + 2 - i|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của P . Tính $A = M + m$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có: $|z - 3 - 4i| = 2 \Leftrightarrow (a - 3)^2 + (b - 4)^2 = 4$.

Vậy tập hợp điểm $M \in (C): (a - 3)^2 + (b - 4)^2 = 4$ có tâm $I(3; 4)$ và bán kính $R = 2$

Trong mặt phẳng phức xét $A(-2; 1)$, ta có: $P = |z + 2 - i| = MA$ với $M \in (C): (a - 3)^2 + (b - 4)^2 = 4$.

$$\text{Vậy: } \begin{cases} MA_{\min} = |AI - R| = \sqrt{34} - 2 \\ MA_{\max} = AI + R = \sqrt{34} + 2 \end{cases}$$

Câu 49: Cho hai số phức $z_1; z_2$ thỏa mãn $|iz_1 + \sqrt{2}| = \frac{1}{2}$ và $z_2 = iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 - z_2|$.

A. $2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

B. $2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$

C. $\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

D. $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

Hướng dẫn giải:

Bài toán này, thực chất là dựa trên kiến thức “Biểu diễn hình học số phức”. Ta thấy nếu đặt

$z_1 = x_1 + y_1 i$ ($x_1; y_1 \in \mathbb{R}$). Khi đó điểm $M(x_1; y_1)$ là điểm biểu diễn số phức z_1 thỏa mãn:

$$|i(x_1 + y_1 i) + \sqrt{2}| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |ix_1 - y_1 + \sqrt{2}| = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + (y_1 - \sqrt{2})^2 = \frac{1}{4}. \text{ Suy ra tập hợp các điểm } M$$

biểu diễn z_1 là đường tròn (C) có tâm $I(0; \sqrt{2})$ và

bán kính $R = \frac{1}{2}$.

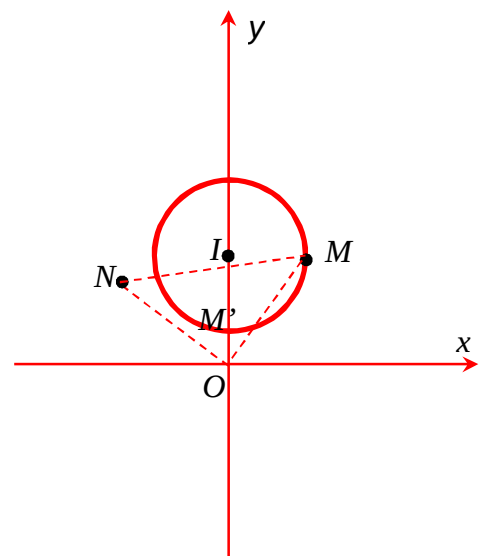
Khi đó nếu N là điểm biểu diễn của số phức z_2 thì

việc tìm GTNN của $|z_1 - z_2|$ là việc tìm GTNN của MN .

Theo đề thì $z_2 = iz_1 = -y_1 + x_1 i \Rightarrow N(-y_1; x_1)$ là điểm biểu diễn z_2 . Ta nhận thấy rõ ràng

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = -x_1 y_1 + x_1 y_1 = 0 \Rightarrow OM \perp ON. \text{ Dễ nhận thấy } OM = ON = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

Ta có hình vẽ sau:



Do OMN là tam giác vuông cân tại O nên $MN = OM\sqrt{2}$, do đó để MN nhỏ nhất thì OM nhỏ nhất. Dễ thấy, OM nhỏ nhất khi $M \equiv M'$ (M' là giao điểm của OI với đường tròn như hình vẽ) Tức là $M\left(0; \sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$. Khi đó $MN = OM\sqrt{2} = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 50: Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M, M' . Số phức $w = z(4+3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn lần lượt là N, N' . Biết rằng M, M', N, N' là bốn đỉnh của hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z+4i-5|$.

A. $\frac{5}{\sqrt{34}}$.

B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

D. $\frac{4}{\sqrt{13}}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$\Rightarrow w = (a + bi)(4 + 3i) = (4a - 3b) + (3a + 4b)i \Rightarrow \bar{w} = (4a - 3b) - (3a + 4b)i$$

Ta có: M và M' đối xứng nhau qua trục Ox , N và N' đối xứng nhau qua trục Ox
 $\Rightarrow \begin{cases} MM' \perp Ox \\ NN' \perp Ox \end{cases}$.

Ta có: M, M', N, N' là bốn đỉnh của hình chữ nhật $MM'N'N$ hoặc $MM'NN'$.

Trong mặt phẳng phức Oab , xét điểm $A(5; -4) \Rightarrow |z + 4i - 5| = MA$

Trường hợp 1: Với hình chữ nhật $MM'N'N$.

$$\Rightarrow MN \perp M'N' \Rightarrow MN // Ox \Rightarrow y_M = y_N \Rightarrow b = (3a + 4b) \Leftrightarrow a + b = 0$$

$$\Rightarrow M \in (d_1): a + b = 0. \text{ Vậy } MA_{\min} = d[A; (d_1)] = \frac{|5 + (-4)|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Trường hợp 2: Với hình chữ nhật $MM'NN'$.

$$\Rightarrow MN' \perp M'M \Rightarrow MN' // Ox \Rightarrow y_M = y_{N'} \Rightarrow b = -(3a + 4b) \Leftrightarrow 3a + 5b = 0$$

$$\Rightarrow M \in (d_2): 3a + 5b = 0. \text{ Vậy } MA_{\min} = d[A; (d_2)] = \frac{|3 \cdot 5 + 5 \cdot (-4)|}{\sqrt{3^2 + 5^2}} = \frac{5}{\sqrt{34}}.$$

$$\text{Vì } d[A; (d_1)] < d[A; (d_2)] \Rightarrow MA_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 51: Cho số phức z_1 thỏa $|z_1 + 1 - i| = |z_1|$, số phức z_2 thỏa $\frac{5 - 35i}{5z_2 - 23 - 4i}$ là số thực và số phức w thỏa điều kiện $2|w - 1 + i| + 3|w - 2 + i| \leq 2$. Cho $P = |w - z_1| + |w - z_2| + |z_1 - z_2|$, gọi a là giá trị nhỏ nhất của biểu thức P (nếu có). Đáp án nào sau đây là đúng:

A. $a = \frac{16\sqrt{10}}{5}$.

B. $a = \frac{8\sqrt{10}}{5}$.

C. $a = \frac{6 + 4\sqrt{5}}{2}$.

D. $a = \frac{3 + 4\sqrt{5}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Trong mặt phẳng phức Oxy gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của số phức w, z_1, z_2 .

Gọi

$$z_1 = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow |z_1 + 1 - i| = |z_1| \Leftrightarrow a - b + 1 = 0$$

.

$\Rightarrow z_1 \in (\Delta_1): x - y + 1 = 0$ trong mặt phẳng phức Oxy.

Ta có:

$$\frac{5 - 35i}{5z_2 - 23 - 4i} = k \ (k \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overline{CD} = \frac{1}{k}(1; -7)$$

với $D\left(\frac{23}{5}; \frac{4}{5}\right)$. Vậy z_2 thuộc đường thẳng có vectơ chỉ phương là $(1; -7)$ và đi qua điểm

D nhưng không lấy điểm $D \Rightarrow z_2 \in (\Delta_2): 7x + y - 33 = 0$ và $z_2 \neq \frac{23}{5} + \frac{4}{5}i$.

Ta có: $2|w - 1 + i| + 3|w - 2 + i| \leq 2 \Leftrightarrow 2AE + 3AF \leq 2$ với $E(1; -1)$ $F(2; -1)$.

Mà $2AE + 2AF \geq 2EF = 2$. vậy dấu "=" xảy ra khi $w = 2 - i$.

$\Rightarrow P = AB + BC + CA$. Ta có A thuộc góc nhọn được tạo bởi 2 đường thẳng $(\Delta_1), (\Delta_2)$.

Gọi A_1, A_2 lần lượt là điểm đối xứng của A qua $(\Delta_1), (\Delta_2) \Rightarrow \begin{cases} AB = A_1B \\ AC = A_2C \end{cases}$ và $\begin{cases} A_1(-2; 3) \\ A_2\left(\frac{38}{5}; -\frac{1}{5}\right) \end{cases}$

$$\Rightarrow P = AB + BC + CA = A_1B + BC + A_2C \geq A_1A_2 = \frac{16\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \text{Chọn } A \dots \text{ ah mà thôi: v.}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} B = A_1A_2 \cap (\Delta_1) \\ C = A_1A_2 \cap (\Delta_2) \end{cases}$. Ta cần tìm tọa độ C để so sánh với điểm

loại đi trên $(\Delta_2) \Rightarrow C\left(\frac{23}{5}; \frac{4}{5}\right) \Rightarrow$ Không tồn tại điểm $C \Rightarrow$ Không tồn tại $P_{\min}$.

Câu 52: Cho số phức z_1, z_2 thỏa $|z + 1 - i| = |z|$ và $|z_1 - z_2| = 6\sqrt{2}$, số phức w_1, w_2 thỏa điều kiện $\frac{1+i}{w-4+2i}$ là số thực và $|w_1 - w_2| = 3\sqrt{2}$, số phức u thỏa $2|u + 2 - i| + 3|u - 1 + 2i| \leq 6\sqrt{2}$. Gọi giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau (nếu có) là $P = |u - z_1| + |u - z_2| + |u - w_1| + |u - w_2|$. Đáp án nào sau đây là đúng:

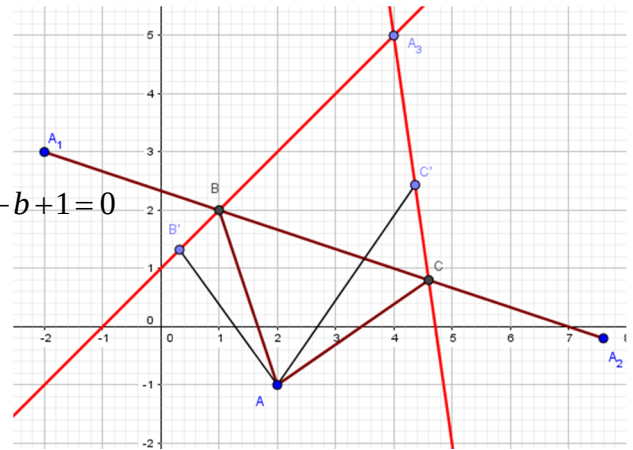
A. $3 + \sqrt{26}$.

B. $9\sqrt{2} + 6$.

C. $6 + 2\sqrt{26}$.

D. $3 - \sqrt{26}$

Hướng dẫn giải:



Trong mặt phẳng phức gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn số phức

$$z_1, z_2 \Rightarrow |z_1 - z_2| = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow AB = 6\sqrt{2}.$$

Gọi

$$z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow |z + 1 - i| = |z| \Leftrightarrow a - b + 1 = 0$$

.

Vậy $z_1, z_2 \in (\Delta): x - y + 1 = 0$ trong mặt phẳng phức với $|z_1 - z_2| = 6\sqrt{2}$.

Trong mặt phẳng phức gọi X, C, D lần lượt là điểm biểu diễn số phức w, w_1, w_2

$$\Rightarrow |w_1 - w_2| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow CD = 3\sqrt{2}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{1+i}{w-4+2i} = k \ (k \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overrightarrow{XY} = k(1;1)$$

với $Y(4; -2)$.

Vậy w thuộc đường thẳng có vectơ chỉ phương là $(1;1)$ và đi qua điểm $Y(4; -2)$ nhưng $w \neq 4 - 2i$.

$$\Rightarrow w \in (\Delta_2): x - y - 6 = 0 \text{ loại đi điểm } Y(4; -2).$$

Trong mặt phẳng phức gọi M là điểm biểu diễn số phức u .

$$\text{Ta có } E(-2; 1), F(1; -2) \Rightarrow 2|u + 2 - i| + 3|u - 1 + 2i| \leq 6\sqrt{2} \Rightarrow 2ME + 3MF \leq 6\sqrt{2}.$$

Mà $2ME + 2MF \geq 2EF = 6\sqrt{2}$. Vậy dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $MF = 0 \Leftrightarrow M(1; -2)$.

$$\Rightarrow P = MA + MB + MC + MD \text{ với } AB = 2CD = 6\sqrt{2}. \text{ Ta cần tìm } P_{\min}.$$

Gọi E, F lần lượt là đỉnh thứ tư của hình bình hành $MCDE, MBAF$.

Gọi E' là điểm đối xứng của E qua (Δ_2) , F' là điểm đối xứng của F qua (Δ_1) .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} MC = DE = DE' \\ MB = AF = AF' \end{cases} \Rightarrow P = (E'D + DM) + (F'A + AM) \geq E'M + F'M.$$

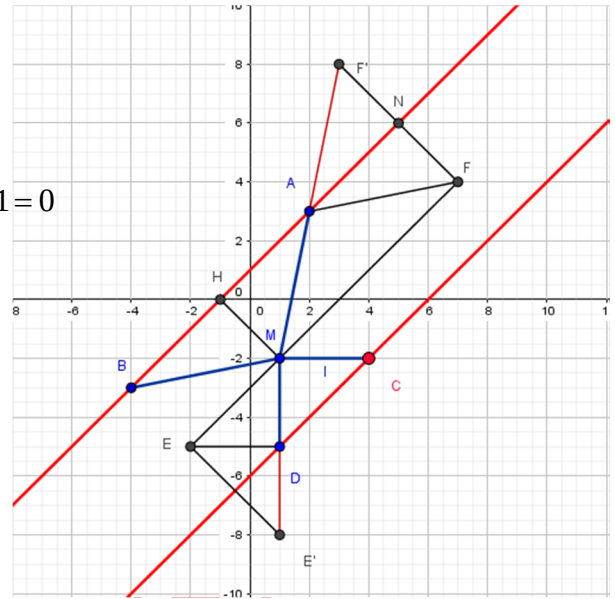
$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} D = ME' \cap (\Delta_2) \\ A = MF' \cap (\Delta_1) \end{cases}.$$

Gọi N là hình chiếu của M trên $(\Delta_1) \Rightarrow \Delta MHA = \Delta ANF' (g - c - g)$ với $N = FF' \cap (\Delta_1)$

$$\Rightarrow MA = AF' = AF = MB \Rightarrow \Delta MAB \text{ cân tại } M. \text{ Chứng minh tương tự } \Delta MCD \text{ cân tại } M.$$

$$\Rightarrow P_{\min} = MA + MB + MC + MD = 6 + 2\sqrt{26}.$$

Kiểm tra lại tọa độ của C, D . Ta viết phương trình đường tròn tâm M bán kính $R = MC$.



$$\Rightarrow C, D = (C) \cap (\Delta_2) \Rightarrow \begin{cases} C(4; -2) \\ D(1; -5) \end{cases} \text{ Không tồn tại } P_{\min} \text{ do } w \neq 4 - 2i.$$