NGUYỄN THỊ LANH

HỌC TỐT MÔN TOÁN

LỚP 12

HÌNH HỌC

NHÀ XUẤT BẢN DÂN TRÍ

LỜI ĐỀ TẶNG

Đây là một món quà dành riêng cho em.

Đọc nó em có một kho kiến thức. Nghe nó em có một trí nhớ siêu đẳng. Dùng nó em có một tương lai tốt đẹp. Chia sẻ nó em có một mối quan hệ tuyệt vời!

Cuốn sách này dành tặng cho bố mẹ tôi, chồng tôi và con gái yêu dấu của tôi.

LỜI CẢM ƠN

Đây là một cuốn sách có sự đóng góp của một nhóm những con người tuyệt vời. Do đó tôi xin bày tỏ lòng biết ơn của mình đến những con người đã dành tâm huyết và nỗ lực của họ để cuốn sách này ra đời.

Cảm ơn các cộng sự *Nguyễn Thị Lan Anh, Nguyễn Đức Hoạch, Trần Thị Thủy, Trịnh Ngọc Liên* đã hỗ trợ để cuốn sách này được hoàn thành.

Cảm ơn Giáo sư *Bùi Văn Nghị* đã định hướng cho cuốn sách.

Cảm ơn thầy *Lê Đăng Khương* đã truyền cảm hứng cho tôi để tôi có ý tưởng viết cuốn sách này và đã giúp tôi rất nhiều trong thời gian hoàn thành cuốn sách. Cảm ơn *Tony Buzan* đã sáng tạo ra phương pháp sơ đồ tư duy (Mindmap) vô cùng tuyệt diệu giúp tôi có cách hệ thống kiến thức một cách đơn giản, hiệu quả. Cảm ơn Tiến sĩ *AJ Hoge*, chuyên gia số 1 thế giới về đào tạo tiếng Anh đã truyền cảm hứng cho tôi tạo ra những đoạn audio để nhớ mãi không thôi. Cảm ơn Adam Khoo, tác giả cuốn sách "Tôi tài giỏi-Bạn cũng thế" đã truyền cảm hứng cho tôi.

Cảm ơn các thầy cô *ở Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2 và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội* đã truyền đạt cho tôi những kiến thức và kỹ năng vô cùng tuyệt vời.

Cảm ơn các thầy cô *ở Trường THPT Lý Thái Tổ - tỉnh Bắc Ninh* đã dạy bảo tôi nên người, đã cho tôi một môi trường học tập tuyệt vời và truyền cảm hứng cho tôi luôn nỗ lực hết mình.

Cảm ơn thầy *Nguyễn Hữu Mại*, người mà tôi luôn dành một sự ngưỡng mộ và kính phục về đạo đức và tâm hồn. Thầy là người truyền cảm hứng mạnh mẽ trong sự nghiệp dạy học.

Cảm ơn các thầy cô *ở Trường Tiểu học Tương Giang, Trường THCS Tương Giang - tỉnh Bắc Ninh* đã cho tôi cơ hội học tập và giúp đỡ em phát triển.

Cảm ơn thầy, Luật sư *Phạm Thành Long* đã dạy bảo tôi, truyền cảm hứng để tôi quyết định hoàn thành cuốn sách, giúp lan tỏa giá trị kiến thức đến nhiều học sinh hơn nữa với tinh thần *"Đừng đợi hoàn hảo mới làm, hãy làm rồi sẽ hoàn hảo"*.

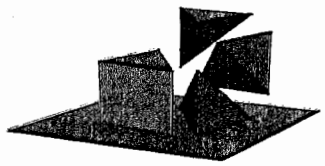
Cảm ơn các thầy cô, đồng nghiệp và học sinh *Trường THPT Ngô Gia Tự - tỉnh Bắc Ninh* đã tạo điều kiện và động viên tôi vươn lên, tạo cho tôi cơ hội học tập và làm việc tại tổ Bộ môn Toán.

Cảm ơn những người bạn học cùng tôi từ cấp 1 đến cao học, các bạn tham gia các khóa học phát triển bản thân và hàng nghìn bạn trên facebook của tôi. Các bạn đã ủng hộ tôi hết mình về tinh thần để cuốn sách này đến nhanh với độc giả.

MỤC LỤC

CHỦ ĐỀ	DẠNG BÀI TẬP	TRANG
	LỜI NÓI ĐẦU	3
	LỜI ĐỀ TẶNG – LỜI CẢM ƠN	4
	HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG	6
CHUYÊN ĐỀ 1: THỂ TÍCH VÀ KHOẢNG CÁCH		**9**
1	THỂ TÍCH	10
	Dạng 1: Thể tích khối chóp	14
	Dạng 2: Thể tích khối lăng trụ	29
	Dạng 3: Tỉ số thể tích	40
2	KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG	53
	Dạng 1: Phương pháp trực tiếp	53
	Dạng 2: Phương pháp gián tiếp	62
3	KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU	79
CHUYÊN ĐỀ 2: MẶT NÓN – MẶT TRỤ - MẶT CẦU		**98**
	Dạng 1: Bài tập về mặt cầu, khối cầu	98
	Dạng 2: Phương pháp xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp	103
	Dạng 3: Bài tập về mặt trụ, hình trụ, khối trụ tròn xoay	111
	Dạng 4: Bài tập về mặt nón, hình nón, khối nón tròn xoay	118
CHUYÊN ĐỀ 3: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN		**125**
1	PHÉP TÍNH TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	126
	Dạng 1: Tìm tọa độ điểm, tọa độ vectơ thỏa mãn điều kiện cho trước	127
	Dạng 2: Ứng dụng của tích vô hướng	136
	Dạng 3: Ứng dụng của tích có hướng	143
2	PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG VÀ ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN	152
	Dạng 1: Vị trí tương đối của đường thẳng, mặt phẳng trong không gian	157
	Dạng 2: Phương trình mặt phẳng	167
	Dạng 3: Phương trình đường thẳng	185
	Dạng 4: Các bài toán về hình chiếu trong không gian	204
	Dạng 5: Bài toán về khoảng cách	216
	Dạng 6: Bài toán về góc	225
3	CHỦ ĐỀ MẶT CẦU	231
	Dạng 1: Phương trình mặt cầu	234
	Dạng 2: Bài toán tổng hợp	249
4	CÁC BÀI TOÁN MIN – MAX	263

	Dạng 1: Tìm điểm thuộc mặt phẳng thỏa mãn điều kiện min – max	263
	Dạng 2: Tìm điểm thuộc đường thẳng thỏa mãn điều kiện min – max	274

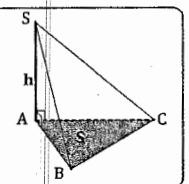


THỂ TÍCH - KHOẢNG CÁCH

1. Công thức tính thể tích

$V = \frac{1}{3}S.h$

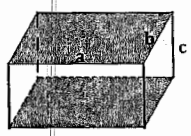
với S diện tích đáy, h là chiều cao khối chóp



V = a.b.c

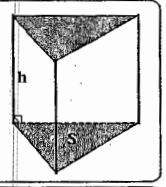
với a, b, c là ba kích thước 3 cạnh của hình hộp chữ nhật

Đặc biệt: Nếu a = b = c thì khối đó gọi là khối lập phương và $V = a^3$



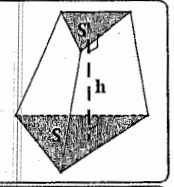
V = S.h

với S diện tích đáy, h là chiều cao lăng trụ



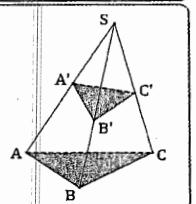
$V = \frac{1}{3}.h.\left(S + S' + \sqrt{SS'}\right)$

với S, S' là diện tích hai đáy, h là chiều cao khối chóp cụt



Cho hình chóp S.ABC. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' khác với S. Khi đó:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$$



2. Tỉ số thể tích

Hệ thức lượng trong tam giác thường

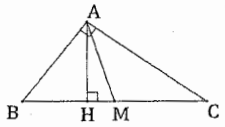
- ***Định lý côsin:*** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$
- ***Định lý sin:*** $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

Với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác

3. Một số lưu ý khi tính thể tích

Hệ thức lượng trong tam giác vuông

- $BC^2 = AB^2 + AC^2$
- $BA^2 = BH.BC$, $CA^2 = CH.BC$
- $AB.AC = BC.AH$
- $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$
- $AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$



Công thức tính diện tích tam giác

Cho ΔABC có $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$. Chiều cao hạ từ A xuống BC là h_a;

p là nửa chu vi tam giác và $p = \frac{a+b+c}{2}$;

R và r là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác.

$$S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}a.b.\sin C = \frac{abc}{4R} = p.r = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

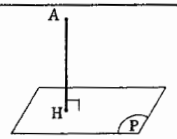
Đặc biệt: ΔABC đều cạnh a thì $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ và chiều cao là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

4. Khoảng cách

Từ 1 điểm đến mặt phẳng

Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) là ***độ dài đoạn thẳng*** AH với H là hình chiếu của A trên (P)

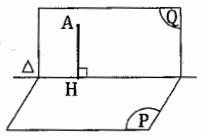
d(A, (P)) = AH



Định nghĩa

Cách xác định

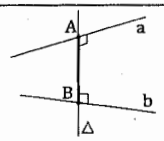
- ***Cách 1:*** Xác định khoảng cách bằng định nghĩa
- ***Cách 2:*** Xác định theo 3 bước sau:
  - *Bước 1:* Dựng mặt phẳng (Q) đi qua A và $(Q) \perp (P)$
  - *Bước 2:* Xác định giao tuyến Δ của mặt phẳng (P) và (Q)
  - *Bước 3:* Trong (Q) kẻ $AH \perp \Delta$; $H \in \Delta \Rightarrow$ **d(A, (P)) = AH**



2 đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b

$$\begin{cases} \Delta \perp a, \Delta \cap a = \{A\} \\ \Delta \perp b, \Delta \cap b = \{B\} \end{cases} \Rightarrow d(a;b) = AB$$



Định nghĩa

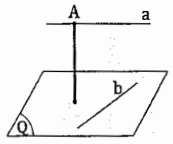
Tổng quát

Đặc biệt

a và b chéo nhau, a không vuông góc với b

Bước 1: Xác định mặt phẳng $(Q) // a$ và (Q) chứa b

Bước 2: $d(a,b) = d(a,(Q)) = d(A,(Q))$ với A là một điểm nằm trên a

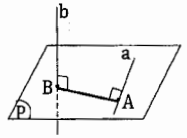


a và b chéo nhau, $a \perp b$

Bước 1: Xác định mặt phẳng (P) chứa a và $(P) \perp b$

Bước 2: Gọi $B = b \cap (P)$, kẻ $AB \perp a$; $A \in a$

Bước 3: $d(a;b) = AB$

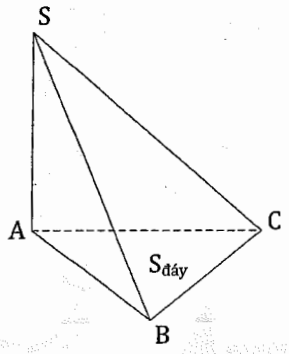
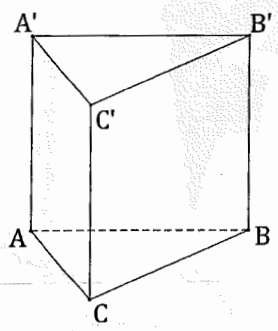
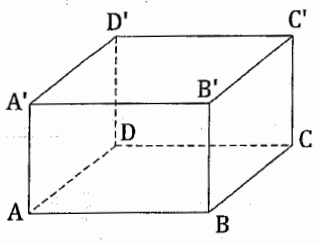
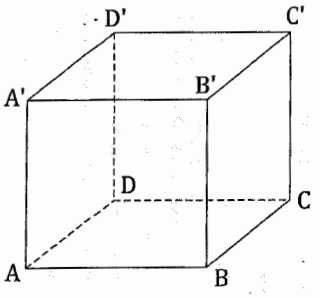


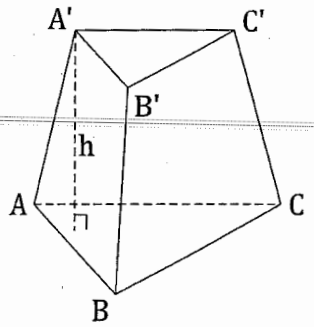
CHUYÊN ĐỀ 1: THỂ TÍCH VÀ KHOẢNG CÁCH

CHỦ ĐỀ 1: THỂ TÍCH

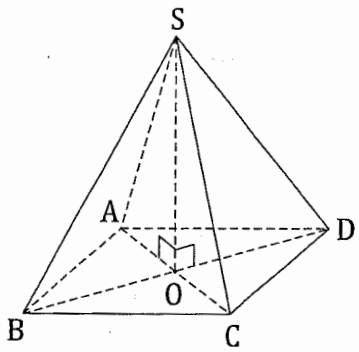
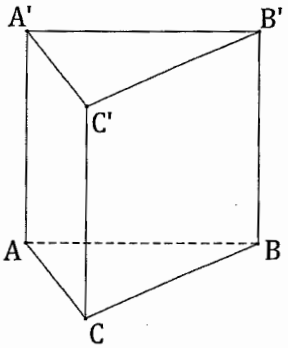
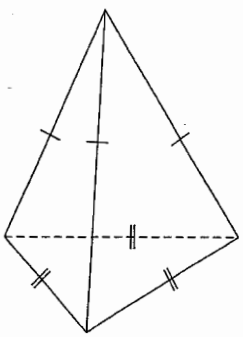
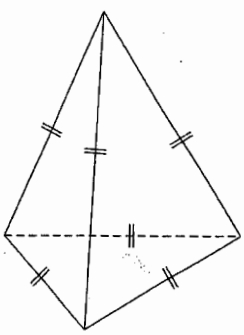
A. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Công thức tính thể tích khối đa diện

Khối đa diện	Công thức	Hình minh họa
Khối chóp	$\mathbf{V = \frac{1}{3}S.h}$ Với S là diện tích đáy, h là chiều cao khối chóp	
Khối lăng trụ	**V = S.h** Với S là diện tích đáy, h là chiều cao lăng trụ	
Khối hộp chữ nhật	**V = a.b.c** Với a, b, c là ba kích thước ba cạnh của hình hộp chữ nhật	
Khối lập phương	$\mathbf{V = a^3}$ Với a là độ dài cạnh của hình lập phương	

Khối chóp cụt	$V=\frac{h}{3}\left(S+S'+\sqrt{SS'}\right)$ Với S, S' là diện tích hai đáy, h là chiều cao khối chóp cụt	

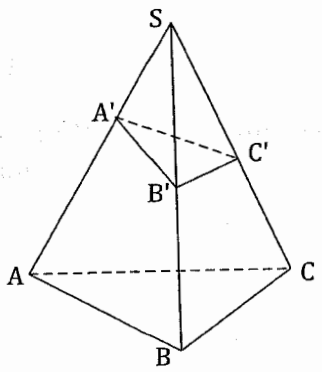
☞ **Chú ý**

Hình chóp tứ giác đều	**Hình lăng trụ đều**
Là hình chóp có ***đáy là hình vuông*** và ***hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy trùng với tâm đáy.*** 	Là hình lăng trụ ***đứng*** có ***đáy là đa giác đều.*** 
Hình chóp tam giác đều	**Tứ diện đều**
Là hình chóp có ***đáy là tam giác đều, hình chiếu vuông góc của đỉnh trùng với tâm tam giác đáy.*** 	Là hình chóp có ***4 mặt là tam giác đều*** 

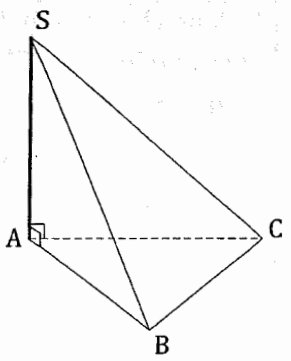
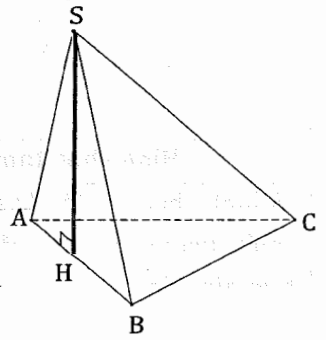
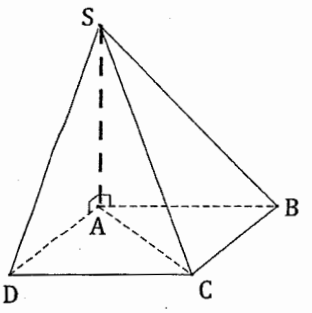
2. Tỉ số thể tích

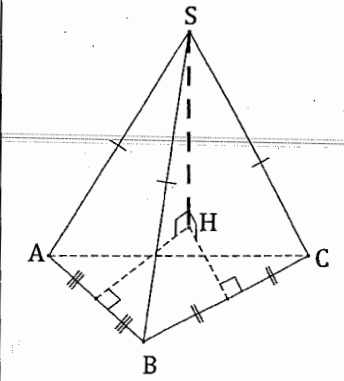
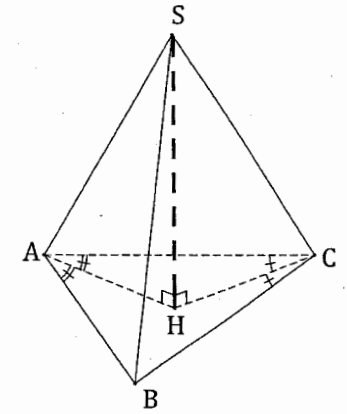
Cho hình chóp S.ABC. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' khác với S. Khi đó:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$$



☞ **Một số lưu ý khi xác định chiều cao của khối chóp**

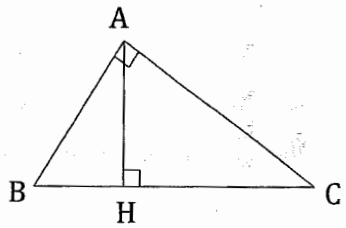
Hình chóp có ***cạnh bên vuông góc với mặt đáy*** thì cạnh đó chính là đường cao.	
Hình chóp có một ***mặt bên vuông góc với mặt đáy*** thì chiều cao của hình chóp là đường thẳng thuộc mặt bên, kẻ từ đỉnh và vuông góc với giao tuyến của mặt bên và mặt đáy.	
Hình chóp có ***hai mặt cùng vuông góc với đáy*** thì giao tuyến của hai mặt đó chính là đường cao của khối chóp.	

Hình chóp có ***các cạnh bên bằng nhau*** hoặc ***các cạnh bên cùng tạo với đáy các góc bằng nhau*** thì chân đường cao là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy.	
Hình chóp có ***các mặt bên cùng tạo với đáy các góc bằng nhau*** thì chân đường cao là tâm đường tròn nội tiếp đáy.	

☞ **Một số lưu ý khi tính thể tích:** Cho ΔABC vuông tại A, chiều cao AH

➢ ***Hệ thức lượng trong tam giác vuông***

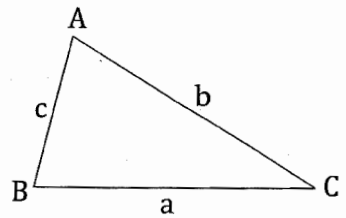
- $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (Định lí Pitago)
- $AH.BC = AB.AC$
- $AB^2 = BH.BC$; $AC^2 = CH.BC$
- $AH^2 = BH.CH$
- $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$



➢ ***Hệ thức lượng trong tam giác thường***

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$ (Định lí côsin)
- $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (Định lí sin)

(R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam ΔABC)



➢ ***Công thức tính diện tích tam giác bất kì***

$$S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}ab.\sin C = \frac{abc}{4R} = p.r = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

với $p=\frac{a+b+c}{2}$ nửa chu vi của tam giác;

R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác đó

☞ ***Chú ý:*** Diện tích tam giác đều cạnh a là: $S=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$, với chiều cao $h=\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Thể tích khối chóp

$V=\frac{1}{3}S.h$, với S là diện tích đáy, h là chiều cao khối chóp

BÀI TẬP MẪU

Cơ bản

Câu 1: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông cân tại B, BA = BC = a và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, SA = 2a. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC.

A. $V=\frac{a^3}{3}$. B. $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. C. $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$. D. $V=\frac{2a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải

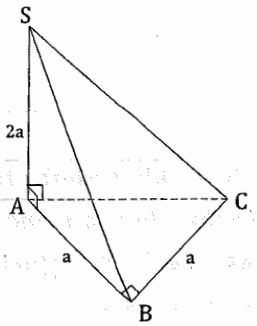
Em có: $SA\perp(ABC)\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.SA.S_{\Delta ABC}$

Diện tích đáy: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot BA\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot a\cdot a=\frac{a^2}{2}$

Vậy thể tích của khối chóp là

$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}\cdot SA\cdot S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}\cdot 2a\cdot\frac{a^2}{2}=\frac{a^3}{3}$

→ **Đáp án A**



Câu 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SB = $a\sqrt{3}$. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD.

A. $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. B. $V=\frac{a^3}{3}$. C. $V=\frac{2a^3}{3}$. D. $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Hướng dẫn giải

Em có $SA\perp(ABCD)\Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}\cdot SA\cdot S_{ABCD}$

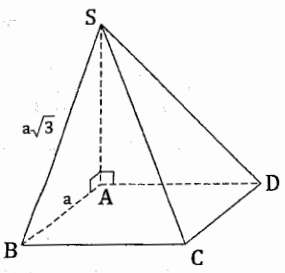
ΔSAB vuông tại A có SB = $a\sqrt{3}$, AB = a nên

$SA=\sqrt{SB^2-AB^2}=\sqrt{3a^2-a^2}=\sqrt{2a^2}=\sqrt{2}a$

Diện tích đáy là: $S_{ABCD}=a.a=a^2$

Vậy thể tích của khối chóp là:

$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}\cdot SA\cdot S_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}a\cdot a^2=\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$ → **Đáp án A**



Câu 3: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại B, AB = a, $\widehat{BAC} = 60^0$, cạnh bên SA vuông góc với đáy, SA = $a\sqrt{3}$. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC.

A. $V=\frac{4a^3}{3}$. **B.** $V=\frac{a^3}{2}$. **C.** $V=\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **D.** $V=\frac{2a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải

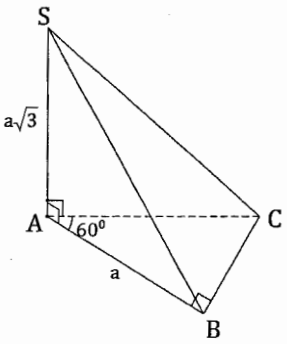
Em có: $SA\perp(ABC)\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}\cdot SA\cdot S_{\Delta ABC}$

Xét Δ ABC vuông tại B nên $\tan\widehat{BAC}=\frac{BC}{AB}$

$\Rightarrow BC=AB.\tan 60^0=\sqrt{3}a.$

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\sqrt{3}a=\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$

$\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}\cdot SA\cdot S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}a\cdot\frac{\sqrt{3}a^2}{2}=\frac{a^3}{2}$



→ **Đáp án B**

Câu 4: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B, BA = a, SA vuông góc với đáy, góc giữa cạnh bên SC tạo với mặt đáy một góc 45^0. Tính thể tích khối chóp S.ABC.

A. $V=\sqrt{6}a^3$. **B.** $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$. **C.** $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **D.** $V=\sqrt{3}a^3$.

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết ΔABC vuông cân tại B, BA = BC = a

$\Rightarrow AC=\sqrt{BA^2+BC^2}=\sqrt{2}a.$

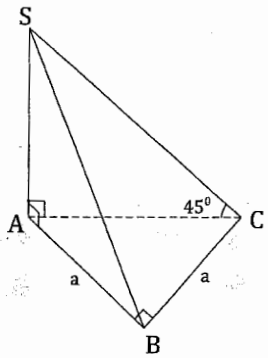
Em có: $SA\perp(ABC)\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}\cdot SA\cdot S_{\Delta ABC}$

$\Rightarrow$ Góc giữa SC và (ABC) chính là góc giữa SC, AC hay $\widehat{SCA}=45^0$.

ΔSAC vuông tại A có $\widehat{SCA}=45^0$ nên ΔSAC vuông cân tại A $\Rightarrow SA=AC=\sqrt{2}a$.

Diện tích ΔABC là: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot BA\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot a\cdot a=\frac{a^2}{2}$

Vậy thể tích của khối chóp là: $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}\cdot SA\cdot S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}a\cdot\frac{a^2}{2}=\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$.



→ **Đáp án B**

♥ Vận dụng

Câu 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, $SD=3a$, hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy là trung điểm của cạnh AB. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

A. $V=\frac{2a^3}{3}$. **B.** $V=\frac{a^3}{6}$. **C.** $V=\frac{a^3}{3}$. **D.** $V=\frac{8a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải

Gọi H là trung điểm của AB.

Theo giả thiết em suy ra được $SH \perp (ABCD)$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD}$

Em lại có: $SH \perp HD \Rightarrow \Delta SHD$ vuông tại H.

$\Rightarrow SH = \sqrt{SD^2 - DH^2} = \sqrt{SD^2 - (AD^2 + AH^2)} = 2a$

Diện tích đáy là: $S_{ABCD} = 2a \cdot 2a = 4a^2$

Vậy thể tích khối chóp là:

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot 4a^2 = \frac{8a^3}{3}$

→ **Đáp án D**

Câu 6: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, mặt bên (SBC) là tam đều cạnh a và vuông với mặt đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC.

A. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **B.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{24}$. **C.** $V = \frac{a^3}{24}$. **D.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Em có $(SBC) \perp (ABC)$; $(SBC) \cap (ABC) = BC$. Trong (SBC), kẻ $SH \perp BC$ $(H \in BC)$ thì

$SH \perp (ABC) \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\Delta ABC}$

Do ΔSBC đều nên SH cũng là đường trung tuyến.

Em có: $AH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a$.

ΔSBC đều nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = \frac{a^2}{4}$

Vậy thể tích khối chóp là:

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{\sqrt{3}a^3}{24}$

→ **Đáp án B**

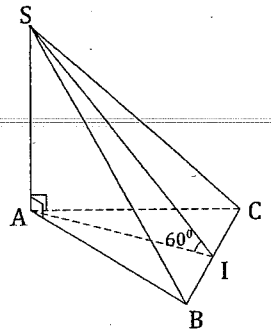
Câu 7: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy (ABC) một góc bằng 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC.

A. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **B.** $V = \frac{2a^3}{3}$. **C.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **D.** $V = \frac{a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm của BC, $AI = \frac{\sqrt{3}a}{2}$; $S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

Em có $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp SI$



Em có: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SI \subset (SBC), SI \perp BC \\ AI \subset (ABC), AI \perp BC \end{cases}$

$\Rightarrow$ Góc giữa (SBC) và (ABC) chính là góc giữa SI và AI

Hay $\widehat{SIA} = 60^0$.

Xét ΔSAI vuông tại A, $\tan \widehat{SIA} = \dfrac{SA}{AI} \Rightarrow SA = \tan 60^0 . AI = \dfrac{3a}{2}$.

Thể tích khối chóp là: $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot SA . S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3a}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$.

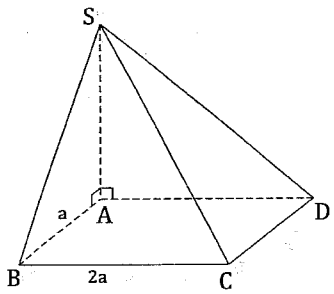
$\rightarrow$ **Đáp án A**

Câu 8: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật có cạnh AB = a, BC = 2a. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = \sqrt{11}a$. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD.

A. $V = \dfrac{2\sqrt{11}a^3}{3}$. **B.** $V = \dfrac{2\sqrt{11}a^3}{6}$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{11}a^3}{6}$. **D.** $V = 2\sqrt{11}a^3$.

Hướng dẫn giải

Em có: $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD)$



$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD}$

$S_{ABCD} = AB \cdot BC = a \cdot 2a = 2a^2$

Thể tích khối chóp là:

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \sqrt{11}a \cdot 2a^2 = \dfrac{2\sqrt{11}a^3}{3}$.

$\rightarrow$ **Đáp án A**

Câu 9: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = \sqrt{2}a$, SA = SB = SC. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC.

A. $V = \sqrt{3}a^3$. **B.** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $V = \dfrac{a^3}{3}$. **D.** $V = \dfrac{a^3}{6}$.

Hướng dẫn giải

Gọi H là trung điểm của BC $\Rightarrow$ HA = HB = HC

Nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Mặt khác: SA = SB = SC nên SH là trục của đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \Rightarrow SH \perp (ABC)$

$\Rightarrow$ Hình chiếu vuông góc của SA trên (ABC) là AH.

$\Rightarrow$ Góc giữa SA và (ABC) chính là góc giữa SA và AH hay $\widehat{SAH} = 60^0$.

ΔABC vuông cân tại A: $AC = AB = \sqrt{2}a$

$\Rightarrow BC = 2a,\ AH = a$

ΔSHA vuông tại H: $SH = AH \cdot \tan 60^0 = \sqrt{3}a.$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}a \cdot \sqrt{2}a = a^2$

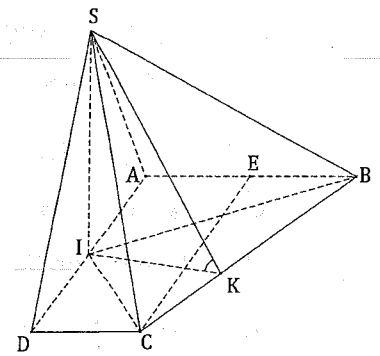
$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}a \cdot a^2 = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}.$

$\rightarrow$ Đáp án B

Câu 10: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D; AB = AD = 2a, CD = a, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD.

A. $V = \frac{3\sqrt{15}a^3}{5}.$ **B.** $V = \frac{\sqrt{15}a^3}{5}.$ **C.** $V = \frac{\sqrt{5}a^3}{15}.$ **D.** $V = \frac{2\sqrt{15}a^3}{5}.$

Hướng dẫn giải



$$\begin{cases}(SBI) \perp (ABCD) \\ (SCI) \perp (ABCD) \\ (SBI) \cap (SCI) = SI\end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$$

Em có: $S_{ABCD} = \frac{2a + a}{2} \cdot 2a = 3a^2$

Kẻ $IK \perp BC$, $BC \perp SI \Rightarrow BC \perp (SIK) \Rightarrow BC \perp SK$

$\Rightarrow$ Góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ chính là góc giữa SK và IK hay $\widehat{SKI} = 60^0$.

$S_{\Delta ABI} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot IA = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a = a^2$

Mặt khác: $S_{\Delta CDI} = \frac{1}{2}CD.ID = \frac{a^2}{2};\ S_{\Delta ICB} = S_{ABCD} - S_{\Delta ABI} - S_{\Delta CDI} = \frac{3a^2}{2}.$

Gọi E là trung điểm của AB $\Rightarrow BC = \sqrt{CE^2 + EB^2} = \sqrt{(AB - CD)^2 + AD^2} = \sqrt{5}a.$

$\Rightarrow IK = \frac{2S_{\Delta ICB}}{BC} = \frac{3\sqrt{5}a}{5};\ SI = IK.\tan 60^0 = \frac{3\sqrt{15}a}{5}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SI \cdot S_{ABCD} = \frac{3\sqrt{15}a^3}{5}.$

$\rightarrow$ Đáp án A

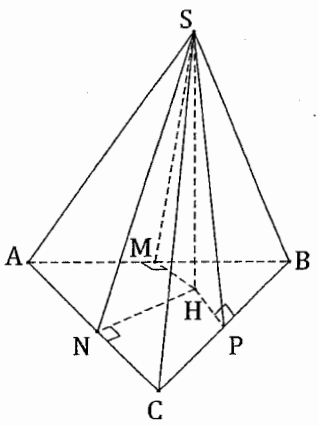
*** Nâng cao**

Câu 11: Cho hình chóp S.ABC có $AB=2a, AC=4a, BC=3a$. Gọi H là hình chiếu của S nằm trong tam giác ABC. Các mặt bên tạo với đáy một góc 45^0. Tính thể tích khối chóp S.ABC.

A. $V=\frac{\sqrt{15}a^3}{6}$. B. $V=\frac{3\sqrt{15}a^3}{4}$. C. $V=\frac{15a^3}{8}$. D. $V=\frac{5a^3}{8}$.

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết, các mặt bên tạo với đáy một góc 45^0 nên hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) chính là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC hay H là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.



$\Rightarrow SH\perp(ABC)\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC}$

ΔABC có $AB=2a; AC=4a; BC=3a$. Áp dụng công thức Hê-rông em tính được $p=\frac{9a}{2}$ và $S_{\Delta ABC}=\frac{3\sqrt{15}a^2}{4}$

Em lại có: $S_{\Delta ABC}=p.r$ với r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Từ H, em kẻ HM, HN, HP lần lượt vuông góc với AB, AC, BC thì

$r=HM=HN=HP=\frac{S_{\Delta ABC}}{p}=\frac{\sqrt{15}a}{6}$.

Mà $HN\perp AC; SH\perp AC\Rightarrow AC\perp(SHN)\Rightarrow AC\perp SN$.

$\Rightarrow$ Góc giữa (SAC) và (ABC) chính là góc giữa SN và HN hay $\widehat{SNH}=45^0$.

$\Rightarrow \Delta SNH$ vuông cân tại H $\Rightarrow SH=HN=\frac{\sqrt{15}a}{6}$.

$\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{15}a}{6}.\frac{3\sqrt{15}a^2}{4}=\frac{5a^3}{8}$.

→ Đáp án D

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 12: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA=\sqrt{3}a$. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC.

A. $V=2\sqrt{3}a^3$. B. $V=\frac{2a^3}{3}$. C. $V=\frac{a^3}{4}$. D. $V=\frac{a^3}{3}$.

Câu 13: Cho tứ diện ABCD có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; AB = 6a, AC = 7a, AD = 4a. Gọi M,N,P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, DB. Tính thể tích V của tứ diện AMNP.

A. $V=\frac{7a^3}{2}$. B. $V=\frac{2a^3}{3}$. C. $V=7a^3$. D. $V=\frac{28a^3}{3}$.

Câu 14: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh 2a và thể tích bằng a^3. Chiều cao h của hình chóp đã cho là

A. $h=\frac{\sqrt{3}a}{6}$. **B.** $h=\frac{\sqrt{3}a}{2}$. **C.** $h=\frac{\sqrt{3}a}{3}$. **D.** $h=\sqrt{3}a$.

Câu 15: Hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng 2a có thể tích là

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **B.** $\frac{\sqrt{33}a^3}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{11}a^3}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{11}a^3}{12}$.

Câu 16: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45^0. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD.

A. $V=2\sqrt{3}a^3$. **B.** $V=\frac{2a^3}{3}$. **C.** $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **D.** $V=\frac{a^3}{3}$.

Câu 17: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc bằng 30^0. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD.

A. $V=\sqrt{3}a^3$. **B.** $V=\frac{\sqrt{6}a^3}{18}$. **C.** $V=\frac{a^3}{6}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 18: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác đều cạnh 2a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp S.ABCD biết rằng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy một góc 30^0.

A. $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **B.** $V=\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $V=2\sqrt{3}a^3$. **D.** $V=\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 19: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, BA = 3a, BC = 4a, mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB=2\sqrt{3}a$ và $\widehat{SBC}=30^0$. Tính thể tích khối chóp S.ABC theo a.

A. $V=2\sqrt{3}a^3$. **B.** $V=\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $V=\sqrt{3}a^3$. **D.** $V=\frac{a^3}{3}$.

Câu 20: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = a, $\widehat{ABC}=60^0$. Hình chiếu vuông góc của S trên cạnh BC là điểm H sao cho BC = 4BH, góc giữa SA và đáy bằng 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC.

A. $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **B.** $V=\frac{a^3}{3}$. **C.** $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Câu 21: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho HA = 2HB. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC.

A. $V=\frac{\sqrt{7}a^3}{36}$. **B.** $V=\frac{\sqrt{7}a^3}{24}$. **C.** $V=\frac{\sqrt{21}a^3}{12}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{7}a^3}{12}$.

Câu 22: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD; H là giao điểm của CN với DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH=2a\sqrt{3}$. Tính theo a thể tích khối chóp S.CDNM.

A. $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$. **B.** $V=\frac{5\sqrt{3}a^3}{12}$. **C.** $V=\frac{2\sqrt{3}a^3}{24}$. **D.** $V=\frac{5\sqrt{3}a^3}{24}$.

Câu 23: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Gọi điểm M thuộc cạnh AB sao cho MA = 2MB và hình chiếu vuông góc của S trên mặt (ABC) là trung điểm của CM. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích của khối chóp S.ABC theo a.

A. $V=\frac{\sqrt{7}a^3}{24}$. **B.** $V=\frac{\sqrt{7}a^3}{14}$. **C.** $V=\frac{a^3}{24}$. **D.** $V=\frac{a^3}{14}$.

Câu 24: Cho hình chóp đều S.ABCD có đáy bằng 2a, khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD bằng $\sqrt{3}a$. Thể tích khối chóp đều S.ABCD bằng

A. $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $V=\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $V=\sqrt{3}a^3$. **D.** $V=4\sqrt{3}a^3$.

Câu 25: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30^0. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\frac{\sqrt{6}a^3}{3}$. **B.** $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **C.** $V=\frac{2a^3}{3}$. **D.** $V=\sqrt{2}a^3$.

Câu 26: Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với đáy, SA = 4, AB = 6, BC = 10 và CA = 8. Tính thể tích của khối chóp S.ABC.

A. V = 40. **B.** V = 192. **C.** V = 32. **D.** V = 24.

Câu 27: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\frac{a^3}{2}$. **B.** $V=a^3$. **C.** $V=\frac{\sqrt[3]{3}a^3}{9}$. **D.** $V=\frac{a^3}{3}$.

Câu 28: Cho tứ diện ABCD có cạnh AB = x và các cạnh còn lại bằng $2\sqrt{3}$. Tìm x để thể tích khối tứ diện ABCD đạt giá trị lớn nhất.

A. $x=\sqrt{14}$. **B.** $x=\sqrt{6}$. **C.** $x=2\sqrt{3}$. **D.** $x=3\sqrt{2}$.

Câu 29: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông cân tại A, SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC), tính $\cos\alpha$ khi thể tích khối chóp S.ABC nhỏ nhất.

A. $\cos\alpha=\frac{1}{3}$. **B.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\cos\alpha=\frac{2}{3}$.

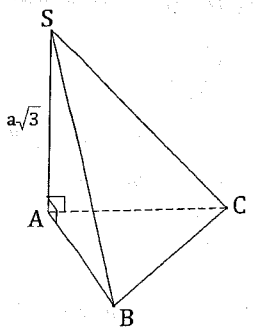
ĐÁP ÁN

12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	C	D	D	C	D	C	A	D
21	22	23	24	25	26	27	28	29
D	B	A	B	B	C	D	D	B

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 12:

Em có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow$ SA là chiều cao của hình chóp.



$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}$

Diện tích đáy: $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích của khối chóp là:

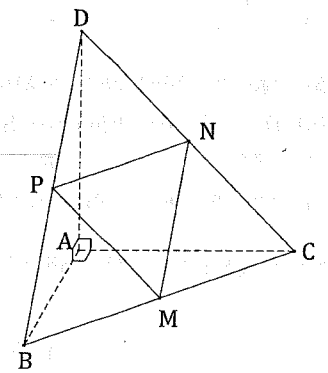
$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}\sqrt{3}a.\frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{a^3}{4}$.

$\rightarrow$ **Đáp án C**

Câu 13:

Do AB, AC, AD đôi một vuông góc nên em có:

$V_{A.BCD} = \frac{1}{3}AD.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{6}AD.AB.AC = \frac{1}{6}4a.6a.7a = 28a^3$.



Vì M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD, BD nên em suy ra được $S_{\Delta MNP} = \frac{1}{4}S_{\Delta BCD}$.

Vậy thể tích của khối tứ diện AMNP là:

$V_{A.MNP} = \frac{1}{3}.d(A,(MNP)).S_{\Delta MNP} = \frac{1}{3}.d(A,(MNP)).\frac{1}{4}.S_{\Delta BCD}$

$= \frac{1}{4}V_{A.BCD} = 7a^3$. $\rightarrow$ **Đáp án C**

Câu 14:

Em có: $AB = BC = CA = 2a, V_{S.ABC} = a^3$.

Diện tích của tam giác đều cạnh 2a là: $S_{ABC} = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}a^2$.

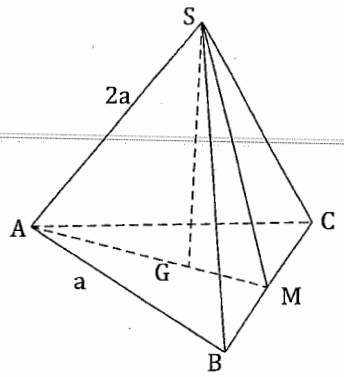
$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}h.S_{\Delta ABC} \Rightarrow h = \frac{3V}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3a^3}{\sqrt{3}a^2} = \sqrt{3}a$. $\rightarrow$ **Đáp án D**

Câu 15:

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, S.ABC là chóp tam giác đều $\Rightarrow \begin{cases} SA = SB = SC = 2a \\ AB = AC = BC = a \\ SG \perp (ABC) \end{cases}$

$\Rightarrow$ SG là đường cao của hình chóp.

$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SG \cdot S_{\Delta ABC}$



Em có: $S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$; $AM = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

$\Rightarrow AG = \frac{2}{3} AM = \frac{\sqrt{3}a}{3}$.

$\Rightarrow SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{\sqrt{11}a}{\sqrt{3}}$

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SG \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{11}a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{\sqrt{11}a^3}{12}$. $\rightarrow$ **Đáp án D**

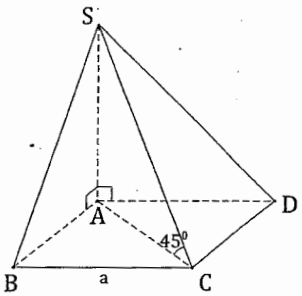
Câu 16:

$SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$.

$\Rightarrow$ Góc giữa SC và $(ABCD)$ chính là góc giữa SC và AC hay $\widehat{SCA} = 45^0$.

Suy ra $SA = AC = a\sqrt{2}$

Mà diện tích đáy: $S_{ABCD} = a.a = a^2$



$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3} \sqrt{2}a.a^2 = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

$\rightarrow$ **Đáp án C**

Câu 17:

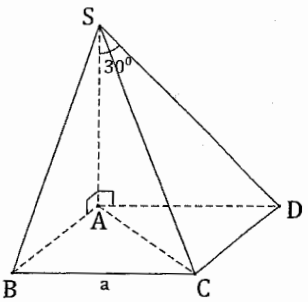
Theo giả thiết em có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AD$,

Mà $AD \perp AB \Rightarrow AD \perp (SAB)$.

$\Rightarrow$ SA là hình chiếu vuông góc của SD trên mặt phẳng (SAB)

$\Rightarrow$ Góc giữa SD và (SAB) chính là góc giữa SD và SA hay $\widehat{DSA} = 30^0$.

$\Rightarrow SA = a.\cot 30^0 = \sqrt{3}a$; $S_{ABCD} = a.a = a^2$

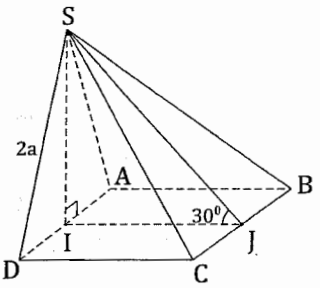


$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \sqrt{3}a \cdot a^2 = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. $\rightarrow$ **Đáp án D**

Câu 18:

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC $\Rightarrow SI = \frac{2\sqrt{3}a}{2} = \sqrt{3}a$.

Trong (SAD), $\begin{cases} SI \perp AD \\ (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAD) \cap (ABCD) = AD \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD).$



Em có: $(SBC) \cap (ABCD) = BC.$

Trong (SBC), $SJ \perp BC$ và trong $(ABCD)$ có $IJ \perp BC$

$\Rightarrow$ Góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ chính là góc giữa SJ với IJ hay $\widehat{SJI} = 30^0.$

Xét ΔSIJ vuông tại I $\Rightarrow \tan \widehat{SJI} = \dfrac{SI}{IJ} \Rightarrow IJ = \dfrac{SI}{\tan 30^0} = 3a.$

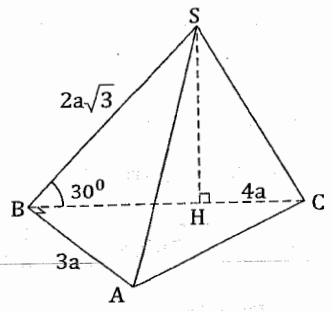
$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SI \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} SI \cdot AD \cdot IJ = \dfrac{1}{3} \sqrt{3}a \cdot 2a \cdot 3a = 2\sqrt{3}a^3.$

$\rightarrow$ **Đáp án C**

Câu 19:

Hạ $SH \perp BC$ $(H \in BC)$, em có:

$\begin{cases} SH \perp BC \\ (SBC) \perp (ABC) \\ (SBC) \cap (ABC) = BC \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC)$



$SH = SB.\sin \widehat{SBC} = 2\sqrt{3}a.\sin 30^0 = \sqrt{3}a.$

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} BA \cdot BC = \dfrac{1}{2} 3a \cdot 4a = 6a^2.$

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} SH \cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3} \sqrt{3}a \cdot 6a^2 = 2\sqrt{3}a^3.$ $\rightarrow$ **Đáp án A**

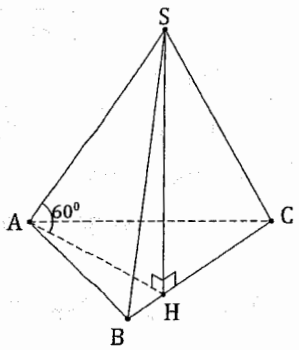
Câu 20:

Em có: $SH \perp (ABC)$

$\Rightarrow$ AH là hình chiếu của SA trên (ABC)

$\Rightarrow$ Góc giữa SA và (ABC) chính là góc giữa SA và AH

hay $\widehat{SAH} = 60^0.$



Em lại có: $BC = \dfrac{AB}{\cos \widehat{ABC}} = \dfrac{a}{\cos 60^0} = 2a;$ $BH = \dfrac{a}{2}$

$AH^2 = AB^2 + BH^2 - 2AB.BH.\cos 60^0 = \dfrac{3a^2}{4} \Rightarrow AH = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} BA.BC.\sin \widehat{ABC} = \dfrac{1}{2}.a.2a.\sin 60^0 = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{2}.$

$SH = AH.\tan 60^0 = \dfrac{3a}{2}.$

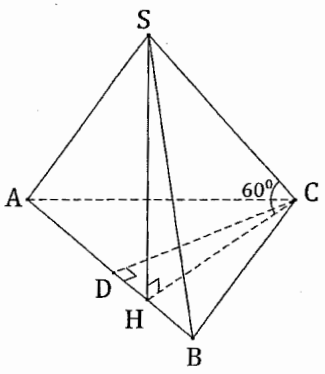
$\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}a^2}{2}.\frac{3a}{2}=\frac{\sqrt{3}a^3}{4}.$ → Đáp án D

Câu 21:

Em có: $SH\perp(ABC)\Rightarrow$ HC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (ABC).

$\Rightarrow$ Góc giữa SC và (ABC) chính là góc giữa SC và HC hay $\widehat{SCH}=60^0$.

Gọi D là trung điểm của AB, $DA=\frac{a}{2}$; $CD=\frac{\sqrt{3}a}{2}$;



$HA=\frac{2}{3}AB=\frac{2}{3}a.$

$DH=HA-DA=\frac{2a}{3}-\frac{a}{2}=\frac{a}{6}$; $HC=\sqrt{HD^2+CD^2}=\frac{\sqrt{7}a}{3}$;

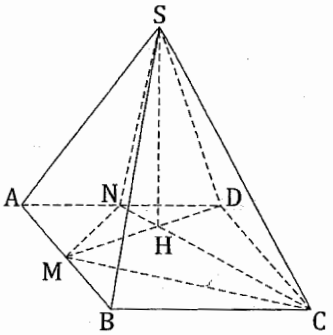
$SH=HC.\tan 60^0=\frac{\sqrt{21}a}{3}$; $S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH\cdot S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{21}a}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}a^2}{4}=\frac{\sqrt{7}a^3}{12}.$

→ Đáp án D

Câu 22:

Em có: $SH\perp(ABCD)$, suy ra SH là chiều cao của khối chóp $\Rightarrow V_{S.CDNM}=\frac{1}{3}SH.S_{CDNM}$.



$S_{CDNM}=S_{ABCD}-S_{AMN}-S_{BCM}$

$=AB^2-\frac{1}{2}AM\cdot AN-\frac{1}{2}BM\cdot BC=a^2-\frac{a^2}{8}-\frac{a^2}{4}=\frac{5a^2}{8}.$

$V_{S.CDNM}=\frac{1}{3}SH\cdot S_{CDNM}=\frac{1}{3}2\sqrt{3}a\cdot\frac{5a^2}{8}=\frac{5\sqrt{3}a^3}{12}.$

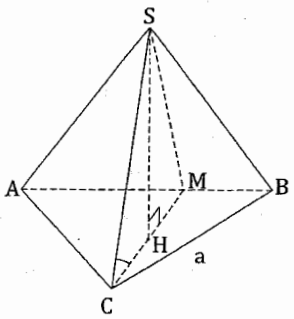
→ Đáp án B

Câu 23:

Gọi H là trung điểm của CM $\Rightarrow SH\perp(ABC)$.

$\Rightarrow$ HC là hình chiếu của SC trên (ABC).

$\Rightarrow$ Góc giữa SC và (ABC) chính là góc giữa SC, CH hay $\widehat{SCH}=60^0$.



Em có: ΔABC đều cạnh a nên $S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

Xét tam giác BCM em có:

$CM^2=BC^2+BM^2-2BC\cdot BM\cdot\cos 60^0=a^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2-2\cdot a\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7a^2}{9}$

$\Rightarrow CM=\frac{\sqrt{7}a}{3}\Rightarrow CH=\frac{1}{2}CM=\frac{\sqrt{7}a}{6}.$

Em lại có: $SH=CH\cdot\tan 60^0=\frac{\sqrt{21}a}{6}.$

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{21}a}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}a^2}{4}=\frac{\sqrt{7}a^3}{24}.$ → **Đáp án A**

Câu 24:

Em có $CD//AB\Rightarrow CD//(SAB)$

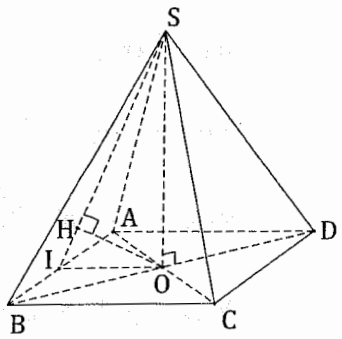
$\Rightarrow d(CD,SA)=d(CD,(SAB))=d(C,(SAB))=2d(O,(SAB))$

$\Rightarrow d(O,(SAB))=\frac{d(CD,SA)}{2}=\frac{\sqrt{3}a}{2}$

Gọi I là trung điểm của $AB\Rightarrow SI\perp AB$ (ΔSAB cân tại S).

Dựng $OH\perp SI$, khi đó em có:

$\begin{cases}OH\perp AB(AB\perp(SOI))\\OH\perp SI\end{cases}\Rightarrow OH\perp(SAB)$



$\Rightarrow d(O,(SAB))=OH=\frac{\sqrt{3}a}{2}$

Tam giác SOI vuông tại O em có : $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OI^2}\Rightarrow SO=\frac{OH.OI}{\sqrt{OI^2-OH^2}}=\sqrt{3}a.$

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}\sqrt{3}a.4a^2=\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}.$

→ **Đáp án B**

Câu 25:

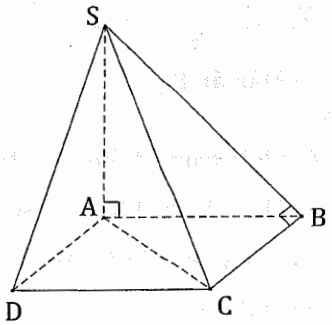
Em có: $\begin{cases}BC\perp BA\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB$

$\Rightarrow$ SB là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (SAB)

$\Rightarrow$ Góc giữa SC và (SAB) chính là góc giữa SC và SB hay $\widehat{CSB}=30^0$.

Xét ΔCSB vuông tại B em có

$\tan\widehat{CSB}=\frac{BC}{SB}\Rightarrow SB=\frac{BC}{\tan 30^0}=\sqrt{3}a.$



Xét ΔSAB vuông tại A: $SA=\sqrt{SB^2-AB^2}=\sqrt{2}a;\ S_{ABCD}=a.a=a^2.$

$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA\cdot S_{ABCD}=\frac{1}{3}\sqrt{2}a\cdot a^2=\frac{\sqrt{2}a^3}{3}.$

→ **Đáp án B**

Câu 26:

Em thấy $BC^2 = AC^2 + AB^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A

Nên $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2}6 \cdot 8 = 24$

$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}4 \cdot 24 = 32.$

→ **Đáp án C**

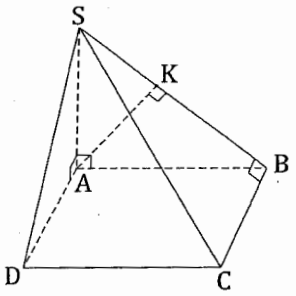
Câu 27:

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3}SA \cdot BA \cdot BC$

Trong (SAB), hạ $AK \perp SB$.

Em lại có: $\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AK$

$\Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = AK = \frac{\sqrt{2}a}{2}$



Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAB em được:

$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow \frac{2}{a^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{a^2} \Rightarrow SA = a$

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA \cdot BA \cdot BC = \frac{1}{3}a \cdot a \cdot a = \frac{a^3}{3}.$

→ **Đáp án D**

Câu 28:

Gọi M, N là trung điểm của AB, CD.

ΔABC cân tại C nên $AB \perp MC$.

ΔABD cân tại D nên $AB \perp MD$.

$\Rightarrow AB \perp (MCD)$

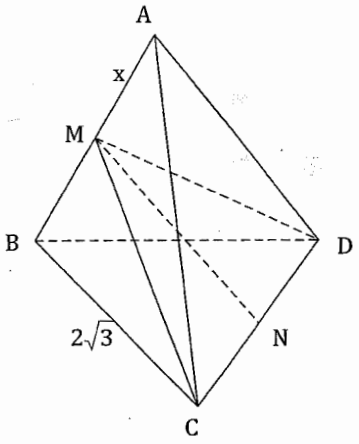
$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3}AM.S_{\Delta MCD} + \frac{1}{3}BM.S_{\Delta MCD} = \frac{1}{3}AB \cdot S_{\Delta MCD}$

$\Delta CBA = \Delta DBA(c-c-c) \Rightarrow MC = MD = \sqrt{12 - \frac{x^2}{4}}$

$\Rightarrow \Delta MCD$ cân tại M.

$\Rightarrow MN \perp CD, MN = \sqrt{CM^2 - CN^2} = \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}}$

$\Rightarrow S_{\Delta MCD} = \frac{1}{2}MN.CD = \sqrt{3}.\sqrt{9 - \frac{x^2}{4}}$



$V_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}}{3}x \cdot \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 2\frac{x}{2} \cdot \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}} \le \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{x^2}{4} + 9 - \frac{x^2}{4}\right) = 3\sqrt{3}$ (Theo BĐT Cauchy)

Đẳng thức xảy ra $\frac{x}{2}=\sqrt{9-\frac{x^2}{4}}\Leftrightarrow x=3\sqrt{2}.$ → **Đáp án D**

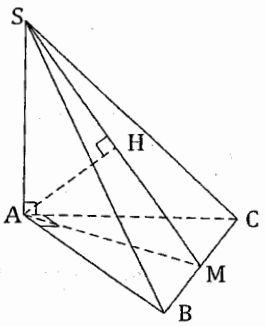
Câu 29:

Gọi M là trung điểm của $BC\Rightarrow AM\perp BC$

Kẻ $AH\perp SM\ (H\in SM)$

Vì $\begin{cases}BC\perp AM\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAM)\Rightarrow BC\perp AH$

Em có: $\begin{cases}AH\perp SM\\AH\perp BC\end{cases}\Rightarrow AH\perp(SBC)\Rightarrow AH=d(A,(SBC))=3.$



Mà $(SBC)\cap(ABC)=BC, SM\perp BC, AM\perp BC.$

$\Rightarrow$ Góc giữa (SBC) và (ABC) chính là góc giữa SM và AM

hay $\widehat{SMA}=\alpha.$

Đặt AB = AC = x, SA = y

$$\Rightarrow\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{9}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AM^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$$

$$=\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\ge3\sqrt[3]{\frac{1}{y^2}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x^2}}\ge3\sqrt[3]{\frac{1}{(y.x^2)^2}}\ (\text{BĐT}-\text{Cauchy})\Rightarrow x^2y\ge81\sqrt{3}$$

Thể tích của khối chóp S.ABC là:

$$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA\cdot S_{ABC}=\frac{1}{3}y\cdot\frac{1}{2}x\cdot x=\frac{1}{6}x^2y\ge\frac{1}{6}\cdot81\sqrt{3}\ge\frac{27\sqrt{3}}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=3\sqrt{3}$

$$\Rightarrow AB=AC=SA\ ,AM=\frac{3\sqrt{6}}{2},SM=\frac{9\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{AM}{SM}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

→ **Đáp án B**

Dạng 2: Thể tích khối lăng trụ

V = S.h, với S là diện tích đáy, h là chiều cao lăng trụ

BÀI TẬP MẪU

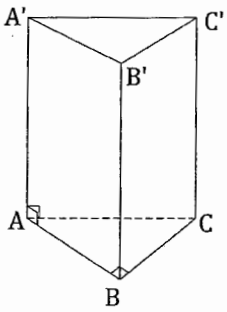
Cơ bản

Câu 30: Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, AB = 2a, AA' = $\sqrt{2}$a. Thể tích khối lăng trụ là

A. $V=\sqrt{2}a^3$. **B.** $V=4\sqrt{2}a^3$. **C.** $V=2a^3$. **D.** $V=2\sqrt{2}a^3$.

Hướng dẫn giải

Em có $AA' \perp (ABC) \Rightarrow AA'$ là chiều cao của lăng trụ.



$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC}$

Diện tích của tam giác ABC là:

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BA\cdot BC=\frac{1}{2}2a\cdot 2a=2a^2$

Thể tích của khối lăng trụ là:

$V_{ABC.A'B'C'}=AA'\cdot S_{\Delta ABC}=\sqrt{2}a\cdot 2a^2=2\sqrt{2}a^3$.

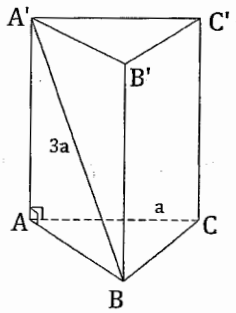
→ **Đáp án D**

Câu 31: Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, A'B = 3a. Thể tích khối lăng trụ bằng

A. $V=\frac{\sqrt{6}a^3}{2}$. **B.** $V=4\sqrt{6}a^3$. **C.** $V=\frac{\sqrt{6}a^3}{3}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{6}a^3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Em có $AA' \perp (ABC) \Rightarrow AA'$ là chiều cao lăng trụ.



Diện tích tam giác ABC là: $S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

Xét Δ ABA' vuông tại A có

$AA'=\sqrt{A'B^2-AB^2}=\sqrt{9a^2-a^2}=2\sqrt{2}a$

Thể tích của khối lăng trụ là:

$V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{\Delta ABC}=2a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}a^2}{4}=\frac{\sqrt{6}a^3}{2}$

→ **Đáp án A**

Câu 32: Cho hình lăng trụ xiên ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh $2\sqrt{2}a$ và $A'A=\sqrt{3}a$. Hình chiếu vuông góc của điểm A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC. Thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' theo a là

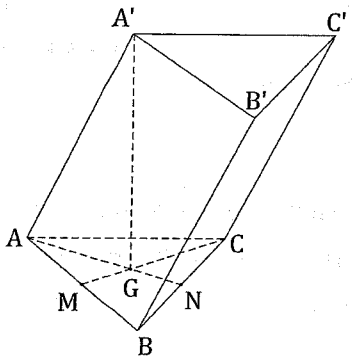
A. $V=\frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$. **B.** $V=\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $V=\frac{2a^3}{3}$. **D.** $V=2a^3$.

Hướng dẫn giải

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC.

Khi đó $G = AN \cap CM$ là trọng tâm của ΔABC.

Theo giả thiết em có $A'G \perp (ABC)$



$$\Rightarrow AN = \left(2a\sqrt{2}\right).\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}a \Rightarrow AG = \frac{2}{3}AN = \frac{2\sqrt{6}a}{3}.$$

Xét $\Delta A'AG$, có $A'G = \sqrt{A'A^2 - AG^2} = \frac{\sqrt{3}a}{3}$

$$S_{\Delta ABC} = \left(2\sqrt{2}a\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}a^2.$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = A'G \cdot S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}a}{3} \cdot 2\sqrt{3}a^2 = 2a^3. \quad \rightarrow \textbf{Đáp án D}$$

♥ Vận dụng

Câu 33: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AB, góc giữa đường thẳng A'C và mặt đáy bằng 60^0. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C'.

A. $V = \frac{3a^3}{8}$. **B.** $V = \frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $V = \frac{3\sqrt{3}a^3}{24}$. **D.** $V = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

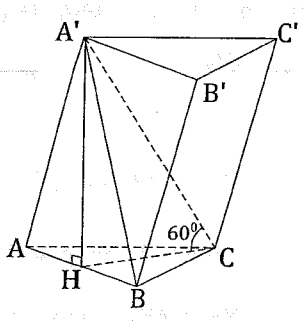
Hướng dẫn giải

Gọi H là trung điểm của AB $\Rightarrow A'H \perp (ABC)$

HC là hình chiếu vuông góc của A'C trên (ABC).

$\Rightarrow$ Góc giữa A'C và (ABC) chính là góc giữa A'C và HC

hay $\widehat{A'CH} = 60^0$.



Vì ΔABC đều cạnh a nên $CH = \frac{\sqrt{3}a}{2}$; $S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

Mặt khác: $A'H = CH.\tan\widehat{A'CH} = \frac{\sqrt{3}a}{2}.\tan 60^0 = \frac{3a}{2}$.

$$V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8} \rightarrow \textbf{Đáp án D}$$

Câu 34: Cho hình lăng trụ đều ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60^0. Tính theo a thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C'.

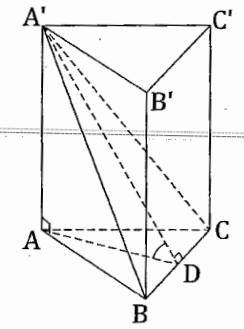
A. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **B.** $V = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. **C.** $V = \frac{3a^3}{8}$. **D.** $V = \frac{3\sqrt{3}a^3}{24}$.

Hướng dẫn giải

Em có: $AA' \perp (ABC) \Rightarrow AA'$ là chiều cao của lăng trụ.

Gọi D là trung điểm của BC thì $BC \perp AD$ và $BC \perp A'D$.

$\Rightarrow$ Góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) chính là góc giữa A'D và AD hay $\widehat{A'DA} = 60^0$.



Vì ΔABC đều cạnh a nên $AD = \frac{\sqrt{3}a}{2}$; $S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$

Do đó: $AA' = AD.\tan\widehat{A'DA} = \frac{\sqrt{3}a}{2}.\tan 60^0 = \frac{3a}{2}$

$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC} = \frac{3a}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

→ Đáp án B

*** Nâng cao**

Câu 35: Cho hình lăng trụ ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình chữ nhật, AB = a, AD = $\sqrt{3}$a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **B.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **C.** $V = \frac{3a^3}{2}$. **D.** $V = \frac{a^3}{2}$.

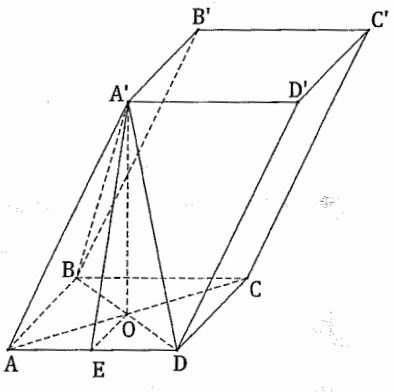
Hướng dẫn giải

Gọi O là giao điểm của AC và BD

$\Rightarrow A'O \perp (ABCD)$, gọi E là trung điểm của AD

$\Rightarrow OE \perp AD$, $A'O \perp AD \Rightarrow A'E \perp AD$.

$\Rightarrow$ Góc giữa $(ADD'A')$ và $(ABCD)$ chính là góc giữa A'E và OE hay $\widehat{A'EO} = 60^0$.



$A'O = OE.\tan\widehat{A'EO} = \frac{AB}{2}\cdot\tan 60^0 = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

Diện tích đáy $S_{ABCD} = AB\cdot AD = \sqrt{3}a^2$

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'O.S_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}a}{2}\cdot\sqrt{3}a^2 = \frac{3a^3}{2}$.

→ Đáp án C

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 36: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác cân tại A, AB = a, $\widehat{BAC} = 120^0$, AB' = 2a. Tính theo a thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C'.

A. $V = \frac{3a^3}{8}$. **B.** $V = \frac{3a^3}{4}$. **C.** $V = \frac{3a^3}{2}$. **D.** $V = \frac{a^3}{8}$.

Câu 37: Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, AC=2a. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AC, đường thẳng A'B tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 30^0. Thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' theo a là

A. $V = \sqrt{3}a^3$. **B.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **D.** $V = \frac{3a^3}{4}$.

Câu 38: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A 'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60^0, A'A = A'B = A'C. Thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' là

A. $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$. B. $V=\frac{a^3}{8}$. C. $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. D. $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$.

Câu 39: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có AC = a, BC = 2a, $\widehat{ACB}=120^0$ và đường thẳng A'C tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ góc 30^0. Tính theo a thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C'.

A. $V=\frac{\sqrt{105}a^3}{14}$. B. $V=\frac{\sqrt{15}a^3}{21}$. C. $V=\frac{\sqrt{105}a^3}{7}$. D. $V=\frac{\sqrt{15}a^3}{7}$.

Câu 40: Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh 2cm, diện tích tam giác A'BC là 4cm. Thể tích khối lăng trụ là

A. $V=2\sqrt{39}\,cm^3$. B. $V=\sqrt{39}\,cm^3$. C. $V=2\sqrt{3}\,cm^3$. D. $V=3\sqrt{2}\,cm^3$.

Câu 41: Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của A' xuống (ABC) là tâm O đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Biết AA' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 45^0. Thể tích khối lăng trụ là

A. $V=\frac{a^3}{4}$. B. $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. C. $V=\frac{a^3}{3}$. D. $V=\frac{a^3}{8}$.

Câu 42: Cho khối lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' mà mặt bên ABB'A' có diện tích là 4. Khoảng cách từ CC' đến mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng $6\sqrt{3}$. Tính thể tích lăng trụ đó.

A. $V=4\sqrt{3}$ B. V=10. C. $V=12\sqrt{3}$. D. $V=8\sqrt{3}$.

Câu 43: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, AC = $\sqrt{2}$ A'C = 5. Biết A'C tạo với đáy một góc 60^0. Thể tích khối lăng trụ là

A. $V=\frac{5\sqrt{3}}{3}$. B. $V=\frac{5\sqrt{3}}{4}$. C. $V=\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $V=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Câu 44: Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách giữa đường thẳng A'B' và mặt phẳng $(C'AB)$ bằng $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. Thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' theo a là

A. $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{8}$. B. $V=\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. C. $V=\frac{3\sqrt{2}a^3}{5}$. D. $V=\frac{3\sqrt{2}a^3}{8}$.

Câu 45: Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' có các cạnh đáy lần lượt là 19, 20, 37 và đường cao có độ dài bằng trung bình nhân của hai cạnh nhỏ nhất trong tam giác đáy. Thể tích hình lăng trụ đó là

A. $228\sqrt{95}$. B. $228\sqrt{93}$. C. $28\sqrt{95}$. D. $28\sqrt{93}$.

Câu 46: Đáy của lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' là tam giác đều. Mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 30^0 và diện tích tam giác A'BC bằng 8. Thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' là

A. $3\sqrt{3}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $8\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{3}$.

Câu 47: Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có $AA'=\sqrt{3}a$. Gọi I là giao điểm của AB' và A'B. Biết khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. Thể tích theo a khối lăng trụ ABC.A'B'C'.

A. $V=3a^3$. **B.** $V=\frac{a^3}{4}$. **C.** $V=\frac{3a^3}{4}$. **D.** $V=a^3$.

Câu 48: Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, đường thẳng AB' tạo với $(BCC'B')$ một góc 30^0. Thể tích theo a khối lăng trụ ABC.A'B'C'.

A. $V=\frac{\sqrt{6}a^3}{4}$. **B.** $V=\frac{\sqrt{6}a^3}{12}$. **C.** $V=\frac{3a^3}{4}$. **D.** $V=\frac{a^3}{4}$.

Câu 49: Cho hình lăng trụ ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB =a, $AD=\sqrt{3}a$ và A'B = 3a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm O của hình chữ nhật ABCD. Thể tích của khối lăng trụ ABCD.A'B'C'D' theo a là

A. $2\sqrt{3}a^3$. **B.** $2\sqrt{6}a^3$. **C.** $\sqrt{6}a^3$. **D.** $\sqrt{3}a^3$.

Câu 50: Cho khối lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' có đáy là tam giác cân với AB = AC = a, $\widehat{BAC}=120^0$, mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc 60^0. Thể tích theo a khối lăng trụ ABC.A'B'C'.

A. $V=\frac{3a^3}{8}$. **B.** $V=\frac{9a^3}{8}$. **C.** $V=\frac{a^3}{8}$. **D.** $V=\frac{3a^3}{4}$.

Câu 51: Cho hình lăng trụ ABCD.A'B'C'D' với đáy ABCD có BD = 5cm, $\widehat{BAD}=90^0$, $\widehat{DCB}=90^0$, $\widehat{ABD}=\alpha$, $\widehat{ACD}=\beta$. Mặt phẳng $(ACC'A')$ vuông góc với đáy, tứ giác ACC'A' là hình thoi, $\widehat{A'AC}=60^0$. Giá trị của α, β lần lượt là bao nhiêu để thể tích khối lăng trụ ABCD.A'B'C'D' lớn nhất?

A. $\alpha=60^0;\beta=45^0$. **B.** $\alpha=60^0;\beta=60^0$.

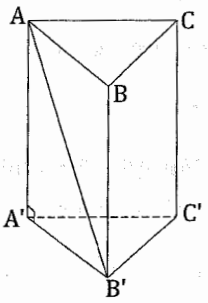
C. $\alpha=45^0;\beta=45^0$. **D.** $\alpha=45^0;\beta=60^0$.

ĐÁP ÁN

36	37	38	39	40	41	42	43
B	B	D	A	B	A	C	D
44	45	46	47	48	49	50	51
D	A	C	A	A	B	A	C

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 36:



Theo giả thiết, em có $A'A \perp (ABC)$

$\Rightarrow$ A'A là chiều cao của lăng trụ.

Mà $AA' = \sqrt{AB'^2 - A'B'^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3}a.$

Diện tích của ΔABC là: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin BAC = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$

Thể tích của khối lăng trụ là:

$V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{3a^3}{4}.$ $\rightarrow$ **Đáp án B**

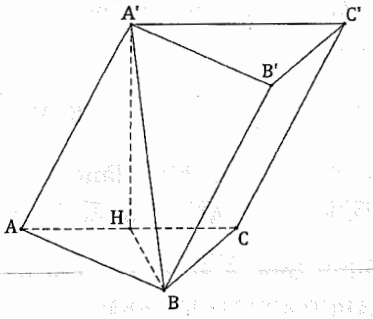
Câu 37:

Gọi H là trung điểm của $AC \Rightarrow A'H \perp (ABC)$

$\Rightarrow$ HB là hình chiếu vuông góc của A'B trên mặt phẳng (ABC)

$\Rightarrow$ Góc giữa A'B và (ABC) chính là góc giữa A'B

và HB hay $\widehat{A'BH} = 30^0.$



Em có : $BH = \frac{1}{2} AC = a$ và $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BH.AC = a^2$

$\Delta A'HB$ vuông tại H, $A'H = HB.\tan 30^0 = \frac{\sqrt{3}a}{3}$

Thể tích của khối lăng trụ là:

$V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}a}{3} \cdot a^2 = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}.$

$\rightarrow$ **Đáp án B**

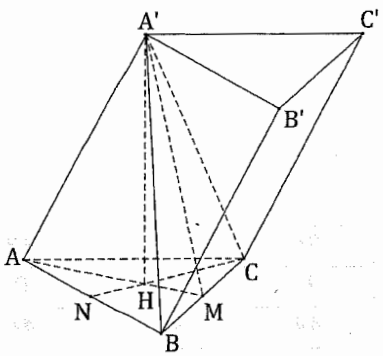
Câu 38:

Em có A'.ABC là hình chóp tam giác đều.

Gọi H là trọng tâm của ΔABC, M và N lần lượt là trung điểm của BC và AB.

Khi đó $A'H \perp (ABC) \Rightarrow$ A'H là chiều cao của lăng trụ

Em thấy : $\begin{cases} (A'BC) \cap (ABC) = BC \\ A'M \perp BC \\ AM \perp BC \end{cases}$



$\Rightarrow$ Góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) chính là góc giữa

A'M và AM hay $\widehat{A'MA} = 60^0.$

$A'H \perp HM$, $HM = \frac{1}{3} AM = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{6}$

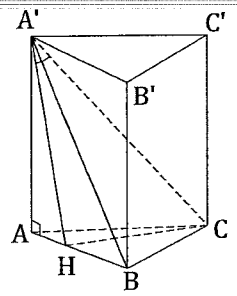
Suy ra $A'H = HM.\tan \widehat{A'MH} = \frac{\sqrt{3}a}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}$

$V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{\Delta ABC} = \frac{a}{2}.\frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{\sqrt{3}a^3}{8}.$ → **Đáp án D**

Câu 39:

Kẻ $CH \perp AB\ (H \in AB) \Rightarrow CH \perp (ABB'A')$ nên A'H là hình chiếu vuông góc của A'C trên mặt phẳng $(ABB'A')$

Do đó, góc giữa A'C và $(ABB'A')$ chính là góc giữa A'C và A'H hay $\widehat{CA'H} = 30^0$.



Áp dụng định lí côsin trong ΔABC có:

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC.BC.\cos 120^0} = \sqrt{7}a.$

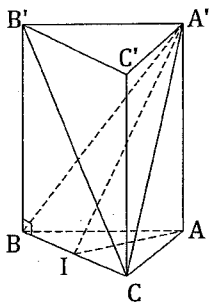
$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}CA.CB.\sin\widehat{BCA} = \frac{1}{2}a \cdot 2a \cdot \sin 120^0 = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}.$

$\Rightarrow CH = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AB} = \frac{\sqrt{21}a}{7};\ A'C = \frac{CH}{\sin 30^0} = \frac{2\sqrt{21}a}{7} \Rightarrow A'A = \sqrt{A'C^2 - AC^2} = \frac{\sqrt{35}a}{7}.$

$V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{35}a}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{2} = \frac{\sqrt{105}a^3}{14}.$ → **Đáp án A**

Câu 40:

Gọi I là trung điểm BC. Do tam giác ABC đều cạnh 2cm nên $AI = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,cm,\ S_{\Delta ABC} = \sqrt{3}\,cm^2.$



Diện tích tam giác A'BC là $S = \frac{1}{2}A'I.BC \Rightarrow A'I = 4\,cm.$

Tam giác A'AI vuông tại A nên

$A'A = \sqrt{A'I^2 - AI^2} = \sqrt{16 - 3} = \sqrt{13}\,cm.$

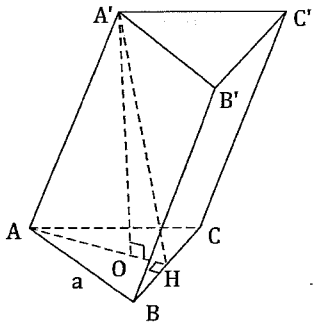
$V_{ABC.A'B'C'} = A'A \cdot S_{\Delta ABC} = \sqrt{13} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{39}\,cm^3.$

→ **Đáp án B**

Câu 41:

Em có: $A'O \perp (ABC) \Rightarrow$ AO là hình chiếu của AA' lên mặt phẳng (ABC).

$\Rightarrow$ Góc giữa A'A và (ABC) chính là góc giữa A'A và AO hay $\widehat{A'AO} = 45^0$.



Tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$

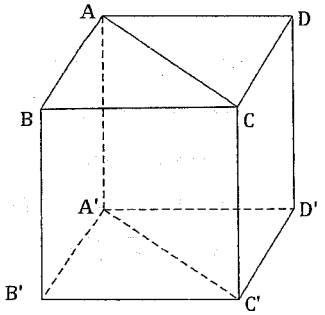
$AH = \frac{\sqrt{3}a}{2} \Rightarrow AO = \frac{2}{3}AH = \frac{\sqrt{3}a}{3}.$

Tam giác AA'O có $\widehat{A'AO} = 45^0,\ AO = \frac{\sqrt{3}a}{3} \Rightarrow A'O = AO.\tan 45^0 = \frac{\sqrt{3}a}{3}.$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = A'O \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}a}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{a^3}{4}$. → **Đáp án A**

Câu 42:

Dựng khối hộp ABCD.A'B'C'D'.



Từ đó em có $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2} V_{ABCD.A'B'C'D'}$

Coi $(ABB'A')$ và $(CDD'C')$ là đáy của hình hộp thì chiều cao hình hộp là:

$h = d\left((CDD'C'),(ABB'A')\right) = d\left(CC',(ABB'A')\right) = 6\sqrt{3}$

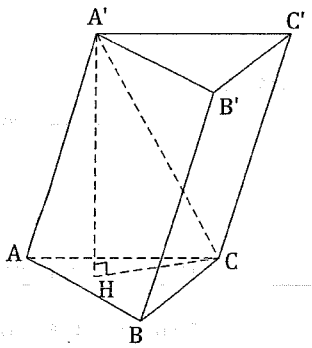
Diện tích đáy là

$S_{ABB'A'} = 4 \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2} 4 \cdot 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3}\ cm^3$.

→ **Đáp án C**

Câu 43:

Giả sử H là hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC)



Góc tạo bởi A'C và (ABC) bằng 60^0 nên em có

$\widehat{A'CH} = 60^0 \Rightarrow A'H = A'C.\sin 60^0 = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

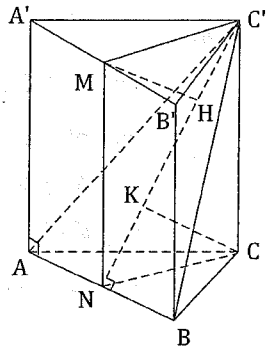
Diện tích tam giác ABC là: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 1$.

Thể tích khối lăng trụ là: $V = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

→ **Đáp án D**

Câu 44:

Diện tích tam giác đều ABC là $S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của A'B' và AB.

Cách 1: Trong $(CC'N)$, kẻ $CK \perp C'N$

$\Rightarrow d\left(A'B',(C'AB)\right) = d\left(B',(C'AB)\right) = d\left(C,(C'AB)\right) = CK$ Theo giả thiết, $d\left(A'B',(C'AB)\right) = \frac{\sqrt{2}a}{2}$ nên em có $CK = \frac{\sqrt{2}a}{2}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông CC'N em được: $\frac{1}{CK^2} = \frac{1}{C'C^2} + \frac{1}{CN^2} \Rightarrow CC' = \frac{\sqrt{6}a}{2}$

$\Rightarrow V = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}a}{4} = \frac{3\sqrt{2}a^3}{8}$. → **Đáp án D**

Cách 2: Trong $(MC'N)$, kẻ $MH \perp C'N$ $(H \in C'N)$ thì $MH = d\left(A'B',(C'AB)\right)$

Mà $AB \perp (C'MN) \Rightarrow AB \perp MH \Rightarrow MH \perp (C'AB)$

Mà A'B'//AB nên em có: $d(A'B',(C'AB)) = d(M,(C'AB)) = MH = \frac{\sqrt{2}a}{2}$.

$\Delta MNC'$ vuông tại M có: $\frac{1}{C'M^2} + \frac{1}{MN^2} = \frac{1}{MH^2} \Rightarrow MN = \frac{\sqrt{6}a}{2}$

Câu 45:

Áp dụng công thức Hê-rông cho tam giác đáy ta được:

$S = \sqrt{p.(p-a)(p-b)(p-c)} = 114.$

Đường cao hình lăng trụ là: $h = \sqrt{19.20} = 2\sqrt{95}.$

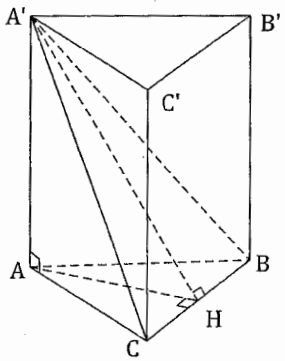
Vậy thể tích hình lăng trụ là: $V = S.h = 114.2\sqrt{95} = 228\sqrt{95}.$ → **Đáp án A**

Câu 46:

Gọi H là trung điểm của BC

$\Rightarrow AH \perp BC$. Mà $A'H \perp BC \Rightarrow BC \perp (A'AH)$.

$\Rightarrow$ Góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) chính là góc giữa A'H và AH hay $\widehat{A'HA} = 30^0$.



Giả sử cạnh tam giác đáy là $x\ (x>0) \Rightarrow AH = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác AA'H vuông tại A, có $\widehat{A'HA} = 30^0$ nên:

$A'H = \frac{AH}{\cos 30^0} = \frac{x\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = x$

Diện tích A'BC bằng 8 nên em có: $8 = \frac{1}{2}A'H \cdot BC \Rightarrow 8 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \Rightarrow x = 4 \Rightarrow V = 8\sqrt{3}.$

→ **Đáp án C**

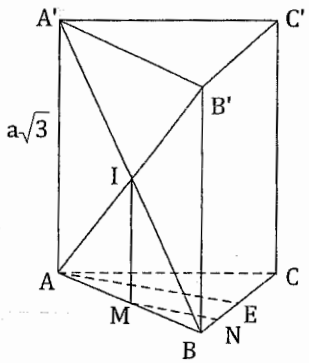
Cách khác để tính diện tích ΔABC: Em có: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta A'BC}.\cos\varphi$ với φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$. $\Rightarrow S_{\Delta ABC} = 8.\cos 30^0 = 4\sqrt{3}.$

Câu 47:

Gọi E là trung điểm của BC, N là trung điểm của BE, M là trung điểm của AB

Do $IM // (BCC'B')$ nên em suy ra được:

$d(I,(BCC'B')) = d(M,(BCC'B')) = MN = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$



Gọi b là độ dài cạnh của tam giác đều ABC.

Em có: $EA = 2MN = \sqrt{3}a,$

Mà $AE = \frac{\sqrt{3}b}{2} = a\sqrt{3} \Rightarrow b = 2a$

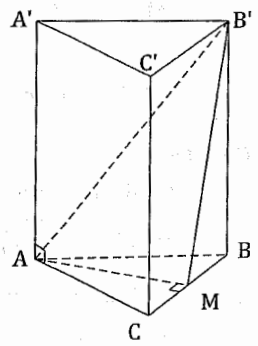
Diện tích mặt đáy là: $S = \sqrt{3}a^2$

$\Rightarrow V = AA' \cdot S_{\Delta ABC} = \sqrt{3}a \cdot \sqrt{3}a^2 = 3a^3.$ → **Đáp án A**

Câu 48:

Gọi M là trung điểm của BC, do ΔABC đều nên $AM \perp BC$.

Mà $AM \perp BB' \Rightarrow AM \perp (BCC'B')$.



$\Rightarrow$ Hình chiếu vuông góc của AB' trên $(BCC'B')$ là MB'.

$\Rightarrow$ Góc giữa AB' và $(BCC'B')$ chính là góc giữa AB' và MB'

hay $\widehat{AB'M} = 30^0$.

Em có $AM = \dfrac{\sqrt{3}a}{2} \Rightarrow AB' = \sqrt{3}a$

$\Rightarrow AA' = \sqrt{AB'^2 - A'B'^2} = \sqrt{2}a.$

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4} \Rightarrow V = AA'.S_{\Delta ABC} = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{4}.$

→ Đáp án A

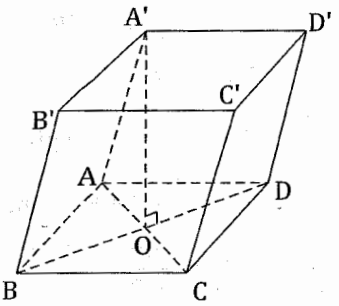
Câu 49:

Em có $A'O \perp (ABCD)$

Diện tích hình chữ nhật ABCD là: $S = AB.AD = \sqrt{3}a^2$.

ΔABD vuông tại A nên $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a.$

$\Rightarrow BO = \dfrac{1}{2}BD = a$



$\Delta A'OB$ vuông tại O nên $A'O = \sqrt{A'B^2 - BO^2} = 2\sqrt{2}a.$

Thể tích của khối lăng trụ là: $V = S_{ABCD}.A'O = 2\sqrt{6}a^3.$

→ Đáp án B

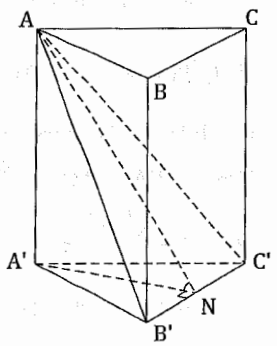
Câu 50:

Gọi N lần lượt là trung điểm của B'C' $\Rightarrow$ A'N $\perp$ B'C'

Em có: $\begin{cases} (AB'C') \cap (A'B'C') = B'C' \\ AN \perp B'C' \\ A'N \perp B'C' \end{cases}$

$\Rightarrow$ Góc tạo bởi $(AB'C')$ và $(A'B'C')$ chính là góc giữa A'N và AN hay $\widehat{ANA'} = 60^0$.

Xét tam giác A'B'N vuông tại N,



$A'N = A'B'.\cos NA'B = a.\cos 60^0 = \dfrac{a}{2}$

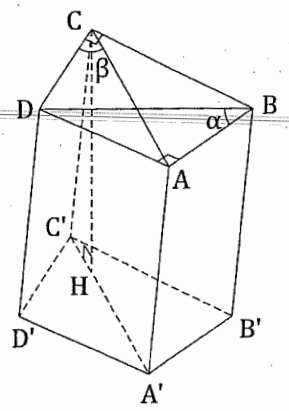
$\Rightarrow AA' = A'N.\tan 60^0 = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}.$

$\Rightarrow S_{\Delta A'B'C'} = \dfrac{1}{2}A'C'.A'B'.\sin 120^0 = \dfrac{1}{2}.a.a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}$

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = A'A \cdot S_{\Delta A'B'C'} = \dfrac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4} = \dfrac{3a^3}{8}.$

→ Đáp án A

Câu 51:



ΔABD vuông tại A có $\widehat{ABD}=\alpha$, BD = 5 nên em suy ra $AB=5.\cos\alpha$ và $AD=5.\sin\alpha$.

$\Rightarrow S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}AB.AD=\frac{25}{4}.\sin 2\alpha.$

Tương tự, em có: $S_{\Delta BCD}=\frac{25}{4}.\sin 2\beta.$

$\Rightarrow S_{ABCD}=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta BCD}=\frac{25}{4}(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)$

$=\frac{25}{2}\sin(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta).$

Do $(ACC'A')\perp(A'B'C'D')$ nên trong $(ACC'A')$, kẻ CH vuông góc với A'C' thì $CH\perp(A'B'C'D')$.

Do ACC'A' là hình thoi, $\widehat{A'AC}=60^0$ nên $\widehat{CC'A'}=60^0\Rightarrow CH=CC'.\sin 60^0=\frac{AC\sqrt{3}}{2}.$

Áp dụng định lí cosin trong ΔABC em được: $AC^2=AB^2+BC^2-2AB.BC.\cos B$

$\Rightarrow AC=\sqrt{5^2\left[\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2.\cos\alpha.\cos\beta.\cos(\alpha+\beta)\right]}=5.\sin(\alpha+\beta).$

$\Rightarrow CH=\frac{5\sqrt{3}}{2}\sin(\alpha+\beta)\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'}=CH.S_{ABCD}=\frac{125\sqrt{3}}{4}\sin^2(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta).$

Do $\begin{cases}0\le\sin^2(\alpha+\beta)\le 1\\ -1\le\cos(\alpha-\beta)\le 1\end{cases}\Rightarrow\sin^2(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)\le 1$

$\Rightarrow \max V_{ABCD.A'B'C'D'}=\frac{125\sqrt{3}}{4}.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=1\\ \cos(\alpha-\beta)=1\end{cases}\Leftrightarrow\alpha=\beta=45^0.$

→ Đáp án C

Dạng 3: Tỉ số thể tích

Bài toán áp dụng: Cho hình chóp S.ABC. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' khác với S. Khi đó $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$.

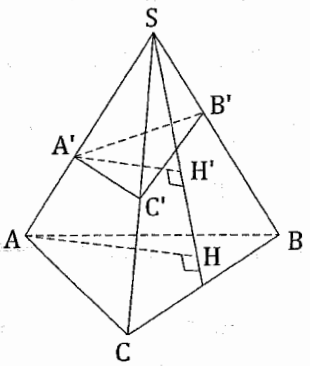
Chứng minh

Gọi H' và H lần lượt là hình chiếu vuông góc của A' và A trên mặt phẳng (SBC).

$\Rightarrow A'H'//AH\Rightarrow\frac{A'H'}{AH}=\frac{SA'}{SA}.$

$\Rightarrow\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{V_{A'.SB'C'}}{V_{A.SBC}}=\frac{\frac{1}{3}A'H'.S_{\Delta SB'C'}}{\frac{1}{3}AH.S_{\Delta SBC}}$

$=\frac{SA'}{SA}.\frac{\frac{1}{2}.SB'.SC'.\sin\widehat{B'SC'}}{\frac{1}{2}.SB.SC.\sin\widehat{BSC}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$



BÀI TẬP MẪU

Cơ bản

Câu 52: Cho hình chóp S.ABC và A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp S.A'B'C' và V_2 là thể tích khối chóp S.ABC. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

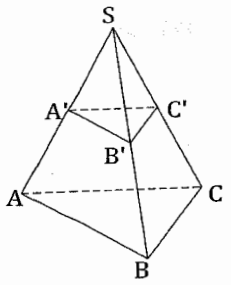
A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{8}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức ở bài toán áp dụng em được:

$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{V_1}{V_2}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$

→ **Đáp án D**



Câu 53: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD. Tỉ số thể tích của khối tứ diện AMCN với khối tứ diện ABCD là

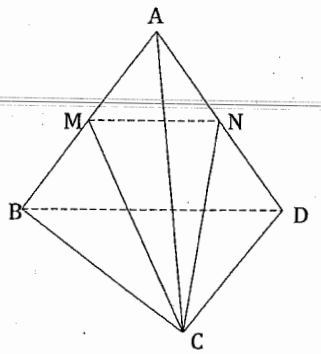
A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức ở bài toán áp dụng em được:

$$\frac{V_{A.MCN}}{V_{A.BCD}}=\frac{AM}{AB}\cdot\frac{AC}{AC}\cdot\frac{AN}{AD}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

→ **Đáp án C**

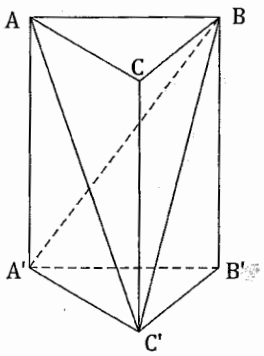


Câu 54: Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi V_1 là thể tích của khối tứ diện ABA'C' và V_2 là thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C'. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giả sử diện tích đáy của hình lăng trụ là S, chiều cao là h, thể tích khối lăng trụ là V.



$V_2=V_{A'B'C'.ABC}=S.h$

$V_2=V_{B.A'B'C'}+V_{C'.ABC}+V_{ABA'C'}$

Trong đó: $V_{B.A'B'C'}=\frac{1}{3}S.h$; $V_{C'.ABC}=\frac{1}{3}S.h$

$\Rightarrow V_1=V_{ABA'C'}=\frac{1}{3}S.h=\frac{1}{3}V_2\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{3}.$

→ **Đáp án B**

Cách 2: $V_{B.AA'C'}=V_{B.ACC'}=V_{C'.ABC}=\frac{1}{3}d\left(C',(ABC)\right).S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$

$\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{V_{B.AA'C'}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{1}{3}.$

♥ Vận dụng

Câu 55: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a, SA = 2a, SA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB, SC. Tính thể tích của khối chóp A.BCNM.

A. $V=\frac{3\sqrt{3}a^3}{50}$. **B.** $V=\frac{3\sqrt{3}a^3}{25}$. **C.** $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{50}$. **D.** $V=\frac{2\sqrt{3}a^3}{25}$.

Hướng dẫn giải

Gọi V là thể tích của khối chóp S.ABC.

$V_{S.ABC}=V_{S.AMN}+V_{A.BCNM}$.

Mặt khác: $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA}{SA}\cdot\frac{SM}{SB}\cdot\frac{SN}{SC}=\frac{SM\cdot SB}{SB^2}\cdot\frac{SN\cdot SC}{SC^2}$

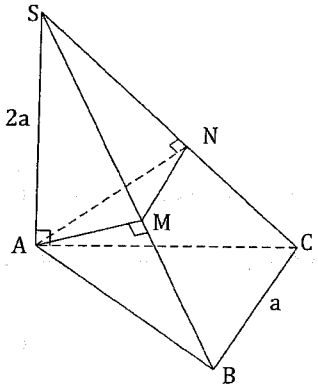
Mà ΔSAB và ΔSAC vuông tại A, $AM\perp SB$, $AN\perp SC\Rightarrow SM\cdot SB=SA^2$, $SN\cdot SC=SA^2$;

$SB^2=SA^2+AB^2=5a^2, SC^2=5a^2$.

$\Rightarrow\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA^2}{SB^2}\cdot\frac{SA^2}{SC^2}=\frac{4a^2}{5a^2}\cdot\frac{4a^2}{5a^2}=\frac{16}{25.}$

$\Rightarrow V_{S.AMN}=\frac{16}{25}V_{S.ABC}=\frac{16}{25}V.$

$\Rightarrow V_{A.BCNM}=V-\frac{16}{25}V=\frac{9}{25}V.$



Do ΔABC đều cạnh a nên $S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

$\Rightarrow V=\frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.2a.\frac{\sqrt{3}a^2}{4}=\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

Vậy thể tích của khối chóp A.BCNM là

$V_{A.BCNM}=\frac{9}{25}V=\frac{9}{25}\cdot\frac{\sqrt{3}a^3}{6}=\frac{3\sqrt{3}a^3}{50}$. → **Đáp án A**

Câu 56: Cho hình chóp S.ABCD. Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $SM=\frac{1}{3}SA$. Mặt phẳng (α) qua M và song song với mặt đáy lần lượt cắt SB, SC, SD tại N, P, Q. Tỉ số thể tích của khối chóp S.MNPQ với khối chóp S.ABCD là

A. $\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{81}$. **D.** $\frac{1}{27}$.

Hướng dẫn giải

Do (α) qua M và song song với mặt đáy nên em kẻ MN//AB $(N\in SB)$;

NP//BC $(P\in SC)$; PQ//CD $(Q\in SD)\Rightarrow(\alpha)$ chính là $(MNPQ)$.

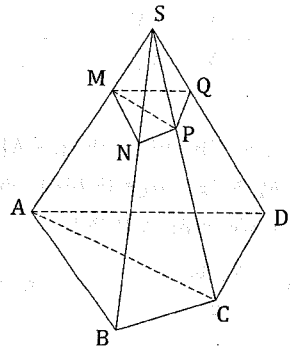
$V_{S.MNPQ}=V_{S.MNP}+V_{S.MQP}$.

Em có: $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SA}\cdot\frac{SN}{SB}\cdot\frac{SP}{SC}=\frac{1}{27}\Rightarrow V_{S.MNP}=\frac{1}{27}V_{S.ABC}$.

và $\frac{V_{S.MQP}}{V_{S.ADC}}=\frac{SM}{SA}\cdot\frac{SQ}{SD}\cdot\frac{SP}{SC}=\frac{1}{27}\Rightarrow V_{S.MQP}=\frac{1}{27}V_{S.ADC}$.

$\Rightarrow V_{S.MNP}+V_{S.MQP}=\frac{1}{27}V_{S.ABC}+\frac{1}{27}V_{S.ADC}=\frac{1}{27}(V_{S.ABC}+V_{S.ADC})$.

$\Rightarrow V_{SMNPQ}=\frac{1}{27}.V_{SABCD}$. → **Đáp án D**



☞ **Chú ý:** Em nhớ rằng, công thức tính tỉ số thể tích chỉ áp dụng cho khối chóp tam giác. Còn với khối chóp tứ giác, ngũ giác, lục giác,... em cần chia ra thành các khối chóp tam giác và áp dụng công thức.

*** Nâng cao**

Câu 57: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD, AB = a; SA = $a\sqrt{2}$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, CD. Tính thể tích khối chóp A.MNP.

A. $\frac{\sqrt{7}a^3}{48}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{24}$. **C.** $\frac{\sqrt{7}a^3}{24}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{48}$.

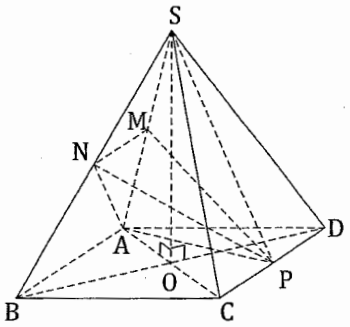
Hướng dẫn giải

Do M là trung điểm của SA nên em suy ra được $d(A,(MNP)) = d(S,(MNP))$

$\Rightarrow V_{A.MNP} = \frac{1}{3}d(A,(MNP)).S_{\Delta MNP}$

$= \frac{1}{3}d(S,(MNP)).S_{\Delta MNP} = V_{S.MNP}$

Em lại có: $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABP}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SP} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.1 = \frac{1}{4}$.



$\Rightarrow V_{S.MNP} = \frac{1}{4}V_{S.ABP}$

Mà $V_{S.ABP} = \frac{1}{3}SO.S_{\Delta ABP} = \frac{1}{3}SO.\frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{6}SO.S_{ABCD} \Rightarrow V_{A.MNP} = \frac{1}{24}SO.S_{ABCD}$

Tứ giác ABCD là hình vuông cạnh a nên $S_{ABCD} = a^2$.

ΔSAO vuông tại O nên $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}a}{2}$.

$\Rightarrow V_{S.MNP} = \frac{1}{24}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{24}.\frac{\sqrt{6}a}{2}.a^2 = \frac{\sqrt{6}a^3}{48}$.

→ Đáp án D

Câu 58: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên tạo với đáy góc 60^0. Gọi M là trung điểm SC, mặt phẳng (α) đi qua AM và song song với BD cắt SB tại E và cắt SD tại F. Thể tích khối chóp C.AEMF là

A. $\frac{2\sqrt{6}a^3}{13}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{36}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{18}$.

Hướng dẫn giải

Gọi O là tâm của hình vuông ABCD, I là giao điểm của SO với AM $\Rightarrow I \in (\alpha)$.

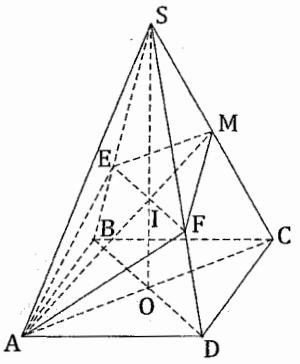
(α) là mặt phẳng đi qua AM, song song với BD cắt SB tại E và cắt SD tại F nên EF chứa I và EF // BD $\Rightarrow (\alpha) \equiv (AFME)$.

Em lại thấy, M là trung điểm của SC nên $d(C,(AEMF)) = d(S,(AEMF))$

$\Rightarrow V_{C.AEMF} = \frac{1}{3}d(C,(AEMF)).S_{AEMF} = \frac{1}{3}d(S,(AEMF)).S_{AEMF} = V_{S.AEMF}$

$V_{S.AEMF} = V_{S.AMF} + V_{S.AME}$

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3}OA \cdot \tan 60^0 \cdot a^2 = \frac{\sqrt{6}a^3}{6}$



Em có M là trung điểm SC nên $\frac{SM}{SC} = \frac{1}{2}$.

Vì O, M là trung điểm của AC, SC; AM cắt SO tại I nên I là trọng tâm tam giác $SAC \Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}$.

Mà $I \in EF$; EF//BD nên $\frac{SF}{SD} = \frac{2}{3}$.

$\Rightarrow \frac{V_{S.AMF}}{V_{S.ACD}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SF}{SD} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AMF} = \frac{1}{3}V_{S.ACD}$.

Tương tự em có $V_{S.AME} = \frac{1}{3}V_{S.ACB} \Rightarrow V_{S.AEMF} = V_{S.AME} + V_{S.AFM} = \frac{1}{3}(V_{S.ACB} + V_{S.ADC})$

$\Rightarrow V_{S.AEMF} = \frac{1}{3}V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}a^3}{18} = V_{C.AEMF}$. → **Đáp án D**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 59: Cho khối chóp S.ABC có thể tích bằng V. Gọi B', C' lần lượt là trung điểm của SB,SC. Lấy A' là điểm thuộc SA thỏa mãn $\overrightarrow{SA} = 3\overrightarrow{SA'}$. Tính thể tích khối chóp S.A'B'C' theo V.

A. $V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{12}V$. **B.** $V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{6}V$. **C.** $V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{2}V$. **D.** $V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{8}V$.

Câu 60: Cho khối tứ diện có thể tích bằng V. Gọi V' là thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các trung điểm của các cạnh của khối tứ diện đã cho. Tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

A. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{4}$. **B.** $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$. **C.** $\frac{V'}{V} = \frac{2}{3}$. **D.** $\frac{V'}{V} = \frac{5}{8}$.

Câu 61: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi J là trung điểm cạnh SD. Tính thể tích khối tứ diện ACDJ theo a.

A. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **B.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **C.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{24}$. **D.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

Câu 62: Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, AB = a, BC = 2a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc tạo bởi cạnh bên SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60^0. Gọi H là hình chiếu của A trên cạnh SB. Tính thể tích khối chóp H.ACD.

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{9}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

Câu 63: Cho hình lăng trụ đứng A'B'C'.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a, $A'A = 2a, A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của A'C' và I là giao điểm của AM và A'C. Thể tích khối tứ diện IABC là

A. $\frac{4a^3}{9}$. **B.** $\frac{4a^3}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{15}a^3}{9}$. **D.** $\frac{2a^3}{9}$.

Câu 64: Cho hình lăng trụ A'B'C'.ABC có thể tích bằng V. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\frac{AM}{AA'}=\frac{1}{2},\frac{BN}{BB'}=\frac{CP}{CC'}=\frac{2}{3}$. Thể tích khối đa diện ABC.MNP bằng

A. $\frac{2}{3}V$. **B.** $\frac{9}{16}V$. **C.** $\frac{20}{27}V$. **D.** $\frac{11}{18}V$.

Câu 65: Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông cân ở B, $AC=\sqrt{2}a$, SA vuông góc với đáy, SA = a. Gọi G là trọng tâm của ΔSBC, mặt phẳng (α) qua AG và song song với BC cắt SC, SB lần lượt tại M, N. Thể tích của khối chóp S.AMN là

A. $\frac{5a^3}{27}$. **B.** $\frac{4a^3}{27}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{27}$. **D.** $\frac{2a^3}{27}$.

Câu 66: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật tâm O, $AB=SA=a$, $AD=\sqrt{2}a$, SA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC, I là giao điểm của AC và BM. Thể tích của khối chóp ANIM theo a là

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **B.** $\sqrt{3}a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{72}$.

Câu 67: Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, cạnh bên $SA=a$, hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy là điểm H thuộc đoạn thẳng AC sao cho $AH=\frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao tam giác SAC. Thể tích khối tứ diện SMBC là

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}a^3}{13}$. **C.** $\frac{\sqrt{14}a^3}{48}$. **D.** $\frac{\sqrt{33}a^3}{36}$.

Câu 68: Cho tứ diện ABCD có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm của tam giác BCD. Tính thể tích V của khối chóp A.GBC.

A. $V=3$. **B.** $V=4$. **C.** $V=6$. **D.** $V=5$.

Câu 69: Hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy, góc tạo bởi giữa SC và mặt phẳng (SAB) bằng 30^0. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC chia hình chóp thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của phần chứa đỉnh S, V_2 là thể tích của phần còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 70: Cho tứ diện S.ABC có M và N là các điểm thuộc các cạnh SA, SB sao cho $\frac{SM}{MA}=\frac{1}{2},\frac{SN}{NB}=2$. Mặt phẳng (α) qua MN và song song với SC chia tứ diện thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của phần chứa đỉnh A và V_2 là thể tích của phần còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{4}{9}$. **B.** $\frac{5}{9}$. **C.** 2. **D.** $\frac{5}{4}$.

Câu 71: Xét hình chóp tứ giác đều S.ABCD, mặt phẳng chứa đường thẳng AB đi qua C' của cạnh SC chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính tỉ số $\frac{SC'}{SC}$.

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Câu 72: Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và E là điểm đối xứng với B qua D. Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện thành 2 khối đa diện, trong đó khối đa diện đỉnh A có thể tích V. Tính V.

A. $\frac{7\sqrt{2}a^3}{216}$. B. $\frac{11\sqrt{2}a^3}{216}$. C. $\frac{13\sqrt{2}a^3}{216}$. D $\frac{\sqrt{2}a^3}{18}$.

ĐÁP ÁN

59	60	61	62	63	64	65
A	B	C	D	A	D	D
66	67	68	69	70	71	72
D	C	B	B	C	C	B

HƯỚNG DẪN GIẢI

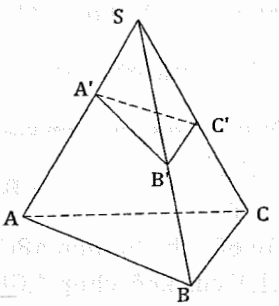
Câu 59:

Theo giả thiết em có $\overrightarrow{SA}=3\overrightarrow{SA'}\Rightarrow\frac{SA'}{SA}=\frac{1}{3}$.

Do B' và C' là trung điểm của SB, SC nên $\frac{SB'}{SB}=\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA'}{SA}\cdot\frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

$\Rightarrow V_{S.A'B'C'}=\frac{1}{12}V_{S.ABC}$ → **Đáp án A**



Câu 60:

Gọi M, N, P, G, F, E lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD, BD, AD, AC, AB.

Cách 1:

Em có: $V'=2V_{N.MPGF}=2\cdot2V_{N.MPG}=4V_{G.MNP}=4\cdot\frac{1}{2}\cdot V_{A.MNP}=2.\frac{1}{4}V_{A.BCD}=\frac{1}{2}V$.

(Do G là trung điểm của AD, $S_{\Delta MNP}=\frac{1}{4}S_{\Delta BCD}$)

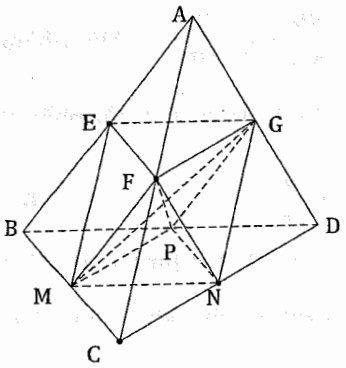
Suy ra: $\frac{V'}{V}=\frac{1}{2}$. → **Đáp án B**

Cách 2: Xét $\frac{V_{A.EFG}}{V_{A.BCD}}=\frac{AE}{AB}.\frac{AF}{AC}.\frac{AG}{AD}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

$\Rightarrow V_{A.EFG}=\frac{1}{8}V$.

Tương tự em có: $V_{B.EPM}=V_{C.MNF}=V_{D.NPG}=\frac{1}{8}V$.

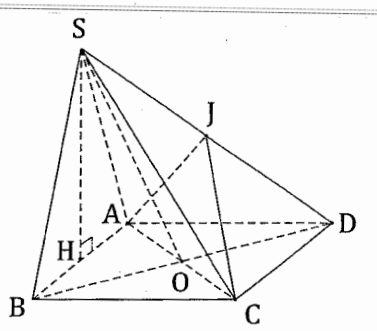
$\Rightarrow V'=V-4.\frac{1}{8}V=\frac{V}{2}\Rightarrow\frac{V'}{V}=\frac{1}{2}$.



Câu 61:

Gọi H là trung điểm AB. Do ΔSAB đều nên $SH \perp AB$

Mà $(SAB) \perp (ABCD); (SAB) \cap (ABCD) = AB$ nên $SH \perp (ABCD)$.



Vì ΔSAB đều cạnh a nên $SH = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot a^2 = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}.$

$\Rightarrow V_{S.ACD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}.$

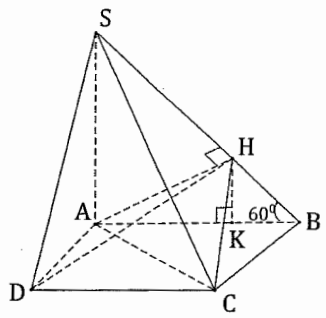
Em lại có: $V_{D.ACJ} = \frac{1}{2} V_{S.ACD} = \frac{\sqrt{3}a^3}{24}$

(Vì J là trung điểm của SD)

→ **Đáp án C**

Câu 62:

Kẻ $HK // SA \Rightarrow HK \perp (ABCD) \Rightarrow HK \perp (ACD)$



$\Rightarrow V_{H.ACD} = \frac{1}{3} HK.S_{\Delta ACD}.$

$S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a = a^2.$

Em có $SA \perp (ABCD)$ nên AB là hình chiếu vuông góc của SB trên $(ABCD)$.

Suy ra góc giữa SB và $(ABCD)$ chính là góc giữa SB, AB hay $\widehat{SBA} = 60^0$.

$\Rightarrow SA = AB.\tan 60^0 = \sqrt{3}a.$

$\Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}a}{2}$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$\Rightarrow HB = \frac{a}{2}$ (Trong tam giác vuông, cạnh đối diện với góc 30^0 bằng nửa cạnh huyền)

ΔAHB vuông tại H, đường cao là HK nên sử dụng hệ thức lượng em tính được $HK = \frac{\sqrt{3}a}{4}.$

Vậy $V_{H.ACD} = \frac{1}{3} \cdot HK \cdot S_{\Delta ACD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{4} \cdot a^2 = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}.$ → **Đáp án D**

Câu 63:

$\Delta A'AC$ vuông tại A nên $AC = \sqrt{A'C^2 - AA'^2} = a\sqrt{5}.$

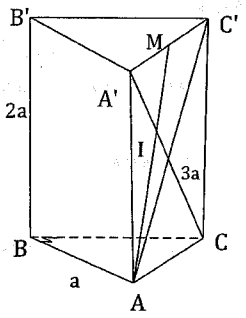
$\Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a$ (Định lí Pitago)

Xét $\Delta AA'C'$ có I là trọng tâm nên $IA = \frac{2}{3} AM.$

$$\Rightarrow \frac{V_{A.IBC}}{V_{A.MBC}} = \frac{AI}{AM}.\frac{AB}{AB}.\frac{AC}{AC} = \frac{2}{3}.$$

$$\Rightarrow V_{IABC} = \frac{2}{3}V_{MABC} = \frac{2}{3}V_{A'ABC} = \frac{2}{3}.\frac{1}{3}.AA'.S_{\Delta ABC}$$

$$= \frac{2}{9}.2a.\frac{1}{2}.a.2a = \frac{4a^3}{9}.$$ → **Đáp án A**



Câu 64:

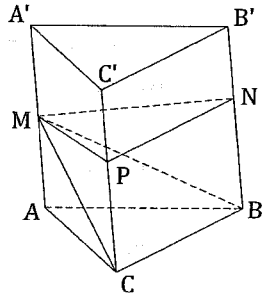
Vì $V_{A'ABC} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3}V \Rightarrow V_{A'.B'C'CB} = \frac{2}{3}V = V_{M.B'C'CB}$

Đặt: $V_1 = V_{M.NPCB} = \frac{1}{3}d\left(M,(CC'B'B)\right).S_{NPCB}$

$$= \frac{1}{3}d\left(M,(CC'B'B)\right).\frac{2}{3}S_{CC'B'B} = \frac{2}{3}V_{M.CC'B'B} = \frac{2}{3}.\frac{2}{3}V = \frac{4}{9}V.$$

$$V_2 = V_{M.ABC} = \frac{1}{3}d\left(M,(ABC)\right).S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.d\left(A',(ABC)\right).S_{\Delta ABC} = \frac{1}{6}V.$$

$\Rightarrow V_{ABC.MNP} = V_1 + V_2 = \frac{4}{9}V + \frac{1}{6}V = \frac{11}{18}V.$ → **Đáp án D**



Câu 65:

Gọi I là trung điểm của BC.

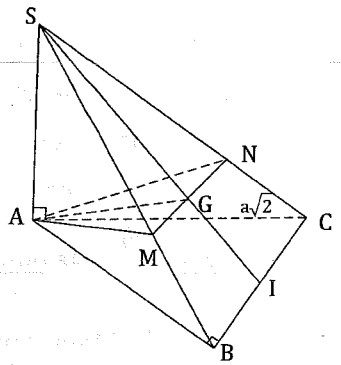
Do G là trọng tâm ΔSBC nên $\frac{SG}{SI} = \frac{2}{3}$.

$(\alpha)//BC \Rightarrow MN//BC \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC} = \frac{SG}{SI} = \frac{2}{3}.$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC} = \frac{4}{9}.$$

$$\Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{4}{9}V_{S.ABC} = \frac{4}{9}.\frac{1}{3}.SA.S_{\Delta ABC} = \frac{2a^3}{27}$$

→ **Đáp án D**



Câu 66:

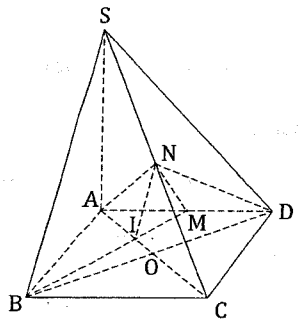
Theo giả thiết ta suy ra I là trọng tâm ΔABD.

$\Rightarrow \frac{AI}{AO} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AI}{AC} = \frac{1}{3}.$

Áp dụng tỉ số thể tích em có: $V_{AIMN} = \frac{1}{6}V_{A.CDN}.$

$V_{A.CDN} = V_{N.ACD}$ và $V_{N.ACD} = \frac{1}{2}V_{S.ACD}$

(Vì N là trung điểm của SC)



$\Rightarrow V_{A.IMN}=\frac{1}{12}V_{S.ACD}$

Mà $V_{S.ACD}=\frac{1}{3}SA\cdot S_{\Delta ACD}=\frac{1}{3}a\cdot\frac{1}{2}a.\sqrt{2}a=\frac{\sqrt{2}a^3}{6}.\Rightarrow V_{A.IMN}=\frac{\sqrt{2}a^3}{72}$ → **Đáp án D**

Câu 67:

Do ABCD là hình vuông cạnh a nên $AC=\sqrt{2}a$.

$\Rightarrow AH=\frac{1}{4}AC=\frac{\sqrt{2}a}{4}\Rightarrow CH=AC-AH=\frac{3\sqrt{2}a}{4}$

ΔSAH vuông tại H nên $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\frac{\sqrt{14}a}{4}$

ΔSHC vuông tại H nên $SC=\sqrt{SH^2+HC^2}=\sqrt{2}a$

$\Rightarrow SC=AC\Rightarrow\Delta SAC$ cân tại C

$\Rightarrow$ M là trung điểm của SA.

$\Rightarrow\frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SA}=\frac{1}{2};S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}a^2.$

$\Rightarrow V_{S.MBC}=\frac{1}{2}V_{S.ABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}SH\cdot S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{14}a^3}{48}.$ → **Đáp án C**

Câu 68:

Gọi M là trung điểm của BC, H và K lần lượt là hình chiếu của G, D lên $BC\Rightarrow GH//DK$.

Theo định lý Ta-lét em có: $\frac{GH}{DK}=\frac{MG}{MD}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow\frac{S_{\Delta GBC}}{S_{\Delta DBC}}=\frac{GH}{DK}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{V_{A.GBC}}{V_{A.BCD}}=\frac{\frac{1}{3}d\left(A,(GBC)\right).S_{\Delta GBC}}{\frac{1}{3}d\left(A,(DBC)\right).S_{\Delta DBC}}=\frac{1}{3}.$

$\Rightarrow V_{A.GBC}=\frac{1}{3}V_{A.DBC}=\frac{1}{3}.12=4.$ → **Đáp án B**

Câu 69:

Đặt: $V=V_{S.ABCD};V_1=V_{S.AMNQ};V_2=V_{AMNQBCD}=V-V_1$

Gọi O là tâm hình vuông, kẻ $AN\perp SC\left(N\in SC\right)$

Gọi $AN\cap SO=\{I\}$

Có $\begin{cases}BD\perp AC\\BD\perp SA\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp SC$

Vì $\begin{cases}(P)\perp SC\\BD\perp SC\end{cases}\Rightarrow (P)//BD$

Mà $BD\subset(SBD)\Rightarrow(P)\cap(SBD)=MQ//BD.$

Em có $\begin{cases} CB \perp SA \\ CB \perp AB \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB)$

$\Rightarrow$ SB là hình chiếu vuông góc của SC trên (SAB).

$\Rightarrow$ Góc giữa SC và mặt (SAB) chính là góc giữa SC, SB hay $\widehat{CSB} = 30^0$.

Em có $V_1 = 2V_{S.AMN}; V = 2V_{S.ABC} \Rightarrow \dfrac{V_1}{V} = \dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC} = \dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC}$

Trong ΔSAC vuông tại A, đường cao AN, ta có: $SA^2 = SN.SC \Rightarrow \dfrac{SN}{SC} = \left(\dfrac{SA}{SC}\right)^2$

Vì $CB \perp (SAB) \Rightarrow CB \perp SB \Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại B

Em cũng có $MN \perp SC \Rightarrow \Delta SMN$ vuông tại N

$\Rightarrow \Delta SNM \sim \Delta SBC(g.g) \Rightarrow \dfrac{SM}{SC} = \dfrac{SN}{SB} \Rightarrow \dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SN.SC}{SB^2} = \dfrac{SA^2}{SB^2} = \left(\dfrac{SA}{SB}\right)^2$

Trong ΔSBC: $SB = \dfrac{\sqrt{3}}{2}SC; AB = BC = \dfrac{SC}{2} \Rightarrow SA^2 = SB^2 - AB^2 = \dfrac{SC^2}{2}$.

$\Rightarrow \dfrac{V_1}{V} = \left(\dfrac{\frac{1}{2}SC^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}SC.SC}\right)^2 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\frac{1}{3}V}{V - \frac{1}{3}V} = \dfrac{1}{2}$ → **Đáp án B**

Câu 70:

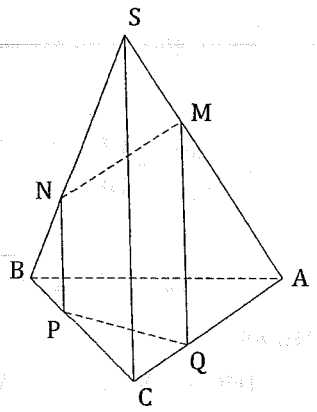
Thiết diện của (α) và tứ diện là hình thang MNPQ

với MQ//NP//SC.

Và $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{CQ}{CA} = \dfrac{2}{3}, \dfrac{BN}{SB} = \dfrac{BP}{BC} = \dfrac{1}{3}$

Đặt $V = V_{S.ABC}; V_1 = V_{MNPQCS}; V_2 = V_{MNPQAB} = V - V_1$.

$V_1 = V_{S.CQP} + V_{S.MPQ} + V_{S.MNP}$



Em lại có: $\dfrac{V_{S.AQP}}{V} = \dfrac{\frac{1}{3}d(S,(APQ)).S_{\Delta APQ}}{\frac{1}{3}d(S,(ABC)).S_{\Delta ABC}} = \dfrac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta ABC}}$

$= \dfrac{\frac{1}{2}d(P,AQ).AQ}{\frac{1}{2}d(B,AC).AC} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$.

$$\begin{cases} \dfrac{V_{S.MPQ}}{V_{S.APQ}} = \dfrac{V_{M.SPQ}}{V_{A.SPQ}} = \dfrac{MS}{AS} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{V_{S.APQ}}{V} = \dfrac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta APC}}.\dfrac{S_{\Delta APC}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{AQ}{AC}.\dfrac{CP}{CB} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow V_{S.MPQ} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{4}{9}V = \dfrac{4}{27}V$$

$$\begin{cases}\dfrac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABP}}=\dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SB}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}\\ \dfrac{V_{S.ABP}}{V}=\dfrac{S_{ABP}}{S_{ABC}}=\dfrac{BP}{BC}=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow V_{S.MNP}=\dfrac{2}{9}.\dfrac{1}{3}V=\dfrac{2}{27}V$$

$$\Rightarrow V_1=\dfrac{4V}{9}+\dfrac{4V}{27}+\dfrac{2V}{27}=\dfrac{2V}{3}\Rightarrow\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\dfrac{2V}{3}}{V-\dfrac{2V}{3}}=2.$$

→ **Đáp án C**

Câu 71:

Gọi O là tâm hình vuông ABCD, $SO\cap AC'=\{I\}$, $BI\cap SD=\{D'\}$

Mặt phẳng (ABC') chia khối chóp S.ABCD thành hai phần S.ABC'D' và ABC'D'CD

và $V_{S.ABC'D'}=V_{ABC'D'DC}=\dfrac{1}{2}V_{S.ABCD}$

Đặt $\dfrac{SC'}{SC}=x,\ 0<x<1$; em có $\dfrac{V_{S.AD'C'}}{V_{S.ADC}}=\dfrac{SD'}{SD}.\dfrac{SC'}{SC}=x^2$

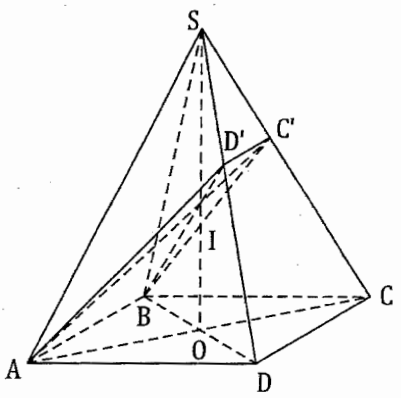
$\Rightarrow V_{S.AD'C'}=x^2V_{S.ADC}=\dfrac{x^2}{2}V_{S.ABCD}$.

$\dfrac{V_{S.ABC'}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SC'}{SC}=x\Rightarrow V_{S.ABC'}=xV_{S.ABC}=\dfrac{x}{2}V_{S.ABCD}$.

$\Rightarrow V_{S.ABC'D'}=V_{S.ABC'}+V_{S.AC'D'}=\dfrac{x^2+x}{2}V_{S.ABCD}$.

Mà $V_{S.ABC'D'}=\dfrac{1}{2}V_{S.ABCD}\Leftrightarrow\dfrac{x^2+x}{2}=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x^2+x-1=0\Rightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (Do $x>0$)



→ **Đáp án C**

Câu 72:

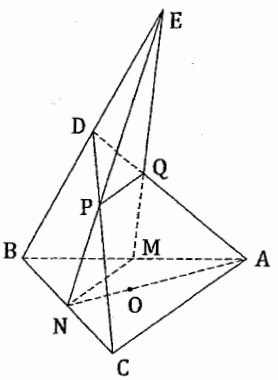
Gọi O là trọng tâm ΔABC, do ABCD là tứ diện đều nên AO là chiều cao của tứ diện.

$\Rightarrow AO=\sqrt{AD^2-OD^2}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{2}{3}.\dfrac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}a}{3}$.

$\Rightarrow d\left(B;(ACD)\right)=d\left(E;(ACD)\right)=\dfrac{\sqrt{6}a}{3}$

Gọi $NE\cap CD=\{P\}$; $ME\cap AD=\{Q\}$.

Em có: P là trọng tâm ΔEBC nên $\dfrac{CP}{CD}=\dfrac{2}{3}$



và Q là trọng tâm ΔEBA nên $\frac{AQ}{AD}=\frac{2}{3}$.

$V_{AMNCPQ}=V_{E.AMNC}-V_{E.ACPQ}$

• Tính $V_{E.AMNC}$

$d\left(E,(AMNC)\right)=d\left(E,(ABC)\right)=2d\left(D,(ABC)\right)=\frac{2\sqrt{6}a}{3}$.

$\frac{S_{\Delta BMN}}{S_{\Delta BAC}}=\frac{BM}{BA}\cdot\frac{BN}{BC}=\frac{1}{4}\Rightarrow S_{AMNC}=S_{\Delta ABC}-S_{\Delta BMN}=\frac{3}{4}S_{ABC}=\frac{3\sqrt{3}a^2}{16}$.

$\Rightarrow V_{E.AMNC}=\frac{1}{3}d\left(E,(AMNC)\right)\cdot S_{AMNC}=\frac{1}{3}\frac{2\sqrt{6}}{3}a\cdot\frac{a^2 3\sqrt{13}}{16}=\frac{\sqrt{2}a^3}{8}$.

• Tính $V_{E.ACPQ}$

$d\left(E,(AQPC)\right)=d\left(E,(ADC)\right)=d\left(B;(ACD)\right)=\frac{\sqrt{6}a}{3}$.

$\frac{S_{\Delta DQP}}{S_{\Delta DAC}}=\frac{DQ}{DA}\cdot\frac{DP}{DC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}\Rightarrow S_{ACPQ}=S_{\Delta DAC}-S_{\Delta DQP}=\frac{8}{9}S_{\Delta DAC}=\frac{8}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}a^2}{4}=\frac{2\sqrt{3}a^2}{9}$.

$\Rightarrow V_{E.ACPQ}=\frac{1}{3}d\left(E,(ACPQ)\right)\cdot S_{ACPQ}=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{6}}{3}a\cdot\frac{2}{9}a^2\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{2}a^3}{27}$.

$\Rightarrow V=V_{E.AMNC}-V_{E.ACPQ}=\frac{11\sqrt{2}a^3}{216}$.

→ **Đáp án B**

"Nếu bạn giỏi logic thì bạn sẽ đi được từ A đến B.
Nếu bạn giỏi tưởng tượng thì bạn sẽ đi đến bất kì nơi nào bạn muốn".

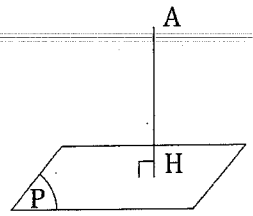
CHỦ ĐỀ 2: KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

A. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Định nghĩa

Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) là độ dài đoạn thẳng AH với H là hình chiếu vuông góc của A trên (P).

Vậy: $\boxed{d(A,(P))=AH}$



2. Cách xác định khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

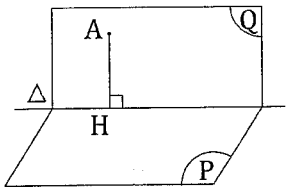
- **Cách 1:** Xác định khoảng cách bằng định nghĩa
- **Cách 2:** Xác định theo 3 bước sau:

Bước 1: Dựng mặt phẳng (Q) chứa A, (Q) ⊥ (P).

Bước 2: Tìm giao tuyến Δ của mặt phẳng (P) và (Q).

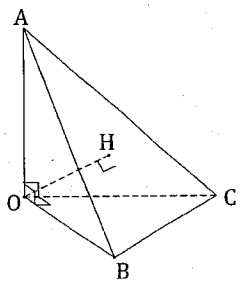
Bước 3: Trong (Q) kẻ AH ⊥ Δ, H ∈ Δ ⇒ AH ⊥ (P)

Vậy: $\boxed{d(A,(P))=AH}$



Đặc biệt: Nếu hình chóp O.ABC có OA, OB và OC đôi một vuông góc với nhau thì

$$\boxed{d(O,(ABC))=OH \text{ và } \frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}}$$



B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Phương pháp trực tiếp

Phương pháp giải:

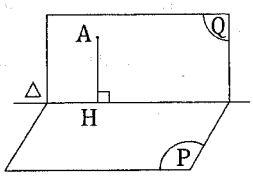
- **Cách 1:** Xác định khoảng cách bằng định nghĩa
- **Cách 2:** Xác định theo 3 bước sau:

Bước 1: Dựng mặt phẳng (Q) đi qua A, $(Q)\perp(P)$.

Bước 2: Tìm giao tuyến Δ của mặt phẳng (Q) và (P).

Bước 3: Trong (Q) kẻ $AH\perp\Delta$; $H\in\Delta\Rightarrow AH\perp(P)$.)

Vậy: **d(A, (P)) = AH**



BÀI TẬP MẪU

Cơ bản

Câu 1: Cho hình chóp ABCD có đáy BCD là tam giác vuông cân tại B, $CD=a\sqrt{2}$, AB vuông góc với mặt phẳng đáy, AB = b. Khoảng cách từ B đến (ACD) là

A. $\frac{ab}{\sqrt{2b^2+a^2}}$. B. $\frac{\sqrt{2b^2+a^2}}{ab}$. C. $\frac{1}{ab}$. D. $\sqrt{ab}$.

Hướng dẫn giải

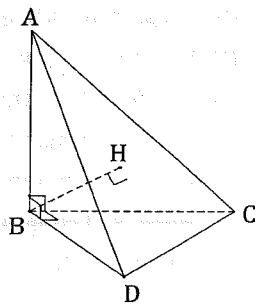
Em nhận thấy, AB, BC, BD đôi một vuông góc nên em có:

$d(B,(ACD))=BH$ và $\frac{1}{BH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{BC^2}+\frac{1}{BD^2}$

(Với H là hình chiếu vuông góc của B trên (ACD))

Em có ΔBCD vuông cân tại B, $CD=a\sqrt{2}$ nên BC = BD = a.

$\Rightarrow \frac{1}{BH^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{a^2+2b^2}{a^2b^2}\Rightarrow BH=\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$



→ **Đáp án A**

Câu 2: Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, SA = a. Đáy ABCD là hình chữ nhật có $AB=3a$, $AD=2a$. Tính khoảng cách từ:

a. Điểm A đến mặt phẳng (SBD) là

A. $\frac{6a}{7}$. B. $\sqrt{2}a$. C. $\sqrt{3}a$. D. a.

b. Điểm B đến mặt phẳng (SAD) là

A. a. B. 2a. C. 3a. D. $\frac{a}{2}$

c. Điểm D đến mặt phẳng (SAB) là

A. a. B. 2a. C. 3a. D. $\frac{a}{2}$.

d. Điểm C đến mặt phẳng (SAB) là

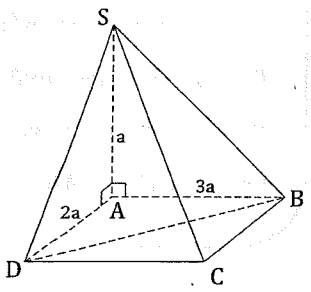
A. a. B. 2a. C. 3a. D. $\frac{a}{2}$.

Hướng dẫn giải

a. Em thấy SA, AD, AB đôi một vuông góc nên em có:

$d(A,(SBD))=h$ và $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AB^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(2a)^2}+\frac{1}{(3a)^2}\Rightarrow h=\frac{6a}{7}$. → **Đáp án A**



b. Em có: $\begin{cases} BA\perp SA\,(\text{Vì } SA\perp(ABCD)) \\ BA\perp AD\,(\text{Vì } ABCD \text{ là hình chữ nhật}) \end{cases}$

$\Rightarrow BA\perp(SAD)\Rightarrow d(B,(SAD))=BA=3a$. → **Đáp án C**

c. Em có: $\begin{cases} DA \perp SA \left(\text{Vì } SA \perp (ABCD)\right) \\ DA \perp AB \left(\text{Vì } ABCD \text{ là hình chữ nhật}\right) \end{cases}$

$\Rightarrow DA \perp (SAB) \Rightarrow d(D, (SAB)) = DA = 2a.$ **→ Đáp án B**

d. Em có: $\begin{cases} CB \perp SA \left(\text{Vì } SA \perp (ABCD)\right) \\ CB \perp AB \left(\text{Vì } ABCD \text{ là hình chữ nhật}\right) \end{cases}$

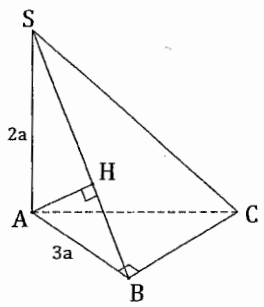
$\Rightarrow CB \perp (SAB) \Rightarrow d(C, (SAB)) = CB = 2a.$ **→ Đáp án B**

Câu 3: Cho hình chóp S.ABC với SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), SA = 2a. Tam giác ABC là tam giác vuông ở B có AB = 3a. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) theo a.

A. 3a. **B.** $\sqrt{13}a$. **C.** $6\sqrt{13}a$. **D.** $\frac{6\sqrt{13}a}{13}$.

Hướng dẫn giải

Bước 1: Xác định mặt phẳng chứa A, vuông góc với (SBC)



Em có: $BC \perp SA$ (Vì $SA \perp (ABC)$

$BC \perp AB$ (Vì ΔABC vuông tại B)

$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$

Bước 2: Tìm giao tuyến của (SBC) và (SAB)

Em lại có, $(SBC) \cap (SAB) = SB$

Bước 3: Trong (SAB) kẻ $AH \perp SB, H \in SB \Rightarrow AH \perp (SBC)$

thì d(A,(SBC)) = AH

Xét ΔSAB vuông tại A có đường cao AH, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông em được: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{9a^2} \Rightarrow AH = \frac{6a\sqrt{13}}{13}$.

→ Đáp án D

♥ Vận dụng

Câu 4: Cho hình chóp S.ABC với SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), SA = $\sqrt{3}a$, ABC là tam giác đều có cạnh bằng $\frac{2\sqrt{3}a}{3}$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) theo a.

A. $\sqrt{3}a$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. **C.** a. **D.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

Hướng dẫn giải

Bước 1: Xác định mặt phẳng chứa A, vuông góc với (SBC)

Kẻ AM là trung tuyến của ΔABC $(M \in BC)$

$\Rightarrow AM \perp BC$ (Do ΔABC đều)

Mà $SA \perp BC$ (Vì $SA \perp (ABC)$) $\Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow (SBC) \perp (SAM)$.

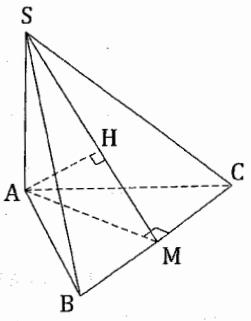
Bước 2: Tìm giao tuyến của (SBC) và (SAB)

Em lại có: $(SBC)\cap(SAM)=SM$.

Bước 3: Trong (SAM) kẻ $AH\perp SM, H\in SM\Rightarrow AH\perp(SBC)$

thì d(A,(SBC)) = AH

ΔABC đều có cạnh là $\frac{2\sqrt{3}a}{3}$ nên $AM=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{2\sqrt{3}a}{3}=a.$



Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAM em được:

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AM^2}\Rightarrow AH=\frac{SA.AM}{\sqrt{SA^2+AM^2}}=\frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

→ **Đáp án B**

Câu 5: Hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và SA = 3a. Cho AB = BC =2a, $\widehat{ABC}=120^0$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. 3a. **B.** 2a. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{3a}{2}$.

Hướng dẫn giải

Bước 1: Xác định mặt phẳng chứa A, vuông góc với (SBC)

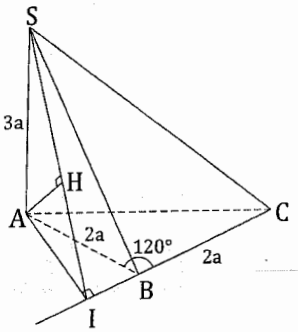
Kẻ đường cao AI của tam giác ABC

Do $\widehat{ABC}=120^0>90^0$ nên I nằm bên ngoài cạnh BC.

Em có: $AI\perp BC$

$SA\perp BC$ (Vì $SA\perp(ABC)$)

$\Rightarrow BC\perp(SAI)\Rightarrow(SBC)\perp(SAI)$



Bước 2: Tìm giao tuyến của (SBC) và (SAI)

Em lại có: $(SBC)\cap(SAI)=SI$

Bước 3: Trong (SAI) dựng $AH\perp SI, H\in SI\Rightarrow AH\perp(SBC)$ thì d(A, (SBC)) = AH

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ΔSAI em được:

$$\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{AH^2}\Rightarrow AH=\frac{SA\cdot AB\cdot\sin 60^0}{\sqrt{SA^2+\left(AB\cdot\sin 60^0\right)^2}}=\frac{3a}{2}.$$ → **Đáp án D**

Câu 6: Cho hình chóp đều S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh bằng a, $SA=a$. Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB).

A. $a\sqrt{2}$ **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** $a\sqrt{6}$ **D.** $a\frac{\sqrt{6}}{6}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Trong $(ABCD)$, kẻ $OI\perp AB, I\in AB$

Em có $SO\perp(ABCD)\Rightarrow SO\perp AB\Rightarrow AB\perp(SOI)$

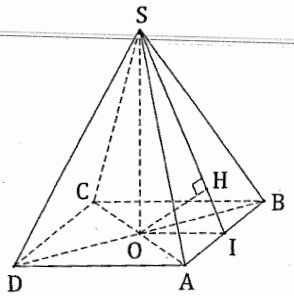
$\Rightarrow(SAB)\perp(SOI)$, $(SAB)\cap(SOI)=SI$.

Trong (SOI), kẻ $OH\perp SI, H\in SI\Rightarrow OH\perp(SBC)$ thì d (O,(SAB)) = OH.

$SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $OI=\frac{a}{2}$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ΔSOI

em được: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OS^2}+\frac{1}{OI^2}\Rightarrow OH=\sqrt{\frac{OS^2.OI^2}{OS^2+OI^2}}=\frac{a\sqrt{6}}{6}$



→ Đáp án D

Giải nhanh: Em thấy OS, OA, OB là đôi một vuông góc với nhau nên: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OB^2}$

$\Rightarrow\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}\Rightarrow OH=\frac{\sqrt{6}a}{6}$

*** Nâng cao**

Câu 7: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A, B. Cho AB = CB = a, AD = 2a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SA = $\sqrt{2}a$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).

A. a. **B.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **C.** $\sqrt{3}a$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Bước 1: Xác định mặt phẳng chứa A và vuông góc với (SCD).

Trong $(ABCD)$, kẻ $CI\perp AD\Rightarrow$ Tứ giác ABCI là hình vuông $\Rightarrow CI=a$.

Xét ΔACD có CI là trung tuyến

$\Rightarrow\Delta ACD$ là tam giác vuông tại C $\Rightarrow CD\perp AC$.

Mà $CD\perp SA$ (Vì $SA\perp(ABCD)$) $\Rightarrow CD\perp(SAC)$

$\Rightarrow(SCD)\perp(SAC)$.

Bước 2: Xác định giao tuyến của (SCD) và (SAC).

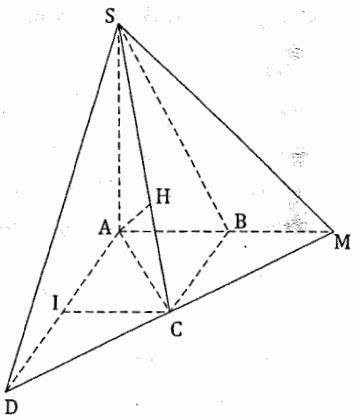
Em lại có: $(SCD)\cap(SAC)=SC$

Bước 3: Trong (SAC), kẻ $AH\perp SC$, $H\in SC$

thì d (A,(SCD)) =AH.

Xét ΔSAC vuông tại A, có đường cao AH, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông em có:

$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{SA^2}\Rightarrow AH=a$



→ Đáp án A

Giải nhanh: Gọi M là giao điểm của DC với AB.

Em có: d(A,(SCD)) = d(A,(SMD)) và AD, AS, AM đôi một vuông góc, áp dụng công thức em được: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AM^2}\Rightarrow AH=a$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 8: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a, BC = $\sqrt{3}$a có hai mặt phẳng (SAB), (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa SC với mặt phẳng đáy bằng 60^0. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{4\sqrt{39}a}{13}$. **B.** $\frac{\sqrt{39}a}{13}$. **C.** $\frac{2\sqrt{39}a}{39}$. **D.** $\frac{2\sqrt{39}a}{13}$.

Câu 9: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 1cm. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BDA').

A. 1cm. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$cm. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$cm. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$cm.

Câu 10: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SD = $\frac{3a}{2}$. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABCD) là trung điểm M của cạnh AB. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBD) theo a.

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a}{6}$. **C.** $\frac{a}{3}$. **D.** $\frac{a}{4}$.

Câu 11: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B với BS=$2\sqrt{3}$a, AB=3a, BC=4a. Mặt bên (SBC) vuông góc với đáy, $\widehat{SBC} = 30^0$. Tính khoảng cách từ H đến (SAC), biết rằng H là hình chiếu của S lên mặt đáy.

A. $\frac{3\sqrt{7}a}{14}$. **B.** $\frac{3\sqrt{14}a}{7}$. **C.** $\frac{3\sqrt{7}a}{7}$. **D.** $\frac{3\sqrt{14}a}{14}$.

Câu 12: Cho hình chóp S.ABCD với đáy ABCD là hình thoi cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy với $\widehat{BAD} = 120^0$. Cho M là trung điểm của cạnh BC và $\widehat{SMA} = 45^0$. Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

A. $\frac{\sqrt{6}a}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}a}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{4}a}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{4}a}{4}$.

Câu 13: Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) là trung điểm I của đoạn thẳng AB. Góc giữa A'C và mặt phẳng đáy là 60^0. Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (ACC'A').

A. $\frac{\sqrt{13}a}{13}$. **B.** $\frac{3\sqrt{13}a}{26}$. **C.** $\frac{\sqrt{13}a}{26}$. **D.** $\frac{\sqrt{26}a}{26}$.

Câu 14: Cho hình lăng trụ ABCD.$A_1B_1C_1D_1$ có đáy là hình chữ nhật với AB = a, AD = $\sqrt{3}$a. Hình chiếu vuông góc của A_1 lên (ABCD) trùng với giao điểm của AC và BD. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (A_1BD).

A. $\sqrt{2}$a. **B.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. **D.** $\sqrt{3}$a.

Câu 15: Cho khối lăng trụ đều ABC.A'B'C' có cạnh AB=AA'=a. Tính khoảng cách từ B' đến mặt phẳng (A'BC').

A. $\frac{2\sqrt{21}a}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{231}a}{7}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}a}{7}$. **D.** $\frac{\sqrt{21}a}{7}$.

Câu 16: Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' với đáy là tam giác vuông cân tại B và B'. Cho AA' = AB = a. Gọi M là trung điểm của BB'. Tính khoảng cách từ B' đến (A'MC').

A. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$. C. $\frac{\sqrt{6}a}{6}$. D. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

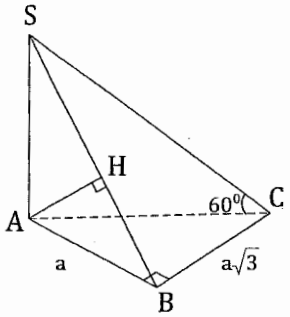
ĐÁP ÁN

8	9	10	11	12	13	14	15	16
D	B	C	A	B	B	C	D	C

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 8:

$\begin{cases}(SAB)\perp(ABC)\\(SAC)\perp(ABC)\\(SAB)\cap(SAC)=SA\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABC).$



$\Rightarrow$ Góc giữa SC và (ABC) chính là góc giữa SC, AC

hay $\widehat{SAC}=60^0\Rightarrow SA=AC.\tan 60^0=2\sqrt{3}a.$

Em có: $SA\perp BC$ (Do $SA\perp(ABC)$).

$AB\perp BC$ (ΔABC vuông ở B).

$\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow(SBC)\perp(SAB)$; $(SBC)\cap(SAB)=SB$.

Trong (SAB) dựng $AH\perp SB, H\in SB\Rightarrow AH\perp(SBC)$ thì d(A, (SBC)) = AH.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ΔSAB em có: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AB^2}$

$\Rightarrow AH=\frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\frac{2\sqrt{3}a.a}{\sqrt{12a^2+a^2}}=\frac{2\sqrt{39}a}{13}.$ **→ Đáp án D**

Câu 9:

Cách 1: Gọi giao điểm của AC và BD là O.

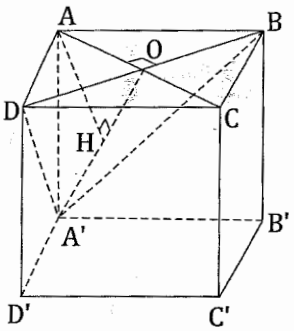
Em có: $AO\perp BD$; $A'A\perp BD\Rightarrow BD\perp(AOA')$

$\Rightarrow(A'BD)\perp(AOA')$; $(A'BD)\cap(AOA')=A'O$

Trong (A'AO), kẻ $AH\perp A'O, H\in A'O\Rightarrow AH\perp(A'BD)$

thì d (A, (A'BD))=AH.

Xét $\Delta AA'O$ là tam giác vuông ở A với đường cao AH, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông em có:



$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AO^2}+\frac{1}{AA'^2}\Rightarrow AH=\frac{A'A.AO}{\sqrt{A'A^2+AO^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$

→ Đáp án B

Giải nhanh: Em thấy AA', AD, AB đôi một vuông góc nên $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{A'A^2}+\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AB^2}$

$\Rightarrow\frac{1}{AH^2}=1+1+1\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{3}}{3}.$

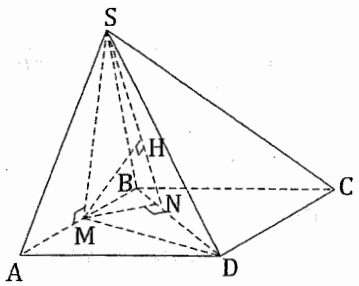
Câu 10:

Trong $(ABCD)$, kẻ $MN \perp BD$ $(N \in BD)$.

Em có: $SM \perp BD$ $(SM \perp (ABCD))$.

$\Rightarrow BD \perp (SMN) \Rightarrow (SBD) \perp (SMN); (SBD) \cap (SMN) = SN.$

Trong (SMN), kẻ $MH \perp SN$, $H \in SN \Rightarrow MH \perp (SBD)$ thì $d(M, (SBD)) = MH$.



ΔMBN vuông tại N nên $MN = MB.\sin 45^0 = \dfrac{\sqrt{2}a}{4}$.

ΔSMD có $SM = \sqrt{SD^2 - MD^2} = \sqrt{\dfrac{9a^2}{4} - \left(\dfrac{a^2}{4} + a^2\right)} = a.$

Xét ΔSMN vuông tại M có đường cao là MH, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông em được: $\dfrac{1}{SM^2} + \dfrac{1}{MN^2} = \dfrac{1}{MH^2} \Rightarrow MH = \dfrac{SM.MN}{\sqrt{SM^2 + MN^2}} = \dfrac{a}{3}$. → **Đáp án C**

Câu 11:

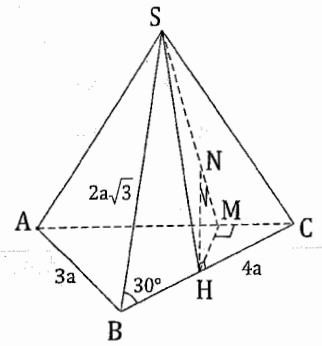
$SH \perp AC$ (Do $SH \perp (ABC)$).

Trong (ABC), $HM \perp AC$, $M \in AC \Rightarrow AC \perp (SHM)$

$\Rightarrow (SMH) \perp (SAC)$; $(SHM) \cap (SAC) = SM$

Trong (SHM), kẻ $HN \perp SM$, $N \in SM \Rightarrow HN \perp (SAC)$

thì $d(H, (SAC)) = HN$



ΔSBH vuông tại H và $\widehat{SBC} = 30^0$ nên em có:

$SH = SB.\sin 30^0 = \sqrt{3}a.$

Tương tự em được $BH = SB.\cos 30^0 = 3a \Rightarrow HC = a$

Trong ΔHMC có $HM = HC.\sin MCH = HC.\dfrac{3a}{5a} = \dfrac{3a}{5}$.

Tam giác SHM vuông tại H, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông em có:

$$\frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2} = \frac{1}{HN^2} \Rightarrow \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{\frac{9a^2}{25}} = \frac{1}{HN^2} \Rightarrow HN = \frac{3\sqrt{7}a}{14}$$ → **Đáp án A**

Câu 12:

Do $\widehat{BAD} = 120^0$ nên $\widehat{BAC} = 60^0$.

(ABCD là hình thoi nên AC là phân giác)

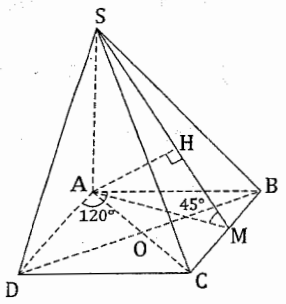
ΔABC có AB = BC; $\widehat{BAC} = 60^0$ nên ΔABC là tam giác đều $\Rightarrow AM \perp BC$

Mà $SA \perp BC$ (Do $SA \perp (ABCD)$).

$\Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow (SBC) \perp (SAM)$; $(SBC) \cap (SAM) = SM$.

Trong (SAM) kẻ $AH \perp SM$, $H \in SM \Rightarrow AH \perp (SBC)$

thì $d(A, (SBC)) = AH$.



Xét ΔAHM vuông tại H nên em có: $AH = AM \cdot \sin 45^0 = \frac{\sqrt{3}a}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}a}{4}$. → **Đáp án B**

Câu 13:

Cách 1: Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AC $\Rightarrow$ BM ⊥ AC (Do ΔABC đều)

Do $A'I \perp (ABC)$ nên $A'I \perp AC$ (1)

Trong (ABC) kẻ IN // BM, $N \in AC \Rightarrow IN \perp AC$ (2)

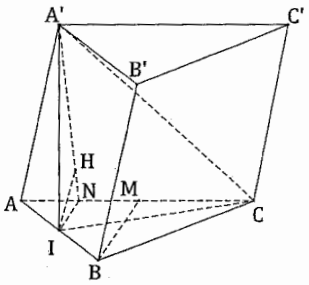
Từ (1), (2) $\Rightarrow AC \perp (A'IN) \Rightarrow (ACC'A') \perp (A'IN)$; $(ACC'A') \cap (A'IN) = A'N$

Trong (A'IN) kẻ $IH \perp A'N$, $H \in A'N \Rightarrow IH \perp (ACC'A')$ thì d(I, (ACC'A')) = IH

Em tính được $A'I = CI.\tan 60^0 = \frac{3a}{2}$; $IN = \frac{1}{2}BM = \frac{\sqrt{3}a}{4}$.

Xét $\Delta A'IN$ vuông tại I, có đường cao IH, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông em có:

$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{A'I^2} + \frac{1}{IN^2} \Rightarrow IH = \frac{3\sqrt{13}a}{26}$. → **Đáp án B**



Giải nhanh: Dễ thấy IA, IA', IC đôi một vuông góc với nhau, áp dụng công thức em có:

$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IA'^2} + \frac{1}{IC^2} = \frac{1}{\frac{a^2}{4}} + \frac{1}{\frac{3a^2}{4}} + \frac{1}{\frac{9a^2}{4}} \Rightarrow IH = \frac{3\sqrt{13}a}{26}$

Câu 14:

Gọi $AC \cap BD = O$.

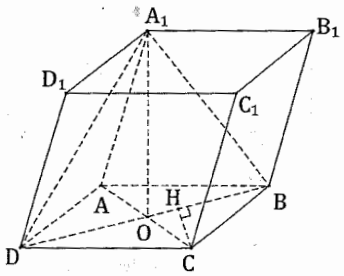
Dựng hình chiếu H của C lên BD $\Rightarrow CH \perp BD$

Em có: $A_1O \perp CH$ ($A_1O \perp (ABCD)$).

$\Rightarrow CH \perp (A_1BD) \Rightarrow d(C,(A_1BD)) = CH$

Xét ΔCBD vuông tại C với đường cao CH, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông em có:

$\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CD^2} + \frac{1}{CB^2} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ → **Đáp án C**



Câu 15:

Gọi M' là trung điểm A'C' $\Rightarrow$ B'M' ⊥ A'C' (1)

Kẻ M'M //AA' $\Rightarrow$ MM' ⊥ (A'B'C') $\Rightarrow$ MM' ⊥ A'C' (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ A'C' ⊥ (BMM'B') $\Rightarrow$ (BA'C') ⊥ (BMM'B')

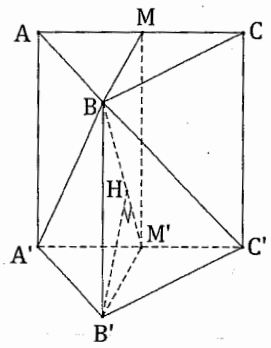
Em có: $(BA'C') \cap (BMM'B') = BM'$

Trong (BMM'B'), kẻ $B'H \perp BM'$, $H \in BM' \Rightarrow B'H \perp (BA'C')$

thì d(B',(BA'C')) = B'H.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông $\Delta B'BM'$ em được: $\frac{1}{B'H^2} = \frac{1}{B'M'^2} + \frac{1}{BB'^2} \Rightarrow B'H = \frac{\sqrt{21}a}{7}$

→ **Đáp án D**



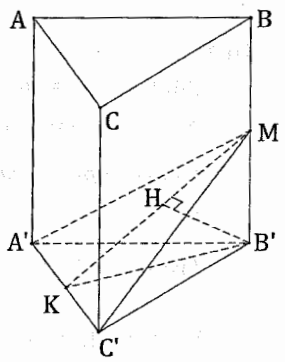
Câu 16:

Cách 1: Dựng hình chiếu của B' lên mặt phẳng (A'MC') bằng cách kẻ $B'K \perp A'C$

$\Rightarrow (B'MK) \perp (MA'C'); (B'MK) \cap (MA'C') = MK$

Trong (B'MK) dựng $B'H \perp MK$, $H \in MK \Rightarrow B'H \perp (A'MC')$

$\Rightarrow B'H = d(B', (A'MC'))$



Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông B'MK em có: $\frac{1}{B'H^2} = \frac{1}{B'M^2} + \frac{1}{B'K^2} \Rightarrow B'H = \frac{\sqrt{6}a}{6}$.

→ **Đáp án C**

Giải nhanh: Xét hình chóp B'.A'C'M có B'A', B'C', B'M đôi một vuông góc với nhau

Áp dụng công thức em có: $\frac{1}{B'H^2} = \frac{1}{B'A^2} + \frac{1}{B'M^2} + \frac{1}{B'C'^2} \Rightarrow B'H = \frac{\sqrt{6}a}{6}$

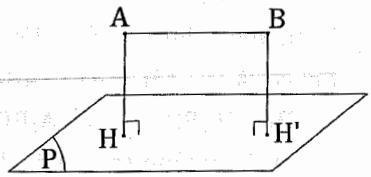
Dạng 2: Phương pháp gián tiếp

Phương pháp chung: Để tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P), em đi tìm một điểm B sao cho việc tính khoảng cách từ B đến (P) dễ hơn so với điểm A. Tổng quát có hai cách sau:

☞ **Cách 1:** lưu ý 2 trường hợp

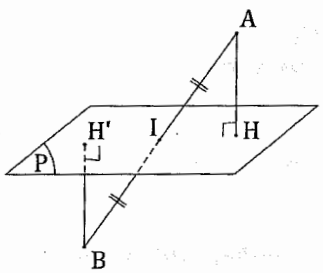
➢ **Trường hợp 1:** $AB // (P)$ thì

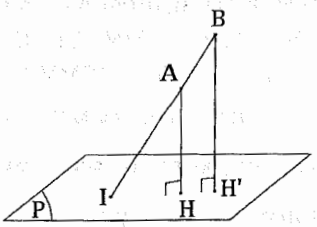
$$\mathbf{d(A,(P)) = d(B,(P))}$$



➢ **Trường hợp 2:** $AB \cap (P) = \{I\}$ thì $\frac{\mathbf{d(A,(P))}}{\mathbf{d(B,(P))}} = \frac{\mathbf{AI}}{\mathbf{BI}}$.

Đặc biệt, nếu I là trung điểm AB thì $d(A,(P)) = d(B,(P))$.





☞ **Cách 2:** $h = \frac{3V}{S}$; trong đó: h là khoảng cách từ đỉnh đến đáy; V, S lần lượt là thể tích và diện tích của khối chóp.

BÀI TẬP MẪU

Cơ bản

Câu 17: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SA = $\sqrt{3}a$. Điểm N thuộc cạnh SA sao cho SN = 3AN. Tính khoảng cách từ

a. Điểm B đến mặt phẳng (SCD)

A. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}a}{3}$.

b. Điểm O đến mặt phẳng (SCD) với O là tâm của hình vuông ABCD

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}a}{4}$.

c. Điểm C đến mặt phẳng (SBD)

A. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}a}{21}$. **C.** $\frac{\sqrt{7}a}{21}$. **D.** $\frac{\sqrt{7}a}{7}$.

d. Điểm N đến mặt phẳng (SCD)

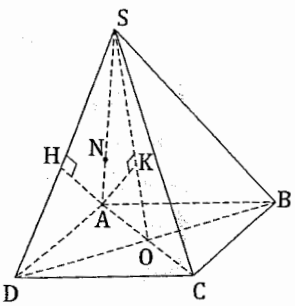
A. $\frac{2\sqrt{3}a}{3}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}a}{8}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a}{8}$.

e. Điểm G đến mặt phẳng (SAB), với G là trọng tâm của ΔSDA.

A. $\frac{2a}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a}{8}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **D.** $\frac{a}{3}$.

Hướng dẫn giải

a. Do AB//(SCD) $\Rightarrow$ d(B, (SCD)) = d(A, (SCD))



Em có: $\begin{cases} SA \perp CD \left(Do\, SA \perp (ABCD)\right) \\ AD \perp CD \left(Do\, ABCD \text{ là hình vuông}\right) \end{cases}$

$\Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD);\ (SCD) \cap (SAD) = SD$

Trong (SAD) dựng $AH \perp SD, H \in SD \Rightarrow AH \perp (SCD)$

thì d(A, (SCD)) = AH.

Xét ΔSAD vuông tại A có AH là đường cao, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông em có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2}$

$$\Rightarrow AH = \frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{\sqrt{3}a.a}{\sqrt{3a^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

$\rightarrow$ **Đáp án B**

b. Em thấy $AO \cap (SCD) = \{C\} \Rightarrow \frac{d(O,(SCD))}{d(A,(SCD))} = \frac{OC}{AC} \Rightarrow d(O,(SCD)) = \frac{OC}{AC} \cdot d(A,(SCD))$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{4}$ $\rightarrow$ **Đáp án B**

c. Em thấy O là trung điểm AC nên $d(C,(SBD))=d(A,(SBD))$

$$\begin{cases} SA\perp BD\ (Do\ SA\perp(ABCD)) \\ AC\perp BD(Do\ ABCD\ là\ hình\ vuông) \end{cases} \Rightarrow BD\perp(SAC)\Rightarrow(SBD)\perp(SAC)$$

Em lại có: $(SBD)\cap(SAC)=SO$

Trong (SAC) kẻ $AK\perp SO,\ K\in SO\Rightarrow AK\perp(SBD)$ thì d(A, (SBD)) = AK.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ΔSAO em có: $\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AO^2}$

$$\Rightarrow AK=\frac{SA\cdot AO}{\sqrt{SA^2+AO^2}}=\frac{\sqrt{21}a}{7}=d(C,(SBD))$$

→ **Đáp án A**

d. Em có $AN\cap(SCD)=\{S\}\Rightarrow d(N,(SCD))=\frac{NS}{AS}.d(A,(SCD))=\frac{3}{4}.\frac{\sqrt{3}a}{2}=\frac{3\sqrt{3}a}{8}.$

→ **Đáp án B**

e. Gọi K_1 là trung điểm của SA.

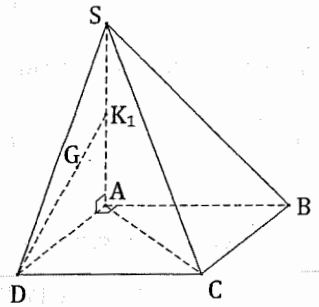
Em nhận thấy, $DA\perp SA\ (Do\ SA\perp(ABCD))$

ABCD là hình vuông nên $DA\perp AB$

$\Rightarrow DA\perp(SAB)\Rightarrow d(D,(SAB))=DA$

Trong (SAD), DG cắt SA tại $K_1\Rightarrow DG\cap(SAB)=K_1$.

$\Rightarrow d(G,(SAB))=\frac{1}{3}d(D,(SAB))=\frac{1}{3}DA=\frac{a}{3}.$



→ **Đáp án D**

Câu 18: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh bằng 4cm. Mặt bên (SAD) nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Hình chiếu vuông góc của S trên đáy là điểm H thuộc AD sao cho AH = 3DH. Góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Tính khoảng cách từ điểm A đến (SCD).

A. $\frac{10\sqrt{57}}{38}$cm. **B.** $\frac{5\sqrt{57}}{38}$cm. **C.** $\frac{10\sqrt{57}}{19}$cm. **D.** $\frac{5\sqrt{57}}{19}$cm.

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết em suy ra được $SH\perp(ABCD)$.

$\Rightarrow$ HB là hình chiếu vuông góc của SB trên mặt đáy.

$\Rightarrow$ Góc giữa SB và $(ABCD)$ chính là góc giữa SB, HB

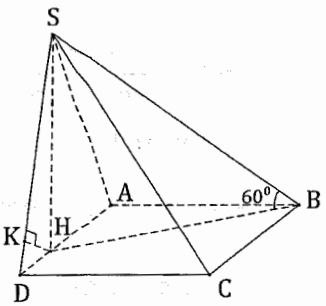
hay $\widehat{SBH}=60^0$.

Em có: AH = 3DH nên $d(A,(SCD))=4d(H,(SCD))$.

Mà: SH ⊥ CD (Do SH ⊥ (ABCD)).

HD⊥ CD (Do ABCD là hình vuông).

$\Rightarrow CD\perp(SHD)\Rightarrow(SCD)\perp(SHD);\ (SCD)\cap(SHD)=SD$



Trong (SHD) dựng $HK \perp SD,\ K \in SD \Rightarrow HK \perp (SCD)$ thì d(H, (SCD))=HK.

Em có: $SH = HB.\tan 60^0 = \sqrt{AH^2 + AB^2}.\tan 60^0 = \sqrt{3^2 + 4^2}.\tan 60^0 = 5\sqrt{3}.$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ΔSHD em có:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HD^2} \Rightarrow HK = \frac{SH.HD}{\sqrt{SH^2 + HD^2}} = \frac{5\sqrt{57}}{38} \Rightarrow d\left(A,(SCD)\right) = \frac{10\sqrt{57}}{19}.$$

→ **Đáp án C**

♥ Vận dụng

Câu 19: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = 2a, AC = 4a. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên (ABC) là trung điểm H của AC. Góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

A. $\frac{\sqrt{39}a}{13}$. **B.** $\frac{4\sqrt{39}a}{13}$. **C.** $\frac{3\sqrt{13}a}{13}$. **D.** $\frac{4\sqrt{13}a}{13}$.

Hướng dẫn giải

SH ⊥ (ABC) nên AH là hình chiếu của AS trên mặt đáy (SAH).

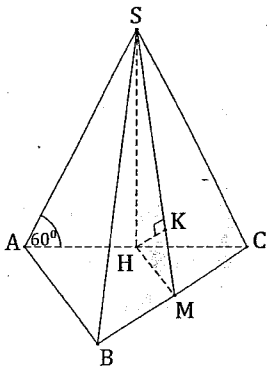
Vì H là trung điểm của AC nên $d\left(A,(SBC)\right) = 2d\left(H,(SBC)\right)$.

Từ H, kẻ HM//AB ⇒ HM⊥BC.

Do SH⊥(ABC) ⇒ SH⊥BC ⇒ BC⊥(SHM) ⇒ (SBC)⊥(SHM); $(SBC) \cap (SHM) = SM$

Trong (SHM) dựng $HK \perp SM,\ K \in SM \Rightarrow HK \perp (SBC)$ thì d(H, (SBC)) = HK.

$SH = AH.\tan 60^0 = 2\sqrt{3}a;\ HM = \frac{1}{2}AB = a.$



Xét ΔSHM vuông tại H có đường cao HK, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông em có:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2} \Rightarrow HK = \frac{SH.HM}{\sqrt{SH^2 + HM^2}} = \frac{2\sqrt{39}a}{13} = d\left(H,(SBC)\right).$$

Mà H là trung điểm của AC nên $\frac{d\left(H,(SBC)\right)}{d\left(A,(SBC)\right)} = \frac{HC}{AC} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow d\left(A,(SBC)\right) = 2d\left(H,(SBC)\right) = \frac{4\sqrt{39}a}{13}.$$ → **Đáp án B**

Câu 20: Cho hình chóp S.ABC, ABC là tam giác vuông ở B có AB = 2a, $\widehat{BAC} = 60^0$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và SA = $\sqrt{3}$a. M là trung điểm của cạnh AB. Tính khoảng cách từ B đến (SMC).

A. $\frac{\sqrt{51}a}{17}$. **B.** $\frac{\sqrt{17}a}{17}$. **C.** $\frac{2\sqrt{17}a}{17}$. **D.** $\frac{2\sqrt{51}a}{17}$.

Hướng dẫn giải

Em có: M là trung điểm AB nên $d\left(B,(SCM)\right) = d\left(A,(SCM)\right)$

Trong (ABC), kẻ $AK \perp MC, K \in MC$

Em lại có SA ⊥ MC (Do SA ⊥ (ABC)).

Vậy $MC \perp (SAK) \Rightarrow (SMC) \perp (SAK); (SMC) \cap (SAK) = SK$

Trong (SAK), kẻ $AH \perp SK$, $H \in AK \Rightarrow AH \perp (SMC)$

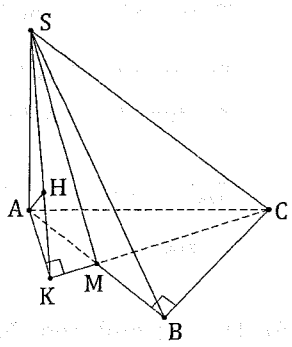
thì d(A, (SMC)) = AH

Trong ΔABC em có: $BC = AB.\tan 60^0 = 2\sqrt{3}a$;

$CM = \sqrt{CB^2 + BM^2} = \sqrt{13}a$

Mà $\Delta AKM \sim \Delta CBM$ nên $\frac{AK}{AM} = \frac{BC}{MC}$

$\Rightarrow AK = \frac{BC}{MC}.AM = \frac{2\sqrt{39}a}{13}$.



Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông SAK em tính được AH = $\frac{2\sqrt{51}a}{17}$.

$\Rightarrow d(B,(SCM)) = d(A,(SCM)) = \frac{2a\sqrt{51}}{17}$.

→ Đáp án D

*** Nâng cao**

Câu 21: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SMN).

A. $\frac{a}{7}$. **B.** $\frac{2a}{7}$. **C.** $\frac{3a}{7}$. **D.** $\frac{4a}{7}$.

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC $\Rightarrow SG \perp (ABC)$ (Do S.ABC là hình chóp tam giác đều)

$AG \cap (SMN) = \{N\} \Rightarrow d(A,(SMN)) = \frac{AN}{NG} d(G,(SMN)) = 3.d(G,(SMN))$.

Trong (ABC), gọi giao điểm của BG và MN là K.

Em có: $GK \perp MN$; $SG \perp MN \Rightarrow MN \perp (SGK) \Rightarrow (SMN) \perp (SGK)$.

$(SMN) \cap (SGK) = SK$

Trong (SKG), dựng $GH \perp SK \Rightarrow GH \perp (SMN)$

thì d(G, (SMN)) = GH.

Em có SG = AG. $\tan 60^0$ = a;

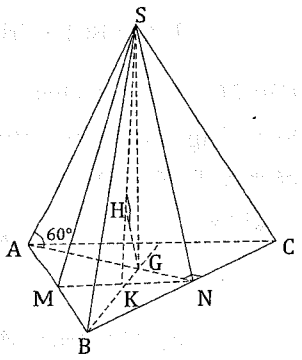
$GK = BG - BK = \frac{\sqrt{3}a}{2}.\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}a}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{12}$.

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông SKG

em được: $\frac{1}{GH^2} = \frac{1}{GK^2} + \frac{1}{SG^2} \Rightarrow GH = \frac{a}{7}$.

Vậy $d(A,(AMN)) = \frac{3a}{7}$.

→ Đáp án C



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 22: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh $\frac{2\sqrt{3}a}{3}$. Gọi I là trung điểm của cạnh AB. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt đáy là trung điểm H của CI, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy bằng 45^0. Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SBC) là

A. $\frac{2\sqrt{31}a}{7}$. **B.** $\frac{\sqrt{31}a}{7}$. **C.** $\frac{\sqrt{217}a}{31}$. **D.** $\frac{\sqrt{217}a}{62}$.

Câu 23: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{21}}{6}$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{a}{4}$. **B.** $\frac{3a}{4}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a}{6}$.

Câu 24: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a, AC = $a\sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB).

A. $\frac{\sqrt{6}a}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}a}{4}$. **C.** a **D.** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Câu 25: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A và AB = 2a. Hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) là trung điểm H của AB, SH = $\frac{a}{2}$. Tính khoảng cách từ trung điểm M của BC lên mặt phẳng (SAC).

A. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}a}{5}$. **C.** $\frac{3\sqrt{5}a}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}a}{10}$.

Câu 26: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, hình chiếu S lên mặt phẳng (ABCD) trùng với trọng tâm G của tam giác ABD. Cho SG = $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính theo a khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB).

A. $\frac{\sqrt{3}a}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Câu 27: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = a, AC = $a\sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

A. $\frac{\sqrt{39}a}{13}$. **B.** $\frac{2\sqrt{39}a}{13}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. **D.** a.

Câu 28: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SD = $\frac{3a}{2}$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt đáy là trung điểm M của AB. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD).

A. $\frac{2a}{3}$. **B.** $\frac{a}{6}$. **C.** $\frac{a}{3}$. **D.** $\frac{a}{4}$.

Câu 29: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $SB=2\sqrt{3}a$, $AB=3a$, $BC=4a$. Mặt bên (SBC) vuông góc với mặt đáy, $\widehat{SBC}=30^0$. Tính khoảng cách từ B đến (SAC).

A. $\frac{6\sqrt{7}a}{7}$. **B.** $\frac{3\sqrt{14}a}{7}$. **C.** $\frac{3\sqrt{7}a}{7}$. **D.** $\frac{3\sqrt{14}a}{14}$.

Câu 30: Cho hình chóp S.ABCD với ABCD là hình thoi cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy với $\widehat{BAD}=120^0$. Cho M là trung điểm của cạnh BC và $\widehat{SMA}=45^0$. Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{\sqrt{6}a}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}a}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{4}a}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{4}a}{4}$.

Câu 31: Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) là trung điểm I của đoạn thẳng AB. Góc giữa A'C và mặt phẳng đáy là 60^0. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(ACC'A')$.

A. $\frac{3\sqrt{13}a}{13}$. **B.** $\frac{3\sqrt{13}a}{26}$. **C.** $\frac{\sqrt{13}a}{26}$. **D.** $\frac{\sqrt{26}a}{26}$.

Câu 32: Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, $AD=a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A_1 lên (ABCD) trùng với giao điểm của AC và BD. Tính khoảng cách từ B_1 đến mặt phẳng (A_1BD).

A. $\sqrt{2}a$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. **D.** $\sqrt{3}a$.

Câu 33: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A, B; AB = CB =a, AD = 2a. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA=a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD).

A. a. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\sqrt{3}a$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Câu 34: Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh 2a và thể tích bằng a^3. Chiều cao h của hình chóp đó là

A. $h=\frac{\sqrt{3}a}{6}$. **B.** $h=\frac{\sqrt{3}a}{2}$. **C.** $h=\frac{\sqrt{3}a}{3}$. **D.** $h=\sqrt{3}a$.

Câu 35: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp S.ABCD là $\frac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).

A. $h=\frac{2a}{3}$. **B.** $h=\frac{4a}{3}$. **C.** $h=\frac{8a}{3}$. **D.** $h=\frac{3a}{4}$.

Câu 36: Cho hình chóp S. ABCD có đáy là hình chữ nhật tâm I, $AB=SA=a$, $BC=a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy là trung điểm H của AI . Biết tam giác ΔSAC vuông tại S. Tính khoảng cách từ C đến (SBD).

A. $\frac{\sqrt{5}a}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{15}a}{15}$. **D.** $\frac{\sqrt{15}a}{5}$.

Câu 37: Trong không gian cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có AB = a, AC = 2a, $AA'=2a\sqrt{5}$, $\widehat{BAC}=120^0$. Gọi M là trung điểm cạnh CC'. Tính khoảng cách từ A tới mặt phẳng $(A'BM)$.

A. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. **B.** $\sqrt{3}a$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}a}{3}$.

Câu 38: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, AB = a, $BC=a\sqrt{2}$, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{3}$. M là trung điểm của SD, N là trung điểm của AD. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua B, M và cắt mặt phẳng (SAC) theo một đường thẳng vuông góc với đường thẳng BM. Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (P).

A. $\frac{\sqrt{2}a}{9}$. **B.** $\frac{2\sqrt{2}a}{9}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a}{3}$. **D.** $\frac{4\sqrt{2}a}{9}$.

Câu 39: Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a, $AA'=2a$; $A'C=3a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng A'C', I là giao điểm của AM và A'C. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC).

A. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}a}{5}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}a}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a}{5}$.

Câu 40: Trong mặt phẳng (α) cho tam giác ABC vuông tại A có BC = 2a, $\widehat{ACB}=60^0$. Dựng hai đoạn BB' = a, CC' = 2a cùng vuông góc với mặt phẳng (α) và ở cùng một bên đối với (α). Hãy chọn đáp án đúng.

a. Khoảng cách từ C' đến mặt phẳng (ABB').

A. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. **B.** a. **C.** $\frac{2a}{5}$. **D.** $\sqrt{3}a$.

b. Khoảng cách từ trung điểm M của B'C đến mặt phẳng (ACC').

A. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. **B.** a. **C.** $\frac{2a}{5}$. **D.** $\sqrt{3}a$.

c. Khoảng cách từ B' đến mặt phẳng (ABC').

A. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}a}{5}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}a}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a}{5}$.

d. Khoảng cách từ trung điểm I của BC đến mặt phẳng $(AB'C')$.

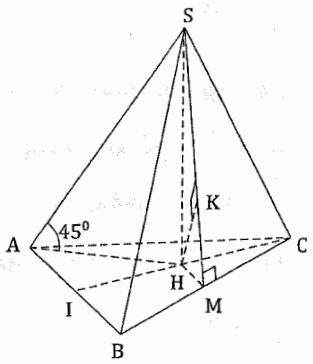
A. $\frac{\sqrt{5}a}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}a}{3}$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}a}{8}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a}{4}$.

ĐÁP ÁN

22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
C	B	A	B	C	B	A	A	B	A	C
33	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40a**	**40b**	**40c**	**40d**
B	D	B	D	D	D	A	B	A	B	C

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 22:



Do H là trung điểm của IC nên $d(I,(SBC))=2d(H,(SBC))$

Trong (ABC), kẻ $HM\perp BC, M\in BC$

Em lại có $SH\perp BC$ (Do $SH\perp(ABC)$)

$\Rightarrow BC\perp(SHM)\Rightarrow(SBC)\perp(SHM)$; $(SBC)\cap(SHM)=SM$

Trong (SHM) dựng $HK\perp SM$, $K\in SM$ thì

d(H, (SBC)) = HK.

Do ΔSAH vuông cân tại H nên em suy ra được:

$SH = AH = \sqrt{AI^2+IH^2}=\dfrac{a\sqrt{21}}{6}$

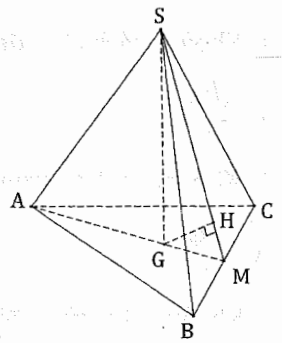
$HM = HC.\sin 30^0 = \dfrac{a}{4}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ΔSHM em có: $\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{HM^2}$

$\Rightarrow HK=\dfrac{SH.HM}{\sqrt{SH^2+HM^2}}=\dfrac{a\sqrt{217}}{62}\Rightarrow d(I,(SBC))=2HK=\dfrac{a\sqrt{217}}{31}$

→ Đáp án C

Câu 23:



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Do S.ABC là hình chóp tam giác đều nên $SG\perp(ABC)$

$\Rightarrow SG\perp BC$.

Gọi M là trung điểm của $BC\Rightarrow GM\perp BC$

$\Rightarrow BC\perp(SGM)$

$\Rightarrow(SBC)\perp(SGM)$; $(SGM)\cap(SBC)=\{SM\}$

Trong (SGM) dựng $GH\perp SM$, $H\in SM\Rightarrow GH\perp(SBC)$

thì d(G,(SBC)) = GH.

Em có: $SG=\sqrt{SA^2-AG^2}=\sqrt{\dfrac{7a^2}{12}-\dfrac{a^2}{3}}=\dfrac{a}{2}$; $GM=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông SGM em tính được $GH=\dfrac{a}{4}$

$\Rightarrow d(A,(SBC))=3d(G,(SBC))=\dfrac{3a}{4}$. **→ Đáp án B**

Câu 24:

Gọi H là trung điểm của $BC\Rightarrow SH\perp BC$.

$\Rightarrow SH\perp(ABC)$ (Do $(SBC)\perp(ABC)$)

Do H là trung điểm BC nên d(C,(SAB)) = 2d(H,(SAB)).

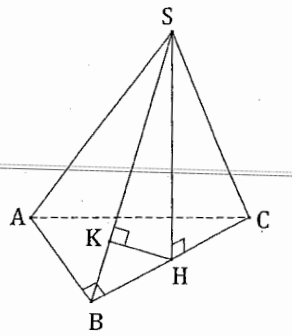
Em có: $\begin{cases} BH \perp AB \left(\text{tam giác ABC vuông tại B}\right) \\ SH \perp AB \left(SH \perp (ABC)\right) \end{cases}$

$\Rightarrow AB \perp (SBH) \Rightarrow (SAB) \perp (SBH);\ (SAB) \cap (SBH) = SB$

Trong (SBH) dựng $HK \perp SB\ (K \in SB) \Rightarrow HK \perp (SAB)$

thì d(H,(SAB)) = HK.

Em có $BH = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $SH = BC.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.



Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông SHB em tính được:

$HK = \frac{SH.BH}{\sqrt{SH^2 + BH^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4} \Rightarrow d(C,(SAB)) = 2d(H,(SAB)) = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. → **Đáp án A**

Câu 25:

Em có: HM//AC ⇒ d(M, (SAC)) = d(H, (SAC))

$\begin{cases} AH \perp AC \left(\Delta ABC \text{ vuông tại A}\right) \\ SH \perp AC \left(SH \perp (ABC)\right) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SAH)$

$\Rightarrow (SAC) \perp (SAH)$.

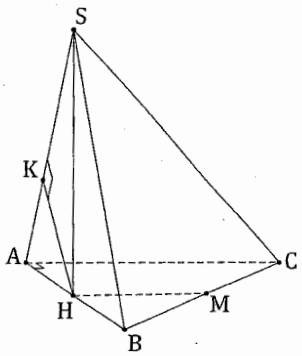
$(SAC) \cap (SAH) = SA$.

Trong (SAH), kẻ $HK \perp SA\ (K \in SA) \Rightarrow HK \perp (SAC)$

thì d(H,(SAC)) = HK.

Sử dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông SAH em có:

$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HA^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{5}}{5}$ → **Đáp án B**



Câu 26:

Cách 1: Nhận thấy: $AG = \frac{1}{3}AC$ nên em suy ra được:

$d\left(C,(SAB)\right) = 3d\left(G,(SAB)\right)$

Dựng hình chiếu của G trên (SAB) như sau:

Trong (ABCD), qua G kẻ $GN \perp AB\ (N \in AB)$

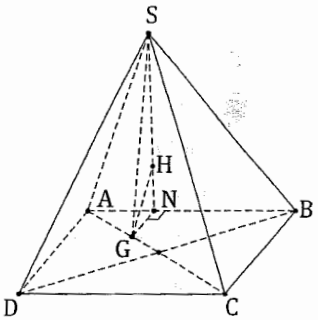
Mà $SN \perp AB$ nên $AB \perp (SGN)$

$\Rightarrow (SAB) \perp (SGN);\ (SAB) \cap (SGN) = SN$

Trong (SGN), kẻ $GH \perp SN\ (H \in SN) \Rightarrow GH \perp (SAB)$

thì $d\left(G,(SAB)\right) = GH$

Em lại có, $AG = \frac{1}{3}AC$ nên $GN = \frac{1}{3}BC = \frac{a}{3}$

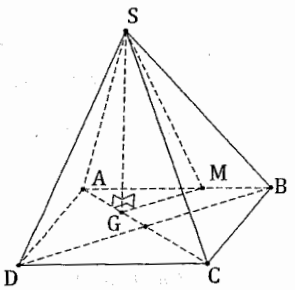


Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ΔSGN em có: $GH = \frac{\sqrt{3}a}{6} = d\left(G,(SAB)\right)$

$\Rightarrow d\left(C,(SAB)\right)=3.d\left(G,(SAB)\right)=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}.$ → **Đáp án C**

Cách 2: Em kẻ GM ⊥ GA.

Vậy hình chóp G.ASM có GA, GS, GM đôi một vuông góc nên em có: $\dfrac{1}{GH^2}=\dfrac{1}{GS^2}+\dfrac{1}{GA^2}+\dfrac{1}{GM^2}\Rightarrow GH=\dfrac{\sqrt{3}a}{6}.$



$d\left(G,(SAM)\right)=d\left(G,SAB\right)=\dfrac{1}{3}d\left(C,(SAB)\right)$

$\Rightarrow d\left(C,(SAB)\right)=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}.$

Câu 27:

Gọi H là trung điểm của BC

$\Rightarrow$ SH ⊥ BC (Do SBC là tam giác đều)

$\Rightarrow$ SH ⊥ (ABC) (Do (SBC) ⊥ (ABC))

Vì H là trung điểm BC nên d(B, (SAC)) = 2.d(H, (SAC))

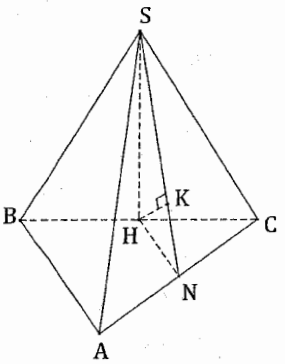
Từ H kẻ HN ⊥ AC, $N\in AC$

Mà $SH\perp AC\Rightarrow AC\perp (SHN)$

$\Rightarrow (SAC)\perp (SHN);\left(SAC\right)\cap\left(SAN\right)=SN$

Trong (SHN) kẻ $HK\perp SN\ \left(K\in SN\right)\Rightarrow HK\perp\left(SAC\right)$

thì d(H, (SAC)) = HK



Em có: BC = 2a; $HN=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{a}{2}$; $SH=\sqrt{3}a$

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông ΔSHN em có:

$\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{HS^2}+\dfrac{1}{HN^2}\Rightarrow HK=\dfrac{\sqrt{39}a}{13}=d\left(H,(SAC)\right)$

$\Rightarrow d\left(B,(SAC)\right)=2d\left(H,(SAC)\right)=\dfrac{2\sqrt{39}a}{13}$ → **Đáp án B**

Câu 28:

Do M là trung điểm của AB nên em suy ra được:

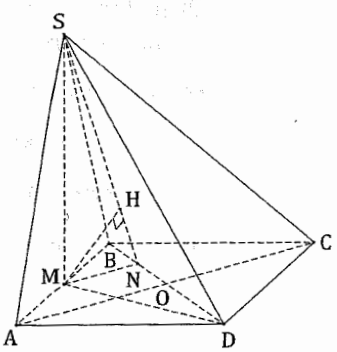
d(A, (SBD)) = 2.d(M, (SBD))

Trước tiên em tính khoảng cách từ M đến (SBD).

Trong $\left(ABCD\right)$, kẻ $MN\perp BD\ \left(N\in BD\right)\Rightarrow MN\ //\ AC$

Trong $\left(SMN\right)$, kẻ $MH\perp SN\ \left(H\in SN\right)\Rightarrow MH\perp\left(SBD\right)$

thì $d\left(M,(SBD)\right)=MH$



Em có: ABCD là hình vuông cạnh a nên $AC=\sqrt{2}a$

$\Rightarrow AO=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}.$

Do M, N là trung điểm của AB; BO nên $MN=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{2}a}{4}$.

ΔADM vuông tại A nên $MD=\sqrt{AD^2+AM^2}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{\sqrt{5}a}{2}$.

ΔSDM vuông tại M nên $SM=\sqrt{SD^2-MD^2}=\sqrt{\frac{9a^2}{4}-\frac{5a^2}{4}}=a$.

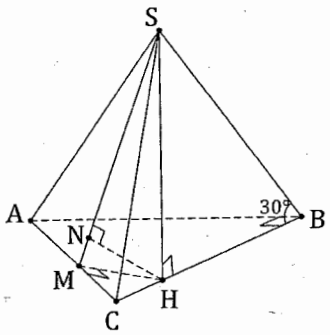
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ΔSMN em được: $\frac{1}{MH^2}=\frac{1}{MN^2}+\frac{1}{SM^2}$

$\Rightarrow MH=\frac{a}{3}=d(M,(SBD))\Rightarrow d(A,(SBD))=2d(M,(SBD))=2MH=\frac{2a}{3}$.

$\rightarrow$ **Đáp án A**

Câu 29:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên (ABC).



Do $(SBC)\perp(ABC);(SBC)\cap(ABC)=BC$ nên $SH\perp(ABC)$

$SH\perp AC;HM\perp AC$ nên $AC\perp(SHM)\Rightarrow(SAC)\perp(SHM)$

$(SAC)\cap(SHM)=SM$

Trong (SHM), kẻ $HN\perp SM\Rightarrow HN\perp(SAC)$ thì

$d(H,(SAC))=HN$

ΔSHB có $\widehat{SBH}=30^0, SB=2\sqrt{3}a$ nên $HB=SB.\cos 30^0=3a$

$\Rightarrow\frac{BH}{BC}=\frac{3}{4}\Rightarrow d(B,(SAC))=4d(H,(SAC))$

Em lại có: $MH=CH.\sin\widehat{MCH}=CH.\frac{AB}{AC}=\frac{3a}{5}$; $SH=SB.\sin 30^0=\sqrt{3}a$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SMH, đường cao SH em được

$HN=\frac{3\sqrt{7}a}{14}\Rightarrow d(B,(SAC))=4d(H,(SAC))=\frac{6\sqrt{7}a}{7}$. $\rightarrow$ **Đáp án A**

Câu 30:

Em có $AD//BC$ nên $AD//(SBC)\Rightarrow d(A,(SBC))=d(D,(SBC))$

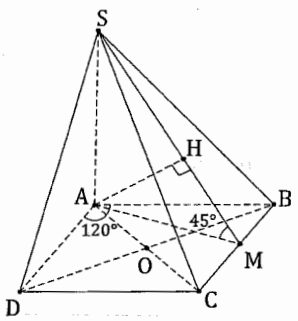
Do ABCD là hình thoi có $\widehat{BAD}=120^0$ nên ΔABC đều $\Rightarrow AM\perp BC$

Mà $SA\perp BC$ nên $BC\perp(SAM)\Rightarrow(SBC)\perp(SAM)$

$(SBC)\cap(SAM)=SM$

Trong (SAM), kẻ $AH\perp SM\ (H\in SM)\Rightarrow AH\perp(SBC)$ thì

$d(A,(SBC))=AH$

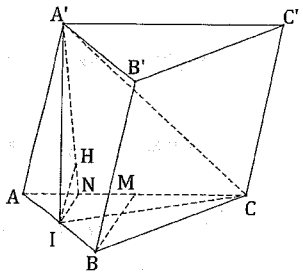


$\widehat{SMA}=45^0\Rightarrow\Delta SAM$ vuông cân tại $A\Rightarrow SA=AM=\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Xét ΔAHM vuông tại H nên em có: $AH = AM \cdot \sin 45^0 = \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}a}{4}$. → **Đáp án B**

Câu 31:

Do I là trung điểm của AB nên em suy ra được $d\left(B,\left(ACC'A'\right)\right) = 2.d\left(I,\left(ACC'A'\right)\right)$



Em có: $IA' = IC.\tan 60^0 = \frac{3a}{2}$

Dễ thấy IA, IA', IC đôi một vuông góc với nhau, áp dụng công thức em có: $\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IA'^2} + \frac{1}{IC^2} \Rightarrow IH = \frac{3\sqrt{13}a}{26}$

$d\left(B,\left(ACC'A'\right)\right) = 2.IH = \frac{3\sqrt{13}a}{13}$

→ **Đáp án A**

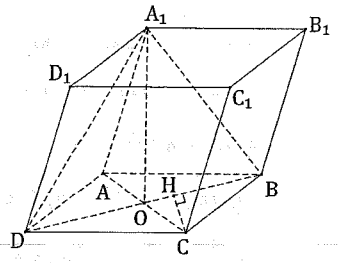
Câu 32:

Em có $A_1D // CB_1$ nên $d\left(C,\left(A_1BD\right)\right) = d\left(B_1,\left(A_1BD\right)\right)$

Gọi $AC \cap BD = O$. Trong $(ABCD)$, dựng hình chiếu H của C lên BD $\Rightarrow CH \perp BD$

Em có: $A_1O \perp CH$ ($A_1O \perp (ABCD)$).

$\Rightarrow CH \perp (A_1BD) \Rightarrow d(C, (A_1BD)) = CH$



Xét ΔCBD vuông tại C với đường cao CH, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông em có:

$\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CD^2} + \frac{1}{CB^2} \Rightarrow CH = \frac{CD.CB}{\sqrt{CD^2 + CN^2}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$.

→ **Đáp án C**

Câu 33:

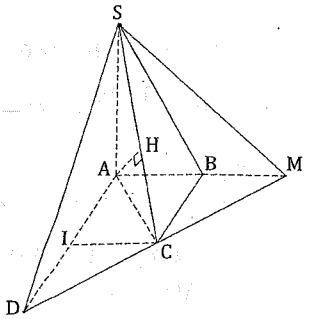
Gọi M là giao điểm của DC với AB.

Em thấy AD, AS, AB đôi một vuông góc, áp dụng công thức em có:

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow AH = a$

Mà AB = BM nên em suy ra được:

$d\left(A,\left(SCD\right)\right) = 2d\left(B,\left(SCD\right)\right) \Rightarrow d\left(B,\left(SCD\right)\right) = \frac{a}{2}$



→ **Đáp án B**

Câu 34:

Tam giác ABC đều có cạnh 2a nên diện tích là: $S_{\Delta ABC} = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}a^2$.

$\Rightarrow$ Đường cao của hình chóp là: $h = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3a^3}{\sqrt{3}a^2} = \sqrt{3}a$.

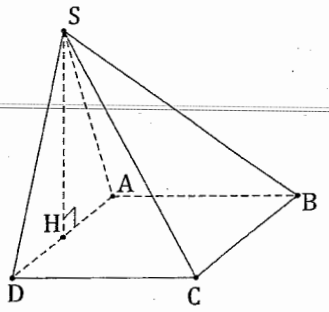
→ **Đáp án D**

Câu 35:

Đặt $SH=x\,(x>0)$

Gọi H là trung điểm của $AD\Rightarrow SH\perp AD.$

$(SAD)\perp(ABCD);(SAD)\cap(ABCD)=AD$ nên $SH\perp(ABCD)$



$$\Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH\cdot S_{ABCD}\Leftrightarrow\frac{4a^3}{3}=\frac{x.\left(a\sqrt{2}\right)^2}{3}\Leftrightarrow x=2a$$

Vì $AB//CD\Rightarrow d\left(B,(SCD)\right)=d\left(A,(SCD)\right)=\frac{3V_{SACD}}{S_{\Delta SCD}}$

Mà $V_{SACD}=V_{S.ACD}=\frac{1}{2}V_{S.ABCD}=\frac{2a^3}{3}$

Em lại có $\begin{cases}CD\perp AD\\CD\perp SH\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SAD)\Rightarrow CD\perp SD\Rightarrow\Delta SCD$ vuông tại D.

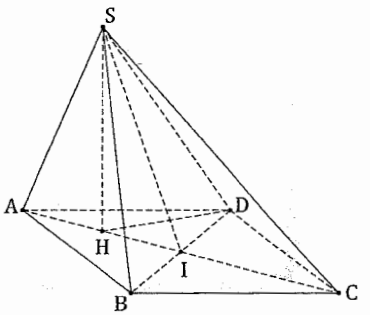
$$\Rightarrow S_{\Delta SCD}=\frac{1}{2}.SD.CD=\frac{1}{2}\sqrt{SH^2+\left(\frac{AD}{2}\right)^2}.CD=\frac{1}{2}.\sqrt{(2a)^2+\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2}.\sqrt{2}a=\frac{3a^2}{2}.$$

$$\Rightarrow d\left(B,(SCD)\right)=\frac{3V_{SACD}}{S_{\Delta SCD}}=\frac{3.\frac{2a^3}{3}}{\frac{3a^2}{2}}=\frac{4a}{3}.$$

→ **Đáp án B**

Câu 36:

Em có: $AC=2a,\ AH=\frac{1}{2}AI=\frac{1}{4}AC=\frac{a}{2}$



$$\Rightarrow SH=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

$$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}a}{2}.\sqrt{3}a^2=\frac{a^3}{2}$$

$$\Rightarrow V_{S.BCD}=\frac{1}{2}.V_{S.ABCD}=\frac{a^3}{4}.$$

Sử dụng công thức đường trung tuyến trong ΔADI em được:

$$HD=\sqrt{\frac{DI^2+DA^2}{2}-\frac{AI^2}{4}}=\frac{\sqrt{7}a}{2}\text{ và }BH=\sqrt{\frac{AB^2+BI^2}{2}-\frac{AI^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

$$SD=\sqrt{HD^2+SH^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}a}{2}.$$

$$SB=\sqrt{HB^2+SH^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}a}{2}.$$

Áp dụng công thức Hê-rông cho tam giác SBD em có:

$S_{\Delta SBD}=\sqrt{p(p-BD)(p-SB)(p-SD)}=\frac{\sqrt{15}a^2}{4}.$

$\Rightarrow V_{S.BCD}=\frac{1}{3}.d(C,(SBD)).S_{SBD}\Rightarrow d(C,(SBD))=\frac{3.V_{S.BCD}}{S_{SBD}}=\frac{\sqrt{15}a}{5}.$

→ **Đáp án D**

Câu 37:

Em có: $V_{A'ABM}=V_{A.A'BM}=\frac{1}{3}d(A,(A'BM)).S_{\Delta A'BM}\Rightarrow d(A,(A'BM))=\frac{3.V_{A'ABM}}{S_{\Delta A'BM}}$

$\Delta A'MC'$ vuông tại C' nên $A'M=\sqrt{A'C'^2+MC'^2}=\sqrt{4a^2+5a^2}=3a$

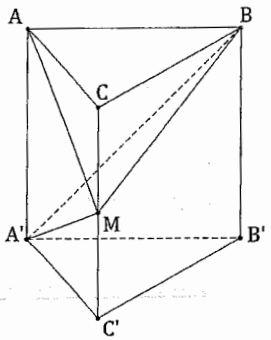
Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC em có:

$BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB.BC.\cos 120^0}=\sqrt{7}a$

ΔBMC vuông tại C nên $BM=\sqrt{BC^2+MC^2}=2\sqrt{3}a$

$\Rightarrow A'M^2+MB^2=A'B^2\Rightarrow \Delta A'BM$ vuông tại $M\Rightarrow S_{\Delta A'MB}=\frac{1}{2}A'M.MB=3\sqrt{3}a^2.$

Hình chóp MBAA' và CABA' có chung đáy là $\Delta A'AB$ và đường cao bằng nhau nên thể tích bằng nhau.



$\Rightarrow V_{A'AMB}=V_{M.ABA'}=V_{C.ABA'}=V_{A'.ABC}$

$=\frac{1}{3}.AA'.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.2\sqrt{5}a.\frac{1}{2}a.2a.\sin 120^0=\frac{\sqrt{15}a^3}{3}$

$\Rightarrow d(A,(A'BM))=\frac{3V_{A'AMB}}{S_{\Delta A'BM}}=\frac{3.\frac{\sqrt{15}a^3}{3}}{3\sqrt{3}a^2}=\frac{\sqrt{5}a}{3}.$ → **Đáp án D**

Câu 38:

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ xét $\Delta ABC\sim\Delta NAB(c.g.c)$

vì: $\frac{AN}{AB}=\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2};\widehat{NAB}=\widehat{ABC}=90^0\Rightarrow\widehat{ACB}=\widehat{NBA}$

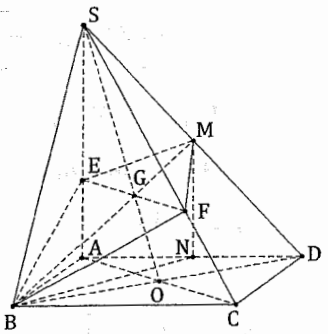
Mà $\widehat{CAB}+\widehat{NBA}=\widehat{CAB}+\widehat{ACB}=90^0\Rightarrow AC\perp BN\ (1)$

Mà MN // SA (đường trung bình); $SA\perp(ABCD)$

nên $MN\perp(ABCD)\Rightarrow MN\perp AC\ (2)$

Từ $(1),(2)\Rightarrow AC\perp(BMN)\Rightarrow AC\perp BM$

Mặt phẳng (P) đi qua BM, cắt (SAC) theo một đường thẳng vuông góc với BM nên EF // $AC(E\in SA,F\in SC)$.



Em có $S_{ABCD}=\sqrt{2}a^2;V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA\cdot S_{ABCD}=\frac{\sqrt{6}a^3}{3}.$

$BN=\sqrt{AN^2+AB^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2+a^2}=\frac{\sqrt{6}a}{2};FE=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{3}a}{2}.$

$BM=\sqrt{BN^2+MN^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2}=\frac{3a}{2}$; $S_{EBFM}=BM.FE=\frac{3a}{2}.\frac{\sqrt{3}a}{2}=\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$

Vì $EF//AC\Rightarrow\frac{SE}{SA}=\frac{SF}{SC}=\frac{SG}{SO}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{V_{S.EBM}}{V_{S.ABD}}=\frac{SE}{SA}.\frac{SM}{SD}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$, $\frac{V_{S.BFM}}{V_{S.BCD}}=\frac{SF}{SC}.\frac{SM}{SD}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

Mà $V_{S.ABD}=V_{S.BCD}=\frac{1}{2}V_{S.ABCD}$

$\Rightarrow\frac{V_{S.EBFM}}{\frac{1}{2}V_{S.ABCD}}=\frac{V_{S.EBM}}{\frac{1}{2}V_{S.ABCD}}+\frac{V_{S.BFM}}{\frac{1}{2}V_{S.ABCD}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\Rightarrow V_{S.EBFM}=\frac{1}{3}V_{S.ABCD}=\frac{\sqrt{6}a^3}{9}$.

$d\left(S,(P)\right)=\frac{3V_{S.EBMF}}{S_{EBMF}}=\frac{3.\frac{\sqrt{6}a^3}{9}}{\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}}=\frac{4\sqrt{2}a}{9}$. → **Đáp án D**

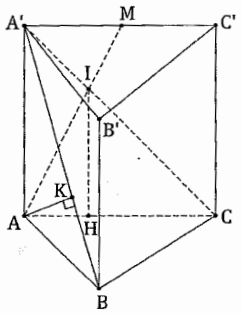
Câu 39:

Trong $(A'B'BA)$, hạ $AK\perp A'B, K\in A'B$.

Vì $BC\perp(ABB'A')$ nên $AK\perp(IBC)\Rightarrow d\left(A,(IBC)\right)=AK$.

Vậy $AK=\frac{2S_{\Delta AA'B}}{A'B}=\frac{AA'.AB}{\sqrt{A'A^2+AB^2}}=\frac{2\sqrt{5}a}{5}$.

→ **Đáp án A**



Câu 40:

a. Em có: $CA\perp AB$ (ΔABC vuông tại A)

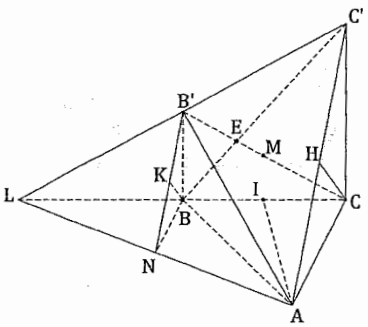
$AC\perp BB'$; $AC\subset(ABC)$ nên $AC\perp(ABB')$.

$\Rightarrow d\left(C,(ABB')\right)=AC=BC.\cos 60^0=a$.

Mà $CC'//BB'$ nên $CC'//(ABB')$

$\Rightarrow d\left(C',(ABB')\right)=d\left(C,(ABB')\right)=a$.

→ **Đáp án B**



b. Em có: $\begin{cases}BA\perp AC\\BA\perp CC'\left(\text{Do } CC'\perp(ABC)\right)\end{cases}\Rightarrow BA\perp(ACC')$

$\Rightarrow d\left(B,(ACC')\right)=BA=BC.\sin 60^0=\sqrt{3}a$.

Mà $BB'//CC'$ nên $BB'//(ACC')\Rightarrow d\left(B',(ACC')\right)=d\left(B,(ACC')\right)=\sqrt{3}a$.

Do M là trung điểm của B'C nên em suy ra được: $\frac{d\left(M,(ACC')\right)}{d\left(B',(ACC')\right)}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow d\left(M,\left(ACC'\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(B',\left(ACC'\right)\right)=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ → **Đáp án A**

c. Dựng $CH\perp AC'\left(H\in AC'\right)$

Do $AB\perp\left(ACC'\right)\Rightarrow CH\perp AB\Rightarrow CH\perp\left(ABC'\right)\Rightarrow d\left(C,ABC'\right)=CH.$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ACC' em được: $\frac{1}{CH^2}=\frac{1}{CC'^2}+\frac{1}{AC^2}$

$\Rightarrow\frac{1}{CH^2}=\frac{1}{\left(2a\right)^2}+\frac{1}{a^2}\Rightarrow CH=\frac{2\sqrt{5}a}{5}$

Tứ giác BCC'B' là hình thang vuông tại B và C nên B'C và BC' cắt nhau tại E thì E cũng là giao điểm của B'C và $\left(ABC'\right)\Rightarrow\frac{d\left(B',\left(ABC'\right)\right)}{d\left(C,\left(ABC'\right)\right)}=\frac{EB'}{EC}=\frac{BB'}{CC'}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow d\left(B',\left(ABC'\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(C,\left(ABC'\right)\right)=\frac{\sqrt{5}a}{5}.$

→ **Đáp án B**

d. Gọi giao điểm của BC và B'C' là L.

Vì BB'//CC' và $BB'=\frac{1}{2}CC'$ nên B là trung điểm của CL.

Dựng $BN\perp AL\left(N\in AL\right)$ và $BK\perp B'N\left(K\in B'N\right).$

Em có: $\begin{cases}AL\perp BN\\AL\perp BB'\end{cases}\Rightarrow AL\perp\left(BB'N\right)\Rightarrow AL\perp BK.$

Em lại có: $\begin{cases}BK\perp AL\\BK\perp B'N\\AL\cap B'N=N\\AL\subset\left(AB'C'\right);BL\subset\left(AB'C'\right)\end{cases}\Rightarrow BK\perp\left(AB'C'\right)\Rightarrow d\left(B,\left(AB'C'\right)\right)=BK.$

Áp dụng định lí cosin trong ΔACL em được: $AL^2=CL^2+CA^2-2.CL.CA.\cos60^0=\sqrt{13}a.$

Diện tích ΔBLA là $S_{\Delta BLA}=\frac{1}{2}BN.AL=\frac{1}{2}BL.BA.\sin\widehat{LBA}$ và $\widehat{LBA}=180^0-\widehat{ABC}=150^0$

$\Rightarrow BN=\frac{\sqrt{39}a}{13}.$

Tam giác vuông B'BN cho em: $\frac{1}{BK^2}=\frac{1}{BN^2}+\frac{1}{BB'^2}\Rightarrow BK=\frac{\sqrt{3}a}{4}.$

BI cắt $\left(AB'C'\right)$ tại L nên em có: $\frac{d\left(I,\left(AB'C'\right)\right)}{d\left(B,\left(AB'C'\right)\right)}=\frac{LI}{LB}=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow d\left(I,\left(AB'C'\right)\right)=\frac{3}{2}d\left(B,\left(AB'C'\right)\right)=\frac{3\sqrt{3}a}{8}.$ → **Đáp án C**

CHỦ ĐỀ 3: KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

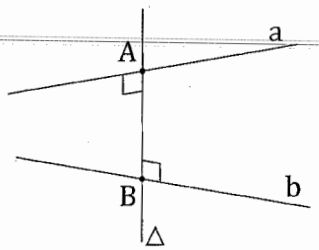
A. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Định nghĩa

Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b.

$$\begin{cases}\Delta \perp a, \Delta \cap a = \{A\} \\ \Delta \perp b, \Delta \cap b = \{B\}\end{cases} \Rightarrow d(a,b) = AB$$

Khi đó, AB được gọi là đoạn vuông góc chung của a và b.



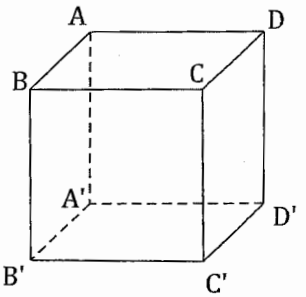
Ví dụ 1: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và DD' là

Hướng dẫn giải

Em có: $\begin{cases}AD \perp AB \\ AD \perp DD'\end{cases}$

$\Rightarrow$ AD là đoạn vuông góc chung của AB và DD'.

$\Rightarrow d(AB,DD') = AD = a.$



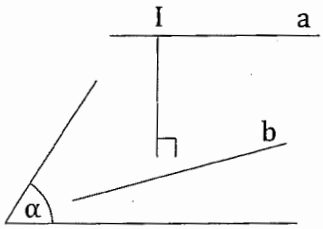
2. Cách xác định khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

➢ Trường hợp tổng quát: a chéo b, a không vuông góc với b.

Bước 1: Xác định mặt phẳng (α): (α) chứa b, (α) // a.

Bước 2: $d(a,b) = d(a,(\alpha)) = d(I,(\alpha))$ với $I \in a$.

Đến đây, em trở về bài toán tìm khoảng cách từ 1 điểm đến 1 mặt phẳng.



Ví dụ 2: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC'.

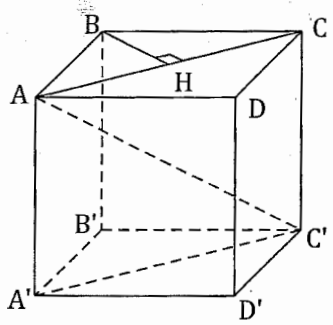
Hướng dẫn giải

Bước 1:

Chọn $(ACC'A')$ chứa AC', $(ACC'A') // BB'$

(do BB'//AA')

Em nhận thấy đây là bài toán xác định khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau BB' và AC' nhưng không vuông góc.



Bước 2:

$d(BB',AC') = d(BB',(ACC'A')) = d(B,(ACC'A'))$

Kẻ $BH \perp AC$ $(H \in AC)$, mà $AA' \perp BH$ nên $BH \perp (ACC'A') \Rightarrow d(B,(ACC'A')) = BH.$

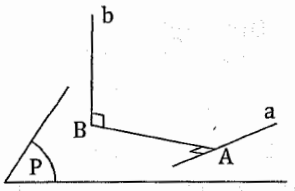
Em lại có tứ giác ABCD là hình vuông nên $BH=\frac{AC}{2}=\frac{\sqrt{2}a}{2}\Rightarrow d(BB',AC')=BH=\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

➢ Trường hợp đặc biệt: a chéo b, $a\perp b$.

Bước 1: Xác định mặt phẳng $(P):\begin{cases}(P)\text{ chứa a}\\(P)\perp b\end{cases}$

Bước 2: Gọi $\{B\}=b\cap(P)$. Trong (P), kẻ $BA\perp a, A\in a$.

Bước 3: Khoảng cách $d(a,b)=AB$.



Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại đỉnh A, $SA\perp(ABC)$, $SA=BC=2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

Hướng dẫn giải

Bước 1: Chọn mặt phẳng (ABC) chứa BC, $(ABC)\perp SA$

Do $SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp BC$.

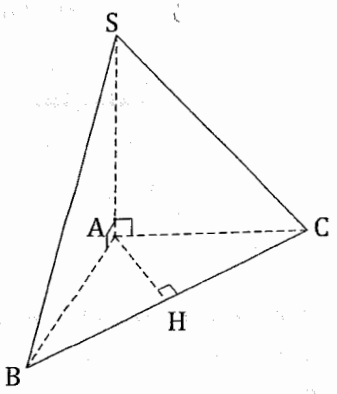
$\Rightarrow$ Bài toán tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SA và BC và $SA\perp BC$.

Bước 2: Em thấy $SA\cap(ABC)=A$, kẻ $AH\perp BC$ $(H\in BC)$.

Bước 3: Khi đó: $\begin{cases}AH\perp SA\\AH\perp BC\end{cases}\Rightarrow d(SA,BC)=AH$.

Vì ΔABC vuông cân tại A, AH là đường trung tuyến.

$\Rightarrow AH=\frac{BC}{2}=a\Rightarrow d(SA,BC)=a$.



B. BÀI TẬP

BÀI TẬP MẪU

Cơ bản

Câu 1: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$, $SA=a$.

a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SA là

A. a. **B.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}a}{6}$.

b. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là

A. a. **B.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}a}{6}$.

c. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng SB và AD là

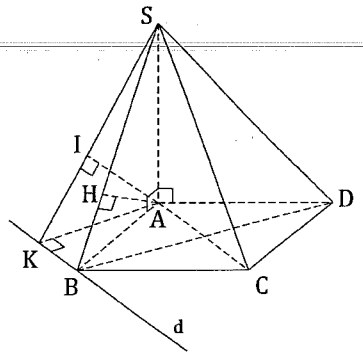
A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **C.** a. **D.** $\sqrt{2}a$.

d. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng SB và AC là

A. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}a}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Hướng dẫn giải

a. Em có: $\begin{cases} AD \perp SA \ (\text{do } SA \perp (ABCD)) \\ AD \perp CD \ (\text{do ABCD là hình vuông}) \end{cases}$



$\Rightarrow$ AD là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng CD và SA.

$\Rightarrow d(SA,CD) = AD = a.$

→ Đáp án A

b. Vì $CD // AB \Rightarrow CD // (SAB).$

$\Rightarrow d(CD,SB) = d(CD,(SAB)) = d(D,(SAB)).$

Em có $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow d(D,(SAB)) = AD = a.$

→ Đáp án A

c. Em có $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SB$

$\Rightarrow$ Bài toán tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc.

Chọn mặt phẳng (SAB) chứa SB và $(SAB) \perp AD$

Trong (SAB), kẻ $AH \perp SB \ (H \in SB)$ thì $d(AD,SB) = AH.$

Áp dụng hệ thức lượng trong ΔSAB vuông tại A, đường cao AH nên em có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

→ Đáp án B

d. Trong $(ABCD)$, kẻ đường thẳng d qua B và song song với AC.

Từ A, kẻ $AK \perp d \ (K \in d)$

Trong (SAK), kẻ $AI \perp SK (I \in SK)$ thì $AI \perp (SBK) \Rightarrow d(A,(SBK)) = AI.$

Em lại có: AC//d nên $d(AC,SB) = d(AC,(SBK)) = d(A,(SBK)) = AI.$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAK em được: $\frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AI^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{AI^2} \Rightarrow AI = \frac{\sqrt{3}a}{3}.$$

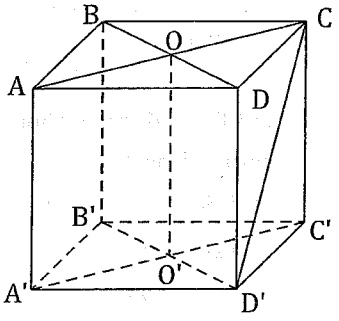
→ Đáp án D

Câu 2: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a, có tâm đáy là O, O'. Khoảng cách giữa hai đường thẳng OO' và CD' là

A. a. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **D.** $\frac{a}{4}$.

Hướng dẫn giải

Em thấy OO' và CD' là hai đường thẳng chéo nhau nhưng không vuông góc với nhau nên em đưa bài toán về trường hợp tổng quát.



Em có $OO' // CC' \Rightarrow OO' // (CC'D'D)$

$\Rightarrow d(OO',CD') = d(OO',(CC'D'D)) = d(O,(CC'D'D))$

Mà $d(O,(CC'D'D)) = \frac{1}{2}d(A,(CDD'C')) = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2}$.

(do O là trung điểm của AC).

$\Rightarrow d(OO',CD') = \frac{AD}{2} = \frac{a}{2}$. → **Đáp án B**

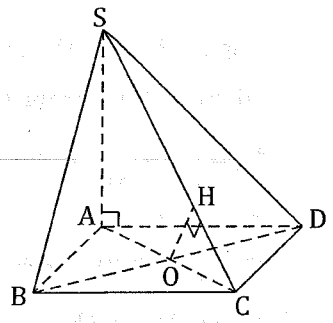
♥ Vận dụng

Câu 3: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông tâm O có độ dài cạnh là 1, $SA \perp (ABCD)$, SA = 2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD là

A. 1. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Hướng dẫn giải

Trong (SAC), kẻ $OH \perp SC$ $(H \in SC)$.



Vì $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp OH.$

Mà $\begin{cases} OH \perp BD \\ OH \perp SC \end{cases} \Rightarrow d(BD,SC) = OH.$

$OH = OC.\sin\widehat{OCH} = OC.\frac{SA}{SC} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{2}{\sqrt{2^2+2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

→ **Đáp án C**

Câu 4: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là

A. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

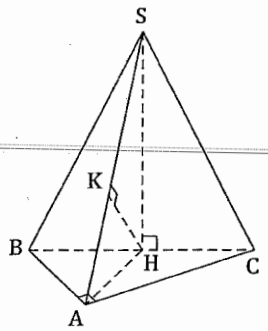
Hướng dẫn giải

Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow SH \perp BC, AH \perp BC$

Em có $\begin{cases} (SBC) \perp (ABC) \\ (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC).$

Trong (SHA), kẻ $HK \perp SA$ $(K \in SA)$ (1)

Vì $\begin{cases} BC \perp SH \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp HK. \quad (2)$



Từ $(1),(2) \Rightarrow$ HK là đoạn vuông góc chung của SA và BC

$\Rightarrow HK = d(SA, BC)$.

ΔSBC đều cạnh a nên $SH = \frac{\sqrt{3}a}{2}$.

ΔABC vuông cân tại A nên $AH = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$.

Tam giác SHA vuông tại A có đường cao HK nên $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{16}{3a^2}$.

$\Rightarrow HK = \frac{\sqrt{3}a}{4}$. → **Đáp án C**

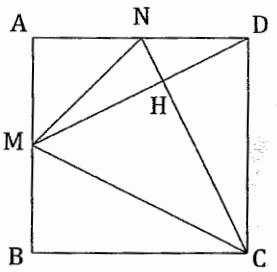
* **Nâng cao**

Câu 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AD và H là giao điểm của CN, DM. Biết $SH \perp (ABCD)$, $SH = \sqrt{3}a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC là

A. $\frac{2\sqrt{57}a}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{57}a}{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{57}a}{19}$. **D.** $\frac{\sqrt{57}a}{19}$.

Hướng dẫn giải

Trong (SHC), kẻ $HK \perp SC$ $(K \in SC)$ (1)



Em có $\Delta ADM = \Delta DCN (c.g.c) \Rightarrow ADM = DCN$.

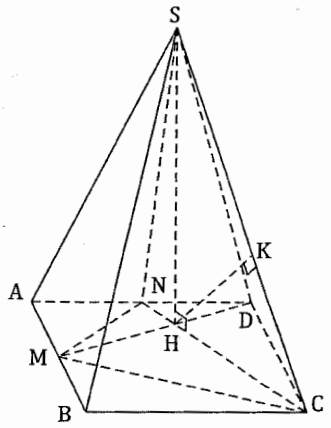
$\Rightarrow DCH + CDH = ADM + CDM = 90^\circ \Rightarrow DM \perp CN$.

Mà $DM \perp SH \Rightarrow DM \perp (SHC) \Rightarrow DM \perp HK$. (2)

Từ $(1),(2) \Rightarrow$ HK là đoạn vuông góc chung của DM và $SC \Rightarrow HK = d(DM, SC)$.

Áp dụng hệ thức lượng trong ΔCDN vuông tại D, đường cao DH, em có:

$CD^2 = CN.HC \Rightarrow HC = \frac{CD^2}{CN} = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$.



Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SHC em có: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HC^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{5}{4a^2} = \frac{19}{12a^2}$.

$\Rightarrow d(DM, HC) = \frac{2\sqrt{57}a}{19}$.

→ **Đáp án C**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 6: Cho hình lập phương ACBD.A'B'C'D' cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và CC'.

A. a. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a}{3}$. **D.** $\frac{a}{4}$.

Câu 7: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và BB'.

A. $\frac{\sqrt{5}a}{5}$. **B.** $\frac{a}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

Câu 8: Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có $AB=BC=a$, $AA'=2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BD'.

A. a. **B.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a}{3}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Câu 9: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD, H là hình chiếu của A trên SD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AH.

A. a. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **D.** $\frac{a}{4}$.

Câu 10: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$, cạnh SB tạo với mặt đáy một góc 45^0. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC là

A. a. **B.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}a}{4}$.

Câu 11: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD' là

A. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Câu 12: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 1cm, SA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD, SA = 2cm. Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và SB là

A. 1cm. **B.** $\frac{1}{2}$cm. **C.** $\frac{1}{3}$cm. **D.** $\frac{2}{3}$cm.

Câu 13: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông có AB = BC = a, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và B'C là

A. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{7}a}{7}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Câu 14: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và A'H là

A. a. **B.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}a}{4}$.

Câu 15: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông cân tại C, $CA=a, SA\perp(ABC), SA=h$. Gọi D là trung điểm của AB. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và SD.

A. $\frac{ah}{\sqrt{a^2+4h^2}}$. B. $\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}$. C. $\frac{h}{\sqrt{h^2+4a^2}}$. D. $\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$.

Câu 16: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông cân tại C, $CA=a, SA\perp(ABC), SA=h$. Gọi D là trung điểm của AB và khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và SD là x, khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD là y. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$.

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{a}{h}$. C. $\sqrt{\frac{a^2}{h^2+a^2}}$. D. 1.

Câu 17: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có độ dài cạnh bằng a. Trên các cạnh AB và CD lấy lần lượt các điểm M và N sao cho $BM=CN=x$. Tìm x sao cho khoảng cách giữa hai đường thẳng A'C và MN là $\frac{a}{3}$.

A. $x=\frac{\sqrt{2}a}{3}$. B. $x=\frac{a}{2}$. C. $x=\frac{\sqrt{3}a}{3}$. D. $x=\frac{a}{3}$.

Câu 20: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có ABCD là hình vuông, khoảng cách giữa hai đường thẳng BD' và AA' là $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng (P) đi qua đường chéo BD', sao cho thiết diện thu được có diện tích nhỏ nhất. Tính diện tích thiết diện đó.

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Câu 21: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD là $\frac{\sqrt{6}a}{6}$. Tính SA.

A. $\frac{a}{4}$. B. $\frac{a}{3}$. C. $\frac{a}{2}$. D. a.

Câu 22: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C, G là trọng tâm ΔABC, $SG\perp(ABC), V_{S.ABC}=\frac{9}{4}cm$, $SG=AB$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB là

A. $\frac{9\sqrt{10}}{10}cm$. B. $\frac{9\sqrt{10}}{20}cm$. C. $\frac{9}{4}cm$. D. $\frac{9\sqrt{5}}{5}cm$.

Câu 23: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là nửa lục giác đều, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, AD là đáy lớn, AD = 2a, BC//AD. Gọi M là trung điểm của AD. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng MB và SD là $\frac{\sqrt{3}a}{4}$. Tính SA.

A. $\frac{a}{4}$. B. $\frac{a}{3}$. C. $\frac{a}{2}$. D. a.

Câu 24: Cho hình chóp S.ABC có đáy là ABC là tam giác vuông cân tại B, AB = BC = 2a, hai mặt phẳng (SAC) và (SAB) cùng vuông góc với đáy (ABC). Gọi M là trung điểm của AB, mặt phẳng qua SM và song song với BC, cắt AC tại N. Biết góc tạo bởi (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN là

A. $\frac{\sqrt{39}a}{13}$. B. $\frac{\sqrt{39}a}{39}$. C. $\frac{\sqrt{13}a}{13}$. D. $\frac{2\sqrt{39}a}{13}$.

Câu 25: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc AB sao cho HA=2HB. Góc giữa đường thẳng SC và (ABC) là 60^0. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là

A. $\frac{\sqrt{42}a}{8}$. B. $\frac{\sqrt{42}a}{12}$. C. $\frac{\sqrt{6}a}{3}$. D. $\frac{\sqrt{10}a}{6}$.

Câu 26: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

A. $\frac{\sqrt{2}a}{4}$. B. $\frac{\sqrt{2}a}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. D. $\frac{a}{2}$.

Câu 27: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, mặt SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Khoảng cách từ trung điểm I của AB đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{\sqrt{5}a}{5}$. Gọi F là trung điểm của cạnh AD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CF và SB là

A. $\frac{\sqrt{6}a}{12}$. B. $\frac{\sqrt{6}a}{6}$. C. $\frac{\sqrt{6}a}{3}$. D. $\frac{\sqrt{6}a}{2}$.

ĐÁP ÁN

8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
A	A	C	B	B	C	C	C	C	A
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
D	A	A	D	B	D	D	A	A	C

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 8:

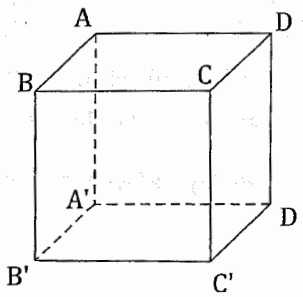
Vì ABCD là hình vuông nên $AD \perp CD$. (1)

Tương tự em có $CC' \perp CD$. (2)

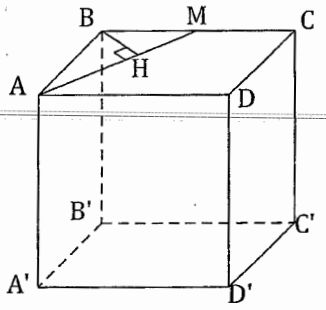
Từ $(1),(2) \Rightarrow$ CD là đoạn vuông góc chung của AD và CC'.

$\Rightarrow d(AD,CC') = CD = a$.

→ **Đáp án A**



Câu 9:



Trong $(ABCD)$, kẻ $BH \perp AM$ $(H \in AM)$ (1)

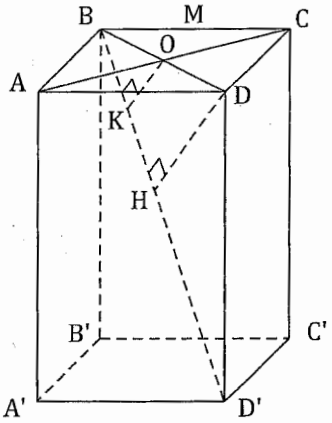
Em có $BB' \perp (ABCD) \Rightarrow BB' \perp BH$ (2)

Từ $(1),(2) \Rightarrow$ BH là đoạn vuông góc chung của AM, BB'

Trong tam giác ABM vuông tại B, đường cao BH, em có: $\frac{1}{BH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{BM^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{5}{a^2} \Rightarrow BH=\frac{\sqrt{5}a}{5}$.

→ Đáp án A

Câu 10:



Có $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BDD'B') \Rightarrow AC \perp BD'$.

Gọi O là tâm hình vuông ABCD.

Trong $(BDD'B')$, kẻ $OK \perp BD'$ $(K \in BD')$. (1)

Vì $AC \perp BD$ và $AC \perp BB'$ nên $AC \perp (BDD'B')$

$\Rightarrow AC \perp OK$. (2)

Từ $(1),(2) \Rightarrow$ OK là đoạn vuông góc chung của AC và BD' $\Rightarrow OK = d(AC, BD')$.

Trong $(BDD'B')$, kẻ $DH \perp BD'$ $(H \in BD') \Rightarrow OK // DH$.

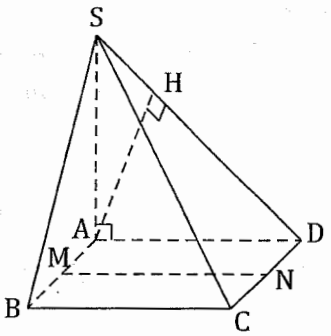
Theo định lý Ta-lét em có: $\frac{OK}{DH}=\frac{BO}{BD}=\frac{1}{2}$.

Tam giác BDD' vuông tại D, đường cao DH nên

$$\frac{1}{DH^2}=\frac{1}{BD^2}+\frac{1}{DD'^2}=\frac{1}{\left(\sqrt{2}a\right)^2}+\frac{1}{4a^2}=\frac{3}{4a^2} \Rightarrow DH=\frac{2\sqrt{3}a}{3} \Rightarrow OK=\frac{\sqrt{3}a}{3}.$$

→ Đáp án C

Câu 11:



Em có $AH \subset (SAD), MN // AD$ nên $MN // (SAD)$.

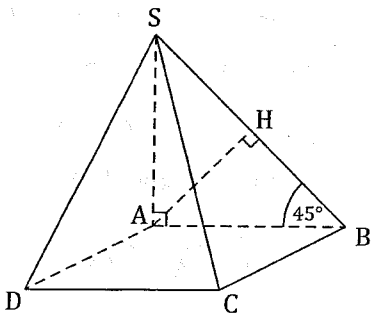
$\Rightarrow d(MN, AH) = d(MN, (SAD)) = d(M, (SAD))$.

Mà $\begin{cases} MA \perp SA \\ MA \perp AD \end{cases} \Rightarrow MA \perp (SAD) \Rightarrow d(M, (SAD)) = MA = \frac{a}{2}$.

$\Rightarrow d(MN, AH) = \frac{a}{2}$.

→ Đáp án B

Câu 12 :



Em có AB là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$.

$\Rightarrow$ Góc giữa SB và $(ABCD)$ chính là góc giữa SB và AB hay $\widehat{SBA} = 45^0 \Rightarrow SA = AB = a$.

Vì AD//BC nên $AD//(SBC)$

$\Rightarrow d(AD,SC) = d(AD,(SBC)) = d(A,(SBC))$.

Trong (SAB), kẻ $AH \perp SB$ $(H \in SB)$.

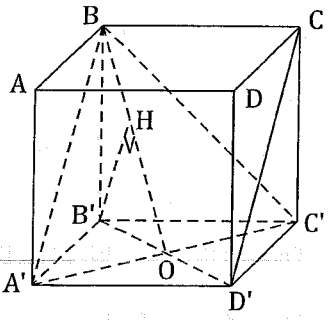
Em chứng minh được $AH \perp (SBC)$.

$\Rightarrow AH = d(A,(SBC))$.

Trong tam giác vuông AHB, $AH = AB.\sin 45^0 = \dfrac{\sqrt{2}a}{2} \Rightarrow d(AD,SC) = AH = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

→ Đáp án B

Câu 13:



Gọi O là tâm hình vuông A'B'C'D'.

Trong $(BB'O)$, kẻ $B'H \perp BO$ $(H \in BO)$. (1)

Vì CD'//BA' $\Rightarrow$ CD'//$(BA'C')$.

Em lại có $BC' \subset (BA'C')$, CD' //$(BA'C')$.

$\Rightarrow d(CD',BC') = d(CD',(BA'C'))$

$= d(D',(BA'C')) = d(B',(BA'C'))$.

Mà $\begin{cases} A'C' \perp BB' \\ A'C' \perp B'O \end{cases} \Rightarrow A'C' \perp (BB'O) \Rightarrow A'C' \perp B'H$. (2)

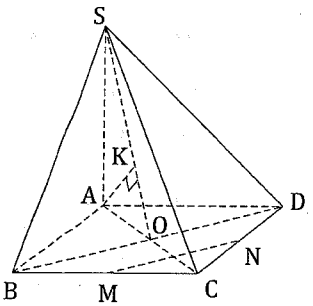
Từ (1),(2) $\Rightarrow B'H \perp (BA'C') \Rightarrow B'H = d(B',(BA'C'))$.

Áp dụng hệ thức lượng trong $\Delta BB'O$ vuông tại B', đường cao B'H em có:

$\dfrac{1}{B'H^2} = \dfrac{1}{BB'^2} + \dfrac{1}{B'O^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{2}{a^2} = \dfrac{3}{a^2} \Rightarrow B'H = \dfrac{\sqrt{3}a}{3}$.

→ Đáp án C

Câu 14:



Gọi O là tâm hình vuông ABCD.

Vì $SB \subset (SBD)$, MN //(SBD) (Vì MN//BD)

$\Rightarrow d(MN,SB) = d(MN,(SBD)) = d(M,(SBD))$

$= \dfrac{1}{2} d(C,(SBD)) = \dfrac{1}{2} d(A,(SBD))$.

Trong (SAC), kẻ $AK \perp SO$ $(K \in SO)$. (1)

Vì $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AK.$ (2)

Từ $(1),(2) \Rightarrow AK \perp (SBD) \Rightarrow AK = d(A,(SBD))$.

Áp dụng hệ thức lượng trong ΔSAO vuông tại A, đường cao AK, em có:

$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AO^2} = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}. \Rightarrow AK = \frac{2}{3} \Rightarrow d(MN,SB) = \frac{1}{3}$ → **Đáp án C**

Câu 15:

Gọi N là trung điểm của BB'.

Vì $AM \subset (AMN)$, $B'C // (AMN)$ (Do $CB' // MN$)

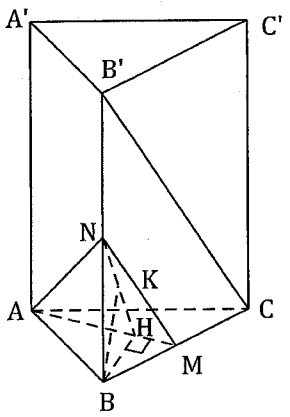
$\Rightarrow d(AM,B'C) = d(B'C,(AMN))$

$= d(C,(AMN)) = d(B,(AMN))$ (do M là trung điểm BC)

Trong (ABC), kẻ $BH \perp AM$, trong (BNH), kẻ $BK \perp HN$.

Em thấy $\begin{cases} AM \perp BH \\ AM \perp BN \end{cases} \Rightarrow AM \perp (BHN) \Rightarrow AM \perp BK.$

Mà $BK \perp HN \Rightarrow BK \perp (AMN) \Rightarrow BK = d(B,(AMN))$.



Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông BHN và tam giác vuông ABM, em có:

$\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BN^2} + \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BN^2} + \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} = \frac{7}{a^2} \Rightarrow BK = \frac{\sqrt{7}a}{7}.$

→ **Đáp án C**

Câu 16:

Vì $A'H \subset (AA'H), BB' // (AA'H)$ (Do $BB' // AA'$)

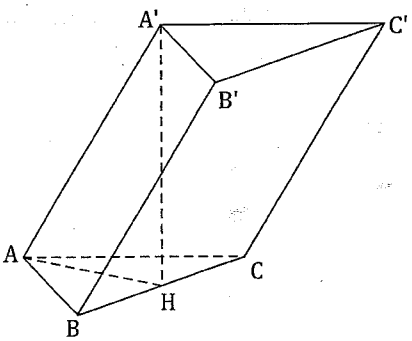
$\Rightarrow d(BB',A'H) = d(BB',(AA'H)) = d(B,(AA'H))$.

Em thấy $BH \perp A'H, BH \perp AH$

(do ΔABC đều có H là trung điểm).

$\Rightarrow BH \perp (AA'H) \Rightarrow BH = d(B,(AA'H))$.

Mà $BH = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2} \Rightarrow d(BB',A'H) = \frac{a}{2}$.



→ **Đáp án C**

Câu 17:

Gọi I là trung điểm của AC khi đó DI là đường trung bình trong tam giác ABC.

$\Rightarrow BC // DI \Rightarrow BC // (SDI)$.

$\Rightarrow d(BC,SD) = d(BC,(SDI)) = d(C,(SDI))$.

Vì $DI // BC \Rightarrow DI \perp AC$.

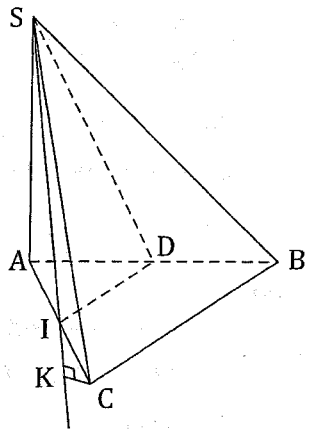
Mà $DI \perp SA \Rightarrow DI \perp (SAC) \Rightarrow DI \perp SI$.

Mặt khác $\begin{cases}(SDI)\cap(SAC)=SI\\ DI\perp SI\end{cases}\Rightarrow(SDI)\perp(SAC).$

Trong (SAC), kẻ $CK\perp SI\Rightarrow CK\perp(SDI)\Rightarrow CK=d(C,(SDI)).$

Em có $S_{SIC}=\frac{1}{2}.SA.IC=\frac{ah}{4};\ SI=\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4h^2}$

$\Rightarrow CK=\frac{2S_{\Delta SIC}}{SI}=\frac{\frac{ah}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4h^2}}=\frac{ah}{\sqrt{a^2+4h^2}}.$



→ Đáp án A

Câu 18:

Tương tự bài trên em tính được

$x=d(BC,SD)=\frac{ah}{\sqrt{a^2+4h^2}}.$

Trong (ABC), dựng E sao cho AIDE là hình vuông.

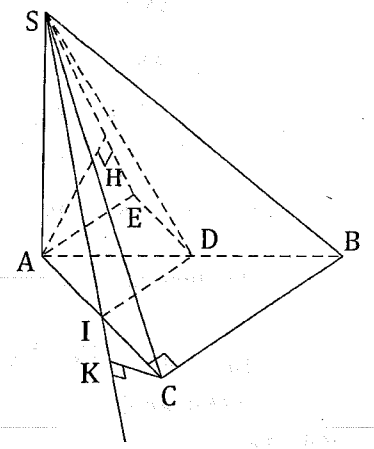
$\Rightarrow AI//DE\Rightarrow AC//(SDE).$

$\Rightarrow d(AC,SD)=d(AC,(SDE))=d(A,(SDE)).$

Em có $\begin{cases}DE\perp SA\\ DE\perp AE\end{cases}\Rightarrow DE\perp(SAE)\Rightarrow(SDE)\perp(SAE).$

Trong (SAE), kẻ $AH\perp SE\ \ (H\in SE).$

$\Rightarrow AH\perp(SDE)\Rightarrow AH=d(A,(SDE)).$



Em có $AH.SE=AS.AE\ (=2S_{\Delta SAE})\Rightarrow AH=\frac{AS.AE}{SE}=\frac{h.\frac{a}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4h^2}}=\frac{ah}{\sqrt{a^2+4h^2}}.$

$\Rightarrow y=\frac{ah}{\sqrt{a^2+4h^2}}=x\Rightarrow\frac{x}{y}=1.$ **→ Đáp án D**

Cách khác: Em suy ra được $d(A,(SDE))=d(A,(SID))=y.$

Mà $d(A,(SID))=d(C,(SDI))=x$ (Do I là trung điểm AC) $\Rightarrow\frac{x}{y}=1.$

Câu 19:

Em có $MN//BC\Rightarrow MN//(A'BC).$

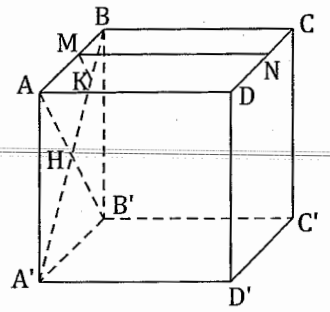
$\Rightarrow d(MN,A'C)=d(MN,(A'BC))=d(M,(A'BC)).$

Gọi $H=A'B\cap AB'$, $MK//HA\ (K\in A'B)\Rightarrow MK=\frac{\sqrt{2}x}{2}.$

Vì $\begin{cases} A'B \perp AB' \\ CB \perp (ABB'A') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MK \perp A'B \\ CB \perp MK \end{cases}$

$\Rightarrow MK \perp (A'BC) \Rightarrow MK = d(M,(A'BC))$.

Mà $MK = \frac{a}{3} \Rightarrow \frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{3} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.



→ **Đáp án A**

Câu 20:

Đặt $AB = x\ (x > 0)$

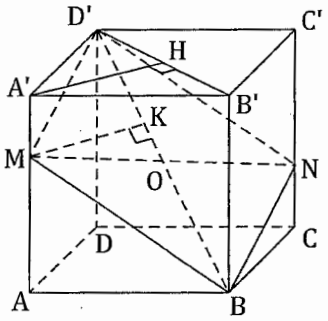
Có $AA' // (DD'B'B), BD' \subset (DD'B'B)$.

$\Rightarrow d(AA', BD') = d(AA', (DD'B'B)) = d(A', (DD'B'B))$.

Trong $(A'B'C'D')$, kẻ $A'H \perp B'D'\ (H \in B'D')$.

Em thấy $\begin{cases} A'H \perp B'D' \\ A'H \perp BB' \end{cases} \Rightarrow A'H \perp (DD'B'B)$.

$\Rightarrow d(A', (DD'B'B)) = A'H = \frac{\sqrt{2}x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 1$.



Giả sử $(P) \cap AA' = \{M\}, (P) \cap CC' = \{N\}$.

Khi đó thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi (P) là hình bình hành BMD'N.

Trong $(MBND')$, kẻ $MK \perp BD'\ (K \in BD')$.

Em có $S_{BMD'N} = 2.S_{BMD'} = BD'.MK = \sqrt{3}.MK$.

Vậy $S_{BMD'N}$ nhỏ nhất khi MK nhỏ nhất hay MK là đường vuông góc chung của AA' và BD' $\Rightarrow MK = A'H = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Khi đó $S_{BMD'N} = \sqrt{3}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

→ **Đáp án A**

Câu 21:

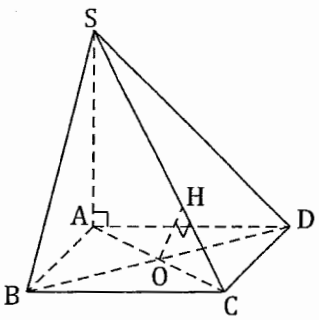
Kẻ $OH \perp SC\ (H \in SC)$. (1)

Em có $BD \perp AC, BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp OH$. (2)

Từ $(1),(2) \Rightarrow$ OH là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng BD và $SC \Rightarrow OH = d(BD, SC)$.

Đặt $SA = x\ (x > 0)$.

$OH = OC.\sin OCH = OC.\frac{SA}{SC} = \frac{\sqrt{2}a}{2}.\frac{x}{\sqrt{x^2 + 2a^2}} = \frac{\sqrt{6}a}{6}$.



$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 2a^2} = \sqrt{3}x \Rightarrow x = a \Rightarrow SA = a$

→ **Đáp án D**

Câu 22:

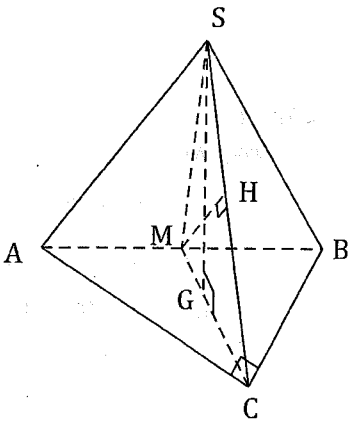
Gọi M là trung điểm của AB

Đặt $BC=x\,(x>0)\Rightarrow S_{ABC}=\frac{x^2}{2}$.

$SG=AB=x\sqrt{2}$.

Mà $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.SG.S_{ABC}=\frac{1}{3}.x\sqrt{2}.\frac{x^2}{2}=\frac{9}{4}$.

Giải phương trình trên em được $x=\frac{3}{\sqrt{2}}$.



Kẻ $MH\perp SC\ (H\in SC)$. (1)

Vì $\begin{cases}AB\perp SG\\AB\perp CM\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SCM)\Rightarrow AB\perp MH$. (2)

Từ $(1),(2)\Rightarrow$ MH là đoạn vuông góc chung của AB và $SC\Rightarrow MH=d(AB,SC)$.

$MC=\frac{\sqrt{2}x}{2}=\frac{3}{2}$; $SC=\sqrt{3^2+1}=\sqrt{10}$.

Có $MH.SC=SG.MC\,(=2.S_{SMC})\Rightarrow MH=\frac{SG.MC}{SC}=\frac{3.\frac{3}{2}}{\sqrt{10}}=\frac{9\sqrt{10}}{20}$.

→ Đáp án B

Câu 23:

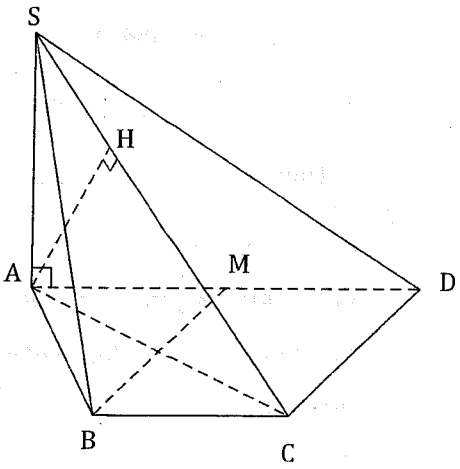
Trong (SAC), kẻ $AH\perp SC\ (H\in SC)$. (1)

Em có $MB//(SCD), SD\subset(SCD)$

$\Rightarrow d(MB,SD)=d(MB,(SCD))=d(M,(SCD))$

$=\frac{MD}{AD}.d(A,(SCD))=\frac{1}{2}d(A,(SCD))=\frac{\sqrt{3}a}{4}$.

$\Rightarrow d(A,(SCD))=\frac{\sqrt{3}a}{2}$.



Em có $CD\perp AC$, $CD\perp SA$

$\Rightarrow CD\perp(SAC)\Rightarrow CD\perp AH$. (2)

Từ $(1),(2)\Rightarrow AH\perp(SCD)\Rightarrow AH=d(A,(SCD))$.

$\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong ΔSAC vuông tại A, đường cao AH, em có:

$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{4}{3a^2}\Rightarrow SA=a$. **→ Đáp án D**

Câu 24:

$$\text{Vì } \begin{cases}(SAB)\perp(ABC)\\(SAC)\perp(ABC)\\(SAB)\cap(SAC)=SA\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABC).$$

Có $BC//(SMN), (SMN)\cap(ABC)=MN\Rightarrow MN//BC$

Em có $\begin{cases}AB\perp BC\\SB\perp BC\ (\text{do } BC\perp SA, BC\perp AB)\end{cases}$

$\Rightarrow BC\perp(SAB)$

$\Rightarrow$ Góc giữa (SBC) và (ABC) chính là góc giữa SB và AB hay $\widehat{SBA}=60^0$.

Trong ΔSAB vuông, em có $SA=AB.\tan 60^0=2\sqrt{3}a$.

Lấy I sao cho AMNI là hình vuông $(AM=MN=a)$.

$\Rightarrow AB//NI\Rightarrow AB//(SNI)$

$\Rightarrow d(AB,SN)=d(AB,(SNI))=d(A,(SNI))$.

Trong (SAI), kẻ $AH\perp SI\ (H\in SI)$. (1)

Em có $\begin{cases}NI\perp SA\\NI\perp AI\end{cases}\Rightarrow NI\perp(SAI)\Rightarrow NI\perp AH.$ (2)

Từ $(1),(2)\Rightarrow AH\perp(SNI)\Rightarrow AH=d(A,(SNI))$.

Áp dụng hệ thức lượng trong ΔSAI vuông tại A, đường cao AH, em có:

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{12a^2}=\frac{13}{12a^2}\Rightarrow AH=\frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$ → **Đáp án D**

Câu 25:

Gọi M là trung điểm của AB.

$\Rightarrow MH=BM-BH=\frac{a}{6}$.

$CH=\sqrt{CM^2+MH^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}+\frac{a^2}{36}}=\frac{\sqrt{7}a}{3}$.

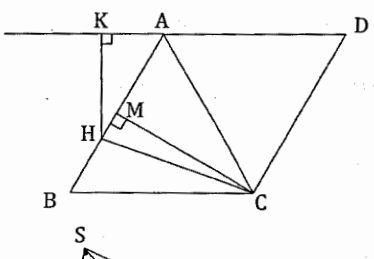
Em có HC là hình chiếu của SC lên (ABC).

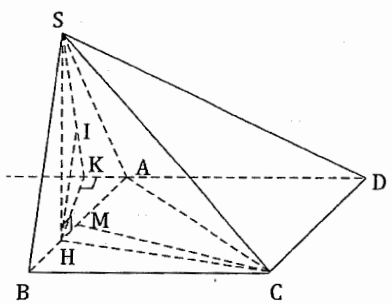
$\Rightarrow$ Góc giữa SC và (ABC) chính là góc giữa SC và HC hay $\widehat{SCH}=60^0$.

$\Rightarrow SH=CH.\tan 60°=\frac{\sqrt{7}a}{3}.\sqrt{3}=\frac{\sqrt{21}a}{3}$.

Dựng D sao cho ABCD là hình thoi

$\Rightarrow BC//AD\Rightarrow BC//(SAD)$.





$\Rightarrow d(BC,SA)=d(BC,(SAD))=d(B,(SAD))$.

Mà $d(B,(SAD))=\frac{BA}{HA}.d(H,(SAD))=\frac{3}{2}d(H,(SAD))$.

Trong $(ABCD)$, kẻ $HK\perp AD$, trong (SHK), kẻ $HI\perp SK\ (I\in SK)$.

Vì $\begin{cases}AD\perp SH\\AD\perp HK\end{cases}\Rightarrow AD\perp(SHK)\Rightarrow AD\perp HI$.

Em lại có $\begin{cases}HI\perp SK\\HI\perp AD\end{cases}\Rightarrow HI\perp(SAD)\Rightarrow HI=d(H,(SAD))$.

Trong tam giác vuông AKH, HK = HA.sin $\widehat{HAK}=\frac{2}{3}AB.\sin 60^0=\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác SHK vuông tại H, đường cao HI, em có

$$\frac{1}{HI^2}=\frac{1}{HS^2}+\frac{1}{HK^2}=\frac{9}{21a^2}+\frac{3}{a^2}=\frac{24}{7a^2}\Rightarrow HI=\frac{\sqrt{42}a}{12}\Rightarrow d(SA,BC)=\frac{3}{2}.\frac{\sqrt{42}a}{12}=\frac{\sqrt{42}a}{8}.$$

→ Đáp án A

Câu 26:

Gọi P là trung điểm của SA

$\Rightarrow PD=PE, PE\perp SA$.

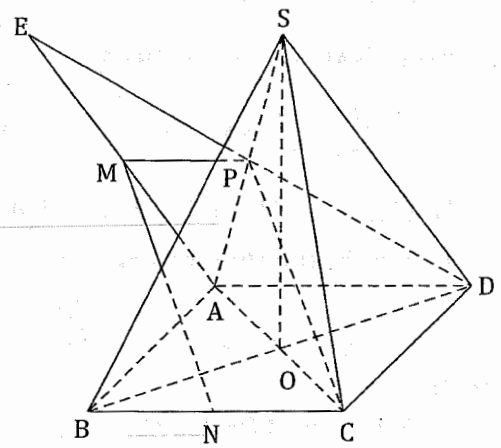
Thấy MP là đường trung bình trong tam giác EAD nên $MP//AD, MP=\frac{1}{2}AD=\frac{a}{2}$.

N là trung điểm của BC nên

$NC//AD, NC=\frac{1}{2}BC=\frac{a}{2}$.

Em có $MP//NC$, $MP=NC=\frac{a}{2}$

$\Rightarrow$ MPCN là hình bình hành.



$\Rightarrow MN//CP\Rightarrow MN//(SAC)\Rightarrow d(MN,AC)=d(MN,(SAC))=d(N,(SAC))$.

Do hình chóp S.ABCD đều $\Rightarrow\begin{cases}BO\perp SO\\BO\perp AC\end{cases}\Rightarrow BO\perp(SAC)\Rightarrow d(B,(SAC))=BO=\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

Vì $NB\cap(SAC)=\{C\}$ nên $\frac{d(N,(SAC))}{d(B,(SAC))}=\frac{NC}{BC}=\frac{1}{2}\Rightarrow d(N,(SAC))=\frac{1}{2}.d(B,(SAC))=\frac{\sqrt{2}a}{4}$.

→ Đáp án A

Câu 27:

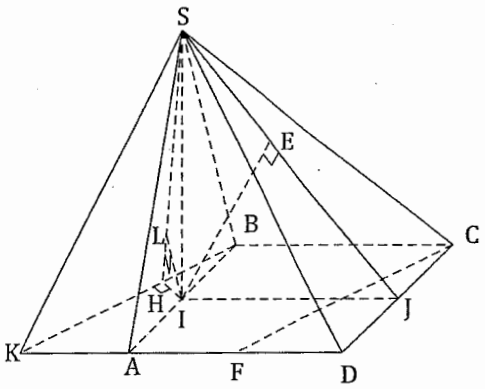
Em có: $(SAB)\perp(ABCD); (SAB)\cap(ABCD)=AB; SI\perp AB\Rightarrow SI\perp(ABCD)$

Gọi J là trung điểm của CD, kẻ $IE\perp SJ$.

Em có: $\begin{cases} CD \perp IJ \\ CD \perp SI \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SIJ) \Rightarrow CD \perp IE. \Rightarrow IE \perp (SCD) \Rightarrow IE = d(I,(SCD)) = \dfrac{\sqrt{5}a}{5}.$

Áp dụng hệ thức lượng trong ΔSIJ vuông tại I, đường cao IE em có:

$\dfrac{1}{IE^2} = \dfrac{1}{SI^2} + \dfrac{1}{IJ^2} \Leftrightarrow \dfrac{5}{a^2} = \dfrac{1}{SI^2} + \dfrac{1}{a^2} \Rightarrow SI = \dfrac{a}{2}.$



Qua B dựng đường thẳng song song với CF, cắt DA kéo dài tại K.

Khi đó $CF // (SBK)$

$\Rightarrow d(CF,SB) = d(CF,(SKB)) = d(F,(SKB))$

Kẻ $IH \perp BK \ (H \in BK), IL \perp SH \ (L \in SH).$

Có $\begin{cases} BK \perp SI \\ BK \perp IH \end{cases} \Rightarrow BK \perp (SIH) \Rightarrow BK \perp IL.$

Từ $\begin{cases} IL \perp SH \\ IL \perp BK \end{cases} \Rightarrow IL \perp (SBK) \Rightarrow IL = d(I,(SBK)).$

Vì BCFK là hình bình hành nên $FK = BC = a.$

Mà $FA = \dfrac{a}{2} \Rightarrow AK = \dfrac{a}{2}.$

ΔBHI đồng dạng với $\Delta BAK \Rightarrow \dfrac{HI}{AK} = \dfrac{IB}{BK} \Rightarrow HI = \dfrac{AK.IB}{BK} = \dfrac{\dfrac{a}{2}.\dfrac{a}{2}}{\sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}}} = \dfrac{\sqrt{5}a}{10}.$

Trong tam giác vuông SIH, đường cao IL, em có $\dfrac{1}{IL^2} = \dfrac{1}{SI^2} + \dfrac{1}{IH^2} \Rightarrow IL = \dfrac{\sqrt{6}a}{12}.$

Em thấy: $d(A,(SBK)) = 2d(I,(SBK)) = 2.\dfrac{\sqrt{6}a}{12} = \dfrac{\sqrt{6}a}{6}.$

Tương tự có $\dfrac{d(F,(SBK))}{d(A,(SBK))} = \dfrac{FK}{AK} = 2 \Rightarrow d(F,(SBK)) = 2.d(A,(SBK)) = 2.\dfrac{\sqrt{6}a}{6} = \dfrac{\sqrt{6}a}{3}.$

→ Đáp án C

"Bài khó như một tảng đá.
Có bạn thấy nó thì phấn khích vì họ xem đó là ***bậc thang*** *nâng họ lên cao hơn, tầm nhìn rộng hơn.*
Người khác lại than vãn, thậm chí khóc bù lu bù loa vì họ xem nó là ***vật cản đường****".*
Hãy vượt qua các bài khó em nhé!

NÓN - TRỤ - CẦU

1 Hình nón

- Diện tích xung quanh $S_{xq} = \pi rl$
- Diện tích toàn phần $S_{tp} = \pi rl + \pi r^2$
- Thể tích $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

2 Hình trụ

- Diện tích xung quanh $S_{xq} = 2\pi rh$
- Diện tích toàn phần $S_{tp} = 2\pi r(h+r)$
- Thể tích $V = \pi r^2 h$

3 Hình cầu

- Diện tích $S = 4\pi R^2$
- Thể tích $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

Loại hình chóp	Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp	Hình ảnh minh họa
- Hình chóp đều - Hình chóp có các cạnh bên bằng nhau - Hình chóp có các cạnh bên nghiêng đều trên đáy	Giao điểm I của đường cao SH hình chóp với đường trung trực IE của một cạnh bất kì	
Hình chóp có một cạnh bên SA vuông với đáy	Giao điểm I của đường trung trực của SA và trục đường tròn đáy (ABCD)	
Trừ các trường hợp trên	Giao điểm I của trục đường tròn ngoại tiếp mặt bên (SAD) và trục đường tròn đáy (ABCD)	

Phương pháp 3: Dựng trục của đường tròn đáy hình chóp
- Bước 1: Tìm tâm O đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy
- Bước 2: Kẻ đường thẳng d đi qua O và vuông góc mặt đáy
- Bước 3: Giao điểm của mặt phẳng trung trực (hoặc đường trung trực) của một cạnh bên với trục đường tròn d chính là tâm của mặt cầu ngoại tiếp.

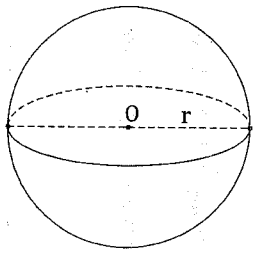
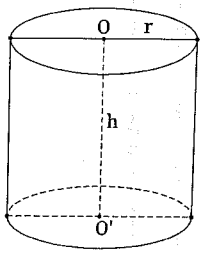
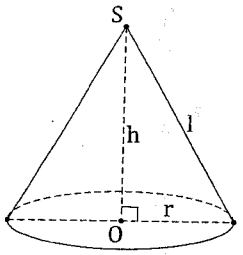
Phương pháp 2:
Phát hiện *các điểm cùng nhìn một đoạn thẳng dưới góc vuông*

Phương pháp 1:
Tìm *điểm cách đều tất cả các đỉnh* của hình chóp hoặc hình lăng trụ

CHUYÊN ĐỀ 2: MẶT CẦU – MẶT TRỤ – MẶT NÓN

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Để làm tốt các dạng bài tập về chuyên đề này, em cần nhớ các công thức tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, công thức tính thể tích như sau:

	Hình cầu – Khối cầu	Hình trụ - Khối trụ	Hình nón – Khối nón
Hình ảnh			
Công thức tính diện tích xung quanh	$S=4\pi r^2$	$S_{xq}=2\pi rh$	$S_{xq}=\pi rl$
Công thức tính diện tích toàn phần	$S=4\pi r^2$	$S_{tp}=2\pi rh+2\pi r^2$ $=2\pi r(h+r)$	$S_{tp}=\pi rl+\pi r^2$ $=\pi r(l+r)$
Công thức tính thể tích	$V=\frac{4}{3}\pi r^3$	$V=\pi R^2h$	$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

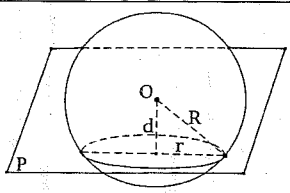
Dạng 1. Các dạng bài tập về mặt cầu, khối cầu

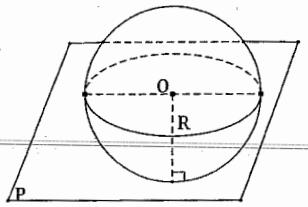
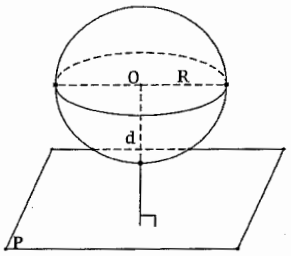
☞ **Mặt cầu:** Trong không gian, cho một điểm O cố định. Tập hợp các điểm cách đều O một khoảng cách không đổi R là mặt cầu tâm O, bán kính R.

☞ **Khối cầu:** hình cầu cùng với phần bên trong gọi là khối cầu.

☞ Để làm tốt bài tập về phần này, em cần nhớ các công thức về diện tích xung quanh, diện tích toàn phần mặt cầu và công thức tính thể tích khối cầu.

☞ Ngoài ra, em cũng cần chú ý vị trí tương đối của mặt cầu và mặt phẳng: Cho mặt cầu $(S;O)$ và mặt phẳng (P). Gọi R và d lần lượt là bán kính mặt cầu (S) và khoảng cách từ tâm O đến (P).

So sánh	Vị trí tương đối	Đặc điểm	Hình ảnh
$d<R$	Cắt nhau	Thiết diện tạo ra là đường tròn có bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2}$	

$d=R$	Tiếp xúc	Mặt phẳng (P) gọi là mặt phẳng tiếp xúc	
$d>R$	Không cắt nhau		

BÀI TẬP MẪU

Cơ bản

Câu 1. Một khối cầu có đường kính là 10 cm. Thể tích khối cầu đó là

A. $V=125\pi$ cm^3. **B.** $V=\dfrac{4000\pi}{3}$ cm^3. **C.** $V=250\pi$ cm^3. **D.** $V=\dfrac{500\pi}{3}$ cm^3.

Hướng dẫn giải

Em tìm được bán kính mặt cầu là $R=\dfrac{d}{2}=5$ cm $\Rightarrow V=\dfrac{4\pi}{3}R^3=\dfrac{500\pi}{3}$ cm^3.

→ **Đáp án D.**

Câu 2. Một mặt cầu có diện tích là 288π cm^2. Bán kính mặt cầu đó là

A. $6\sqrt{2}$ cm. **B.** $6\sqrt{3}$ cm. **C.** 6 cm. **D.** $2\sqrt{6}$ cm.

Hướng dẫn giải

Diện tích mặt cầu là $S=4\pi R^2=288\pi\Rightarrow R^2=72\Rightarrow R=6\sqrt{2}$ cm.

→ **Đáp án A.**

Vận dụng

Câu 3. Một mặt cầu (S) bị cắt bởi một mặt phẳng cách tâm một khoảng là 2a, thiết diện tạo thành là một hình tròn có diện tích $7\pi a^2$. Thể tích khối cầu đó là

A. $\dfrac{\sqrt{11}\pi a^3}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{23}a^3}{6}$. **C.** $\dfrac{44\sqrt{11}\pi a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{23\sqrt{23}a^3}{6}$.

Hướng dẫn giải

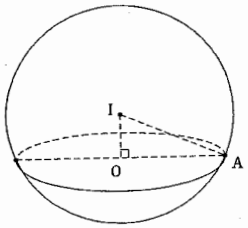
Diện tích hình tròn thiết diện là $7\pi a^2$ nên bán kính đường tròn thiết diện là:

$r=OA=\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}=a\sqrt{7}$.

Tam giác IOA vuông tại O nên

$IA=\sqrt{IO^2+OA^2}=a\sqrt{11}.$

Vậy thể tích khối cầu là: $V=\frac{4}{3}\pi.IA^3=\frac{44\sqrt{11}\pi a^3}{3}.$



→ **Đáp án C.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 4: Một mặt phẳng cắt một mặt cầu thì thiết diện tạo ra là

A. Một đường tròn.
B. Một đường Parabol.
C. Một đường Elip.
D. Một đường Hypebol.

Câu 5: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng?

A. Bất kì tứ diện nào cũng có một mặt cầu ngoại tiếp và diện tích mặt cầu là $S=\frac{4}{3}\pi R^2.$

B. Bất kì hình hộp chữ nhật nào cũng có một mặt cầu ngoại tiếp và thể tích khối cầu đó được tính bằng công thức $V=\frac{4}{3}\pi R^3.$

C. Bất kì hình hộp nào cũng có một mặt cầu ngoại tiếp và diện tích mặt cầu là $S=4\pi R^2.$

D. Bất kì hình chóp đều nào cũng có một mặt cầu ngoại tiếp và thể tích khối cầu đó được tính bằng công thức là $V=\frac{4}{3}\pi R^2.$

Câu 6: Thể tích của một khối cầu là 50π. Đường kính của mặt cầu đó là

A. $\sqrt[3]{300}.$ **B.** $\sqrt[3]{200}.$ **C.** $\sqrt[3]{100}.$ **D.** $\sqrt[3]{500}.$

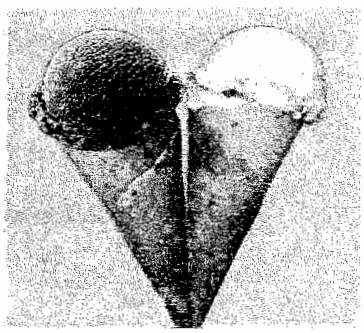
Câu 7: Khoảng cách từ O đến (P) là $\frac{R}{2}$, bán kính thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) với mặt cầu $S(O;R)$ là

A. $R\sqrt{2}.$ **B.** $\frac{R}{\sqrt{2}}.$ **C.** $\frac{R\sqrt{3}}{2}.$ **D.** $\frac{R}{2}.$

Câu 8: Cho mặt cầu tâm S_1 có bán kính R_1 và mặt cầu tâm S_2 có bán kính R_2, biết $R_1=4R_2$. Tỉ số thể tích của mặt cầu S_1 đối với mặt cầu S_2 là

A. $\frac{1}{64}.$ **B.** 64. **C.** 16. **D.** $\frac{1}{16}.$

Câu 9: Giả sử chiếc kem Tràng Tiền được tạo thành bởi một viên kem hình cầu có thể tích 36π cm^2 được đặt trong vỏ ốc quế hình nón có đường cao là 7cm và bán kính đáy r = 2,5 cm. Phần kem nhô ra khỏi vỏ có chiều cao xấp xỉ là



A. 5,14cm.
B. 4,66cm.
C. 3,98cm.
D. 2,29cm.

Câu 10: Người ta thả một quả bóng hình cầu vào một cái thùng hình trụ thì mực nước dâng lên tại vị trí cao nhất của quả bóng. Biết rằng bán kính đáy thùng bằng 10 cm và chiều cao mực nước ban đầu là 5 cm. Bán kính quả bóng xấp xỉ là

A. 3,14 cm. **B.** 5,34 cm. **C.** 149,98 cm. **D.** 2,62 cm.

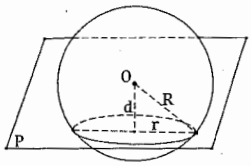
ĐÁP ÁN

4	5	6	7	8	9	10
A	B	A	C	B	B	D

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 4:

Em có hình vẽ bên. Từ đó, em thấy khi mặt phẳng cắt mặt cầu thì thiết diện tạo ra là một đường tròn. → **Đáp án A**



Câu 5:

Đáp án A sai vì diện tích mặt cầu là $S=4\pi R^2$.

Đáp án B đúng vì theo SGK Hình học 12 cơ bản trang 48, 53.

Đáp án C sai vì không phải hình hộp nào cũng nội tiếp một mặt cầu.

Đáp án D sai vì thể tích khối cầu là $V=\frac{4}{3}\pi R^3$. → **Đáp án B**

Câu 6:

Thể tích hình cầu là $V=\frac{4}{3}\pi R^3=50\pi\Rightarrow R=\sqrt[3]{\frac{75}{2}}\Rightarrow d=2R=2\sqrt[3]{\frac{75}{2}}=\sqrt[3]{300}.$

→ **Đáp án A**

Câu 7:

Bán kính đường tròn thiết diện tạo ra là $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2}=\frac{R\sqrt{3}}{2}$

→ **Đáp án C**

Câu 8:

Tỉ số thể tích của mặt cầu S_1 đối với S_2 là: $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3}=\frac{R_1^3}{R_2^3}=\frac{\left(4R_2\right)^3}{R_2^3}=64.$

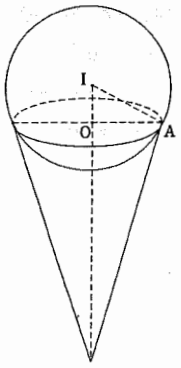
→ **Đáp án B**

Câu 9:

Em tính được bán kính viên kem là: $r=\sqrt[3]{\frac{V}{\frac{4}{3}\pi}}=\sqrt[3]{\frac{36\pi}{\frac{4}{3}\pi}}=3\text{cm}$

$\Rightarrow$ Chiều cao nhô ra khỏi vỏ của viên kem chính là tổng của bán kính và khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng vỏ kem.

Theo giả thiết em có:

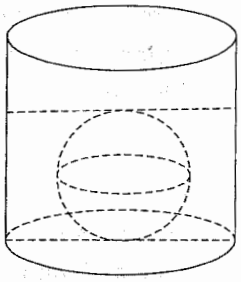


$$OA = 2,5 \text{ cm} \Rightarrow IO = \sqrt{IA^2 - OA^2} = \sqrt{3^2 - 2,5^2} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

$\Rightarrow$ Chiều cao phần kem nhô ra là $h = r + IO = 3 + \frac{\sqrt{11}}{2} \approx 4,66$ cm.

$\rightarrow$ Đáp án B

Câu 10:



Gọi x, r là bán kính quả bóng và đáy thùng; h_1, h_2 là chiều cao mực nước ban đầu và sau khi thả bóng $(10 > x > 0)$.

Khi thả quả bóng vào một cái thùng hình trụ thì mực nước dâng lên tại vị trí cao nhất của quả bóng. Vậy độ cao của thùng khi đó bằng đường kính của quả bóng và thể tích thùng lúc đó cũng chính bằng thể tích quả bóng với thể tích ban đầu của thùng.

Em có phương trình sau: $\pi r^2 h_1 + \frac{4}{3}\pi x^3 = \pi r^2 h_2$

$$\Rightarrow \pi 10^2.5 + \frac{4}{3}\pi x^3 = \pi.10^2.2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \approx 10,73 \text{ cm } (\text{Loại}) \\ x \approx 2,62 \text{ cm } (\text{Thỏa mãn}) \end{array}\right.$$

$\rightarrow$ Đáp án D

Dạng 2: Phương pháp xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, hình lăng trụ

Em cần nhớ 3 phương pháp cơ bản để xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, hình lăng trụ như sau:

➢ ***Phương pháp 1:*** (Dựa vào định nghĩa) Tìm điểm cách đều tất cả các đỉnh của hình chóp hoặc hình lăng trụ

Để tìm điểm cách đều tất cả các đỉnh của khối đa diện, em có thể vận dụng một trong những tính chất và kĩ thuật sau:

- Tính chất đường trung trực
- Tính chất đường trung tuyến
- Các đường tương ứng của hai tam giác bằng nhau
- Tính chất về các đường chéo của hình hộp chữ nhật

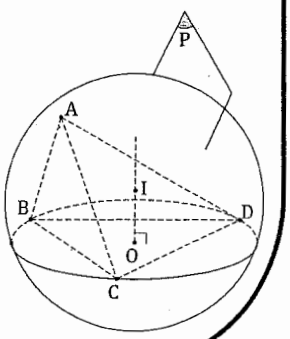
➢ ***Phương pháp 2:*** Phát hiện các điểm cùng nhìn một đoạn thẳng dưới một góc vuông

➢ ***Phương pháp 3:*** (Áp dụng đối với hình chóp) Dựng trục của đường tròn đáy hình chóp

☞ **Bước 1:** Xác định tâm I của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

☞ **Bước 2:** Dựng trục Δ của đa giác đáy

☞ **Bước 3:** Xác định mặt phẳng trung trực (hoặc đường trung trực của một cạnh bên). Giao điểm của Δ và mặt phẳng trung trực (hoặc đường trung trực) là tâm của mặt cầu ngoại tiếp.



BÀI TẬP MẪU

Cơ bản

Câu 11: Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a là

A. $3\pi a^2$. **B.** $12\pi a^2$. **C.** $6\pi a^2$. **D.** $0,6\pi a^2$.

Hướng dẫn giải

Trong hình lập phương các đường chéo dài bằng nhau và cùng đi qua một điểm; giả sử điểm đó là I.

$\Rightarrow IA = IB = IC = ID = IA' = IB' = IC' = ID'$

$\Rightarrow$ I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương ABCD.A'B'C'D'.

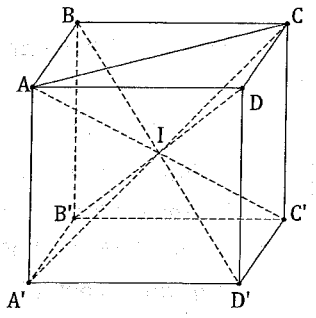
ABCD là hình vuông cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}$

Em có $\Delta ACC'$ vuông tại C nên $AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ Diện tích mặt cầu ngoại tiếp ABCD.A'B'C'D' là

$$S=4\pi r^2=4\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2=3\pi a^2$$

$\rightarrow$ **Đáp án A**



♥ Vận dụng

Câu 12: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC vuông tại B, SA vuông góc với đáy, $AB=a, \widehat{ACB}=30^0$. Hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC lần lượt là B', C'. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp A.BCC'B' là

A. $R=2a$. B. $R=a\sqrt{3}$. C. $R=a$. D. $R=a\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Em có $\begin{cases}BC\perp SA\\ BC\perp AB\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AB'\ (1)$

Mà $AB'\perp SB$ (2)

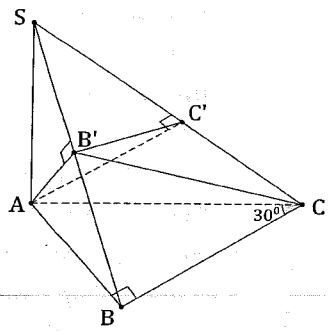
Từ (1) và (2) $\Rightarrow AB'\perp(SBC)\Rightarrow AB'\perp B'C$

Em lại có: $AC'\perp CC', AB\perp BC$

$\Rightarrow$ B, C', B' đều nhìn AC dưới một góc 90^0

$\Rightarrow$ Hình chóp A.BCC'B' nội tiếp mặt cầu đường kính AC

$$\Rightarrow R=\frac{AC}{2}=\frac{AB}{2\sin 30^0}=a.$$



$\rightarrow$ **Đáp án C**

*** Nâng cao**

Câu 13. Cho hình chóp S.ABC có 4 đỉnh đều nằm trên một mặt cầu, SA = a, SB = b, SC = c và ba cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là

A. $\frac{\pi}{3}\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)^3}$. B. $\frac{\pi}{2}\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)^3}$.

C. $\frac{\pi}{6}\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)^3}$. D. $\frac{2\pi}{3}\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)^3}$.

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm AB. Dựng d qua I và vuông góc với (SAB).

Kẻ đường trung trực của SC (K là trung điểm SC), cắt d tại O thì O chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

Thật vậy, do $d\perp(ABC)$ nên $d\perp AB$, trung điểm I của AB thuộc d nên d là đường trung trực của $AB\Rightarrow OA=OB$.

Tương tự, OK là đường trung trực của SC nên OC = OS.

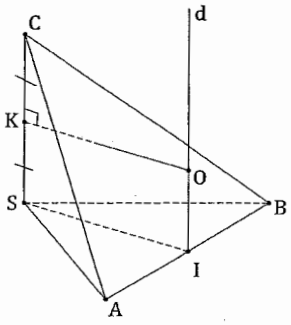
Mà O thuộc trục đường tròn nên OS = OA = OB $\Rightarrow$ OS = OA = OB = OC

$\Rightarrow$ O là tâm mặt cầu ngoại tiếp S.ABC.

Tam giác SAB vuông tại S nên suy ra $AB=\sqrt{SA^2+SB^2}=\sqrt{a^2+b^2}$.

$\Rightarrow AI=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$.

Tứ giác KOIS là hình chữ nhật nên $OI = KS = \frac{1}{2}SC=\frac{1}{2}c$.



Tam giác AOI vuông tại I nên

$R = OA = \sqrt{AI^2+OI^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Vậy thể tích khối cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3=\frac{\pi}{6}\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)^3}$

$\rightarrow$ Đáp án C

Câu 14: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang cân với đáy lớn AB = 2a và BC = CD = DA = a. Các cạnh bên của chóp nghiêng đều trên đáy góc α. Thể tích hình cầu ngoại tiếp của hình chóp là

A. $\frac{\pi a^3}{\sin^3 2\alpha}$. **B.** $\frac{4\pi a^3}{\sin^3 2\alpha}$. **C.** $\frac{\pi a^3}{3\sin^3 2\alpha}$. **D.** $\frac{4\pi a^3}{3\sin^3 2\alpha}$.

Hướng dẫn giải

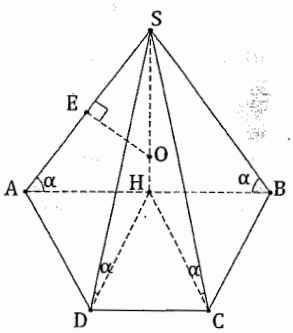
Gọi H là trung điểm của AB thì HA = HB = a.

Mà tứ giác ABCD là hình thang cân có BC = CD = AD = a; AB = 2a nên HC = HD = a

$\Rightarrow$ H là tâm đường tròn ngoại tiếp ABCD.

Các cạnh bên của chóp nghiêng đều trên đáy nên SH là trục của đường tròn ngoại tiếp đáy ABCD.

Trong (SAH), đường trung trực của cạnh SA cắt SH tại O thì O chính là tâm hình cầu ngoại tiếp của hình chóp và cũng là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB.



Thật vậy, $O \in SH$ nên OA = OB = OC = OD.

Mà OE là đường trung trực của SA nên OA = OS.

$\Rightarrow OA=OB=OC=OD=OS$

$\Rightarrow$ O là tâm mặt cầu hình chóp S.ABCD.

Gọi R là bán kính hình cầu thì R = SO, em tính được

$SA = SB = \frac{a}{\cos\alpha}$.

Từ đó áp dụng định lí sin đối với tam giác SAB em có:

$2R=\frac{SB}{\sin\widehat{SAB}}\Leftrightarrow R=\frac{a}{\sin 2\alpha}\Rightarrow V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4\pi a^3}{3\sin^3 2\alpha}$

$\rightarrow$ Đáp án D

Câu 15. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA = SB = a, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD là

A. $\frac{\sqrt{21}a}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}a}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{21}a}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{21}a}{12}$.

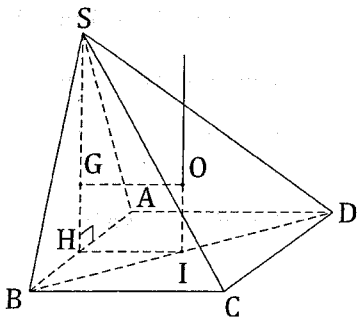
Hướng dẫn giải

Do SA = SB = AB = a nên ΔSAB là tam giác đều.

Gọi G và I tương ứng là tâm của tam giác đều SAB và hình vuông ABCD.

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

Em có $OG \perp (SAB)$ và $OI \perp (ABCD)$



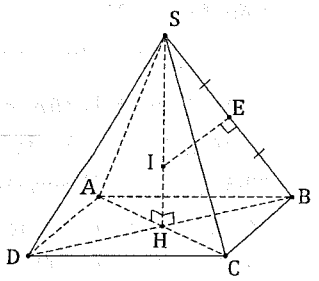
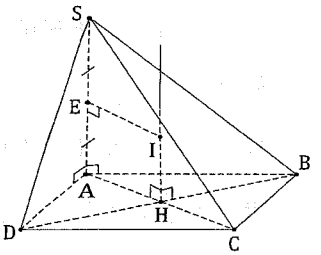
$\Rightarrow OG = IH = \frac{a}{2}$, trong đó H là trung điểm của AB.

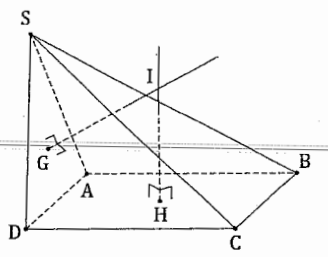
ΔSAB đều nên $AG = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{3}$

Em có tam giác OGA vuông tại G, gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD thì $R = OA = \sqrt{OG^2 + GA^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{9}} = \frac{\sqrt{21}a}{6}$.

→ Đáp án A

☞ **Chú ý:** Đối với phương pháp 3, em chú ý ba trường hợp điển hình như sau:

Loại hình chóp	Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp	Hình ảnh minh họa
- Hình chóp đều - Hình chóp có các cạnh bên bằng nhau - Hình chóp có các cạnh bên nghiêng đều trên đáy	Giao điểm của đường cao SH hình chóp với đường trung trực của một cạnh bất kì.	
Hình chóp có một cạnh bên SA vuông với đáy	Giao điểm của đường trung trực của SA và trục đường tròn đáy $(ABCD)$.	

Trừ các trường hợp trên	Giao điểm của trục đường tròn ngoại tiếp của một mặt bên (SAD) và trục đường tròn đáy $(ABCD)$.	

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 16: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có tất cả các cạnh bằng a. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD là

A. $R=\frac{\sqrt{2}a}{3}$. B. $R=\frac{\sqrt{2}a}{2}$. C. $R=\frac{a}{2}$. D. $R=\frac{a}{3}$.

Câu 17: Thể tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đều cạnh a là

A. $\frac{\sqrt{6}\pi a^3}{5}$. B. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{8}$. C. $\frac{\sqrt{6}\pi a^3}{8}$. D. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{8}$.

Câu 18: Tứ diện ABCD có AB = 6, CD = 8, các cạnh còn lại là $\sqrt{74}$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD là

A. 100π. B. 10π. C. 50π. D. 25π.

Câu 19: Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh bằng a. Thể tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ theo a là

A. $\frac{7\sqrt{21}\pi a^3}{54}$. B. $\frac{\sqrt{21}\pi a^3}{54}$. C. $\frac{7\sqrt{21}\pi a^3}{18}$. D. $\frac{\sqrt{21}\pi a^3}{72}$.

Câu 20: Cho tam giác cân MBC có $\widehat{BMC}=120^0$ và đường cao $MH=a\sqrt{2}$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (MBC) tại M lấy hai điểm A và D về hai phía của điểm M, sao cho ABC là tam giác đều và ΔDCB vuông cân tại D. Thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD là

A. $36\pi a^3$. B. $18\pi a^3$. C. $9\pi a^3$. D. πa^3.

Câu 21: Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và DBC lần lượt nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Biết BC = a, $BAC=60^0, BDC=30^0$. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

A. $\frac{\sqrt{39}a^3}{36}$. B. $\frac{13\sqrt{39}a^3}{36}$. C. $\frac{13\sqrt{39}a^3}{72}$. D. $\frac{13\sqrt{39}a^3}{54}$.

Câu 22: Cho tứ diện ABCD có $AB=AC=\sqrt{2}$, $BC=2$, $BD=DC=\sqrt{3}$. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC) bằng 45^0. Hình chiếu H của A trên (DBC) và D nằm về hai phía của BC. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD là

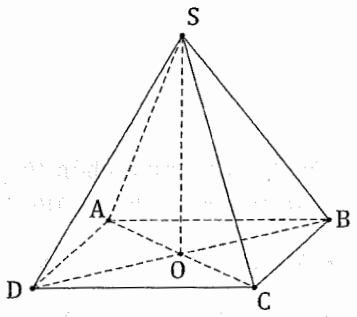
A. $\sqrt{3}$. B. $\sqrt{5}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

ĐÁP ÁN

16	17	18	19	20	21	22
B	C	A	A	A	D	D

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 16:



Do S.ABCD là hình chóp tứ giác đều nên đáy ABCD là hình vuông.

Gọi O là giao điểm của AC và BD

$\Rightarrow OA=OB=OD=OC=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}.$

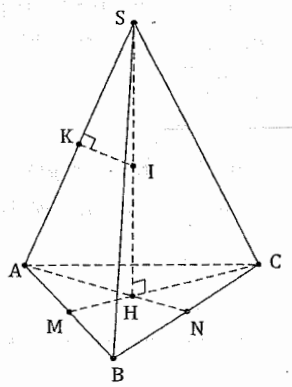
Tam giác SAC vuông cân tại S (vì $AC^2=SA^2+SC^2$)

$\Rightarrow OA=OS=OC=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}.$

$\Rightarrow$ O cách đều các đỉnh S, A, B, C, D $\Rightarrow R=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}.$

→ Đáp án B

Câu 17:



Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

$\Rightarrow SH\perp(ABC).$

Trong mặt phẳng (SAH), kẻ trung trực của SA, cắt SH tại I thì I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

ΔABC đều nên $CM=AN=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}\Rightarrow CH=\dfrac{2}{3}CM=\dfrac{\sqrt{3}a}{3}.$

ΔSHC vuông tại H nên $SH=\sqrt{SC^2-HC^2}=\dfrac{\sqrt{6}a}{3}.$

$\Delta SKI\sim\Delta SHA\Rightarrow SI=\dfrac{SK.SA}{SH}=\dfrac{\sqrt{6}a}{4}.$

$\Rightarrow V=\dfrac{4}{3}\pi.SI^3=\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{\sqrt{6}a}{4}\right)^3=\dfrac{\sqrt{6}\pi a^3}{8}$

→ Đáp án C

Câu 18:

Gọi M, N là trung điểm của AB, CD.

Do ΔDAB cân tại D nên $DM\perp AB$, ΔACB cân tại C nên $CM\perp AB\Rightarrow AB\perp(CMD)$

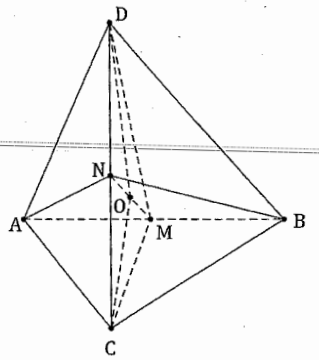
$\Rightarrow (CMD)$ là mặt phẳng trung trực của AB.

Lập luận tương tự ta được (NAB) là mặt phẳng trung trực của CD.

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD

$\Rightarrow (DMC)\cap(NAB)=\{O\}.$

Mà $(DMC)\cap(NAB)=MN\Rightarrow O\in MN.$



Đặt OA = OD = R

$\Rightarrow OM=\sqrt{R^2-AM^2}=\sqrt{R^2-9};$

$ON=\sqrt{R^2-ND^2}=\sqrt{R^2-16}\ (OM>ON).$

Tam giác ADM vuông tại M nên em có

$DM=\sqrt{AD^2-AM^2}=\sqrt{65}.$

Tam giác NDM vuông tại N nên $NM=\sqrt{DM^2-DN^2}=7.$

Ta có 2 trường hợp sau :

* Nếu O nằm trong tứ diện

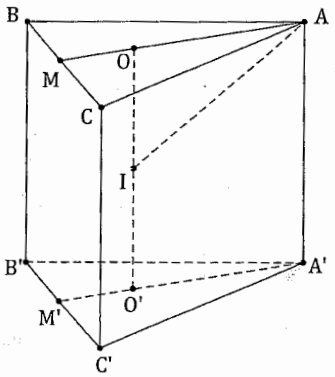
$\Rightarrow MN=OM+ON\Rightarrow 7=\sqrt{R^2-9}+\sqrt{R^2-16}\Rightarrow R=5\Rightarrow S=100\pi.$

* Nếu O nằm ngoài tứ diện $\Rightarrow MN=OM-ON\Rightarrow 7=\sqrt{R^2-9}-\sqrt{R^2-16}$

$\Rightarrow$ Vô nghiệm thực. $\rightarrow$ **Đáp án A**

Câu 19:

Gọi O và O' lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, A'B'C' thì trung điểm I của OO' chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.



Tam giác ABC đều nên $AO=\frac{2}{3}AM=\frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}a}{2}=\frac{\sqrt{3}a}{3}.$

Tam giác AOI vuông tại O nên

$R=AI=\sqrt{AO^2+OI^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{9}+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{21}}{6}.$

Vậy thể tích mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ là:

$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{7\sqrt{21}\pi a^3}{54}.$ $\rightarrow$ **Đáp án A**

Câu 20:

Từ giả thiết em có tam giác MBC cân tại M

$\Rightarrow \widehat{BMH}=60^0.$

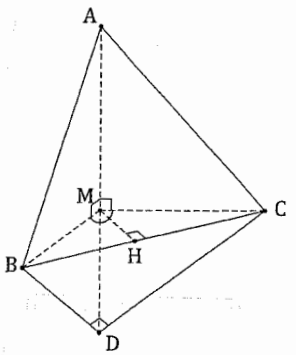
Vì $MH=a\sqrt{2}$ nên $MB=MC=2\sqrt{2}a$ và $BC=2\sqrt{6}a.$

Do tam giác ABC đều nên $AB=AC=BC=2\sqrt{6}a.$

Do tam giác DBC vuông cân nên em suy ra được

$DB=DC=\frac{\sqrt{2}}{2}.BC=2\sqrt{3}a.$

$MA=\sqrt{AC^2-MC^2}=4a$ và $MD=\sqrt{BD^2-MB^2}=2a.$



$\Rightarrow AD = MA + MD = 6a \Rightarrow AB^2 + BD^2 = AD^2 \Rightarrow \widehat{ABD} = 90^0.$

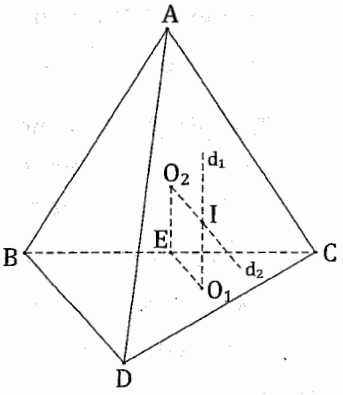
Tương tự $\widehat{ACD} = 90^0 \Rightarrow$ ABCD nội tiếp mặt cầu đường kính AD

Suy ra thể tích khối cầu là: $V = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{AD}{2}\right)^3 = 36\pi a^3.$

→ **Đáp án A**

Câu 21:

Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các ΔBCD và ΔABC; E là trung điểm của BC.



$O_1E \perp BC \Rightarrow O_1E \perp (ABC)$ $(\text{do } (ABC) \perp (BCD))$

$O_2E \perp BC \Rightarrow O_2E \perp (DBC)$

Qua O_1 dựng đường thẳng $d_1 \perp (BCD)$ thì d_1 là trục của tam giác BCD và $d_1 // O_2E$.

Qua O_2 dựng đường thẳng $d_1 \perp (ABC)$ thì d_2 là trục của tam giác BCA và $d_2 // O_1E$.

Như vậy, tâm I của mặt cầu là giao điểm của d_1 và d_2

Thật vậy: $\left.\begin{array}{l} I \in d_1 \Rightarrow IB = IC = ID \\ I \in d_2 \Rightarrow IB = IC = IA \end{array}\right\} \Rightarrow IA = IB = IC = ID$

Tứ giác EO_1IO_2 là hình chữ nhật, suy ra $IE^2 = O_1E^2 + O_2E^2$

Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính của các đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và ABC,

em có $O_1E^2 = O_1C^2 - EC^2 = {R_1}^2 - \frac{BC^2}{4}$; $O_2E^2 = O_2C^2 - EC^2 = {R_2}^2 - \frac{BC^2}{4}$.

$\Rightarrow IE^2 = {R_1}^2 + {R_2}^2 - \frac{BC^2}{2} \Rightarrow R^2 = IE^2 + EC^2 = {R_1}^2 + {R_2}^2 - \frac{BC^2}{4}.$

Áp dụng định lí sin trong các ΔBCD và ΔABC em có:

$\frac{BC}{\sin \widehat{BDC}} = 2R_1 \Rightarrow \frac{a}{2.\sin 30^0} = R_1 \Rightarrow R_1 = a$; $\frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = 2R_2 \Rightarrow \frac{a}{2.\sin 60^0} = R_2 \Rightarrow R_2 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow R^2 = a^2 + \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4} = \frac{13a^2}{12} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{39}a}{6}$

Thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp ABCD là: $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{39}}{6}\right)^3 = \frac{13\sqrt{39}a^3}{54}$

→ **Đáp án D**

Câu 22:

Gọi M là trung điểm của BC.

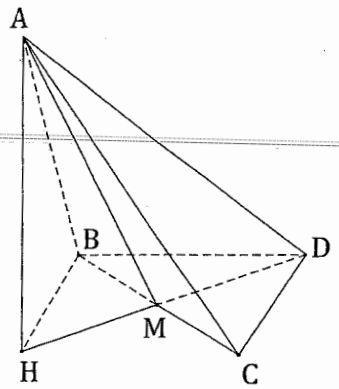
Áp dụng công thức đường trung tuyến em có: $AM = 1$; $DM = \sqrt{2}$.

Do H và D nằm về 2 phía của BC, góc giữa mặt phẳng (ABC) và (DBC) bằng 45^0 nên $\widehat{SMH} = 45^0$

$\Rightarrow \widehat{SMD} = 135^0 \Rightarrow AD = \sqrt{5}$

$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^0$ (vì thỏa mãn định lí Pytago)

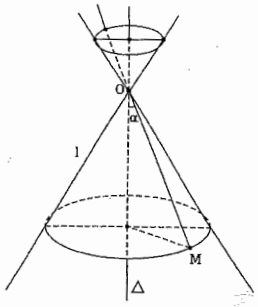
$\Rightarrow$ Bốn điểm A, B, C, D nội tiếp mặt cầu đường kính AD $\Rightarrow$ Bán kính mặt cầu đó là $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.



→ Đáp án D

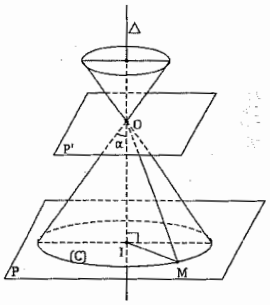
Dạng 3. Các dạng bài tập về mặt nón, hình nón, khối nón tròn xoay

☞ **Mặt nón:** Cho đường thẳng Δ và đường thẳng l cắt Δ tại O, tạo với Δ một góc α không đổi $(0^0 < \alpha < 90^0)$. Mặt tròn xoay được tạo ra gọi là mặt nón tròn xoay (mặt nón).



Trong đó: Δ : Trục của mặt nón
l : Đường sinh của mặt nón
O : Đỉnh của mặt nón
2α : Góc ở đỉnh

☞ **Hình nón:** Cho mặt nón $\mathcal{N}$ với trục Δ, đỉnh O và góc ở đỉnh là 2α. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với Δ tại I $(I \neq O)$, cắt mặt phẳng theo thiết diện là đường tròn (C) và (P') là mặt phẳng vuông góc với Δ tại O. Khi đó phần mặt nón $\mathcal{N}$ giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (P') cùng với đường tròn (C) được gọi là hình nón.



☞ **Khối nón:** Mặt nón cùng với phần bên trong của nó tạo thành khối nón.

☞ Ngoài ra, em cũng cần nhớ các công thức tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình nón và công thức tính thể tích khối nón.

Đặc biệt, em chú ý công thức tính đường sinh của hình nón là: $l = \sqrt{r^2 + h^2}$, với r là bán kính đáy, h là đường cao hình nón.

Thiết diện qua trục của hình nón luôn là một tam giác cân tại đỉnh.

BÀI TẬP MẪU

Cơ bản

Câu 20: Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay có đường cao h = 8 cm, bán kính đáy r = 6 cm là

A. 12π dm^2. **B.** $1,2\pi$ dm^2. **C.** 60π dm^2. **D.** $0,6\pi$ dm^2.

Hướng dẫn giải

Dựa vào phần chú ý ở trên, em tính được đường sinh của hình nón là:

$l=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10.$

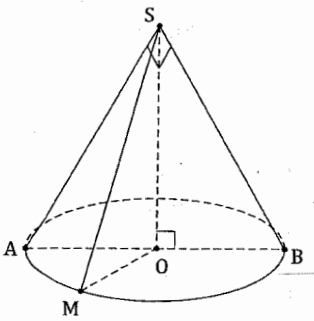
Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xp}=\pi rl=60\pi$ cm$^2=0,6\pi$ dm^2. → **Đáp án D**

Câu 21: Cắt hình nón đỉnh S bởi mặt phẳng đi qua trục được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích của khối nón là

A. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{12}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3}{12}$. **D.** $\pi a^3\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết em có ΔSAB vuông cân tại S, $AB=a\sqrt{2}$.



$\Rightarrow SA=SB=a$ và bán kính đáy $r=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

ΔSAO vuông tại O nên:

$SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}=h.$

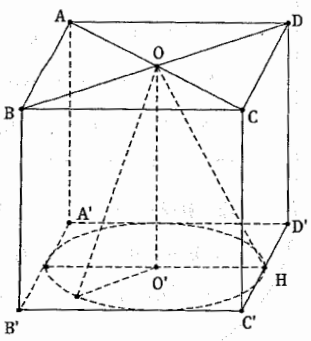
$\Rightarrow V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{\pi}{3}.\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{12}.$ → **Đáp án B**

Câu 22: Cho hình lập phương ABCD. A'B'C'D' có cạnh là a. Diện tích toàn phần của hình nón có đỉnh là tâm của hình vuông ABCD và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông A'B'C'D' là

A. $\dfrac{\pi a^2\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}$. **B.** $\dfrac{\left(1+2\sqrt{5}\right)\pi a^2}{4}$. **C.** $\dfrac{\left(2+\sqrt{5}\right)\pi a^2}{4}$. **D.** $\dfrac{\pi a^2\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}$.

Hướng dẫn giải

Gọi O và O' là tâm của 2 đáy. Do ABCD.A'B'C'D' là hình lập phương nên đường cao và bán kính đường tròn đáy của hình nón đỉnh O lần lượt là $h=a;\ R=\dfrac{a}{2}$.



$\Delta OO'H$ vuông tại O' nên $OH=\sqrt{OO'^2+O'H^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

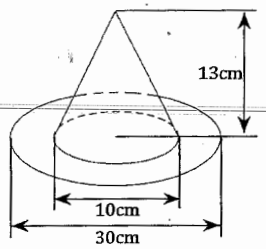
$\Rightarrow$ Diện tích toàn phần của hình nón đỉnh O là:

$S_{tp}=S_{xp}+S_d=\pi Rl+\pi R^2=\pi.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a\sqrt{5}}{2}+\pi\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{\pi a^2\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}.$

→ **Đáp án D**

♥ Vận dụng

Câu 23: Một cái mũ được thiết kế gồm 2 phần: phần vành mũ và phần đỉnh mũ. Phần vành mũ được giới hạn bởi 2 đường tròn đồng tâm có đường kính lần lượt là 10 cm và 30 cm. Phần đỉnh mũ là hình nón có chiều cao là 13 cm. Tính diện tích phần vải để may hai cái mũ khi bỏ qua riềm may vải?



A. 150π cm^2.
B. 265π cm^2.
C. 260π cm^2.
D. 520π cm^2.

Hướng dẫn giải

Diện tích phần vành mũ là: $S_1 = \pi.15^2 - \pi 5^2 = \pi\left(15^2 - 5^2\right) = 200\pi$ cm^2.

Đường sinh phần đỉnh mũ là: $l = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ cm.

Diện tích phần đỉnh mũ là: $S_2 = \pi.r.l = \pi.5.12 = 60\pi$ cm^2.

Vậy diện tích vải để may 2 cái mũ là: $S = 2\left(S_1 + S_2\right) = 520\pi$ cm^2.

→ **Đáp án D**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 24: Cho hình nón có chiều cao h, độ dài đường sinh là l và bán kính đáy là r. Nhận định nào sau đây là đúng?

A. Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi rl$.

B. Diện tích toàn phần của hình nón là $S_{tp} = 2\pi rl$.

C. Thể tích của hình nón là $V = h\pi r^2$.

D. Diện tích đáy của hình nón là $S_d = 2\pi rl$.

Câu 25: Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, AB = a, $AC = a\sqrt{3}$. Độ dài đường sinh của hình nón khi quay tam giác ABC quanh trục AB là

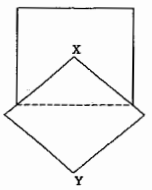
A. $l = a$.
B. $l = a\sqrt{2}$.
C. $l = a\sqrt{3}$.
D. $l = 2a$.

Câu 26: Cho hình lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ có cạnh là $2\sqrt{3}$ cm. Thể tích của khối nón tròn xoay tạo bởi lục giác đều khi quay quanh đường trung trực của A_1A_2 và A_4A_5 là

A. $V = 21\pi$ cm^3.
B. $V = 42\pi$ cm^3.
C. $V = 21$ cm^3.
D. $V = 42$ cm^3.

Câu 27: Cho 2 hình vuông có cạnh bằng nhau và bằng 5 được xếp chồng lên nhau sao cho đỉnh X của một hình vuông là tâm của hình vuông còn lại (như hình vẽ dưới). Thể tích vật thể khi quay cả khối quanh trục XY là

A. $\dfrac{125\left(3+2\sqrt{2}\right)\pi}{4}$.
B. $\dfrac{125\left(3+2\sqrt{2}\right)\pi}{12}$.
C. $\dfrac{125\left(5+4\sqrt{2}\right)\pi}{24}$.
D. $\dfrac{125\left(5+4\sqrt{2}\right)\pi}{8}$.



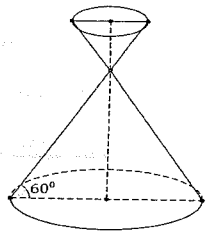
Câu 28: Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 45$; $\widehat{ACB} = 30$; $AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Quay tam giác quanh cạnh BC ta được khối tròn xoay có thể tích là

A. $\frac{\pi\left(1+\sqrt{5}\right)}{24}$ **B.** $\frac{\pi\left(1-\sqrt{5}\right)}{12}$. **C.** $\frac{\pi\left(1+\sqrt{3}\right)}{8}$. **D.** $\frac{\pi\left(1+\sqrt{3}\right)}{24}$.

Câu 29: Một tấm thép hình tròn có bán kính $R = \sqrt{6}$ dm. Người ta dự định cắt bỏ một phần dọc theo bán kính của tấm thép rồi gò phần còn lại thành một cái phễu hình nón. Góc α chắn cung tròn bị cắt bỏ xấp xỉ bao nhiêu để thể tích của cái phễu là lớn nhất?

A. $\alpha \approx 3^0$. **B.** $\alpha \approx 294^0$. **C.** $\alpha \approx 66^0$. **D.** $\alpha \approx 13^0$.

Câu 30: Một đồng hồ cát được cấu tạo như hình vẽ bên. Biết rằng, chiều cao của đồng hồ là 30 cm và tổng thể tích là 1000π cm^2. Nếu cho đầy cát vào phần trên rồi cho nó chảy hết xuống phần dưới thì thể tích cát chiếm bao nhiêu phần phía dưới đồng hồ?



A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{1}{8}$.

C. $\frac{4}{27}$. **D.** $\frac{10}{64}$.

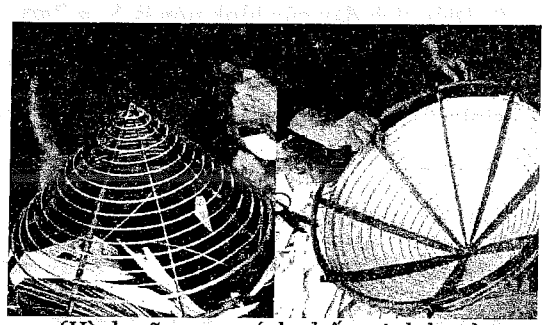
Câu 31: Cho tứ diện ABCD có đáy là tam giác ABC vuông tại B, cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết AD = AB = BC = a. Gọi V_1, V_2, V_3 lần lượt là thể tích của các khối tròn xoay tạo bởi tam giác ABD quay quanh AD, tam giác ABC quay quanh AB và tam giác BCD quay quanh BC. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $V_1 + V_2 = V_3$. **B.** $V_2 + V_3 = V_1$. **C.** $V_1 + V_3 = V_2$. **D.** $V_1 = V_2 = V_3$.

Câu 32: Chiếc nón lá được làm bởi khung nón và lá cọ. Phần khung bao gồm 15 đường tròn làm bằng tre xếp cách đều nhau như hình bên. Biết bán kính của vòng tròn lớn nhất là 20 cm. Bán kính của vòng tròn thứ 5 từ dưới lên là

A. $\frac{40}{3}$ cm. **B.** $\frac{44}{3}$ cm.

C. 10,2 cm. **D.** 5,4 cm.



(Hình vẽ mang tính chất minh họa)

ĐÁP ÁN

24	25	26	27	28	29	30	31	32
A	D	B	C	D	C	B	A	B

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 24:

Đáp án B sai vì diện tích toàn phần của hình nón là: $S_{tp}=S_{xq}+S_d=\pi r(l+r)$.

Đáp án C sai vì thể tích của hình nón là: $V=\frac{1}{3}h\pi r^2$.

Đáp án D sai vì diện tích đáy của hình nón là: $S_d=\pi r^2$. → **Đáp án A**

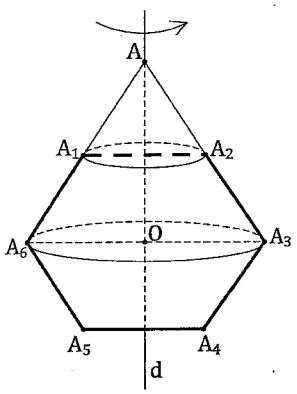
Câu 25:

ΔABC vuông tại A nên em có: $l=BC=\sqrt{AC^2+AB^2}=\sqrt{3a^2+a^2}=2a$.

→ **Đáp án D.**

Câu 26:

Em chia hình ngũ giác ban đầu thành 2 phần $A_1A_2A_3A_6$ và $A_3A_4A_5A_6$. Khi quay hình ngũ giác ban đầu quanh đường trung trực của A_1A_2 thì được 2 khối nón cụt có thể tích bằng nhau.



Em vẽ như hình bên và tính được bán kính của khối nón AA_1A_2 và AA_3A_6 quay quanh d lần lượt là $\sqrt{3}$cm và $2\sqrt{3}$cm.

⇒ Chiều cao của khối nón AA_1A_2 và AA_3A_6 lần lượt là 3cm và 6cm.

⇒ Thể tích cần tìm là: $V=2.\left(\frac{\pi}{3}\left[6.\left(2\sqrt{3}\right)^2-3.\left(\sqrt{3}\right)^2\right]\right)=42\pi$. → **Đáp án B**

Câu 27:

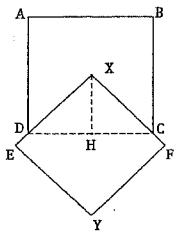
Khi phần ABCD quanh trục XY em được khối trụ có bán kính đáy $R_1=\frac{5}{2}$, đường cao $h_1=5$.

⇒ Thể tích khối trụ sinh bởi ABCD là: $V_1=\pi R_1^2h_1=\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2.5=\frac{125\pi}{4}$.

Khi quay phần XFYE quanh trục XY, em được 2 hình nón bằng nhau ghép với nhau có bán kính đáy $R_2=\frac{5\sqrt{2}}{2}$, đường cao $h_2=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

⇒ Thể tích sinh bởi XFYE là:

$$V_2=2.\frac{1}{3}.h_2.\pi R_2^2=\frac{2\pi}{3}\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{125\sqrt{2}\pi}{6}.$$



Phần bị trùng khi quay 2 phần ABCD, XFYE quanh trục XY chính là phần hình nón sinh bởi ΔXCD quay quanh XH có bán

kính đáy $R_3=\frac{5}{2}$ và đường cao $h_3=\frac{5}{2}$

$\Rightarrow$ Thể tích khối nón sinh bởi XCD là: $V_3=\frac{1}{3}.h_3.\pi R_3^2=\frac{\pi}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^3=\frac{125\pi}{24}$.

$\Rightarrow$ Thể tích V sinh bởi khối ABCFYED là:

$$V=V_1+V_2-V_3=125\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{1}{24}\right)=\frac{125\pi\left(5+4\sqrt{2}\right)}{24}.$$

→ Đáp án C

Câu 28:

Khối tạo thành bao gồm 2 hình nón chung mặt đáy.

Trong ΔABC, $\widehat{BAC}=105^0$. Áp dụng định lí sin em được:

$$\frac{BC}{\sin\widehat{BAC}}=\frac{AB}{\sin\widehat{ACB}}\Rightarrow BC=\frac{AB.\sin105^0}{\sin30^0}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Mà ΔABH vuông cân tại H nên $AH=BH=\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ Thể tích khối tròn xoay tạo thành là:

$$V=V_1+V_2=\frac{\pi AH^2}{3}(BH+CH)=\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi\left(1+\sqrt{3}\right)}{24}.$$

→ Đáp án D

Câu 29:

Gọi x là độ dài của cung tròn sau khi cắt và r là bán kính đáy của hình nón được tạo thành $(r>0)\Rightarrow x=2\pi r\Leftrightarrow r=\frac{x}{2\pi}$.

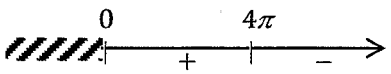
Khi cắt bỏ một phần của tấm thép rồi tạo thành hình nón thì đường sinh của hình nón tạo thành chính là bán kính $R=\sqrt{6}$ dm của tấm thép ban đầu

$\Rightarrow$ Chiều cao của hình nón là: $h=\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2-r^2}=\sqrt{6-\frac{x^2}{4\pi^2}}$.

$\Rightarrow$ Thể tích của cái phễu là: $V(x)=\frac{1}{3}\pi r^2.h=\frac{\pi}{3}\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2.\sqrt{6-\frac{x^2}{4\pi^2}}=\frac{x^2\sqrt{24\pi^2-x^2}}{24\pi^2}$.

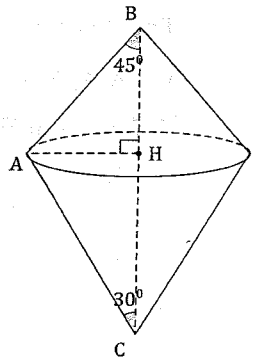
$$\Rightarrow V'(x)=\frac{48\pi^2x-3x^3}{24\pi^2\sqrt{24\pi^2-x^2}}\Rightarrow V'(x)=0\Leftrightarrow x=4\pi$$

Xét dấu $V'(x)$:



$\Rightarrow \max V(x)=\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}$ khi $x=4\pi\Rightarrow\alpha=360^0-\frac{360^0.4\pi}{2\sqrt{6}\pi}\approx66^0$

→ Đáp án C



Câu 30:

Gọi $(h_1; r_1); (h_2; r_2)$ lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của phần trên và phần dưới đồng hồ. $(h_1 < 15 < h_2) \Rightarrow h_1 + h_2 = 30.$

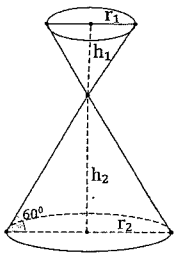
Dựa vào hình vẽ em thấy, $r_2 = \frac{h_2}{\tan 60^0} = \frac{h_2}{\sqrt{3}}; r_1 = \frac{h_1}{\tan 60^0} = \frac{h_1}{\sqrt{3}} = \frac{30 - h_2}{\sqrt{3}}.$

$\Rightarrow$ Thể tích của đồng hồ cát là:

$$V = \frac{1}{3}h_1\pi r_1^2 + \frac{1}{3}h_2\pi r_2^2 \Leftrightarrow 1000\pi = \frac{\pi}{3}(30 - h_2)\left(\frac{30 - h_2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{\pi}{3}.h_2.\left(\frac{h_2}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow h_2^2 - 30h_2 + 200 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} h_2 = 20 \Rightarrow h_1 = 10 \\ h_2 = 10 \ (L) \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{V_{trên}}{V_{dưới}} = \frac{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2} = \frac{1}{8}.$$



→ Đáp án B

Câu 31:

Do $AD \perp (ABC)$ nên $AD \perp BC$

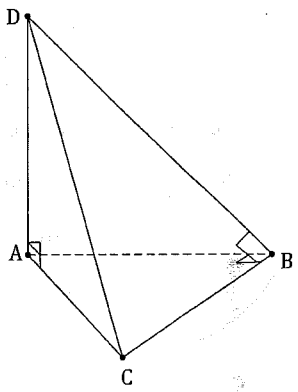
Mà $CB \perp AB$ nên suy ra $CB \perp (ADB) \Rightarrow CB \perp BD$

$\Rightarrow$ Vật thể tạo bởi tam giác BCD quay quanh BC là khối nón có đường cao bằng BC, bán kính đáy là BD

$\Rightarrow V_3 = \frac{1}{3}CB.BD^2$

Tương tự như vậy, em cũng tính được $V_1 = \frac{1}{3}AD.AB^2$

và $V_2 = \frac{1}{3}AB.CB^2$



Theo giả thiết, $AD = AB = BC = a \Rightarrow AB^2 + BC^2 = AB^2 + AD^2 = BD^2$

Hay $V_1 + V_2 = V_3$ **→ Đáp án A**

Câu 32:

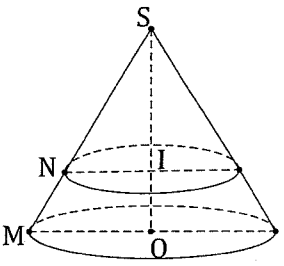
Giả sử vòng tròn thứ 5 là vòng tròn tâm I, bán kính IN.

Em có $\Delta SNI \sim \Delta SMO \Rightarrow \frac{NI}{MO} = \frac{SN}{SM} = \frac{11}{15}$

(Vì các vòng tròn cách đều nhau)

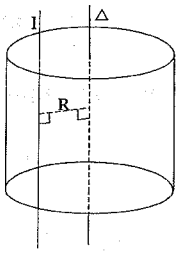
$\Rightarrow NI = \frac{11}{15}.20 = \frac{44}{3}$ cm

→ Đáp án B



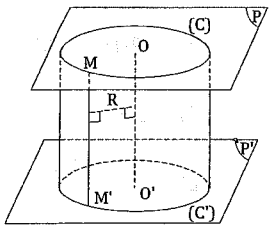
Dạng 4. Các dạng bài tập về mặt trụ, hình trụ, khối trụ tròn xoay

☞ **Mặt trụ:** Cho đường thẳng Δ và đường thẳng l song song với Δ, cách Δ một khoảng R không đổi. Mặt tròn xoay khi l quay quanh Δ được tạo ra gọi là mặt trụ tròn xoay (mặt trụ).



Trong đó: Δ : Trục của mặt trụ
l : Đường sinh của mặt trụ
R : Bán kính của mặt trụ

☞ **Hình trụ:** Cho mặt trụ có trục Δ, đường sinh l và bán kính R. Cắt mặt trụ bởi 2 mặt phẳng (P) và (P') cùng vuông góc với Δ ta được thiết diện là hai đường tròn (C) và (C'). Khi đó phần của mặt trụ giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (P') cùng với hai đường tròn (C) và (C') được gọi là hình trụ.



☞ **Khối trụ:** Hình trụ cùng với phần bên trong của nó tạo thành khối trụ.

☞ Ngoài ra, em cũng cần nhớ các công thức tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình trụ và công thức tính thể tích khối trụ.

Đặc biệt, sự tương giao của mặt trụ có trục Δ, bán kính R và mặt phẳng (α):

+ Nếu $(\alpha) \perp \Delta$ thì giao tuyến tạo ra là một đường tròn bán kính R.

+ Nếu $(\alpha) // \Delta$ thì giao tuyến là 2 đường sinh, 1 đường sinh hoặc rỗng.

+ Nếu (α) ngoài 2 trường hợp trên thì giao tuyến là 1 đường elip.

BÀI TẬP MẪU

✍ Cơ bản

Câu 33: Một hình trụ có diện tích đáy là $\frac{\pi}{9}$, chiều cao h = 5. Diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ lần lượt là

A. $\frac{5\pi}{9}$ và $\frac{10\pi}{3}$. B. $\frac{10\pi}{3}$ và $\frac{5\pi}{9}$. C. $\frac{10\pi}{9}$ và $\frac{5\pi}{3}$. D. $\frac{5\pi}{3}$ và $\frac{10\pi}{9}$.

Hướng dẫn giải

Bán kính của đường tròn đáy là $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt{\frac{\pi}{9\pi}} = \frac{1}{3}$.

$\Rightarrow$ Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi r.h = 2\pi.\frac{1}{3}.5 = \frac{10\pi}{3}$.

Thể tích của hình trụ là $V = B.h = \frac{\pi}{9}.5 = \frac{5\pi}{9}$. $\rightarrow$ **Đáp án B**

Câu 34: Một hình trụ có bán kính đáy là 5a, khoảng cách giữa hai đáy là 7a. Diện tích toàn phần của hình trụ là

A. $120\pi a^2$. **B.** $100\pi a^2$. **C.** $20\pi a^2$. **D.** $70\pi a^2$.

Hướng dẫn giải

Diện tích toàn phần của hình trụ là $S = S_{xq} + 2S_d = 2\pi.5a.7a + 2.\pi(5a)^2 = 120\pi a^2$.

→ **Đáp án A**

♥ Vận dụng

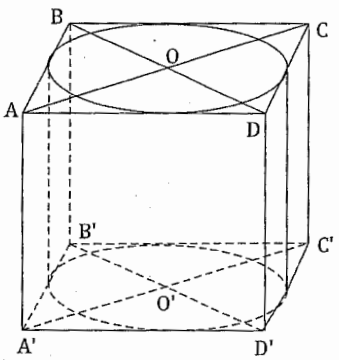
Câu 35: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Một hình trụ có 2 đáy nội tiếp hình vuông là 2 đáy của hình lập phương. Tỉ số thể tích của khối trụ đối với khối lập phương là

A. 2. **B.** $\frac{\pi}{4}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Giả sử cạnh của hình lập phương là a ⇒ Thể tích khối lập phương là $V_1 = a^3$.

Đường tròn tâm O nội tiếp hình vuông ABCD cạnh a nên bán kính của đường tròn là $R = \frac{a}{2}$



⇒ Diện tích hình tròn đáy hình trụ là:

$$S = \pi R^2 = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}.$$

⇒ Thể tích khối trụ nội tiếp hình lập phương là:

$$V_2 = \frac{\pi a^2}{4}.a = \frac{\pi a^3}{4}.$$

Vậy tỉ số thể tích khối trụ đối với khối lập phương là:

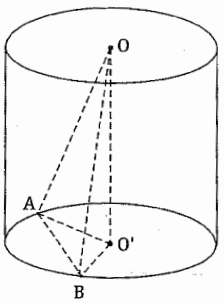
$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\pi}{4}$. → **Đáp án B**

Câu 36: Cho hình trụ có hai đáy là hình tròn tâm O và O', bán kính là 2cm. Trên đường tròn (O'), lấy điểm A, B sao cho AB = 2cm. Biết thể tích tứ diện OO'AB là 8 cm^2. Thể tích khối trụ là

A. $\frac{32\sqrt{3}\pi}{3}$ cm^3. **B.** $16\sqrt{3}\pi$ cm^3. **C.** $8\sqrt{3}\pi$ cm^3. **D.** $32\sqrt{3}\pi$ cm^3.

Hướng dẫn giải

Nhận thấy, $OO' \perp (O'AB)$ nên thể tích OO'AB là:



$$V_{O.O'AB} = \frac{1}{3}S_{\Delta O'AB}.OO' = 8.$$

$\Delta O'AB$ là tam giác đều có cạnh là 2cm nên $S_{O'AB} = \frac{2^2.\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ cm.

⇒ OO' = $8\sqrt{3}$ cm.

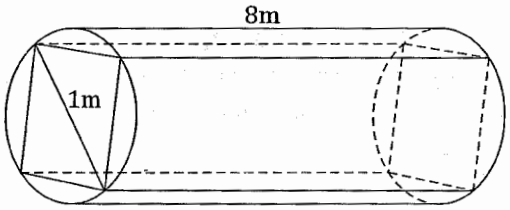
⇒ Thể tích hình trụ là:

$V = B.h = \pi.r^2.OO' = \pi.2^2.8\sqrt{3} = 32\sqrt{3}\pi$ cm^3. → **Đáp án D**

*** Nâng cao**

Câu 37: Người ta muốn cưa một thân cây hình trụ có đường kính 1m, chiều dài 8m để được một khối hình hộp chữ nhật như hình vẽ dưới đây. Thể tích lớn nhất của khối gỗ sau khi cưa là

A. $4\ m^3$. **B.** $6\ m^3$. **C.** $6\sqrt{3}\ m^3$. **D.** $4\sqrt{3}\ m^3$.



Hướng dẫn giải

Gọi x, y là các cạnh của thiết diện mặt đáy $\Rightarrow x^2+y^2=1$.

Em chú ý, thể tích của khối gỗ bị cắt lớn nhất khi diện tích của thiết diện lớn nhất (do độ dài của khối gỗ không đổi).

Mà $1=x^2+y^2 \overset{\text{Cauchy}}{\geq} 2xy \Leftrightarrow xy \leq \frac{1}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\Rightarrow$ Thể tích lớn nhất của khối gỗ sau khi cưa là: $V=\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}}.8=4\ m^3$. $\rightarrow$ **Đáp án A**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 38: Nếu tăng chiều cao của một hình trụ lên gấp 2 lần và giảm bán kính của đường tròn đáy đi 2 lần thì thể tích khối trụ đó thay đổi là

A. Không thay đổi gì. **B.** Có thể tăng lên hoặc giảm đi.

C. Tăng lên gấp 2 lần. **D.** Giảm đi gấp 2 lần.

Câu 39: Hình trụ (T) có bán kính đáy là R và có diện tích toàn phần là $8\pi R^2$. Thể tích của khối trụ (T) là

A. $\sqrt{3}\pi R^3$. **B.** $6\pi R^3$. **C.** $3\pi R^3$. **D.** πR^3.

Câu 40: Hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh bằng $a\sqrt{2}$ nội tiếp một hình trụ. Thể tích khối trụ đó là

A. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{6}$. **B.** $\frac{2\sqrt{2}\pi a^3}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

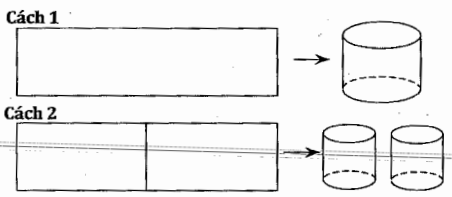
Câu 41: Một hình trụ có chiều cao và bán kính đáy là x. Mặt phẳng (P) song song với trục OO' của hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông. Khoảng cách từ OO' đến (P) là $\sqrt{3}a$. Giá trị của x là

A. $\sqrt{3}a$. **B.** $2a$. **C.** $2\sqrt{2}a$. **D.** $2\sqrt{3}a$.

Câu 42: Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước 50cm x 240cm, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 50cm, theo hai cách sau:

Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu theo mặt xung quanh của thùng.

Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành 2 tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm theo mặt xung quanh của một thùng.



Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng ở cách 1, V_2 là tổng thể tích của thùng ở cách 2. Tính $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 43: Một hình trụ có diện tích xung quanh là 16π, thiết diện qua trục là hình vuông. Một mặt phẳng (P) song song với trục, cắt hình trụ theo thiết diện là ABCD, biết một cạnh của thiết diện là một dây cung của đường tròn đáy chắn một cung bằng 150^0. Diện tích thiết diện ABCD là

A. $8\sqrt{2-\sqrt{3}}$. B. $8\sqrt{2+\sqrt{3}}$. C. $4\sqrt{2+\sqrt{3}}$. D. $4\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

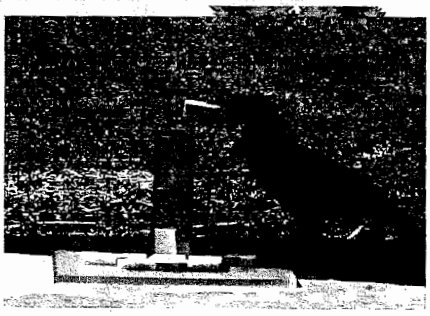
Câu 44: Một hình trụ có bán kính R, đường cao OO' = h. Gọi CD là một đường kính cố định của (O') và AB là một đường kính di động của (O). Gọi α là góc giữa AB và CD. Giá trị của α để thể tích khối tứ diện ABCD lớn nhất là

A. 30^0. B. 60^0. C. 45^0. D. 90^0.

Câu 45: Trong số các hình trụ có cùng diện tích toàn phần, giả sử khối trụ (H) có thể tích lớn nhất. Mối quan hệ giữa bán kính đáy R và chiều cao h của (H) là

A. $R=\sqrt{2}h$. B. $h=\sqrt{2}R$. C. $h=2R$. D. $R=2h$.

Câu 46: Một con quạ đang khát nước và nó nhìn thấy một cái lọ hình trụ cao 10 cm, bán kính đáy là 1,5 cm. Nó không thể nào thò mỏ vào để uống nước bởi vì mực nước hiện tại chỉ cao 5 cm. Bỗng nhiên, nó nghĩ ra một cách đó là gắp những viên sỏi thả vào lọ. Giả sử thể tích của mỗi viên sỏi là như nhau và bằng $1\,cm^3$. Hỏi con quạ phải bỏ vào lọ tối thiểu bao nhiêu viên sỏi để nó có thể uống được nước? Coi như mực nước cách miệng lọ 1 cm thì nó đã uống được.



A. 10 viên sỏi. B. 29 viên sỏi.
C. 12 viên sỏi. D. 28 viên sỏi

Câu 47: Một con lăn có bán kính đáy là 5 cm và dài 30 cm. Trên bao bì sản phẩm có ghi, con lăn được sử dụng 1,5 triệu lần thì hỏng. Coi như mỗi một lần sử dụng thì con lăn quay một vòng. Diện tích con lăn tạo ra trước khi hỏng là



A. $45000\ m^2$. B. $45000\pi\ m^2$.
C. $4500\pi\ m^2$. D. $4500\ m^2$.

Câu 48: Để sản suất ra bao bì của hộp sữa có thể tích V, công ty Vinamilk có ba phương án: hộp sữa hình hộp chữ nhật, hộp sữa hình lập phương và hộp sữa hình trụ đáy tròn. Với phương châm là tạo ra sản phẩm có chi phí sản xuất bao bì thấp nhất, công ty Vinamilk nên lựa chọn

A. Hộp sữa hình hộp chữ nhật.

B. Hộp sữa hình lập phương.

C. Hộp sữa hình trụ đáy tròn.

D. Hộp sữa hình nào cũng được vì chi phí sản xuất bao bì như nhau.

ĐÁP ÁN

38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
D	C	D	B	C	B	D	C	B	B	C

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 38:

Thể tích khối lăng trụ có chiều cao là h, bán kính đáy là: R là $V = B.h = \pi R^2.h$

Nếu tăng chiều cao lên gấp 2 lần và giảm bán kính của đường tròn đáy đi 2 lần thì thể tích khối trụ đó là: $V' = B'.h' = \pi R'^2.h' = \pi.\frac{R^2}{4}.2h = \frac{\pi R^2 h}{2} = \frac{V}{2}$ → **Đáp án D**

Câu 39:

Diện tích toàn phần của khối trụ (T) là: $S_{TP} = S_{xq} + 2S_d \Leftrightarrow 8\pi R^2 = 2\pi R.h + 2.\pi R^2$

$\Leftrightarrow 3\pi R^2 = \pi Rh \Leftrightarrow h = 3R.$

Vậy thể tích khối trụ đó là: $V = B.h = \pi R^2.3R = 3\pi R^3.$ → **Đáp án C**

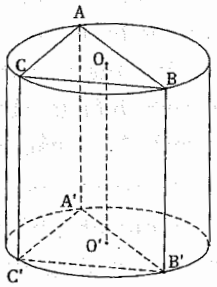
Câu 40:

Gọi O và O' là trọng tâm ΔABC và $\Delta A'B'C'$.

$\Rightarrow$ Bán kính mặt đáy của khối trụ là: $R = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{2}a.\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}a}{3}.$

Vậy thể tích khối trụ là:

$V = B.h = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{\sqrt{6}a}{3}\right)^2.\sqrt{2}a = \frac{2\sqrt{2}\pi a^3}{3}.$ → **Đáp án D**



Câu 41:

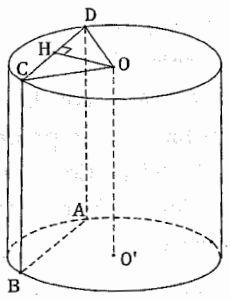
Gọi thiết diện tạo thành là ABCD. Lấy H là trung điểm của CD thì $d(OO',(ABCD)) = d(O,(ABCD)) = OH = \sqrt{3}a.$

Tứ giác ABCD là hình vuông cạnh x nên CD = x.

Tam giác OHC vuông tại H nên em có:

$OH = \sqrt{OC^2 - CH^2} \Leftrightarrow a\sqrt{3} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} \Leftrightarrow x = 2a.$

→ **Đáp án B**



Câu 42:

Bán kính của đường tròn mặt đáy ở cách 1 là: $r_1 = \frac{240}{2\pi} = \frac{120}{\pi}$cm.

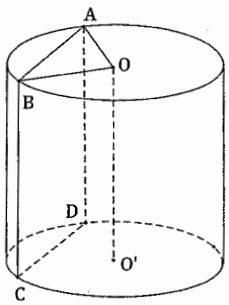
$\Rightarrow$ Thể tích của thùng làm theo cách 1 là: $V_1 = B_1 h = \pi\left(\frac{120}{\pi}\right)^2.50 = \frac{72.10^4}{\pi}$cm^3.

Bán kính của đường tròn mặt đáy ở cách 2 là: $r_2 = \frac{120}{2\pi} = \frac{60}{\pi}$cm.

$\Rightarrow$ Thể tích của thùng làm theo cách 2 là: $V_2 = 2B_2 h = 2.\pi\left(\frac{60}{\pi}\right)^2.50 = \frac{36.10^4}{\pi}$.

$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{72.10^4}{\pi} : \frac{36.10^4}{\pi} = 2.$ $\rightarrow$ **Đáp án C**

Câu 43:



Diện tích xung quanh hình trụ là:

$S_{xq} = 16\pi \Rightarrow 2\pi Rh = 16\pi \Rightarrow Rh = 8.$

Thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông nên em có:

h = 2R.

$\Rightarrow$ R = 2 và h = 4.

$\overset{\frown}{AOB}$ là góc ở tâm, chắn cung 150^0 nên $\overset{\frown}{AOB} = 150^0$.

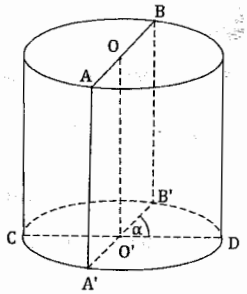
Tam giác AOB cân ở O, có $\overset{\frown}{AOB} = 150^0$ nên theo định lí cosin: $AB = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R.R.\cos 150^0} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Mà ABCD là hình chữ nhật nên diện tích ABCD là:

$S_{ABCD} = AB.AD = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}.4 = 8\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$\rightarrow$ **Đáp án B**

Câu 44:



Em có: $V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.OO'.\sin\alpha = \frac{2}{3}R^2 h.\sin\alpha.$

Do R, h không đổi nên V_{ABCD} lớn nhất khi $\sin\alpha$ lớn nhất.

Mà $-1 \le \sin\alpha \le 1 \Rightarrow \alpha$ lớn nhất khi $\sin\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 90^0$.

$\rightarrow$ **Đáp án D**

Câu 45:

Em có diện tích toàn phần của hình trụ bất kì là: $S_{TP} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh.$ (1)

Và thể tích của khối trụ bất kì là: $V = \pi R^2 h \Rightarrow Rh = \frac{V}{\pi R}.$ (2)

Lấy (2) thế vào (1) ta được:

$$S=2\pi R^2+2\pi\frac{V}{\pi R}\Leftrightarrow\frac{S}{2\pi}=R^2+\frac{V}{\pi R}\Leftrightarrow\frac{S}{2\pi}=R^2+\frac{V}{2\pi R}+\frac{V}{2\pi R}$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số dương $R^2, \frac{V}{2\pi R}, \frac{V}{2\pi R}$ em được:

$$R^2+\frac{V}{2\pi R}+\frac{V}{2\pi R}\geq 3\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}.$$

$$\Rightarrow\frac{S}{2\pi}\geq 3\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}\Rightarrow\frac{S}{6\pi}\geq\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}\Rightarrow\frac{S^3}{216\pi^3}\geq\frac{V^2}{4\pi^2}\Rightarrow V\leq\sqrt{\frac{S^3}{54\pi}}.$$

Vậy thể tích lớn nhất khi $V=\sqrt{\frac{S^3}{54\pi}}$, dấu "=" xảy ra khi $R^2=\frac{V}{2\pi R}=\frac{V}{2\pi R}\Rightarrow h=2R.$

→ **Đáp án C**

Câu 46:

Thể tích tối thiểu của cốc nước mà con quạ có thể uống được là:

$V_1=9.\pi.1,5^2=20,25\pi\ cm^3$

Thể tích ban đầu của cốc nước là: $V_2=5.\pi 1,5^2=11,25\pi\ cm^3$

$\Rightarrow$ Thể tích cần thêm để con quạ uống được nước là:

$V=V_1-V_2=20,25\pi-11,25\pi=9\pi cm^3\approx 28,2743\ cm^3$

$\Rightarrow$ Số viên sỏi mà con quạ phải bỏ vào lọ là 29 viên.

→ **Đáp án B**

Câu 47:

Diện tích con lăn là: $S=2\pi.5.30=300\pi\ cm^2$

$\Rightarrow$ Diện tích con lăn tạo ra trước khi hỏng là: $S_1=1,5.10^6.S=1,5,10^6.300\pi$

$=4,5\pi.10^8\ cm^2=45000\pi\ m^2$ → **Đáp án B**

Câu 48:

TH1: Hộp sữa dạng hình hộp chữ nhật. Giả sử 3 cạnh là a, b, c.

Em có $V=abc$ và diện tích hộp là: $S_1=2(ab+bc+ac)\overset{Cauchy}{\geq}2.3\sqrt[3]{a^2.b^2.c^2}=6\sqrt[3]{V^2}$

TH2: Hộp sữa hình lập phương có cạnh a $\Rightarrow V=a^3$ và diện tích hộp $S_2=6a^2=6\sqrt[3]{V^2}$

TH3: Hộp sữa hình trụ. Giả sử chiều cao là h và bán kính đáy là r.

Em cũng suy ra được: $V=\pi r^2h\Rightarrow h=\frac{V}{\pi r^2}$ và diện tích hộp là:

$$S_3=2\pi(rh+r^2)=2\pi\left(\frac{V}{\pi r}+r^2\right)=2\pi\left(\frac{V}{2\pi r}+\frac{V}{2\pi r}+r^2\right)\overset{Cauchy}{\geq}6\pi\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}=6\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{4}}$$

Với 3 giá trị nhỏ nhất của S_1,S_2,S_3 là $6\sqrt[3]{V^2},6\sqrt[3]{V^2},6\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{4}}$ thì rõ ràng S_3 nhỏ nhất.

→ **Đáp án C**

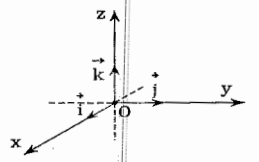
ĐIỂM, VECTƠ và MẶT CẦU

1. Hệ trục tọa độ

Hệ trục Oxyz gồm ba trục Ox, Oy, Oz *đôi một vuông góc.*

Các vectơ $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz thì:

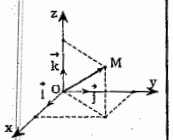
- $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$
- $\vec{i}.\vec{j}=\vec{j}.\vec{k}=\vec{k}.\vec{i}=0$



Trong Oxyz, cho $\boxed{M(x;y;z)\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}}$

Đặc biệt: ΔABC có $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$, $C(x_C;y_C;z_C)$

- $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$
- $AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
- Trung điểm I của AB có tọa độ $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$
- Trọng tâm G của ΔABC có tọa độ: $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$



Trong Oxyz, cho $\vec{u}=(x;y;z)\Leftrightarrow \vec{u}=x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}$ với $\vec{i};\vec{j};\vec{k}$ là các vectơ đơn vị trên trục Ox, Oy, Oz

2. Tọa độ điểm và vectơ

Tọa độ vectơ

Cho 2 vectơ $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3),\vec{v}=(v_1;v_2;v_3)$

1) $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow u_1=v_1;u_2=v_2;u_3=v_3$

2) $\vec{u}\pm\vec{v}=(u_1\pm v_1;u_2\pm v_2;u_3\pm v_3)$

3) $k\vec{u}=(ku_1;ku_2;ku_3)$ với k là số tùy ý

4) $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow \vec{u}=k\vec{v}(k\neq 0)$

Tích vô hướng và tích có hướng

Định nghĩa

Cho $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3),\vec{v}=(v_1;v_2;v_3)$. ***Tích có hướng*** của $\vec{u},\vec{v}$ là ***một vectơ***

$$[\vec{u},\vec{v}]=\left(\begin{vmatrix}u_2&u_3\\v_2&v_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}u_3&u_1\\v_3&v_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}u_1&u_2\\v_1&v_2\end{vmatrix}\right)=(u_2v_3-u_3v_2;u_3v_1-u_1v_3;u_1v_2-u_2v_1)$$

Tính chất và ứng dụng

Tính chất	Ứng dụng
✓ $\left[[\vec{u},\vec{v}]\right]=\left[\vec{u}\right].\left[\vec{v}\right]\sin(\vec{u},\vec{v})$	1) Ba vectơ $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{u},\vec{v}].\vec{w}=0$
✓ $[\vec{u},\vec{v}]=\vec{0}\Leftrightarrow \vec{u},\vec{v}$ là hai vectơ cùng phương	2) Diện tích hình bình hành ABCD là $S_{ABCD}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]$
✓ $\begin{cases}[\vec{u},\vec{v}]\perp\vec{u}\\ [\vec{u},\vec{v}]\perp\vec{v}\end{cases}\Rightarrow[\vec{u},\vec{v}].\vec{u}=[\vec{u},\vec{v}].\vec{v}=0$	3) Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$
	4) Thể tích khối hộp ABCD.A'B'C'D' là $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}$
	5) Thể tích khối tứ diện ABCD là $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}$

Tích vô hướng

Cho $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3),\vec{v}=(v_1;v_2;v_3)$. ***Tích vô hướng*** của $\vec{u},\vec{v}$ là ***một số***

$$\vec{u}.\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$$

Ứng dụng

Cho 2 vectơ $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3),\vec{v}=(v_1;v_2;v_3)$

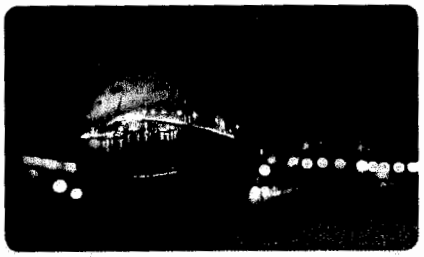
1) $|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}^2}=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$

2) $\cos(\vec{u};\vec{v})=\frac{u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}.\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$ với $\vec{u};\vec{v}\neq\vec{0}$

3) $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=0$

3. Tích vô hướng và tích có hướng

4. Mặt cầu



Vị trí tương đối

Trong Oxyz, cho mặt cầu (S_1) tâm I_1 bán kính R_1 và mặt cầu (S_2) tâm I_2 bán kính R_2.

(S_1) và (S_2) **ngoài nhau**	$I_1I_2>R_1+R_2$
(S_1) và (S_2) **tiếp xúc ngoài**	$I_1I_2=R_1+R_2$
(S_1) và (S_2) **cắt nhau**	$\lvert R_1-R_2\rvert<I_1I_2<R_1+R_2$
(S_1) và (S_2) **tiếp xúc trong**	$I_1I_2=\lvert R_1-R_2\rvert$
(S_1) và (S_2) **chứa trong nhau**	$I_1I_2<\lvert R_1-R_2\rvert$

Giữa hai mặt cầu

Trong Oxyz, cho mặt cầu có tâm I bán kính R và đường thẳng Δ.

$(S)\cap\Delta=\varnothing$	$d(I,\Delta)>R$
Δ **tiếp xúc với** (S)	$d(I,\Delta)=R$
Δ **cắt** (S)	$d(I,\Delta)<R$

Mặt cầu - Đường thẳng

Trong Oxyz, cho mặt cầu (S) tâm I bán kính R và mặt phẳng (P): $Ax+By+Cz+D=0$

$(S)\cap(P)=\varnothing$	$d(I,(P))>R$
(P) **tiếp xúc với** (S)	$d(I,(P))=R$
(P) **cắt** (S)	$d(I,(P))<R$

Mặt cầu - Mặt phẳng

Phương trình

Phương trình mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$; bán kính R có dạng $\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2}$

Hoặc $\boxed{x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0\ (*)}$ với $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}>0$

Lưu ý: Một phương trình có dạng $(*)$ và thỏa mãn $a^2+b^2+c^2>d$ thì mới là phương trình mặt cầu

CHUYÊN ĐỀ 3: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

CHỦ ĐỀ 1: PHÉP TÍNH TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

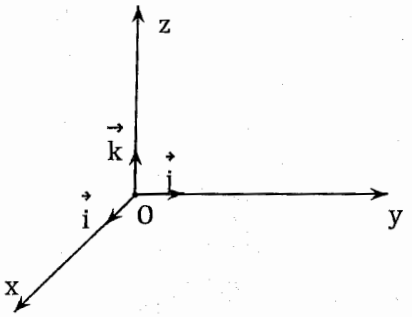
A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Hệ trục tọa độ trong không gian

Hệ gồm ba trục Ox, Oy, Oz *đôi một vuông góc* được gọi là một hệ trục tọa độ vuông góc trong không gian.

Gọi $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz thì:

- $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2$.
- $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{i}.\vec{k} = 0$.

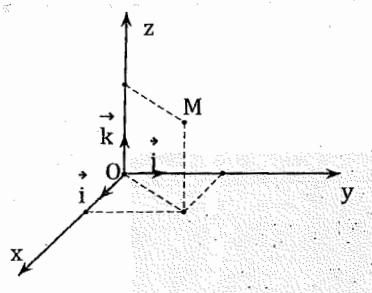


2. Tọa độ điểm và vectơ

✓ **Tọa độ của điểm:** Trong không gian tọa độ Oxyz, mỗi điểm M tương ứng với bộ ba số duy nhất $(x; y; z)$ và bộ ba số đó được gọi là tọa độ của M.

$$M(x;y;z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$$

Kí hiệu: $M(x; y; z)$ hoặc $M = (x; y; z)$.



* **Lưu ý:** Tam giác ABC có: $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$, $C(x_C;y_C;z_C)$

- I là trung điểm của $AB \Rightarrow I\left(\frac{x_M+x_N}{2};\frac{y_M+y_N}{2};\frac{z_M+z_N}{2}\right)$
- G là trọng tâm của tam giác ABC $\Rightarrow G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$

✓ **Tọa độ của vectơ:** Trong không gian tọa độ Oxyz, cho vectơ $\vec{u}$. Khi đó, bộ ba số duy nhất $(x; y; z)$ sao cho $\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$. Bộ ba số $(x; y; z)$ được gọi là tọa độ của vectơ $\vec{u}$

$$\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u}(x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

✓ **Các tính chất:** Cho hai vectơ $\vec{u} = (u_1;u_2;u_3)$, $\vec{v} = (v_1;v_2;v_3)$. Khi đó

Phép toán vectơ	Tích vô hướng của hai vectơ
▪ $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ u_3 = v_3 \end{cases}$ ▪ $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2; u_3 + v_3)$ ▪ $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2; u_3 - v_3)$	▪ $\vec{u}.\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ ▪ $\lvert\vec{u}\rvert = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ ▪ $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$ ▪ $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$

▪ $k\vec{u}=(ku_1;ku_2;ku_3)$ Hai vectơ $\vec{u},\vec{v}(\vec{v}\neq\vec{0})$ cùng phương	
$\Leftrightarrow \vec{u}=k\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=kv_1\\u_2=kv_2\\u_3=kv_3\end{cases}$	

3. Tích có hướng của hai vectơ

Tích có hướng của hai vectơ $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$, $\vec{v}=(v_1;v_2;v_3)$ là một vectơ, kí hiệu $[\vec{u},\vec{v}]$ hoặc $\vec{u}\wedge\vec{v}$ xác định bởi công thức:

$$[\vec{u},\vec{v}]=\left(\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}u_3 & u_1\\ v_3 & v_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\right)=(u_2v_3-u_3v_2;u_3v_1-u_1v_3;u_1v_2-u_2v_1)$$

Tính chất	Ứng dụng
• $\left\|[\vec{u},\vec{v}]\right\|=\left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|\sin(\vec{u},\vec{v})$ • $[\vec{u},\vec{v}]=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{u},\vec{v}$ cùng phương. • $\begin{cases}[\vec{u},\vec{v}]\perp\vec{u}\\[\vec{u},\vec{v}]\perp\vec{v}\end{cases}\Rightarrow[\vec{u},\vec{v}].\vec{u}=[\vec{u},\vec{v}].\vec{v}=0.$	• Ba vectơ $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow[\vec{u},\vec{v}].\vec{w}=0.$ • Diện tích hình bình hành ABCD $S_{ABCD}=\left\|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}]\right\|.$ • Diện tích tam giác ABC: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left\|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right\|.$ •Thể tích hình hộp ABCD.A'B'C'D' $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left\|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right\|.$ •Thể tích tứ diện ABCD $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left\|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right\|.$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm tọa độ điểm, tọa độ vectơ thỏa mãn điều kiện cho trước

Phương pháp giải

Vận dụng:

- ✓ Công thức xác định tọa độ của vectơ tổng, vectơ hiệu.
- ✓ Công thức tính tọa độ trung điểm đoạn thẳng, trọng tâm tam giác.
- ✓ Công thức tính khoảng cách giữa hai điểm.
- ✓ Điều kiện hai vectơ bằng nhau, hai đoạn thẳng bằng nhau.
- ✓ Công thức tính tích vô hướng, tích có hướng của 2 vectơ.

BÀI TẬP MẪU

Cơ bản

Câu 1: Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ $\vec{u}=(-1;3;-2), \vec{v}=(2;1;-1)$. Tọa độ vectơ $\vec{x}=\vec{u}+3\vec{v}$ là

A. $(5;6;-5)$. B. $(6;6;1)$. C. $(-5;6;1)$. D. $(1;4;-3)$.

Hướng dẫn giải

Để tìm tọa độ vectơ $\vec{x}$ em dùng công thức tính tọa độ của vectơ tổng và vectơ hiệu.

Giả sử $\vec{x}=(a;b;c)$. Khi đó:

$a = -1 + 3.2 = 5$

$b = 3 + 3.1 = 6$

$c = -2 + 3.(-1) = -5$

Vậy $\vec{x}=(5;6;-5)$. → **Đáp án A**

Câu 2: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(-2;0;1)$, $C(0;2;-1)$. Điểm D thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{AD}=\vec{0}$. Tọa độ của D là

A. $\left(\frac{9}{4};\frac{5}{2};\frac{11}{2}\right)$. B. $\left(\frac{5}{4};\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$. C. $\left(-\frac{3}{4};-\frac{3}{2};-\frac{9}{2}\right)$. D. $\left(\frac{9}{4};\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Gọi $D(x;y;z)$. Em có: $\overrightarrow{AB}=(-3;-2;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;0;-4)$, $\overrightarrow{AD}=(x-1;y-2;z-3)$.

$$\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{AD}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}-3-2(-1)+4(x-1)=0\\-2-2.0+4(y-2)=0\\-2-2(-4)+4(z-3)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{5}{4};y=\frac{5}{2};z=\frac{3}{2}$$

Vậy $D\left(\frac{5}{4};\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$ → **Đáp án B**

Câu 3: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(3;2;-1)$, $B(3;-1;1)$, $C(1;1;-1)$. Điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Tọa độ của M là

A. $\left(0;\frac{7}{2};3\right)$. B. $\left(0;-\frac{7}{2};3\right)$. C. $\left(0;\frac{7}{2};-3\right)$. D. $\left(0;-\frac{7}{2};-3\right)$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $M(x;y;z)$.

$\Rightarrow\overrightarrow{MA}=(3-x;2-y;-1-z), \overrightarrow{MB}=(3-x;-1-y;1-z), \overrightarrow{MC}=(1-x;1-y;-1-z)$

$$\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}(3-x)-2(3-x)+3(1-x)=0\\(2-y)-2(-1-y)+3(1-y)=0\\(-1-z)-2(1-z)+3(-1-z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=\frac{7}{2}\\z=-3\end{cases}\Rightarrow M\left(0;\frac{7}{2};-3\right)$$

→ **Đáp án C**

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình bình hành ABCD, biết $A(1;2;1)$, $B(-1;3;1)$, $D(1;-2;3)$. Tọa độ đỉnh C là

A. $C(-1;-3;3)$. B. $C(1;1;3)$. C. $C(-3;-1;3)$. D. $C(-1;-1;3)$.

Hướng dẫn giải

Gọi $C(x;y;z)$. Em có: $\overrightarrow{AB}=(-2;1;0), \overrightarrow{DC}=(x-1;y+2;z-3)$

Tứ giác ABCD là hình bình hành khi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=-2 \\ y+2=1 \\ z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow C(-1;-1;3)$

→ **Đáp án D**

♥ Vận dụng

Câu 5: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(2;5;3); B(3;7;4), C(x,y,6)$. Ba điểm A, B, C thẳng hàng thì x + y có giá trị bằng

A. 2. B. 16. C. −16. D. −2.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$

Em có: $\overrightarrow{AC}=(x-2;y-5;3), \overrightarrow{AB}=(1;2;1)$.

Suy ra $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=k \\ y-5=2k \\ 3=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=11 \\ k=3 \end{cases}$. Vậy x + y = 16 → **Đáp án B**

Cách 2: Em có thể sử dụng ứng dụng của tích có hướng của hai vectơ:

A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ là hai vectơ cùng phương $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]=\vec{0}$.

Em có: $\overrightarrow{AB}$ = (1; 2; 1), $\overrightarrow{AC}$ = (x − 2; y − 5; 3)

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ y-5 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & x-2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x-2 & y-5 \end{vmatrix}\right)=(-y+11; x-5; y-2x-1)$$

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]=\vec{0} \Leftrightarrow x=5, y=11$$

Câu 6: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $M(3;0;-1)$, $N(1;1;2)$, $G(0;2;-1)$. Gọi $P(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn tam giác MNP nhận G là trọng tâm. Khi đó giá trị A=x−y+2z bằng

A. 1. B. 7. C. −13. D. −17.

Hướng dẫn giải

Vì G là trọng tâm của tam giác MNP nên em có: $\frac{3+1+x}{3}=0; \frac{0+1+y}{3}=2; \frac{-1+2+z}{3}=-1$.

Suy ra x = −4, y = 5, z = −4. Vậy A = −4 −5 −8 = −17. → **Đáp án D**

*** Nâng cao**

Câu 7: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm A(−1; 6; 6), B(3; −6; −2). Gọi M(x; y; 0) thuộc Oxy để MA + MB nhỏ nhất. Khi đó x + y có giá trị bằng

A. −1. B. −2. C. 1. D. 2.

Hướng dẫn giải

Đầu tiên em cần kiểm tra A, B nằm cùng phía hay khác phía đối với mặt phẳng (Oxy).

Vì $z_A = 6$, $z_B = -2$ nên $z_A.z_B < 0$. Suy ra A, B nằm về 2 phía đối với mặt phẳng (Oxy).

Khi đó MA + MB nhỏ nhất khi A, B, M thẳng hàng.

Gọi $M(x,y,0) \in (Oxy)$.

$$A, B, M \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 4k \\ y-6 = -12k \\ -6 = -8k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ k = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow x+y = -1.$$

→ Đáp án A

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 8: Trong không gian Oxyz, cho ba vectơ $\vec{u} = (1;2;3), \vec{v} = (2;2;-1), \vec{w} = (4;0;-4)$. Tọa độ vectơ $\vec{x} = 2\vec{u} + \vec{v} - 3\vec{w}$ là

A. $(-8;6;17)$. **B.** $(-8;6;-7)$. **C.** $(-6;4;17)$. **D.** $(-6;2;-7)$.

Câu 9: Trong không gian Oxyz, cho ba vectơ $\vec{u} = (1;0;2), \vec{v} = (-1;2;1), \vec{w} = (3;1;-2)$. Tọa độ vectơ $\vec{x} = 3\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$ là

A. $(-2;6;10)$. **B.** $(2;6;8)$. **C.** $(2;3;6)$. **D.** $(-2;3;10)$.

Câu 10: Trong không gian Oxyz, cho điểm $M(3;2;7)$. Tọa độ hình chiếu của M lên mặt phẳng (Oxy) là

A. $(3;2;0)$. **B.** $(0;0;7)$. **C.** $(3;0;7)$. **D.** $(0;2;7)$.

Câu 11: Trong không gian Oxyz, cho điểm $M(-4;-3;-1)$. Tọa độ hình chiếu của M lên mặt phẳng (Oyz) là

A. $(0;3;1)$. **B.** $(0;-3;-1)$. **C.** $(-4;0;0)$. **D.** $(4;-3;-1)$.

Câu 12: Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(2;-1;-4)$. Tọa độ hình chiếu của A lên trục Oy

A. $(2;0;-4)$. **B.** $(0;-1;0)$. **C.** $(2;-1;0)$. **D.** $(0;-1;-4)$.

Câu 13: Trong không gian Oxyz, cho điểm $B(1;-2;-4)$. Tọa độ hình chiếu của B lên trục Oz

A. $(1;-2;0)$. **B.** $(0;0;-4)$. **C.** $(0;0;4)$. **D.** $(-1;2;0)$.

Câu 14: Trong không gian Oxyz, cho vectơ $\vec{u}$ có điểm đầu là $(1;-1;3)$ và điểm cuối là $(-2;3;5)$. Vectơ nào dưới đây cùng phương $\vec{u}$

A. $\vec{a} = -\frac{3}{4}\vec{i} - \vec{j} + \frac{1}{4}\vec{k}$. **B.** $\vec{b} = -9\vec{i} + 12\vec{j} - 6\vec{k}$. **C.** $\vec{c} = -6\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$. **D.** $\vec{d} = \frac{3}{2}\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

Câu 15: Trong không gian Oxyz, cho vectơ $\vec{u}$ có điểm đầu $(5;6;1)$ và điểm cuối $(-2;3;3)$. Vectơ nào dưới đây ngược hướng với $\vec{u}$

A. $\vec{a}=14\vec{i}+6\vec{j}-4\vec{k}$.

B. $\vec{b}=-7\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$.

C. $\vec{c}=7\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$.

D. $\vec{d}=-21\vec{i}-9\vec{j}+6\vec{k}$.

Câu 16: Bộ ba điểm nào sau đây thẳng hàng

A. $A_1(1;3;1)$, $B_1(0;1;2)$, $C_1(0;0;1)$.

B. $A_2(1;1;1)$, $B_2(-4;3;1)$, $C_2(-9;5;1)$.

C. $A_3(1;-1;5)$, $B_3(0;-1;6)$, $C_3(3;-1;5)$.

D. $A_4(1;2;4)$, $B_4(2;5;0)$, $C_4(0;1;5)$.

Câu 17: Cho hai vectơ $\vec{u}=(1;3;5)$, $\vec{v}=(2;-4;2)$. Lựa chọn phương án đúng.

A. Góc giữa $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là góc tù.

B. $\vec{u}\perp\vec{v}$.

C. $35|\vec{u}|=24|\vec{v}|$.

D. $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ cùng phương.

Câu 18: Cho vectơ $\vec{u}=(2;1;-3)$. Vectơ cùng hướng với $\vec{u}$ là

A. $\vec{a}=(-8;-4;12)$. B. $\vec{b}=\left(1;-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. C. $\vec{c}=(4;2;-6)$. D. $\vec{d}=(6;-3;-9)$.

Câu 19: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $M(3;-5;2)$, $N(-1;5;-4)$. Gọi P là điểm đối xứng với M qua điểm N và Q là điểm đối xứng với điểm N qua M. Gọi I là trung điểm của PQ. Lựa chọn phương án đúng.

A. $I(0;1;-1)$. B. $I(2;4;-1)$. C. $I(1;0;-1)$. D. $I(-1;-2;-1)$.

Câu 20: Cho hình bình hành ABCD có $A(-3;-2;0)$, $B(3;-3;1)$, $C(5;0;2)$. Tọa độ đỉnh D là

A. $D(-1;2;1)$. B. $D(-1;-1;2)$. C. $D(1;2;-1)$. D. $D(-1;1;1)$.

Câu 21: Trong không gian Oxyz, cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Biết $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$; $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tọa độ đỉnh A' là

A. $(3;5;-6)$. B. $(3;4;-6)$. C. $(4;6;5)$. D. $(2;0;2)$.

Câu 22: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(3;2;-5)$, $B(1;2;-1)$. Điểm I thuộc đoạn thẳng AB thỏa mãn IA=2IB. Tọa độ của I là

A. $(-5;2;7)$. B. $(5;2;-7)$. C. $\left(-\frac{5}{3};2;\frac{7}{3}\right)$. D. $\left(\frac{5}{3};2;-\frac{7}{3}\right)$.

Câu 23: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;1;1)$, $C(1;2;-4)$. Điểm M thỏa mãn đẳng thức $3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Tọa độ của M là

A. $\left(0;3;-\frac{9}{2}\right)$. B. $\left(0;3;\frac{9}{2}\right)$. C. $\left(\frac{7}{2};3;-\frac{9}{2}\right)$. D. $\left(4;3;\frac{9}{2}\right)$.

Câu 24: Trong không gian Oxyz, cho $\vec{u}=(1;2;-3)$, $\vec{v}=(-4;1;2)$. Lựa chọn phương án đúng.

A. $[\vec{u},\vec{v}]=(7;-10;9)$. B. $[\vec{u},\vec{v}]=(4;-10;9)$. C. $[\vec{u},\vec{v}]=(1;14;-7)$. D. $[\vec{u},\vec{v}]=(7;10;9)$.

Câu 25: Trong không gian Oxyz, cho vectơ $\vec{a}=\left(2\sqrt{2};-1;4\right)$. Vectơ $\vec{b}$ ngược hướng với $\vec{a}$ và có $|\vec{b}|=10$. Gọi (x, y, z) là tọa độ của $\vec{b}$. Lựa chọn phương án đúng.

A. $xyz=64\sqrt{2}$. **B.** $xyz=-64\sqrt{2}$. **C.** $xyz=8\sqrt{2}$. **D.** $xyz=-8\sqrt{2}$.

Câu 26: Trong không gian Oxyz, cho vectơ $\vec{a}=(2;-1;0)$. Vectơ $\vec{b}$ cùng chiều với $\vec{a}$ và có $|\vec{a}.\vec{b}|=10$. Gọi (x, y, z) là tọa độ của $\vec{b}$. Lựa chọn phương án đúng.

A. x+y+z=−3. **B.** x+y+z=3. **C.** x+y+z=−2. **D.** x+y+z=2.

Câu 27: Trong hệ trục Oxyz cho tam giác ABC với $A(-1;4;2)$, $B(2;5;6)$ và $C(-1;12;1)$. Gọi M, N, P tương ứng là các trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Gọi G là trọng tâm của tam giác MNP. Lựa chọn phương án đúng.

A. $G(1;2;3)$. **B.** $G(0;7;3)$. **C.** $G(3;-0;3)$. **D.** $G(2;1;3)$.

Câu 28: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(4;-1;0)$, $B(-2;1;3)$, $C(x;3;z)$. Ba điểm A, B, C thẳng hàng thì T=x−2z có giá trị bằng

A. −20. **B.** −14. **C.** −16. **D.** 14.

ĐÁP ÁN

8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	D	A	B	B	B	C	A	B	B	C
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
C	D	A	D	A	D	A	D	B	A	

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 8:

$\vec{u}=(1;2;3),\vec{v}=(2;2;-1),\vec{w}=(4;0;-4)$

Giả sử $\vec{x}=(a;b;c)$. Khi đó: a = 2.1 + 2 − 3.4 = −8;

b = 2.2 + 2 − 3.0 = 6; c = 2.3 + (−1) −3.(−4) = 17

Vậy $\vec{x}=(-8;6;17)$ → **Đáp án A**

Câu 9:

$\vec{u}=(1;0;2),\vec{v}=(-1;2;1),\vec{w}=(3;1;-2)$

Giả sử $\vec{x}=(a;b;c)$. Khi đó: a = 3.1 + 2.(−1) −3 = −2;

b = 3.0 + 2.2 − 1 = 3; c = 3.2 + 2.1 −(−2) = 10

Vậy $\vec{x}=(-2;3;10)$ → **Đáp án D**

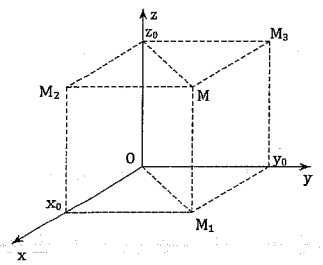
Câu 10:

Cho điểm $M(x_0;y_0;z_0)$. Tọa độ hình chiếu của M lên các mặt phẳng tọa độ Oxy, Oxz, Oyz lần lượt là:

$M_1(x_0;y_0;0)$, $M_2(x_0;0;z_0)$, $M_3(0;y_0;z_0)$.

Do vậy tọa độ hình chiếu của $M(3;2;7)$ lên mặt phẳng (Oxy) là $(3;2;0)$.

→ **Đáp án A**



Câu 11:

Tọa độ hình chiếu của M(–4; –3; –1) lên mặt phẳng (Oyz) là M'(0; –3; –1).

→ **Đáp án B**

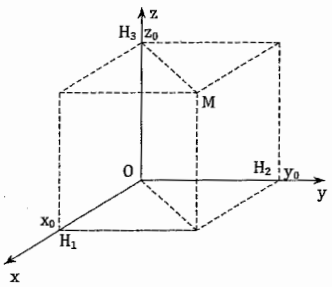
Câu 12:

Cho điểm $M(x_0;y_0;z_0)$.

Tọa độ hình chiếu của M lên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt là:

$H_1(x_0;0;0)$, $H_2(0;y_0;0)$, $H_3(0;0;z_0)$.

Do vậy tọa độ hình chiếu của $A(2;-1;-4)$ lên trục Oy là: $(0;-1;0)$. → **Đáp án B**



Câu 13:

Tọa độ hình chiếu của B(1; –2; –4) lên trục Oz là: B'(0; 0; –4). → **Đáp án B**

Câu 14:

$\vec{u}=(-3;4;2);\vec{a}=\left(-\frac{3}{4};-1;\frac{1}{4}\right)\rightarrow$ hai vectơ $\vec{u},\vec{a}$ không cùng phương → Loại A.

$\vec{b}=(-9;12;-6)\rightarrow$ hai vectơ $\vec{u},\vec{b}$ không cùng phương → Loại B.

$\vec{c}=(-6;8;4)=2\vec{u}\rightarrow$ Chọn C.

$\vec{d}=\left(\frac{3}{2};-2;1\right)\rightarrow$ hai vectơ $\vec{u},\vec{d}$ không cùng phương → Loại D.

→ **Đáp án C**

Câu 15:

$\vec{a}=(14;6;-4)=-2\vec{u}\rightarrow$ Chọn A.

$\vec{b}=(-7;-3;-1)\rightarrow$ hai vectơ $\vec{u},\vec{b}$ không cùng phương → Loại B.

$\vec{c}=(7;3;-1)\rightarrow$ hai vectơ $\vec{u},\vec{c}$ không cùng phương → Loại C.

$\vec{d}=(-21;-9;6)=3\vec{u}\rightarrow$ hai vectơ $\vec{u},\vec{d}$ cùng hướng → Loại D.

→ **Đáp án A**

Câu 16:

Em có: $\overrightarrow{A_2B_2}=(-5;2;0),\overrightarrow{A_2C_2}=(-10;4;0)$.

Vì $\overrightarrow{A_2C_2}=2.\overrightarrow{A_2B_2}$ nên $\overrightarrow{A_2C_2}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$ cùng phương.

$\Rightarrow A_2, B_2, C_2$ thẳng hàng. → **Đáp án B**

Câu 17:

Vì $\vec{u}.\vec{v}=2-12+10=0$ nên $\vec{u}\perp\vec{v}$ → **Đáp án B**

Câu 18:

$\vec{u}=(2;1;-3)$. Vectơ cùng hướng với $\vec{u}$ có dạng $k.\vec{u}$, $k>0$.

$\vec{a}=(-8;-4;12)\rightarrow\vec{a}=-4\vec{u}$. Vậy $\vec{a},\vec{u}$ là hai vectơ ngược hướng.

$\vec{b}=\left(1;-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ và $\vec{d}=(6;-3;-9)$ không cùng phương với $\vec{u}$.

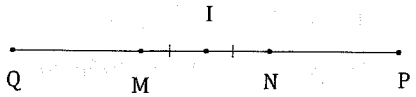
$\vec{c}=(4;2;-6)\rightarrow\vec{c}=2\vec{u}$. Vậy $\vec{c},\vec{u}$ là hai vectơ cùng hướng.

→ Đáp án C

Câu 19:

Nếu I là trung điểm PQ thì I cũng là trung điểm của MN.

Tọa độ trung điểm MN là (1; 0; −1)



→ Đáp án C

Câu 20:

Gọi D(x; y; z). Em có $\overrightarrow{BC}=(2;3;1),\overrightarrow{AD}=(x+3;y+2;z)$

Tứ giác ABCD là hình bình hành khi $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3y=2\\y+2=3\\z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=1\\z=1\end{cases}$

→ Đáp án D

Câu 21:

Gọi $A'(x;y;z)$. Em có $\overrightarrow{AA'}=(x-1;y;z-1)$.

Theo quy tắc hình hộp: $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$. Do vậy $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$.

Em dễ dàng tính được: $\overrightarrow{AC'}=(3;5;-6)$, $\overrightarrow{AB}=(1;1;1)$, $\overrightarrow{AD}=(0;-1;0)$.

Suy ra $\begin{cases}x-1=3-1-0\\y=5-1-(-1)\\z-1=-6-1-0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=5\\z=-6\end{cases}$

→ Đáp án A

Câu 22:

Gọi $I(x;y;z)$. Em có: $\overrightarrow{IA}=(3-x;2-y;-5-z)$, $\overrightarrow{IB}=(1-x;2-y;-1-z)$.

Điểm I thuộc đoạn thẳng AB thỏa mãn IA=2IB khi

$$\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}(3-x)+2(1-x)=0\\(2-y)+2(2-y)=0\\(-5-z)+2(-1-z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{5}{3}\\y=2\\z=-\frac{7}{3}\end{cases}$$

→ Đáp án D

Câu 23:

Gọi $M(x;y;z)$. Em có:

$\overrightarrow{MA}=(1-x;2-y;-1-z)$, $\overrightarrow{MB}=(2-x;1-y;1-z)$, $\overrightarrow{MC}=(1-x;2-y;-4-z)$

$$3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}3(1-x)-2(2-x)+(1-x)=0\\3(2-y)-2(1-y)+(2-y)=0\\3(-1-z)-2(1-z)+(-4-z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=3\\z=-\dfrac{9}{2}\end{cases}$$

→ **Đáp án A**

Câu 24:

Áp dụng công thức tính tích có hướng của hai vectơ em có:

$$\left[\vec{u},\vec{v}\right]=\left(\begin{vmatrix}2&-3\\1&2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-3&1\\2&-4\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&2\\-4&1\end{vmatrix}\right)=(7;10;9)$$ → **Đáp án D**

Câu 25:

Do vectơ $\vec{b}$ ngược hướng với $\vec{a}$ nên $\vec{b}=k.\vec{a}, k<0$. Suy ra: $|\vec{b}|=|k||\vec{a}|=-k|\vec{a}|$

Em dễ dàng tính được: $|\vec{a}|=5$ và $|\vec{b}|=10(gt)$.

Từ đó suy ra: $k=-2$ và $\vec{b}=(-4\sqrt{2};2;-8)$ → **Đáp án A**

Câu 26:

Do vectơ $\vec{b}$ cùng chiều với $\vec{a}$ nên $\vec{b}=k\vec{a}, k>0$. Suy ra: $|\vec{a}.\vec{b}|=|k||\vec{a}|^2=k|\vec{a}|^2$

Em dễ dàng tính được: $|\vec{a}|=\sqrt{5}$ và $|\vec{a}.\vec{b}|=10(gt)$.

Từ đó suy ra: $k=2$ và $\vec{b}=(4;-2;0)$ → **Đáp án D**

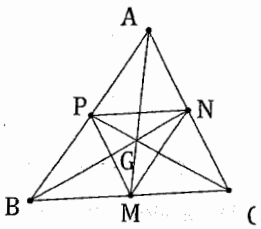
Câu 27:

Hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.

Do đó G là trọng tâm tam giác MNP thì cũng là trọng tâm của tam giác ABC.

Áp dụng công thức tính tọa độ trọng tâm của tam giác ABC em sẽ tìm được G(0; 7; 3).

→ **Đáp án B**



Câu 28:

Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ (*)

Em có: $\overrightarrow{AC}=(x-4;4;z), \overrightarrow{AB}=(-6;2;3)$.

Suy ra $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}x-4=-6k\\4=2k\\z=3k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-8\\z=6\\k=2\end{cases}$ → **Đáp án A**

Dạng 2: Ứng dụng của tích vô hướng

Phương pháp giải: Tính góc giữa hai đường thẳng a, b.

• *Bước 1:* Xác định tọa độ các vectơ $\vec{u},\vec{v}$ theo thứ tự là vectơ chỉ phương của đường thẳng a, b.

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng a, b. Khi đó $\cos\alpha=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right|$

• *Bước 2:* Tính $\cos\alpha=\dfrac{\left|\vec{u}.\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}$

• *Bước 3:* Tính số đo góc α.

BÀI TẬP MẪU

Cơ bản

Câu 29: Trong không gian Oxyz, cho $\vec{u}=(1;2;-3)$, $\vec{v}=(-4;1;2)$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{u},\vec{v}$. Chọn đáp án đúng.

A. $\alpha=60^\circ$. **B.** $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\alpha=30^\circ$. **D.** $\cos\alpha=\dfrac{-4\sqrt{6}}{21}$.

Hướng dẫn giải

Em hãy sử dụng ứng dụng của tích vô hướng để tính góc giữa hai vectơ: $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}$

Trong đó: $\left|\vec{u}\right|=\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}=\sqrt{14}$, $\left|\vec{v}\right|=\sqrt{(-4)^2+1^2+2^2}=\sqrt{21}$, $\vec{u}.\vec{v}=-8$.

Do đó: $\cos\alpha=\dfrac{-8}{\sqrt{14}.\sqrt{21}}=\dfrac{-4\sqrt{6}}{21}$. → **Đáp án D**

Câu 30: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(1;2;3),B(2;1;4),C(-1;2;5)$. I là điểm nằm trong đoạn BC thỏa mãn IB=2IC. Khi đó độ dài đoạn AI bằng

A. $\sqrt{11}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{11}}{3}$. **C.** $\sqrt{19}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{35}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Gọi I(x; y; z). Em có: $\overrightarrow{IC}=(-1-x;2-y;5-z)$, $\overrightarrow{IB}=(2-x;1-y;4-z)$.

Điểm I thuộc đoạn thẳng BC thỏa mãn IB=2IC khi:

$$\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}(2-x)+2(-1-x)=0\\(1-y)+2(2-y)=0\\(4-z)+2(5-z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=\dfrac{5}{3}\\z=\dfrac{14}{3}\end{cases}\Rightarrow I\left(0;\frac{5}{3};\frac{14}{3}\right)$$

Vậy $AI=\sqrt{(0-1)^2+\left(\frac{5}{3}-2\right)^2+\left(\frac{14}{3}-3\right)^2}=\frac{\sqrt{35}}{3}$ → **Đáp án D**

♥ Vận dụng

Câu 31: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(3;1;0)$, $B(-2;4;1)$. M là điểm trên trục Oy và $MA=MB$. Lựa chọn phương án đúng.

A. $M\left(0;\frac{11}{6};0\right)$. **B.** $M\left(0;\frac{11}{10};0\right)$. **C.** $M\left(0;-\frac{11}{6};0\right)$. **D.** $M\left(0;0;-\frac{11}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Em cần nhớ điểm thuộc trục Oy có hoành độ và cao độ đều bằng 0. Do vậy em sẽ gọi tọa độ điểm M là (0; m; 0).

Khi đó em có:

$$MA=\sqrt{(3-0)^2+(1-m)^2+(0-0)^2}=\sqrt{m^2-2m+10}$$

$$MB=\sqrt{(-2-0)^2+(4-m)^2+(1-0)^2}=\sqrt{m^2-8m+21}$$

Do MA=MB nên $\sqrt{m^2-2m+10}=\sqrt{m^2-8m+21}\Leftrightarrow m=\frac{11}{6}$.

→ **Đáp án A**

Câu 32: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;1;0)$, $C(3;1;-1)$. Điểm M trên mặt phẳng (Oxz) cách đều A, B, C. Tọa độ điểm M là:

A. $\left(\frac{5}{6};0;-\frac{7}{6}\right)$. **B.** $\left(-\frac{5}{6};0;\frac{7}{6}\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{6};0;\frac{7}{6}\right)$. **D.** $\left(-\frac{5}{6};0;-\frac{7}{6}\right)$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x;0;z)$. Khi đó em tính được:

$$MA=\sqrt{(x-1)^2+1+(z-1)^2};\ MB=\sqrt{(x+1)^2+1+z^2};\ MC=\sqrt{(x-3)^2+1+(z+1)^2}$$

Điều kiện M cách đều ba điểm A, B, C là: MA=MB=MC. Từ đó em có hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x-1)^2+1+(z-1)^2=(x+1)^2+1+z^2\\(x-3)^2+1+(z+1)^2=(x+1)^2+1+z^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+2z=1\\8x-2z=9\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{5}{6};z=-\frac{7}{6}$$ → **Đáp án A**

*** Nâng cao**

Câu 33: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BB', CD, A'D'. Góc giữa hai đường thẳng MP và C'N bằng

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Hướng dẫn giải

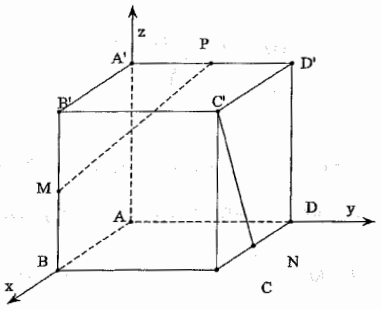
Để sử dụng ứng dụng của tích vô hướng của hai vectơ em cần đặt hình lập phương ABCD.A'B'C'D' vào một không gian tọa độ Oxyz.

Em hãy đơn giản bài toán bằng cách lựa chọn hệ trục tọa độ để các đỉnh của hình lập phương có tọa độ đơn giản nhất.

Dựng hệ trục Oxyz (như hình vẽ) thỏa mãn:

$A \equiv O(0;0;0), B(a;0;0); C(a;a;0); D(0;a;0),$

$A'(0;0;a); B'(a;0;a); C'(a;a;a); D'(0;a;a).$



Vì M, N, P tương ứng là trung điểm của các cạnh BB', CD, A'D' nên:

$M\left(a;0;\frac{a}{2}\right); N\left(\frac{a}{2};a;0\right); P\left(0;\frac{a}{2};a\right)$

$\overrightarrow{MP}=\left(-a;\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right); \overrightarrow{C'N}=\left(-\frac{a}{2};0;-a\right).$

Từ đó suy ra $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{C'N}=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0$. Do đó $MP \perp C'N$. → **Đáp án D**

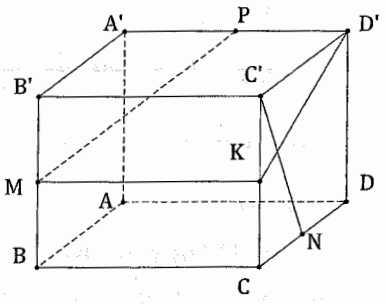
☞ **Chú ý:** Bài tập này cũng rất dễ nhận ra đáp án đúng nếu em nhuần nhuyễn về Định lí 3 đường vuông góc.

Chi tiết lời giải như sau:

+ Gọi K là hình chiếu của M lên (CC'D'D).

Khi đó K là trung điểm của CC'.

+ Em sẽ có D'K là hình chiếu của PM lên (CC'D'D) và $D'K \perp C'N$ nên suy ra $MP \perp C'N$.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 34: Trong không gian Oxyz, cho 3 vecto $\vec{a}=(-1;1;0), \vec{b}=(1;1;0), \vec{c}=(1;1;1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

A. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng. **B.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. **C.** $\cos(\vec{b},\vec{c})=\frac{2}{\sqrt{6}}$. **D.** $\vec{a}.\vec{c}=1$.

Câu 35: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(2;-2;-1)$. Độ dài đoạn thẳng OA

A. $OA=3$. **B.** $OA=9$. **C.** $OA=\sqrt{5}$. **D.** $OA=5$.

Câu 36: Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC có $A(1;0;0)$, $B(0;3;1)$, $C(2;4;-1)$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Độ dài đường trung tuyến AM là

A. $\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{11}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Câu 37: Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC có $A(1;1;-1)$, $B(-2;2;-1)$, $C(-2;5;-1)$. Chu vi tam giác ABC bằng

A. $15+\sqrt{14}$. **B.** $8+\sqrt{14}$. **C.** $15+\sqrt{10}$. **D.** $8+\sqrt{10}$.

Câu 38: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $M(2;3;1)$, $N(-1;1;1)$, $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N.

A. m = –6. **B.** m = 0. **C.** m = –4. **D.** m = 2.

Câu 39: Cho tam giác ABC có $A(1;2;-3)$, $B(4;6;2)$, $C(5;4;-1)$. Số đo góc A của tam giác ABC bằng bao nhiêu?

A. 60^0. **B.** 45^0. **C.** 30^0. **D.** 90^0.

Câu 40: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(-3;-3;2)$. M là điểm trên trục Ox và cách đều hai điểm A, B. Lựa chọn phương án đúng.

A. $M(-2;0;0)$. **B.** $M(1;0;0)$. **C.** $M(-1;0;0)$. **D.** $M(2;0;0)$.

Câu 41: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(3;2;3)$, $B(-2;4;2)$. M là điểm trên trục Oy và cách đều hai điểm A, B. Lựa chọn phương án đúng.

A. $M(0;1;0)$. **B.** $M(0;0;-1)$. **C.** $M(-1;0;0)$. **D.** $M(0;0;1)$.

Câu 42: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm A(1; 3; 1), B(4; 1; 0), C(2; 2; 1). Điểm M trên mặt phẳng (Oyz) cách đều A, B, C có tọa độ là

A. (0; 1; 5). **B.** (0; 1; –5). **C.** (0; –1; –5). **D.** (0; –1; 5).

Câu 43: Trong không gian Oxyz cho hai tứ diện ABCD và A'B'C'D', trong đó tọa độ các đỉnh $A(5;3;1)$, $B(4;-1;3)$, $C(-6;2;4)$, $D(2;1;7)$, $A'(6;3;-1)$, $B'(0;2;-5)$, $C'(3;4;1)$. Nếu hai tứ diện trên có cùng trọng tâm thì tọa độ đỉnh D' là

A. $\left(-4;-4;-\frac{5}{2}\right)$. **B.** (–4; –4; 20). **C.** $\left(4;4;-\frac{5}{2}\right)$. **D.** (–1; –1; 5).

Câu 44: Trong không gian Oxyz cho tứ diện ABCD trong đó $A(2;4;-1)$, $C(2;4;3)$, hai điểm B, D thỏa mãn $\overrightarrow{OB}=\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$, $\overrightarrow{OD}=2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

A. Tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối vuông góc.

B. Tứ diện ABCD có chân đường cao kẻ từ đỉnh A trùng với trực tâm tam giác BCD.

C. Tứ diện ABCD có các góc đỉnh A bằng 90^0.

D. Tứ diện ABCD có các mặt đều là các tam giác vuông.

Câu 45: Trong không gian Oxyz cho tam giác ABC có $A(1;2;0)$, $B(0;-2;5)$, $C(1;1;1)$. Gọi $K(x;y;z)$ là chân đường cao của tam giác kẻ từ đỉnh C. Biểu thức T=x+y+z có giá trị bằng

A. $\frac{5}{7}$. **B.** $\frac{51}{14}$. **C.** $\frac{19}{7}$. **D.** 3.

Câu 46: Trong không gian Oxyz cho tam giác ABC có $A(2;-3;4)$, $B(3;-3;11)$, $C(-1;1;-1)$. Gọi $H(x;y;z)$ là chân đường cao của tam giác kẻ từ đỉnh A. Biểu thức T=x–y+z bằng

A. –5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 5.

Câu 47: Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Đường phân giác trong của tam giác ABC kẻ từ đỉnh B có độ dài bằng

A. $\frac{2\sqrt{74}}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{58}}{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{69}}{3}$. **D.** $\frac{10}{3}$.

Câu 48: Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC có $A(3;-1;2)$, $B(3;-1;5)$, $C(3;1;2)$. Tọa độ chân đường phân giác trong của tam giác ABC kẻ từ đỉnh A là

A. $D\left(3;\frac{1}{5};\frac{16}{5}\right)$. B. $D\left(3;-1;\frac{16}{5}\right)$. C. $D\left(-3;\frac{1}{5};-\frac{4}{5}\right)$. D. $D(3;1;16)$.

ĐÁP ÁN

34	35	36	37	38	39	40	41
C	A	A	D	B	A	C	B
42	43	44	45	46	47	48	
B	B	D	D	C	A	A	

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 34:

Vì $\vec{b}.\vec{c}=2, |\vec{b}|=\sqrt{2}, |\vec{c}|=\sqrt{3}$ nên $\cos(\vec{b},\vec{c})=\frac{\vec{bc}}{|\vec{b}||\vec{c}|}=\frac{2}{\sqrt{6}}$ → **Đáp án C**

Câu 35:

Em có: $O(0;0;0), A(2;-2;-1)\Rightarrow\overrightarrow{OA}=(2;-2;-1)\Rightarrow OA=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}=3$

→ **Đáp án A**

Câu 36:

Vì M là trung điểm của BC nên $M\left(1;\frac{7}{2};0\right)$

Độ dài đoạn thẳng AM là: $AM=\sqrt{(1-1)^2+\left(0-\frac{7}{2}\right)^2+0^2}=\frac{7}{2}$

→ **Đáp án A**

Câu 37:

$AB=\sqrt{(-2-1)^2+(2-1)^2+(-1+1)^2}=\sqrt{10}$; $AC=\sqrt{(-2-1)^2+(5-1)^2+(-1+1)^2}=5$

$BC=\sqrt{(-2+2)^2+(5-2)^2+(-1+1)^2}=3$

Vậy chu vi tam giác ABC là: $AB+AC+BC=8+\sqrt{10}$. → **Đáp án D**

Câu 38:

Em có $\overrightarrow{NM}=(3;2;-2), \overrightarrow{NP}=(2;m-2;1)$

Tam giác MNP vuông tại N nên $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{NP}=0\Leftrightarrow 3.2+2.(m-2)+(-2).1=0\Leftrightarrow m=0.$

→ **Đáp án B**

Câu 39:

Em có: $\overrightarrow{AB}=(3;4;5); \overrightarrow{AC}=(4;2;2).$

Vì $\cos\widehat{BAC}=\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}|}{AB.AC}=\frac{|3.4+4.2+5.2|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}.\sqrt{4^2+2^2+2^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

nên $\widehat{BAC}=30^0$. → **Đáp án A**

Câu 40:

Gọi điểm $M(m;0;0)$ thuộc trục Ox.

Khi đó: $MA=\sqrt{(1-m)^2+(2-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{m^2-2m+14}$

$MB=\sqrt{(-3-m)^2+(-3-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{m^2+6m+22}$

Do MA=MB nên $\sqrt{m^2-2m+14}=\sqrt{m^2+6m+22}\Leftrightarrow m=-1$

→ Đáp án C

Câu 41:

Vì điểm M thuộc trục Oz nên $M(0;0;m)$.

Khi đó: $MA=\sqrt{3^2+2^2+(3-m)^2}=\sqrt{m^2-6m+22}$

$MB=\sqrt{(-2)^2+4^2+(2-m)^2}=\sqrt{m^2-4m+24}$

Do MA=MB nên $\sqrt{m^2-6m+22}=\sqrt{m^2-4m+24}\Leftrightarrow m=-1.$

→ Đáp án B

Câu 42:

Gọi $M(0;y;z)$. Khi đó

$MA=\sqrt{1^2+(3-y)^2+(1-z)^2}$, $MB=\sqrt{4^2+(1-y)^2+z^2}$, $MC=\sqrt{2^2+(2-y)^2+(1-z)^2}$

Vì M cách đều ba điểm A, B, C nên

$$MA=MB=MC\Leftrightarrow\begin{cases}1^2+(3-y)^2+(1-z)^2=4^2+(1-y)^2+z^2\\2^2+(2-y)^2+(1-z)^2=4^2+(1-y)^2+z^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4y+2z=-6\\2y+2z=-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\z=-5\end{cases}$$

→ Đáp án B

Chú ý: Với bài tập này các em hoàn toàn có thể thử, chọn đối với từng đáp án.

Câu 43:

Gọi $D'(x;y;z)$ và G là trọng tâm tứ diện ABCD. Tọa độ điểm G là

$$x_G=\frac{5+4-6+2}{4}=\frac{5}{4},y_G=\frac{3-1+2+1}{4}=\frac{5}{4},z_G=\frac{1+3+4+7}{4}=\frac{15}{4}$$

Vì G cũng là trọng tâm tứ diện A'B'C'D' nên $\begin{cases}x_G=\dfrac{6+0+3+x}{4}=\dfrac{5}{4}\\y_G=\dfrac{3+2+4+y}{4}=\dfrac{5}{4}\\z_G=\dfrac{-1-5+1+z}{4}=\dfrac{15}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\y=-4\\z=20\end{cases}$

→ Đáp án B

Câu 44:

Từ giả thiết suy ra B(1; 4; −1), D(2; 2; −1). Em tính được:

$\overrightarrow{AB}=(-1;0;0),\overrightarrow{AC}=(0;0;4),\overrightarrow{AD}=(0;-2;0)$

$\overrightarrow{CD}=(0;2;-4),\overrightarrow{BD}=(1;-2;0),\overrightarrow{BC}=(1;0;4)$

Em hãy chú ý: Nếu mệnh đề trong đáp án C đúng thì các mệnh đề trong đáp án A và B cũng đúng do đó chúng ta sẽ kiểm tra tính đúng sai của mệnh đề C trước.

Dễ thấy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=0$ nên tứ diện ABCD có các góc đỉnh A bằng 90^0.

Như vậy mệnh đề trong đáp án C đúng.

Dễ dàng kiểm tra được tam giác BCD không vuông vì độ dài các cạnh $CD=\sqrt{20},BD=\sqrt{5},BC=\sqrt{17}$ không thỏa mãn hệ thức Pytago.

→ **Đáp án D**

Câu 45:

Em tính được: $\overrightarrow{AB}=(-1;-4;5),\overrightarrow{AK}=(x-1;y-2;z),\overrightarrow{CK}=(x-1;y-1;z-1)$

Vì K là hình chiếu của C trên AB nên em có: $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AK}$ cùng phương và $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CK}$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases}\overrightarrow{AK}=k\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{CK}.\overrightarrow{AB}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=k(-1)\\ y-2=k(-4)\\ z=k.5\\ -(x-1)-4(y-1)+5(z-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{11}{14};y=\frac{8}{7};z=\frac{15}{14}\\ k=\frac{3}{14}\end{cases}$$

Vậy x + y + z = 3

→ **Đáp án D**

Câu 46:

Em có: $\overrightarrow{BC}=(-4;4;-12),\overrightarrow{AH}=(x-2;y+3;z-4),\overrightarrow{BH}=(x-3;y+3;z-11)$

Vì H là hình chiếu của A trên BC nên em có: $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BH}$ cùng phương và $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AH}$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases}\overrightarrow{BH}=k\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3=-4k\\ y+3=4k\\ z-11=-12k\\ -4(x-2)+4(y+3)-12(z-4)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=-1\\ z=5\\ k=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Vậy x – y + z = 7. → **Đáp án C**

Câu 47:

$AB=\sqrt{(2-1)^2+(-1-2)^2+(3+1)^2}=\sqrt{26}$

$BC=\sqrt{(-4-2)^2+(7+1)^2+(5-3)^2}=2\sqrt{26}$

Giả sử D(x; y; z) là chân đường phân giác trong kẻ từ đỉnh B của tam giác ABC.

Em có: D nằm giữa A, C và $\frac{DA}{DC}=\frac{BA}{BC}=\frac{1}{2}$. Suy ra $\overrightarrow{DA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

Từ đẳng thức vectơ sẽ tìm được $D\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right),BD=\frac{2\sqrt{74}}{3}$

→ **Đáp án A**

Câu 48:

$AB=\sqrt{(3-3)^2+(-1+1)^2+(5-2)^2}=3$; $AC=\sqrt{(3-3)^2+(1+1)^2+(2-2)^2}=2$

Giả sử D(x; y; z) là chân đường phân giác trong kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC.

Em có: D nằm giữa B, C và $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{3}{2}$. Suy ra $\overrightarrow{DB}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$.

Từ đẳng thức vectơ sẽ tìm được $D\left(3;\frac{1}{5};\frac{16}{5}\right)$

→ Đáp án A

Dạng 3: Ứng dụng của tích có hướng

BÀI TẬP MẪU

Cơ bản

Câu 49: Cho $\vec{u}=(1;-2;3)$, $\vec{v}=(-3;-1;2)$. Lựa chọn phương án đúng.

A. $[\vec{u},\vec{v}]=(-1;11;5)$.

B. $[\vec{u},\vec{v}]=(-7;-11;-7)$.

C. $[\vec{u},\vec{v}]=(-1;-11;-7)$.

D. $[\vec{u},\vec{v}]=(-7;-7;5)$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức tính tích có hướng của hai vectơ em có:

$$[\vec{u},\vec{v}]=\left(\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & -2\\ -3 & -1\end{vmatrix}\right)=(-1;-11;-7)$$

→ Đáp án C

Câu 50: Ba vectơ nào dưới đây đồng phẳng?

A. $\vec{a}=(4;3;4),\vec{b}=(2;-1;2),\vec{c}=(1;2;1)$.

B. $\vec{x}=(-3;1;2),\vec{y}=(1;1;1),\vec{z}=(-2;2;1)$.

C. $\vec{m}=(1;-1;1),\vec{n}=(0;1;2),\vec{p}=(4;2;3)$.

D. $\vec{u}=(1;2;-3),\vec{v}=(-1;1;2),\vec{w}=(3;4;3)$.

Hướng dẫn giải

Em sử dụng điều kiện ba vectơ đồng phẳng:

Ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow[\vec{a},\vec{b}]\vec{c}=0$.

Với đáp án A.

$$[\vec{a},\vec{b}]=\left(\begin{vmatrix}3 & 4\\ -1 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}4 & 4\\ 2 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}4 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}\right)=(10;0;-10);\ [\vec{a},\vec{b}]\vec{c}=10.1+0+(-10).1=0$$

Do vậy ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng. **→ Đáp án A**

Câu 51: Trong không gian Oxyz, cho tứ diện ABCD có $A(1;2;3),B(-2;1;-1),C(2;-3;1)$, $D(4;1;-2)$. Thể tích tứ diện ABCD bằng

A. 6. **B.** 1. **C.** 12. **D.** $\frac{62}{3}$.

Hướng dẫn giải

Em có: $\overrightarrow{AB}=(-3;-1;-4), \overrightarrow{AC}=(1;-5;-2), \overrightarrow{AD}=(3;-1;-5)$

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}-1 & -4\\ -5 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-4 & -3\\ -2 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 1 & -5\end{vmatrix}\right)=(-18;-10;16)\ ;\ \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AD}=-124.$$

Thể tích tứ diện ABCD là $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AD}\right|=\frac{62}{3}$

→ **Đáp án D**

♥ Vận dụng

Câu 52: Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC có $A(1;2;0), B(0;-2;5), C(1;1;1)$. Gọi CK là đường cao của tam giác. Độ dài CK bằng

A. $\sqrt{\frac{83}{42}}$. **B.** $\sqrt{\frac{19}{21}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{14}}$. **D.** $\frac{3}{\sqrt{14}}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Tính độ dài đường cao CK gián tiếp qua công thức diện tích tam giác

$$\overrightarrow{AB}=(-1;-4;5), \overrightarrow{AC}=(0;-1;1)\ ;\ \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}-4 & 5\\ -1 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & -4\\ 0 & -1\end{vmatrix}\right)=(1;1;1)$$

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Bây giờ em hãy sử dụng giả thiết CK là đường cao của tam giác ABC. Vậy CK có mối liên hệ gì trong công thức tính diện tích tam giác ABC?

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}CK.AB=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow CK=\frac{\sqrt{3}}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+5^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$$

→ **Đáp án C**

Cách 2: Tính độ dài đường cao CK bằng công thức tính độ dài đoạn thẳng

Giải bài toán theo cách 2 em cần tìm được tọa độ chân đường cao K.

Gọi tọa độ điểm K là (x, y, z). Em có:

$$\overrightarrow{AB}=(-1;-4;5), \overrightarrow{AK}=(x-1;y-2;z), \overrightarrow{CK}=(x-1;y-1;z-1)$$

Vì K là hình chiếu của C trên AB nên em có: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AK}$ cùng phương và $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CK}$.

$$\text{Suy ra: } \begin{cases}\overrightarrow{AK}=k\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{CK}.\overrightarrow{AB}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=k(-1)\\ y-2=k(-4)\\ z=k.5\\ -(x-1)-4(y-1)+5(z-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{11}{14};\ y=\frac{8}{7};\ z=\frac{15}{14}\\ k=\frac{3}{14}\end{cases}$$

Vậy $K\left(\frac{11}{14};\frac{8}{7};\frac{15}{14}\right)$. Từ đó em tính được $CK=\frac{1}{\sqrt{14}}$

*** Nâng cao**

Câu 53: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm không thẳng hàng $A(0;1;1)$, $B(-1;0;2)$, $C(-1;1;0)$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng

A. $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

B. $\frac{\sqrt{6}}{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$.

C. $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

D. $\sqrt{6}.\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC, 2p là chu vi của tam giác đó thì

$S_{ABC}=pr\Rightarrow r=\frac{S_{ABC}}{p}$.

Em có: $\overrightarrow{BA}=(1;1;-1),\overrightarrow{BC}=(0;1;-2),\overrightarrow{CA}=(1;0;1)$.

$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}|[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}]|=\frac{\sqrt{6}}{2}$, $2p=AB+BC+AC=\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{2}$.

Suy ra $r=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

→ **Đáp án A**

Câu 54: Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC có $A(2;1;0),B(5;0;1),C(1;-1;1)$. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tổng tọa độ bằng

A. $\frac{5}{2}$.

B. 3.

C. -3.

D. $\frac{7}{2}$.

Hướng dẫn giải

Nhận xét: $\overrightarrow{AB}=(3;-1;1)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;-2;1)\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$.

Suy ra tam giác ABC vuông ở đỉnh A. Do vậy nếu điểm I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì I là trung điểm của BC.

Từ đó em có $I\left(3;-\frac{1}{2};1\right)$ và tổng tọa độ của I là $\frac{7}{2}$. → **Đáp án D**

Chú ý: Trong trường hợp tổng quát, để tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC em cần thực hiện các bước như sau:

Bước 1: Gọi tọa độ I(x; y; z)

Bước 2: Thiết lập các điều kiện

+ I, A, B, C đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AI}=0$ (1)

+ I cách đều A, B, C $\Leftrightarrow IA=IB=IC$ (2)

Bước 3: Giải hệ điều kiện thu được từ (1) và (2) tìm x, y, z.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 55: Cho $\vec{u}=(2;0;1)$, $\vec{v}=(-1;1;-2)$. Lựa chọn phương án đúng.

A. $[\vec{u},\vec{v}]=(-1;3;2)$. B. $[\vec{u},\vec{v}]=(1;-5;2)$.

C. $[\vec{u},\vec{v}]=(-1;-3;-2)$. D. $[\vec{u},\vec{v}]=(-1;-5;2)$.

Câu 56: Trong không gian Oxyz, cho ba vectơ $\vec{a}=(-1;1;0),\vec{b}=(1;1;0),\vec{c}=(1;1;1)$. Hình hộp OACB.O'A'C'B' thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ có thể tích bằng

A. 2. B. 6. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 57: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(2;1;-3),B(3;-2;2),C(4;0;1)$. Diện tích tam giác ABC bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{2}\sqrt{110}$. B. $\sqrt{110}$. C. $\sqrt{55}$. D. $\frac{1}{2}\sqrt{55}$.

Câu 58: Trong không gian Oxyz, cho bốn điểm không đồng phẳng $A(0;1;1),B(-1;0;2)$, $C(-1;1;0),D(2;1;-2)$. Thể tích tứ diện ABCD bằng

A. $\frac{5}{2}$.. B. $\frac{5}{3}$. C. $\frac{5}{6}$. D. 5.

Câu 59: Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ $\vec{a}=(-1;1;0),\vec{b}=(1;1;0)$. Hình bình hành OACB thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Diện tích của hình bình hành OACB bằng

A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. 1. D. 4.

Câu 60: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(2;0;0),B(-2;2;2),C(1;3;2)$. Diện tích tam giác ABC bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{140}$. B. $\frac{\sqrt{140}}{2}$. C. $10\sqrt{3}$. D. $5\sqrt{3}$.

Câu 61: Trong không gian Oxyz, cho bốn điểm không đồng phẳng $A(1;2;4),B(-1;-1;3)$, $C(2;1;2),D(1;2;-1)$. Thể tích tứ diện ABCD bằng

A. $\frac{15}{2}$. B. $\frac{25}{6}$. C. 5. D. 15.

Câu 62: Trong không gian Oxyz, cho hình bình hành MNPQ với $M(-1;2;0),N(3;5;1)$, $Q(0;1;3)$. Diện tích của hình bình hành MNPQ bằng?

A. $\frac{3\sqrt{30}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{30}}{2}$. C. $\sqrt{30}$. D. $3\sqrt{30}$.

Câu 63: Trong không gian Oxyz, cho tứ diện SABC có thể tích bằng 6. Biết tọa độ của 3 đỉnh $A(1;2;-3),B(0;2;-4),C(5;3;2)$. Chiều cao của tứ diện vẽ từ S là bao nhiêu?

A. $6\sqrt{3}$. B. 8. C. $12\sqrt{3}$. D. 4.

Câu 64: Trong không gian Oxyz, cho ba vectơ đồng phẳng $\vec{u}=(1;2;3)$, $\vec{v}=(2;1;m)$, $\vec{w}=(2;m;1)$. Lựa chọn phương án đúng.

A. m = 0. B. m = 9. C. m = 8. D. m = 4.

Câu 65: Cho ba vectơ đồng phẳng $\vec{u}=(1;0;-1)$, $\vec{v}=(3;m+2;0)$, $\vec{w}=(2;0;m-3)$. Lựa chọn phương án đúng

A. m=1 hoặc m=−2. B. m=1 hoặc m=2.

C. m=−1 hoặc m=−2. D. m=−1 hoặc m=2.

Câu 66: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(2;-1;-1),B(-1;1;2),C(-1;1;0)$. Tính độ dài đường cao AH của tam giác ABC.

A. $2\sqrt{13}$. B. $\frac{13}{2}$. C. $\frac{1}{2}\sqrt{13}$. D. $\sqrt{13}$.

Câu 67: Trong không gian Oxyz, tam giác ABC có $A(-2;0;1),B(0;-1;1),C(0;0;-1)$. Điểm $H(x;y;z)$ là trực tâm tam giác ABC. Khi đó biểu thức $T=x+2(y-z)$ có giá trị bằng

A. −3. B. $-\frac{1}{3}$. C. $-\frac{7}{3}$. D. $\frac{7}{3}$.

Câu 68: Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC có $A(2;0;2),B(2;2;0),C(0;2;2)$. Điểm $I(x;y;z)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó $T=2(x+y-z)$ có giá trị bằng

A. $\frac{8}{3}$.. B. $\frac{4}{3}$. C. 4. D. 12.

Câu 69: Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC có $A(-2;0;1),B(0;-1;1),C(0;0;-1)$. Điểm $I(x;y;z)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó $T=2x+y-z$ bằng

A. $-\frac{5}{3}$. B. $-\frac{7}{6}$. C. 2. D. −2.

ĐÁP ÁN

55	56	57	58	59	60	61	62
A	A	A	C	A	B	B	D
63	**64**	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	
C	B	A	D	A	A	D	

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 55:

Áp dụng công thức tính tích có hướng của hai vectơ em có:

$$\left[\vec{u},\vec{v}\right]=\left(\begin{vmatrix}0&1\\1&-2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&2\\-2&-1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2&0\\-1&1\end{vmatrix}\right)=(-1;3;2)$$ → **Đáp án A**

Câu 56:

Với $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(0;0;-2),\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]\overrightarrow{OC}=-2$

Thể tích khối hộp là $V=\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right].\overrightarrow{OC}\right|=2$ → **Đáp án A**

Câu 57:

Em có: $\overrightarrow{AB}=(1;-3;5),\overrightarrow{AC}=(2;-1;4),\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-7;6;5)$

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{\sqrt{110}}{2}$ → **Đáp án A**

Câu 58:

Em có: $\overrightarrow{BA}=(1;1;-1),\overrightarrow{BC}=(0;1;-2),\overrightarrow{BD}=(3;1;-4)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]=(-1;2;1);\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{BD}=-5$

Thể tích khối tứ diện ABCD bằng $\frac{1}{6}$ thể tích khối hộp nhận 3 kích thước là BA, BC, BD nên $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{BD}\right|=\frac{5}{6}$. → **Đáp án C**

Câu 59:

Diện tích của hình bình hành OACB tính theo công thức: $S=\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]\right|$

Vì $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(0;0;-2)$ nên $S=\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]\right|=2$.

→ **Đáp án A**

Câu 60:

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$.

Em có: $\overrightarrow{AB}=(-4;2;2),\overrightarrow{AC}=(-1;3;2),\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-2;6;-10)$.

Do đó $S_{ABC}=\frac{1}{2}.|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]|=\frac{\sqrt{140}}{2}$.

→ **Đáp án B**

Câu 61:

Em có: $\overrightarrow{BA}=(2;3;1),\overrightarrow{BC}=(3;2;-1),\overrightarrow{BD}=(2;3;-4)$.

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]=(-5;5;-5);\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{BD}=25$.

Thể tích khối tứ diện ABCD bằng $\frac{1}{6}$ thể tích khối hộp nhận 3 kích thước là BA, BC, BD nên $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{BD}\right|=\frac{25}{6}$.

→ **Đáp án B**

Câu 62:

Diện tích của hình bình hành MNPQ tính theo công thức: $S=\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MQ}\right]\right|$

Vì $\overrightarrow{MN}=(4;3;1),\overrightarrow{MQ}=(1;-1;3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MQ}\right]=(10;-11;-7)$.

nên $S=\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MQ}\right]\right|=3\sqrt{30}$.

→ **Đáp án D**

Câu 63:

$\overrightarrow{AB}=(-1;0;-1),\overrightarrow{AC}=(4;1;5)\rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;1;-1)$.

Diện tích tam giác ABC là: $S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Gọi h là độ dài đường cao của tứ diện SABC.

Khi đó: $V_{SABC}=\frac{1}{3}Sh\Leftrightarrow h=\frac{3V}{S}=\frac{3.6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=12\sqrt{3}$.

→ **Đáp án C**

Câu 64:

$[\vec{u},\vec{v}]=(2m-3;-m+6;-3),[\vec{u},\vec{v}].\vec{w}=-m^2+10m-9$.

Ba vectơ đồng phẳng khi $[\vec{u},\vec{v}].\vec{w}=0\Leftrightarrow m=1\vee m=9$.

→ **Đáp án B**

Câu 65:

$[\vec{u},\vec{v}]=(m+2;-3;m+2),[\vec{u},\vec{v}].\vec{w}=2(m+2)+0+(m+2)(m-3)=(m+2)(m-1)$.

Ba vectơ đồng phẳng khi $\left[\vec{u},\vec{v}\right]\vec{w}=0\Leftrightarrow m=1\vee m=-2$.

→ **Đáp án A**

Câu 66:

$\overrightarrow{BA}=(3;-2;-3),\overrightarrow{BC}=(0;0;-2)\Rightarrow\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]=\left(\begin{vmatrix}-2&-3\\0&-2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-3&3\\-2&0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3&-2\\0&0\end{vmatrix}\right)=(4;6;0)$.

Diện tích tam giác ABC là: $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]\right|=\sqrt{13}$.

Vì AH là đường cao của tam giác ABC nên $S_{ABC}=\frac{1}{2}AH.BC\Rightarrow AH=\frac{2S_{ABC}}{BC}=\frac{2\sqrt{13}}{2}=\sqrt{13}$.

→ **Đáp án D**

Câu 67:

H(x; y; z) là trực tâm tam giác $\Leftrightarrow AB\perp CH,BC\perp AH$ và $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AH}$ đồng phẳng

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH}=0\\\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AH}=0\\\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AH}=0\end{cases}\quad(*)$$

$\overrightarrow{AB}=(2;-1;0),\overrightarrow{AC}=(2;0;-2),\overrightarrow{BC}=(0;1;-2),\overrightarrow{CH}=(x;y;z+1),\overrightarrow{AH}=(x+2;y;z-1)$

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y=0\\ y-2z=-2\\ x+2y+z=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{3}\\ y=-\frac{2}{3}\\ z=\frac{2}{3}\end{cases}$$

Tính được T = –3. → **Đáp án A**

Câu 68:

Em có: $\overrightarrow{AB}=(0;2;-2),\overrightarrow{AC}=(-2;2;0),\overrightarrow{BC}=(-2;0;2)\Rightarrow AB=AC=BC.$

Suy ra tam giác ABC đều.

Khi đó I là trọng tâm của tam giác ABC $\rightarrow I\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$, $T=\frac{8}{3}$..

→ **Đáp án A**

Câu 69.

I(x; y; z) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

$$\Leftrightarrow IA=IB=IC \text{ và } \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AI} \text{ đồng phẳng } \Leftrightarrow\begin{cases}IA^2=IB^2\\ IA^2=IC^2\\ \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AI}=0\end{cases}\quad(*)$$

Trong đó $\overrightarrow{AB}=(2;-1;0),\overrightarrow{AC}=(2;0;-2),\overrightarrow{BC}=(0;1;-2),$

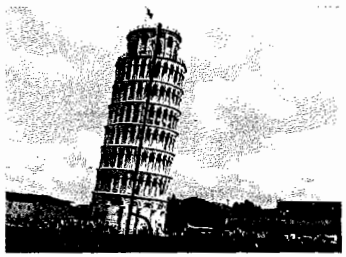
$\overrightarrow{CI}=(x;y;z+1),\overrightarrow{BI}=(x;y+1;z-1),\overrightarrow{AI}=(x+2;y;z-1)$

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}(x+2)^2+y^2+(z-1)^2=x^2+(y+1)^2+(z-1)^2\\ (x+2)^2+y^2+(z-1)^2=x^2+y^2+(z+1)^2\\ x+2y+z=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{5}{6}\\ y=-\frac{1}{6}\\ z=\frac{1}{6}\end{cases}$$

Tính được T = –2.

→ **Đáp án D**

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

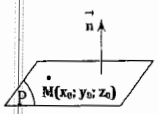


1 Mặt phẳng

Phương trình mặt phẳng

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(a; b; c)$ có dạng $\boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}$

Đặc biệt: Nếu (P) cắt trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a; 0; 0)$; $B(0; b; 0)$; $C(0; 0; c)$ thì (P) có dạng: $\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$



Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Cho 2 mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ và $(Q): A'x+B'y+C'z+D'=0$

(P) **song song với** (Q)	$(A;B;C)=k(A';B';C')$ và $D\neq kD'$
(P) **trùng với** (Q)	$(A;B;C)=k(A';B';C')$ và $D=kD'$
(P) **cắt** (Q)	$(A;\ B;\ C;\ )\neq k(A';\ B';\ C')$
(P) **vuông góc với** (Q)	$AA'+BB'+CC'=0$

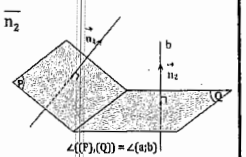
Khoảng cách từ điểm đến mặt

Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ là: $\boxed{d(M;(P))=\frac{|Ax_0+By_0+Cy_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$

Góc giữa 2 mặt phẳng

Cho 2 mặt phẳng (P), (Q) lần lượt có VTPT là $\vec{n_1}, \vec{n_2}$ và φ là góc giữa hai mặt phẳng $(P), (Q)$.

$$\cos\varphi=\left|\cos(\vec{n_1},\vec{n_2})\right|=\frac{|\vec{n_1}.\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|.|\vec{n_2}|}$$



2 Đường thẳng

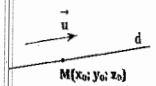
Phương trình đường thẳng

Phương trình đường phẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a; b; c)$ có dạng $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases};t\in\mathbb{R}\ (1)$

Hoặc $\boxed{\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}\ (abc\neq 0)\ (2)}$

Chú ý: (1) là *phương trình tham số* của đường thẳng d và

(2) là *phương trình chính tắc* của đường thẳng d



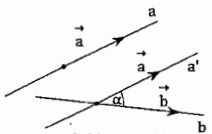
Góc

Góc giữa hai đường thẳng a, b

$$\cos\alpha=\left|\cos(\vec{a},\vec{b})\right|=\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$$

Với $\vec{a}; \vec{b}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của a, b

α là góc giữa hai đường thẳng a và b.

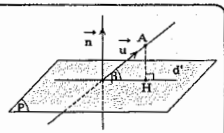


Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P)

$$\sin\beta=\left|\cos(\vec{u},\vec{n})\right|=\frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|}$$

Với $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d.

$\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

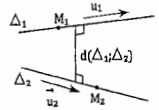


Khoảng cách

2 đường thẳng chéo nhau

Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau: $\boxed{d(\Delta_1,\Delta_2)=\frac{\left|[\vec{u_1},\vec{u_2}].\vec{M_1M_2}\right|}{\left|[\vec{u_1},\vec{u_2}]\right|}}$

Với $\vec{u_1}; \vec{u_2}$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của $\Delta_1; \Delta_2$ và $M_1\in\Delta_1; M_2\in\Delta_2$



Từ một điểm đến 1 đường thẳng

Khoảng cách từ điểm N đến đường thẳng Δ là $\boxed{d(N,\Delta)=\frac{\left|[\vec{NM},\vec{u}]\right|}{|\vec{u}|}}$

Với $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của Δ và $M\in\Delta$

Vị trí tương đối

Đường thẳng - Đường thẳng

Cho đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u_1}$ đi qua điểm M_1 và đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u_2}$ đi qua điểm M_2

d_1 **trùng với** d_2	$\vec{u_1}=k.\vec{u_2};\ M_1\in d_2$
d_1 **song song với** d_2	$\vec{u_1}=k.\vec{u_2};\ M_1\notin d_2$
d_1 **cắt** d_2	$\vec{u_1}\neq k.\vec{u_2};\ [\vec{u_1},\vec{u_2}].\vec{M_1M_2}=0$
d_1 **chéo nhau** d_2	$[\vec{u_1},\vec{u_2}].\vec{M_1M_2}\neq 0$

Đường thẳng - Mặt phẳng

Đường thẳng d qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ có VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$.

Mặt phẳng (P) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$.

d **song song với** (P)	$\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{n}\\M\notin(P)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Aa+Bb+Cc=0\\Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0\end{cases}$
d **chứa trong** (P)	$\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{n}\\M\in(P)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Aa+Bb+Cc=0\\Ax_0+By_0+Cz_0+D=0\end{cases}$
d **cắt** (P)	$\vec{u}.\vec{n}\neq 0\Leftrightarrow Aa+Bb+Cc\neq 0$
d **vuông góc với** (P)	$\vec{n}=k\vec{u}\Leftrightarrow(A;B;C)=k(a;b;c),\ k\neq 0$

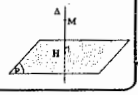
3 Bài toán hình chiếu

Cách xác định hình chiếu của M lên mặt phẳng (P)

B1: Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với (P).

B2: Tìm tọa độ H =$\Delta\cap$(P).

→ H là hình chiếu của M lên (P).

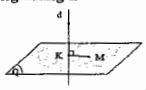


Cách xác định hình chiếu của M lên đường thẳng d

B1: Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua M và vuông góc với d.

B2: Tìm tọa độ K =d$\cap$(Q).

→ K là hình chiếu của M lên d.

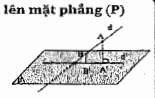


Cách xác định hình chiếu của đường thẳng d lên mặt phẳng (P)

B1: Xác định tọa độ hai điểm A, B phân biệt thuộc d.

B2: Tìm tọa độ điểm A', B' lần lượt là hình chiếu của A, B lên (P).

B3: đường thẳng A'B' là hình chiếu của d lên mặt phẳng (P).



NGUYỄN THÌ LANH 151

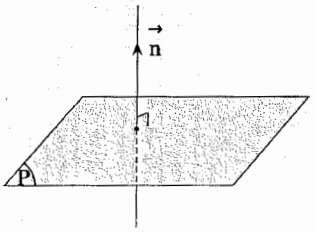
CHỦ ĐỀ 2: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG VÀ PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM

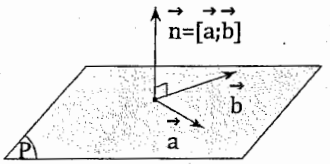
1. Phương trình mặt phẳng trong không gian

✓ **Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng**

Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P). Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ được gọi là ***vectơ pháp tuyến*** (viết tắt là VTPT) của mặt phẳng (P) nếu giá của nó ***vuông góc*** với (P).



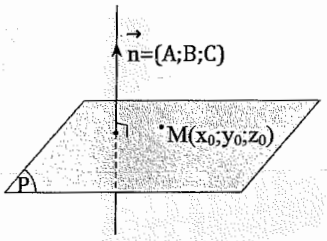
☞ **Chú ý:** Nếu mặt phẳng (P) *chứa* (hoặc *song song*) với giá của hai vectơ ***không cùng phương*** $\vec{a}, \vec{b}$ thì (P) nhận $[\vec{a}, \vec{b}]$ là một VTPT.



✓ **Phương trình mặt phẳng (P)**

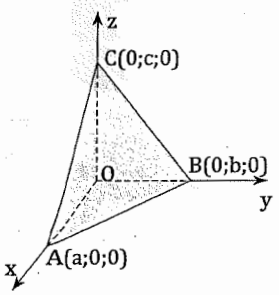
- $\begin{cases} \text{Qua } M(x_0;y_0;z_0) \\ \text{VTPT } \vec{n}=(A;B;C)\neq\vec{0} \end{cases}$

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$$



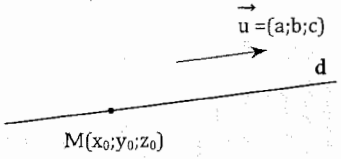
Dạng tổng quát: $\boxed{Ax+By+Cz+D=0\ (A^2+B^2+C^2>0)}$

- Phương trình mặt phẳng chắn: $\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$



2. Phương trình đường thẳng trong không gian

- **Vectơ chỉ phương của đường thẳng:** Cho đường thẳng d, vectơ $\vec{u}$ khác $\vec{0}$ được gọi là ***vectơ chỉ phương*** (viết tắt là VTCP) của d nếu giá của nó ***song song*** hoặc ***trùng*** với d.



- Đường thẳng d: $\begin{cases} \text{Qua } M(x_0;y_0;z_0) \\ \text{VTCP } \vec{u}=(a;b;c) \end{cases}$ có:

➢ **Phương trình tham số**

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

➢ **Phương trình chính tắc**

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

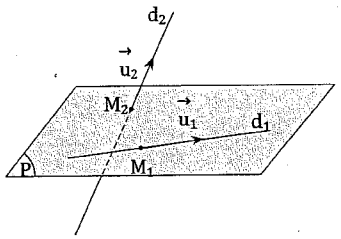
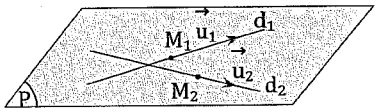
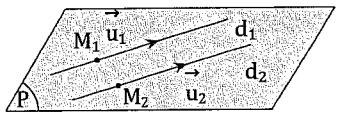
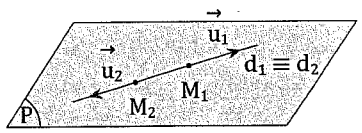
(Điều kiện: $abc \neq 0$)

Đặc biệt: Phương trình các trục tọa độ:

➢ Ox: $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ ➢ Oy: $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ ➢ Oz: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$

3. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng: $d_1: \begin{cases} \text{qua } M_1(x_1;y_1;z_1) \\ \text{VTCP: } \overrightarrow{u_1} = (a_1;b_1;c_1) \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} \text{qua } M_2(x_2;y_2;z_2) \\ \text{VTCP: } \overrightarrow{u_2} = (a_2;b_2;c_2) \end{cases}$.

Vị trí tương đối	Điều kiện	Mô tả
d_1 và d_2 ***chéo nhau***	$[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$	
d_1 và d_2 ***cắt nhau***	$\begin{cases} [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}]\overrightarrow{M_1M_2} = 0 \\ \overrightarrow{u_1} \neq k\overrightarrow{u_2} \end{cases}$	
d_1 và d_2 ***song song***	$\begin{cases} \overrightarrow{u_1} = k\overrightarrow{u_2} \\ M_1 \notin d_2 \end{cases}$	
d_1 và d_2 ***trùng nhau***	$\begin{cases} \overrightarrow{u_1} = k\overrightarrow{u_2} \\ M_1 \in d_2 \end{cases}$	

Chú ý:

- d_1 và d_2 cùng nằm trong một mặt phẳng $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2} = 0$.
- Để tìm giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 em tiến hành giải hệ phương trình:

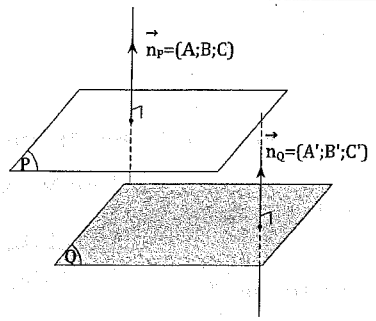
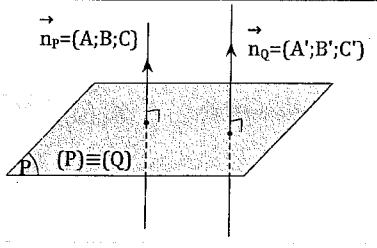
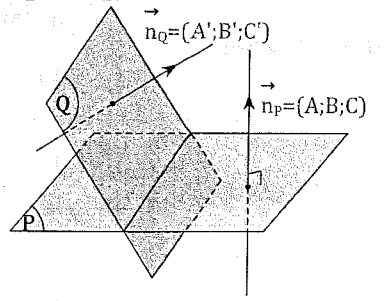
$$\begin{cases} x_1 + a_1t_1 = x_2 + a_2t_2 \\ y_1 + b_1t_1 = y_2 + b_2t_2 \\ z_1 + c_1t_1 = z_2 + c_2t_2 \end{cases}$$

- Hai đường thẳng d_1 và d_2 *cắt nhau* khi và chỉ khi hệ phương trình trên có nghiệm $(t_1; t_2)$ duy nhất.
- Tọa độ giao điểm là $(x_1 + a_1t_1; y_1 + b_1t_1; z_1 + c_1t_1)$.

4. Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai mặt phẳng:

$(P): Ax + By + Cz + D = 0$, có một VTPT $\overrightarrow{n_P}$, $(Q): A'x + B'y + C'z + D' = 0$ có một VTPT $\overrightarrow{n_Q}$

Vị trí tương đối	Điều kiện	Mô tả
(P), (Q) *song song*	$\begin{cases}(A;B;C) = k(A';B';C') \\ D \neq kD'\end{cases}$	
(P), (Q) *trùng nhau*	$\begin{cases}(A;B;C) = k(A';B';C') \\ D = kD'\end{cases}$	
(P), (Q) *cắt nhau*	$(A;\ B;\ C;\ ) \neq k(A';\ B';\ C')$	

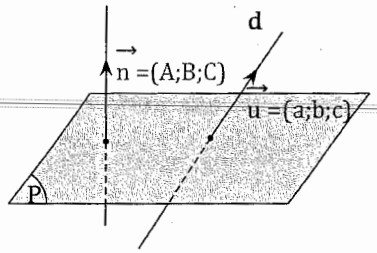
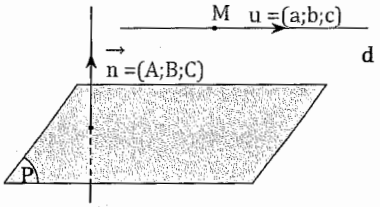
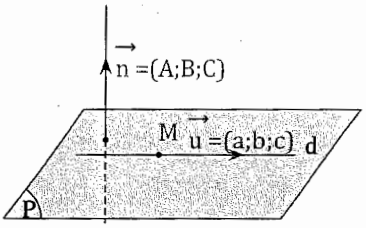
Chú ý: $\boxed{(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_Q} \Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0}$

5. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Trong không gian Oxyz cho:

Đường thẳng $d: \begin{cases}x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct\end{cases}$ qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ có VTCP $\vec{u} = (a; b; c)$.

Mặt phẳng (P) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$.

Vị trí tương đối	Điều kiện	Mô tả
d *cắt* (P)	$\vec{u}.\vec{n}\neq 0 \Leftrightarrow Aa+Bb+Cc\neq 0$	
d *song song* với (P)	$\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{n}\\ M\notin(P)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Aa+Bb+Cc=0\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0\end{cases}$	
d *chứa trong* (P)	$\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{n}\\ M\in(P)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Aa+Bb+Cc=0\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0\end{cases}$	

Chú ý:

- $d\perp(P)\Leftrightarrow\vec{u},\vec{n}$ cùng phương

  $\Leftrightarrow(A;B;C)=k(a;b;c)$
- Để tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) em giải hệ

$$\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\\ Ax+By+Cz+D=0\end{cases}$$

6. Các công thức về góc

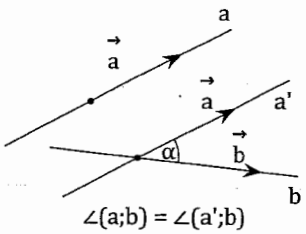
Góc giữa hai đường thẳng

Đường thẳng a có VTCP là $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$.

Đường thẳng b có VTCP là $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$.

α là góc giữa hai đường thẳng a và b.

$$\cos\alpha=\left|\cos(\vec{a},\vec{b})\right|=\frac{|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$



∠(a;b) = ∠(a';b)

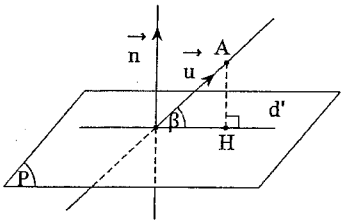
Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Đường thẳng d có VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$.

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$.

β là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P).

$$\sin\beta=\left|\cos(\vec{u},\vec{n})\right|=\frac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$



$\angle(d;(P))=\beta$

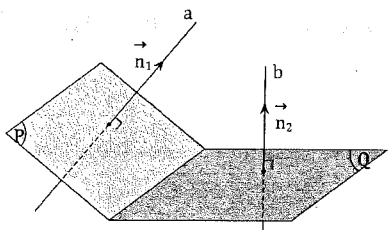
Góc giữa hai mặt phẳng

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n_1}=(A_1;B_1;C_1)$.

Mặt phẳng (Q) có VTPT $\vec{n_2}=(A_2;B_2;C_2)$.

φ là góc giữa hai mặt phẳng (P), (Q).

$$\cos\varphi=\left|\cos(\vec{n_1},\vec{n_2})\right|=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$



$\angle((P),(Q))=\angle(a;b)$

7. Các công thức về khoảng cách

Cho điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và mặt phẳng (P): $Ax+By+Cz+D=0$.

Khoảng cách từ điểm M đến (P) được xác định bởi công thức:

$$d(M,(P))=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Cho điểm N và đường thẳng d đi qua M có VTCP $\vec{u}$

Khoảng cách từ điểm N đến đường thẳng d xác định bởi công thức:

$$d(N,d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{NM},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}$$

Cho hai đường thẳng Δ_1 qua điểm M_1 và có VTCP $\vec{u_1}$, Δ_2 qua điểm M_2 và có VTCP $\vec{u_2}$, Δ_1 và Δ_2 chéo nhau. **Khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2** là

$$d(\Delta_1,\Delta_2)=\frac{\left|\left[\vec{u_1},\vec{u_2}\right]\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\vec{u_1},\vec{u_2}\right]\right|}$$

Chú ý: Cho điểm $I(a;b;c)$.

- Khoảng cách từ I đến các mặt phẳng tọa độ:

$$d(I,(Oxy))=|c|;\ d(I,(Oxz))=|b|;\ d(I,(Oyz))=|a|$$

- Khoảng cách từ I đến các trục tọa độ:

$$d(I,Ox)=\sqrt{b^2+c^2};\ d(I,Oy)=\sqrt{a^2+c^2};\ d(I,Oz)=\sqrt{a^2+b^2}$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Vị trí tương đối của đường thẳng, mặt phẳng trong không gian

BÀI TẬP MẪU

Cơ bản

Câu 1: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x-2y+3=0$. Điểm nào sau đây **không** thuộc mặt phẳng (P)?

A. $M(-1;1;3)$. **B.** $N(1;1;2)$. **C.** $P(3;3;1)$. **D.** $Q(-5;-1;1)$.

Hướng dẫn giải

Phương pháp chung: kiểm tra điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ *thuộc* hay *không thuộc* mặt phẳng (P): $Ax+By+Cz+D=0$ em làm như sau:

- Thay x_0, y_0, z_0 vào phương trình mặt phẳng (P).
- Nếu $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ thì kết luận $M\in(P)$.

  Nếu $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$ thì kết luận $M\notin(P)$.

Phương pháp giải nhanh:

- Phương trình (P) có hệ số của z bằng 0 vì vậy em chỉ cần quan tâm đến hoành độ và tung độ của điểm.
- Điểm thuộc (P) có $2y-x=3$.

  Điểm M có $2.1-(-1)=3 \rightarrow$ Loại A.
  Điểm N có $2.1-1=1\neq 3 \rightarrow$ Chọn B.
  Điểm P có $2.3-3=3 \rightarrow$ Loại C.
  Điểm Q có $2.(-1)-(-5)=3 \rightarrow$ Loại B. **→ Đáp án B**

Câu 2: Trong không gian Oxyz cho các điểm $O(0;0;0)$, $A(2;3;0)$, $B(0;0;-3)$, $C(-135;21;1)$, $E(-34;0;3)$, $G(254;0;0)$, $D\left(\frac{-123}{47};\frac{11}{23};0\right)$. Trong số các điểm trên có bao nhiêu điểm thuộc mặt phẳng Oxy.

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Những điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) có cao độ bằng 0.

Do vậy có 4 điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) là O, A, D, G. **→ Đáp án B**

Câu 3: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d: $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1 \\ y=2-t \end{cases}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

A. $M(3;2;0)$. **B.** $P(2;-1;1)$. **C.** $N(-1;-1;4)$. **D.** $Q(5;1;-2)$.

Hướng dẫn giải

Để kiểm tra điểm **thuộc** hay **không thuộc** đường thẳng em hãy thay tọa độ điểm vào phương trình đường thẳng.

Thay tọa độ $M(3;2;0)$ vào phương trình đường thẳng em được

$$\begin{cases}3=1+t\\2=-1+2t\\0=2-t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=2\\t=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow M\notin d.$$

Tương tự em có $P, Q\in d$.

Thay tọa độ $N(-1;-1;4)$ vào phương trình đường thẳng em được

$$\begin{cases}-1=1+t\\-1=-1\\4=2-t\end{cases}\Leftrightarrow t=-2\Rightarrow N\in d.$$

→ Đáp án C

Phương pháp giải nhanh

Em để ý rằng tung độ các điểm thuộc d đều bằng −1 → Loại A, D.

Thử với hai điểm N, P em có được đáp án đúng là C.

Câu 4: Trong không gian Oxyz cho các điểm $O(0;0;0), A(2;1;0), B(0;1;0), C(-34;0;0), D\left(\dfrac{11}{23};0;-\dfrac{1}{2}\right), E(-1;0;3), G(742;1;-47)$. Trong số các điểm trên có bao nhiêu điểm thuộc trục Ox.

A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Hướng dẫn giải

Những điểm thuộc trục Ox có tung độ và cao độ bằng 0.

Do vậy có 2 điểm thuộc trục Ox là O, C.

→ Đáp án C

Câu 5: Tìm cặp đường thẳng và mặt phẳng vuông góc với nhau?

A. $\Delta:\begin{cases}x=2-4t\\y=3+t\\z=-1+t\end{cases};(P):4x-y-z-2=0.$ B. $\Delta:\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-1}{-1};(P):y+3z+7=0.$

C. $\Delta:\begin{cases}x=-t\\y=1\\z=t\end{cases};(P):x+2y-4z+5=0.$ D. $\Delta:\begin{cases}x=-1+2t\\y=9-2t\\z=3+t\end{cases};(P):4x+4y-2z+5=0.$

Hướng dẫn giải

Gọi $\overrightarrow{u_\Delta}$ là một VTCP của đường thẳng Δ, $\overrightarrow{n_P}$ là một VTPT của mặt phẳng (P).

Điều kiện: $\Delta\perp(P)\Leftrightarrow\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{n_P}$ cùng phương $\Leftrightarrow\exists k\in R:\overrightarrow{u_\Delta}=k\overrightarrow{n_P}$.

Đáp án A: $\begin{cases}\overrightarrow{u_\Delta}=(-4;1;1)\\\overrightarrow{n_P}=(4;-1;-1)\end{cases}\rightarrow\overrightarrow{u_\Delta}=-\overrightarrow{n_P}\rightarrow$ Chọn A.

Đáp án B: $\begin{cases}\overrightarrow{u_\Delta}=(-2;3;-1)\\\overrightarrow{n_P}=(0;1;3)\end{cases}\rightarrow\overrightarrow{u_\Delta}.\overrightarrow{n_P}=0\rightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta//(P)\\\Delta\subset(P)\end{array}\right.\rightarrow$ Loại B.

Đáp án C: $\begin{cases}\overrightarrow{u_\Delta}=(-1;0;1)\\ \overrightarrow{n_P}=(1;2;-4)\end{cases}\rightarrow \overrightarrow{u_\Delta}\neq k.\overrightarrow{n_P},\forall k\rightarrow \Delta$ cắt mặt phẳng $(P)\rightarrow$ Loại C.

Đáp án D: $\begin{cases}\overrightarrow{u_\Delta}=(2;-2;1)\\ \overrightarrow{n_P}=(4;4;-2)\end{cases}\rightarrow \overrightarrow{u_\Delta}\neq k.\overrightarrow{n_P},\forall k\rightarrow \Delta$ cắt mặt phẳng $(P)\rightarrow$ Loại D.

→ **Đáp án A**

Câu 6: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1+3t\\ y=-2t\\ z=3+t\end{cases}$; $d':\frac{x-2}{-2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{2}$.

Chọn kết luận đúng

A. d và d' chéo nhau.

B. d và d' cắt nhau.

C. d và d' song song.

D. d và d' trùng nhau.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d qua A(−1; 0; 3) và có VTCP $\vec{a}=(3;-2;1)$.

Đường thẳng d' qua B(2; −3; 1) và có VTCP $\vec{b}=(-2;1;2)$.

Vì $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương nên d và d' cắt nhau hoặc chéo nhau→ loại C, D.

Em lại có:

$$\overrightarrow{AB}=(3;-3;-2),\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(-5;-8;-1)$$

$$\Rightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right].\overrightarrow{AB}=-15+24+2=11\neq 0$$

Vậy d và d' chéo nhau.

→ **Đáp án A**

Câu 7: Cặp đường thẳng nào dưới đây cắt nhau?

A. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{1};\frac{x+1}{4}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{5}$.

B. $\frac{x}{1}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z+3}{-3};\frac{x}{-1}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+2}{3};\frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-3}{-3}$.

D. $\frac{x}{-1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-2};\begin{cases}x=4+2t\\ y=9-6t.\\ z=5+4t\end{cases}$

Hướng dẫn giải

Em sử dụng điều kiện hai đường thẳng cắt nhau.

Trước hết em cần loại bỏ đáp án B và D vì hai đường thẳng có hai VTCP cùng phương nên chúng là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

Với đáp án C:

Đường thẳng $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+2}{3}$ qua điểm P(1; −3; −2) và có VTCP $\vec{a}=(1;2;3)$.

Đường thẳng $\frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-3}{-3}$ qua điểm Q(4; 2; 3) và có VTCP $\vec{b}=(1;-4;-3)$.

$[\vec{a},\vec{b}]=(6;6;-6),\overrightarrow{PQ}=(3;5;5)\Rightarrow[\vec{a},\vec{b}].\overrightarrow{PQ}\neq 0\Rightarrow\vec{a},\vec{b},\overrightarrow{PQ}$ không đồng phẳng.

Do vậy hai đường thẳng chéo nhau.

Với đáp án A:

Đường thẳng $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{1}$ qua điểm M(1; −1; 5) và có VTCP $\vec{a}=(2;3;1)$.

Đường thẳng $\frac{x+1}{4}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{5}$ qua điểm N(−1; −1; 1) và có VTCP $\vec{b}=(4;3;5)$.

$[\vec{a},\vec{b}]=(12;-6;-6), \overrightarrow{MN}=(-2;0;-4)\Rightarrow [\vec{a},\vec{b}].\overrightarrow{MN}=0.$

Suy ra các vectơ $\vec{a},\vec{b},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Do vậy hai đường thẳng cắt nhau.

→ **Đáp án A**

Câu 8: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d: $\begin{cases}x=-1+2t\\y=-3t\\z=1-t\end{cases}$ mặt phẳng (P) có phương trình 4x−3y+z−13=0. Tọa độ giao điểm (nếu có) của đường thẳng d và mặt phẳng (P) là

A. Không có giao điểm. **B.** $M(1;-3;0)$. **C.** $N(-3;3;2)$. **D.** $K(0;-4;1)$.

Hướng dẫn giải

Tọa độ giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases}x=-1+2t\\y=-3t\\z=1-t\\4x-3y+z-13=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1+2t\\y=-3t\\z=1-t\\4(-1+2t)-3(-3t)+(1-t)-13=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-3\\z=0\\t=1\end{cases}$$

Vậy đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau tại điểm duy nhất $(1;-3;0)$.

→ **Đáp án B**

Chú ý: Giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng có tọa độ thỏa mãn cả phương trình đường thẳng d và phương trình mặt phẳng (P). Vì vậy các em có thể thử chọn các đáp án.

Đáp án A loại vì đường thẳng d không song song với mặt phẳng (P).

Đáp án B loại vì $N\in d$ nhưng $N\notin(P)$.

Đáp án D loại vì $K\in(P)$ nhưng $K\notin d$.

♥ Vận dụng

Câu 9: Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-6}{2}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1+m}{m-1}$; $d_2:\frac{x-4}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{2}$. Giả sử với $m=m_0$ thì hai đường thẳng trên cắt nhau tại điểm I(a ;b ;c) và T = a + b + c. Chọn khẳng định đúng.

A. $m_0=2$; T=7. **B.** $m_0=1$; T=7. **C.** $m_0=2$; T=5. **D.** $m_0=2$; T=−1.

Hướng dẫn giải

Phương trình tham số của hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=6+2t\\y=-3-2t\\z=1-m+(m-1)t\end{cases}$, $d_2:\begin{cases}x=4+4t'\\y=-3t'\\z=-2+2t'\end{cases}$

Xét hệ phương trình $\begin{cases}6+2t=4+4t'\\-3-2t=-3t'\\1-m+(m-1)t=-2+2t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-3\\t'=-1\\m=2\end{cases}$. Hệ có nghiệm duy nhất.

Hai đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau và tọa độ giao điểm là $I(0;3;-4)$, T=-1.

→ **Đáp án D**

*** Nâng cao**

Câu 10: Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $d_m:\frac{x-4m+3}{2m-1}=\frac{y-2m-3}{m+1}=\frac{z-8m-7}{4m+3}$, điều kiện $m\notin\left\{\frac{1}{2};-1;-\frac{3}{4}\right\}$. Với mọi m thì đường thẳng d_m luôn nằm trong mặt phẳng cố định nào?

A. x+10y+3z−6=0. B. x−10y+3z−6=0.

C. x+10y−3z−6=0. D. x−10y−3z+6=0.

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (P) chứa d_m có dạng: Ax+By+Cz+D=0, VTPT của (P) là $\vec{n}=(A;B;C)$.

Đường thẳng d_m qua A(4m−3; 2m+3; 8m+7) và có VTCP $\vec{u}=(2m-1;m+1;4m+3)$.

$$d_m\subset(P)\,\forall m\Leftrightarrow\begin{cases}A\in(P)\\\vec{u}.\vec{n}=0\end{cases}\quad\forall m.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A(4m-3)+B(2m+3)+C(8m+7)+D=0\\A(2m-1)+B(m+1)+C(4m+3)=0\end{cases}\quad\forall m.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m(4A+2B+8C)-3A+3B+7C+D=0\\m(2A+B+4C)-A+B+3C=0\end{cases}\quad\forall m.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4A+2B+8C=0\\-3A+3B+7C+D=0\\2A+B+4C=0\\-A+B+3C=0\end{cases}\Leftrightarrow A=1;B=10;C=-3;D=-6.$$

→ **Đáp án C**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 11: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(\alpha):x+y+z-6=0$. Điểm nào dưới đây **không** thuộc (α)?

A. $N(2;2;2)$. B. $Q(3;3;0)$. C. $P(1;2;3)$. D. $M(1;-1;1)$.

Câu 12: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x-2y+z-5=0$. Điểm thuộc (P) là?

A. Q(2; -1; 5). **B.** P(0; 0; -5). **C.** N(-5; 0; 0). **D.** M(1; 1; 6).

Câu 13: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d: $\begin{cases} x=t \\ y=-1+3t \\ y=-2t \end{cases}$. Điểm thuộc d là

A. M(3; 8; 6). **B.** P(2; 7; -4). **C.** N(-1; -4; -2). **D.** Q(5; 14; -10).

Câu 14: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d:\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-t \\ z=2+t \end{cases}$ và $d':\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{3}$.

Chọn kết luận đúng

A. d và d' chéo nhau. **B.** d và d' cắt nhau. **C.** d //d'. **D.** $d\equiv d'$.

Câu 15: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{3}$

và $d':\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-2}{6}$. Chọn kết luận đúng

A. d và d' chéo nhau. **B.** $d\equiv d'$. **C.** d và d' cắt nhau. **D.** d //d'.

Câu 16: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+1}{1}$

và $d':\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y+3}{-6}=\dfrac{z-3}{-2}$. Chọn kết luận đúng.

A. d và d' chéo nhau. **B.** d và d' cắt nhau. **C.** d //d'. **D.** $d\equiv d'$.

Câu 17: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d:\begin{cases} x=2t \\ y=1-t \\ z=3+3t \end{cases}$ và mặt phẳng (P) có

phương trình: x+y+z-10=0. Gọi $I(x_I;y_I;z_I)$ là giao điểm của d và (P). Khẳng định nào là **sai.**

A. $x_I.\ y_I.\ z_I<0$. **B.** $x_I.\ z_I>0$. **C.** $x_I;\ y_I;\ z_I\in\mathbb{Z}$. **D.** $y_I>0$.

Câu 18: Tìm cặp đường thẳng và mặt phẳng song song với nhau?

A. $\Delta:\begin{cases} x=12+4t \\ y=9+3t \\ z=1+t \end{cases}$; $(P):3x+4y-z-2=0$. **B.** $\Delta:\begin{cases} x=-10-3t \\ y=4+4t \\ z=1-t \end{cases}$; $(P):y+4z+17=0$.

C. $\Delta:\begin{cases} x=-1 \\ y=t \\ z=t \end{cases}$; $(P):x+4y-4z+1=0$. **D.** $\Delta:\begin{cases} x=12+4t \\ y=9+2t \\ z=5+t \end{cases}$; $(P):3x+y-z-1=0$.

Câu 19: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng d: $\begin{cases} x=3-3t \\ y=-1+t \\ z=2-4t \end{cases}$ và mặt phẳng

(P): $x-2y+3z+23=0$. Tọa độ giao điểm (nếu có) của đường thẳng d và mặt phẳng (P) là

A. $A(-3;1;-6)$. B. $B(12;-4;14)$. C. $N(-2;-3;-9)$. D. Không có.

Câu 20: Trong không gian Oxyz, tìm tất cả các giá trị thực của m để đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{-2}$ song song với mặt phẳng $(P):4x+3y-z+m=0$.

A. $m\neq 11$. B. $m=11$. C. $m\in\mathbb{R}$. D. $m\in\varnothing$.

Câu 21: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-4}{-3}$ đi qua điểm $M(-2;m+1;n)$. Khi đó giá trị của m và n là

A. $m=-5$ và $n=7$. B. $m=-3$ và $n=1$. C. $m=-1$ và $n=-5$. D. $m=0$ và $n=9$.

Câu 22: Cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+t\\y=2+2t\\z=2+-t\end{cases}$ và $d':\begin{cases}x=-1+2t'\\y=-4+4t'\\z=5-2t'\end{cases}$. Khẳng định đúng là

A. $d\cap d'$. B. $d//d'$. C. $d\perp d'$. D. $d\equiv d'$.

Câu 23: Cho đường thẳng d: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-7}{2}$ và mặt phẳng $(\alpha):x+3y+z-2=0$. Trong các khẳng định sau, tìm khẳng định đúng

A. $d//(\alpha)$. B. $d\subset(\alpha)$. C. $d\perp(\alpha)$. D. d cắt (α).

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, với giá trị nào của m thì hai mặt phẳng $(P):2x+my+3z-5=0,(Q):nx-6y-6z-2=0$ song song?

A. m=–4; n=3. B. m=–1; n=3. C. m=–4; n=2. D. m=3; n=–4.

Câu 25: Trong không gian Oxyz, hai mặt phẳng $(\alpha):x-5y+mz-3m=0$; $(\beta):x+2y+2z+3=0$ vuông góc nhau khi và chỉ khi

A. $\frac{9}{7}$. B. $m\in\varnothing$. C. $\frac{9}{2}$. D. $\frac{11}{2}$.

Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+t\\y=m+2t\\z=9+nt\end{cases}$ và mặt phẳng (P): $x+2y-z+3=0$. Với giá trị nào của m, n thì $d\subset(P)$.

A. m=2; n=5. B. m=5; n=2. C. m=–2; n=–5. D. m=–5; n=–2.

Câu 27: Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng $d:\frac{x-6}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-3}{m-1}$; $d':\frac{x-4}{4}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{2}$. Với giá trị nào của m hai đường thẳng d và d' cắt nhau?

A. m=2. B. $\forall m\in R$. C. $\forall m\neq 2$. D. m=–2.

ĐÁP ÁN

11	12	13	14	15	16	17	18	19
D	D	D	A	B	C	D	B	A

20	21	22	23	24	25	26	27	
A	C	D	B	D	C	A	A	

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 11:

Thay tọa độ các điểm vào mặt phẳng (α) em có

- Với $N(2;2;2): 2+2+2-6=0 \Rightarrow N \in (\alpha) \rightarrow$ Loại
- Với $Q(3;3;0): 3+3+0-6=0 \Rightarrow Q \in (\alpha) \rightarrow$ Loại
- Với $P(1;2;3): 1+2+3-6=0 \Rightarrow P \in (\alpha) \rightarrow$ Loại
- Với $M(1;-1;1): 1-1+1-6=-5 \neq 0 \Rightarrow M \notin (\alpha)$

→ Đáp án D

Câu 12:

Em thay tọa độ của từng điểm vào phương trình mặt phẳng (P):

- Với Q(2; -1; 5): $2 - 2.(-1) + 5 - 5 = 4 \Rightarrow Q \notin (P)$
- Với P(0; 0; -5): $0 - 0 - 5 - 5 = -10 \Rightarrow P \notin (P)$
- Với N(-5; 0; 0): $-5 - 0 + 0 - 5 = -10 \Rightarrow N \notin (P)$
- Với M(1; 1; 6): $1 - 2 + 6 - 5 = 0 \Rightarrow M \in (P)$

→ Đáp án D.

Câu 13:

Phương pháp giải nhanh

Em để ý rằng cao độ các điểm thuộc d đều bằng −2 lần hoành độ điểm đó → loại A, C.

Thử với điểm P em có được: $\begin{cases} 2=t \\ 7=-1+3t \\ -4=-2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=-\dfrac{8}{3} \end{cases} \rightarrow P \notin d.$

Thử với điểm Q em có được: $\begin{cases} 5=t \\ 14=-1+3t \\ -10=-2t \end{cases} \Leftrightarrow t=5 \rightarrow Q \in d.$

→ Đáp án D

Câu 14:

Đường thẳng d qua $A(-2;0;2)$ và có VTCP $\vec{a}=(2;-1;1)$.

Đường thẳng d' qua $B(1;-1;0)$ và có VTCP $\vec{b}=(-2;-1;3)$.

$\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương nên d và d' cắt nhau hoặc chéo nhau. Em lại có:

$\overrightarrow{AB}=(3;-1;-2), \left[\vec{a},\vec{b}\right]=(-2;-8;-4)$

$\Rightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right].\overrightarrow{AB}=-6+8+8=10 \neq 0$

Vậy d và d' chéo nhau. **→ Đáp án A**

Câu 15:

Đường thẳng d qua A(−1; 1; −1) và có VTCP $\vec{a}=(3;1;3)$.

Đường thẳng d' qua B(2; 2; 2) và có VTCP $\vec{b}=(6;2;6)$.

$\vec{a},\vec{b}$ cùng phương nên d và d' song song hoặc trùng nhau.

Em lại có: A∈d'.

Do vậy hai đường thẳng d và d' trùng nhau.

→ Đáp án B

Câu 16:

Đường thẳng d qua A(2; −1; −1) và có VTCP $\vec{a}=(-2;3;1)$.

Đường thẳng d' qua B(−1; −3; 3) và có VTCP $\vec{b}=(4;-6;-2)$.

$\vec{a},\vec{b}$ cùng phương nên d và d' song song hoặc trùng nhau.

Em lại có: A∉d'.

Do vậy hai đường thẳng d và d' song song.

→ Đáp án C

Câu 17:

I là giao điểm của d và (P) nên tọa điểm I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x=2t \\ y=1-t \\ z=3+t \\ x+y+z-10=0 \end{cases}$$

Giải hệ em được I(6; −2; 6).

→ Đáp án D

Câu 18:

Trong đáp án **A** và **D**, VTCP của đường thẳng và VTPT của mặt phẳng không vuông góc. Do vậy đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) là cắt nhau.

Đáp án **C**:

Đường thẳng Δ qua M(−1; 0; 0) và có VTCP $\vec{u}=(0;1;1)$

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(1;4;-4)$

Vì $\begin{cases} \vec{n}.\vec{u}=0 \\ M\in(P) \end{cases}$ nên Δ⊂(P).

Đáp án **B**:

Đường thẳng Δ qua M(−10; 4; 1) và có VTCP $\vec{u}=(-3;4;-1)$

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(0;1;4)$

Vì $\begin{cases} \vec{n}.\vec{u}=0 \\ M\notin(P) \end{cases}$ nên Δ//(P).

→ Đáp án B

Câu 19:

Tọa độ giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x=3-3t \\ y=-1+t \\ z=2-4t \\ x-2y+3z+23=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-3t \\ y=-1+t \\ z=2-4t \\ (3-3t)-2(-1+t)+3(2-4t)+23=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \\ z=-6 \\ t=2 \end{cases}$$

Vậy đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau tại điểm duy nhất (–3; 1; –6).

→ **Đáp án A**

Câu 20:

Δ có 1 VTCP là $\vec{u}=(1;-2;-2)$; (P) có 1 VTPT là $\vec{n}=(4;3;-1)$.

Em có $\vec{u}.\vec{n}=4-6+2=0$.

Suy ra $\Delta // (P)$ khi $M(-1;-2;1)\in(P)\Rightarrow 4(-1)+3.(-2)-1+m\neq 0\Rightarrow m\neq 11$.

→ **Đáp án A**

Câu 21:

Em có: $A\in\Delta\Rightarrow A(1-t;-3+t;4-3t)$ là điểm tổng quát thuộc đường thẳng Δ

Để Δ đi qua M thì $M\equiv A\Rightarrow \begin{cases} 1-t=-2 \\ -3+t=m+1 \\ 4-3t=n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=-5 \end{cases}$ → **Đáp án C**

Câu 22:

d có VTCP $\vec{u}=(1;2;-1)$ và điểm M(2; 2; 2)∈d; d' có VTCP $\vec{u'}=(2;4;-2)$.

Dễ thấy $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{u'}$ và điểm $M\in d'\Rightarrow d\equiv d'$.

→ **Đáp án D**

Câu 23:

VTCP của d là $\vec{u}=(1;-1;2)$ và A(1; -2; 7)∈d; VTPT của (α) là $\vec{n}=(1;3;1)$.

Vì $\begin{cases} \vec{n}.\vec{u}=0 \\ A\in(\alpha) \end{cases}$ nên $d\subset(\alpha)$.

→ **Đáp án B**

Câu 24:

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n_P}=(2;m;3)$, mặt phẳng (Q) có VTPT $\vec{n_Q}=(n;-6;-6)$.

$(P)//(Q)\Leftrightarrow \frac{2}{n}=\frac{m}{-6}=\frac{3}{-6}\neq\frac{5}{2}, n\neq 0\Leftrightarrow \begin{cases} m=3 \\ n=-4 \end{cases}$. → **Đáp án D**

Câu 25:

Mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n_\alpha}=(1;-5;m)$; mặt phẳng (β) có VTPT $\vec{n_\beta}=(1;2;2)$.

$(\alpha)\perp(\beta)\Leftrightarrow \vec{n_\alpha}.\vec{n_\beta}=0\Leftrightarrow 1.1+(-5).2+m.2=0\Leftrightarrow m=\frac{9}{2}$. → **Đáp án C**

Câu 26:

Đường thẳng d qua $M(2;m;9)$ và có VTCP $\vec{a}=(1;2;n)$.

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(1;2;-1)$.

$$d\subset(P)\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}\perp\vec{n}\\M\in(P)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}.\vec{n}=0\\2+2m-9+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+4-n=0\\m=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=5\\m=2\end{cases}$$

→ **Đáp án A**

Câu 27:

Đường thẳng d qua A(6; −2; 3) và có VTCP $\vec{a}=(2;4;m-1)$.

Đường thẳng d' qua B(4; 3; 2) và có VTCP $\vec{b}=(4;-1;2)$.

Em có: $\overrightarrow{AB}=(-2;5;-1),\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(m+7;4m-8;-18)$.

Hai đường thẳng d và d' cắt nhau khi và chỉ khi $\begin{cases}\left[\vec{a},\vec{b}\right]\neq\vec{0}\\\left[\vec{a},\vec{b}\right].\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}(m+7;4m-8;-18)\neq(0;0;0)\\-2(m+7)+5(4m-8)-1(-18)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\forall m\in R\\18m-36=0\end{cases}\Leftrightarrow m=2$$

→ **Đáp án A**

Dạng 2: Phương trình mặt phẳng

➢ **Phương pháp 1:**

Bước 1: Xác định VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$ của mặt phẳng.

Bước 2: Xác định tọa độ một điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ nằm trên mặt phẳng.

Bước 3: Viết phương trình mặt phẳng qua điểm M và có một VTPT là $\vec{n}$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

☞ ***Chú ý:*** Khi em biết các giao điểm của mặt phẳng với các trục tọa độ thì cách viết phương trình mặt phẳng đơn giản nhất là sử dụng phương trình mặt phẳng ở dạng đoạn chắn.

$$(P)\text{ qua:}\begin{cases}A(a;0;0)\in Ox\\B(0;b;0)\in Oy\\C(0;0;c)\in Oz\end{cases},\ abc\neq0\Rightarrow\text{Phương trình của (P): }\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

➢ **Phương pháp 2:**

Bước 1: Gọi phương trình mặt phẳng là $Ax+By+Cz+D=0$

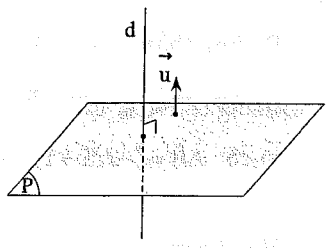
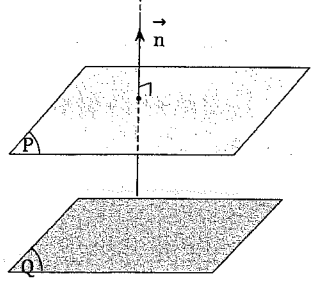
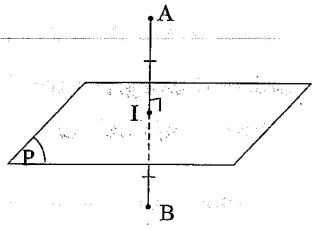
Bước 2: Dựa vào các dữ kiện đề bài, thiết lập hệ gồm 3 phương trình 4 ẩn A, B, C, D.

Bước 3: Giải hệ phương trình tìm A, B, C, D. Từ đó có được phương trình mặt phẳng.

Bài toán 2.1. Xác định phương trình mặt phẳng khi biết một điểm đi qua và một VTPT

Đây là bài toán cơ bản của dạng toán xác định phương trình của mặt phẳng.

Trong bài toán này, phương pháp sử dụng thường là ***Phương pháp 1***, trong đó xác định được VTPT của mặt phẳng là rất quan trọng. Dưới đây là cách xác định VTPT của mặt phẳng (P) trong một số trường hợp thường gặp.

Giả thiết	VTPT của (P)	Mô tả
(P) ⊥ d d có VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$.	$\vec{u}=(a;b;c)$	
(P)//(Q) (Q) có VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$.	$\vec{n}=(A;B;C)$	
Mặt phẳng (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.	$\vec{n}=\overrightarrow{AB}$	

BÀI TẬP MẪU

Cơ bản

Câu 28: Trong không gian Oxyz, cho điểm A(2;5;1). Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với trục Ox là

A. y−5=0. **B.** x−2=0. **C.** y−z=0. **D.** z−1=0.

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng vuông góc với trục Ox nhận vecto $\vec{i}=(1;0;0)$ là VTPT.

Phương trình mặt phẳng cần tìm là: 1(x−2)+0(y−5)+0(z−1)=0⇔ x−2=0.

→ **Đáp án B**

Phương pháp giải nhanh:

Mặt phẳng vuông góc với trục Ox có dạng $x-x_0=0$, ở đó x_0 là hoành độ điểm đi qua

→ chọn B.

Tổng quát: (P) là mặt phẳng qua điểm $A(x_0; y_0; z_0)$.

- ✓ Nếu (P) $\perp Ox$ thì phương trình của (P) là $x-x_0=0$.
- ✓ Nếu (P) $\perp Oy$ thì phương trình của (P) là $y-y_0=0$.
- ✓ Nếu (P) $\perp Oz$ thì phương trình của (P) là $z-z_0=0$.

Câu 29: Trong không gian Oxyz, cho A(3; 2; 0) và vecto $\vec{n}=(-1;2;1)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng qua điểm A và nhận $\vec{n}$ làm VTPT?

A. $2x-4y-2z+1=0$. **B.** $x-2y-z+1=0$. **C.** $2x-y+2z-4=0$. **D.** $-x+2y+z+1=0$.

Hướng dẫn giải

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm A và nhận $\vec{n}=(-1;2;1)$ là:

$-1(x-3)+2(y-2)+(z-0)=0\Leftrightarrow -x+2y+z-1=0$. → **Đáp án B**

Câu 30: Trong không gian Oxyz, cho điểm A(3; 2; 0) và đường thẳng d: $\frac{x-2}{-3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-1}{1}$.

Phương trình mặt phẳng qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d là

A. $-3x+4y+z-17=0$. **B.** $3x-4y-z-1=0$. **C.** $3x+2y+1=0$. **D.** $3x+2y-17=0$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d có VTCP là: $\overrightarrow{u_d}=(-3;4;1)$. Vì mặt phẳng vuông góc với d nên $\overrightarrow{u_d}=(-3;4;1)$ là một VTPT của mặt phẳng đó.

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d là:

$$-3(x-3)+4(y-2)+(z-0)=0\Leftrightarrow -3x+4y+z+1=0$$

→ **Đáp án B**

Câu 31: Trong không gian Oxyz, cho điểm M(−7; 3; 5) và mặt phẳng (Q): $7x-4y+z-1=0$. Gọi (P) là mặt phẳng qua điểm M và song song với mặt phẳng (Q). Phương trình của (P) là

A. $7x-4y+z+56=0$. **B.** $7x-4y+z-42=0$.

C. $4x-7y+z-56=0$. **D.** $-7x+4y+5z-42=0$.

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (Q) có VTPT $\vec{n}=(7;-4;1)$

Vì (P)//(Q) nên mặt phẳng (P) cũng nhận $\vec{n}=(7;-4;1)$ là một VTPT.

Phương trình mặt phẳng (P) là: $7(x+7)-4(y-3)+(z-5)=0\Leftrightarrow 7x-4y+z+56=0$.

→ **Đáp án A**

Phương pháp giải nhanh:

(P)//(Q) nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng $7x-4y+z+D=0$ $(D\neq -1)\rightarrow$ Loại C, D

Thử M với hai đáp án còn lại:

Đáp án A: $7(-7)-4.3+5+56=0\rightarrow$ Chọn A.

Đáp án B: $7(-7)-4.3+5-42\neq 0\rightarrow$ Loại B.

Câu 32: Trong không gian Oxyz, (P) là mặt phẳng qua điểm M(1; 3; −4) và song song với mặt phẳng Oxz. Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. $x-1=0$. **B.** $z+4=0$. **C.** $y-3=0$. **D.** $x-z=3$.

Hướng dẫn giải

(P)//(Oxz) nên mặt phẳng (P) nhận $\vec{j}=(0;1;0)$ là một VTPT.

Phương trình mặt phẳng (P) là: $0(x-1)+(y-3)+0(z+4)=0 \Leftrightarrow y-3=0$

→ **Đáp án C**

Phương pháp giải nhanh:

(P)//(Oxz) nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng $y-y_0=0$, trong đó y_0 là tung độ điểm đi qua → Chọn C.

Câu 33: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm A(1; 1; 0), B(−1; 2; 1). Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB?

A. $-2x+y+z+1=0$. **B.** $4x-2y-2z+6=0$.

C. $2x-y-z+2=0$. **D.** $-2x+y+z-1=0$.

Hướng dẫn giải

Để viết được phương trình của một mặt phẳng em cần tìm đủ 2 yếu tố là điểm thuộc mặt phẳng và VTPT của mặt phẳng đó.

Gọi (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB. Khi đó (P) đi qua trung điểm I của đoạn AB và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm VTPT.

Tọa độ trung điểm $I\left(0;\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{AB}=(-2;1;1)$. Phương trình mặt phẳng (P) là:

$$-2(x-0)+\left(y-\frac{3}{2}\right)+\left(z-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow -2x+y+z-2=0$$

→ **Đáp án C**

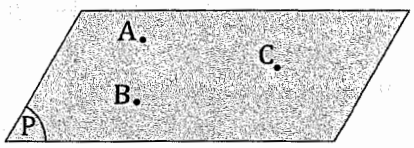
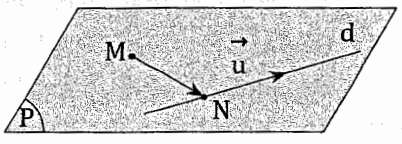
Bài toán 2.2. Xác định phương trình mặt phẳng khi biết một điểm đi qua và cặp VTCP

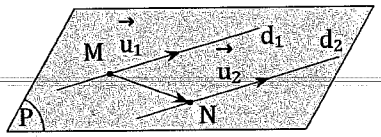
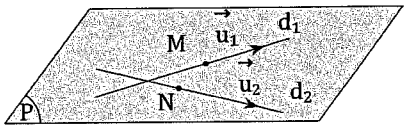
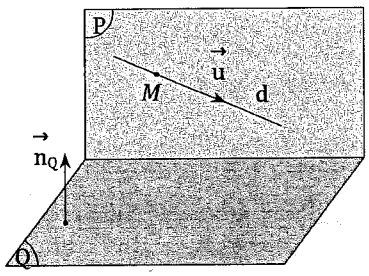
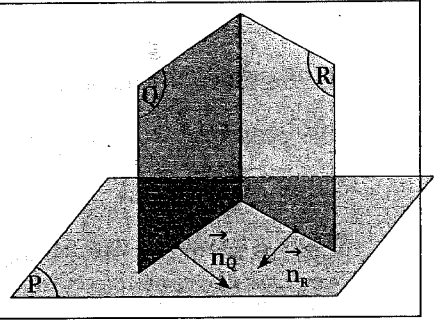
Đây là bài toán cơ bản của dạng toán xác định phương trình của mặt phẳng.

Trong bài toán này, phương pháp xác định VTPT của mặt phẳng dựa vào tính chất của tích có hướng của hai vectơ. Cụ thể:

Nếu mặt phẳng (P) *chứa* hoặc *song song* với giá của hai vectơ $\vec{u_1},\vec{u_2}$ không cùng phương thì vectơ $\vec{n}=[\vec{u_1},\vec{u_2}]$ là một VTPT của mặt phẳng (P).

Dưới đây là cách xác định VTPT của mặt phẳng trong một số trường hợp thường gặp.

Giả thiết	VTPT của (P)	Mô tả
(P) qua 3 điểm A, B, C không thẳng hàng.	$\vec{n}=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]$	
✓ $\begin{cases}(P)\text{ qua }M\\(P)\supset d\end{cases}$ ✓ d qua N, có VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$	$\vec{n}=[\overrightarrow{MN},\vec{u}]$	

✓ $\begin{cases}(P)\supset d_1\\(P)\supset d_2\\d_1//d_2\end{cases}$ ✓ d_1 đi qua M có VTCP $\overrightarrow{u_1}$ ✓ d_2 đi qua N có VTCP $\overrightarrow{u_2}$	$\overrightarrow{n}=[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{u_1}]$	
✓ $\begin{cases}(P)\supset d_1\\(P)\supset d_2\\d_1 \text{cắt } d_2\end{cases}$ ✓ d_1 đi qua M có VTCP $\overrightarrow{u_1}$ ✓ d_2 đi qua N có VTCP $\overrightarrow{u_2}$ **Chú ý:** Quan hệ *"chứa"* có thể được thay thế bởi quan hệ *"song song"* của (P) đối với mỗi đường d_1, d_2.	$\overrightarrow{n}=[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]$	
✓ $\begin{cases}(P)\supset d\\(P)\perp(Q)\end{cases}$ ✓ d đi qua M có VTCP $\vec{u}$ ✓ (Q) có VTPT $\overrightarrow{n_Q}$ **Chú ý:** Quan hệ *"chứa"* có thể được thay thế bởi quan hệ *"song song"* của (P) đối với d.	$\overrightarrow{n_P}=[\vec{u},\overrightarrow{n_Q}]$	
✓ $\begin{cases}(P)\perp(R)\\(P)\perp(Q)\end{cases}$ ✓ (Q) có VTPT $\overrightarrow{n_Q}$ ✓ (R) có VTPT $\overrightarrow{n_R}$	$\overrightarrow{n_P}=[\overrightarrow{n_Q},\overrightarrow{n_R}]$	

BÀI TẬP MẪU

Cơ bản

Câu 34: Trong không gian Oxyz, gọi (P) là mặt phẳng đi qua ba điểm A(1; −2; 3), B(4; 1; 0), C(−2; 0; 1). Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. y+z−1=0.
B. x−2y+3z−1=0.
C. x−2y+3z+1=0.
D. −y−z+5=0.

Hướng dẫn giải

Vì (P) chứa giá của hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ nên vectơ $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]$ có giá vuông góc với (P).

Em có $\overrightarrow{AB}=(3;3;-3),\overrightarrow{AC}=(-3;2;-2)$. Từ đó tính được $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=(0;15;15)$.

Chọn vectơ $\vec{n}=(0;1;1)$ là VTPT của (P). Phương trình của mặt phẳng (P) là:

$0.(x-1)+1.(y+2)+1.(z-3)=0\Leftrightarrow y+z-1=0$ → **Đáp án A**

Câu 35: Trong không gian Oxyz, gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A(1; 2; 4) và chứa đường thẳng $d:\frac{x}{-3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{2}$. Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. $4x+2y-z-12=0$. **B.** $2x+2y-z-6=0$.

C. $2x+2y+z-14=0$. **D.** $2x-4y+z-10=0$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d qua B(0; 1; -2) và có một VTCP $\vec{u}=(-3;2;2)$.

Em có $\overrightarrow{AB}=(-1;-1;-6)\Rightarrow[\overrightarrow{AB},\vec{u}]=(10;20;-5)$.

Vì (P) chứa giá của hai vectơ $\overrightarrow{AB},\vec{u}$ nên vectơ $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]$ có giá vuông góc với (P).

Chọn vectơ $\vec{n}=(2;4;-1)$ là VTPT của (P). Phương trình của mặt phẳng (P) là:

$$2.(x-1)+4.(y-2)-1.(z-4)=0\Leftrightarrow 2x+4y-z-6=0$$

→ **Đáp án B**

Câu 36: Trong không gian Oxyz, gọi (P) là chứa đường thẳng $d:\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng (Q): y-z=0. Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. $3x-y+z-8=0$. **B.** $3x+y+z-10=0$.

C. $3x-y+z-10=0$. **D.** $3x+y+z-8=0$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d qua M(2; -1; 3) và có một VTCP $\vec{u}=(-1;1;2)$.

Mặt phẳng (Q) có VTPT $\overrightarrow{n_Q}=(0;1;-1)$.

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{n_Q},\vec{u}\right]=(3;1;1)$

Phương trình của mặt phẳng (P) là:

$3.(x-2)+(y+1)+(z-3)=0\Leftrightarrow 3x+y+z-8=0$ → **Đáp án D**

Câu 37: Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm D(-1; 2; 3) và cùng vuông góc với hai mặt phẳng (α): $x-2=0$, (β): $y-z-1=0$?

A. $x+z-2=0$. **B.** $y+z-5=0$.

C. $x+y-1=0$. **D.** $-y+z-1=0$.

Hướng dẫn giải

(α) có VTPT $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;0;0)$, (β) có VTPT $\overrightarrow{n_\beta}=(0;1;-1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng thỏa mãn điều kiện bài toán và $\overrightarrow{n_P}$ là VTPT của mặt phẳng (P).

Do (P) vuông góc với cả (α) và (β) nên chọn $\overrightarrow{n_P} = [\overrightarrow{n_\alpha}, \overrightarrow{n_\beta}] = (0;1;1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là:

$$1(y-2)+1(z-3)=0 \Leftrightarrow y+z-5=0.$$

→ **Đáp án B**

♥ Vận dụng

Câu 38: Trong không gian Oxyz, biết rằng mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$ và $d_2: \frac{x+1}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{3}$. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $2x-y-3z-2=0$. **B.** $4x+5y+z-4=0$.

C. $4x+5y+z+4=0$. **D.** Không tồn tại.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d_1 đi qua $M_1(1; 0; 0)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_1} = (-1;1;-1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua $M_2(-1; 1; 3)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_2} = (-2;1;3)$.

Như vậy $\begin{cases} \overrightarrow{u_1} \neq k\overrightarrow{u_2} \\ [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2} = 0 \end{cases}$. Suy ra d_1, d_2 cắt nhau → tồn tại mặt phẳng (P) → Loại D.

Gọi $\vec{n}$ là một VTPT của mặt phẳng (P) thì $\vec{n}$ vuông góc với hai vectơ không cùng phương $\overrightarrow{u_1} = (-1;1;-1)$ và $\overrightarrow{u_2} = (-2;1;3)$. Chọn $\vec{n} = [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = (4;5;1)$.

Vì vậy phương trình của (P) là:

$$4(x-1)+5(y-0)+(z-0)=0 \Leftrightarrow 4x+5y+z-4=0.$$

→ **Đáp án B**

Câu 39: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho (α) là mặt phẳng chứa hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+1}{2}$ và $d_2: \begin{cases} x=12-3t \\ y=t \\ z=10-2t \end{cases}$. Phương trình mặt phẳng (α) là

A. $15x-11y-17z-54=0$. **B.** $15x+11y-17z+10=0$.

C. $15x-11y-17z-24=0$. **D.** $15x+11y-17z-10=0$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d_1 đi qua $M_1(1; -2; -1)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_1} = (3;-1;2)$.

Đường thẳng d_2 đi qua $M_2(12; 0; 10)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_2} = (-3;1;-2)$.

Như vậy $\overrightarrow{u_1} = -\overrightarrow{u_2}$, $M_1 \notin d_2$. Suy ra $d_1 // d_2$.

Chú ý: Hai đường thẳng d_1 và d_2 song song nên em không thể lấy tích có hướng của hai VTCP để tìm VTPT của mặt phẳng vì tích có hướng của hai vectơ cùng phương là *vectơ –không*.

Gọi $\vec{n}$ là một VTPT của mặt phẳng (α) thì $\vec{n}$ vuông góc với hai vectơ không cùng phương $\overrightarrow{u_1}=(3;-1;2)$ và $\overrightarrow{M_1M_2}=(11;2;11)$. Chọn $\vec{n}=[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{M_1M_2}]=(-15;-11;17)$.

Vì vậy phương trình của (α) là:

$$-15(x-1)-11(y+2)+17(z+1)=0\Leftrightarrow 15x+11y-17z-10=0.$$

→ **Đáp án D**

*** Nâng cao**

Câu 40: Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng chéo nhau d_1: $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{4}$ và $d_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}$. Gọi (α) là mặt phẳng song song và cách đều hai đường thẳng d_1, d_2. Phương trình của mặt phẳng (α) là

A. $4x-2z-1=0$.

B. $10x+8y+5z-\frac{15}{2}=0$.

C. $10x-8y+5z-\frac{15}{2}=0$.

D. $2x-z+\frac{1}{2}=0$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d_1 đi qua điểm M(0; −2; 0) và có VTCP $\overrightarrow{u_1}=(2;3;4)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm N(1; 2; 1) và có VTCP $\overrightarrow{u_2}=(1;1;2)$.

Vì mặt phẳng (α) song song với cả d_1, d_2 nên $[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]=(2;0;-1)$ là một VTPT của (α).

Mặt khác, do (α) cách đều d_1, d_2 nên trung điểm $I\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$ của MN thuộc (α).

Vậy phương trình của (α) là: $2\left(x-\frac{1}{2}\right)-\left(z-\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow 2x-z-\frac{1}{2}=0$. → **Đáp án A**

Bài toán 2.3. Xác định phương trình mặt phẳng sử dụng phương trình dạng đoạn chắn

BÀI TẬP MẪU

Cơ bản

Câu 41: Trong không gian Oxyz, cho (α) là mặt phẳng cắt các trục Ox, Oy, Oz theo thứ tự tại $A(-2;0;0),B(0;3;0),C(0;0;-1)$. Điểm nào trong các điểm sau **không** thuộc (α) ?

A. M(−2; 3; 1).

B. N(6; 6; −2).

C. P(4; 3; −2).

D. Q)(−2; 3; −1).

Hướng dẫn giải

Phương trình mặt phẳng (ABC) ở dạng đoạn chắn là: $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-1}=1$.

Với M(−2; 3; 1) em có $\frac{-2}{-2}+\frac{3}{3}+\frac{1}{-1}=1\rightarrow M\in(\alpha)\rightarrow$ Loại A.

Tương tự: N(6; 6; −2) và P(4; 3; −2) đều thuộc mặt phẳng (α) → loại B, C.

Với Q(−2; 3; −1) em có: $\frac{-2}{-2}+\frac{3}{3}+\frac{-1}{-1}=3\rightarrow Q\notin(\alpha)$

→ **Đáp án D**

♥ Vận dụng

Câu 42: Trong không gian Oxyz, cho điểm M(−1; 2; 3). Mặt phẳng (P) đi qua M cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C thỏa mãn M là trọng tâm của tam giác ABC. Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. 6x−3y−2z+6=0. **B.** −6x+3y+2z−18=0.

C. 6x−3y+2z=0. **D.** 6x−3y+2z+18=0.

Hướng dẫn giải

Giả sử tọa độ các giao điểm là: $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$.

M là trọng tâm tam giác ABC nên $M\left(\frac{a}{3};\frac{b}{3};\frac{c}{3}\right)$. Suy ra a=−3, b=6, c=9.

Phương trình dạng đoạn chắn của mặt phẳng (P) là

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1\Leftrightarrow -6x+3y+2z-18=0.$$

→ Đáp án B

*** Nâng cao**

Câu 43: Trong không gian Oxyz, cho điểm M(4; 3; 2). Mặt phẳng (P) đi qua M cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C thỏa mãn M là trực tâm của tam giác ABC. Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. 3x+4y+6z−4=0. **B.** 4x+3y+2z−29=0.

C. 3x+4y+2z−28=0. **D.** 2x+4y+3z−26=0.

Hướng dẫn giải

Chú ý: Tứ diện OABC có các góc đỉnh O là góc vuông được gọi là một tam diện vuông. Khi đó nó có một tính chất: Hình chiếu của đỉnh O lên mặt (ABC) trùng với trực tâm tam giác ABC. Do đó OM⊥(ABC).

Từ đó suy ra $\overrightarrow{OM}=(4;3;2)$ là một VTPT của mặt phẳng (P).

Do vậy (P) qua M(4; 3; 2) và nhận $\overrightarrow{OM}=(4;3;2)$ là VTPT, phương trình (P) là:

$$4(x-4)+3(y-3)+2(z-2)=0\Leftrightarrow 4x+3y+2x-29=0.$$

→ Đáp án B

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 44: Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(1;-1;0), B(3;4;1)$. Phương trình của mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng AB tại A là

A. 2x+5y+z+3=0 **B.** 2x+5y+z−7=0. **C.** 4x+3y+z−1=0. **D.** x−y+3=0.

Câu 45: Trong không gian Oxyz, cho điểm A(1; 2; −3) và đường thẳng d: $\begin{cases}x=-t\\y=2+t\\z=-1+2t\end{cases}$.

Phương trình mặt phẳng qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d là

A. −x+y+2z+3=0. **B.** x−2y+z+6=0.

C. x−y−2z−5=0. **D.** x−y+2z+7=0.

Câu 46: Trong không gian Oxyz, cho A(–3; 2; 1) và vectơ $\vec{n}=(1;2;3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng qua điểm A và nhận $\vec{n}$ làm VTPT?

A. –3x+2y+z–4=0. B. x+2y+3z–4=0.

C. x–2y+3z+4=0. D. 3x+6y+9z–10=0.

Câu 47: Trong không gian Oxyz, cho điểm M(1; 3; 5) và mặt phẳng (Q): x–4y+z–3=0. Gọi (P) là mặt phẳng qua điểm M và song song với mặt phẳng (Q). Khi đó phương trình của mặt phẳng (P) là

A. x+4y+z–18=0. B. x–4y+z+6=0.

C. x–3y+5z–18=0. D. –x+4y–z–4=0.

Câu 48: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(-1;3;-3), B(-1;1;1)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB?

A. –x+2y–z+8=0. B. –x+2y–5=0. C. –y+2z–5=0. D. y–2z–4=0.

Câu 49: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, (P) là mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1;-2;0)$, $B(3;-6;2), C(-1;2;5)$. Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. 2x–y–4=0. B. 2x+y=0. C. x–2y+z–5=0. D. 2y+z–2=0.

Câu 50: Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm D(1; 1; 3) và vuông góc với hai mặt phẳng (α): x–1=0, (β): y–z–2=0?

A. y–z+2=0. B. 3y+3z–8=0. C. y+z–4=0. D. y+z–2=0.

Câu 51: Trong không gian Oxyz, cho điểm M(–1; 2; –3). Gọi M_1, M_2, M_3 lần lượt là điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (Oxy), (Oxz), (Oyz). Phương trình mặt phẳng ($M_1M_2M_3$) là

A. 6x+2y+3z+6=0. B. 6x–2y+3z+6=0.

C. 6x–3y+2z+6=0. D. 6x–3y–2z+6=0.

Câu 52: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $B(1;2;0), C(0;2;0)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y+z+1=0$. Gọi (β) là mặt phẳng đi qua hai điểm B, C và vuông góc với (α). Phương trình của mặt phẳng (β) là

A. y–z+2=0. B. y+z–2=0. C. y+z+2=0. D. –y+z+2=0.

Câu 53: Trong không gian Oxyz, cho điểm M(1; –2; 0), đường thẳng d: $\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y+z+3=0$. Gọi (β) là mặt phẳng đi qua M, song song với đường thẳng d và vuông góc với (α). Phương trình của mặt phẳng (β) là

A. 7x+4y–13z+1=0. B. 7x+4y–13z–1=0.

C. 7x–4y–13z–15=0. D. 7x+4y–13z+12=0.

Câu 54: Trong không gian Oxyz, cho điểm A(–1; –1; 2), đường thẳng d: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{-1}$. Phương trình mặt phẳng đi qua điểm A và chứa đường thẳng d là

A. –x–y+2z–6=0. B. x–y–z–2=0.

C. –x+y+z–2=0. D. –x–y+2z=0.

Câu 55: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $E(1;3;-5), F(-2;-1;1)$. Phương trình của mặt phẳng (P) đi qua hai điểm E, F và song song với trục Ox là

A. $3y+2z+1=0$. B. $x+3y+2z=0$.

C. $-3x-2y+2=0$. D. $3y+2z-19=0$.

Câu 56: Trong không gian Oxyz, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $K(1;\ -1;\ 2)$ và chứa đường thẳng $d: \frac{x+1}{3}=y=\frac{z}{2}$?

A. $x+2y-5z+11=0$. B. $-x+2y+5z-11=0$.

C. $-4x+2y+5z-8=0$. D. $4x-2y-5z+4=0$.

Câu 57: Trong không gian Oxyz, mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau $d_1: \frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ và $d_2: \frac{x-4}{-2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z+9}{3}$. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $7x+y+5z-6=0$. B. $7x-y+5z+8=0$.

C. $7x-y+5z+13=0$. D. $7x+y+5z+6=0$.

Câu 58: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho (α) là mặt phẳng chứa hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-3}$ và $d_2: \begin{cases} x=2+2t \\ y=-1+t \\ z=1-3t \end{cases}$. Phương trình mặt phẳng (α) là

A. $x+4y+2z=0$. B. $3x-3y+z-10=0$. C. $x+y+z+1=0$. D. $x+4y+2z-6=0$.

Câu 59: Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1: \frac{x}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-4}$ và $d_2: \frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z-1}{1}$. Gọi (α) là mặt phẳng qua I(1; −1; 1) và song song với cả hai đường thẳng d_1, d_2. Phương trình của mặt phẳng (α) là

A. $3x-z-2=0$. B. $-3x+y+4=0$. C. $-3x+y+2=0$. D. $3x-y-1=0$.

Câu 60: Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1: \begin{cases} x=1-t \\ y=2t \\ z=3+3t \end{cases}$ và $d_2: \frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{-1}$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa d_1 và song song với d_2. Phương trình của mặt phẳng (α) là

A. $-11x-7y+z+2=0$. B. $11x+7y-z-6=0$. C. $-11x-7y+z+8=0$. D. $11x+7y-z-1=0$.

Câu 61: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=1-t \\ y=2t \\ z=-1+3t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x+2y+z-2=0$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng (P). Phương trình của mặt phẳng (α) là

A. $x-y+z+2=0$. B. $x+y+z=0$. C. $x-y-z-2=0$. D. $x-y+z=0$.

Câu 62: Trong không gian Oxyz, gọi (P) là mặt phẳng song song với mặt phẳng $(Q): x+y-2z+4=0$ đồng thời cắt hai trục Ox và Oz theo thứ tự tại M, N sao cho M có hoành độ dương và $MN=\sqrt{5}$. Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. $x+y-2z-2=0$. **B.** $x+y-2z=0$. **C.** $x+y-2z+2=0$. **D.** $2x+y-2z+2=0$.

Câu 63: Trong không gian Oxyz, cho (α) là mặt phẳng cắt các trục Ox, Oy, Oz theo thứ tự tại $A(3;0;0), B(0;-1;0), C(0;0;-1)$. Điểm nào trong các điểm sau **không** thuộc mặt phẳng (α)?

A. M(6; 0; 1). **B.** N(6; −5; 6). **C.** P(3; 7; −1). **D.** Q(0; −3; 2).

Câu 64: Trong không gian Oxyz, cho điểm M(1; 2; −3). Mặt phẳng (P) đi qua M cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C thỏa mãn M là trọng tâm của tam giác ABC. Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. $6x-3y-2z=0$. **B.** $-6x-3y+2z+18=0$.

C. $6x-3y+2z-3=0$. **D.** $6x-3y-2z-18=0$.

Câu 65: Trong không gian Oxyz, cho điểm M(5; 1; 2). Mặt phẳng (P) đi qua M cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C thỏa mãn M là trực tâm của tam giác ABC. Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. $x-3y-z=0$. **B.** $15x+3y+6z-69=0$.

C. $5x+y+2z-30=0$. **D.** $2x-6y-2z-26=0$.

Câu 66: Trong không gian Oxyz, cho điểm M(1; 2; 3). Mặt phẳng (P) thay đổi đi qua M cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ thỏa mãn thể tích V của tứ diện OABC nhỏ nhất. Giá trị biểu thức T=a+b+c và V bằng

A. V=27, T=18. **B.** V=81, T=18. **C.** V=27, T=14. **D.** V=162, T=14.

Câu 67: Trong không gian Oxyz, gọi (P) là mặt phẳng thay đổi cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ thỏa mãn $2bc+4ac-ab=abc$. Đặt T=abc. Khi khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) lớn nhất thì

A. $T=-\frac{9261}{4}$. **B.** $T=-\frac{9261}{8}$. **C.** $T=\frac{1331}{2}$. **D.** T=−1331.

Câu 68: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm M(1; 2; −3) và có một VTPT $\vec{n}=(1;-2;3)$?

A. $x-2y+3z-12=0$. **B.** $x-2y-3z+6=0$.

C. $x-2y+3z+12=0$. **D.** $x-2y-3z-6=0$.

Câu 69: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB?

A. $3x-y-z=0$. **B.** $3x+y+z-6=0$.

C. $3x-y-z+1=0$. **D.** $6x-2y-2z-1=0$.

Câu 70: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $M(3;-1;2)$ và mặt phẳng (α) có phương trình 3x−y+2z+4=0. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua M và song song với (α)?

A. $3x+y-2z-14=0$.
B. $3x-y+2z+6=0$.
C. $3x-y+2z-14=0$.
D. $3x-y-2z+6=0$.

Câu 71: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm M (3; –1; 1) và vuông góc với đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-3}{1}$?

A. 3x – 2y + z + 12 = 0.
B. 3x + 2y + z – 8 = 0.
C. 3x –2y + z –12 = 0.
D. x – 2y +3z + 3 = 0.

Câu 72: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=1+3\\y=-2+t,\\z=2\end{cases}$

$d_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{2}$ và mặt phẳng (P): 2x + 2y –3z = 0. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua giao điểm của d_1 và (P) đồng thời vuông góc với d_2

A. 2x – y +2z +22 = 0.
B. 2x – y + 2z + 13 = 0.
C. 2x – y + 2z – 13 = 0.
D. 2x + y +2z –22 = 0.

ĐÁP ÁN

44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
A	C	B	B	D	B	C	C	D	A
54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
C	A	D	B	A	B	C	D	A	C
64	65	66	67	68	69	70	71	72	
B	C	A	B	C	A	C	C	C	

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 44:

Mặt phẳng (P) qua A(1; –1; 0) và có VTPT $\overrightarrow{AB}=(2;5;1)$ nên phương trình (P):

$$2(x-1)+5(y+1)+z=0\Leftrightarrow 2x+5y+z+3=0$$

→ **Đáp án A**

Câu 45:

Đường thẳng d có VTCP là $\overrightarrow{u_d}=(-1;1;2)$. Vì mặt phẳng vuông góc với d nên $\overrightarrow{u_d}=(-1;1;2)$ cũng là một VTPT của mặt phẳng đó.

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d là

$$-(x-1)+(y-2)+2(z+3)=0\Leftrightarrow -x+y+2z+5=0.$$

→ **Đáp án C**

Phương pháp giải nhanh:

Vì $\overrightarrow{u_d}=(-1;1;2)$ là VTPT của mặt phẳng nên loại B, D.

Với hai đáp án A, C em thay tọa độ điểm M vào từng phương trình sẽ được M thuộc mặt phẳng: $x-y-2z-5=0$ → Chọn C.

Câu 46:

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm A và nhận $\vec{n}=(1;2;3)$ là:

$(x+3)+2(y-2)+3(z-1)=0 \Leftrightarrow x+2y+3z-4=0$

→ **Đáp án B**

Câu 47:

(P)//(Q) nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng $x-4y+z+D=0$ $(D\neq -3)$ → Loại A, C.

Thử M với hai đáp án còn lại:

Đáp án B: $1-4.3+5+6=0$ → Chọn B.

Đáp án D: $-1+4.3-5-4\neq 0$ → Loại D.

→ **Đáp án B**

Câu 48:

$I(-1;2;-1)$ là trung điểm của AB, $\overrightarrow{AB}=(0;-2;4)$.

Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn thẳng AB là:

$0(x+1)-2(y-2)+4(z+1)=0 \Leftrightarrow -y+2z+4=0.$

→ **Đáp án D**

Câu 49:

Mặt phẳng (P) chứa giá của hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ nên vectơ $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]$ cùng phương với VTPT của (P).

Em có $\overrightarrow{AB}=(2;-4;2),\overrightarrow{AC}=(-2;4;5)$. Từ đó tính được $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=(-28;-14;0)$.

Chọn vectơ $\vec{n}=(2;1;0)$ là VTPT của (P). Phương trình của mặt phẳng (P) là:

$$2(x-1)+1(y+2)+0(z-0)=0 \Leftrightarrow 2x+y=0.$$

→ **Đáp án B**

Câu 50:

(α) có VTPT $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;0;0)$, (β) có VTPT $\overrightarrow{n_\beta}=(0;1;-1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng thỏa mãn điều kiện bài toán và $\overrightarrow{n_P}$ là VTPT của mặt phẳng (P).

Do (P) vuông góc với cả (α) và (β) nên chọn $\overrightarrow{n_P}=[\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta}]=(0;1;1)$

Phương trình mặt phẳng (P) là: $1(y-1)+1(z-3)=0 \Leftrightarrow y+z-4=0$

→ **Đáp án C**

Câu 51:

Em có $M_1(-1;2;3),M_2(-1;-2;-3),M_3(1;2;-3)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2}=(0;-4;-6),\overrightarrow{M_1M_3}=(2;0;-6),[\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_3}]=(24;-12;8).$

Mặt phẳng $(M_1M_2M_3)$ đi qua điểm $M_1(-1;2;3)$ có VTPT $\vec{n}=(6;-3;2)$

Phương trình mặt phẳng $(M_1M_2M_3)$:

$$6(x+1)-3(y-2)+2(z-3)=0 \Leftrightarrow 6x-3y+2z+6=0.$$

→ **Đáp án C**

Câu 52:

(α) có VTPT $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;1;1)$, $\overrightarrow{BC}=(-1;0;0)$.

Gọi $\overrightarrow{n_\beta}$ là VTPT của mặt phẳng (β).

Do (β) vuông góc với (α) và chứa B, C nên chọn $\overrightarrow{n_\beta}=[\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{BC}]=(0;-1;1)$.

Phương trình mặt phẳng (β) là: $-1(y-2)+1(z-0)=0\Leftrightarrow -y+z+2=0$ → **Đáp án D**

Câu 53:

(α) có VTPT $\overrightarrow{n_\alpha}=(3;-2;1)$.

Đường thẳng d đi qua N(−1; 2; 1), có VTCP $\vec{u}=(-1;5;1)$.

Gọi $\overrightarrow{n_\beta}$ là VTPT của mặt phẳng (β).

Do (β) vuông góc với (α) và song song với d nên chọn $\overrightarrow{n_\beta}=[\vec{u},\overrightarrow{n_\alpha}]=(7;4;-13)$.

Phương trình mặt phẳng (β) là: $7(x-1)+4(y+2)-13(z-0)=0\Leftrightarrow 7x+4y-13z+1=0$.

Do N(−1; 2; 1)$\notin$(β) nên mặt phẳng (β): 7x+4y−13z+1=0 thỏa mãn điều kiện bài toán.

→ **Đáp án A**

Câu 54:

Đường thẳng d đi qua B(−1; 1; 0) và có VTCP $\vec{u}=(2;3;-1)$; $\overrightarrow{AB}=(0;2;-2)$.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và chứa đường thẳng d nên VTPT $\vec{n}$ của mặt phẳng (P) vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}=(2;3;-1)$ và $\overrightarrow{AB}=(0;2;-2)$.

Chọn $\vec{n}=\frac{1}{4}\left[\vec{n},\overrightarrow{AB}\right]=(-1;1;1)$

→ Phương trình mặt phẳng (P): $-(x+1)+(y+1)+(z-2)=0\Leftrightarrow -x+y+z-2=0$.

→ **Đáp án C**

Câu 55:

Trục Ox có VTCP $\vec{i}=(1;0;0)$, $\overrightarrow{EF}=(-3;-4;6)$, $[\overrightarrow{EF},\vec{i}]=(0;6;4)$.

Vì (P) đi qua hai điểm E, F và song song với trục Ox nên mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=\frac{1}{2}[\overrightarrow{EF},\vec{i}]=(0;3;2)$.

Phương trình của mặt phẳng (P) là: 3(y−3)+2(z+5)=0⇔3y+2z+1=0.

→ **Đáp án A**

Câu 56:

Đường thẳng d qua J(−1; 0; 0) và có VTCP $\vec{u}=(3;1;2)$.

$\overrightarrow{KJ}=(-2;1;-2)\Rightarrow[\overrightarrow{KJ},\vec{u}]=(4;-2;-5)$.

Mặt phẳng cần tìm qua K(1; −1; 2) và có VTPT $\vec{n}=(4;-2;-5)$ có phương trình:

$$4(x-1)-2(y+1)-5(z-2)=0\Leftrightarrow 4x-2y-5z+4=0.$$

→ **Đáp án D**

Câu 57:

Đường thẳng d_1 đi qua $M_1(-1; 1; 0)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_1}=(1;2;-1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua $M_2(4; 5; -9)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_2}=(-2;1;3)$.

Gọi $\vec{n}$ là một VTPT của mặt phẳng (P) thì $\vec{n}$ vuông góc với hai vectơ không cùng phương $\overrightarrow{u_1}=(1;2;-1)$ và $\overrightarrow{u_2}=(-2;1;3)$. Chọn $\vec{n}=[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]=(7;-1;5)$.

Vì vậy phương trình của (P) là: $7(x+1)-(y-1)+5(z-0)=0\Leftrightarrow 7x-y+5z+8=0$.

→ **Đáp án B**

Câu 58:

Đường thẳng d_1 đi qua $M_1(0; 1; -2)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_1}=(2;1;-3)$.

Đường thẳng d_2 đi qua $M_2(2; -1; 1)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_2}=(2;1;-3)$.

Như vậy $\overrightarrow{u_1}=\overrightarrow{u_2}$, $M_1\notin d_2$.

Suy ra $d_1//d_2$.

Gọi $\vec{n}$ là một VTPT của mặt phẳng (α) thì $\vec{n}$ vuông góc với hai vectơ không cùng phương $\overrightarrow{u_1}=(2;1;-3)$ và $\overrightarrow{M_1M_2}=(2;-2;3)$. Chọn $\vec{n}=\frac{-1}{3}[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{M_1M_2}]$

Vì vậy phương trình của (α) là: $1(x-0)+4(y-1)+2(z+2)=0\Leftrightarrow x+4y+2z=0$.

→ **Đáp án A**

Câu 59:

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M(0; -2; 0)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_1}=(1;3;-4)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $N(1; 2; 1)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_2}=(-2;-6;1)$.

Vì (α) song song với cả d_1, d_2 nên $\vec{n}=\frac{1}{7}[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]=(-3;1;0)$ là một VTPT của (α).

Vậy phương trình của mặt phẳng (α) là: $-3(x-1)+(y+1)+0(z-1)=0\Leftrightarrow -3x+y+4=0$.

→ **Đáp án B**

Câu 60:

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M(1; 0; 3)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_1}=(-1;2;3)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $N(-1; 2; 1)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_2}=(-2;3;-1)$.

Mặt phẳng (α) qua M và có VTPT $\vec{n}=[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]=(-11;-7;1)$.

Vậy phương trình của mặt phẳng (α) là:

$$-11(x-1)-7(y-0)+(z-3)=0\Leftrightarrow -11x-7y+z+8=0.$$

→ **Đáp án C**

Câu 61:

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1; 0; -1)$ và có VTCP $\vec{u}=(-1;2;3)$.

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(1;2;1)$.

Mặt phẳng (α) qua M và có VTPT $\overrightarrow{n_1}=\frac{-1}{4}[\vec{u},\vec{n}]=(1;-1;1)$.

Vậy phương trình của mặt phẳng (α) là: $(x-1)-(y-0)+(z+1)=0\Leftrightarrow x-y+z=0$.

→ **Đáp án D**

Câu 62:

Vì (P)//(Q) nên phương trình mặt phẳng (P) là x+y−2z+D=0 (D ≠ 4)

Khi đó giao điểm của (P) với các trục Ox và Oz là M(−D; 0; 0), $N\left(0;0;\frac{D}{2}\right)$, D < 0

$MN=\sqrt{5}\Leftrightarrow\sqrt{D^2+\left(\frac{D}{2}\right)^2}=\sqrt{5}\Leftrightarrow D=\pm 2$. Vì D < 0 nên D = −2.

→ **Đáp án A**

Câu 63:

Phương trình mặt phẳng (ABC) ở dạng đoạn chắn là: $\frac{x}{3}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{-1}=1$.

Với M(6; 0; 2) em có $\frac{6}{3}+\frac{0}{-1}+\frac{1}{-1}=1\rightarrow M\in(\alpha)\rightarrow$ Loại A.

Tương tự: N(6; −5; 6) và Q(0; −3; 2) đều thuộc mặt phẳng (α) → loại B, D.

Với P(3; 7; −1) em có: $\frac{3}{3}+\frac{7}{-1}+\frac{-1}{-1}\neq 1\rightarrow P\notin(\alpha)$.

→ **Đáp án C**

Câu 64:

Giả sử tọa độ các giao điểm là: $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$.

M là trọng tâm tam giác ABC nên $M\left(\frac{a}{3};\frac{b}{3};\frac{c}{3}\right)$. Suy ra a=3, b=6, c=−9.

Phương trình của mặt phẳng (P) là: $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{-9}=1\Leftrightarrow 6x+3y-2z-18=0$.

→ **Đáp án B**

Câu 65:

Tam diện vuông OABC có chân đường vuông góc kẻ từ O đến mặt phẳng (ABC) trùng với trực tâm tam giác ABC. Suy ra $\overrightarrow{OM}=(5;1;2)$ là một VTPT của mặt phẳng (P).

Do vậy (P) qua M(5; 1; 2) và nhận VTPT $\overrightarrow{OM}=(5;1;2)$, phương trình (P) là:

$$5(x-5)+(y-1)+2(z-2)=0\Leftrightarrow 5x+y+2z-30=0.$$

→ **Đáp án C**

Câu 66:

Phương trình mặt phẳng (P): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Vì M∈(P) nên $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$.

Em hãy chú ý: A, B, C thuộc các tia Ox, Oy, Oz nên a, b, c đều nhận các giá trị dương.

Thể tích tứ diện OABC: $V=\frac{1}{6}OA.OB.OC=\frac{1}{6}|abc|=\frac{1}{6}abc$.

Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số $\frac{1}{a},\frac{2}{b},\frac{3}{c}$ em có: $1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}}\Rightarrow abc\geq 27.6$

Suy ra $V\geq 27$, $V_{min}=27\Leftrightarrow\frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow a=3,b=6,c=9$

→ **Đáp án A**

Câu 67:

Phương trình mặt phẳng (P): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Đề bài cho $2bc+4ac-ab=abc\Leftrightarrow\frac{2}{a}+\frac{4}{b}+\frac{-1}{c}=1$.

Như vậy (P) luôn đi qua điểm M(2; 4; −1) không đổi.

Gọi H là hình chiếu của O lên (P). Khi đó $OH\leq OM\Rightarrow OH_{max}=OM$.

Em có hệ điều kiện

$$\begin{cases}OM\perp AB\\OM\perp AC\\2bc+4ac-ab=abc\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{AB}\\\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{AC}\\2bc+4ac-ab=abc\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a-4b=0\\-2a-c=0\\2bc+4ac-ab=abc\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{21}{2}\\b=\frac{21}{4}\\c=-21\end{cases}$$

→ **Đáp án B**

Câu 68:

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm M(1; 2; −3) và có một VTPT $\vec{n}=(1;-2;3)$ là:

$1(x-1)-2(y-2)+3(z+3)=0\Leftrightarrow x-2y+3z+12=0$. → **Đáp án C**

Câu 69:

Gọi (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB. Tọa độ trung điểm I của AB là:

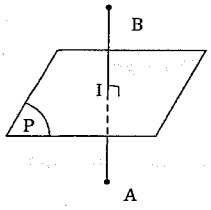
$x_I=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{4-2}{2}=1;\ y_I=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{0+2}{2}=1;\ z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{1+3}{2}=2$

$\Rightarrow I(1;1;2)$

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là mặt phẳng đi qua I và nhận $\overrightarrow{AB}=(-6;2;2)$ làm VTPT.

$\Rightarrow (P):-6(x-1)+2(y-1)+2(z-2)=0$ hay $3x-y-z=0$.

→ **Đáp án A**



Câu 70:

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm có VTPT $\vec{n_P}$

Vì (P)//(α) nên $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{n_\alpha}=(3;-1;2)$

Vậy phương trình mặt phẳng (P) qua $M(3;-1;2)$ và có VTPT $\overrightarrow{n_P}=(3;-1;2)$ là

$3(x-3)-(y+1)+2(z-2)=0$ hay $3x-y+2z-14=0$ → **Đáp án C**

Câu 71:

$\Delta:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$ có VTCP là $\vec{u}=(3;-2;1)$

Mặt phẳng cần tìm đi qua M và vuông góc với đường thẳng Δ nên nhận $\vec{u}=(3;-2;1)$ làm VTPT. Phương trình mặt phẳng là:

$3(x-3)-2(y+1)+1(z-1)=0 \Leftrightarrow 3x-2y+z-12=0.$

→ **Đáp án C**

Câu 72:

Gọi A là giao điểm của d_1 và (P) nên tọa độ của A thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x=1+3t \\ y=-2+t \\ z=2 \\ 2x+2y-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+3t \\ y=-2+t \\ z=2 \\ 2(1+3t)+2(-2+t)-3.2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ x=4 \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow A(4;-1;2)$$

Mặt phẳng cần tìm đi qua A(4; −1; 2) vuông góc với d_2 nên nhận VTCP của d_2 là $\vec{u}(2;-1;2)$ làm VTPT.

Phương trình mặt phẳng là: $2(x-4)-(y+1)+2(z-2)=0 \Rightarrow 2x-y+2z-13=0.$

→ **Đáp án C**

Dạng 3: Phương trình đường thẳng

Phương pháp giải:

Bước 1: Xác định VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$ của đường thẳng.

Bước 2: Xác định tọa độ một điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc đường thẳng.

Bước 3: Viết phương trình đường thẳng qua điểm M và có một VTCP $\vec{u}$

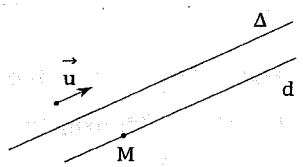
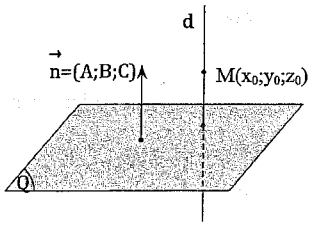
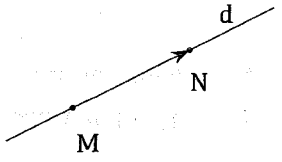
$$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

Hoặc: $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ (trong trường hợp abc≠0)

Bài toán 3.1. Xác định phương trình đường thẳng biết một điểm đi qua và VTCP

Đây là dạng bài tập cơ bản của bài toán xác định phương trình đường thẳng.

Với bài toán này em cần xác định được VTCP của đường thẳng dựa vào giả thiết của bài ra. Dưới đây là cách xác định VTCP của đường thẳng trong một số trường hợp thường gặp

Giả thiết	VTCP của d	Mô tả
✓ $\begin{cases} d \text{ qua } M \\ d // \Delta \end{cases}$ ✓ Δ có VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$	$\vec{u}=(a;b;c)$	
✓ $\begin{cases} d \text{ qua } M \\ d \perp (Q) \end{cases}$ ✓ (Q) có VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$	$\vec{n}=(A;B;C)$	
✓ $\begin{cases} d \text{ qua } M \\ d \text{ qua } N \end{cases}$	$\vec{u}=\overrightarrow{MN}$	

BÀI TẬP MẪU

Cơ bản

Câu 73: Trong không gian Oxyz, cho điểm A(1; –3; 2) và vectơ $\vec{u}=(3;2;-1)$. Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua A và nhận $\vec{u}$ là một VTCP là

A. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+1}{2}$.

B. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$.

C. $\begin{cases} x=1+3t \\ y=-3+2t \\ z=2-t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x=3+1t \\ y=2-3t \\ z=-1+2t \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Với bài tập này em chỉ cần nhớ chính xác công thức và thay số vào đúng vị trí là em có ngay đáp án đúng.

$$d:\begin{cases} \text{qua } M(x_0;y_0;z_0) \\ \text{có 1 VTCP } \vec{u}=(a;b;c) \end{cases} \xrightarrow{\text{PTTS}} \begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases} (t\in\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\boxed{x_0}+\boxed{at} \\ y=\boxed{y_0}+\boxed{bt} \\ z=\boxed{z_0}+\boxed{ct} \end{cases} (t\in\mathbb{R})$$

$$M(x_0;y_0;z_0) \quad \vec{u}=(a;b;c)$$

Phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases} x=1+3t \\ y=-3+2t \\ z=2-t \end{cases} \left(t\in\mathbb{R}\right)$

→ **Đáp án C**

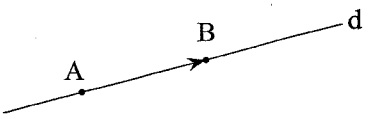
☞ **Chú ý:** Sai lầm hay mắc phải là thay nhầm vị trí của hai bộ số $(x_0; y_0; z_0)$ và (a; b; c).

Câu 74: Trong không gian Oxyz, cho d là đường thẳng đi qua hai điểm $A(0;2;5), B(1;4;-2)$. Phương trình của đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=3+2t. \\ z=3-7t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=1 \\ y=2+2t \\ z=-7+5t \end{cases}.$ **C.** $\begin{cases} x=t \\ y=2+6t. \\ z=5+3t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=t \\ y=2+2t. \\ z=5-7t \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Vì A, B thuộc đường thẳng d nên $\overrightarrow{AB}=(1;2;-7)$ là một VTCP của đường thẳng d.



Phương trình của d là: $\begin{cases} x=t \\ y=2+2t \\ z=5-7t \end{cases}$

→ **Đáp án D**

Câu 75: Trong không gian Oxyz cho điểm I(1; 4; -3) và đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z+3}{1}$. Phương trình đường thẳng d đi qua I và song song với Δ là

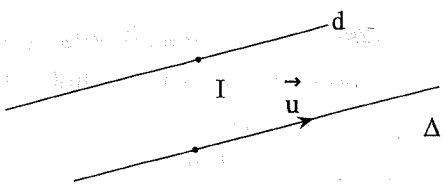
A. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-1}{3}.$ **B.** $\frac{x+1}{2}=\frac{y+4}{4}=\frac{z-3}{1}.$

C. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{4}=\frac{z+3}{1}.$ **D.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z+3}{1}.$

Hướng dẫn giải

Đường thẳng Δ có VTCP $\vec{u}=(2;4;1)$

Đường thẳng d song song với Δ nên d cũng nhận vectơ $\vec{u}=(2;4;1)$ làm một VTCP.



Mặt khác I(1; 4; -3) thuộc d nên đường thẳng d có phương trình:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{4}=\frac{z+3}{1}.$$

→ **Đáp án C**

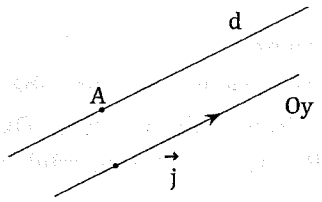
Câu 76: Trong không gian Oxyz cho điểm A(5;-1;3). Phương trình đường thẳng d đi qua A và song song với trục Oy là

A. $\begin{cases} x=5t \\ y=1-t. \\ z=3t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=5 \\ y=1-t. \\ z=3 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=5+t \\ y=-1 \\ z=3+t \end{cases}.$ **D.** $\begin{cases} x=5 \\ y=-1+t. \\ z=3 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Trục Oy có VTCP $\vec{j}=(0;1;0)$. Vì d//Oy nên d nhận vectơ $\vec{j}=(0;1;0)$ làm một VTCP.

Mặt khác A(5;−1;3) ∈ d nên đường thẳng d có phương trình: $\begin{cases}x=5\\y=-1+t.\\z=3\end{cases}$



→ **Đáp án D**

Câu 77: Trong không gian Oxyz, gọi d là đường thẳng đi qua điểm A(2; 1; 5) và vuông góc với mặt phẳng (P): x+y−2z+3=0. Phương trình đường thẳng d là

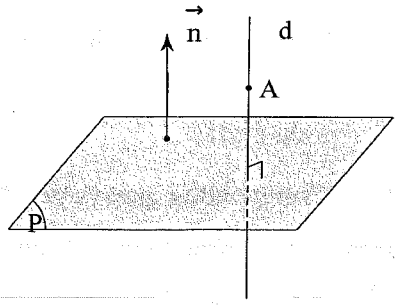
A. $\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\\z=5+2t\end{cases}$. B. $\begin{cases}x=-2-t\\y=-1-t\\z=-5+2t\end{cases}$. C. $\begin{cases}x=2+t\\y=1+t\\z=5-2t\end{cases}$. D. $\begin{cases}x=1-t\\y=2-t\\z=3+2t\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(1;1;-2)$.

Vì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) nên $\vec{n}=(1;1;-2)$ là một VTCP của d.

Phương trình đường thẳng d là: $\begin{cases}x=2+t\\y=1+t\\z=5-2t\end{cases}$.

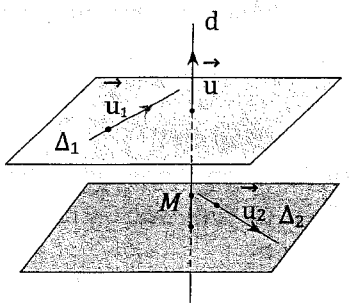


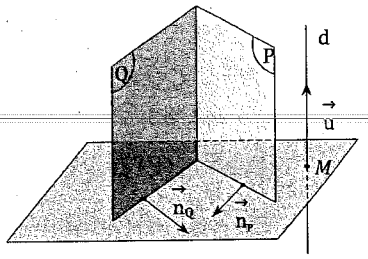
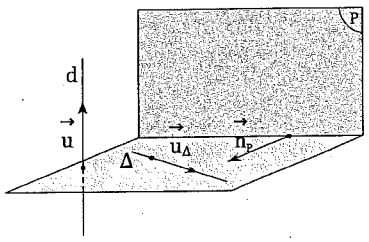
→ **Đáp án C**

Bài toán 3.2. Xác định phương trình đường thẳng biết một điểm đi qua và cặp vectơ vuông góc

Trong bài toán này, phương pháp xác định VTCP của đường thẳng dựa vào tính chất của tích có hướng của hai vectơ. Cụ thể: Nếu đường thẳng d *vuông góc* với giá của hai vectơ không cùng phương $\vec{u_1},\vec{u_2}$ thì vectơ $\vec{u}=[\vec{u_1},\vec{u_2}]$ là một VTCP của d.

Dưới đây là cách xác định VTCP của đường thẳng trong một vài trường hợp em thường gặp.

Giả thiết	VTCP của d	Mô tả
✓ $\begin{cases}\text{d qua M}\\d\perp\Delta_1\\d\perp\Delta_2\end{cases}$ ✓ Δ_1 có VTCP $\vec{u_1}$ ✓ Δ_2 có VTCP $\vec{u_2}$	$\vec{u}=[\vec{u_1},\vec{u_2}]$	

✓ $\begin{cases} d \text{ qua } M \\ d//(P) \\ d//(Q) \end{cases}$ ✓ (P) có VTPT $\overrightarrow{n_P}$ ✓ (Q) có VTPT $\overrightarrow{n_Q}$ **Chú ý:** Giả thiết d//(P), d//(Q) có thể được thay thế bởi d⊂(P), d⊂(Q).	$\vec{u} = [\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}]$	
✓ $\begin{cases} d \text{ qua } M \\ d//(P) \\ d \perp \Delta \end{cases}$ ✓ Δ có VTCP $\overrightarrow{u_\Delta}$ ✓ (P) có VTPT $\overrightarrow{n_P}$ **Chú ý:** Giả thiết d//(P) có thể được thay thế bởi d⊂(P).	$\vec{u} = [\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{n_P}]$	

BÀI TẬP MẪU

Cơ bản

Câu 78: Cho điểm M(4; −1; 1) và hai đường thẳng d_1: $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{-2}$, d_2: $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-2t. \\ z=1 \end{cases}$

Phương trình đường thẳng Δ qua điểm M và vuông góc với cả hai đường thẳng d_1, d_2 là

A. $\frac{x-4}{-4}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-7}$.

B. $\frac{x}{-4}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z+6}{-7}$.

C. $\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{2}$.

D. $\frac{x+4}{4}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-3}{7}$.

Hướng dẫn giải

Hai đường thẳng d_1, d_2 có VTCP theo thứ tự là $\overrightarrow{u_1}=(3;1;-2), \overrightarrow{u_2}=(1;-2;0)$

Vì $\Delta \perp d_1$ và $\Delta \perp d_2$ nên $\vec{u} = [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = (-4;-2;-7)$ là một VTCP của Δ → Loại A, C.

Thay M(4; −1; 1) vào phương trình đường thẳng trong các đáp án B, D:

Đáp án B: $\frac{4}{-4}=\frac{-1+3}{-2}=\frac{1+6}{-7}$ (thỏa mãn).

Đáp án D: $\frac{4+4}{4}=\frac{-1+5}{2}\neq\frac{1-3}{7}$ (loại) → **Đáp án B**

Câu 79: Trong không gian Oxyz, cho điểm A(1; 1; −2) và hai mặt phẳng (P): 3x−y+1=0, (Q): x−2z−3=0. Phương trình đường thẳng d qua điểm A đồng thời song song với cả hai mặt phẳng (P), (Q) là

A. $\begin{cases}x=2+t\\y=-6+t.\\z=1-2t\end{cases}$ B. $\begin{cases}x=1+2t\\y=1+6t.\\z=-2+t\end{cases}$ C. $\begin{cases}x=1+2t\\y=1-6t.\\z=-2+t\end{cases}$ D. $\begin{cases}x=2+t\\y=6+t.\\z=1-2t\end{cases}$

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (P) có VTPT $\overrightarrow{n_P}=(3;-1;0)$, mặt phẳng (Q) có VTPT $\overrightarrow{n_Q}=(1;0;-2)$.

$\Rightarrow [\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}]=(2;6;1)$.

Đường thẳng d cần tìm có một VTCP là: $\vec{u}=[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}]=(2;6;1)$.

Vì A(1; 1; −2) ∈d nên phương trình của đường thẳng d là: $\begin{cases}x=1+2t\\y=1+6t.\\z=-2+t\end{cases}$ → **Đáp án B**

♥ Vận dụng

Câu 80: Trong không gian Oxyz, cho điểm M(2; −1; 1), mặt phẳng (P): x+z−2=0 và đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-2}$. Đường thẳng nào dưới đây qua điểm M, song song với mặt phẳng (P) đồng thời vuông góc với đường thẳng Δ?

A. $\begin{cases}x=-1-t\\y=8+3t.\\z=4+t\end{cases}$ B. $\begin{cases}x=2+t\\y=-1-t.\\z=1-t\end{cases}$ C. $\begin{cases}x=2+t\\y=-1+t.\\z=1+t\end{cases}$ D. $\begin{cases}x=2+3t\\y=-9t\\z=-3t\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng Δ có VTCP là $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;1;-2)$, mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(1;0;1)$.

Đường thẳng cần tìm có một VTCP là: $\vec{u}=[\overrightarrow{u_\Delta},\vec{n}]=(1;-3;-1)$ → loại B, C.

Thay M(2; −1; 1) vào phương trình đường thẳng trong các đáp án A, D:

Đáp án A: $\begin{cases}2=-1-t\\-1=8+3t\\1=4+t\end{cases}\Leftrightarrow t=-3$ (thỏa mãn).

Đáp án D: $\begin{cases}2=2+3t\\-1=-9t\\1=-3t\end{cases}$ (vô nghiệm).

→ **Đáp án A**

*** Nâng cao**

Câu 81: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P): x−2y+z−2=0 và đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=4+3t\\z=0\end{cases}$. Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời vuông góc với đường thẳng Δ tại giao điểm I của (P) và Δ. Phương trình đường thẳng d là

A. $\begin{cases}x=-2-3t\\y=-2+t\\z=0\end{cases}$. B. $\begin{cases}x=1+t\\y=1+t.\\z=3+t\end{cases}$ C. $\begin{cases}x=1-3t\\y=-3+t.\\z=5+5t\end{cases}$ D. $\begin{cases}x=1-3t\\y=-3+t\\z=-5+5t\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng Δ có VTCP là $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;3;0)$.

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(1;-2;1)$.

Đường thẳng cần tìm có một VTCP là: $\vec{u}=[\overrightarrow{u_\Delta},\vec{n}]=(3;-1;-5)\rightarrow$ loại A, B.

Tọa độ giao điểm I của đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases}x=t\\y=4+3t\\z=0\\x-2y+z-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\y=4+3t\\z=0\\t-2(4+3t)-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=-2\\z=0\\t=-2\end{cases}\Rightarrow I(-2;-2;0)$$

Thay tọa độ I(-2; -2; 0) vào phương trình đường thẳng trong các đáp án C, D.

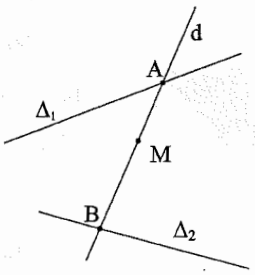
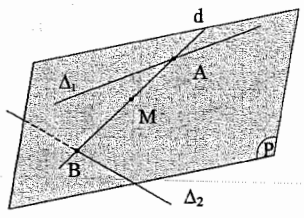
Đáp án C: $\begin{cases}-2=1-3t\\-2=-3+t\\0=5+5t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\t=-1\end{cases}$ (loại); Đáp án D: $\begin{cases}-2=1-3t\\-2=-3+t\\0=-5+5t\end{cases}\Leftrightarrow t=1$ (thỏa mãn)

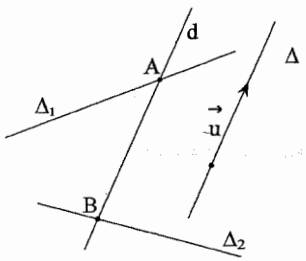
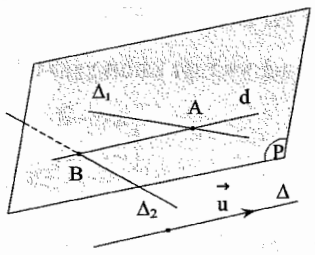
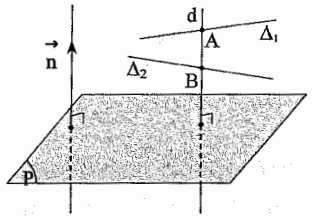
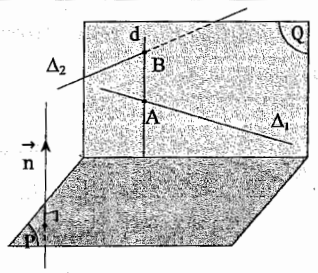
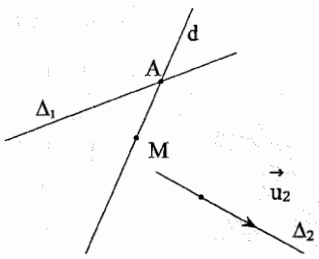
→ Đáp án D

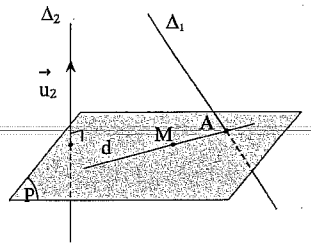
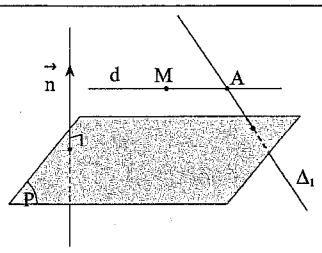
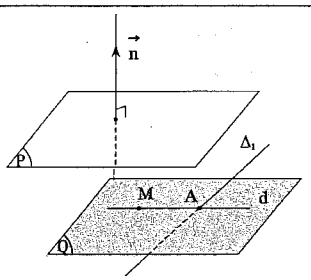
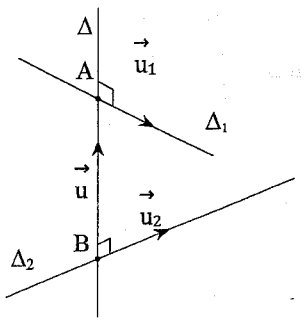
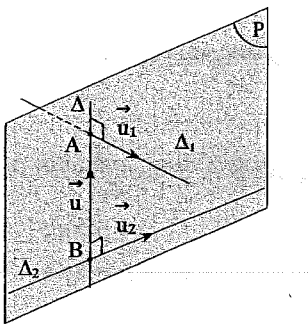
Bài toán 3. 3. Xác định phương trình đường thẳng có liên quan đến giao điểm

Trong bài toán này nếu em áp dụng đơn thuần phương pháp giải chung thì sẽ gặp khó khăn và mất thời gian.

Sau đây là một số trường hợp điển hình mà em sẽ gặp khi làm bài tập, hãy nghiên cứu kĩ phương pháp và linh hoạt vận dụng cho các bài tương tự em nhé!

Bài toán	Minh họa	Phương pháp
Xác định phương trình đường thẳng d biết: $\begin{cases}\text{d qua M}\\\text{d cắt }\Delta_1\text{ và }\Delta_2\end{cases}$		Cách 1 ▪ B1: Tham số hóa giao điểm A, B. ▪ B2: Sử dụng điều kiện cùng phương để tìm tọa độ điểm A: A, B, M thẳng hàng $\rightarrow\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{BM}$ ▪ B3: Viết phương trình đường thẳng qua M và có VTCP $\overrightarrow{AM}$
		Cách 2 ▪ B1: Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ_1 và qua M. ▪ B2: Tìm tọa độ $B=(P)\cap\Delta_2$. ▪ B3: Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm M và B.

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Xác định phương trình đường thẳng d biết:
$\begin{cases} d \,//\, \Delta \\ d \text{ cắt } \Delta_1 \text{ và } \Delta_2 \end{cases}$</td>
<td> 
</td>
<td><u>Cách 1</u>
▪ <u>B1</u>: Tham số hóa giao điểm A, B.
▪ <u>B2</u>: Sử dụng điều kiện cùng phương để tìm tọa độ điểm A:
$d // \Delta \to \overrightarrow{AB} = k\vec{u}$
▪ <u>B3</u>: Viết phương trình đường thẳng qua A và có VTCP $\vec{u}$</td>
</tr>
<tr>
<td> 
</td>
<td><u>Cách 2</u>
▪ <u>B1</u>: Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ_1 và song song (hoặc chứa) Δ.
▪ <u>B2</u>: Tìm tọa độ $B = (P) \cap \Delta_2$.
<u>B3</u>: Viết phương trình đường thẳng qua điểm B và song song với Δ.</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Xác định phương trình đường thẳng d biết:
$\begin{cases} d \perp (P) \\ d \text{ cắt } \Delta_1 \text{ và } \Delta_2 \end{cases}$</td>
<td> 
</td>
<td><u>Cách 1</u>
▪ <u>B1</u>: Tham số hóa giao điểm A, B.
▪ <u>B2</u>: Sử dụng điều kiện cùng phương để tìm tọa độ điểm A:
$d \perp (P) \to \overrightarrow{AB} = k\vec{n}$
▪ <u>B3</u>: Viết phương trình đường thẳng qua A và có VTCP $\vec{n}$.</td>
</tr>
<tr>
<td> 
</td>
<td><u>Cách 2</u>
▪ <u>B1</u>: Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa Δ_1 và vuông góc với (P).
▪ <u>B2</u>: Tìm tọa độ $B = (Q) \cap \Delta_2$.
▪ <u>B3</u>: Viết phương trình đường thẳng qua điểm B và vuông góc với (P).</td>
</tr>
<tr>
<td>Xác định phương trình đường thẳng d biết:
$\begin{cases} d \text{ qua } M \\ d \text{ cắt } \Delta_1 \\ d \perp \Delta_2 \end{cases}$</td>
<td> 
</td>
<td><u>Cách 1</u>
▪ <u>B1</u>: Tham số hóa giao điểm A.
▪ <u>B2</u>: Sử dụng điều kiện vuông góc để tìm tọa độ điểm A:
$d \perp \Delta_2 \to \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u_2} = 0$
▪ <u>B3</u>: Viết phương trình đường thẳng qua A, M.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td> 
</td>
<td>Cách 2
▪ B1: Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M vuông góc với Δ_2.
▪ B2: Tìm tọa độ $A=(P)\cap\Delta_1$.
▪ B3: Viết phương trình đường thẳng qua điểm A, M.</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Xác định phương trình đường thẳng d biết:
$\begin{cases}\text{d qua M}\\ \text{d cắt }\Delta_1\\ \text{d}//(P)\end{cases}$</td>
<td> 
</td>
<td>Cách 1
▪ B1: Tham số hóa giao điểm A.
▪ B2: Sử dụng điều kiện song song để tìm tọa độ điểm A:
$d//(P)\rightarrow\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$
▪ B3: Viết phương trình đường thẳng qua A, M.</td>
</tr>
<tr>
<td> 
</td>
<td>Cách 2
▪ B1: Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua M song song với mặt phẳng (P).
▪ B2: Tìm tọa độ $A=(Q)\cap\Delta_1$.
B3: Viết phương trình đường thẳng qua điểm A, M.</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Xác định phương trình đường thẳng d biết:
✓ d là đường vuông góc chung của Δ_1, Δ_2.
✓ Δ_1 có VTCP $\overrightarrow{u_1}$
✓ Δ_1 có VTCP $\overrightarrow{u_2}$</td>
<td> 
</td>
<td>Cách 1
▪ B1: Tham số hóa giao điểm A, B
▪ B2: Tìm tọa độ $\vec{u}=[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]$ là VTCP của d
▪ B3: Sử dụng điều kiện cùng phương để tìm tọa độ điểm A, B:
$\overrightarrow{AB}=k\vec{u}$
▪ B4: Viết phương trình đường thẳng qua A, có VTCP $\vec{u}$</td>
</tr>
<tr>
<td> 
</td>
<td>Cách 2
▪ B1: Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ_2 có cặp VTCP $\overrightarrow{u_2}$ và $\vec{u}=[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]$
▪ B2: Tìm tọa độ $A=(P)\cap\Delta_1$.
B3: Viết phương trình đường thẳng qua điểm A có VTCP $\vec{u}$.</td>
</tr>
</table>

BÀI TẬP MẪU

Cơ bản

Câu 82: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1:\begin{cases}x=2+t\\y=-1+t\\z=1+t\end{cases}$, $d_2:\begin{cases}x=2+2t'\\y=4-t'\\z=-2+t'\end{cases}$. Phương trình đường vuông góc chung của d_1 và d_2 là

A. $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$.

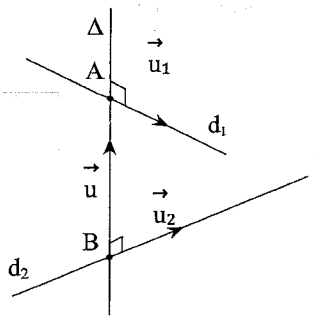
B. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

C. $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$.

D. $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{-3}$.

Hướng dẫn giải

Hai đường thẳng d_1, d_2 có VTCP theo thứ tự là $\overrightarrow{u_1}=(1;1;1), \overrightarrow{u_2}=(2;-1;1)$.



Gọi Δ là đường thẳng vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2 và cắt chúng theo thứ tự tại A, B.

Em có:

$A(2+t;\ -1+t;\ 1+t)$, $B(2+2t';\ 4-t';\ -2+t')$,

$\overrightarrow{AB}=(2t'-t;5-t'-t;-3+t'-t)$.

$\vec{u}=[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]=(2;1;-3)$.

Vì Δ vuông góc với cả d_1, d_2 nên $\vec{u}$ là VTCP của Δ.

$\overrightarrow{AB},\vec{u}$ là hai vectơ cùng phương nên $\dfrac{2t'-t}{2}=\dfrac{5-t'-t}{1}=\dfrac{-3+t'-t}{-3}\Leftrightarrow t=t'=2$.

$\Rightarrow A(4;\ 1;\ 3)$.

Phương trình đường thẳng Δ: $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{-3}$.

→ **Đáp án D**

♥ Vận dụng

Câu 85: Trong không gian Oxyz, cho ba đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=3-t\\z=1\end{cases}$, d_1: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-1}$, d_2: $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-2}$. Phương trình đường thẳng Δ' song song với Δ và cắt cả d_1, d_2 là

A. $\begin{cases}x=5-t\\y=3+t\\z=-2-t\end{cases}$.

B. $\begin{cases}x=-3-t\\y=-1+t\\z=2+t\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x=-3+t\\y=-1-t\\z=2\end{cases}$.

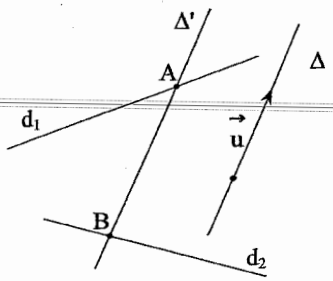
D. $\begin{cases}x=5+t\\y=3-t\\z=-2\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $\Delta' \cap d_1 = A$, $\Delta' \cap d_2 = B$. Em có:

$A(1+2t;1+t;-t)$, $B(-1+k;2k;-2k)$ và

$\overrightarrow{AB} = (-2+k-2t;-1+2k-t;-2k+t)$.



Đường thẳng Δ có VTCP $\vec{u} = (1;-1;0)$.

$\Delta // \Delta' \Leftrightarrow \vec{u}, \overrightarrow{AB}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2+k-2t=m \\ -1+2k-t=-m \\ -2k+t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-1 \\ t=-2 \\ m=1 \end{cases}$$

Vậy Δ' qua A(−3; −1; 2) và có VTCP $\vec{u} = (1;-1;0)$.

Phương trình đường thẳng Δ' là $\begin{cases} x=-3+t \\ y=-1-t \\ z=2 \end{cases}$.

→ **Đáp án C**

Cách khác: Vì $\Delta' // \Delta$ nên trong phương trình tham số của đường thẳng Δ' phải có z=C, C là hằng số → Loại đáp án A, B.

Với hai phương án còn lại em có thể loại D bằng cách kiểm tra điều kiện Δ' cắt d_1, d_2.

Câu 86: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng d_1: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$, $d_2 : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng (P): x−z+1=0. Phương trình đường thẳng Δ vuông góc với (P) và cắt cả d_1, d_2 là

A. $\begin{cases} x=-1+t \\ y=0 \\ z=-t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=-t \\ z=-2 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=-2-t \end{cases}$.

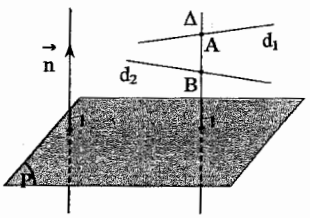
Hướng dẫn giải

Giả sử $\Delta \cap d_1 = A$, $\Delta \cap d_2 = B$. Em có:

$A(2+t;1+t;2t)$, $B(-1+2k;k;-k)$

$\overrightarrow{AB} = (-3+2k-t;-1+k-t;-k-2t)$.

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n} = (1;0;-1)$.



$$\Delta \perp (P) \Leftrightarrow \vec{n}, \overrightarrow{AB} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \begin{cases} -3+2k-t=m \\ -1+k-t=0 \\ -k-2t=-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=0 \\ t=-1 \\ m=-2 \end{cases}$$

Vậy đường thẳng Δ qua $B(-1;0;0)$ và có VTCP $\vec{n} = (1;0;-1)$

Phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases} x=-1+t \\ y=0 \\ z=-t \end{cases}$ → **Đáp án A**

Câu 87: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $-y+z-4=0$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1 \\ y=2t \\ z=2-t \end{cases}$. Đường thẳng d đi qua điểm M(−1; 2; 1) song song với mặt phẳng (P) đồng thời cắt đường thẳng Δ. Phương trình đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x=-2-t \\ y=2t \\ z=t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-1-2t \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1-t \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-1 \\ y=2+t \\ z=1-t \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

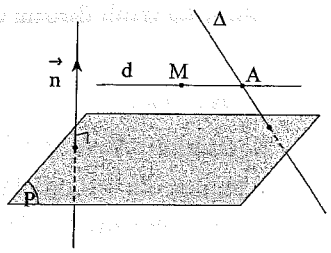
Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(0;-1;1)$.

Gọi $A=d\cap\Delta \rightarrow A(1;2t;2-t)$, $\overrightarrow{AM}=(-2;2-2t;-1+t)$.

Vì d//(P) nên $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$

$\Leftrightarrow 3t-3=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow \overrightarrow{AM}=(-2;0;0)$

Phương trình d: $\begin{cases} x=-1-2t \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$ → **Đáp án B**



*** Nâng cao**

Câu 88: Trong không gian Oxyz cho A(−1; 0; 2), mặt phẳng (P): $2x-y-z+3=0$, đường thẳng d: $\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-6}{1}$. Phương trình đường thẳng d' đi qua A, cắt d tại B và cắt (P) tại C sao cho $\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ là

A. $\begin{cases} x=9-t \\ y=0 \\ z=\frac{13}{2}+2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-1+10t \\ y=8t \\ z=2+9t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-1+9t \\ y=12t \\ z=4+13t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-1+18t \\ y=24t \\ z=2+13t \end{cases}$.

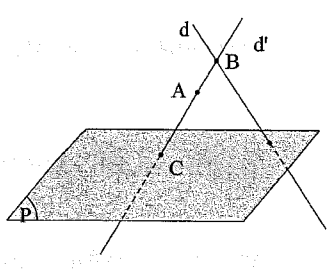
Hướng dẫn giải

Vì B thuộc đường thẳng d nên B(3+2t; 2+4t; 6+t).

Giả sử $C(x_C; y_C; z_C)$. Em có:

$\overrightarrow{AC}=(x_C+1;y_C;z_C-2), \overrightarrow{AB}=(4+2t;2+4t;4+t)$

$\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C+1+2(4+2t)=0 \\ y_C+2(2+4t)=0 \\ z_C-2+2(4+t)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C=-4t-9 \\ y_C=-8t-4 \\ z_C=-2t-6 \end{cases}$



Vì $C\in(P)$ nên $2(-4t-9)-(-8t-4)-(-2t-6)+3=0\Leftrightarrow t=\frac{5}{2}$.

Chọn $2\overrightarrow{AB}=(18;24;13)$ là một VTCP của d'

→ Phương trình d' là: $\begin{cases}x=-1+18t\\y=24t\\z=2+13t\end{cases}$

→ **Đáp án D**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 89: Trong không gian Oxyz, cho điểm M(1; 2; 3). Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các trục Ox, Oy. Một VTCP của đường thẳng M_1M_2 là

A. $\vec{u}=(1;2;0)$ **B.** $\vec{u}=(1;0;0)$ **C.** $\vec{u}=(-1;2;0)$ **D.** $\vec{u}=(0;2;0)$

Câu 90: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có VTCP $\vec{a}=(4;-6;2)$. Phương trình tham số của Δ là

A. $\begin{cases}x=4+2t\\y=-6\\z=2-t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2+4t\\y=-6t\\z=-1+2t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-2+4t\\y=-6t\\z=1+2t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-2+2t\\y=-3t\\z=1+t\end{cases}$.

Câu 91: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;2;-3), B(1;-4;1)$. Phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm A, B là

A. $\begin{cases}x=1\\y=2-6t\\z=-3+4t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1\\y=-3-3t\\z=-7+2t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+t\\y=-1-6t\\z=-1+4t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1-t\\y=4+3t\\z=1-2t\end{cases}$.

Câu 92: Phương trình đường thẳng đi qua A(3; −2; 4) và song song với trục Oy có dạng

A. $\begin{cases}x=3\\y=-2+t\\z=4\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3\\y=-2\\z=4+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=3\\y=-2\\z=4\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3+t\\y=-2\\z=4\end{cases}$.

Câu 93: Trong không gian Oxyz, cho điểm I(−1; 2; −3) và đường thẳng Δ: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{3-z}{1}$. Phương trình đường thẳng d đi qua I và song song với Δ là

A. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-3}{1}$. **B.** $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{1}$.

C. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-3}{-1}$. **D.** $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{1}$.

Câu 94: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(0;-1;3), B(1;0;1)$ và $C(-1;1;2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng BC

A. $\begin{cases} x=-2t \\ y=-1+t \\ z=3+t \end{cases}$.

B. $x-2y+z=0$.

C. $\frac{x}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{1}$.

D. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$.

Câu 95: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1;-2;3)$ và hai mặt phẳng $(P):x+y+z+1=0, (Q):x-y+z-2=0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua A, song song với (P) và (Q)

A. $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2 \\ z=-3-t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=3-2t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2 \\ z=3+2t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2 \\ z=3-t \end{cases}$.

Câu 96: Cho hai điểm $A(1;-2;-3), B(-1;4;1)$ và đường thẳng $d:\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{2}$. Phương trình của đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB và song song với d là

A. $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$.

B. $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+2}{2}$.

C. $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{2}$.

D. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{2}$.

Câu 97: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d đi qua điểm A(−2; 1; 0) và vuông góc với mặt phẳng (P): x+2y−2z+1=0. Phương trình đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x=2-t \\ y=-1-2t \\ z=2t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x=-2+t \\ y=1+2t \\ z=-2t \end{cases}$.

C. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-2}$.

D. $\begin{cases} x=1-2t \\ y=2+t \\ z=-2 \end{cases}$.

Câu 98: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng d đi qua điểm A(2; −3; −1) và vuông góc với mặt phẳng (P): 2x+3y+z−1=0. Tìm tọa độ giao điểm của d với Ox

A. (1; 0; 0). B. (0; 0; −1). C. (4; 0; 0). D. (0; 0; 4).

Câu 99: Trong không gian Oxyz, gọi đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P):x-2y-3=0$, $(Q):y-3z+2=0$. Phương trình đường thẳng Δ là

A. $\begin{cases} x=-1+t \\ y=4-3t \\ z=2-t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-2+t \\ z=t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x=-1+6t \\ y=-2+3t \\ z=t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x=-1-6t \\ y=-2-3t \\ z=1-t \end{cases}$.

Câu 100: Trong không gian Oxyz, gọi đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P):3x+y-2z-14=0, (Q): x-y+5z+22=0$. Phương trình đường thẳng Δ là

A. $\begin{cases} x=1+3t \\ y=3+17t \\ z=4-4t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x=4+3t \\ y=-4-17t \\ z=3-4t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x=1+3t \\ y=3+17t \\ z=-4-4t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x=1+3t \\ y=3-17t \\ z=-4-4t \end{cases}$.

Câu 101: Cho điểm M(2; -1; 1) và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{-2}$, $d_2: \begin{cases} x=t \\ y=1-2t \\ z=0 \end{cases}$.

Phương trình đường thẳng Δ qua điểm M và vuông góc với cả hai đường thẳng d_1, d_2 là

A. $\frac{x-2}{-4}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{1}$. B. $\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-1}$.

C. $\frac{x-2}{-4}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$. D. $\frac{x+4}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{1}$.

Câu 102: Cho điểm M(0; 6; 6) và hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x=-1+t \\ y=2-2t \\ z=3+t \end{cases}$, $\Delta_2: \begin{cases} x=-2-t' \\ y=1+2t' \\ z=3 \end{cases}$. Đường thẳng Δ đi qua M và cắt cả hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 có phương trình

A. $\begin{cases} x=t \\ y=6+3t \\ z=6 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x=0 \\ y=6+3t \\ z=6-t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x=0 \\ y=6-3t \\ z=6+t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x=0 \\ y=3t \\ z=4+t \end{cases}$.

Câu 103: Trong không gian Oxyz, cho ba đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{-1}$, $d_2: \frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-2}$, $\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=3-t \\ z=1-4t \end{cases}$. Gọi Δ' là đường thẳng song song với Δ và cắt cả d_1, d_2.

Điểm nào trong số những điểm sau thuộc Δ'

A. Q(5; -3; -3). B. P(6; -1; -5). C. N(-8; -4; 23). D. M(12; -4; -17).

Câu 104: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P): y+2z=0 và hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=4t \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x=2-t' \\ y=4+2t' \\ z=1 \end{cases}$. Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 có phương trình là

A. $\frac{x}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{1}$. B. $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1}$. C. $\frac{x}{6}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{1}$. D. $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{4}=\frac{z}{1}$.

Câu 105: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P): 2x-y+7z-5=0 và hai đường thẳng có phương trình d_1: $\frac{x}{1}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-3}{-1}$, d_2: $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-4}{-5}$. Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-9}{-7}$.

B. $\frac{x}{3}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-3}{6}$.

C. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-2}{7}$.

D. $\frac{x}{-3}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-3}{-6}$.

Câu 106: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P): x-y+2z-4=0 và đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1-t\\y=4+2t\\z=-t\end{cases}$. Đường thẳng d đi qua điểm M(1; 1; 1) song song với mặt phẳng (P) đồng thời cắt đường thẳng Δ. Phương trình đường thẳng d là

A. $\begin{cases}x=-2+t\\y=-2-t\\z=1\end{cases}$.

B. $\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=3\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x=-2-t\\y=-2-t\\z=1\end{cases}$.

D. $\begin{cases}x=1-t\\y=1+t\\z=1\end{cases}$.

Câu 107: Cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1:\begin{cases}x=3+t\\y=-1-t\\z=4+t\end{cases}$, $d_2:\begin{cases}x=2+2t'\\y=4-t'\\z=-3+4t'\end{cases}$. Phương trình đường vuông góc chung của d_1 và d_2 là

A. $\frac{x-4}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-1}$.

B. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{3}$.

C. $\frac{x-4}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{-1}$.

D. $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$.

Câu 108: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+3t\\y=-3+t\\z=4-2t\end{cases}$ và $d':\frac{x-4}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng thuộc mặt phẳng chứa d và d', đồng thời cách đều hai đường thẳng đó

A. $\frac{x-3}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{-2}$.

B. $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+2}{-2}$.

C. $\frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{-2}$.

D. $\frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{-2}$.

Câu 109: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm A(1; -1; 2), B(-1; 2; 3) và đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}$. Tìm điểm M(a; b; c) thuộc d sao cho $MA^2+MB^2=28$, biết c < 0.

A. $M(-1;-3;-3)$ B. $M(2;3;3)$ C. $M\left(\frac{1}{6};\frac{7}{6};\frac{-2}{3}\right)$ D. $M\left(\frac{1}{6};\frac{-7}{6};\frac{-2}{3}\right)$

Câu 110: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm M(−1; 1; 3) và hai đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{1}$ và $\Delta':\frac{x+1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M, và vuông góc với Δ,Δ'

A. $\begin{cases}x=-1-t\\y=1+t\\z=1+3t\end{cases}$. B. $\begin{cases}x=-t\\y=1+t\\z=3+t\end{cases}$. C. $\begin{cases}x=-1-t\\y=1-t\\z=3+t\end{cases}$. D. $\begin{cases}x=-1-t\\y=1+t\\z=3+t\end{cases}$.

Câu 111: Trong không gian Oxyz, phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua điểm A(2; 3; 0) và vuông góc với mặt phẳng (P): x + 3y − z + 5 = 0

A. $\begin{cases}x=1+3t\\y=3t\\z=1-t\end{cases}$. B. $\begin{cases}x=1+t\\y=3t\\z=1-t\end{cases}$. C. $\begin{cases}x=1+t\\y=1+3t\\z=1-t\end{cases}$. D. $\begin{cases}x=1+3t\\y=3t\\z=1+t\end{cases}$.

ĐÁP ÁN

89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
C	B	A	A	B	C	D	C	B	C	C	D
101	**102**	**103**	**104**	**105**	**106**	**107**	**108**	**109**	**110**	**111**	
A	D	D	B	C	C	C	A	C	D	B	

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 89:

Em có: M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các trục Ox, Oy

$\Rightarrow M_1=(1;0;0); M_2=(0;2;0); \overrightarrow{M_1M_2}=(-1;2;0)$

→ **Đáp án C**

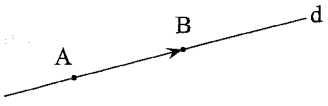
Câu 90:

Phương trình tham số của đường thẳng Δ qua M(2; 0; −1) và có VTCP $\vec{a}=(4;-6;2)$ là:

$\begin{cases}x=2+4t\\y=-6t\\z=-1+2t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$ → **Đáp án B**

Câu 91:

Vì A, B ∈d nên em có $\overrightarrow{AB}=(0;-6;4)$ là một VTCP của đường thẳng d. Đường thẳng d qua A(1; 2; −3) nên có phương trình là: $\begin{cases}x=1\\y=2-6t\\z=-3+4t\end{cases}$ → **Đáp án A**



Phương pháp giải nhanh

- $x_A=x_B=1 \rightarrow x_M=1$ với mọi M∈d → Loại C, D.
- Kiểm tra A, B có thuộc đường thẳng trong đáp án A, B.

☞ **Chú ý:** trong đáp án A, đường thẳng đã qua điểm A nên em chỉ cần kiểm tra điểm B thỏa mãn phương trình→ chọn A.

Câu 92:

Do d//Oy nên d qua A nhận VTCP $\vec{j}=(0;1;0)$ của Oy làm VTCP.

Vậy phương trình d là: $\begin{cases}x=3\\y=-2+t\\z=4\end{cases}$ → **Đáp án A**

Câu 93:

Đường thẳng Δ có VTCP $\vec{u}=(2;-2;-1)$

Vì d//Δ nên em có d cũng nhận vectơ $\vec{u}=(2;-2;-1)$ làm một VTCP.

Mặt khác I(−1; 2; −3) ∈ d nên phương trình d: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}$.

→ **Đáp án B**

Câu 94:

Đường thẳng đi qua A và song song với BC nhận $\overrightarrow{BC}=(-2;1;1)$ làm một VTCP.

⇒ Phương trình chính tắc của đường thẳng là: $\frac{x}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{1}$. → **Đáp án C**

Câu 95:

Mặt phẳng $(P),(Q)$ có VTPT lần lượt là $\overrightarrow{n_1}=(1;1;1);\overrightarrow{n_2}=(1;-1;1)$

Gọi d là đường thẳng cần tìm và $\vec{u}$ là một VTCP của d

$\begin{cases}d//(P)\\d//(Q)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{u}\perp\overrightarrow{n_1}\\\vec{u}\perp\overrightarrow{n_2}\end{cases}$. Chọn $\vec{u}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right]=(1;0;-1)$

Phương trình tham số của d qua $A(1;-2;3)$ có VTCP $\vec{u}=(1;0;1)$ là: $\begin{cases}x=1+t\\y=-2\\z=3-t\end{cases}$

→ **Đáp án D**

Câu 96:

Gọi $\vec{u}$ là VTCP của đường thẳng d' cần tìm

Gọi $I(x_I;y_I;z_I)$ là trung điểm của AB.

$x_I=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1-1}{2}=0;\ y_I=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-2+4}{2}=1;\ z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{-3+1}{2}=-1$

$\Rightarrow I(0;1;-1)$

Vì d'//d nên em chọn $\vec{u}\equiv\overrightarrow{u_d}=(1;-1;2)$

Vậy phương trình đường thẳng d' đi qua I và có VTCP $\vec{u}$ là: $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{2}$.

→ **Đáp án C**

Câu 97:

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(1;2;-2)$.

Vì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) nên $\vec{n}=(1;2;-2)$ là một VTCP của d.

Phương trình đường thẳng d là: $\begin{cases}x=-2+t\\y=1+2t\\z=-2t\end{cases}$ → **Đáp án B**

Câu 98:

(P) có VTPT $\vec{n}=(2;3;1)$ cũng là VTCP của d.

Phương trình tham số của d là $\begin{cases}x=2+2t\\y=-3+3t\\z=-1+t\end{cases}$.

Tọa độ giao điểm của d với Ox được xác định bởi nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}-3+3t=0\\-1+t=0\end{cases}\Leftrightarrow t=1$ → Giao điểm là (4; 0; 0). → **Đáp án C**

Câu 99:

Mặt phẳng (P) và (Q) có VTPT theo thứ tự là: $\overrightarrow{n_P}=(1;-2;0),\overrightarrow{n_Q}=(0;1;-3)$.

Vì $\Delta = (P)\cap(Q)$ nên Δ nhận $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]=(6;3;1)$ là một VTCP.

Em lấy A(−1; −2; 0) là một điểm chung của (P) và (Q). Phương trình Δ là: $\begin{cases}x=-1+6t\\y=-2+3t\\z=t\end{cases}$

→ **Đáp án C**

Cách khác: Với bài toán này em có thể **tìm ngay** được phương trình của giao tuyến theo cách sau:

Điểm M(x; y; z) $\in\Delta$ khi tọa độ M thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases}x-2y-3=0\\y-3z+2=0\end{cases}$

Đặt z=t em sẽ có hệ phương trình $\begin{cases}x=2y+3\\y=3z-2\\z=t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1+6t\\y=-2+3t\\z=t\end{cases}$

Phương trình trên tương đương với phương trình đường thẳng của đáp án C.

→ **Đáp án C**

Câu 100:

Mặt phẳng (P) và (Q) có VTPT theo thứ tự là: $\overrightarrow{n_P}=(3;1;-2),\overrightarrow{n_Q}=(1;-1;5)$.

Vì $\Delta = (P)\cap(Q)$ nên Δ nằm trên cả hai mặt phẳng

→ $\vec{u}=[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}]=(3;-17;-4)$ là một VTCP của Δ.

Em lấy A(1; 3; −4) là một điểm chung của (P) và (Q).

Phương trình của đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x=1+3t \\ y=3-17t \\ z=-4-4t \end{cases}$. → **Đáp án D**

Phương pháp giải nhanh:

Cách 1:

Điểm M(x; y; z) thuộc giao tuyến Δ khi tọa độ M thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x+y-2z-14=0 \\ x-y+5z+22=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3z+8=0 \\ x-y+5z+22=0 \end{cases} (*)$$

Đặt z=4t, $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2-3t \\ y=20+17t \\ z=4t \end{cases}$.

Phương trình trên tương đương với phương trình đường thẳng trong đáp án D.

Cách 2:

- ✓ $\vec{u} = [\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}] = (3;-17;-4)$ là một VTCP của $\Delta \rightarrow$ Loại A, C.
- ✓ Kiểm tra 1 điểm trên Δ có thuộc cả (P) và (Q) hay không

  Đáp án B: điểm M(4; −4; −3)$\in\Delta$, M$\in$(P) nhưng M$\notin$(Q) → Loại B.

  Đáp án D: điểm M(1; 3; −4)$\in\Delta$, M$\in$(P) và M$\in$(Q) → Chọn D. → **Đáp án D**

Câu 101:

Hai đường thẳng d_1, d_2 có VTCP theo thứ tự là $\overrightarrow{u_1} = (-1;1;-2), \overrightarrow{u_2} = (1;-2;0)$.

Vì Δ vuông góc với cả d_1, d_2 nên nhận vectơ $\vec{u} = [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = (-4;-2;1)$ là một VTCP.

Mặt khác M(2; −1; 1) $\in\Delta$ nên phương trình của Δ là: $\frac{x-2}{-4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{1}$.

→ **Đáp án A**

Câu 102:

Giả sử Δ cắt hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 theo thứ tự tại A, B. Em có:

$A(-1+t;2-2t;3+t), B(-2-t';1+2t';3), \overrightarrow{AM} = (1-t;4+2t;3-t), \overrightarrow{BM} = (2+t';5-2t';3)$.

Vì A, B, M thẳng hàng nên tồn tại số thực k thỏa mãn :

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-t=k(2+t') \\ 4+2t=k(5-2t') \\ 3-t=3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t'=-2 \\ t=1 \\ k=\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow A(0;0;4), \overrightarrow{AM} = (0;6;2)$$

Phương trình đường thẳng Δ qua A(0; 0; 4) và M(0; 6; 6): $\begin{cases} x=0 \\ y=6t \\ z=4+2t \end{cases}$

→ **Đáp án D**

Câu 103:

Giả sử Δ' cắt hai đường thẳng d_1, d_2 theo thứ tự tại A, B. Em có:

$A(2+3t;1+t;3-t)$, $B(3+k;-2+2k;1-2k)$ và $\overrightarrow{AB}=(1+k-3t;-3+2k-t;-2-2k+t)$.

Đường thẳng Δ có VTCP $\vec{u}=(2;-1;-4)$.

$\Delta//\Delta' \Leftrightarrow \vec{u},\overrightarrow{AB}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \frac{1+k-3t}{2}=\frac{-3+2k-t}{-1}=\frac{-2-2k+t}{-4} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ t=0 \end{cases} \Rightarrow A(2;\ 1;\ 3)$$

Phương trình Δ' qua A và có VTCP $\vec{u}=(2;-1;-4)$ là $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1-t \\ z=3-4t \end{cases}$

→ Đáp án D

Câu 104:

Gọi $A=(P)\cap d_1, B=(P)\cap d_2$. Em dễ dàng tính được A(1; 0; 0), B(5; -2; 1).

Vì $\Delta \subset (P)$ và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 nên $A, B\in\Delta$.

Do vậy phương trình của đường thẳng Δ là: $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1}$

→ Đáp án B

Câu 105:

Giả sử Δ cắt hai đường thẳng d_1, d_2 theo thứ tự tại A, B.

Em có: $A(t;-4+t;3-t)$, $B(1-2k;-3+k;4-5k)$ và $\overrightarrow{AB}=(1-2k-t;1+k-t;1-5k+t)$.

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(2;-1;7)$. Em có : $\Delta\perp(P) \Leftrightarrow \vec{n},\overrightarrow{AB}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \frac{1-2k-t}{2}=\frac{1+k-t}{-1}=\frac{1-5k+t}{7} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-1 \\ t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(1;-3;2) \\ B(3;-4;9). \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng Δ là: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-2}{7}$

→ Đáp án C

Câu 106:

Đường thẳng Δ có VTCP là $\overrightarrow{u_\Delta}=(-1;2;-1)$. Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(1;-1;2)$.

Gọi $A=d\cap\Delta \rightarrow A(1-t;\ 4+2t;\ -t)$, $\overrightarrow{AM}=(t;-3-2t;1+t)$.

Vì $d//(P)$ nên $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow t+3+2t+2(1+t)=0 \Leftrightarrow 5t+5=0 \Leftrightarrow t=-1$.

Vậy $\overrightarrow{AM}=(-1;-1;0)$.

Đường thẳng d qua M có một VTCP $\overrightarrow{AM}=(-1;-1;0)$ có phương trình $\begin{cases} x=1-t \\ y=1-t \\ z=1 \end{cases}$

→ Đáp án C

Câu 107:

Hai đường thẳng d_1, d_2 có VTCP theo thứ tự là $\overrightarrow{u_1}=(1;-1;1), \overrightarrow{u_2}=(2;-1;4)$.

Gọi Δ là đường thẳng vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2 và cắt chúng theo thứ tự tại A, B. Em có:

$A(3+t;-1-t;4+t), B(2+2t';4-t';-3+4t'), \overrightarrow{AB}=(-1+2t'-t;5-t'+t;-7+4t'-t)$.

Vì Δ vuông góc với cả d_1, d_2 nên $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1}=0\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7t'-3t=13\\ 21t'-7t=35\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t'=1\\ t=-2\end{cases}$

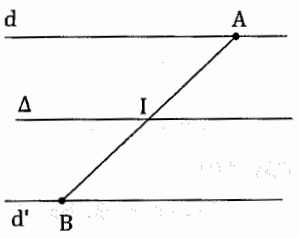
Từ đó em tính được: B(4;3;1), $\overrightarrow{AB}=(3;2;-1)$.

Phương trình đường thẳng Δ là: $\frac{x-4}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{-1}$

→ Đáp án C

Câu 108:

Gọi $A(2;-3;4), B(4;-1;0)$ theo thứ tự là các điểm trên d, d'.



Trung điểm $I(x_I;y_I;z_I)$ của AB có tọa độ:

$x_I=\frac{2+4}{2}=3; y_I=\frac{-3-1}{2}=-2; z_I=\frac{4+0}{2}=2\Rightarrow I(3;-2;2)$

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm. Em có: Δ nằm trên mặt phẳng chứa d và d' đồng thời song song, cách đều hai đường thẳng d và d'.

$\Rightarrow\Delta$ có VTCP là $(3;1;-2)$ và đi qua I.

Vậy phương trình Δ là: $\frac{x-3}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{-2}$

→ Đáp án A

Câu 109:

$M\in d\Rightarrow M(1+t;2+t;1+2t), \overrightarrow{MA}=(-t;-3-t;1-2t), \overrightarrow{MB}=(-2-t;t;2-2t)$

Em có: $MA^2=t^2+(3+t)^2+(2t-1)^2$, $MB^2=(t+2)^2+t^2+(2t-2)^2$

$MA^2+MB^2=28\Leftrightarrow 12t^2-2t+18=28\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\frac{-5}{6}\end{array}\right.$

Do $c<0\Rightarrow 1+2t<0\Rightarrow t<\frac{-1}{2}\Rightarrow t=\frac{-5}{6}$

Thay t vào tọa độ của M em được: $M\left(\frac{1}{6};\frac{7}{6};\frac{-2}{3}\right)$. → Đáp án C

Câu 110:

Đường thẳng cần tìm nhận $[\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{u_{\Delta'}}]=(-7; 7; 7) = 7.(-1; 1; 1)$ làm VTCP

$\Rightarrow$ Loại đáp án A, C.

Em thay tọa độ điểm M vào đáp án B và D

Đáp án B: $\begin{cases} -1=-t \Rightarrow t=1 \\ 1=1+t \Rightarrow t=0 \text{ (vô lý)} \\ 3=3+t \Rightarrow t=0 \end{cases}$

Đáp án D: $\begin{cases} -1=-1-t \\ 1=1+t \\ 3=3+t \end{cases} \Rightarrow t=0$ (thỏa mãn). $\rightarrow$ **Đáp án D**

Câu 111:

Đường thẳng đi qua A(2; 3; 0) và vuông góc với mặt phẳng $(P): x+3y-z+5=0$ sẽ nhận $\vec{n}=(1;3;-1)$ làm VTCP $\Rightarrow$ Loại đáp án A và D.

Em thay tọa độ điểm A vào đáp án B và C:

Đáp án B: $\begin{cases} 2=1+t \\ 3=3t \\ 0=1-t \end{cases} \Rightarrow t=1$ (thỏa mãn)

Đáp án C: $\begin{cases} 2=1+t \Rightarrow t=1 \\ 3=1+3t \Rightarrow t=\dfrac{2}{3} \\ 0=1-t \Rightarrow t=1 \end{cases} \Rightarrow$ Loại đáp án C.

$\rightarrow$ **Đáp án B**

Dạng 4: Các bài toán về hình chiếu trong không gian

Phương pháp giải:

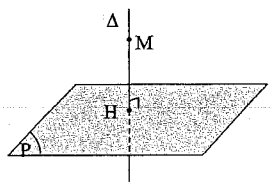
Trong không gian Oxyz, cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$; mặt phẳng (P): $Ax+By+Cz+D=0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=x_1+at \\ y=y_1+bt \\ z=z_1+ct \end{cases}$.

Bài toán 1: Xác định hình chiếu của M lên mặt phẳng (P).

Bước 1: Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với (P).

Bước 2: Tìm tọa độ $H = \Delta \cap (P)$.

Khi đó H chính là hình chiếu của M lên mặt phẳng (P).

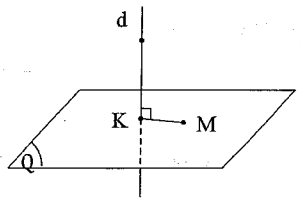


Bài toán 2: Xác định hình chiếu của M lên đường thẳng d.

Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua M và vuông góc với d.

Bước 2: Tìm tọa độ K =d ∩(Q).

Điểm K chính là hình chiếu của M lên đường thẳng d.

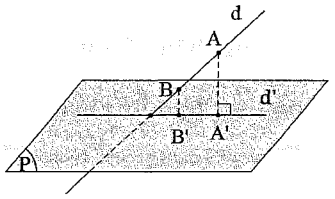


Bài toán 3: Xác định hình chiếu của đường thẳng d lên mặt phẳng (P).

Bước 1: Xác định tọa độ hai điểm A, B phân biệt thuộc đường thẳng d.

Bước 2: Tìm tọa độ điểm A', B' lần lượt là hình chiếu của A, B lên (P).

Bước 3: Viết phương trình đường thẳng d' đi qua A', B' là hình chiếu của đường thẳng d lên mặt phẳng(P).



Chú ý: Trong không gian Oxyz cho điểm M(a; b; c).

- Hình chiếu của M lên các trục Ox, Oy, Oz theo thứ tự là các điểm $H_1(a;0;0), H_2(0;b;0), H_3(0;0;c)$.
- Hình chiếu của M lên các mặt phẳng tọa độ Oxy, Oyz, (Oxz) theo thứ tự là $K_1(a;b;0), K_2(0;b;c), M_3(a;0;c)$.

BÀI TẬP MẪU

Cơ bản

Câu 112: Trong không gian Oxyz cho điểm M(2; −3; 1) và mặt phẳng (P): x+3y−z+2=0. Điểm M'(a;b;c) là hình chiếu của điểm M lên mặt phẳng (P). Giá trị T=a+b+c bằng

A. $\frac{18}{11}$. **B.** $\frac{24}{8}$. **C.** $\frac{7}{11}$. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(1;3;-1)$.

Gọi Δ là đường thẳng qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (P), khi đó Δ nhận vectơ $\vec{n}=(1;3;-1)$ là một VTCP ⇒ Phương trình đường thẳng Δ là: $\begin{cases}x=2+t\\y=-3+3t\\z=1-t\end{cases}$.

Điểm M' là hình chiếu của M lên mặt phẳng (P) khi và chỉ khi M'=Δ∩(P).

Em có: M' ∈ Δ nên tọa độ M'(2+t; −3+3t; 1−t).

$$M'\in(P) \text{ nên } (2+t)+3(-3+3t)-(1-t)+2=0 \Leftrightarrow t=\frac{6}{11}$$

Do vậy tổng các tọa độ của M' là $(2+t)+(-3+3t)+(1-t)=3t=\frac{18}{11}$

→ Đáp án A

Câu 113: Trong không gian Oxyz cho điểm M(2; −1; 1) và đường thẳng d: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$.

Hình chiếu H của điểm M lên đường thẳng d là

A. $H\left(\frac{1}{3};\frac{-2}{3};\frac{2}{3}\right)$. B. $H\left(\frac{19}{7};\frac{-13}{7};\frac{12}{7}\right)$. C. $H\left(\frac{17}{9};-\frac{13}{9};\frac{8}{9}\right)$. D. $H\left(\frac{21}{9};\frac{3}{9};\frac{12}{9}\right)$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm. Đường thẳng d có VTCP $\vec{u}=(2;-1;2)$.

Vì (P) ⊥ d nên (P) nhận vectơ $\vec{u}=(2;-1;2)$ là một VTPT.

Phương trình mặt phẳng (P) là: 2x−y+2z−7=0.

Điểm H là hình chiếu của M lên đường thẳng d khi và chỉ khi H=d∩(P).

Tọa độ H thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}\\ 2x-y+2z-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+2t\\ y=-1-t\\ z=2t\\ 2(1+2t)-(-1-t)+2(2t)-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\frac{4}{9}\\ x=\frac{17}{9};y=\frac{-13}{9};z=\frac{8}{9}\end{cases}$$

→ Đáp án C

Cách 2: H là hình chiếu của M lên đường thẳng d nên $H(1+2t;-1-t;2t)$ và $\overrightarrow{MH}.\vec{u}=0$.

Với $\overrightarrow{MH}=(-1+2t;-t;-1+2t),\vec{u}=(2;-1;2)$ em có:

$$2(-1+2t)-(-t)+2(-1+2t)=0\Leftrightarrow t=\frac{4}{9}\Rightarrow H\left(\frac{17}{9};-\frac{13}{9};\frac{8}{9}\right).$$

♥ Vận dụng

Câu 114: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng Δ: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-5}{2}$.

Phương trình hình chiếu của đường thẳng lên mặt phẳng (Oxz) là

A. $\begin{cases}x=5+t\\ y=0\\ z=9+t\end{cases}$. B. $\begin{cases}x=-4+5t\\ y=0\\ z=-4+9t\end{cases}$. C. $\begin{cases}x=5+2t\\ y=t\\ z=9+2t\end{cases}$. D. $\begin{cases}x=1+2t\\ y=t\\ z=5+2t\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm A(1; −2; 5), B(5; 0; 9).

Hình chiếu của A lên mặt phẳng (Oxz) là A'(1; 0; 5)

Hình chiếu của B lên mặt phẳng (Oxz) là chính B vì B∈(Oxz).

Đường thẳng Δ' là hình chiếu của Δ lên mặt phẳng (Oxz) nên Δ' đi qua B và nhận VTCP $\vec{u}=\frac{-1}{4}\overrightarrow{BA'}=(1;0;1)$.

Phương trình của đường thẳng Δ' là: $\begin{cases}x=5+t\\ y=0\\ z=9+t\end{cases}$

→ Đáp án A

*** Nâng cao**

Câu 115: Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng cắt nhau (P): x−3y+z+4=0 và (Q): x+y−2z+5=0. Mặt phẳng sau đây đối xứng với (P) qua mặt phẳng (Q)

A. 11x−17y−z+48=0. **B.** 7x+5y−5z+12=0.

C. 11x+17y−z−20=0. **D.** 7x−5y−5z+32=0.

Hướng dẫn giải

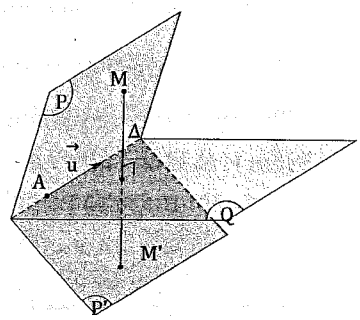
Mặt phẳng (P) có VTPT $\overrightarrow{n_P}=(1;-3;1)$

Mặt phẳng (Q) có VTPT $\overrightarrow{n_Q}=(1;1;-2)$

$\Delta=(P)\cap(Q)\Rightarrow\Delta$ đi qua điểm A(−1; 2; 3) và có VTCP $\vec{u}=[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}]=(5;3;4)$.

Lấy M(−1; 1; 0) thuộc (P) nhưng $M\notin\Delta$.

Gọi d là đường thẳng qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (Q).



Khi đó d nhận vectơ $\overrightarrow{n_Q}=(1;1;-2)$ là một VTCP. Phương trình d là: $\begin{cases}x=-1+t\\y=1+t\\z=-2t\end{cases}$.

Điểm M' đối xứng với M qua (Q) khi và chỉ khi M' thuộc d và trung điểm của MM' thuộc mặt phẳng (Q).

$M'\in d$ nên M'(−1+t; 1+t; −2t), khi đó $I\left(-1+\frac{t}{2};1+\frac{t}{2};-t\right)$ là trung điểm của MM'.

$I\in(Q)\Leftrightarrow-1+\frac{t}{2}+1+\frac{t}{2}-2(-t)+5=0\Leftrightarrow t=-\frac{5}{3}$.

Suy ra $M'\left(-\frac{8}{3};-\frac{2}{3};\frac{10}{3}\right),\left[\vec{u},\overrightarrow{M'A}\right]=\left(-\frac{35}{3};\frac{25}{3};\frac{25}{3}\right)$

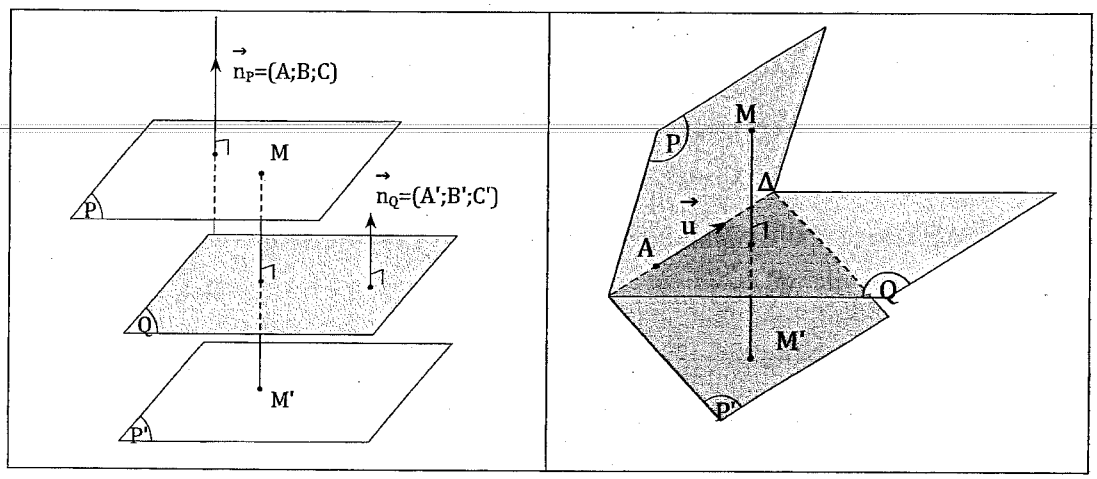
Gọi (P') là mặt phẳng đối xứng với (P) qua (Q)⇒(P') chứa $M'\left(-\frac{8}{3};-\frac{2}{3};\frac{10}{3}\right)$ và Δ

⇒ (P') qua A(−1; 2; 3), có VTPT $\vec{n}=-\frac{3}{5}\left[\vec{u},\overrightarrow{M'A}\right]=(7;-5;-5)$.

Phương trình mặt phẳng (P') là: 7x−5y−5z+32=0. → Đáp án D

Phương pháp giải: Viết phương trình mặt phẳng (P') đối xứng với (P) qua (Q)

TH1: (P)//(Q)	**TH2:** (P)∩(Q)=Δ
• B1: Lấy điểm M thuộc (P). Tìm tọa độ M' đối xứng M qua (Q). • B2: Viết phương trình mặt phẳng (P') qua M' và song song với (P).	• B1: Xác định A ∈Δ và VTCP $\vec{u}=[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}]$ của Δ. • B2: Lấy điểm M thuộc (P), $M\notin\Delta$. Tìm tọa độ M' đối xứng M qua (P) • B3: Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M' và chứa đường thẳng Δ.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 116: Trong không gian Oxyz, cho điểm M(5; –1; 3). Hình chiếu M' của điểm M lên mặt phẳng (Oxy) có các tọa độ là

A. M'(5; 1; 0). B. M'(5; –1; 0). C. M'(0; 0; 3). D. M'(–5; 1; 0).

Câu 117: Trong không gian Oxyz, cho điểm M(3; –1; –3). Tọa độ điểm M' đối xứng với điểm M qua mặt phẳng (Oxz) là

A. M'(3; 1; –3). B. M'(–3; –1; 3). C. M'(–3; –1; 3). D. M'(–3; 1; –3).

Câu 118: Trong không gian Oxyz, cho điểm M(6; –2; –7). Điểm M có hình chiếu lên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz theo thứ tự là M_1, M_2, M_3. Tổng các tọa độ của M_1, M_2, M_3 là

A. 0. B. –3. C. 3. D. –9.

Câu 119: Trong không gian Oxyz, cho điểm M(4; –3; –5). Điểm đối xứng với M qua các trục tọa độ Ox, Oy, Oz theo thứ tự là M_1, M_2, M_3. Tổng các tọa độ của M_1, M_2, M_3 là

A. 8. B. –4. C. 4. D. –8.

Câu 120: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng Δ: $\begin{cases} x=1-t \\ y=2+3t \\ z=-1 \end{cases}$. Phương trình hình chiếu của đường thẳng lên mặt phẳng (Oxy) là

A. $\begin{cases} x=-t \\ y=3t \\ z=-1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x=1-t \\ y=2+3t \\ z=-1 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x=-1-t \\ y=-2+3t \\ z=0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x=1-t \\ y=2+3t \\ z=0 \end{cases}$.

Câu 121: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{4}$. Phương trình đường thẳng Δ' đối xứng với đường thẳng Δ qua mặt phẳng (Oyz) là

A. $\begin{cases} x=-t \\ y=5+3t \\ z=3+4t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x=-1+t \\ y=-2+3t \\ z=1+4t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x=t \\ y=5+3t \\ z=3+4t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x=0 \\ y=5+3t \\ z=3+4t \end{cases}$.

Câu 122: Trong không gian Oxyz, cho điểm M(4; −3; 1) và mặt phẳng (P): x−y−z+2=0. Tổng tọa độ điểm M' đối xứng với điểm M qua mặt phẳng (P) bằng

A. $\frac{22}{3}$. **B.** 10. **C.** $\frac{14}{3}$. **D.** $-\frac{10}{3}$.

Câu 123: Trong không gian Oxyz, cho M(2; 0; 3) và đường thẳng $d:\frac{x+1}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{2}$. Gọi M' là điểm đối xứng với điểm M qua đường thẳng d. Tổng tọa độ của M' bằng

A. $-\frac{15}{7}$. **B.** $-\frac{20}{7}$. **C.** $\frac{20}{7}$. **D.** $\frac{5}{7}$.

Câu 124: Cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{1}$ và mặt phẳng (P): x−3y+z−4=0. Đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d lên mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $\begin{cases} x=\frac{8}{11}+2t \\ y=-\frac{13}{11}+t \\ z=-\frac{3}{11}+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-\frac{8}{11}+2t \\ y=-\frac{13}{11}+t \\ z=-\frac{3}{11}+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2-t \\ y=-1-t \\ z=1+5t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=5-6t \\ y=-1-t \\ z=6+4t \end{cases}$.

Câu 125: Cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng (P): x−3y+z−4=0. Đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d lên mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $\frac{x-4}{13}=\frac{y-1}{-25}=\frac{z-3}{14}$. **B.** $\frac{x-4}{25}=\frac{y-1}{13}=\frac{z-3}{14}$.

C. $\frac{x-4}{25}=\frac{y-1}{-12}=\frac{z-4}{14}$. **D.** $\frac{x+4}{25}=\frac{y-1}{13}=\frac{z-4}{14}$.

Câu 126: Cho đường thẳng $d:\frac{x-4}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-5}$ và mặt phẳng (P): 2x+y+z−1=0. Đường thẳng d' đối xứng đường thẳng d qua mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+4}{-5}$. **B.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{-5}$.

C. $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+4}{-5}$. **D.** $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-4}{5}$.

ĐÁP ÁN

116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126
B	A	B	C	D	C	A	D	A	B	A

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 116:

Điểm M(5; −1; 3) có hình chiếu mặt phẳng (Oxy) là M'(5; −1; 0). → **Đáp án B**

Câu 117:

Điểm đối xứng với điểm M(3; –1; –3) qua mặt phẳng (Oxz) là: M'(3; 1; –3).

→ Đáp án A

Câu 118:

Hình chiếu của điểm M(6; –2; –7) lên trục Ox, Oy, Oz theo thứ tự là các điểm $M_1(6; 0; 0)$, $M_2(0; -2; 0)$, $M_3(0; 0; -7)$.

Do đó tổng tọa độ các điểm M_1, M_2, M_3 là $6+(-2)+(-7)=-3$. **→ Đáp án B**

Câu 119:

Điểm đối xứng với điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ qua các trục Ox, Oy, Oz theo thứ tự là $A_1(x_A; -y_A; -z_A)$, $A_2(-x_A; y_A; -z_A)$, $A_3(-x_A; -y_A; z_A)$.

Do đó tổng tọa độ các điểm A_1, A_2, A_3 là $-(x_A+y_A+z_A)$.

Áp dụng với M(4; –3; –5) em được tổng tọa độ M_1, M_2, M_3 là $-(4-3-5)=4$.

→ Đáp án C

Câu 120:

Nhận xét: đường thẳng Δ qua A(1; 2; –1) và có VTCP $\vec{u}=(-1;3;0)$.

Dễ thấy $\vec{u}=(-1;3;0)$ và VTPT $\vec{k}=(0;0;1)$ của mặt phẳng (Oxy) vuông góc.

Do vậy đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (Oxy).

⇒ Hình chiếu của Δ lên mặt phẳng (Oxy) là đường thẳng song song với Δ và qua điểm A'(1; 2; 0).

Phương trình hình chiếu của đường thẳng Δ lên mặt phẳng (Oxy) là: $\begin{cases} x=1-t \\ y=2+3t \\ z=0 \end{cases}$

→ Đáp án D

Câu 121:

Nhận xét: đường thẳng Δ qua A(1; 2; –1) và có VTCP $\vec{u}=(-1;3;4)$.

Giao điểm của Δ và mặt phẳng (Oyz) là B(0; 5; 3).

Điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oyz) là A'(–1; 2; –1).

Đường thẳng Δ' đối xứng với Δ qua mặt phẳng (Oyz) sẽ qua điểm A'và B.

Phương trình Δ' là: $\begin{cases} x=t \\ y=5+3t \\ z=3+4t \end{cases}$ **→ Đáp án C**

Câu 122:

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(1;-1;-1)$.

Gọi Δ là đường thẳng qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (P), khi đó Δ nhận vectơ $\vec{n}=(1;-1;-1)$ là một VTCP.

Phương trình đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x=4+t \\ y=-3-t \\ z=1-t \end{cases}$.

Điểm H là hình chiếu của M lên mặt phẳng (P) khi và chỉ khi $H=\Delta\cap(P)$.

$H\in\Delta$ nên tọa độ H(4+t; −3−t; 1−t).

$H\in(P)$ nên $(4+t)-(-3-t)-(1-t)+2=0\Leftrightarrow t=-\frac{8}{3}$, $H\left(\frac{4}{3};-\frac{1}{3};\frac{11}{3}\right)$.

M' đối xứng với M qua (P) khi và chỉ khi H là trung điểm của đoạn thẳng MM'.

Gọi M'(x'; y'; z'). Khi đó

$x'=2.\frac{4}{3}-4=-\frac{4}{3};y'=2\left(-\frac{1}{3}\right)+3=\frac{7}{3};z'=2.\frac{11}{3}-1=\frac{19}{3}\Rightarrow x'+y'+z'=\frac{22}{3}$.

→ **Đáp án A**

Câu 123:

Đường thẳng d có VTCP $\vec{u}=(3;-1;2)$.

H là hình chiếu của M lên đường thẳng d nên H(−1+3t; −1−t; 2+2t) và $\overrightarrow{MH}.\vec{u}=0$.

Với $\overrightarrow{MH}=(-3+3t;-1-t;-1+2t),\vec{u}=(3;-1;2)$ em có phương trình:

$$3(-3+3t)-(-1-t)+2(-1+2t)=0\Leftrightarrow t=\frac{5}{7}\Rightarrow H\left(\frac{8}{7};-\frac{12}{7};\frac{24}{7}\right).$$

M' là điểm đối xứng với điểm M qua đường thẳng d ⇔ H là trung điểm của MM'.

Suy ra $M'\left(\frac{2}{7};-\frac{24}{7};\frac{27}{7}\right)$.

→ **Đáp án D**

Câu 124:

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(1;-3;1)$, d qua M(1; −2; 0) và có VTCP $\vec{u}=(2;1;1)$

Vì $\begin{cases}\vec{n}.\vec{u}=0\\ M\notin(P)\end{cases}$ nên d//(P). Suy ra hình chiếu d' của d trên (P) cũng song song với d.

$\Rightarrow \vec{u}=(2;1;1)$ là một VTCP của d'.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M(1; −2; 0) trên (P) thì H thuộc d'.

Đường thẳng MH qua điểm M và vuông góc với (P) có phương trình: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1}$

Vì H =MH∩(P) nên tọa độ H là nghiệm của hệ: $\begin{cases}3x+y=1\\ x-z=1\\ x-3y+z-4=0\end{cases}\Leftrightarrow H\left(\frac{8}{11};-\frac{13}{11};-\frac{3}{11}\right)$

Đường thẳng $d':\begin{cases}\text{qua H}\\ \text{VTCP: }\vec{u}=(2;1;1)\end{cases}$ có phương trình là: $\begin{cases}x=\frac{8}{11}+2t\\ y=-\frac{13}{11}+t\\ z=-\frac{3}{11}+t\end{cases}$

→ **Đáp án A**

Câu 125:

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(1;-3;1)$.

Đường thẳng d qua M(2; –1; 2) và có VTCP $\vec{u}=(2;2;1)$

Vì $\vec{n}.\vec{u}=2-6+1=-3\neq 0$ nên d và (P) cắt nhau.

Gọi A =d ∩ (P).

Tọa độ của điểm A là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{2}\\ \dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}\\ x-3y+z-4=0\end{cases}\Leftrightarrow A(4;\ 1;\ 3)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và d'.

Em có (Q)⊥(P) suy ra VTPT của (Q) là $\overrightarrow{n_Q}=\left[\vec{n},\vec{u}\right]=(-5;1;8)$.

Vì d'=(P)∩(Q) nên VTCP của d' là $\vec{u'}=\left[\overrightarrow{n_Q},\vec{n}\right]=(25;13;14)$.

A∈d' nên d' có phương trình là $\dfrac{x-4}{25}=\dfrac{y-1}{13}=\dfrac{z-3}{14}$.

→ **Đáp án B**

Câu 126:

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(2;1;1)$.

Đường thẳng d qua M(4; 3; –1) và có VTCP $\vec{u}=(2;1;-5)$

Vì $\begin{cases}\vec{n}.\vec{u}=0\\ M\notin(P)\end{cases}$ nên d//(P).

Suy ra hình chiếu d' của d trên (P) cũng song song với d.

$\Rightarrow\vec{u}=(2;1;-5)$ là một VTCP của d'.

Gọi M' là điểm đối xứng với M qua (P).

Em có : MM' ⊥ (P) nên MM' có vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_{MM'}}=(2;1;1)$ và đi qua M.

Phương trình của đường thẳng MM' là: $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{1}$.

Gọi H = MM'∩ (P).

Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-3}{1}\\ \dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{1}\\ 2x+y+z-1=0\end{cases}\Leftrightarrow H\left(1;\dfrac{3}{2};-\dfrac{5}{2}\right)$

H là trung điểm của MM', em có $\begin{cases} x_{M'}=2x_H-x_M \\ y_{M'}=2y_H-y_M \\ z_{M'}=2z_H-z_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'}=-2 \\ y_{M'}=0 \\ z_{M'}=-4 \end{cases} \Rightarrow M'(-2;0;-4).$

Đường thẳng d' qua M' có VTCP $\vec{u}=(2;1;-5) \Rightarrow$ Phương trình d' là: $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+4}{-5}$.

→ Đáp án A

Dạng 5: Bài toán về khoảng cách

Phương pháp giải:

➢ **Bài toán 1:** Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P)

Bước 1: Xác định tọa độ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và phương trình tổng quát của mặt phẳng (P): Ax+By+Cz+D=0.

Bước 2: Áp dụng công thức tính $d(M,(P))=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

➢ **Bài toán 2:** Tính khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ

Bước 1: Xác định tọa độ điểm M, tọa độ điểm N∈Δ và một VTCP $\vec{u}$ của đường thẳng Δ.

Bước 2: Áp dụng công thức tính $d(M,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MN},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}$.

➢ **Bài toán 3:** Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng d và Δ

Bước 1: Xác định

✓ Tọa độ điểm M∈d và một VTCP $\vec{u}$ của đường thẳng.

✓ Tọa độ điểm N∈ Δ và một VTCP $\overrightarrow{u'}$ của đường thẳng.

Bước 2: Áp dụng công thức tính $d(\Delta,d)=\frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right].\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right]\right|}$.

Chú ý: Cho M(a; b; c)

- Khoảng cách từ M đến các mặt phẳng tọa độ

$d(M,Oyz)=|a|$; $d(M,Oxz)=|b|$; $d(M,Oxy)=|c|$

- Khoảng cách từ M đến các trục tọa độ

$d(M,Ox)=\sqrt{b^2+c^2}$; $d(M,Oy)=\sqrt{a^2+c^2}$; $d(M,Oz)=\sqrt{a^2+b^2}$

BÀI TẬP MẪU

Cơ bản

Câu 127: Trong không gian Oxyz cho điểm A(1; 2; 0) và mặt phẳng (P): x+5y−3z+1=0. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) bằng

A. $\frac{9}{\sqrt{5}}$. B. $\frac{9}{\sqrt{35}}$. C. $\frac{12}{\sqrt{5}}$. D. $\frac{12}{\sqrt{35}}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng em có:

$$d(A,(P))=\frac{|1+5.2-3.0+1|}{\sqrt{1^2+5^2+(-3)^2}}=\frac{12}{\sqrt{35}}$$ → **Đáp án D**

Câu 128: Trong không gian Oxyz cho điểm M(1; –5; –4). Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (Oxz) bằng

A. 5. **B.** $\sqrt{41}$. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** $\sqrt{26}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức tính nhanh khoảng cách từ một điểm đến (Oxz) em có:

$$d(M,Oxz)=|-5|=5$$

→ **Đáp án A**

Câu 129: Trong không gian Oxyz cho điểm M(2; 3; –1) và đường thẳng Δ: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$.

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ bằng

A. $\sqrt{\frac{85}{13}}$. **B.** $\frac{\sqrt{73}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{146}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{170}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Đường thẳng d đi qua N(1; –1; 0) có VTCP $\vec{u}=(2;-1;2)$.

Khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ được tính theo công thức: $d(M,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MN},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}$

$$\overrightarrow{MN}=(-1;-4;1),\vec{u}=(2;-1;2),\left[\overrightarrow{MN},\vec{u}\right]=(-7;4;9)\Rightarrow d(M,\Delta)=\frac{\sqrt{(-7)^2+4^2+9^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{\sqrt{146}}{3}$$

→ **Đáp án C**

Cách 2: Với bài toán này em có thể tìm tọa độ hình chiếu H của M lên đường thẳng Δ, độ dài MH chính là khoảng cách từ M đến đường thẳng. Rõ ràng **Cách 1** tối ưu hơn.

Câu 130: Trong không gian Oxyz cho N(–2; –1; 6). Khoảng cách từ N đến trục Ox bằng

A. $2\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 2. **D.** $\sqrt{37}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức tính nhanh khoảng cách từ một điểm đến trục Ox em có:

$$d(N,Ox)=\sqrt{(-1)^2+6^2}=\sqrt{37}$$

→ **Đáp án D**

♥ Vận dụng

Câu 131: Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng Δ_1: $\begin{cases}x=1+t\\y=-1-4t\\z=1+2t\end{cases}$ và Δ_2: $\begin{cases}x=2+t\\y=-1\\z=1-t\end{cases}$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 bằng

A. 0. B. 1. C. $\frac{4}{\sqrt{41}}$. D. $2\sqrt{\frac{5}{21}}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Sử dụng công thức tính khoảng cách:

Đường thẳng Δ_1 đi qua M(1; −1; 1) có VTCP $\overrightarrow{u_1}=(1;-4;2)$.

Đường thẳng Δ_2 đi qua N(2; −1; 1) có VTCP $\overrightarrow{u_1}=(1;0;-1)$.

Em có $\overrightarrow{MN}=(1;0;0), [\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]=(4;3;4)\Rightarrow [\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{MN}=4\neq 0$

Suy ra hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng được tính bởi công thức: $d=\frac{\left|[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{MN}\right|}{\left|[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]\right|}=\frac{4}{\sqrt{41}}$

→ **Đáp án C**

Cách 2: Sử dụng công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng:

- Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ_1 song song $\Delta_2\Rightarrow$ (P) là mặt phẳng qua M và có VTPT $[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]=(4;3;4)$.

Phương trình của mặt phẳng (P): $4(x-1)+3(y+1)+4(z-1)\Leftrightarrow 4x+3y+4z-5=0$.

- Tính khoảng cách:

$$d(\Delta_1,\Delta_2)=d(N;(P))=\frac{|4.2-3+4-5|}{\sqrt{4^2+3^2+4^2}}=\frac{4}{\sqrt{41}}.$$

Câu 132: Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng Δ_1: $\begin{cases}x=1+t\\y=-1-2t\\z=3+2t\end{cases}$ và Δ_2: $\begin{cases}x=2+t\\y=-1-2t\\z=1+2t\end{cases}$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 bằng

A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. B. 2. C. $\frac{\sqrt{34}}{3}$. D. 0.

Hướng dẫn giải

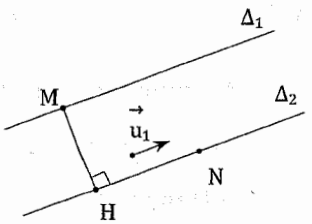
Δ_1 đi qua M(1; −1; 3) có VTCP $\overrightarrow{u_1}=(1;-2;2)$.

Δ_2 đi qua N(2; −1; 1) có VTCP $\overrightarrow{u_2}=(1;-2;2)$.

Em có $\overrightarrow{u_1}=\overrightarrow{u_2}$ và $M\notin\Delta_2$ suy ra $\Delta_1 // \Delta_2$.

$\overrightarrow{MN}=(1;0;-2), \overrightarrow{u_1}=(1;-2;2)$

$\rightarrow [\overrightarrow{MN},\overrightarrow{u_1}]=(-4;-4;-2)$



Khoảng cách giữa Δ_1 Δ_2 được tính bởi công thức: $d(\Delta_1,\Delta_2)=d(M,\Delta_2)=\frac{\left|[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{u_2}]\right|}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|}=2$

→ **Đáp án B**

Câu 133: Cho mặt phẳng (P): x+2y–z+1=0 và điểm A(1; 0; 3). Phương trình mặt phẳng (Q) song song với (P) và cách A một khoảng $h=\sqrt{6}$

A. x + 2y – z +4 = 0. B. x + 2y – z +8 = 0 và x + 2y – z –4 = 0.

C. x + 2y – z – 8 = 0. D. x + 2y + z +8 = 0 và x + 2y + z –4 = 0.

Hướng dẫn giải:

Phương pháp chung

(Q)//(P) nên phương trình của (Q) có dạng: x+2y–z+D=0 (D≠1)

Vì (Q) cách A một khoảng bằng $\sqrt{6}$ nên

$$d(A,(Q))=\sqrt{6}\Leftrightarrow\frac{|1+0-3+D|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\sqrt{6}\Leftrightarrow|D-2|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D=8\\D=-4\end{array}\right.\text{ (thỏa mãn)}$$

→ **Đáp án B**

Phương pháp giải nhanh

Có hai mặt phẳng song song với (P) và cách A một khoảng $h=\sqrt{6}$, vì vậy A và C không thích hợp. Hai mặt phẳng trong phương án D không song song với (P) nên D cũng không thích hợp.

→ **Đáp án B**

*** Nâng cao**

Câu 134: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng Δ: $\begin{cases}x=1+t\\y=-1-t\\z=1+2t\end{cases}$ và hai mặt phẳng (P): x+3y+z–1=0, (Q): 3x–y+z+2=0. Gọi $M(x_M; y_M; z_M)$ là điểm có hoành độ dương nằm trên Δ và cách đều hai mặt phẳng (P), (Q). Tổng $x_M+y_M+z_M$ bằng

A. 1. B. $-\frac{2}{3}$. C. –2. D. 0.

Hướng dẫn giải

Vì M∈Δ nên $x_M=1+t$; $y_M=-1-t$; $z_M=1+2t$ (Điều kiện $t>-1$).

Vì M cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) nên $d(M,(P))=d(M,(Q))$

$$\Leftrightarrow\frac{|1+t+3(-1-t)+1+2t-1|}{\sqrt{1^2+3^2+1^2}}=\frac{|3(1+t)-(-1-t)+1+2t+2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+1^2}}\Leftrightarrow 2=|6t+7|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\frac{5}{6}\\t=-\frac{3}{2}\end{array}\right.$$

Vì $t>-1$ nên $t=-\frac{3}{2}$.

Em có $x_M+y_M+z_M=1+2t=-\frac{2}{3}$ → **Đáp án B**

Câu 135: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm A(1; 3; 5). Gọi (α) là mặt phẳng chứa Ox và cách A một khoảng dài nhất. Điểm nào trong số các điểm sau thuộc (α)?

A. M(2; –3; 5). B. N(1; –5; 3). C. P(1; 0; –1). D. Q(–5; 3; 0).

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (α) chứa trục Ox nên phương trình có dạng By+Cz=0 (điều kiện $B^2+C^2>0$).

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (α) là

$$d\left(A,(\alpha)\right)=\frac{|3B+5C|}{\sqrt{B^2+C^2}}\le\frac{\sqrt{3^2+5^2}.\sqrt{B^2+C^2}}{\sqrt{B^2+C^2}}=\sqrt{34}$$ (BĐT Bunhiacopxki).

Như vậy khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất $d=\sqrt{34}$ khi $\frac{B}{3}=\frac{C}{5}\Leftrightarrow B=\frac{3}{5}C$.

Do B, C không đồng thời bằng 0 nên chọn B=3, C=5.

Phương trình mặt phẳng (α): 3y+5z=0

→ Đáp án B

Cách khác: Với bài tập này em có thể sử dụng phương pháp loại trừ các đáp án:

- (α) chứa trục Ox nên phương trình có dạng By+Cz=0 (điều kiện $B^2+C^2>0$).

  Do vậy hai điểm P và Q không thuộc (α) ⇒ Loại đáp án C và D.
- Gọi (P) là mặt phẳng chứa Ox và đi qua M ⇒ Phương trình (P): 5y+3z=0.

  (Q) là mặt phẳng chứa Ox và đi qua N ⇒ Phương trình (Q): 3y+5z=0.
- Vì $d\left(M,(P)\right)<d\left(M,(Q)\right)$ nên chọn đáp án B.

→ Đáp án B

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 136: Trong không gian Oxyz cho M(3; 7; −4). Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (Oxy) là

A. 7. B. 4. C. $\sqrt{58}$. D. 5.

Câu 137: Trong không gian Oxyz cho điểm N(−2; 5; 6). Khoảng cách từ N đến trục Oy bằng

A. $2\sqrt{10}$. B. 6. C. 5. D. $\sqrt{29}$.

Câu 138: Trong không gian Oxyz, cho điểm M(1; -2; 1). Phương trình mặt phẳng (P) song song với (Oyz) và cách M một khoảng h=3 là

A. x−2 = 0. B. y +2 = 0. C. z−4=0. D. x−4=0.

Câu 139: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng Δ: $\begin{cases}x=t\\y=-1+t\\z=1+t\end{cases}$ mặt phẳng (P): 3y−4z−6=0. Gọi $M(x_M; y_M; z_M)$ là điểm có hoành độ dương nằm trên Δ đồng thời cách đều hai mặt phẳng (P) và Oxy. Tổng $x_M+y_M+z_M$ bằng

A. 3. B. 4. C. 6. D. −9.

Câu 140: Trong không gian Oxyz cho điểm A(4; 2; −3) và mặt phẳng (P): 3x−y−4z+7=0. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) bằng

A. $\frac{29}{\sqrt{26}}$. B. $\frac{5}{\sqrt{26}}$. C. $\sqrt{29}$. D. $\frac{5}{\sqrt{29}}$.

Câu 141: Trong không gian Oxyz cho điểm M(2; −3; 3) và đường thẳng Δ: $\frac{x}{2}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z-1}{1}$.

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ bằng

A. $\sqrt{\frac{4}{21}}$. **B.** $\sqrt{\frac{33}{2}}$. **C.** $2\sqrt{\frac{11}{7}}$. **D.** $2\sqrt{\frac{41}{21}}$.

Câu 142: Trong không gian Oxyz cho hai mặt phẳng (P): x+y−z+1=0, (Q): x−y+z−5=0. Điểm trên trục Oz cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) có tọa độ là

A. (0; 0; −2). **B.** (0; 0; 3). **C.** (0; 0; −3). **D.** (0; 3; 0).

Câu 143: Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng (Q): 2x−4y+4z+3=0, điểm B(2; −3; 4). Mặt phẳng (P) song song với (Q) và cách B một khoảng bằng 3. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. 2x−4y+4z−14=0. **B.** 2x−4y+4z+10=0.

C. 2x−4y+4z+50=0. **D.** 2x−4y+4z−26=0.

Câu 144: Trong không gian Oxyz cho biết mặt phẳng (P) song song và cách mặt phẳng (Q): 4x+3y−2z+5=0 một khoảng bằng $\sqrt{29}$. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. 4x+3y−2z+28=0. **B.** 4x+3y−2z−34=0.

C. 3x+4y−2z+35=0. **D.** −4x−3y+2z+24=0.

Câu 145: Trong không gian Oxyz cho M(−2; 0; 0), N(0; 3; 0). Phương trình mặt phẳng chứa M, N và cách gốc tọa độ O một khoảng bằng $\frac{6}{7}$ là

A. 3x+2y+6z+6=0. **B.** −3x+2y+3z−6=0.

C. 3x−2y+6z+6=0. **D.** 2x−3y−6z−6=0.

Câu 146: Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x+2}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-1}$, $d_2:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+4}{2}$. Điểm M thuộc d_1 cách d_2 một khoảng bằng $\sqrt{5}$. Tổng tọa độ điểm M nhận giá trị lớn nhất bằng

A. 15. **B.** 5. **C.** 16. **D.** 6.

Câu 147: Trong không gian Oxyz cho ba đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=-1+t\\y=-1-t\\z=0\end{cases}$, $d_2:\begin{cases}x=-4+t'\\y=0\\z=-t'\end{cases}$ và $\Delta:\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=z$. Gọi $M(x_M; y_M; z_M)$ là điểm thuộc Δ và cách đều d_1, d_2. Tìm khẳng định **sai.**

A. $x_M+y_M+z_M=\frac{9}{2}$. **B.** $x_My_Mz_M<0$. **C.** $x_M^2+y_M^2+z_M^2>0$. **D.** $x_M-y_M+z_M=0$.

Câu 148: Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1:\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-5}{t}$, $d_2:\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{2}$. Khoảng cách giữa d_1 và d_2 bằng

A. $\frac{42}{\sqrt{98}}$. **B.** $\frac{10}{\sqrt{98}}$. **C.** $\frac{60}{\sqrt{98}}$. **D.** $\frac{10}{\sqrt{26}}$.

Câu 149: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm P(2; −1; 3), Q(3; 2; 1). Gọi (α) là mặt phẳng chứa P và cách Q một khoảng dài nhất. Phương trình mặt phẳng (α) là

A. 3x+y−z−2=0. **B.** x+3y−2z+7=0.

C. x−2y−3z−18=0. **D.** 6x+2y−3z−1=0.

ĐÁP ÁN

136	137	138	139	140	141	142
B	A	D	C	A	C	B
143	**144**	**145**	**146**	**147**	**148**	**149**
A	D	C	A	A	B	B

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 136:

Áp dụng công thức tính nhanh khoảng cách từ một điểm đến (Oxy) em có:

$$d(M,Oxy)=|-4|=4$$

→ **Đáp án B**

Câu 137:

Áp dụng công thức tính nhanh khoảng cách từ một điểm đến trục Oy em có:

$$d(N,Oy)=\sqrt{(-2)^2+6^2}=2\sqrt{10}\ .$$

→ **Đáp án A**

Câu 138:

Mặt phẳng (P) song song với (Oyz) nên phương trình của (P) có dạng: x+D=0 (D≠0).

Vì (P) cách M một khoảng bằng 3 nên $d(M,(P))=3\Leftrightarrow|1+D|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D=2\\D=-4\end{array}\right.$.

→ **Đáp án D**

Câu 139:

Điểm M thuộc đường thẳng Δ nên $x_M=t$; $y_M=-1+t$; $z_M=1+t$ (Điều kiện t > 0).

Vì M cách đều hai mặt phẳng (P) và (Oxy) nên

$$d(M,(P))=d(M,Oxy)\Leftrightarrow\frac{|3(-1+t)-4(1+t)-6|}{\sqrt{0^2+3^2+(-4)^2}}=|1+t|\Leftrightarrow|-t-13|=5.|1+t|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=-3\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện: $t=2\Rightarrow x_M+y_M+z_M=3t=6$.

→ **Đáp án C**

Câu 140:

Áp dụng công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng em có:

$$d(A,(P))=\frac{|3.4-2-4(-3)+7|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-4)^2}}=\frac{29}{\sqrt{26}}$$

→ **Đáp án A**

Câu 141:

Đường thẳng d đi qua N(0; −3; 1) có VTCP $\vec{u}=(2;-4;1)$.

Khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ được tính theo công thức: $d(M,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MN},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}$

Em có: $\overrightarrow{MN}=(-2;0;-2), \vec{u}=(2;-4;1)\Rightarrow[\overrightarrow{MN},\vec{u}]=(-8;-2;8)$.

Do vậy: $d(M,\Delta)=\dfrac{\sqrt{(-8)^2+(-2)^2+8^2}}{\sqrt{2^2+(-4)^2+1^2}}=2\sqrt{\dfrac{11}{7}}$

→ **Đáp án C**

Câu 142:

Gọi M(0; 0; m) là điểm trên trục Oz cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q).

Em có: $d(M,(P))=d(M,(Q))\Leftrightarrow\dfrac{|-m+1|}{\sqrt{3}}=\dfrac{|m-5|}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow m=3\Rightarrow M(0;0;3)$.

→ **Đáp án B**

Câu 143:

(P)//(Q) nên phương trình của (P) có dạng: 2x−4y+4z+D=0 (D≠3).

Vì B cách (P) một khoảng bằng 3 nên

$$d(B,(P))=3\Leftrightarrow\frac{|2.2-4(-3)+4.4+D|}{\sqrt{2^2+(-4)^2+4^2}}=3\Leftrightarrow|D+32|=18\Leftrightarrow\begin{bmatrix}D=-14\\D=-50\end{bmatrix}$$

→ **Đáp án A**

Câu 144:

(P)//(Q) nên phương trình của (P) có dạng: 4x+3y−2z+D=0(D≠5).

Lấy M(0; −1; 1)∈(Q). Khi đó $d((Q),(P))=d(M,(P))$

Vì (P) cách (Q) một khoảng bằng $\sqrt{29}$ nên

$$d(M,(P))=\sqrt{29}\Leftrightarrow\frac{|4.0+3(-1)-2.1+D|}{\sqrt{4^2+3^2+(-2)^2}}=\sqrt{29}\Leftrightarrow|D-5|=29\Leftrightarrow\begin{bmatrix}D=34\\D=-24\end{bmatrix}$$

→ **Đáp án D**

Câu 145:

Gọi (P) mặt phẳng cần tìm. Phương trình (P): Ax+By+Cz+D=0 ($A^2+B^2+C^2>0$).

Vì (P) chứa M, N nên em có hệ phương trình $\begin{cases}-2A+D=0\\3B+D=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\dfrac{1}{2}D\\B=-\dfrac{1}{3}D\end{cases}$

Khoảng cách từ O(0; 0; 0) đến mặt phẳng (P) là:

$$d(O;(P))=\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{6}{7}\Leftrightarrow 49D^2=36\left(\frac{1}{4}D^2+\frac{1}{9}D^2+C^2\right)\Leftrightarrow D^2=C^2\Leftrightarrow C=\pm D.$$

Do A, B, C không đồng thời bằng 0 nên D≠0. Chọn D=6.

Phương trình mặt phẳng (P): $3x-2y\pm6z+6=0$ → **Đáp án C**

Câu 146:

Đường thẳng d_2 qua N(0; 1; −4) và có VTCP $\vec{u}=(2;-1;2)$

Điểm M thuộc d_1 nên M(−2−2t; 2+t; −1−t).

Khoảng cách từ M đến d_2 là: $d(M,d_2)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{MN},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$

Em có: $\overrightarrow{MN}=(2+2t;-1-t;-3+t),\vec{u}=(2;-1;2)\Rightarrow[\overrightarrow{MN},\vec{u}]=(-5-t;-10-2t;0).$

$$\Rightarrow d(M,d_2)=\frac{\sqrt{(-5-t)^2+(-10-2t)^2+0^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow\sqrt{5t^2+50t+125}=3\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow 5t^2+50t+125=9.5\Leftrightarrow t^2+10t+16=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-8\\t=-2\end{array}\right.$$

Tổng tọa độ điểm M là: T=−2−2t+2+t−1−t=−1−2t. Vậy T_{max}=−1−2(−8)=15. → **Đáp án A**

Câu 147:

Đường thẳng d_1 qua N_1(−1; −1; 0) và có VTCP $\overrightarrow{u_1}=(1;-1;0)$

Đường thẳng d_2 qua N_2(−4; 0; 0) và có VTCP $\overrightarrow{u_2}=(1;0;-1)$

Điểm M thuộc Δ nên M(2m; 3m; m)

Khoảng cách từ M đến d_1 là: $d(M,d_1)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{MN_1},\overrightarrow{u_1}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|}$

Em có: $\overrightarrow{MN_1}=(-1-2m;-1-3m;-m),\overrightarrow{u_1}=(1;-1;0)\Rightarrow[\overrightarrow{MN_1},\overrightarrow{u_1}]=(-m;-m;2+5m).$

Do vậy: $d(M,d_1)=\dfrac{\sqrt{(-m)^2+(-m)^2+(2+5m)^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}}=\sqrt{\dfrac{27m^2+20m+4}{2}}$

Khoảng cách từ M đến d_2 là: $d(M,d_2)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{MN_2},\overrightarrow{u_2}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$

Em có: $\overrightarrow{MN_2}=(-4-2m;-3m;-m),\overrightarrow{u_2}=(1;0;-1)\Rightarrow[\overrightarrow{MN_2},\overrightarrow{u_2}]=(3m;-4-3m;3m).$

Do vậy: $d(M,d_1)=\dfrac{\sqrt{(3m)^2+(-4-3m)^2+(3m)^2}}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\sqrt{\dfrac{27m^2+24m+16}{2}}$

M cách đều d_1 và d_2 nên $d(M,d_1)=d(M,d_2)$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{27m^2+20m+4}{2}}=\sqrt{\frac{27m^2+24m+16}{2}}\Leftrightarrow m=-3\rightarrow M(-6;-9;-3)$$

→ **Đáp án A**

Câu 148:

Đường thẳng d_1 qua N_1(2; 3; 5) và có VTCP $\overrightarrow{u_1}=(-1;2;1)$.

Đường thẳng d_2 qua N_2(3; −1; 2) và có VTCP $\overrightarrow{u_2}=(2;5;2)$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1, d_2 là: $d=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{N_1N_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\right|}$.

Ở đó $\overrightarrow{N_1N_2}=(1;-4;-3)$, $[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]=(-1;4;-9)$. Suy ra $d=\dfrac{|-1-16+27|}{\sqrt{(-1)^2+4^2+(-9)^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{98}}$.

→ **Đáp án B**

Câu 149:

Mặt phẳng (α) có phương trình dạng Ax+By+Cz+D=0 (điều kiện $A^2+B^2+C^2>0$)

Vì P thuộc (α) nên $2A-B+3C+D=0\Leftrightarrow D=-2A+B-3C$.

Khoảng cách từ Q đến mặt phẳng (α) là:

$$d(Q,(\alpha))=\frac{|3A+2B+C+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|A+3B-2C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\le\frac{\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\sqrt{14}.$$

Như vậy khoảng cách từ Q đến (α) lớn nhất $d=\sqrt{14}$ khi $\dfrac{A}{1}=\dfrac{B}{3}=\dfrac{C}{-2}$.

Do A, B, C không đồng thời bằng 0 nên chọn A=1, B=3, C=−2. Suy ra D=7.

Phương trình mặt phẳng (α): x+3y−2z+7=0. → **Đáp án B**

Dạng 6: Bài toán về góc

Phương pháp giải:

➢ **Bài toán 1:** Tính góc giữa hai đường thẳng a, b

Bước 1: Xác định tọa độ hai VTCP tương ứng của hai đường thẳng a, b là $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3),\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$.

Bước 2: Gọi α là góc giữa hai đường thẳng a và b. Áp dụng công thức

$$\cos\alpha=\left|\cos(\vec{a},\vec{b})\right|=\frac{|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

➢ **Bài toán 2:** Tính góc giữa hai mặt phẳng (P), (Q)

Bước 1: Xác định tọa độ hai VTPT tương ứng của (P), (Q) là $\overrightarrow{n_1}=(A_1;B_1;C_1),\overrightarrow{n_2}=(A_2;B_2;C_2)$.

Bước 2: Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (P), (Q). Áp dụng công thức

$$\cos\varphi=\left|\cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})\right|=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}.\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

➢ **Bài toán 3:** Tính góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P)

Bước 1: Xác định

✓ VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$ của đường thẳng d.

✓ VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$ của mặt phẳng (P).

Bước 2: Gọi β là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P).

Áp dụng công thức $\sin\beta=\left|\cos(\vec{u},\vec{n})\right|=\dfrac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

BÀI TẬP MẪU

Cơ bản

Câu 150: Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng $a:\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{5}=\frac{z+3}{-1}$ và $b:\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{1}$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng a và b. Chọn đáp án đúng.

A. $\alpha\approx 87^0 38'$. **B.** $\alpha\approx 86^0 8'$. **C.** $\alpha\approx 2^0 22'$. **D.** $\alpha\approx 3^0 42'$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng a có VTCP $\vec{u}=(4;5;-1)$, đường thẳng b có VTCP $\vec{v}=(3;-2;1)$. Em có:

$$\cos\alpha=\left|\cos(\vec{u},\vec{v})\right|=\frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}=\frac{|4.3+5.(-2)+(-1).1|}{\sqrt{4^2+5^2+(-1)^2}.\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{42}.\sqrt{14}}=\frac{1}{14\sqrt{3}}$$

Suy ra: $\alpha\approx 87^0 38'$ → **Đáp án A**

Câu 151: Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng (P): 2x−y+z+10=0, (Q): x+y+2z−1=0. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P), (Q). Chọn đáp án đúng

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (P) có VTPT $\overrightarrow{n_P}=(2;-1;1)$.

Mặt phẳng (Q) có VTPT $\overrightarrow{n_Q}=(1;1;2)$.

Em có: $\cos\alpha=\left|\cos(\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q})\right|=\frac{|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}|}{|\overrightarrow{n_P}|.|\overrightarrow{n_Q}|}=\frac{|2.1+(-1).1+1.2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}.\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{1}{2}$

Suy ra $\alpha=60^0$.

→ **Đáp án C**

Câu 152: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng d: $\begin{cases}x=-1+2t\\y=1+t\\z=3+t\end{cases}$ và mặt phẳng (P) có phương trình 2x+4y−2z+3=0. Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng

A. 45^0. **B.** 90^0. **C.** 30^0. **D.** 60^0.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d có VTCP $\vec{u}=(2;1;1)$.

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(2;4;-2)$

Gọi α là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P). Khi đó:

$$\sin\alpha=\left|\cos(\vec{u},\vec{n})\right|=\frac{|2.2+1.4+1.(-2)|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}.\sqrt{2^2+4^2+(-2)^2}}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=30^0$$

→ **Đáp án C**

♥ Vận dụng

Câu 153: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho tứ diện ABCD có A(1; 1; 1), B(3; 3; 1), C(3; 1; 3), D(1; 3; 3). Gọi α là góc giữa cạnh bên AB và mặt phẳng (BCD). Chọn đáp án đúng

A. $\alpha \approx 125^0 16'$. **B.** $\alpha \approx 54^0 44'$. **C.** $\alpha \approx 35^0 16'$. **D.** $\alpha = 90^0$.

Hướng dẫn giải

Em có $\overrightarrow{AB}=(2;2;0), \overrightarrow{BC}=(0;-2;2), \overrightarrow{BD}=(-2;0;2), [\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}]=(-4;-4;-4)$.

Đường thẳng AB có VTCP $\overrightarrow{AB}=(2;2;0)$.

Mặt phẳng (BCD) nhận $\vec{n}=\frac{-1}{4}[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}]=(1;1;1)$.

Gọi α là góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD). Khi đó:

$$\sin\alpha=\left|\cos\left(\overrightarrow{AB},\vec{n}\right)\right|=\frac{|2.1+2.1+0.1|}{\sqrt{2^2+2^2+0^2}.\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}}\Rightarrow\alpha\approx 54^0 44' \rightarrow \textbf{Đáp án B}$$

*** Nâng cao**

Câu 154: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$ và mặt phẳng (P): $-2x+y-2z+3=0$. Phương trình mặt phẳng (Q) chứa Δ và tạo với (P) một góc nhỏ nhất là

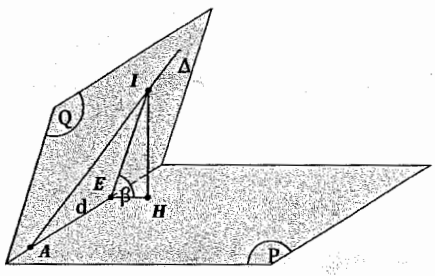
A. $10x-7y+13z-13=0$. **B.** $-x+6y+4z-4=0$.

C. $-2x+y-2z+3=0$. **D.** $-2x+y-2z+5=0$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng Δ có VTCP $\overrightarrow{u_\Delta}=(2;1;-1)$

Mặt phẳng (P) có VTPT $\overrightarrow{n_P}=(-2;1;-2)$.



Gọi $A=\Delta\cap(P)\rightarrow A(2;1;0)$.

Gọi $d=(P)\cap(Q)$.

Lấy $I\in\Delta$, H là hình chiếu của I lên (P).

Dựng HE vuông góc với d.

Suy ra $\widehat{IEH}=\beta$ là góc giữa (P) và (Q).

Em có: $\tan\beta=\frac{IH}{EH}\geq\frac{IH}{AH}$. Dấu "=" xảy ra khi $E\equiv A$.

Khi đó đường thẳng d vuông góc với Δ tại A. Chọn $\overrightarrow{u_d}=[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{n_P}]=(-1;6;4)$.

Như vậy (Q) là mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau a và Δ. Do đó (Q) đi qua A và nhận vectơ $\overrightarrow{u_Q}=[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{u_d}]=(10;-7;13)$.

Phương trình mặt phẳng (Q): $10(x-2)-7(y-1)+13z=0\Leftrightarrow 10x-7y+13z-13=0$

→ Đáp án A

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 155: Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng $a:\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+3}{-1}$, $b:\frac{x}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{3}$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng a và b. Chọn đáp án đúng.

A. $\alpha\approx 13^0 9'$. **B.** $\alpha\approx 76^0 51'$. **C.** $\alpha\approx 103^0 9'$. **D.** $\alpha\approx 56^0 9'$.

Câu 156: Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng (P): 2x+4y−z+3=0, (Q): x−y+2z−5=0. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P), (Q). Chọn đáp án đúng

A. $\alpha\approx 26^0 34'$. **B.** $\alpha\approx 63^0 26'$. **C.** $\alpha\approx 20^0 53'$. **D.** $\alpha\approx 69^0 7'$.

Câu 157: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng d: $\begin{cases}x=1+5t\\y=1+t\\z=2\end{cases}$ và mặt phẳng (P) có phương trình 3x−2y+4=0. Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng

A. 45^0. **B.** 90^0. **C.** 135^0. **D.** 60^0.

Câu 158: Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=-2+t\\y=1-\sqrt{2}t\\z=2\end{cases}$, d_2 là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P):2x+\sqrt{2}y-1=0,(Q):2x+2z-3=0$. Góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 bằng

A. $\alpha=30^0$. **B.** $\alpha=60^0$. **C.** $\alpha=120^0$. **D.** $\alpha=45^0$.

Câu 159: Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng (P): x−2y+2z+3=0, (Q): 2x+2y+z+1=0. Gọi d là đường thẳng qua A(0; 0; −1) nằm trong mặt phẳng (Q) và hợp với (P) góc 45^0. Phương trình của đường thẳng d là

A. $\begin{cases}x=-2t\\y=t\\z=-1+2t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=0\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=-1-4t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=1\\y=1\\z=-4-t\end{cases}$

Câu 160: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P): 2x−y+z−3=0. Gọi (Q) là mặt phẳng qua M(−2; 1; 2), gốc tọa độ O và hợp với (P) góc 30^0. Phương trình của mặt phẳng (Q) là

A. x−z=0. **B.** −3x+4y+5z=0. **C.** x+z−1=0. **D.** 3x−4y+5z=0.

ĐÁP ÁN

155	156	157	158	159	160
B	D	A	A	C	D

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 155:

Đường thẳng a có VTCP $\vec{u}=(1;2;-1)$, đường thẳng b có VTCP $\vec{v}=(4;-2;3)$

Em có:

$$\cos\alpha=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right|=\frac{\left|\vec{u}.\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}=\frac{\left|1.4+2.(-2)+(-1).3\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}.\sqrt{4^2+(-2)^2+3^2}}=\frac{3}{\sqrt{174}}\Rightarrow\alpha\approx76^0 51'$$

→ **Đáp án B**

Câu 156:

Mặt phẳng (P) có VTPT $\overrightarrow{n_P}=(2;4;-1)$, mặt phẳng (Q) có VTPT $\overrightarrow{n_Q}=(1;-1;2)$.

Em có:

$$\cos\alpha=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{n_Q}\right|}=\frac{\left|2.1+4.(-1)+(-1).2\right|}{\sqrt{2^2+4^2+(-1)^2}.\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{4}{\sqrt{126}}\Rightarrow\alpha\approx69^0 7'$$

→ **Đáp án D**

Câu 157:

Đường thẳng d có VTCP $\vec{u}=(5;1;0)$, mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(3;-2;0)$.

Gọi α là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P). Khi đó:

$$\sin\alpha=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{n}\right)\right|=\frac{\left|5.3+1.(-2)+0.0\right|}{\sqrt{5^2+1^2+0^2}.\sqrt{3^2+(-2)^2+0^2}}=\frac{13}{13\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\alpha=45^0$$

→ **Đáp án A**

Câu 158:

Đường thẳng d_1 có VTCP $\vec{u}=\left(1;-\sqrt{2};0\right)$.

Hai mặt phẳng (P), (Q) có VTPT theo thứ tự là $\overrightarrow{n_P}=\left(2;\sqrt{2};0\right)$, $\overrightarrow{n_Q}=(1;0;1)$.

Đường thẳng d_2 =(P) ∩ (Q) nên có VTCP $\vec{v}=[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}]=\left(\sqrt{2};-2;-\sqrt{2}\right)$.

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2. Em có:

$$\cos\alpha=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right|=\frac{\left|\vec{u}.\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}=\frac{\left|1.\sqrt{2}-\sqrt{2}.(-2)+0.\left(-\sqrt{2}\right)\right|}{\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2+0^2}.\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+(-2)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\alpha=30^0.$$

→ **Đáp án A**

Câu 159:

Mặt phẳng (P) có VTPT $\overrightarrow{n_P}=(1;-2;2)$, mặt phẳng (Q) có VTPT $\overrightarrow{n_Q}=(2;2;1)$.

Giả sử đường thẳng d có một VTCP là $\vec{u}=(a;b;c)$ với điều kiện $a^2+b^2+c^2>0$.

+ $d\subset(Q)\Rightarrow\vec{u}\perp\overrightarrow{n_Q}\Rightarrow2a+2b+c=0$

+ Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng 45^0 nên

$$\sin45^0=\left|\cos\left(\vec{u},\overrightarrow{n_P}\right)\right|=\frac{\left|a-2b+2c\right|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\left|-3a-6b\right|}{3\sqrt{a^2+b^2+(-2a-2b)^2}}\ (\text{Do } c=-2a-2b)$$

$$\Leftrightarrow\left(5a^2+5b^2+8ab\right)=2\left(a^2+4b^2+4ab\right)\Leftrightarrow a^2=b^2\Leftrightarrow a=\pm b$$

Do a, b, c không đồng thời bằng 0 nên chọn b=1. Suy ra a=1, c=−4 hoặc a=−1, c=0

→ **Đáp án C**

Câu 160:

Mặt phẳng (P) có VTPT $\overrightarrow{n_P}=(2;-1;1)$.

Giả sử mặt phẳng (Q) có VTPT $\overrightarrow{n_Q}=(A;B;C)$, $A^2+B^2+C^2>0$.

Vì (Q) qua gốc tọa độ O(0; 0; 0) nên (Q) có phương trình: Ax+By+Cz=0.

Hơn nữa M(−2; 1; 2)∈(Q) nên −2A+B+2C=0⇔B=2A−2C.

Góc giữa hai mặt phẳng (P), (Q) bằng 30^0 nên $\cos 30^0=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right)\right|$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{|2A-B+C|}{\sqrt{6}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\Leftrightarrow 5A^2+3C^2-8AC=0.$$

Do A, B, C không đồng thời bằng 0 nên C≠0.

Chọn C=1 thì $5A^2-8A+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A=1\Rightarrow B=0\\A=\frac{3}{5}\Rightarrow B=-\frac{4}{5}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}(Q):x+z=0\\(Q):3x-4y+5z=0\end{array}\right.$

→ Đáp án D

"Nếu muốn làm – Bạn sẽ tìm cách.

Nếu không muốn làm – Bạn sẽ tìm lí do".

CHỦ ĐỀ 3: MẶT CẦU

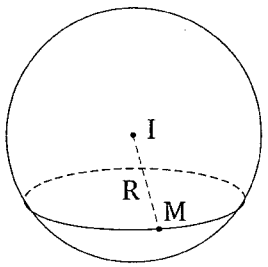
A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Phương trình mặt cầu

Trong không gian Oxyz

➢ Mặt cầu (S) tâm I(a; b; c), bán kính R có phương trình

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$



trong đó a, b, $c\in\mathbb{R}, R>0$.

➢ Phương trình

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0\left(a^2+b^2+c^2-d>0\right)$$

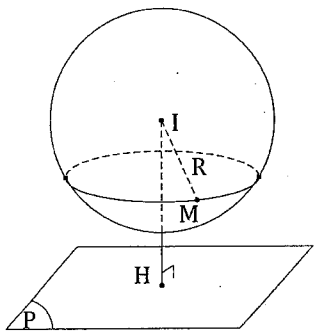
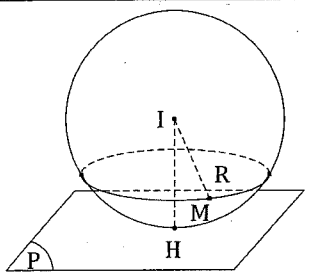
là phương trình của một mặt cầu có tâm I(a; b; c) và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

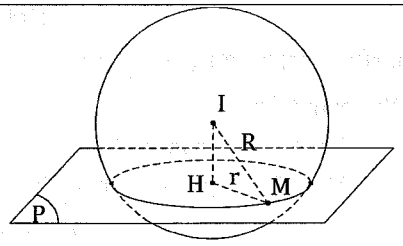
2. Vị trí tương đối của mặt cầu và mặt phẳng

Trong không gian Oxyz, cho

Mặt cầu (S) tâm I(a; b; c) bán kính R.

Mặt phẳng (P): Ax+By+Cz+D=0.

Vị trí tương đối	Điều kiện	Mô tả
$(S)\cap(P)=\varnothing$ Mặt phẳng và mặt cầu <u>không có điểm chung</u>	$d(I;(P))>R$ $\Leftrightarrow\dfrac{\lvert Aa+Bb+Cc+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}>R$	
$(S)\cap(P)=\{H\}$ Mặt phẳng và mặt cầu <u>tiếp xúc</u> nhau tại H	$d(I;(P))=R$ $\Leftrightarrow\dfrac{\lvert Aa+Bb+Cc+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=R$	 H: tiếp điểm; (P): tiếp diện *Tiếp điểm H là giao điểm của (P) với đường thẳng Δ qua I và nhận VTCP* $\vec{u}=(A;B;C)$.

$(S)\cap(P)=(C)$ Mặt phẳng và mặt cầu cắt nhau theo giao tuyến là một đường tròn (C).	$d(I;(P))<R$ $\Leftrightarrow \frac{\lvert Aa+Bb+Cc+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}<R$	 Đường tròn (C) có: • Tâm H: là hình chiếu của I lên (P). • Bán kính $r=\sqrt{R^2-IH^2}, IH=d(I,(P))$

3. Vị trí tương đối của mặt cầu và đường thẳng

Trong không gian Oxyz, cho:

Mặt cầu (S): $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ có tâm I(a; b; c) bán kính R.

Đường thẳng Δ: $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$.

Để xét vị trí tương đối của đường thẳng Δ và mặt cầu (S) em có thể sử dụng một trong hai phương pháp dưới đây.

Phương pháp 1: Căn cứ vào số giao điểm của đường thẳng Δ và mặt cầu (S)

Tọa độ giao điểm (nếu có) của (S) và đường thẳng Δ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\\(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2\end{cases} \quad (*)$$

Như vậy:

❖ Nếu hệ phương trình (*) vô nghiệm thì $\Delta\cap(S)=\varnothing$

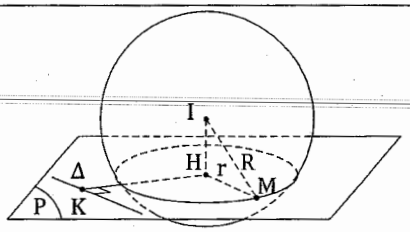
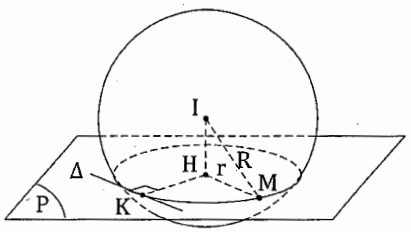
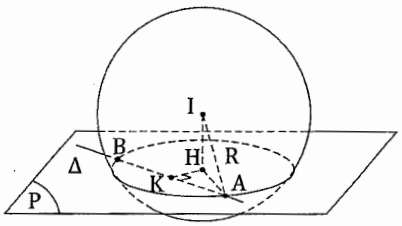
❖ Nếu hệ phương trình (*) có nghiệm duy nhất thì $\Delta\cap(S)=\{K\}$.

Ta nói đường thẳng Δ tiếp xúc mặt cầu (S) tại K.

❖ Nếu hệ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta\cap(S)=\{A,B\}$.

Ta nói đường thẳng Δ cắt (S) theo dây cung AB.

Phương pháp 2: Căn cứ vào khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng Δ.

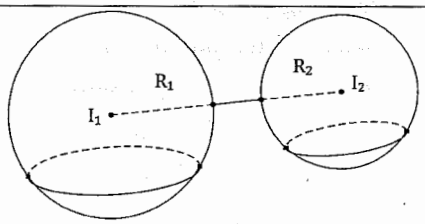
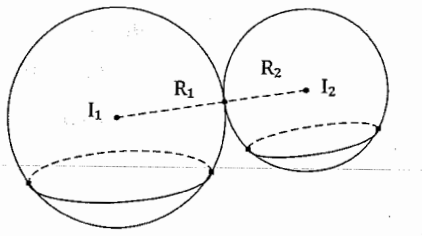
Vị trí tương đối	Điều kiện	Mô tả
$(S)\cap\Delta=\varnothing$ Đường thẳng và mặt cầu không có điểm chung	$d(I;\Delta)>R$	
$(S)\cap\Delta=\{K\}$ Đường thẳng và mặt cầu tiếp xúc nhau tại K	$d(I;\Delta)=R$	 • K: tiếp điểm • Δ: tiếp tuyến
$(S)\cap\Delta=\{A,B\}$ Đường thẳng và mặt cầu cắt nhau.	$d(I;\Delta)<R$	

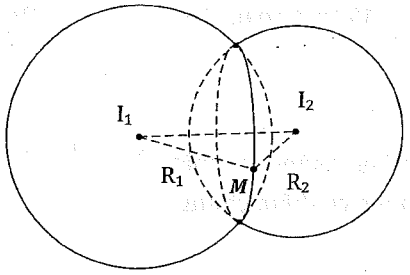
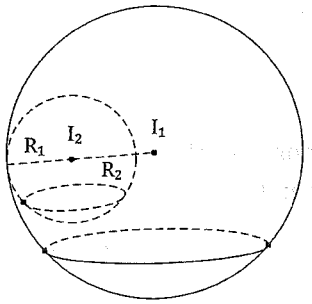
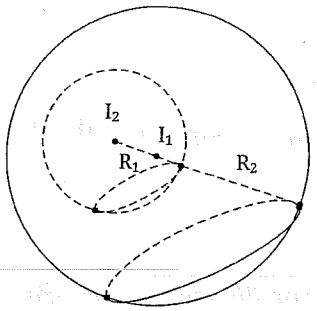
4. Vị trí tương đối của hai mặt cầu

Trong không gian Oxyz, cho:

Mặt cầu (S_1) tâm $I_1(a_1; b_1; c_1)$ bán kính R_1.

Mặt cầu (S_2) tâm $I_2(a_2; b_2; c_2)$ bán kính R_2.

Vị trí tương đối	Điều kiện	Mô tả
(S_1), (S_2) ngoài nhau	$I_1I_2 > R_1+R_2$	
(S_1), (S_2) tiếp xúc ngoài	$I_1I_2 = R_1+R_2$	

(S_1), (S_2) cắt nhau theo giao tuyến là một đường tròn	$\lvert R_1-R_2\rvert < I_1I_2 < R_1+R_2$	
(S_1), (S_2) tiếp xúc trong	$I_1I_2 = \lvert R_1-R_2\rvert$	
(S_1), (S_2) chứa trong nhau	$I_1I_2 < \lvert R_1-R_2\rvert$	

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Phương trình mặt cầu

➢ **Phương pháp 1:**

Bước 1: Tìm tọa độ tâm I.

Bước 2: Xác định bán kính R.

Bước 3: Viết phương trình đường tròn tâm I(a; b; c) và bán kính R

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

➢ **Phương pháp 2:**

Bước 1: Giả sử đường tròn cần tìm có phương trình

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$$

(với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ và $a^2+b^2+c^2-d>0$).

Bước 2: Lập hệ 4 phương trình 4 ẩn để xác định các hệ số a, b, c, d.

Bước 3: Kết luận

BÀI TẬP MẪU

Cơ bản

Câu 1: Cho các phương trình sau

$x^2+y^2+z^2-6x+8y+9=0$ (1) $3x^2+3y^2+3z^2-12x=0$ (2)

$x^2+y^2+z^2-2xy-4x-1=0$ (3) $x^2+y^2+z^2-2y+2z+9=0$ (4)

Các phương trình thỏa mãn là phương trình của một mặt cầu

A. (1), (2). **B.** (1), (2), (4). **C.** (3), (4). **D.** (2), (4).

Hướng dẫn giải

Em có hai cách để kiểm tra một phương trình có phải là phương trình của mặt cầu hay không.

Cách 1. Dùng hằng đẳng thức đưa được phương trình về dạng $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ thì phương trình đã cho là phương trình một mặt cầu.

Với cách này em dễ dàng xác định được tọa độ tâm là (a; b; c) và bán kính R.

Cách 2. Đưa được phương trình về dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với các hệ số a, b, c, d thỏa mãn $a^2+b^2+c^2-d>0$ thì phương trình đã cho là phương trình một mặt cầu.

Ví dụ với phương trình (2):

Cách 1: Biến đổi $(2)\Leftrightarrow 3\left(x^2+y^2+z^2-4x\right)=0\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2+z^2=4$.

Do vậy (2) là phương trình của mặt cầu tâm I(2; 0; 0) và bán kính R=2

Cách 2: Phương trình đã cho biến đổi về dạng $x^2+y^2+z^2-4x=0$ tương ứng với các giá trị a=2, b=c=d=0 thỏa mãn $a^2+b^2+c^2-d=4>0$.

Do vậy (2) là phương trình của mặt cầu.

Tương tự, em kiểm tra được

Phương trình (1) cũng là phương trình của một mặt cầu.

Phương trình (3) không có dạng của phương trình mặt cầu vì chứa tích x. y.

Phương trình (4) không là phương trình một mặt cầu vì các hệ số a=0, b=1, c=−1, d=9 không thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2-d>0$

→ Đáp án A

Câu 2: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(C): x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-1=0$. Tâm và bán kính của mặt cầu (C) là

A. $I(-1;2;3); R=\sqrt{13}$. **B.** $I(-1;2;3); R=\sqrt{15}$.

C. $I(1;-2;-3); R=\sqrt{13}$. **D.** $I(1;-2;-3); R=\sqrt{15}$.

Hướng dẫn giải

Biến đổi phương trình mặt cầu

$x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-1=0\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=15$

Do vậy mặt cầu (C) có tâm I(1; −2; −3) và bán kính $R=\sqrt{15}$ **→ Đáp án D**

Câu 3: Trong không gian Oxy, phương trình mặt cầu tâm I(1;2;3), bán kính $R=\sqrt{5}$ là

A. $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+9=0.$ **B.** $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+3=0.$

C. $x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z-9=0.$ **D.** $x^2+y^2+z^2-x-2y-3z+19=0.$

Hướng dẫn giải

Phương trình mặt cầu tâm I(1;2;3), bán kính $R=\sqrt{5}$ là:

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+9=0$$

→ **Đáp án A**

Câu 4: Trong không gian Oxyz cho A(3;3;0),B(3;0;3),C(0;0;3),D(3;3;3). Phương trình mặt cầu đi qua A, B, C, D là

A. $x^2+y^2+z^2+3x+3y+3z-36=0$ **B.** $x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z=0$

C. $x^2+y^2+z^2-3x-3y+3z=0$ **D.** $x^2+y^2+z^2-6x+6z=0$

Hướng dẫn giải

Giả sử mặt cầu (S) có phương trình

$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0, a^2+b^2+c^2-d>0$

Vì mặt cầu (S) đi qua các điểm A, B, C, D nên thay tọa độ của các điểm vào phương trình mặt cầu em có hệ phương trình:

$$\begin{cases}3^2+3^2+0^2-2a.3-2b.3-2c.0+d=0\\3^2+0^2+3^2-2a.3-2b.0-2c.3+d=0\\0^2+0^2+3^2-2a.0-2b.0-2c.3+d=0\\3^2+3^2+3^2-2a.3-2b.3-2c.3+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6a+6b-d=18\\6a+6c-d=18\\-6c+d=-9\\6a+6b+6c-d=27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=c=\dfrac{3}{2}\\d=0\end{cases}$$

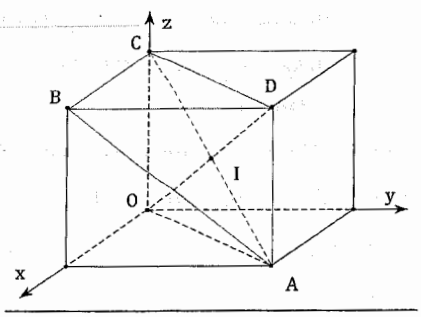
$(S):x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z=0$

→ **Đáp án B**

Phương pháp giải nhanh:

Tứ diện ABCD là 4 đỉnh của hình lập phương nhận gốc O làm đỉnh và các cạnh nằm trên các trục tọa độ (như hình vẽ).

Do đó mặt cầu ngoại tiếp tứ diện chính là mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương với tâm I là trung điểm OD và bán kính $R=\dfrac{OD}{2}$



$$\rightarrow I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right),R=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Vậy $(S):\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{27}{4}\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z=0$

→ **Đáp án B**

♥ Vận dụng

Câu 5: Phương trình: $x^2+y^2+z^2+2(m-1)x-2(m+1)y-(2m-4)z+4m^2+1=0$ là phương trình của một mặt cầu khi

A. $m\in(-5;-1)$. **B.** $m\in(-5;1)$. **C.** $m\in(1;5)$. **D.** $m\in(-1;5)$.

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho có dạng là phương trình của một mặt cầu với $a=-m+1$, $b=m+1$, $c=m-2$ và $d=4m^2+1$.

Điều kiện để phương trình đã cho là phương trình của một mặt cầu:

$(-m+1)^2+(m+1)^2+(m-2)^2-(4m^2+1)>0\Leftrightarrow -m^2-4m+5>0\Leftrightarrow m\in(-5;1)$.

→ Đáp án B

Câu 6: Trong không gian Oxyz, phương trình mặt cầu có tâm nằm trên Oy và qua $A(2;1;1), B(3;-1;-2)$ là

A. $x^2+(y-2)^2+z^2=6$. **B.** $x^2+(y-2)^2+z^2=14$.

C. $x^2+(y+2)^2+z^2=14$. **D.** $x^2+(y+2)^2+z^2=6$.

Hướng dẫn giải

Cách 1. Gọi điểm I và $R>0$ theo thứ tự là tâm và bán kính của mặt cầu.

Do I nằm trên Oy nên $I(0;a;0), a\in\mathbb{R}$.

Theo bài ra: A, B thuộc mặt cầu nên IA=IB=R

$IA=IB\Leftrightarrow\sqrt{2^2+(1-a)^2+1^2}=\sqrt{3^2+(-1-a)^2+(-2)^2}\Leftrightarrow a=-2\Rightarrow R^2=IA^2=14$.

Phương trình mặt cầu $(S):x^2+(y+2)^2+z^2=14$ **→ Đáp án C**

Cách 2.

Vì tâm cầu nằm trên Oy nên phương trình mặt cầu có dạng: $x^2+y^2+z^2-2by+d=0$.

Do A, B nằm trên mặt cầu nên tọa độ của A, B thỏa mãn phương trình trên.

Suy ra hệ phương trình $\begin{cases}2^2+1^2+1^2-2b+d=0\\3^2+(-1)^2+(-2)^2+2b+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2b+d=-6\\2b+d=-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-2\\d=-10\end{cases}$

Vậy $(S):x^2+y^2+z^2+4y-10=0\Leftrightarrow x^2+(y+2)^2+z^2=14$

→ Đáp án C

*** Nâng cao**

Câu 7: Trong không gian Oxyz, cho tứ diện ABCD với $A(0;1;2)$, $B(1;-2;2)$, C(-1; 1; 1), D(3; 0; -1). Tập hợp điểm M thỏa mãn $MA^2+MB^2+MC^2=4MD^2$ là một mặt cầu. Phương trình mặt cầu đó là

A. $(x-12)^2+y^2+(z+9)^2=202$. **B.** $x^2+(y-12)^2+(z+9)^2=202$.

C. $x^2+(y-9)^2+(z+12)^2=202$. **D.** $(x+12)^2+y^2+(z-9)^2=202$.

Hướng dẫn giải

Gọi M(x; y; z) là điểm thỏa mãn bài toán. Khi đó: $MA^2+MB^2+MC^2=4MD^2\,(*)$.

$$MA^2=(-x)^2+(1-y)^2+(2-z)^2;\ MB^2=(1-x)^2+(-2-y)^2+(2-z)^2$$

$$MC^2=(-1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2;\ MD^2=(3-x)^2+(-y)^2+(-1-z)^2$$

$$(*)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-24x+18z+23=0\Leftrightarrow(x-12)^2+y^2+(z+9)^2=202$$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x-12)^2+y^2+(z+9)^2=202$ → **Đáp án A**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 8: Trong không gian Oxyz, phương trình mặt cầu tâm I(3; 2; -4) tiếp xúc với mặt phẳng $(P):x-4y+z+5=0$.

A. $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=16$.

B. $(x-3)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=\frac{8}{9}$.

C. $(x+3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=16$.

D. $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=\frac{8}{9}$.

Câu 9: Trong không gian Oxyz, phương trình mặt cầu tâm I(4; -3; 1) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz)

A. $(x-4)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=17$.

B. $(x-4)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$.

C. $(x-4)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=26$.

D. $(x-4)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=16$.

Câu 10: Trong không gian Oxyz, phương trình mặt cầu tâm I(5;–2;3) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy)

A. $(x-5)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.

B. $(x-5)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=29$.

C. $(x-5)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=13$.

D. $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=25$.

Câu 11: Trong không gian Oxyz, phương trình mặt cầu (S) qua 4 điểm $A(1;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;3)$, $D(5;2;2)$ là

A. $x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z+3=0$.

B. $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+3=0$.

C. $x^2+y^2+z^2+8x+8y+8z-3=0$.

D. $x^2+y^2+z^2+4x+4y+4z-3=0$.

Câu 12: Trong không gian Oxzy, cho mặt phẳng (P): x–2y+3z–6=0. Gọi A, B, C lần lượt là giao điểm của (P) với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz. Phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện OABC là

A. $x^2+y^2+z^2-6x-3y-2z=0$.

B. $x^2+y^2+z^2+6x-3y+2z=0$.

C. $x^2+y^2+z^2-6x+3y-2z=0$.

D. $x^2+y^2+z^2+6x+3y+2z=0$.

Câu 13: Trong không gian Oxyz, phương trình mặt cầu tâm thuộc (Oxy)và qua 3 điểm $A(1;0;2),B(-1;-2;2),C(-1;0;0)$.

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=2$.

B. $(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=2$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=8$. **D.** $(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=8$.

Câu 14: Trong không gian Oxyz, gọi (S) là mặt cầu tâm I có hoành độ dương và bán kính $R=3$, tiếp xúc với mặt phẳng $(P):x+2y+2z+3=0$ tại $A(1;1;-3)$. Phương trình (S) là

A. $x^2+y^2+z^2+4x+6y-2z+5=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2+2y+10z+17=0$.

C. $x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z+5=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-2x-4y+z-3=0$.

Câu 15: Trong không gian Oxyz, phương trình mặt cầu (S) có tâm thuộc đường thẳng $\Delta:\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-2}$ đồng thời tiếp xúc với 2 mặt phẳng $(\alpha_1):x+3y+2z-5=0$; $(\alpha_2):2x-y+3z+5=0$ là

A. $(x+1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=\frac{9}{14}$. **B.** $(x+5)^2+(y+5)^2+(z-5)^2=\frac{225}{14}$.

C. $(x+5)^2+(y-5)^2+(z+5)^2=\frac{25}{14}$. **D.** $(x+3)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=\frac{225}{14}$.

Câu 16: Trong không gian Oxyz, phương trình mặt cầu (S) có tâm thuộc Δ: x–1=y–1=z–1 và tiếp xúc với 2 mặt phẳng (P): 3x–y+2z–1=0 và (Q): x+3y–2z+5=0 là

A. $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=\frac{121}{14}$. **B.** $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\frac{49}{14}$.

C. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=\frac{9}{14}$. **D.** $(x+5)^2+(y-5)^2+(z+5)^2=\frac{25}{14}$.

Câu 17: Trong không gian Oxyz, phương trình mặt cầu (S) có tâm thuộc $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=0\\z=-1\end{cases}$ và tiếp xúc với 2 mặt phẳng (P): x–y+2z–3=0 và (Q): x+2y–z+5=0 là

A. $x^2+y^2+z^2-4x+2z-\frac{17}{2}=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2+6x+2y-\frac{9}{24}=0$.

C. $x^2+y^2+z^2+x+2z-\frac{91}{24}=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2+2x-2z-\frac{16}{9}=0$.

Câu 18: Trong không gian Oxyz, phương trình mặt cầu qua $A(2;0;1),B(1;0;0),C(1;1;1)$ và tâm thuộc mặt phẳng $(P):x+y+z-2=0$ là

A. $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=2$. **B.** $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1$.

C. $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$. **D.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=5$.

Câu 19: Phương trình mặt cầu (S) tâm I có tọa độ âm thuộc đường thẳng $d:\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{1}$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):2x+y-2z+2=0$, bán kính $R=1$ là

A. $(x+2)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=1$. **B.** $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=1$.

C. $(x+5)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=1$. **D.** $(x+1)^2+(y+3)^2+(z+2)^2=1$.

Câu 20: Phương trình mặt cầu (S) tâm I thuộc đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\y=-3\\z=-t\end{cases}$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P): 2x+y+z+1=0 bán kính $R=\sqrt{6}$ là

A. $(x-2)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=6$.

B. $(x-2)^2+(y+3)^2+(z+2)^2=6$.

C. $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=6$.

D. $(x+4)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=6$.

Câu 21: Cho 4 điểm $A(1;-1;2), B(1;3;2), C(4;3;2), D(4;-1;2)$. Với A' là hình chiếu của A lên Oxy, phương trình mặt cầu (S) qua A',B,C,D là

A. $x^2+y^2+z^2+5x+2y+2z-1=0$.

B. $x^2+y^2+z^2-2x-5y-2z-5=0$.

C. $x^2+y^2+z^2-2x-2y-5z+4=0$.

D. $x^2+y^2+z^2-5x-2y-2z+1=0$.

Câu 22: Trong không gian Oxyz, cho khối lăng trụ ABC.A'B'C' có $A(0;-3;0)$, $B(4;0;0)$, $C(0;3;0)$, $B'(4;0;4)$. Phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCC'B') là

A. $x^2+(y+3)^2+z^2=\frac{576}{25}$.

B. $x^2+(y+3)^2+z^2=\frac{144}{25}$.

C. $x^2+(y+3)^2+z^2=\frac{9}{25}$.

D. $x^2+(y+3)^2+z^2=\frac{36}{25}$.

Câu 23: Trong không gian Oxyz phương trình mặt cầu (S) tâm I(6;3;-4), tiếp xúc với Oy là

A. $(x-6)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=9$.

B. $(x-6)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=16$.

C. $(x-6)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=52$.

D. $(x-6)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=36$.

Câu 24: Trong không gian Oxyz, phương trình mặt cầu (S) tâm I(4; −2; 1) và tiếp xúc với trục Ox là

A. $(x-4)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=5$.

B. $(x-4)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=17$.

C. $(x-4)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=20$.

D. $(x-6)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=21$.

Câu 25: Trong không gian Oxyz, gọi (S) là mặt cầu tâm I có các tọa độ dương thuộc $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-3}{2}$, qua M(1;1;4) và tiếp xúc với đường thẳng $d':\frac{x+2}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{-4}$. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$.

B. $x^2+y^2+z^2-11x+7y-20z+66=0$.

C. $x^2+y^2+z^2-6x+2y-10z+32=0$.

D. $x^2+y^2+z^2-4x-6z-6=0$.

Câu 26: Cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=2t\\y=t\\z=4\end{cases}$; $d_2:\begin{cases}x=3+t'\\y=-t'\\z=0\end{cases}$ chéo nhau. Phương trình mặt cầu (S) nhận đoạn vuông góc chung của d_1, d_2 làm đường kính là

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=16$.

B. $(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=4$.

C. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=16$. D. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$.

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=1$ và mặt phẳng $(Q):2x-2y-z+1=0$. Viết phương trình mặt cầu (S') đối xứng với mặt cầu (S) qua mặt phẳng (Q)

A. $\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2+\left(z-\frac{2}{3}\right)^2=1$. B. $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2+\left(z+\frac{2}{3}\right)^2=1$.

C. $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y+\frac{7}{3}\right)^2+\left(z-\frac{2}{3}\right)^2=1$. D. $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2+\left(z-\frac{2}{3}\right)^2=1$.

Câu 28: Cho điểm A(4; 1; 2). Mặt cầu (S) có tâm A và cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt B, C sao cho tam giác ABC vuông cân tại A. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x-4)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=20$. B. $(x-4)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=10$.

C. $(x-4)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=16$. D. $(x-4)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=5$.

ĐÁP ÁN

8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
D	B	A	A	C	C	C	B	A	C	B
19	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	
A	D	D	A	C	A	A	D	D	B	

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 8:

Bán kính R của mặt cầu bằng khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P).

Em có $R=d(I,(P))=\frac{|3-4.2-4+5|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}}=\frac{4}{3\sqrt{2}}$.

Vậy phương trình mặt cầu : $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=\frac{8}{9}$ → **Đáp án D**

Câu 9:

Khoảng cách từ I(a; b; c) đến

- ✓ Mặt phẳng tọa độ (Oxy) là |c|
- ✓ Mặt phẳng tọa độ (Oxz) là |b|
- ✓ Mặt phẳng tọa độ (Oyz) là |a|

Mặt cầu tâm I(4 ;–3 ;1) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz)có bán kính là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (Oxz)⇒ Bán kính mặt cầu là R=|–3|=3.

Vậy phương trình mặt cầu : $(x-4)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$ → **Đáp án B**

Câu 10:

Mặt cầu tâm I(5 ;–2 ;3) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy)có bán kính là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (Oxy)⇒ Bán kính mặt cầu là R=|3|=3.

Vậy phương trình mặt cầu : $(x-5)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$

→ Đáp án A

Câu 11:

Giả sử mặt cầu (S) có phương trình

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0,\ a^2+b^2+c^2-d>0$$

Vì mặt cầu (S) đi qua các điểm A, B, C, D nên thay tọa độ của các điểm vào phương trình mặt cầu em có hệ phương trình:

$$\begin{cases}1-2a+d=0\\9-6b+d=0\\9-6c+d=0\\25+4+4-10a-4b-4c+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2a+d=-1\\-6b+d=-9\\-6c+d=-9\\10a+4b+4c-d=33\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=c=2\\d=3\end{cases}$$

Vậy phương trình mặt cầu : $x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z+3=0$ **→ Đáp án A**

Câu 12:

Em có: A(6; 0; 0); B(0; −3; 0); C(0; 0; 2). Phương trình mặt cầu (S) có dạng:

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0\ \left(a^2+b^2+c^2-d>0\right)$$

$$A,B,C,O\in(S)\Leftrightarrow\begin{cases}d=0\\36-12a=0\\9+6b=0\\4-4c=0\end{cases}\Leftrightarrow a=3;b=-\frac{3}{2};c=1;d=0$$

Vậy (S): $x^2+y^2+z^2-6x+3y-2z=0$.

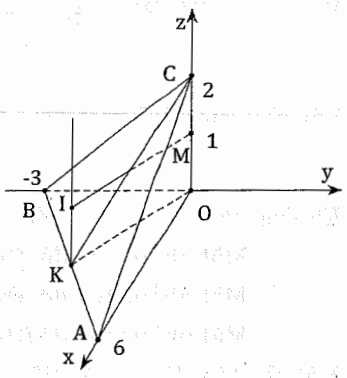
→ Đáp án C

Cách giải nhanh:

Gọi K là trung điểm AB $\rightarrow K\left(3;-\frac{3}{2};0\right)$.

d là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (Oxy) tại K

$$\rightarrow \text{phương trình d}:\begin{cases}x=3\\y=-\frac{3}{2}\\z=t\end{cases}.$$



Tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng z=1 (mặt phẳng trung trực OC).

Suy ra $I\left(3;-\frac{3}{2};1\right), R=OI=\frac{7}{2}$.

Từ đó em có được phương trình mặt cầu:

$$(x-3)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+(z-1)^2=\frac{49}{4}\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-6x+3y-2z=0.$$

→ **Đáp án C**

Câu 13:

Gọi I là tâm mặt cầu. Do I thuộc mặt phẳng (Oxy) nên I(a; b; 0).

Do vậy phương trình mặt cầu có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by+d=0,\ a^2+b^2-d>0$

Vì mặt cầu (S) đi qua các điểm A, B, C nên thay tọa độ của các điểm vào phương trình mặt cầu em có hệ phương trình:

$$\begin{cases}1+0+4-2a+d=0\\1+4+4+2a+4b+d=0\\1+2a+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2a+d=-5\\2a+4b+d=-9\\2a+d=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\\d=-3\end{cases}$$

Suy ra bán kính $R=\sqrt{1^2+(-2)^2+3}=\sqrt{8}$.

Vậy (S): $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=8$.

→ **Đáp án C**

Câu 14:

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(1;2;2)$.

Gọi $d\perp(P)$ tại A. Phương trình đường thẳng d là: $\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=-3+2t\end{cases}$

Vì mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại A nên bán kính R=IA

$I\in d\Rightarrow I(1+t;\ 1+2t;\ -3+2t)$ và IA=3 (t>−1)

Em có $IA=3\Leftrightarrow\sqrt{(-t^2)+(-2t)^2+(-2t)^2}=3\Leftrightarrow 9t^2=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-1\end{array}\right.\xrightarrow{t>-1}I(2;\ 3;\ -1).$

Vậy (S): $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z+5=0.$

→ **Đáp án C**

Câu 15:

Đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases}x=-2+t\\y=1+2t\\z=-1-2t\end{cases}$

Vì I thuộc đường thẳng Δ nên I(−2+t; 1+2t; −1−2t).

Mặt cầu (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) khi và chỉ khi $d(I;(\alpha_1))=d(I;(\alpha_2))$

$$\Leftrightarrow\frac{|-2+t+3+6t-2-4t-5|}{\sqrt{1+9+4}}=\frac{|-4+2t-1-2t-3-6t+5|}{\sqrt{4+1+9}}$$

Suy ra I(−5; −5; 5), $R=\frac{15}{\sqrt{14}}$ hoặc $I\left(-\frac{5}{3};\frac{5}{3};-\frac{5}{3}\right),R=\frac{5}{\sqrt{14}}$

$\Leftrightarrow |3t-6|=|-6t-3| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{3} \\ t=-3 \end{array}\right.$ → **Đáp án B**

Câu 16:

Phương pháp chung:

- Tham số hóa đường thẳng Δ, lấy điểm I tùy ý thuộc d.
- Tính khoảng cách từ I đến hai mặt phẳng (P) và (Q)
- Cho giá trị hai khoảng cách bằng nhau→ tìm t→ tọa độ tâm.

Phương pháp giải nhanh:

Vì $I \in \Delta$ nên hoành độ, tung độ và cao độ tâm I đều bằng nhau→ Loại C, D.

Đáp án A: tâm I(3; 3; 3)→ $d(I,(P))=d(I;(Q))=\frac{11}{\sqrt{14}}$ →Chọn A.

Đáp án B: tâm I(2; 2; 2)→ $d(I,(P))=\frac{7}{\sqrt{14}}, d(I;(Q))=\frac{9}{\sqrt{14}}$ → Loại B.

→ **Đáp án A**

Câu 17:

Nhận thấy $I \in \Delta$ nên $y_I=0, z_I=-1$ → Loại B, D.

Đáp án A: tâm I(2; 0; −1)→ $d(I,(P)) \neq d(I;(Q))$ → loại A.

Đáp án C: tâm $I\left(-\frac{1}{2};0;-1\right)$ và $d(I,(P))=d(I;(Q))=\frac{11}{2\sqrt{6}}$ → chọn C.

→ **Đáp án C**

Câu 18:

Gọi I(a; b; c) là tâm mặt cầu, phương trình mặt cầu có dạng:

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0,\ a^2+b^2+c^2-d>0$$

- Vì I thuộc mặt phẳng (P) nên a+b+c−2=0 (1)
- Vì mặt cầu (S) đi qua các điểm A, B, C nên thay tọa độ của các điểm vào phương trình mặt cầu em có hệ phương trình:

$$\left\{\begin{array}{l} 4+0+1-4a-2c+d=0 \\ 1-2a+d=0 \\ 1+1+1-2a-2b-2c+d=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -4a-2c+d=-5 \\ -2a+d=-1 \\ -2a-2b-2c+d=-3 \end{array}\right. \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) em có hệ phương trình

$$\left\{\begin{array}{l} -4a-2c+d=-5 \\ -2a+d=-1 \\ -2a-2b-2c+d=-3 \\ a+b+c=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=c=d=1 \\ b=0 \end{array}\right.$$

Vậy mặt cầu tâm I(1 ;0 ;1), bán kính R=1 →(S): $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1$.

→ **Đáp án B**

Câu 19:

Tọa độ tâm mặt cầu là I(1+3t; −2+t; t), điều kiện $t<-\frac{1}{3}$.

Bán kính mặt cầu là :

$$R=d\left(I;(P)\right)\Leftrightarrow\frac{\left|2(1+3t)+(-2+t)-2t+2\right|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=1\Leftrightarrow\left|5t+2\right|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{1}{5}\\t=-1\end{array}\right.$$

Vì $t<-\frac{1}{3}$ nên t=−1 thỏa mãn. Phương trình $(S):(x+2)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=1$.

→ **Đáp án A**

Câu 20:

Phương pháp chung:

- Tham số hóa đường thẳng d, lấy điểm I tùy ý thuộc d.
- Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) và cho giá trị khoảng cách bằng bán kính R → tìm tham số → tọa độ tâm.

Phương pháp giải nhanh:

Đáp án A: Vì hoành độ và cao độ tâm I đối nhau→ loại A.

Đáp án B: tâm I(2; −3; −2) ∈(P) → loại B.

Đáp án C: Tung độ tâm I bằng −3→ loại C.

Đáp án D: Tâm I(−4; −3; 4) có $d\left(I;(P)\right)=\sqrt{6}$ → chọn D.

→ **Đáp án D**

Câu 21:

Điểm A có hình chiếu lên (Oxy) là A'(1; −1; 0).

Giả sử mặt cầu (S) có phương trình:

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0,\ a^2+b^2+c^2-d>0$$

Vì mặt cầu (S) đi qua các điểm A', B, C, D nên thay tọa độ của các điểm vào phương trình mặt cầu em có hệ phương trình:

$$\left\{\begin{array}{l}2-2a+2b+d=0\\1+9+4-2a-6b-4c+d=0\\16+9+4-8a-6b-4c+d=0\\16+1+4-8a+2b-4c+d=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-2a+2b+d=-2\\-2a-6b-4c+d=-14\\-8a-6b-4c+d=-29\\-8a+2b-4c+d=-21\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=\frac{5}{2}\\b=c=d=1\end{array}\right.$$

Vậy (S): $x^2+y^2+z^2-5x-2y-2z+1=0$

→ **Đáp án D**

Câu 22:

Gắn hệ trục Oxyz như hình vẽ.

Dựa vào tính chất hình lăng trụ, em có $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}$ →A'(0; −3; 4), C(0; 3; 4).

Mặt phẳng (BCC'B') qua điểm B(4; 0; 0) và nhận VTPT $\vec{n}=-\frac{1}{4}\left[\overrightarrow{BB'},\overrightarrow{BC}\right]=(3;4;0)$.

Phương trình mặt phẳng (BCC'B') là:

$3(x-4)+4y=0\Leftrightarrow 3x+4y-12=0$.

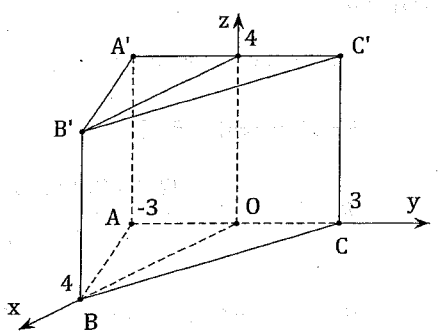
Vì (S) tâm A tiếp xúc mặt phẳng (BCC'B')

nên bán kính $R=d\left(A;\left(BCC'B'\right)\right)=\frac{24}{5}$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là:

$x^2+(y+3)^2+z^2=\frac{576}{25}$

→ **Đáp án A**



Phương pháp giải nhanh:

Hình chiếu của O lên mặt phẳng (BCC'B') là chân đường cao H kẻ từ O của tam giác vuông OBC. Suy ra $d\left(O,\left(BCC'B'\right)\right)=OH=\frac{OB.OC}{BC}=\frac{12}{5}$

Bán kính mặt cầu $R=d\left(A,\left(BCC'B'\right)\right)=2d\left(O,\left(BCC'B'\right)\right)=\frac{24}{5}$.

→ **Đáp án A**

Câu 23:

Hình chiếu của I lên trục Oy là: I'(0; 3; 0).

Mặt cầu tâm I tiếp xúc trục Oy có bán kính $R=II'=\sqrt{(-6)^2+0^2+4^2}=\sqrt{52}$.

Vậy $(S):(x-6)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=52$

→ **Đáp án C**

Phương pháp giải nhanh: Sử dụng công thức tính nhanh khoảng cách từ một điểm đến trục tọa độ.

Khoảng cách từ điểm I(a; b; c) đến các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt là:

$d(I,Ox)=\sqrt{b^2+c^2}$, $d(I,Oy)=\sqrt{a^2+c^2}$, $d(I,Oz)=\sqrt{a^2+b^2}$

Mặt cầu tiếp xúc với trục Oy thì có bán kính bằng khoảng cách từ tâm I đến trục Oy.

→ Bán kính mặt cầu là $R=\sqrt{(-6)^2+4^2}=\sqrt{52}$

→ **Đáp án C**

Câu 24:

Mặt cầu tiếp xúc với trục Ox thì có bán kính bằng khoảng cách từ tâm I đến trục Ox.

→ Bán kính mặt cầu là $R=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$ → **Đáp án A**

Câu 25:

Đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases}x=2+t\\y=-t\\z=3+2t\end{cases}$.

Đường thẳng d' qua N(−2; −2; 4) và có VTCP $\vec{u}=(1;1;-4)$.

Vì I thuộc đường thẳng d nên I(2+t; −t; 3+2t), $-\frac{3}{2}<t<0$.

Gọi R là bán kính mặt cầu (S)→R=IM.

Mặt cầu (S) tiếp xúc đường thẳng d' khi và chỉ khi $d(I;d')=R\Leftrightarrow\frac{\left|\left[\overrightarrow{NI};\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=IM$ (*)

Em có $\overrightarrow{NI}=(4+t;2-t;-1+2t),\left[\overrightarrow{NI},\vec{u}\right]=(2t-7;6t+15;2t+2),\overrightarrow{IM}=(-1-t;1+t;1-2t)$.

$$(*)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{(2t-7)^2+(6t+15)^2+(2t+2)^2}}{\sqrt{1+1+16}}=\sqrt{(-1-t)^2+(1+t)^2+(1-2t)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2t^2-5t-7=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=\frac{7}{2}\end{array}\right.\xrightarrow{-\frac{3}{2}<t<0}I(1;\,1;\,1),R=3.$$

Phương trình (S): $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$

→ **Đáp án A**

Câu 26:

Hai đường thẳng d_1, d_2 có VTCP theo thứ tự là $\overrightarrow{u_1}=(2;1;0),\overrightarrow{u_2}=(1;-1;0)$.

Gọi Δ là đường thẳng vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2 và cắt chúng theo thứ tự tại A, B.

Em có: $A(2t;t;4),B(3+t';-t';0),\overrightarrow{AB}=(3+t'-2t;-t'-t;-4)$.

Vì Δ vuông góc với cả d_1, d_2 nên $\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1}=0\\\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}t'-5t=-6\\2t'-t=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow t=1;t'=-1$

→ A(2; 1; 4), B(2; 1; 0), $\overrightarrow{AB}=(0;0;-4)$.

Mặt cầu đường kính AB có tâm I(2; 1; 2) và bán kính $R=\frac{1}{2}AB=2$.

→ **Đáp án D.**

Chú ý: Quan sát phương trình hai đường thẳng d_1, d_2 em nhận thấy rằng d_1 nằm trong mặt phẳng z=4, d_2 nằm trong mặt phẳng z=0 và khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó là d=4. Suy ra

- Bán kính mặt cầu $R=\frac{1}{2}d=2$ → Loại A, C.
- Đường vuông góc chung của d_1, d_2 cùng phương trục Oz → $\overrightarrow{AB}=m\vec{k},\vec{k}=(0;0;1)$

  suy ra $\left\{\begin{array}{l}3+t'-2t=0\\-t'-t=0\end{array}\right.\rightarrow A,B\rightarrow I$

Câu 27:

Mặt cầu (S) có tâm M(2; 1; 0) và có bán kính R=1

Gọi M' là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (Q)

Ta có MM'⊥(Q) nên đường thẳng MM' đi qua điểm M và nhận VTPT của mặt phẳng (Q) làm VTCP. $\Rightarrow$ phương trình tham số đường thẳng MM': $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1-2t \\ z=-t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$

Vì M' là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (Q)$\Rightarrow$M'=MM'$\cap$(Q)

$\Rightarrow$ Tọa độ điểm M' là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x-2y-z+1=0 \\ x=2+2t \\ y=1-2t \\ z=-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2+2t)-2(1-2t)+t+1=0 \\ x=2+2t \\ y=1-2t \\ z=-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-\frac{1}{3} \\ x=\frac{4}{3};y=\frac{5}{3};z=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M'\left(\frac{4}{3};\frac{5}{3};\frac{1}{3}\right)$$

Gọi I(x; y; z) là tâm của mặt cầu (S'), do mặt cầu (S') đối xứng với mặt cầu (S) qua mặt phẳng (Q) $\Rightarrow$I đối xứng với M qua mặt phẳng (Q)

$\Rightarrow$ I đối xứng với M qua mặt phẳng M'

$\Rightarrow$M' là trung điểm của đoạn thẳng IM

$$\Rightarrow x=2x_{M'}-x_M=\frac{2}{3};y=2y_{M'}-y_M=\frac{7}{3};z=2z_{M'}-z_M=\frac{2}{3}\Rightarrow I\left(\frac{2}{3};\frac{7}{3};\frac{2}{3}\right)$$

Khi đó mặt cầu (S') có tâm $I\left(\frac{2}{3};\frac{7}{3};\frac{2}{3}\right)$, bán kính R'=R=1 nên có phương trình:

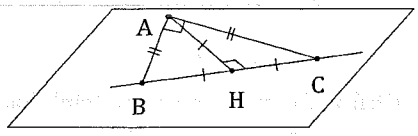
$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2+\left(z-\frac{2}{3}\right)^2=1$$

→ Đáp án D

Câu 28:

Gọi H là hình chiếu của A trên Ox$\rightarrow$ H(4;0;0)

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}=(0;-1;-2)\Rightarrow AH=\sqrt{5}$



Tam giác ABC vuông cân tại A nên

AH = HB = HC.

$\Rightarrow AC=\sqrt{AH^2+HB^2}=\sqrt{10}=R$.

Vậy (S): $(x-4)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=10$.

→ Đáp án B

Dạng 2: Bài toán tổng hợp

BÀI TẬP MẪU

Cơ bản

Câu 29: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0$. Mặt phẳng nào dưới đây tiếp xúc mặt cầu (S)?

A. (P): 2x+y−2z+3=0.
B. (Q): 2x+2y−z−7=0.
C. (R): 3x+4y−10=0.
D. (T): x+2y−5z+11=0.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) có tâm I(1; −1; 2) và bán kính R=3.

Kiểm tra thấy tâm I thuộc hai mặt phẳng (P) và (T) → Loại A, D.

Tính khoảng cách từ I đến hai mặt phẳng (Q) và (R) em được:

$$d\left(I,(Q)\right)=\frac{\left|2.1+2.(-1)-2-7\right|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=3=R$$

$$d\left(I,(R)\right)=\frac{\left|3.1+4.(-1)-10\right|}{\sqrt{3^2+4^2+0^2}}=\frac{11}{5}\neq R$$

→ **Đáp án B**

Câu 30: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+2=0$. Đường thẳng nào dưới đây cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt?

A. $d_1:\begin{cases}x=1+2t\\y=0\\z=3+t\end{cases}$.
B. $d_2:\begin{cases}x=2+t\\y=t\\z=0\end{cases}$.
C. $d_3:\begin{cases}x=1-2t\\y=-1+t\\z=1-t\end{cases}$.
D. $d_4:\begin{cases}x=\frac{1}{2}+t\\y=\frac{1}{2}-2t\\z=\frac{1}{2}+t\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) có tâm I(1; 1; 1) và bán kính R=1.

Phương pháp chung:

- Điều kiện để đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt là $d\left(I,\Delta\right)<R\Leftrightarrow d\left(I,\Delta\right)<1$.
- Tính khoảng cách từ I đến các đường thẳng $d_1,d_2,d_3,d_4\rightarrow d\left(I,d_4\right)<1$

→ **Đáp án D**

Phương pháp giải nhanh:

❖ Mặt cầu (S) tiếp xúc các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Oxz) theo thứ tự tại M(1; 1; 0), N(0; 1; 1), P(1; 0; 1).

❖ Đường thẳng d_1 nằm trong mặt phẳng (Oxz) nhưng không đi qua P → Loại A
Đường thẳng d_2 nằm trong mặt phẳng (Oxy) nhưng không đi qua M → Loại B

❖ Đường thẳng d_4 qua điểm $K\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) \rightarrow IK=\frac{\sqrt{3}}{2}<R \rightarrow$ K nằm trong mặt cầu (S).

Mọi đường thẳng đi qua K luôn cắt (S) tại hai điểm phân biệt → Đường thẳng d_4 thỏa mãn.

Trong bài toán này nếu em chưa nhận ra được K nằm phía trong mặt cầu thì hoàn toàn có thể tìm ra đáp án D bằng cách tính khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng d_3 và d_4: $d(I;d_3)=\sqrt{\frac{10}{3}}>1; d(I;d_4)=\frac{\sqrt{3}}{2}<1$

→ Đáp án D

Câu 31: Trong không gian Oxyz, cho hai mặt cầu $(S_1):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=5$ và $(S_2):(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=7$. Mệnh đề đúng là

A. (S_1) và (S_2) có nhiều hơn 2 điểm chung. **B.** (S_1) và (S_2) tiếp xúc ngoài.

C. (S_1) chứa trong (S_2). **D.** (S_1) và (S_2) ở ngoài nhau.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S_1) có tâm $I_1(1; -2; 3)$ và bán kính $R_1=\sqrt{5}$.

Mặt cầu (S_2) có tâm $I_2(-1; 1; -2)$ và bán kính $R_2=\sqrt{7}$.

Em tính được $I_1I_2=\sqrt{(-1-1)^2+(1+2)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{38} \rightarrow I_1I_2>R_1+R_2$

→ Đáp án D

♥ Vận dụng

Câu 32: Mặt phẳng $(P):2x+2y+z-m^2-3m=0$ tiếp xúc với mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$. Giá trị lớn nhất của m là

A. m=5. **B.** m=−5. **C.** m=2. **D.** m=−2.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) có tâm I(1; −1; 1) và bán kính R=3.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc mặt cầu (S) khi và chỉ khi $d(I,(P))=R$

$$\Leftrightarrow \frac{|2.1+2.(-1)+1-m^2-3m|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=3 \Leftrightarrow |m^2+3m-1|=9$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} m^2+3m-10=0 \\ m^2+3m+8=0\ (VN) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m=-5 \\ m=2 \end{bmatrix}$$

→ Đáp án C

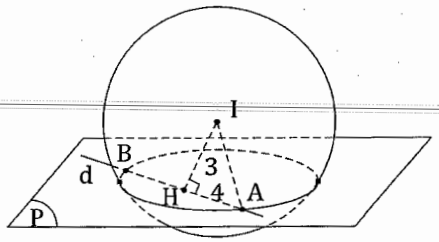
Câu 33: Cho đường thẳng $d:\begin{cases} x=6+2t \\ y=4+t \\ z=5+2t \end{cases}$, mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0$. Với giá trị nào của m mặt cầu (S) cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho $AB=8$.

A. m=6. **B.** m=−12. **C.** m=15. **D.** m=−6.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) có tâm I(–2; 3; 0) và bán kính $R=\sqrt{13-m}$ với điều kiện m<13.

Đường thẳng d qua M(6; 4; 5) và có một VTCP $\vec{u}=(2;1;2)$.



Em có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{IM}=(8;1;5)\\ \left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]=(-3;-6;6)\end{cases}\rightarrow d(I,d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=3$$

Gọi H là trung điểm của AB → d(I, d)=IH=3 và $AH=\frac{AB}{2}=4$.

Vậy $R^2=IH^2+AH^2\Leftrightarrow 13-m=9+16\Leftrightarrow m=-12$

→ Đáp án B

Chú ý: Điều kiện (S) là mặt cầu: 13–m>0⇔m<13→ Loại C.

Vì $R^2=IH^2+AH^2$ nên $R>\frac{AB}{2}\Leftrightarrow m<-3$ → Loại A.

Câu 34: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (Q) chứa Ox và cắt mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$ theo giao tuyến là đường tròn bán kính bằng 3. Điểm nào sau đây **không** nằm trên (Q)

A. (–5; 0; 0). **B.** (1; 2; 1). **C.** (0; –6; –3). **D.** (3; –4; 3).

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng chứa Ox có phương trình $by+cz=0, b^2+c^2\neq 0$.

Mặt cầu (S) tâm I(1; –2; –1) bán kính R=3.

Từ giả thiết: đường tròn giao tuyến có bán kính r=3 suy ra tâm I∈(Q) ⇒–2b–c=0.

Chọn b=1, c=–2 em được phương trình mặt phẳng (Q): y–2z=0.

→ Đáp án D

*** Nâng cao**

Câu 35: Trong không gian Oxyz, điểm M thuộc mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$ và cách mặt phẳng (P): –x+2y–2z–9=0 một khoảng lớn nhất. Tổng tọa độ của M là

A. 1. **B.** –3. **C.** –1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) tâm I(1; –2; –1) bán kính R=3.

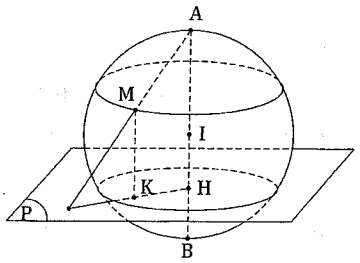
Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P), đường thẳng IH cắt (S) theo đường kính AB (AH>BH).

M là một điểm tùy ý trên (S), K là hình chiếu vuông góc của M lên (P)

→ d(M, (P))=MK ≤ AH.

Như vậy $d(M,(P))_{max}$=AH khi M≡A.

Phương trình đường thẳng IH vuông góc với (P) tại I: $\begin{cases} x=1-t \\ y=-2+2t \\ z=-1-2t \end{cases}$.



Vì A=IH∩(S) nên tọa độ điểm A thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x=1-t \\ y=-2+2t \\ z=-1-2t \\ x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-t \\ y=-2+2t \\ z=-1-2t \\ (x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=1, x=0, y=0, z=-3 \\ t=-1, x=2, y=-4, z=1 \end{cases}$$

Vì d(A, (P))>d(B, (P)) nên A(2; -4; 1)

→ **Đáp án C**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 36: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-6x-8y+2z+1=0$. Mặt phẳng nào dưới đây không có điểm chung với mặt cầu (S)?

A. (P): x+2y-z+11=0. **B.** (Q): 2x+y-7z-1=0.

C. (R): 3x+4y=0. **D.** (T): 2x+y-2z-4=0.

Câu 37: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z-7=0$. Mặt phẳng nào dưới đây tiếp xúc với mặt cầu (S) tại $A\left(3;1;\sqrt{3}-2\right)$?

A. $2x-y+\sqrt{3}z-8+2\sqrt{3}=0$. **B.** $2x+3y+\sqrt{3}z-12+2\sqrt{3}=0$.

C. $2x+3y+\sqrt{3}z+4+2\sqrt{3}=0$. **D.** $2x-y-\sqrt{3}z-2-2\sqrt{3}=0$.

Câu 38: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho điểm $M(2;3;0)$, mặt phẳng (P): x+y+2z+1=0 và mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+8=0$. Phương trình mặt phẳng (Q) song song với (P) và tiếp xúc với mặt cầu (S) là

A. $x+y+2z+1=0$. **B.** $x+y+2z+11=0$.

C. $x+y+2z-11=0$ **và** $x+y+2z+1=0$. **D.** $x+y+2z-11=0$.

Câu 39: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z+2=0$. Đường thẳng nào dưới đây không có điểm chung với mặt cầu (S)?

A. $d_1:\begin{cases} x=-1-3t \\ y=-t \\ z=-1+2t \end{cases}$ **B.** $d_2:\begin{cases} x=-1-t \\ y=-1+3t \\ z=-1+2t \end{cases}$ **C.** $d_3:\begin{cases} x=1-3t \\ y=-1+2t \\ z=-1-t \end{cases}$ **D.** $d_4:\begin{cases} x=1-4t \\ y=-2t \\ z=-2+3t \end{cases}$

Câu 40: Trong không gian Oxyz, cho hai mặt cầu (S_1): $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=8$ và

(S_2): $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (S_1) và (S_2) có nhiều hơn 2 điểm chung. **B.** (S_1) và (S_2) tiếp xúc ngoài.

C. (S_1) chứa trong (S_2). **D.** (S_1) và (S_2) ở ngoài nhau.

Câu 41: Trong không gian Oxyz, cho hai mặt cầu $(S_1):(x+1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1$ và $(S_2):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=16$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (S_1) và (S_2) có nhiều hơn 2 điểm chung. **B.** (S_1) và (S_2) tiếp xúc trong.

C. (S_1) chứa trong (S_2). **D.** (S_1) và (S_2) ở ngoài nhau.

Câu 42: Cho (C) là đường tròn được tạo bởi mặt phẳng $(\alpha):2x+2y+z+7=0$ cắt mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$. Gọi I là tâm của (C), bán kính r. Chọn khẳng định đúng?

A. $I\left(-\frac{5}{3};-\frac{5}{3};-\frac{1}{3}\right);R=3$. **B.** $I\left(-\frac{5}{2};-\frac{5}{2};3\right);R=4$.

C. $I(-1;-1;-3);R=6$. **D.** $I(-2;-2;1);R=3$.

Câu 43: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$. Mặt phẳng (P) qua $A(1;-1;2)$, $B(3;5;-2)$ và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Điểm nào dưới đây **thuộc** mặt phẳng (P)?

A. M(−1; −2; 4). **B.** N(1; −1; 0). **C.** J(1; 2; −4). **D.** T(1; 3; 2).

Câu 44: Trong không gian Oxyz, mặt cầu (S) tâm $I(1;2;-2)$ giao với mặt phẳng $(P):2x+2y+z+5=0$ theo giao tuyến là đường tròn (C) có diện tích 16π (đvdt). Phương trình mặt cầu (S)

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=25$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=7$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=9$. **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=36$.

Câu 45: Trong không gian Oxyz, gọi (S) là mặt cầu qua $M(1;-5;2)$ và chứa (C) là đường tròn giao điểm của mặt cầu $(S'):x^2+y^2+z^2+2x-4y-4z-40=0$ và mặt phẳng $(\alpha):2x+2y-z+9=0$. Phương trình của (S) là

A. không tồn tại. **B.** $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=65$.

C. $(x-3)^2+(y-4)^2+z^2=40$. **D.** $(x+5)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=49$.

Câu 46: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-1-3t\\z=2-t\end{cases}$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-1=0$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) bán kính r=1 là

A. 2x+y+z−3=0. **B.** x+y−z−4=0.

C. 2x+y−z+1=0. **D.** 13x+7y+5z−16=0.

Câu 47: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$, mặt phẳng $(P): 2x+y-2z+2=0$ và mặt cầu $(S):(x+2)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=1$ tiếp xúc (P). Gọi M là giao điểm của d và (P), A là tiếp điểm của (S) và (P). Độ dài MA bằng?

A. $\sqrt{26}$. **B.** $\sqrt{\frac{86}{3}}$. **C.** $\sqrt{\frac{26}{3}}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Câu 48: Cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+2y+4z-3=0$ và đường thẳng $\Delta_1:\begin{cases}x=2t\\y=1-t\\z=t\end{cases}$ và $\Delta_2:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$. Phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) và song song với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 là?

A. $2x+3y-z+1+3\sqrt{3}=0$. **B.** $2x+3y-z-1-3\sqrt{14}=0$.

C. $2x+y+z-2=0$. **D.** $x+3y+z-3=0$.

Câu 49: Cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-10x+2y+26z-113=0$ và đường thẳng $\Delta_1:\begin{cases}x=-7+3t\\y=-1-2t\\z=8\end{cases}$ và $\Delta_2:\frac{x+5}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+13}{2}$. Phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) và song song với Δ_1, Δ_2 là?

A. $4x+6y+5z+205=0$. **B.** $-4x+6y+5z+9=0$.

C. $2x+y+z+22=0$. **D.** $8x+12y+10z-105=0$.

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+m=0$ là phương trình của một mặt cầu.

A. $m>6$. **B.** $m\geq 6$. **C.** $m\leq 6$. **D.** $m<6$.

Câu 51: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua ba điểm M(2; 3; 3), N(2; −1; −1), P(−2; −1; 3) và có tâm thuộc mặt phẳng $(\alpha):2x+3y-z+2=0$

A. $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-10=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z-2=0$.

C. $x^2+y^2+z^2+4x-2y+6z+2=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-2=0$

Câu 52: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=2$ và hai đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}$, $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của một mặt phẳng tiếp xúc với (S), song song với d và Δ?

A. $x+z+1=0$. **B.** $x+y+1=0$.

C. $y+z+3=0$. **D.** $x+z-1=0$.

Câu 53: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $I(1;2;3)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $2x-2y-z-4=0$. Mặt cầu tâm I tiếp xúc với (P) tại điểm H. Tìm tọa độ H

A. $H(-1;4;4)$. **B.** $H(-3;0;-2)$. **C.** $H(3;0;2)$. **D.** $H(1;-1;0)$.

Câu 54: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(3;-2;6), B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. Mặt phẳng $(P):ax+by+cz-2=0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$.

A. T = 3. **B.** T = 5. **C.** T = 2. **D.** T = 4.

Câu 55: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm A(–2; 0; 0), B(0; –2; 0) và C(0; 0; –2). Gọi D là điểm khác O sao cho DA, DB, DC đôi một vuông góc với nhau và I(a; b; c) là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD. Tính S = a +b +c

A. S = –4. **B.** S = –1. **C.** S = –2. **D.** S = –3.

Câu 56: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2=9$, điểm M(1; 1; 2) và mặt phẳng (P): x + y + z –4 = 0. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M, thuộc (P) và cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho AB nhỏ nhất. Biết Δ có một VTCP là $\vec{u}=(1;a;b)$, tính T = a – b

A. –2. **B.** 1. **C.** –1. **D.** 0.

ĐÁP ÁN

36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
A	B	D	C	A	C	A	C	A	D	D
47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	
B	B	A	D	B	A	C	A	B	C	

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 36:

Mặt cầu (S) có tâm I(3; 4; –1) và bán kính R=5.

$d(I,(P))=\frac{23}{\sqrt{6}}>R\rightarrow$ Chọn A; $d(I,(Q))=\frac{16}{3\sqrt{6}}<R\rightarrow$ Loại B.

$d(I,(R))=5=R\rightarrow$ Loại C; $d(I,(T))=\frac{8}{3}<R\rightarrow$ Loại D

→ Đáp án A

Câu 37:

Mặt cầu (S) có tâm I(1; –2; –2) và bán kính R=4.

Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) đi qua điểm $A(3;1;\sqrt{3}-2)$ và có VTPT $\vec{n}=\overrightarrow{IA}=(2;3;\sqrt{3})$. Phương trình mặt phẳng tiếp diện cần tìm là:

$$2(x-3)+3(y-1)+\sqrt{3}(z-\sqrt{3}+2)=0\Leftrightarrow 2x+3y+\sqrt{3}z-12+2\sqrt{3}=0$$

→ Đáp án B

Câu 38:

(Q)//(P)⇒(Q): x+y+2z+m=0 (m≠1)

(S) có tâm I(1; −2; 3), bán kính $R=\sqrt{6}$.

Mặt phẳng (Q) tiếp xúc mặt cầu (S) khi và chỉ khi $d(I;(Q))=R$

$$\Leftrightarrow \frac{|1+(-2)+2.3+m|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\sqrt{6} \Leftrightarrow |m+5|=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1(L) \\ m=-11(t/m) \end{array}\right. . \Rightarrow (Q): x+y+2z-11=0$$

→ **Đáp án D**

Câu 39:

Mặt cầu (S) có tâm I(−1; −1; −1) và bán kính R=1.

Phương pháp giải nhanh:

- Mặt cầu (S) tiếp xúc các mặt phẳng Oxy, Oyz, (Oxz)theo thứ tự tại các điểm M(−1; −1; 0), N(0; −1; −1), P(−1; 0; −1).
- Đường thẳng d_1 đi qua điểm P(−1; 0; −1)∈(S)→ Loại A

  Đường thẳng d_2 đi qua tâm I→ Loại B
- $d(I;d_3)=\sqrt{\frac{10}{7}}>1$ →Chọn C; $d(I;d_4)=\sqrt{\frac{5}{29}}<1$ → Loại D

→ **Đáp án C**

Câu 40:

Mặt cầu (S_1) có tâm I_1(−1; 3; 4) và bán kính $R_1=2\sqrt{2}$.

Mặt cầu (S_2) có tâm I_2(−2; 3; 1) và bán kính $R_2=3$.

Em tính được $I_1I_2=\sqrt{(-2+1)^2+(3-3)^2+(1-4)^2}=\sqrt{10}$ → $R_2-R_1<I_1I_2<R_1+R_2$

→ **Đáp án A**

Câu 41:

Mặt cầu (S_1) có tâm I_1(−1; 1; 2) và bán kính $R_1=1$.

Mặt cầu (S_2) có tâm I_2(−1; 2; 1) và bán kính $R_2=4$.

Em tính được $I_1I_2=\sqrt{(-1+1)^2+(2-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}$ → $I_1I_2<R_2-R_1$ → **Đáp án C**

Câu 42:

Mặt cầu (S) có tâm K(1; 1; 1) và bán kính R=5, mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n}=(2;2;1)$.

- Khoảng cách từ K đến mặt phẳng (α) là $h=\frac{|2+2+1+7|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=4$

→ Bán kính $r=\sqrt{R^2-h^2}=\sqrt{25-16}=3$ →loại C, D.

- I là tâm đường tròn giao tuyến khi $\begin{cases} I\in(\alpha) \\ \overrightarrow{KI}//\vec{n} \end{cases}$

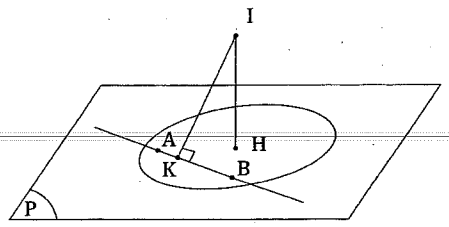
Thử với các kết quả đáp án A, B→ loại B → **Đáp án A**

Câu 43:

Mặt cầu (S) có tâm I(1; 1; 1) và bán kính R=5.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng AB → K cố định.

Giả sử mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn tâm H bán kính r.



H là hình chiếu của I lên (P) và $r^2 = R^2 - IH^2$.

$IH \le IK \Rightarrow r^2 \ge R^2 - IK^2 \rightarrow r_{min}$ khi H≡K.

Đường thẳng AB có phương trình $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$.

Điểm K thuộc AB nên K(1+t; −1+3t; 2−2t)→ $\overrightarrow{IK} = (t; 3t-2; 1-2t)$

Em có: $\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow t = \frac{4}{7} \rightarrow \overrightarrow{IK} = \left(\frac{4}{7}; -\frac{2}{7}; -\frac{1}{7}\right)$ và IH<R.

Do vậy tồn tại mặt phẳng (P) chính là mặt phẳng qua A và nhận VTPT $\vec{n} = (4; -2; -1)$.

Phương trình mặt phẳng (P): 4x−2y−z−4=0.

→ **Đáp án C**

Câu 44:

Đường tròn có bán kính $r \rightarrow \pi r^2 = 16\pi \Leftrightarrow r = 4$.

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là: $h = \frac{|2.1 + 2.2 + (-2) + 5|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 3$.

Bán kính mặt cầu $R = \sqrt{r^2 + h^2} = 5$.

Phương trình mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 25$ → **Đáp án A**

Chú ý: r=4, R>r suy ra R>4 → loại B, C.

Câu 45:

Mặt cầu (S') có tâm I'(−1; 2; 2) và bán kính R'=7.

Mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n} = (2; 2; -1)$.

Em có $d(I', (\alpha)) = 3 < R'$ → tồn tại (S)→ loại A.

Đường tròn (C) có bán kính $r = \sqrt{(R')^2 - d^2} = 2\sqrt{10}$, tâm H là hình chiếu của I' lên (α).

Gọi Δ là đường thẳng qua I' vuông góc với (α). Phương trình Δ: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$

Tâm I của mặt cầu (S) thuộc Δ nên I(−1+2t; 2+2t; 2−t).

Em có: $d\left(I;(\alpha)\right)=\dfrac{\left|2(-1+2t)+2(2+2t)-(2-t)+9\right|}{3}=3|t+1|$

$$\begin{cases}R^2=IM^2\\ R^2=r^2+d^2\left(I,(\alpha)\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow(-1+2t-1)^2+(2+2t+5)^2+(2-t-2)^2=40+9(t+1)^2$$

$$\Leftrightarrow(2t-2)^2+(7+2t)^2+t^2=40+9(t+1)^2$$

$$\Leftrightarrow t=-2\Rightarrow I(-5;\ -2;\ 4),\ R=7$$

→ **Đáp án D**

Câu 46:

Mặt cầu (S) tâm I(−1; 1; −1) và bán kính R=2.

Đường thẳng d qua M(1; −1; 2) và có VTCP $\vec{u}=(2;-3;-1)$.

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$ thì $\vec{n}.\vec{u}=0\Leftrightarrow 2A-3B-C=0\Leftrightarrow C=2A-3B$.

Vì $d\subset(P)$ nên $M\in(P)\rightarrow$ phương trình mặt phẳng (P) là: A(x−1)+B(y+1)+C(z−2)=0.

Khoảng cách từ I đến (P) là: $d\left(I,(P)\right)=\sqrt{R^2-r^2}$

$$\Leftrightarrow\frac{\left|-2A+2B-3C\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\sqrt{3}\xrightarrow{C=2A-3B}7A^2-20AB+13B^2=0$$

Vì A, B, C không cùng bằng 0 nên chọn B=1 $\rightarrow\begin{cases}A=1 & \rightarrow C=-1\\ A=\dfrac{13}{7} & \rightarrow C=\dfrac{5}{7}\end{cases}$ → **Đáp án D**

Phương pháp giải nhanh:

Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm M(1; −1; 2) và N(3; −4; 1) của đường thẳng d và cách tâm I của mặt cầu một khoảng bằng $d=\sqrt{3}$.

Đáp án A: qua M, N nhưng khoảng cách từ I đến mặt phẳng bằng $\dfrac{5}{\sqrt{6}}\rightarrow$ loại A.

Đáp án B, C: không qua M nên không chứa d → Loại B, C.

Đáp án D: qua M, N và khoảng cách từ I đến mặt phẳng bằng $\sqrt{3}\rightarrow$ Chọn D.

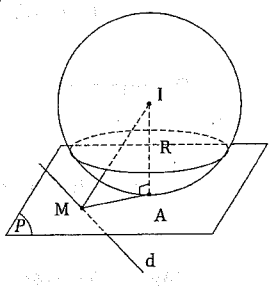
Câu 47:

Mặt cầu (S) tâm I(−2; −3; −1) và bán kính R=1.

Em có IA⊥(P) nên IA⊥AM và IA=R=1

$M=d\cap(P)\rightarrow t=\dfrac{4}{3}\rightarrow M\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{4}{3}\right)$

$$MA=\sqrt{IM^2-IA^2}=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}+2\right)^2+\left(\frac{4}{3}+3\right)^2+\left(\frac{4}{3}+1\right)^2-1}=\sqrt{26}$$



→ **Đáp án B**

Câu 48:

Mặt cầu (S) tâm I(1; −1; −2) và bán kính R=3.

Đường thẳng Δ_1 qua M(0; 1; 0) và có VTCP $\overrightarrow{u_1}=(2;-1;1)$.

Đường thẳng Δ_2 qua M(1; 0; 0) và có VTCP $\overrightarrow{u_2}=(-1;1;1)$.

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(-2;-3;1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là: $-2x-3y+z+D=0$.

Vì (P) tiếp xúc mặt cầu (S) nên khoảng cách từ I đến (P) bằng R:

$$\frac{|-2+3-2+D|}{\sqrt{14}}=3\Leftrightarrow|D-1|=3\sqrt{14}\Leftrightarrow D=1\pm3\sqrt{14}\ .$$

Vậy phương trình mặt phẳng là :

$$-2x-3y+z+1+3\sqrt{14}=0 \text{ hoặc } -2x-3y+z+1-3\sqrt{14}=0.$$

→ **Đáp án B**

Chú ý: Em cần kiểm tra điều kiện song song giữa mặt phẳng (P) và Δ_1, Δ_2.

Phương pháp giải nhanh:

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(-2;-3;1)\rightarrow$ Loại C, D.

Đáp án A: $d\left(I,(P)\right)\neq R\rightarrow$ loại A.

Đáp án B: $d\left(I,(P)\right)=R\rightarrow$ chọn B.

→ **Đáp án B**

Câu 49:

Mặt cầu (S) tâm I(5; −1; −13) và bán kính $R=\sqrt{308}$.

Đường thẳng Δ_1 qua M(−7; −1; 8) và có VTCP $\overrightarrow{u_1}=(3;-2;0)$.

Đường thẳng Δ_2 qua M(−5; 1; −13) và có VTCP $\overrightarrow{u_2}=(2;-3;2)$.

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_1}\right]=(4;6;5)\rightarrow$ loại B, C.

Đáp án A: $d\left(I,(P)\right)=R\rightarrow$ chọn A.

Đáp án D: $d\left(I,(P)\right)\neq R\rightarrow$ loại D.

→ **Đáp án A**

Câu 50:

Cách 1: Ta có

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+m=0\Leftrightarrow\left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2-2y+1\right)+\left(z^2-4z+4\right)+m-6=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=6-m$$

Để phương trình trên là phương trình của mặt cầu thì $6-m>0\Leftrightarrow m<6$

→ **Đáp án D**

Cách 2: Phương trình tổng quát của mặt cầu là $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

Điều kiện $a^2+b^2+c^2-d>0$

Theo đầu bài ta có $\begin{cases}a=1\\b=1\\c=2\\d=m\end{cases}\Rightarrow 1^2+1^2+2^2-m>0\Leftrightarrow 6-m>0\Leftrightarrow m<6$ → **Đáp án D**

Câu 51:

Vì MN=MP=NP nên tam giác MNP đều $\Rightarrow G\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$ là tâm của tam giác MNP.

Tâm I của mặt cầu sẽ nằm trên đường thẳng d đi qua G và vuông góc với (MNP)

Ta có: $\overrightarrow{MN}=(0;-4;-4)$, $\overrightarrow{MP}=(-4;-4;0)\rightarrow\left[\overrightarrow{MN};\overrightarrow{NP}\right]=(-16;16;-16)$

Đường thẳng d đi qua G nhận $\vec{u}=\frac{1}{16}\left[\overrightarrow{MN};\overrightarrow{NP}\right]=(-1;1;-1)$ là VTCP: $\begin{cases}x=\frac{2}{3}-t\\y=\frac{1}{3}+t\\z=\frac{5}{3}-t\end{cases}$

I là giao của d và mặt phẳng $(\alpha):2x+3y-z+2=0$

Vậy tọa độ của I thỏa mãn hệ $\begin{cases}x=\frac{2}{3}-t;y=\frac{1}{3}+t;z=\frac{5}{3}-t\\2x+3y-z+2=0\end{cases}\Rightarrow t=\frac{-4}{3}$

$\Rightarrow I(2;-1;3)$ → **Đáp án B**

Câu 52:

Gọi phương trình mặt phẳng cần tìm là (P)

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;1;-2)$, bán kính $R=\sqrt{2}$,

$\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ là VTCP của đường thẳng d và Δ, trong đó $\overrightarrow{u_1}=(1;2;-1);\overrightarrow{u_2}=(1;1;-1)$

Vì (P) song song với d và Δ nên VTPT của (P) là $\vec{n}\equiv\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(1;0;1)$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (P): $x+z+a=0$

Do (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I;(P))=R\Leftrightarrow\frac{|a-3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow|a-3|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=5\\a=1\end{array}\right.$

Phương trình (P): $x+z+5=0$ hay $x+z+1=0$ → **Đáp án A**

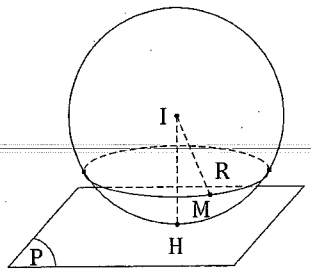
Câu 53:

VTPT của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(2;-2;-1)$

Gọi $\vec{u}$ là VTCP của đường thẳng IH. Vì $IH\perp(P)$ nên $\vec{u}=\vec{n}=(2;-2;-1)$

Phương trình đường thẳng IH qua $I(1;2;3)$ và có

VTCP $\vec{u}=(2;-2;-1)$ là $\begin{cases}x=1+2t\\y=2-2t\\z=3-t\end{cases}$



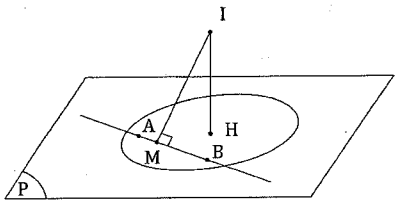
Tọa độ của $H\in IH$ là $H(1+2t;2-2t;3-t)$

Mặt cầu tâm I tiếp xúc với (P) tại điểm H nên $H\in(P)$. Khi đó:

$2(1+2t)-2(2-2t)-(3-t)-4=0\Rightarrow t=1\Rightarrow H(3;0;2)$ → **Đáp án C**

Câu 54:

Mặt cầu S có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=5$



$\overrightarrow{AB}=(-3;3;-6)$

Phương trình đường thẳng AB là $\begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=2t\end{cases}$

Gọi M là hình chiếu của I trên AB, H là hình chiếu của I trên (P).

Khi đó H là tâm đường tròn giao tuyến của (S) và (P) có bán kính r.

Vì $IH^2+r^2=R^2\Rightarrow r^2=R^2-IH^2\geq R^2-IM^2\Rightarrow$ r nhỏ nhất khi IH lớn nhất (H≡M)

$M\in AB\Rightarrow M(t;1-t;2t),\overrightarrow{IM}=(t-1;-t-1;2t-3)$

Vì $\overrightarrow{IM}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=0$

$\Leftrightarrow 3(t-1)-3(-t-1)+6(2t-3)=0\Leftrightarrow 18t-18=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow\overrightarrow{IM}=(0;-2;-1)$

Khi $H\equiv M$ thì $IM\perp(P)$ tại M

Gọi $\overrightarrow{n_P}=(a;b;c)$ là một VTPT của (P). Suy ra:

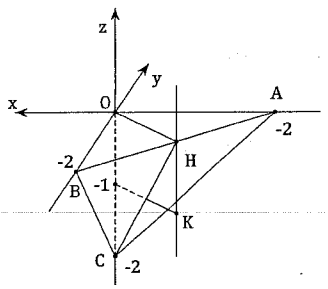
- $\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{IM}$ cùng phương $\Rightarrow a=0;\frac{b}{-2}=\frac{c}{-1}$
- $A,B\in(P)\Rightarrow\begin{cases}3a-2b+6c-2=0\\b-2=0\end{cases}$

Giải hệ điều kiện em được a=0, b=2, c=1 $\Rightarrow T=a+b+c=3$ → **Đáp án A**

Câu 55:

Dễ thấy rằng: $A(-2;0;0)\in Ox$, $B(0;-2;0)\in Oy$,
$C(0;0;-2)\in Oz$.

D là điểm khác O sao cho DA, DB, DC đôi một vuông góc với nhau nên D chính là điểm đối xứng O qua (ABC).



Xét tứ diện OABC

$OA=OB=OC=\sqrt{0+0+2^2}=2$, $AB=BC=CA=2\sqrt{2}$

Vậy tứ diện O.ABC chính là hình chóp tam giác đều.

Gọi K là tâm mặt cầu ngoại tiếp OABC. Khi đó K là giao điểm của

- Đường thẳng d vuông góc mặt phẳng (OAB) tại trung điểm H của AB.
- Mặt phẳng trung trực (P) của OC.

Em có: d qua H(−1;−1;0) và có VTCP $\vec{k}=(0;0;1)$ → phương trình d: $\begin{cases}x=-1\\y=-1\\z=t\end{cases}$

Phương trình (P): z=−1.

Suy ra K(−1;−1;−1) → Bán kính mặt cầu ngoại tiếp OABC là $R=OK=\sqrt{3}$

Do D và O đối xứng qua (ABC) nên D.ABC cũng là hình chóp đều nội tiếp mặt cầu có bán kính $R=\sqrt{3}$.

Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện DABC. Khi đó I thuộc đường thẳng OK: x=y=z và IA=R

Giải điều kiện em được $I\left(\frac{-1}{3};\frac{-1}{3};\frac{-1}{3}\right)$, $S=a+b+c=\frac{-1}{3}+\frac{-1}{3}+\frac{-1}{3}=-1$. → **Đáp án B**

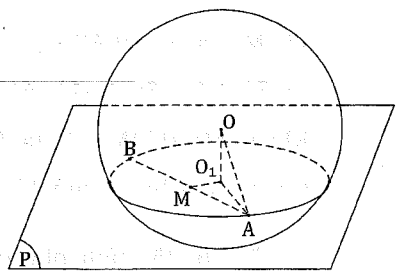
Câu 56:

(P) giao với mặt cầu tại đường tròn thiết diện.

Em thấy $\begin{cases}OM<R\\M\in(P)\end{cases}\Rightarrow$ M nằm trong đường tròn thiết diện.

Gọi O_1 là tâm của đường tròn thiết diện

OO_1 là đường thẳng đi qua O nhận VTPT của là (1; 1; 1) làm VTCP.



Phương trình OO_1: $\frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-0}{1}$

Vậy x = y = z.

Vì $O_1=OO_1\cap(P)$ nên: x + x + x − 4 = 0

$\Leftrightarrow x=\frac{4}{3}\Leftrightarrow x=y=z=\frac{4}{3}\Rightarrow O_1\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$

Để AB nhỏ nhất thì $O_1M\perp AB$. Em có $\overrightarrow{O_1M}=\left(\frac{-1}{3};\frac{-1}{3};\frac{2}{3}\right)$

Mặt phẳng (Q) đi qua M nhận $\overrightarrow{O_1M}=\left(\frac{-1}{3};\frac{-1}{3};\frac{2}{3}\right)$ làm VTPT.

Phương trình (Q): $\frac{-1}{3}(x-1)-\frac{1}{3}(y-1)+\frac{2}{3}(z-2)=0\Leftrightarrow x+y-2z+2=0$

$(Q)\cap(P)=\{\Delta\}\Rightarrow\overrightarrow{u_\Delta}//\left[\overrightarrow{n_Q},\overrightarrow{n_P}\right]=(3;-3;0)$

Chọn $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-1;0)$. Vậy a = −1; b = 0. T = a − b = −1. → **Đáp án C**

CHỦ ĐỀ 4: CÁC BÀI TOÁN MIN – MAX

CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Tìm điểm thuộc mặt phẳng thỏa mãn điều kiện Min – Max

Bài toán 1.1. Trong không gian Oxyz cho hai điểm A, B và mặt phẳng (P). Tìm trên mặt phẳng (P) điểm M sao cho $T=m.MA^2+n.MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất.

Phương pháp:

Bước 1: Tìm tọa độ điểm I thỏa mãn $m.\overrightarrow{IA}+n.\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Bước 2: Biến đổi biểu thức:

$$\begin{aligned}T&=m.MA^2+n.MB^2\\&=m.\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)^2+n.\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)^2\\&=mIA^2+nIB^2+(m+n)IM^2-2\overrightarrow{IM}\underbrace{\left(m.\overrightarrow{IA}+n\overrightarrow{IB}\right)}_{\vec{0}}\\&=mIA^2+nIB^2+(m+n)IM^2\end{aligned}$$

Như vậy:

$$\left.\begin{aligned}T_{max}&\Leftrightarrow(m+n)IM^2 max\left(\text{trong TH}: m+n<0\right)\\T_{min}&\Leftrightarrow(m+n)IM^2 min\left(\text{trong TH}: m+n>0\right)\end{aligned}\right\}\rightarrow IM_{min}$$

Khi đó M chính là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

Bước 3: Tìm tọa độ hình chiếu M của điểm I lên mặt phẳng (P).

Chú ý: Bài toán 1.1 được thực hiện trong trường hợp tổng quát với số điểm là k, k≥2.

♥ **Vận dụng**

Câu 1 : Trong không gian Oxyz cho hai điểm A(1 ;2 ;1) và B(1 ;–4 ;3) và mặt phẳng (P) : x+y–1=0. Gọi M(x ;y ;z) là điểm trên mặt phẳng (P) thỏa mãn MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị $T=x+y+z$ bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm AB. Khi đó $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ và I(1;–1;2).

Em có: $T=MA^2+MB^2=\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)^2+\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)^2=IA^2+IB^2+2IM^2$

Do đó $T_{min}\Leftrightarrow IM_{min}\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

Đường thẳng d qua I và vuông góc với (P) có phương trình: $\begin{cases}x=1+k\\y=-1+k\\z=2\end{cases}$

M là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) $\Rightarrow M\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2};2\right)$

$\rightarrow T=x+y+z=3.$ **→ Đáp án B**

Bài toán 1.2. Trong không gian Oxyz cho hai điểm A, B và mặt phẳng (P). Tìm trên mặt phẳng (P) điểm M sao cho $\left|m.\overrightarrow{MA}+n.\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Phương pháp:

Bước 1: Tìm tọa độ điểm I thỏa mãn $m.\overrightarrow{IA}+n.\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Bước 2: Biến đổi biểu thức:

$$\left|m.\overrightarrow{MA}+n.\overrightarrow{MB}\right|=\left|m.\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)+n.\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)\right|$$

$$=\left|\underbrace{m\overrightarrow{IA}+n\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}}-(m+n)\overrightarrow{IM}\right|$$

$$=\left|m+n\right|.\left|\overrightarrow{IM}\right|$$

$\left|m.\overrightarrow{MA}+n.\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi IM nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M chính là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

Bước 3: Tìm tọa độ hình chiếu M của điểm I lên mặt phẳng (P).

Chú ý: Bài toán 1.2 được thực hiện trong trường hợp tổng quát với số điểm là k, k≥2.

♥ Vận dụng

Câu 2 : Trong không gian Oxyz cho hai điểm A(1; −2; 3) và B(2; 1; 0) và mặt phẳng (P) có phương trình x−y+z=0. Gọi M(a; b; c) là điểm trên mặt phẳng (P) thỏa mãn $\left|2.\overrightarrow{MA}+3.\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó T=5(a−2b−c) bằng

A. −6. **B.** −2. **C.** 4. **D.** −5.

Hướng dẫn giải

Gọi I (x; y; z) là điểm thỏa mãn $2.\overrightarrow{IA}+3.\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

$$\Rightarrow\begin{cases}2(1-x)+3(2-x)=0\\2(-2-y)+3(1-y)=0\\2(3-z)+3(-z)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{8}{5};y=-\frac{1}{5};z=\frac{6}{5}\Rightarrow I\left(\frac{8}{5};-\frac{1}{5};\frac{6}{5}\right)$$

Em có: $\left|2.\overrightarrow{MA}+3.\overrightarrow{MB}\right|=\left|2.\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)+3.\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)\right|=\left|2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}-5\overrightarrow{IM}\right|=5.\left|\overrightarrow{IM}\right|$

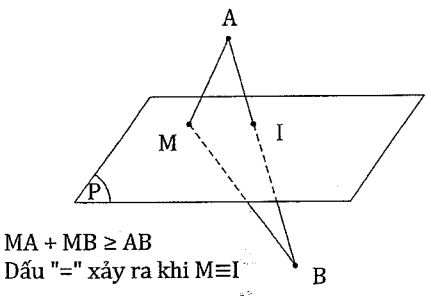
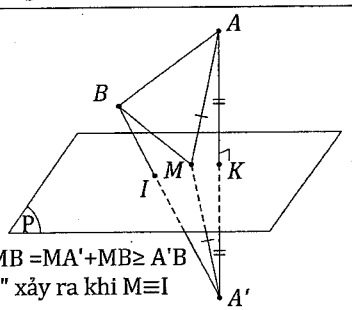
Do đó $\left|2.\overrightarrow{MA}+3.\overrightarrow{MB}\right|$ min $\Leftrightarrow IM_{min}\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

Đường thẳng d qua I và vuông góc với (P) có phương trình: $\begin{cases}x=\frac{8}{5}+k\\y=-\frac{1}{5}-k\\z=\frac{6}{5}+k\end{cases}$

$M=d\cap(P)\Rightarrow M\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5};\frac{1}{5}\right)\rightarrow T=5(a-2b-c)=-6$ → **Đáp án A**

Bài toán 1.3. Trong không gian Oxyz cho hai điểm A, B và mặt phẳng (P). Tìm trên mặt phẳng (P) điểm M sao cho MA+MB đạt giá trị nhỏ nhất.

Phương pháp:

TH1	**TH2**
A, B nằm khác phía đối với mặt phẳng (P)	A, B nằm cùng phía đối với mặt phẳng (P)
Bước 1: Kiểm tra điểm A, B nằm cùng phía hay khác phía đối với mặt phẳng (P).	*Bước 1:* Kiểm tra điểm A, B nằm cùng phía hay khác phía đối với mặt phẳng (P).
 MA + MB ≥ AB Dấu "=" xảy ra khi M≡I	 MA + MB =MA'+MB≥ A'B Dấu "=" xảy ra khi M≡I
Bước 2: Tìm tọa độ I = AB ∩ (P). Vì MA+MB min khi M≡I	*Bước 2:* Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua mặt phẳng (P). *Bước 3:* Tìm tọa độ I = A'B ∩ (P). Vì MA+MB=MA'+MB min khi M≡I

♥ Vận dụng

Câu 3 : Trong không gian Oxyz cho hai điểm A(1 ;4 ;2) và B(0 ;−3 ;1) và mặt phẳng (P) có phương trình x+2y−z+1=0. M(a ;b ;c) là điểm trên mặt phẳng (P) thỏa mãn MA+MB đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó T=7(a+b+c) bằng

A. −1. **B.** 7. **C.** 15. **D.** 13.

Hướng dẫn giải

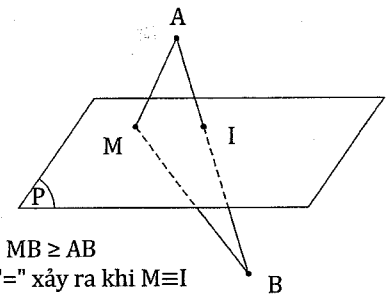
Thay tọa độ điểm A, B vào biểu thức vế trái của phương trình (P):

$(1+2.4-2+1)(0+2(-3)-1+1)<0$

⇒A, B nằm khác phía đối với (P).

MA+MB đạt giá trị nhỏ nhất khi M≡I là giao điểm của AB và (P).

Điểm I(x ;y ;z) thỏa mãn



MA + MB ≥ AB
Dấu "=" xảy ra khi M≡I

$$\begin{cases} I\in(P) \\ \overrightarrow{AI}=k\overrightarrow{AB} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ x-1=k(0-1) \\ y-4=k(-3-4) \\ z-2=k(1-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{4}{7} \\ x=\frac{3}{7};y=0;z=\frac{10}{7} \end{cases} \Rightarrow I=\left(\frac{3}{7};0;\frac{10}{7}\right)$$

M≡I → T=13

→ Đáp án D

*** Nâng cao**

Câu 4 : Trong không gian Oxyz cho hai điểm A(1 ;1 ;3) và B(1;3 ;–1) và mặt phẳng (P) có phương trình x–2y–z+1=0. M là điểm trên mặt phẳng (P) thỏa mãn MA+MB đạt giá trị nhỏ nhất. Tọa độ điểm M là

A. $M\left(\frac{3}{2};1;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $M\left(-\frac{3}{2};1;-\frac{5}{2}\right)$. **C.** $M(1;1;0)$. **D.** Không có M.

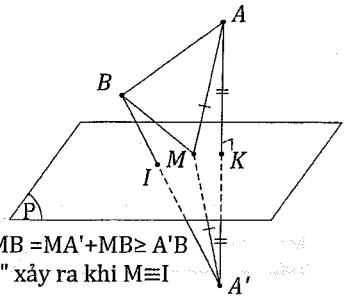
Hướng dẫn giải

Thay tọa độ điểm A, B vào biểu thức vế trái của phương trình (P):

$(1-2.1-3+1)(1-2.3+1+1)>0$

$\Rightarrow$ A, B nằm cùng phía đối với (P).

Gọi A'(x';y';z') đối xứng với A qua (P), K là trung điểm của AA'.



MA + MB =MA'+MB≥ A'B

Dấu "=" xảy ra khi M≡I

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;-2;-1)$. Khi đó:

$$\begin{cases}K\in(P)\\ \overrightarrow{AA'}=k\overrightarrow{n_P}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1+x'}{2}-2.\frac{1+y'}{2}-\frac{3+z'}{2}+1=0\\ x'-1=k\\ y'-1=-2k\\ z'-3=-k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=1\\ x'=2\\ y'=-1\\ z'=2\end{cases}.$$ Vậy A'(2;–1;2)

MA+MB đạt giá trị nhỏ nhất khi M≡I là giao điểm của A'B và (P).

Điểm I(x ;y ;z) thỏa mãn

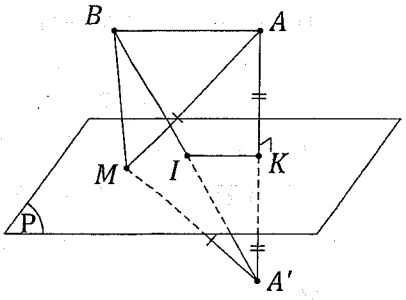
$$\begin{cases}I\in(P)\\ \overrightarrow{A'I}=t\overrightarrow{A'B}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y-z+1=0\\ x-2=t(1-2)\\ y+1=t(3+1)\\ z-2=t(-1-2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\frac{1}{2}\\ x=\frac{3}{2};y=1;z=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow I\left(\frac{3}{2};1;\frac{1}{2}\right)$$

Vì M≡I $\rightarrow M\left(\frac{3}{2};1;\frac{1}{2}\right)$ $\rightarrow$ **Đáp án A**

Cách giải nhanh:

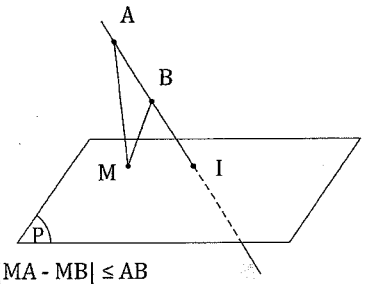
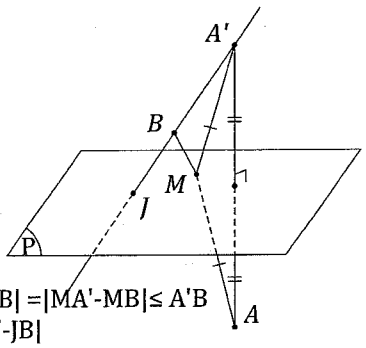
Kiểm tra được $\begin{cases}A\notin(P)\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_P}=0\end{cases}\Rightarrow AB//(P).$

Do đó I là trung điểm của A'B.



Bài toán 1.4. Trong không gian Oxyz cho hai điểm A, B và mặt phẳng (P). Tìm trên mặt phẳng (P) điểm M sao cho |MA–MB| đạt giá trị lớn nhất.

Phương pháp:

Trường hợp 1:	**Trường hợp 2:**
A, B nằm cùng phía đối với mặt phẳng (P)	A, B nằm khác phía đối với mặt phẳng (P)
Bước 1: Kiểm tra điểm A, B nằm cùng phía hay khác phía đối với mặt phẳng (P).	*Bước 1:* Kiểm tra điểm A, B nằm cùng phía hay khác phía đối với mặt phẳng (P).
	
|MA - MB| ≤ AB AB=|IA-IB| Dấu "=" xảy ra khi M≡I	|MA - MB| =|MA'-MB|≤ A'B A'B=|JA'-JB| Dấu "=" xảy ra khi M≡J
Bước 2: Tìm tọa độ I = AB ∩ (P). Vì |MA–MB| max khi M≡I	*Bước 2:* Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua mặt phẳng (P). *Bước 3:* Tìm tọa độ J = A'B ∩ (P). Vì |MA–MB|=|MA'–MB| max khi M≡J

♥ Vận dụng

Câu 5 : Trong không gian Oxyz cho hai điểm A(1; 1; 2) và B(1; –2; –1) và mặt phẳng (P) có phương trình 2x–2y+1=0. $M(a;b;c)$ là điểm trên mặt phẳng (P) thỏa mãn |MA–MB| đạt giá trị lớn nhất. Khi đó T=a–2b+4c bằng

A. 16. **B.** 17. **C.** 10. **D.** 20.

Hướng dẫn giải

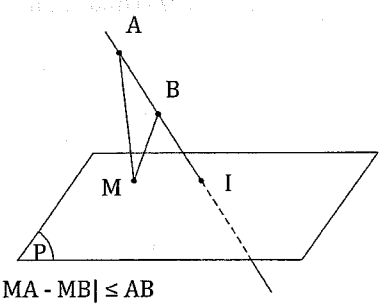
Thay tọa độ điểm A, B vào biểu thức vế trái của phương trình (P):

$(2.1-2.1+1)(2.1-2(-2)+1)>0$

$\Rightarrow$A, B nằm cùng phía đối với (P).

|MA–MB| đạt giá trị lớn nhất khi M≡I là giao điểm của AB và (P).

Điểm I(x ;y ;z) thỏa mãn $\begin{cases} I\in(P) \\ \overrightarrow{AI}=k\overrightarrow{AB} \end{cases}$



|MA - MB| ≤ AB
AB=|IA-IB|
Dấu "=" xảy ra khi M≡I

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x-2y+1=0\\x-1=k(1-1)\\y-1=k(-2-1)\\z-2=k(-1-2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-\frac{1}{6}\\x=1;y=\frac{3}{2};z=\frac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow M\left(1;\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right).$$ Vì M≡I nên $M\left(1;\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$

→ **Đáp án C**

*** Nâng cao**

Câu 6 : Trong không gian Oxyz cho hai điểm A(1 ;0 ;–3) và B(2;3 ;2) và mặt phẳng (P) có phương trình x–y–z+2=0. Gọi M(a ;b ;c) là điểm trên mặt phẳng (P) thỏa mãn |MA–MB| đạt giá trị lớn nhất. Tổng tọa độ điểm M là

A. 6. **B.** 8. **C.** 3. **D.** –2

Hướng dẫn giải

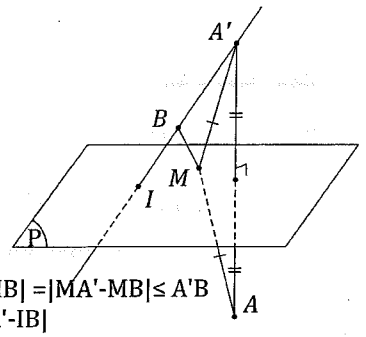
Thay tọa độ điểm A, B vào biểu thức vế trái của phương trình (P):

$(1-0+3+2)(2-3-2+2)<0$

⇒A, B nằm khác phía đối với (P).

Gọi A'(x';y';z') đối xứng với A qua (P), K là trung điểm của AA'.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;-1;-1)$.



|MA - MB| =|MA'-MB|≤ A'B

A'B=|IA'-IB|

Dấu "=" xảy ra khi M≡I

Khi đó:

$$\begin{cases}K\in(P)\\\overrightarrow{AA'}=k\overrightarrow{n_P}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1+x'}{2}-\frac{y'}{2}-\frac{-3+z'}{2}+2=0\\x'-1=k\\y'=-k\\z'+3=-k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=-4\\x'=-3\\y'=4\\z'=1\end{cases}.$$ Vậy A'(–3;4;1).

|MA–MB| đạt giá trị lớn nhất khi M≡I là giao điểm của A'B là (P).

Điểm I(x ;y ;z) thỏa mãn

$$\begin{cases}I\in(P)\\\overrightarrow{A'I}=t\overrightarrow{A'B}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y-z+2=0\\x+2=t(2+3)\\y-4=t(3-4)\\z-1=t(2-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\x=3\\y=3\\z=2\end{cases}$$

Vì M≡I nên M(3 ;3 ;2)→ a+b+c=8 → **Đáp án B**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 7: Trong không gian Oxyz cho hai điểm A(0 ;2 ;1) và B(1 ;–1 ;2) và mặt phẳng (P): x+y+z–1=0. Gọi M(a ;b ;c) là điểm trên mặt phẳng (P) thỏa mãn MA^2+2MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó T=9(a–b–c) bằng

A. 9. **B.** 5. **C.** –3. **D.** –13.

Câu 8: Trong không gian Oxyz cho ba điểm A(0 ;0 ;–1) và B(1 ;–1 ;0), C(3 ;0 ;2) và mặt phẳng (P) : x–2y+z–2=0. Gọi M là điểm trên mặt phẳng (P) thỏa mãn $MA^2+2MB^2-MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng tọa độ điểm M là

A. $\frac{8}{3}$. **B.** –3. **C.** 3. **D.** $-\frac{8}{3}$.

Câu 9: Trong không gian Oxyz, cho A(-3,5,-5); B(5,-3,7) và mặt phẳng (P): x + y + z = 0. Điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất. Giá trị của $MA^2 + MB^2$ là

A. 112. **B.** 142. **C.** 122. **D.** 132.

Câu 10: Trong hệ tọa độ không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x-y+2z=0$ và A(1,2,-1) ; B(3,1,-2) ; C(1,-2,1). Điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA^2-MB^2-MC^2$ lớn nhất là

A. $M(5,1,-2)$. **B.** $M(-4,0,2)$. **C.** $M(2,-2,-2)$. **D.** $M(2,2,-2)$.

Câu 11: Trong tọa độ không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x-2y+z=0$, điểm A(1,1,0) và B($\frac{5}{3}$,-1,0). Tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho MA^2-3MB^2 nhỏ nhất là

A. $M(2,1,0)$. **B.** $M(2,0,-2)$. **C.** $M(1,0,-1)$. **D.** $M(1,0,1)$.

Câu 12: Trong không gian Oxyz cho ba điểm A(1 ;2 ;0) và B(1 ;1 ;–1), C(5 ;1 ;1) và mặt phẳng (P) có phương trình 2x–y+z+1=0. Gọi M(a ;b ;c) là điểm trên mặt phẳng (P) thỏa mãn $\left|2.\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó T=a+b+c bằng

A. 6. **B.** $\frac{17}{3}$. **C.** 4. **D.** $\frac{22}{3}$.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai điểm A(–2 ;4 ;–3), B(4 ;2 ;6). Tọa độ điểm M trên mặt phẳng Oxz sao cho tam giác MAB có chu vi nhỏ nhất là

A. M(–2 ;0 ;–3). **B.** M(2 ;0 ;3). **C.** M(2 ;0 ;–3). **D.** M(–2 ;0 ;3).

Câu 14: Trong không gian Oxyz cho hai điểm A(0 ;4 ;1) và B(1 ;–1 ;1) và mặt phẳng (P) : 2x+2y–z+2=0. M là điểm trên mặt phẳng (P) thỏa mãn MA+MB đạt giá trị nhỏ nhất. Tọa độ điểm M là

A. $M\left(\frac{1}{2};-\frac{9}{10};\frac{6}{5}\right)$. **B.** $M\left(-\frac{17}{2};\frac{9}{10};\frac{24}{5}\right)$. **C.** $M\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4};\frac{9}{2}\right)$. **D.** $M\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3};2\right)$.

Câu 15: Trong hệ tọa độ không gian Oxyz, cho A(1,2,3); B(4,4,5). Điểm Q thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $|QA-QB|$ có giá trị lớn nhất có tọa độ là

A. $Q\left(-\frac{7}{2},-1,0\right)$. **B.** $Q\left(\frac{7}{2},-1,0\right)$. **C.** $Q\left(\frac{7}{2},1,0\right)$. **D.** $Q\left(-\frac{7}{2},-1,1\right)$.

Câu 16: Trong không gian Oxyz cho hai điểm A(1 ;0 ;–1) và B(2;1 ;2). Gọi M là điểm trên mặt phẳng Oyz thỏa mãn |MA–MB| đạt giá trị lớn nhất. Tổng tọa độ điểm M là

A. 1. **B.** –1. **C.** 2. **D.** –3.

ĐÁP ÁN

7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
C	B	B	C	C	D	B	A	A	B

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 7:

Gọi I(x; y; z) là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

$$\Rightarrow\begin{cases}(0-x)+2(1-x)=0\\(2-y)+2(-1-y)=0\\(1-z)+2(2-z)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{2}{3};y=0;z=\frac{5}{3}\Rightarrow I\left(\frac{2}{3};0;\frac{5}{3}\right)$$

Em có: $T=MA^2+2MB^2=\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)^2+2\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)^2=IA^2+2IB^2+3IM^2$

Do đó $T_{min}\Leftrightarrow IM_{min}\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

Đường thẳng d qua I và vuông góc với (P) có phương trình: $\begin{cases}x=\frac{2}{3}+k\\y=k\\z=\frac{5}{3}+k\end{cases}$

$M=d\cap(P)\Rightarrow M\left(\frac{2}{9};-\frac{4}{9};\frac{11}{9}\right)\rightarrow T=9\left(\frac{2}{9}+\frac{4}{9}-\frac{11}{9}\right)=-3\rightarrow$ **Đáp án C**

Câu 8:

Gọi I(x;y;z) là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

$$\Rightarrow\begin{cases}(0-x)+2(1-x)-(3-x)=0\\(0-y)+2(-1-y)-(0-y)=0\\(-1-z)+2(0-z)-(2-z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\y=-1\\z=-\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow I\left(-\frac{1}{2};-1;-\frac{3}{2}\right)$$

Em có

$$T=MA^2+2MB^2-MC^2=\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)^2+2\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)^2-\left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IM}\right)^2=IA^2+2IB^2-IC^2+2IM^2$$

Do đó $T_{min}\Leftrightarrow IM_{min}\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

Đường thẳng d qua I và vuông góc với (P) có phương trình: $\begin{cases}x=-\frac{1}{2}+k\\y=-1-2k\\z=-\frac{3}{2}+k\end{cases}$

$M=d\cap(P)\Rightarrow M\left(-\frac{1}{3};-\frac{4}{3};-\frac{4}{3}\right)\rightarrow$ Tổng tọa độ điểm M: $x_M+y_M+z_M=-3$

$\rightarrow$ **Đáp án B**

Câu 9:

Gọi H là trung điểm của AB, suy ra H có toạ độ là H(1,1,1). Em có:

$$MA^2 + MB^2 = \left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HB}\right)^2 = 2\left(\overrightarrow{MH}\right)^2 + \left(\overrightarrow{HA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{HB}\right)^2 = 2MH^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

Do đó $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất khi MH nhỏ nhất $\Rightarrow$ M chính là hình chiếu của H trên (P).

Đường thẳng d chứa H và vuông góc (P) là: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$,

$M(1+t,1+t,1+t) \in d.$

Do M cũng thuộc (P) nên t = −1

$\Rightarrow M(0,0,0) \Rightarrow MA^2+MB^2=(9+25+25)+(25+9+49)=142.$

→ **Đáp án B.**

Câu 10:

Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Rightarrow G(3,-3,0).$

$$MA^2-MB^2-MC^2=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2-\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2-\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2=-MG^2+GA^2-GB^2-GC^2$$

$\Rightarrow MA^2-MB^2-MC^2$ lớn nhất khi MG nhỏ nhất, M là hình chiếu của G trên (P).

$\Rightarrow M(2,-2,-2).$

→ **Đáp án C.**

Câu 11:

Gọi I(a,b,c) thỏa mãn $\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Rightarrow I(2,-2,0).$

Ta có: $MA^2-3MB^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2-3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=-2MI^2+IA^2-3IB^2$

$\Rightarrow MA^2-3MB^2$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất, M là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Gọi d là đường thẳng qua I và vuông góc với (P). Phương trình d: $\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{1}.$

$M = d \cap (P) \Rightarrow t=-1 \Rightarrow M(1,0,-1).$

→ **Đáp án C.**

Câu 12:

Gọi I (x;y;z) là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-4\overrightarrow{IC}=\vec{0}.$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(1-x)+(1-x)-4(5-x)=0 \\ 2(2-y)+(1-y)-4(1-y)=0 \\ 2(0-z)+(-1-z)-4(1-z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=17 \\ y=-1 \Rightarrow I(17;-1;5) \\ z=5 \end{cases}$$

Em có:

$$\left|2.\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}\right| = \left|2.\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)+\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)-4\left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IM}\right)\right| = \left|2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-4\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IM}\right| = \left|\overrightarrow{IM}\right|$$

Do đó $\left|2.\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}\right|$ min $\Leftrightarrow IM_{min} \Leftrightarrow$ M là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

Đường thẳng d qua I và vuông góc với (P) có phương trình: $\begin{cases} x = 17 + 2k \\ y = -1 - k \\ z = 5 + k \end{cases}$

M là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) $\Rightarrow M\left(\frac{10}{3};\frac{35}{6};-\frac{11}{6}\right)$

$\rightarrow$ Tổng tọa độ điểm M: $a+b+c=\frac{22}{3}$.

$\rightarrow$ Đáp án D

Câu 13:

Vì A, B đều có tung độ dương nên A, B nằm về cùng một phía đối với mặt phẳng (Oxz).

Gọi B' là điểm đối xứng với B qua mp(Oxz).

Suy ra B'(4;-2;6).

Chu vi tam giác MAB là :

$MA+MB+AB=AM+MB'+AB\geq AB'+AB$

Dấu « = » xảy ra $\Leftrightarrow$ A, M, B' thẳng hàng.

Gọi $M(a;0;b)$.

Vì A, M, B' thẳng hàng nên có số k sao cho:

$$\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB'}\Leftrightarrow\begin{cases} a+2=k(4+2) \\ -4=k(-2-4) \\ b+3=k(6+3) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} k=\frac{2}{3} \\ a=2 \\ b=3 \end{cases}.$$

Vậy với M(2 ;0 ;3) thì tam giác MAB có chu vi nhỏ nhất.

$\rightarrow$ Đáp án B

Câu 14:

Thay tọa độ điểm A, B vào biểu thức vế trái của phương trình (P):

$(2.0+2.4-1+2)(2.1+2.(-1)-1+2)>0$

$\Rightarrow$A, B nằm cùng phía đối với (P).

Gọi A'(x';y';z') đối xứng với A qua mặt phẳng (P)

$\Rightarrow$ K là trung điểm của AA'.

(P) có VTPT $\overrightarrow{n_P}=(2;2;-1)$ nên

$$\begin{cases} K\in(P) \\ \overrightarrow{AA'}=k\overrightarrow{n_P} \end{cases}$$

MA + MB =MA'+MB≥ A'B

Dấu "=" xảy ra khi M≡I

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2.\dfrac{0+x'}{2}+2.\dfrac{4+y'}{2}-\dfrac{1+z'}{2}+2=0\\x'-0=2k\\y'-4=2k\\z'-1=-k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=-2\\x'=-4\\y'=0\\z'=3\end{cases}.$$ Vậy A'(−4;0;3).

MA+MB đạt giá trị nhỏ nhất khi M≡I là giao điểm của A'B và (P).

Điểm I(x ;y ;z) thỏa mãn

$$\begin{cases}I\in(P)\\\overrightarrow{A'I}=t\overrightarrow{A'B}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+2y-z+2=0\\x+4=t(1+4)\\y-0=t(-1-0)\\z-3=t(1-3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{9}{10}\\x=\dfrac{1}{2};y=-\dfrac{9}{10};z=\dfrac{6}{5}\end{cases}$$

Vì M≡I nên $M\left(\frac{1}{2};-\frac{9}{10};\frac{6}{5}\right)$

→ Đáp án A

Câu 15:

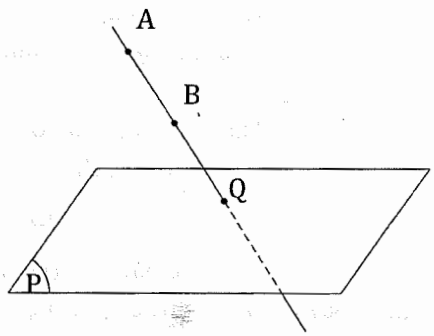
(Oxy) có phương trình: z = 0 và 3.5 = 15 > 0 nên A, B cùng phía đối với (Oxy).

$\Rightarrow |QA-QB|$ có giá trị lớn nhất khi Q, A, B thẳng hàng hay Q = AB ∩ (P).

Phương trình đường thẳng AB:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{2}.$$

$\Rightarrow$ Tọa độ giao điểm Q của đường thẳng AB với (Oxy) là $Q\left(-\frac{7}{2},-1,0\right)$.



→ Đáp án A.

Câu 16:

Hai điểm A, B có tung độ trái dấu ⇒A, B nằm khác phía đối với mặt phẳng Oyz.

A'(1;0;1) đối xứng với A qua Oyz.

|MA−MB| đạt giá trị lớn nhất khi M≡I là giao điểm của A'B và Oyz.

Điểm I(0 ;y ;z) thỏa mãn

$$\overrightarrow{A'I}=t\overrightarrow{A'B}\Leftrightarrow\begin{cases}0-1=t(2-1)\\y-0=t(1-0)\\z-1=t(2-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\y=-1\\z=0\end{cases}$$

Vậy I(0 ;−1 ;0).

→ Đáp án B

Dạng 2: Tìm điểm thuộc đường thẳng thỏa mãn điều kiện Min – Max

Bài toán 2.1. Trong không gian Oxyz cho hai điểm A, B và đường thẳng d. Tìm trên đường thẳng d điểm M sao cho $T = m.MA^2 + n.MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất.

Phương pháp 1:

Bước 1: Tìm tọa độ điểm I thỏa mãn $m.\overrightarrow{IA} + n.\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Bước 2: Biến đổi biểu thức:

$$\begin{aligned} T &= m.MA^2 + n.MB^2 \\ &= m.\left(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IM}\right)^2 + n.\left(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IM}\right)^2 \\ &= mIA^2 + nIB^2 + (m+n)IM^2 - 2\overrightarrow{IM}\underbrace{\left(m\overrightarrow{IA} + n\overrightarrow{IB}\right)}_{\vec{0}} \\ &= mIA^2 + nIB^2 + (m+n)IM^2 \end{aligned}$$

Như vậy:

$$\left.\begin{aligned} T_{max} &\Leftrightarrow (m+n)IM^2 max\left(\text{trong TH}: m+n<0\right) \\ T_{min} &\Leftrightarrow (m+n)IM^2 min\left(\text{trong TH}: m+n>0\right) \end{aligned}\right\} \rightarrow IM_{min}$$

Khi đó M chính là hình chiếu của I lên đường thẳng d.

Bước 3: Tìm tọa độ hình chiếu M của điểm I lên đường thẳng d.

Phương pháp 2:

Bước 1: Tham số hóa tọa độ điểm M (giả sử tham số t)

Bước 2: Biến đổi biểu thức:

$T = m.MA^2 + n.MB^2 = f(t)$ là một tam thức bậc hai ẩn t

Bước 3: Tìm t để hàm số f(t) nhận giá trị nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) $\rightarrow$tọa độ M.

Chú ý: Bài toán 2.1 được thực hiện trong trường hợp tổng quát với số điểm là k, k≥2.

♥ Vận dụng

Câu 17: Cho hai điểm A(1 ;2 ;1) và B(1 ;–4 ;3) và đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Gọi M là điểm trên đường thẳng d thỏa mãn MA^2+2MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng tọa độ điểm M là

A. 5. **B.** $\frac{46}{9}$. **C.** 4 **D.** $\frac{28}{3}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1:

Gọi I (x;y;z) là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Em có:

$$\Rightarrow\begin{cases}(1-x)+2(1-x)=0\\(2-y)+2(-4-y)=0\\(1-z)+2(3-z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-2\\z=\dfrac{7}{3}\end{cases}\Rightarrow I\left(1;-2;\dfrac{7}{3}\right)$$

Em có: $T=MA^2+2MB^2=\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)^2+2\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)^2=IA^2+2IB^2+3IM^2$

Do đó $T_{min}\Leftrightarrow IM_{min}\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của I lên đường thẳng d.

Giả sử $M(t;2-t;1+t)\in d\Rightarrow\overrightarrow{IM}=\left(t-1;4-t;t-\dfrac{4}{3}\right)$

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(1;-1;1)$. Khi đó:

M là hình chiếu của I lên đường thẳng $d\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{u_d}=0$

$$\Leftrightarrow t-1-(4-t)+t-\frac{4}{3}=0\Leftrightarrow t=\frac{19}{9}$$

Vậy $M\left(\dfrac{19}{9};-\dfrac{1}{9};\dfrac{28}{9}\right)\rightarrow$ Tổng tọa độ điểm M: $x_M+y_M+z_M=\dfrac{46}{9}$

→ Đáp án B

Cách 2:

Vì $M\in d$ nên M(t;2–t;1+t). Khi đó

$$T=MA^2+2MB^2=(1-t)^2+t^2+(-t)^2+2\left[(1-t)^2+(-6+t)^2+(2-t)^2\right]$$

$$=9t^2-38t+82=\left(3t-\frac{19}{3}\right)^2+\frac{377}{9}$$

Vậy T_{min} khi $t=\dfrac{19}{9}\rightarrow M\left(\dfrac{19}{9};-\dfrac{1}{9};\dfrac{28}{9}\right)\rightarrow$ Tổng tọa độ điểm M: $x_M+y_M+z_M=\dfrac{46}{9}$.

→ Đáp án B

Với cách 2 em sẽ dễ dàng tìm được giá trị nhỏ nhất của biểu thức T

Bài toán 2.2. Trong không gian Oxyz cho hai điểm A, B và đường thẳng d . Tìm trên đường thẳng d điểm M sao cho $\left|m.\overrightarrow{MA}+n.\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Phương pháp:

Bước 1: Tìm tọa độ điểm I thỏa mãn $m.\overrightarrow{IA}+n.\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Bước 2: Biến đổi biểu thức:

$$\left|m.\overrightarrow{MA}+n.\overrightarrow{MB}\right|=\left|m.\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)+n.\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)\right|$$

$$=\left|m\overrightarrow{IA}+n\overrightarrow{IB}-(m+n)\overrightarrow{IM}\right|$$

$$=\left|m+n\right|.\left|\overrightarrow{IM}\right|$$

Như vậy: $\left|m.\overrightarrow{MA}+n.\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi IM nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M chính là hình chiếu của I lên đường thẳng d.

Bước 3: Tìm tọa độ hình chiếu M của điểm I lên đường thẳng d.

Phương pháp 2:

Bước 1: Tham số hóa tọa độ điểm M (giả sử tham số t)

Bước 2: Biến đổi biểu thức:

$$T^2=\left(m.\overrightarrow{MA}+n.\overrightarrow{MB}\right)^2=f(t) \text{ là một tam thức bậc hai ẩn t}$$

Bước 3: Tìm t để hàm số f(t) nhận giá trị nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) →tọa độ M.

Chú ý: Bài toán 2.2 được thực hiện trong trường hợp tổng quát với số điểm là k, k≥2.

♥ **Vận dụng**

Câu 18: Trong không gian Oxyz cho hai điểm A(−2 ;−1 ;1) và B(1 ;1 ;4) và đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$. M là điểm trên đường thẳng d thỏa mãn $\left|2.\overrightarrow{MA}-3.\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tọa độ điểm M là

A. $M(-4;-1;4)$.

B. $M\left(\frac{17}{2};15;\frac{17}{2}\right)$.

C. $M\left(\frac{15}{2};13;-\frac{15}{2}\right)$.

D. $M\left(\frac{11}{6};\frac{5}{3};-\frac{11}{6}\right)$.

Hướng dẫn giải

Gọi I (x;y;z) là điểm thỏa mãn $2.\overrightarrow{IA}-3.\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

$$\Rightarrow\begin{cases}2(-2-x)-3(1-x)=0\\2(-1-y)-3(1-y)=0\\2(1-z)-3(4-z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=7\\y=5\\z=10\end{cases}\Rightarrow I(7;5;10).$$

Em có: $\left|2.\overrightarrow{MA}-3.\overrightarrow{MB}\right|=\left|2.\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)-3.\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)\right|=\left|2\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IM}\right|=\left|\overrightarrow{IM}\right|$

Do đó $\left|2.\overrightarrow{MA}-3.\overrightarrow{MB}\right|$ min $\Leftrightarrow IM_{min}\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của I lên đường thẳng d.

Giả sử $M(1+t;2t;-1-t)\in d\Rightarrow\overrightarrow{IM}=(t-6;2t-5;-t-11)$

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(1;2;-1)$

M là hình chiếu của I lên đường thẳng d $\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{u_d}=0$

$\Leftrightarrow t-6+2(2t-5)-(-t-11)=0\Leftrightarrow t=\frac{5}{6}$. Vậy $M\left(\frac{11}{6};\frac{5}{3};-\frac{11}{6}\right)$.

→ Đáp án D

Phương pháp giải nhanh:

Điểm M thuộc d→ $x_M=-z_M$ →Loại B.

Với đáp án A, C, D em hãy kiểm tra 2 điều kiện:

- M thuộc d → Loại A
- Tính giá trị $\left|2.\overrightarrow{MA}-3.\overrightarrow{MB}\right|$ ứng với 2 điểm M trong phương án C, D.

Chọn M để $\left|2.\overrightarrow{MA}-3.\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ hơn → Chọn D.

→ Đáp án D

Bài toán 2.3. Trong không gian Oxyz cho hai điểm A, B và đường thẳng d. Tìm trên đường thẳng d điểm M sao cho MA+MB đạt giá trị nhỏ nhất.

♥ Vận dụng

Câu 19: Trong hệ tọa độ không gian Oxyz, tọa độ điểm M thuộc trục Ox sao cho MA+MB nhỏ nhất là, với A(3,0,2) ; B(2,1,0)

A. $\left(-\frac{7}{3},0,0\right)$. **B.** $\left(\frac{7}{3},0,0\right)$. **C.** $(3,0,0)$. **D.** $(-3,0,0)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{AB}(-1,1,-2);\vec{i}(1,0,0)\Rightarrow\left[\vec{i}.\overrightarrow{AB}\right].\overrightarrow{OA}=8\neq 0$ nên AB và Ox chéo nhau.

Lấy $M(a,0,0)$ thuộc Ox $\Rightarrow\overrightarrow{MA}(3-a,0,2);\overrightarrow{MB}(2-a,1,0)$.

$\Rightarrow MA+MB=\sqrt{(3-a)^2+4}+\sqrt{(2-a)^2+1}$

Cách 1:

Xét trong mặt phẳng tọa độ Oxy, lấy M'(a,0) thuộc Ox, A'(3,2); B'(2,-1) thì $MA+MB=\sqrt{(3-a)^2+4}+\sqrt{(2-a)^2+1}=M'A'+M'B'$

Nhận thấy, A' và B' nằm khác phía đối với trục Ox nên M'A'+M'B' nhỏ nhất khi M' là giao điểm của Ox với A'B'.

Phương trình đường thẳng A'B' trong hệ tọa độ Oxy là 3x - y – 7 = 0.

M' là giao điểm của Ox với A'B' nên $a=\frac{7}{3}$

→ Đáp án B.

Cách 2 :

Xét $\vec{u}=(3-a;2);\vec{v}=(a-2;1)$

$\Rightarrow\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\geq\left|\vec{u}+\vec{v}\right|\Leftrightarrow\sqrt{(3-a)^2+4}+\sqrt{(2-a)^2+1}\geq\sqrt{10}$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{3-a}{a-2}=2\Leftrightarrow a=\frac{7}{3}$ **→ Đáp án B.**

Cách 3:

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{(3-t)^2+4}+\sqrt{(2-t)^2+1}$

$\Rightarrow f'(t)=\frac{t-3}{\sqrt{(3-t)^2+4}}+\frac{t-2}{\sqrt{(2-t)^2+1}};f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{7}{3}.$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
f'(t)		−	0	+	
f(t)	$+\infty$	↘	$\sqrt{10}$	↗	$+\infty$

Vậy $\min f(t)=f\left(\frac{7}{3}\right)$. → **Đáp án B.**

Bài toán 2.4. Trong không gian Oxyz cho hai điểm A, B và đường thẳng d. Tìm trên đường thẳng d điểm M sao cho |MA–MB| đạt giá trị lớn nhất.

♥ Vận dụng

Câu 20: Trong hệ tọa độ không gian Oxyz, cho A(-1,-1,0); B(5,2,-3) và đường thẳng $d:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$. Điểm M thuộc d sao cho $|MA-MB|$ lớn nhất có hoành độ là

A. $\frac{-1}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $-\frac{10}{3}$.

Hướng dẫn giải

Lấy $M(1-t,2t,t-1)\Rightarrow \overline{AM}(2-t,2t+1,t-1)$; $\overline{BM}(-4-t,2t-2,t+2)$

$$|MA-MB|=\sqrt{6t^2-2t+6}-\sqrt{6t^2+4t+24}=\sqrt{6}\left[\left|\sqrt{\left(t-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{35}{36}}-\sqrt{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{35}{9}}\right|\right]$$

Xét trong hệ tọa độ Oxy, lấy $M'(t,0)$; $A'\left(\frac{1}{6},\frac{\sqrt{35}}{6}\right)$; $B'\left(\frac{-1}{3},\frac{\sqrt{35}}{3}\right)$

$\Rightarrow |MA-MB|=\sqrt{6}|M'A'-M'B'|$, lớn nhất khi M', A', B' thẳng hàng.

Ta có $\overrightarrow{A'B'}\left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{35}}{6}\right)\Rightarrow$ PT đường thẳng A'B' là $\sqrt{35}x+3y=\frac{4\sqrt{35}}{6}$

M' là giao điểm của Ox và A'B' nên $t=\frac{2}{3}$.

→ **Đáp án B.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 21: Trong hệ không gian Oxyz, cho A(0,1,-2); B(2,-1,2); C(4,3,3) và đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{1}$. Tổng tọa độ điểm M trên (d) sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ nhỏ nhất là

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** –1.

Câu 22: Trong không gian Oxyz, cho A(1,1,1); B(-1,2,0); C(3,-1,2) và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$. Tọa độ điểm M thuộc d thỏa mãn $S=2MA^2+3MB^2-4MC^2$ nhỏ nhất là

A. $\left(\frac{-8}{3},\frac{-11}{6},\frac{5}{6}\right)$. B. $\left(\frac{8}{3},\frac{-11}{6},\frac{5}{6}\right)$. C. $\left(\frac{8}{3},\frac{11}{6},\frac{5}{6}\right)$. D. $\left(\frac{-8}{3},\frac{11}{6},\frac{-5}{6}\right)$.

Câu 23: Trong không gian Oxyz, cho A(1,0,-1); B(0,2,3); C(-1,1,1) và đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{2}$. Tọa độ điểm M thuộc d sao cho $MA^2+2MB^2-4MC^2$ lớn nhất, cao độ điểm M là

A. $\frac{-13}{9}$. B. $\frac{-8}{9}$. C. $\frac{17}{9}$. D. $\frac{-17}{9}$.

Câu 24: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{1}$ và A(-1,1,1); B(1,4,0). Điểm M thuộc d, chu vi tam giác MAB nhỏ nhất bằng

A. $\sqrt{14}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $3\sqrt{2}+\sqrt{14}$. D. $3\sqrt{2}-\sqrt{14}$.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho A(-1,1,2); B(1,0,1) và đường thẳng $d:\frac{x}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{-1}$. Giá trị nhỏ nhất của $\left|-3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ khi M di động trên d là

A. $\sqrt{24}$. B. $\sqrt{34}$. C. $\sqrt{44}$. D. $\sqrt{14}$.

Câu 26: Cho hai điểm A(-1,2,1); B(1,-2,-1) và đường thẳng $d:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$. Điểm $M(x_0,y_0,z_0)$ thuộc d sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất. Tính $S=3(x_0-y_0+z_0)$

A. $S=4$. B. $S=-4$. C. $S=6$. D. $S=-2$.

Câu 27: Trong hệ tọa độ không gian Oxyz, cho A(-1,2,1); B(1,-2,-1) và đường thẳng $d:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$. Điểm M thuộc d sao cho $\left|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất có tung độ là

A. $-\frac{10}{3}$. B. $\frac{8}{3}$. C. 10. D. 8.

ĐÁP ÁN

21	22	23	24	25	26	27
A	A	B	C	C	D	A

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 21:

Gọi điểm G(x,y,z) là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ thì G(2,1,1) là trọng tâm ΔABC.

Em có:

$MA^2+MB^2+MC^2=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2=3\overrightarrow{MG}+GA^2+GB^2+GC^2$

Do $GA^2+GB^2+GC^2$ không đổi nên $MA^2+MB^2+MC^2$ nhỏ nhất khi MG nhỏ nhất.

$\Rightarrow$M là hình chiếu vuông góc của G lên đường thẳng d.

Lấy $M(t+1,2t+2,t+3)$ thuộc d $\Rightarrow\overrightarrow{MG}(1-t,-1-2t,-2-t)$

M là hình chiếu vuông góc của G lên đường thẳng d nên $\overrightarrow{MG}.\vec{u}=0$

$\Leftrightarrow t=\frac{-1}{2}\Rightarrow M\left(\frac{1}{2},1,\frac{5}{2}\right).$

→ **Đáp án A.**

Câu 22:

Gọi I(a,b,c) thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}-4\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{IA}=4\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AB}\Rightarrow I(-13,12,-6).$

Em có:

$S=2MA^2+3MB^2-4MC^2=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2-4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$=MI^2+2IA^2+3IB^2-4IC^2$

$\Rightarrow$ S nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất, tức là M là hình chiếu vuông góc của I trên d.

Lấy $M(2t+1,t,-1-t)\in d\Rightarrow\overrightarrow{IM}(2t+14,t-12,5-t).$

$IM\perp d\Rightarrow\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{u_d}=0\Rightarrow t=\frac{-11}{6}\Rightarrow M\left(\frac{-8}{3},\frac{-11}{6},\frac{5}{6}\right).$

→ **Đáp án A**

Câu 23:

Lấy $M(t-1,1-2t,2t)\in d$

$\Rightarrow\overrightarrow{AM}(t-2,1-2t,2t+1);\overrightarrow{BM}(t-1,-1-2t,2t-3);\overrightarrow{CM}(t,-2t,2t-1)$

$MA^2+2MB^2-4MC^2=-9t^2-8t+24=-9\left(t+\frac{4}{9}\right)^2+\frac{232}{9}\le\frac{232}{9}$

$\Rightarrow\max\left(MA^2+2MB^2-4MC^2\right)=\frac{232}{9}$ khi $t=-\frac{4}{9}\Rightarrow M\left(\frac{-13}{9},\frac{17}{9},\frac{-8}{9}\right).$

→ **Đáp án B.**

Câu 24:

Ta có : $\overrightarrow{AB}(2,3,-1)$, đường thẳng d đi qua điểm I(1,2,1) và có VTCP $\vec{u}(2,2,1)$

$\Rightarrow\left[\vec{u}.\overrightarrow{AB}\right].\overrightarrow{IA}=6\neq0\Rightarrow$ AB và d chéo nhau.

Chu vi tam giác MAB là : $C_{\Delta MAB}=AB+MA+MB,$

Do $AB=\sqrt{14}$ không đổi nên chu vi tam giác MAB nhỏ nhất khi $MA+MB$ nhỏ nhất.

Lấy $M(2t+1,2t+2,t+1)\in d\Rightarrow MA+MB=\sqrt{(3t+2)^2+1}+\sqrt{(3t-1)^2+4}$

Cách 1:

Xét trong mặt phẳng tọa độ Oxy, lấy M'(3t,0) thuộc Ox, A'(-2,1); B'(1,-2) thì

$MA+MB=\sqrt{(3t+2)^2+1}+\sqrt{(3t-1)^2+4}=M'A'+M'B'$

Nhận thấy, A' và B' nằm khác phía đối với trục Ox trong hệ tọa độ Oxy nên $M'A'+M'B'$ nhỏ nhất khi M' là giao điểm của Ox với A'B' với Ox.

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất khi $t=\frac{-5}{3}\Rightarrow M\left(\frac{8}{3},-\frac{10}{3},-\frac{8}{3}\right)$.

→ **Đáp án A.**

Cách khác: Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}\Rightarrow$ Tọa độ I

$\left|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right|=2\left|\overrightarrow{MI}\right|$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của I trên d.

*"Người nghèo nhất trên thế giới không phải là người không có tiền mà là người không có **ước mơ.***
*Nhờ có **ước mơ** mà con người trở nên **vĩ đại** – Người vĩ đại là người biến ước mơ thành hiện thực".*