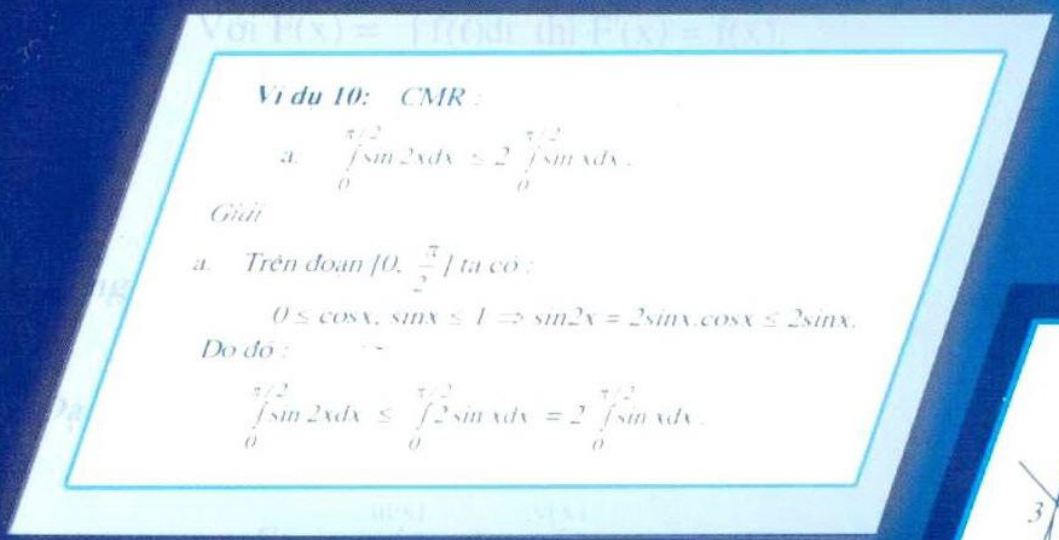
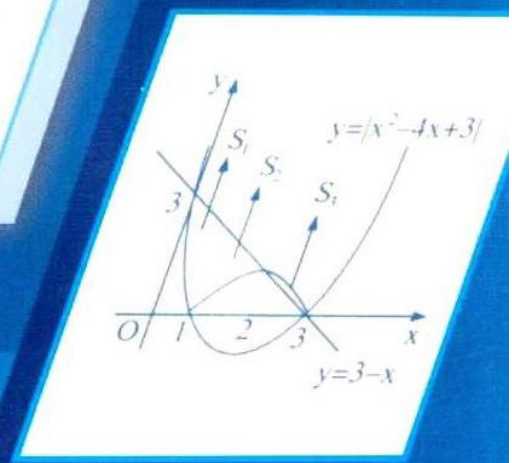
LÊ HỒNG ĐỨC - LÊ BÍCH NGỌC

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

GIẢI TÍCH 12

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG





ĐHQG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÓM CỰ MÔN

LÊ HỒNG ĐỨC – LÊ BÍCH NGỌC

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

GIẢI TÍCH 12

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

MỞ ĐẦU

Sự ưu việt của phương pháp thi trắc nghiệm đã và đang được chứng minh từ những nước có nền giáo dục tiên tiến trên thế giới bởi những ưu điểm như tính khách quan, tính bao quát và tính kinh tế.

Trong thời gian không xa, theo chủ trương của BGD&ĐT các trường đại học, cao đẳng và trung học chuyên nghiệp sẽ chuyển sang hình thức tuyển sinh bằng phương pháp trắc nghiệm. Và để có được thời gian chuẩn bị tốt nhất, các bài kiểm tra kiến thức trong chương trình THCS và THPT cũng sẽ có phần trắc nghiệm để các em học sinh làm quen.

Tuy nhiên, việc biên soạn các câu hỏi trắc nghiệm cần tuân thủ một số yêu cầu cơ bản về mặt lí luận sư phạm và ý nghĩa đích thực của các số liệu thống kê. Ngoài ra, một đề thi môn toán được chấm hoàn toàn dựa trên kết quả trắc nghiệm chắc chắn sẽ chưa phù hợp với hiện trạng giáo dục của nước ta bởi nhiều lí do, từ đó dẫn tới việc không đảm bảo được tính khách quan trong việc đánh giá kết quả học tập của học sinh. Để khắc phục nhược điểm này Nhóm Cự Môn chúng tôi đề xuất hướng thực hiện như sau:

1. *Với mỗi đề thi hoặc đề kiểm tra vẫn tuân thủ đúng cấu trúc chung và điểm trắc nghiệm không quá 3.5 điểm.*
2. *Trong những câu hỏi có phần trắc nghiệm sẽ được hiểu là "**trắc nghiệm và tự luận**". Ở đây, thông thường các em học sinh sẽ phải lựa chọn một trong bốn đáp số và cần biết rằng số điểm a của câu hỏi này được chia làm đôi:*
   - *Nếu lựa chọn đúng lời giải trắc nghiệm sẽ nhận được $\frac{a}{2}$ điểm.*
   - *Nếu thực hiện đúng lời giải tự luận cho câu hỏi sẽ nhận được $\frac{a}{2}$ điểm còn lại.*

Đây chính là yếu tố để đảm bảo tính khách quan bởi:

1. *Với những học sinh chỉ mò mẫm đáp án hoặc nhận được nó thông qua những yếu tố xung quanh sẽ chỉ nhận được tối đa $\frac{a}{2}$ điểm với xác suất 25%.*
2. *Với những học sinh hiểu được nội dung câu hỏi từ đó định hướng được các phép thử bằng tay hoặc bằng máy tính fx – 570MS chắc chắn sẽ nhận được $\frac{a}{2}$ điểm.*
3. *Với những học sinh khá hơn biểu hiện bằng việc hiểu được nội dung câu hỏi và có thể thực hiện được một phần câu hỏi này dưới dạng tự luận sẽ nhận được khoảng $\frac{a}{2} + \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}$ điểm.*
4. *Cuối cùng, với những học sinh biết cách thực hiện câu hỏi dưới dạng tự luận sẽ nhận được a điểm.*

Lựa trên tư tưởng này, Nhóm Cự Môn dưới sự phụ trách của Lê Hồng Đức xin trântrọng giới thiệu tới bạn đọc bộ sách:

Bộ sách này sẽ cung cấp cho bạn đọc một ngân hàng bài tập tự luận và trắc nghiệm môn toán THPT có chất lượng theo đúng thứ tự của chương trình Toám PTTH bởi về hình thức bạn đọc sẽ nhận thấy rằng bộ sách này chính là những cuốn sách giải bài tập của bộ sách ***Học và Ôn tập Toán*** *(được viết theo lớp 10, 11, 12) do NXB Đại học Quốc gia Hà Nội ấn hành.*

Cuốn **GIẢI TÍCH 12: TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG** *được chia thành 8 chủ đề:*

Chủ đề 1: Nguyên hàm

Chủ đề 2: Tích phân

Chủ đề 3: Các phương pháp tính tích phân

Chủ đề 4: Tính tích phân các dạng hàm số thường gặp

Chủ đề 5: Đẳng thức, bất đẳng thức tích phân

Chủ đề 6: Phương trình, bất phương trình tích phân

Chủ đề 7: Sử dụng tích phân tính diện tích của hình phẳng

Chủ đề 8: Sử dụng tích phân tính thể tích của các vật thể

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa. Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ tới:

Địa chỉ: Nhóm tác giả Cự Môn do Lê Hồng Đức phụ trách

Số nhà 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ - Hà Nội

Điện thoại: (04) 7196671 hoặc 0893046689

E-mail: cumon@hn.vnn.vn hoặc lehongduc39@yahoo.com.

Hà Nội, ngày 8 tháng 6 năm 2006

NHÓM CỰ MÔN – LÊ HỒNG ĐỨC

CHỦ ĐỀ 1. NGUYÊN HÀM

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA

Hàm số F(x) *được gọi là nguyên hàm của hàm số* f(x) *trên khoảng* (a, b) *nếu với mọi* $x \in (a, b)$, *ta có*:

$$F'(x) = f(x).$$

Nếu thay khoảng (a, b) bằng đoạn [a, b] thì ta phải có thêm điều kiện:

$$F'(a^+) = f(a) \text{ và } F'(b^-) = f(b).$$

Định lí: Nếu F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên khoảng (a, b) thì:

a *Với mọi hằng số* C, F(x) + C *cũng là một nguyên hàm của* f(x) *trên khoảng đó.*

b *Ngược lại mọi nguyên hàm của hàm số* f(x) *trên khoảng* (a, b) *đều có thể viết dưới dạng* F(x) + C *với* C *là hằng số.*

2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA NGUYÊN HÀM

1 $(\int f(x)dx)' = f(x)$.

2 $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, với $a \neq 0$.

3 $\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

4 $\int f(t)dt = F(t) + C \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + C$.

3. SỰ TỒN TẠI CỦA NGUYÊN HÀM

Định lí: *Mọi hàm số* f(x) *liên tục trên đoạn* [a, b] *đều có nguyên hàm trên đoạn đó.*

4. BẢNG CÁC NGUYÊN HÀM

Nguyên hàm các hàm số sơ cấp thường gặp	**Nguyên hàm các hàm số sơ cấp hợp (với u = u(x))**
$\int dx = x + C$	$\int du = u + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	$\int u^\alpha .du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C, x \neq 0$	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C, u = u(x) \neq 0$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, 0 < a \neq 1$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, 0 < a \neq 1$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u dx = -\cos u + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg}x + C$	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \text{tg}u + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{cotg}x + C$	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\text{cotg}u + C$

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN VÀ BÀI TẬP

Bài toán 1: Chứng minh rằng F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên (a, b) bằng định nghĩa.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định F '(x) trên (a, b).

Bước 2: Chứng tỏ rằng $F'(x) = f(x)$ với $\forall x \in (a, b)$.

Chú ý: Nếu thay (a, b) bằng [a, b] thì phải thực hiện chi tiết hơn, như sau:

Bước 1: Xác định F '(x) trên (a, b).

Xác định $F'(a^+)$ và $F'(b^-)$.

Bước 2: Chứng tỏ rằng: $\begin{cases} F'(x) = f(x), \forall x \in (a,b) \\ F'(a^+) = f(a) \\ F'(b^-) = f(b) \end{cases}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1. $F(x) = \sin^2 3x$ là một nguyên hàm của hàm số:

A. $f(x) = 2\sin 3x$.
C. $f(x) = 6\sin 3x.\cos 3x$.
B. $f(x) = 6\sin 3x$.
D. $f(x) = -6\sin 3x.\cos 3x$.

Bài tập 2. $F(x) = (3x - 1)(2x - 3)$ là một nguyên hàm của hàm số:

A. $f(x) = 3(2x - 3)$.
C. $f(x) = (3x - 1)(2x - 3)$.
B. $f(x) = 2(3x - 1)$.
D. $f(x) = 12x - 11$.

Bài tập 3. $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a})$ với $a > 0$ là một nguyên hàm của hàm số:

A. $f(x) = \sqrt{x^2 + a}$.
C. $f(x) = \sqrt{x^2 - a}$.
B. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$.
D. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - a}}$

Bài tập 4. Cho hàm số: $F(x) = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \dfrac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right|$.

a. Chứng minh rằng F(x) là một nguyên hàm của $f(x) = \sqrt{x^2 + a}$, $a > 0$.

b. Tìm nguyên hàm hàm số $h(x) = (x + 2)\sqrt{x^2 + a}$, $a > 0$.

Bài tập 5. Cho hai hàm số: $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$ và $F(x) = |x| - \ln(1 + |x|)$

Chứng minh rằng hàm số F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x).

Bài tập 6. Cho hai hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} x\ln x & \text{khi } x > 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases} \text{ và } F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2(2\ln x - 1)}{4} & \text{khi } x > 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng hàm số F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x).

Bài tập 7.

a. Tính đạo hàm của hàm số $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

b. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

A. $F(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C.$ **C.** $F(x) = \dfrac{x}{\sqrt{(x^2+1)^2}} + C.$

B. $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} + C.$ **D.** $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} + C.$

Bài tập 8.

a. Tính đạo hàm của hàm số $g(x) = \ln\left|\dfrac{1+\sqrt{x^2+a}}{x}\right|$, với $x \neq 0, a > 0$.

b. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{a}{x\sqrt{x^2+a}}$, với $x \neq 0, a > 0$.

A. $F(x) = -\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{x^2+a}}{x}\right| + C.$ **C.** $F(x) = -\ln\left|\dfrac{1-\sqrt{x^2+a}}{x}\right| + C.$

B. $F(x) = \dfrac{a}{x\sqrt{x^2+a}} + C.$ **D.** $F(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}} + C.$

Bài toán 2: Xác định các giá trị của tham số để F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên (a, b).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định F '(x) trên (a, b).

Bước 2: Để F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên (a, b), điều kiện là:

$F'(x) = f(x)$ với $\forall x \in (a, b) \Rightarrow$ giá trị của tham số.

Chú ý: Nếu thay (a, b) bằng [a, b] thì phải thực hiện chi tiết hơn, như sau:

Bước 1: Xác định F'(x) trên (a, b).

Xác định $F'(a^+)$ và $F'(b^-)$.

Bước 2: Để F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên (a, b), điều kiện là:

$$\begin{cases} F'(x) = f(x), \forall x \in (a,b) \\ F'(a^+) = f(a) \\ F'(b^-) = f(b) \end{cases} \Rightarrow \text{giá trị của tham số.}$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 9. Cho hai hàm số: $f(x)=\begin{cases}2x & \text{khi } x\le 1\\ 2 & \text{khi } x>1\end{cases}$ và $F(x)=\begin{cases}x^2 & \text{khi } x\le 1\\ ax+b & \text{khi } x>1\end{cases}$.

Xác định a, b để hàm số F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x).

A. $a=-2, b=1$.
C. $a=-1, b=2$.

B. $a=2, b=-1$.
D. $a=1, b=-2$.

Bài tập 10. Cho hai hàm số:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)e^x+1}{x^2} & \text{khi } x\ne 0\\ b & \text{khi } x=0\end{cases},\ F(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x} & \text{khi } x\ne 0\\ a & \text{khi } x=0\end{cases}.$$

Xác định a, b để hàm số F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x).

A. $a=b=1$.
C. $a=b=2$.

B. $a=1, b=\dfrac{1}{2}$.
D. $a=\dfrac{1}{2}, b=1$.

Bài tập 11. Cho hai hàm số: $f(x)=(x^2-3x+2)e^{-x}$ và $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

Xác định a, b, c để hàm số F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x).

A. $a=b=c=1$.
C. $a=b=c=-1$.

B. $a=1, b=-1, c=-1$.
D. $a=-1, b=1, c=-1$.

Bài tập 12. Cho hai hàm số:

$$f(x)=\frac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}},\ F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{2x-3}\ \text{ với } x>\frac{3}{2}.$$

Xác định a, b, c để hàm số F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x).

A. $a=1, b=-2, c=4$.
C. $a=4, b=-2, c=1$.

B. $a=-2, b=4, c=1$.
D. $a=4, b=2, c=-1$.

Bài toán 3: Tìm nguyên hàm.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng:

- Các tính chất của nguyên hàm.
- Bảng các nguyên hàm.
- Các phép biến đổi đại số.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 13. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{\sin^2 x}$. Nếu F(x) là một nguyên hàm của hàm số và đồ thị của hàm số y = F(x) đi qua điểm $M\left(\dfrac{\pi}{6};0\right)$ thì F(x) là:

A. $\sqrt{3}-\cot x$.
B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\cot x$.
C. $-\sqrt{3}+\cot x$.
D. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\cot x$.

Bài tập 14. Nếu F(x) là một nguyên hàm của f(x) = sinx và F(0) = 0 thì F(x) là:

A. 1 + cosx. **B.** cosx. **C.** 1 – cosx. **D.** –cosx.

Bài tập 15. Cho F(x) là nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và F(2) = 1. Khi đó F(3) bằng:

A. ln2. **B.** ln2 + 1. **C.** $\ln\frac{2}{3}$. **D.**

Bài tập 16. Cho hàm số f(x) = sin3x. Một nguyên hàm của f(x) bằng:

A. –cos3x. **B.** $-\frac{1}{3}\cos 3x$. **C.** –3cos3x. **D.** $\frac{1}{3}\cos 3x$.

Bài tập 17. Gọi $\int 2008^x dx = F(x) + C$, với C là hằng số. Khi đó F(x) bằng:

A. 2008^x. **B.** $2008^x \ln 2008$. **C.** $\frac{2008^x}{\ln 2008}$. **D.** 2008^{x+1}.

Bài tập 18. Tính:

a. $\int \sin^2 x.\cos x dx$.

A. $\cos^2 x.\sin x + C$. **C.** $\sin^2 x.\cos x + C$.

B. $\frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{12}\sin 3x + C$. **D.** $\frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{12}\cos 3x + C$.

b. $\int \cot gx dx$.

A. cotgx + C. **B.** ln|cosx| + C. **C.** tgx + C. **D.** ln|sinx| + C.

c. $\int \frac{(\sin x + \cos x)dx}{\sqrt[5]{\sin x - \cos x}}$.

A. $(\sin x - \cos x)^5 + C$. **C.** $(\sin x + \cos x)^5 + C$.

B. $\frac{5}{4}\sqrt[5]{(\sin x - \cos x)^4} + C$. **D.** $\frac{5}{4}\sqrt[5]{(\sin x + \cos x)^4} + C$.

Bài tập 19. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^4 + 3}{x^2}$. Khi đó:

A. $\int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C$. **C.** $\int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{x} + C$.

B. $\int f(x)dx = 2x^3 - \frac{3}{x} + C$. **D.** $\int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{2x} + C$.

Bài tập 20. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. Khi đó $\int f(x)dx$ bằng:

A. $4\ln(1 + x^2) + C$. **C.** $2\ln(1 + x^2) + C$.

B. $3\ln(1 + x) + C$. **D.** $\ln(1 + x^2) + C$.

Bài tập 21. Tính:

a. $\int \frac{dx}{\cos x}$.

A. $-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|+C.$ **C.** $2\ln\left|\frac{\cos x+1}{\cos x-1}\right|+C.$

B. $-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+C.$ **D.** $2\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C.$

b. $\int\frac{dx}{1+\cos x}$.

A. $\frac{1}{\cos x}+C.$ **B.** $\text{tg}\frac{x}{2}+C.$ **C.** $\frac{1}{\sin x}+C.$ **D.** $\text{cotg}\frac{x}{2}+C.$

Bài tập 22. Cho hàm số $f(x)=\frac{dx}{4x^2-4x-3}$. Khi đó $\int f(x)dx$ bằng:

A. $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+1}\right|+C.$ **C.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+1}\right|+C.$

B. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+1}\right|+C$ **D.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+1}\right|+C.$

Bài tập 23. Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x)=\frac{2}{x^2-x-6}$.

A. $F(x)=\frac{2}{5}\ln\left|\frac{x+3}{x-2}\right|+C.$ **C.** $F(x)=\frac{5}{2}\ln\left|\frac{x+3}{x-2}\right|+C.$

B. $F(x)=\frac{2}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|+C.$ **D.** $F(x)=\frac{5}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|+C.$

b. $f(x)=\frac{4x^3-9x-1}{4x^2-9}$.

A. $F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right|+C.$ **C.** $F(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right|+C.$

B. $F(x)=x^2-\ln|2x+3|+C.$ **D.** $F(x)=x^2-\ln|2x-3|+C.$

Bài tập 24. Cho hàm số $f(x)=e^x(1-e^{-x})$. Khi đó $\int f(x)dx$ bằng:

A. $e^x+x+C.$ **C.** $e^{-x}+x+C.$

B. $e^x-x+C.$ **D.** $e^{-x}-x+C.$

Bài tập 25. Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x)=(3^{2x}+2^x)^2$.

A. $F(x)=\frac{(3^{2x}+2^x)^2}{\ln 3.\ln 2}+C.$

B. $F(x)=\frac{3^{4x}}{\ln 3}+\frac{2^{2x}}{\ln 2}+\frac{2.3^{2x}.2^x}{\ln 3.\ln 2}+C.$

C. $F(x) = \frac{3^{4x}}{\ln 3} + \frac{2^{2x}}{\ln 2} + 2\left(\frac{3^{2x}}{\ln 3} + \frac{2^{x}}{\ln 2}\right) + C.$

D. $F(x) = \frac{81^{x}}{\ln 81} + \frac{4^{x}}{\ln 4} + \frac{2.18^{x}}{\ln 18} + C.$

bb.). $f(x) = 2^{2x}.3^{3x}.4^{x}$.

A. $F(x) = \frac{2^{2x}.3^{3x}.4^{x}}{\ln 2.\ln 3.\ln 4} + C.$

C. $F(x) = \frac{2^{2x}}{\ln 2} + \frac{3^{3x}}{\ln 3} + \frac{4^{x}}{\ln 4} + C.$

B. $F(x) = \frac{432^{x}}{\ln 432} + C.$

D. $F(x) = \frac{24^{6x}}{\ln 24} + C.$

Bài t tậtập 26. Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

aa. ι. $f(x) = e^{3x-2}$.

A. $F(x) = e^{3x-2} + C.$

C. $F(x) = (3x - 2)e^{3x-2} + C.$

B. $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x-2} + C.$

D. $F(x) = \frac{2}{3}e^{3x-2} + C.$

bb.). $f(x) = \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^{x}}$.

A. $F(x) = \frac{5^{x}}{2\ln 5} - \frac{5.2^{x}}{\ln 2} + C.$

C. $F(x) = -\frac{5^{x}}{2\ln 5} + \frac{5.2^{x}}{\ln 2} + C.$

B. $F(x) = \frac{2}{5^{x}\ln 5} - \frac{1}{5.2^{x}\ln 2} + C.$

D. $F(x) = -\frac{2}{5^{x}\ln 5} + \frac{1}{5.2^{x}\ln 2} + C.$

Bài t tậtập 27. Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

aa. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x+3}}$.

A. $F(x) = \frac{2}{3}(\sqrt{x+4} - \sqrt{x+3}) + C.$

B. $F(x) = \frac{3}{2}(\sqrt{x+4} + \sqrt{x+3}) + C.$

C. $F(x) = \frac{2}{3}[\sqrt{(x+4)^3} - \sqrt{(x+3)^3}] + C.$

D. $F(x) = \frac{3}{2}[\sqrt{(x+4)^3} + \sqrt{(x+3)^3}] + C.$

bb. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x} - \sqrt{2x+1}}$.

A. $F(x) = -\frac{3}{4}[\sqrt{8x^3} + \sqrt{(2x+1)^3}] + C.$

B. $F(x) = \frac{4}{3}[\sqrt{8x^3} - \sqrt{(2x+1)^3}] + C.$

C. $F(x) = -\frac{3}{2}\left[\sqrt{8x^3} + \sqrt{(2x+1)^3}\right] + C.$

D. $F(x) = \frac{2}{3}\left[\sqrt{8x^3} - \sqrt{(2x+1)^3}\right] + C.$

Bài tập 28. Tính:

a. $\int x(1-x)^{10}dx.$

A. $F(x) = x + (1-x)^{10} + (1-x)^{11} + C.$

B. $F(x) = x - (1-x)^{11} - (1-x)^{12} + C.$

C. $F(x) = -\frac{(1-x)^{10}}{10} + \frac{(1-x)^{11}}{11} + C.$

D. $F(x) = -\frac{(1-x)^{11}}{11} + \frac{(1-x)^{12}}{12} + C.$

b. $\int x(1-3x)^{2008}dx.$

A. $F(x) = x + (1-3x)^{2009} + (1-3x)^{2010} + C.$

B. $F(x) = x - (1-3x)^{2010} - (1-3x)^{2011} + C.$

C. $F(x) = -\frac{(1-3x)^{2009}}{18081} + \frac{(1-3x)^{2010}}{18090} + C.$

D. $F(x) = \frac{(1-3x)^{2010}}{18090} - \frac{(1-3x)^{2011}}{18099} + C.$

c. $\int \frac{x^2dx}{(1-x)^{100}}.$

A. $F(x) = (1-x)^{97} + (1-x)^{98} + (1-x)^{99} + C.$

B. $F(x) = (1-x)^{99} - (1-x)^{100} - (1-x)^{101} + C.$

C. $F(x) = \frac{1}{97(1-x)^{97}} - \frac{2}{98(1-x)^{98}} + \frac{1}{99(1-x)^{99}} + C.$

D. $F(x) = \frac{1}{101(1-x)^{101}} - \frac{2}{102(1-x)^{102}} + \frac{3}{103(1-x)^{103}} + C.$

Bài tập 29. Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \sin^6x + \cos^6x.$

A. $F(x) = 6\sin^5x + 6\cos^5x + C.$

B. $F(x) = \frac{3}{32}\sin4x + \frac{5}{8}x + C.$

C. $F(x) = 6\sin^5x - 6\cos^5x + C.$

D. $F(x) = -\frac{3}{32}\cos4x + \frac{5}{8}x + C.$

b. $f(x) = 8\sin^3x.\cos^2x.$

A. $F(x) = \sin x - \frac{1}{10}\cos5x + \frac{1}{6}\sin3x + C.$

B. $F(x) = \sin x - \frac{1}{10}\sin5x + \frac{1}{6}\cos3x + C.$

C. $F(x) = -\cos x - \frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{6}\cos 3x + C.$

D. $F(x) = -\cos x + \frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{6}\cos 3x + C.$

Bài tập 30. *Cho hàm số* $f(x) = 2\sin^2\frac{x}{2}$. *Khi đó:*

A. $\int f(x)dx = x - \sin x + C.$ **C.** $\int f(x)dx = x - \cos x + C.$

B. $\int f(x)dx = x + \sin x + C.$ **D.** $\int f(x)dx = x + \cos x + C.$

Bài tập 31. *Cho hàm số* $f(x) = \cot^2 x$. *Khi đó:*

A. $\int f(x)dx = \tan x - x + C.$ **C.** $\int f(x)dx = -\cot x - x + C.$

B. $\int f(x)dx = \tan x + x + C.$ **D.** $\int f(x)dx = -\cot x + x + C.$

Bài tập 32. *Cho hàm số* $f(x) = \frac{\tan x}{\cos^3 x}$. *Khi đó:*

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{3\cos^3 x} + C.$ **C.** $\int f(x)dx = \frac{1}{\cos^3 x} + C.$

B. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3\cos^3 x} + C.$ **D.** $\int f(x)dx = -\frac{1}{\cos^3 x} + C.$

Bài tập 33. Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{1}{\sin^4 x}$.

A. $F(x) = x + \frac{1}{2}tg^2x + C.$ **C.** $F(x) = x - \frac{1}{2}\cot g^2x + C.$

B. $F(x) = tgx + \frac{1}{3}tg^3x + C.$ **D.** $F(x) = -\cot gx - \frac{1}{3}\cot g^3x + C.$

b. $f(x) = \frac{1}{\sin x.\cos^3 x}$.

A. $F(x) = \ln|\sin x| + \frac{1}{2}\cos^2 x + C.$ **C.** $F(x) = \ln|\cos x| - \frac{1}{2}\sin^2 x + C.$

B. $F(x) = \ln|tgx| + \frac{1}{2}tg^2x + C.$ **D.** $F(x) = \ln|\cot gx| - \frac{1}{2}\cot g^2x + C.$

c. $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin 2x}$.

A. $F(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - \cos x + 2}{\sin x - \cos x - 2}\right| + C.$

B. $F(x) = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - \cos x + 2}{\sin x - \cos x - 2}\right| + C.$

C. $F(x) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x - \cos x - 2}{\sin x - \cos x + 2}\right| + C.$

D. $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x - \cos x - 2}{\sin x - \cos x + 2}\right| + C.$

Bài tập 34. Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^2}$.

A. $F(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} + C.$

B. $F(x) = -\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} + C.$

C. $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + x - \frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C.$

D. $F(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x - \sqrt{(x^2+1)^3} + C.$

b. $f(x) = \frac{x+1}{x(1+xe^x)}$.

A. $F(x) = \ln\left|\frac{x+e^x}{1+xe^x}\right| + C.$

B. $F(x) = \ln\left|\frac{x}{1+xe^x}\right| + C.$

C. $F(x) = x + \ln\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right| + C.$

D. $F(x) = x + \ln\left|\frac{x}{1+xe^x}\right| + C.$

Bài tập 35. Cho hàm số: $f(x) = \frac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2}$

a. Xác định các hằng số a, b, c để $f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2}$.

A. $a = 3, b = 2, c = 1.$

B. $a = 2, b = 3, c = 1.$

C. $a = b = c = 1.$

D. $a = 1, b = 2, c = 3.$

b. Tìm họ nguyên hàm của f(x).

Bài tập 36. Cho hàm số: $y = \frac{4\sin x + 3\cos x}{\sin x + 2\cos x}$.

a. Xác định các hằng số a, b để:

$$4\sin x + 3\cos x = a(\sin x + 2\cos x) + b(\cos x - 2\sin x).$$

A. $a = 2, b = 1.$

B. $a = 2, b = -1.$

C. $a = -1, b = 2.$

D. $a = 1, b = -2.$

b. Tìm họ nguyên hàm của f(x).

Bài tập 37. Tìm họ nguyên hàm của các hàm số:

a. $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + e^{-x}}$. b. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$.

Bài tập 38. Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \dfrac{\cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

A. $F(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\dfrac{\sin 2x - \sqrt{2}}{\sin 2x + \sqrt{2}}\right|\right) + C.$

B. $F(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\dfrac{\sin 2x + \sqrt{2}}{\sin 2x - \sqrt{2}}\right|\right) + C.$

C. $F(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\dfrac{\cos 2x - \sqrt{2}}{\cos 2x + \sqrt{2}}\right|\right) + C.$

D. $F(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\dfrac{\cos 2x + \sqrt{2}}{\cos 2x - \sqrt{2}}\right|\right) + C.$

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có: $F'(x) = (\sin^2 3x)' = 6\cos 3x.\sin 3x$, ứng với đáp án C.

Bài tập 2. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có ngay:

$F'(x) = 3(2x - 3) + 2(3x - 1) = 12x - 11$, ứng với đáp án D.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá với dạng hàm số $F = uv$:

- Đáp án A bị loại bởi nó là dạng u'.v.
- Đáp án B bị loại bởi nó là dạng v'.u.
- Đáp án C bị loại bởi với dạng hàm đa thức không thể có F' = F.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài tập 3. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có :

$$F'(x) = [\ln(x + \sqrt{x^2 + a})]' = \frac{(x + \sqrt{x^2 + a})'}{x + \sqrt{x^2 + a}} = \frac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + a}}}{x + \sqrt{x^2 + a}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + a} + x}{\sqrt{x^2 + a}(x + \sqrt{x^2 + a})} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}, \text{ ứng với đáp án B.}$$

Bài tập 4.

a. Ta có ngay: $F'(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2 + a} + \dfrac{x^2}{2\sqrt{x^2 + a}} + \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a}}}{x + \sqrt{x^2 + a}}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+a}} + \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+a}} = \sqrt{x^2+a} = f(x).$$

Vậy, với $a > 0$ thì $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbf{R}$.

b. Viết lại hàm số $h(x)$ dưới dạng:

$$h(x) = x\sqrt{x^2+a} + 2\sqrt{x^2+a}.$$

Từ đó, suy ra:

$$H(x) = \int h(x)dx = \int x\sqrt{x^2+a}\,dx + 2\int\sqrt{x^2+a}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+a)^3} + \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C.$$

Bài tập 5. Viết lại hàm số $F(x)$ dưới dạng:

$$F(x) = \begin{cases} x - \ln(1+x) & \text{khi } x \geq 0 \\ -x - \ln(1-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

Từ đó, suy ra:

$$F'(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{1+x} & \text{khi } x > 0 \\ -1 + \dfrac{1}{1-x} & \text{khi } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x} & \text{khi } x > 0 \\ \dfrac{x}{1-x} & \text{khi } x < 0 \end{cases} = \frac{x}{1+|x|}$$

$$= f(x) \text{ với } x \neq 0. \qquad (1)$$

Ngoài ra, ta có:

- *Đạo hàm bên trái* của hàm số tại điểm $x_0 = 0$.

$$F'(0^-) = \lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x-\ln(1+x)}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\left[1 - \frac{\ln(1+x)}{x}\right] = 1 - 1 = 0.$$

- *Đạo hàm bên phải* của hàm số tại điểm $x_0 = 0$.

$$F'(0^+) = \lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x-\ln(1-x)}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\left[-1 + \frac{\ln(1-x)}{-x}\right] = -1 + 1 = 0.$$

Nhận xét rằng $F'(0^-) = F'(0^+) = 0 \Rightarrow F'(0) = 0 = f(0)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbf{R}$.

Bài tập 6. Ta có ngay:

$$F'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}[2x(2\ln x - 1) + 2x] & \text{khi } x > 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} x\ln x & \text{khi } x > 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases} = f(x).$$

Vậy, hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Bài tập 7.

a. Ta có ngay:

$$g'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.$$

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Từ kết quả câu a), ta được $g'(x)=f(x)$ nên suy ra:

$$F(x)=\int f(x)dx=g(x)+C=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C.$$

Bài tập 8.

a. Ta xét hai trường hợp :

Trường hợp 1: Với $x>0$, ta được $g(x)=\ln\dfrac{1+\sqrt{x^2+a}}{x}$. Suy ra:

$$g'(x)=\frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{x^2+a}}{x}\right)'}{\dfrac{1+\sqrt{x^2+a}}{x}}=\frac{\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}}.x-(1+\sqrt{x^2+a})}{x^2}}{\dfrac{1+\sqrt{x^2+a}}{x}}=-\frac{a}{x\sqrt{x^2+a}}.$$

Trường hợp 2: Với $x<0$, ta được $g(x)=\ln\left(-\dfrac{1+\sqrt{x^2+a}}{x}\right)$. Tương tự, suy ra:

$$g'(x)=-\frac{a}{x\sqrt{x^2+a}}$$

Vậy, với mọi $x\neq 0$ ta luôn có $g'(x)=-\dfrac{a}{x\sqrt{x^2+a}}$.

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Từ kết quả câu a), ta được : $[-g(x)]'=f(x)$, $\forall x\neq 0, a>0$.

Suy ra: $F(x)=\int f(x)dx=-g(x)+C=-\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{x^2+a}}{x}\right|+C, \forall x\neq 0, a>0.$

Bài tập 9. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $x\neq 1$, ta có:

$$F'(x)=\begin{cases}2x & \text{khi } x<1\\ a & \text{khi } x>1\end{cases}.$$

Suy ra, để $F'(x)=f(x)$ với $x\neq 1$ điều kiện là $a=2$.

Trường hợp 2: Với $x=1$, thì để hàm số $F(x)$ có đạo hàm tại điểm $x=1$, trước hết $F(x)$ phải liên tục tại $x=1$, do đó:

$$\lim_{x\to 1^-}F(x)=\lim_{x\to 1^+}F(x)=F(1)\Leftrightarrow 1=a+b\Leftrightarrow b=1-a=-1.$$

- *Đạo hàm bên trái* của hàm số y = F(x) tại điểm x = 1.

$$F'(1^-) = \lim_{x\to 1^-}\frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

- *Đạo hàm bên phải* của hàm số y = F(x) tại điểm x = 1.

$$F(1^+) = \lim_{x\to 1^+}\frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{ax+b-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{2x-2}{x-1} = 2.$$

Nhận xét rằng: $F'(1^-) = F'(1^+) = 0 \Rightarrow F'(1) = 2 = f(1)$.

Vậy, với a = 2, b = −1 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 10. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $x \neq 0$, ta có: $F'(x) = \dfrac{xe^x-(e^x-1)}{x^2} = \dfrac{(x-1)e^x+1}{x^2} = f(x)$.

Trường hợp 2: Với x = 0, ta có :

Để hàm số F(x) có đạo hàm tại điểm x = 0, trước hết F(x) phải liên tục tại x = 0, do đó:

$$\lim_{x\to 0}F(x) = F(0) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = a \Leftrightarrow a = 1.$$

Khi đó: $F'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{e^x-1}{x}-a}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Từ đó, để: $F'(0) = f(0) \Leftrightarrow b = \dfrac{1}{2}$.

Vậy, với a = 1, $b = \dfrac{1}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Trong lời giải trên, để có được phép chuyển:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$$

chúng ta đã "*Sử dụng đạo hàm tính giới hạn của hàm số*" trong cuốn "*Học và ôn tập toán giải tích 12 tập 1*", cụ thể:

Đặt $f(x) = e^x - x - 1$, ta có $f(0) = 0$ và $f'(x) = e^x - 1$.

Đặt $g(x) = x^2$, ta có $g(0) = 0$ và $g'(x) = 2x$.

Khi đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}}{\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}$.

Bài tập 11. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có ngay:

$$F'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x}$$

Từ đó, để hàm số F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) điều kiện là:

$$\begin{cases} -a = 1 \\ 2a - b = -3 \\ b - c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}.$$

Vậy, với $a = -1, b = 1, c = -1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 12. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có ngay:

$$F'(x) = (2ax + b)\sqrt{2x - 3} + \frac{ax^2 + bx + c}{\sqrt{2x - 3}} = \frac{5ax^2 - 3(2a - b)x - 3b + c}{\sqrt{2x - 3}}$$

Từ đó, để hàm số F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) điều kiện là:

$$\begin{cases} 5a = 20 \\ -3(2a - b) = -30 \\ -3b + c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}.$$

Vậy, với $a = 4, b = -2, c = 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 13. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Với hàm số $y = \frac{1}{\sin^2 x}$ thì: $F(x) = -\cot x + C$.

Khi đó, để đồ thị của hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $M\left(\frac{\pi}{6}; 0\right)$ điều kiện là:

$$0 = -\cot\frac{\pi}{6} + C \Leftrightarrow C = \sqrt{3} \Rightarrow F(x) = \sqrt{3} - \cot x, \text{ ứng với đáp án A.}$$

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1*: Ta lần lượt đánh giá:

- Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{\sin^2 x}$ có dạng $F(x) = -\cot x + C$ nên các đáp án C và D bị loại.
- Vì $\cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ nên đáp án B bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2*: Ta lần lượt đánh giá:

- Vì $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ nên các đáp án C và D bị loại.
- Với $x = \frac{\pi}{6}$ thì $\sqrt{3} - \cot\frac{\pi}{6} = 0$ nên đáp án A là đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài tập 14. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Với hàm số f(x) = sinx thì: F(x) = –cosx + C.

Khi đó, để F(0) = 0 điều kiện là:

$$0 = -\cos 0 + C \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = 1 - \cot x$$, ứng với đáp án C.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1*: Ta lần lượt đánh giá:

- Nguyên hàm của hàm số f(x) = sinx có dạng F(x) = –cosx + C nên các đáp án A và B bị loại.
- Vì cos0 = 1 nên đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2*: Ta lần lượt đánh giá:

- Vì (cosx)' = –sinx nên các đáp án A và B bị loại.
- Với x = 0 thì 1 – cos0 = 0 nên đáp án C là đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài tập 15. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Với hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$ thì:

$$F(x) = \ln|x - 1| + C$$, ứng với đáp án B.

Khi đó, để F(2) = 1 điều kiện là:

$$1 = \ln|2 - 1| + C \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = \ln|x - 1| + 1$$

$$\Rightarrow F(3) = \ln 2 + 1$$, ứng với đáp án B.

Bài tập 16. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận 1*: Sử dụng bảng nguyên hàm cơ bản, ta có với:

$$f(x) = \sin 3x \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$$

$$\Rightarrow$$ nó có một nguyên hàm là $-\frac{1}{3}\cos 3x$.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Với F(x) = –cos3x thì:

$$f(x) = (-\cos 3x)' = 3\sin 3x \Rightarrow$$ Đáp án A bị loại.

- Với $F(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x$ thì: $f(x) = \left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)' = \sin 3x$, đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài tập 17. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Sử dụng bảng nguyên hàm cơ bản, ta có:

$$\int 2008^x dx = \frac{2008^x}{\ln 2008} + C \Rightarrow F(x) = \frac{2008^x}{\ln 2008}$$, ứng với đáp án C.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (Từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = 2008^x$ thì:

$$f(x) = (2008^x)' = 2008^x.\ln 2008 \Rightarrow$$ Đáp án A bị loại.

- Với $F(x) = 2008^x.\ln 2008$ thì:

$$f(x) = (2008^x.\ln 2008)' = 2008^x.\ln^2 2008 \Rightarrow \text{Đáp án B bị loại.}$$

- Với $F(x) = \dfrac{2008^x}{\ln 2008}$ thì: $f(x) = \left(\dfrac{2008^x}{\ln 2008}\right)' = 2008^x \Rightarrow$ Đáp án C là đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (Từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = 2008^{x+1}$ thì:

$$f(x) = (2008^{x+1})' = 2008^{x+1}.\ln 2008 \Rightarrow \text{Đáp án D bị loại.}$$

- Với $F(x) = \dfrac{2008^x}{\ln 2008}$ thì: $f(x) = \left(\dfrac{2008^x}{\ln 2008}\right)' = 2008^x \Rightarrow$ Đáp án C là đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài tập 18.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$\int \sin^2 x.\cos x.dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x.\sin x.dx = \frac{1}{4}\int (\cos x - \cos 3x).dx$$

$$= \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{12}\sin 3x + C.$$

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có: $\int \cot gx.dx = \int \dfrac{\cos x.dx}{\sin x} = \int \dfrac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$

c. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$\int \frac{(\sin x + \cos x)dx}{\sqrt[5]{\sin x - \cos x}}\,dx = \int \frac{d(\sin x - \cos x)}{\sqrt[5]{\sin x - \cos x}}$$

$$= \int (\sin x - \cos x)^{-1/5}.d(\sin x - \cos x)$$

$$= \frac{5}{4}(\sin x - \cos x)^{4/5} + C = \frac{5}{4}\sqrt[5]{(\sin x - \cos x)^4} + C.$$

Bài tập 19. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \frac{2x^4 + 3}{x^2}dx = \int \left(2x^2 + \frac{3}{x^2}\right)dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C,$$

ứng với đáp án A.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{3}{x} + C$ thì:

$$f(x) = \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C\right)' = 2x^2 + \frac{3}{x^2} \Rightarrow \text{Đáp án A đúng.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài tập 20. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có: $\int f(x)dx = \int \frac{2x}{1+x^2}dx = \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \ln(1+x^2) + C,$

ứng với đáp án D.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (Từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = 4\ln(1+x^2) + C$ thì:

$$f(x) = [4\ln(1+x^2) + C]' = 4.\frac{2x}{1+x^2} = \frac{8x}{1+x^2} \Rightarrow \text{Đáp án A bị loại.}$$

- Bởi các đáp án A, B, C, D chỉ khác nhau ở hệ số và giả thiết cho hệ số 2 (tức 8:4 = 2) nên ta loại bỏ tiếp được các đáp án B và C.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (Từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \ln(1+x^2) + C$ thì:

$$f(x) = [\ln(1+x^2) + C]' = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow \text{Đáp án D đúng.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài tập 21.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận 1*: Biến đổi:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} = \int \frac{dx}{2\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}$$

$$= \int \frac{dx}{2tg(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\cos^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})} = \int \frac{d\left[tg(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right]}{tg(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})} = \ln\left|tg(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right| + C.$$

✍ *Lời giải tự luận 2*: Biến đổi:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x.dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x} = -\int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x - 1} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + C.$$

Chú ý: Trong lời giải của cách 2, chúng ta đã sử dụng kết quả:

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \text{ với } a \neq 0.$$

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta biến đổi: $\int \frac{dx}{1+\cos x} = 2\int \frac{d(\frac{x}{2})}{2\cos^2\frac{x}{2}} = tg\frac{x}{2} + C.$

Bài tập 22. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \frac{dx}{(2x-1)^2-4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x-1)}{(2x-1)^2-4} = \frac{1}{2}.\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x-1-2}{2x-1+2}\right| + C$$

$$= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+1}\right| + C, \text{ ứng với đáp án A.}$$

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Bởi các đáp án A, B, C, D chỉ khác nhau ở hệ số nên ta xét hàm số:

$$y = k.\ln\left|\frac{2x-3}{2x+1}\right|$$

$$\Rightarrow y' = k.(\ln|2x-3| - \ln|2x+1|)' = k\left(\frac{2}{2x-3} - \frac{2}{2x+1}1\right) = \frac{8k}{4x^2-4x-3}$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{8} \Rightarrow \text{Đáp án A là đúng.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài tập 23.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta biến đổi:

$$f(x) = \frac{2}{(x-3)(x+2)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+2} = \frac{(a+b)x+2a-3b}{(x-3)(x+2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ 2a-3b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ a=2/5 \end{cases}.$$

Từ đó, suy ra:

$$f(x) = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2}\right) \Rightarrow \int f(x)dx = \frac{2}{5}\int\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$= \frac{2}{5}(\ln|x-3| - \ln|x+2|) + C = \frac{2}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right| + C.$$

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta biến đổi:

$$f(x) = x - \frac{1}{4x^2-9} = x - \left(\frac{a}{2x-3} + \frac{b}{2x+3}\right) = x - \frac{2(a+b)x+3(a-b)}{4x^2-9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(a+b)=0 \\ 3(a-b)=1 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{6} \text{ và } b = -\frac{1}{6}.$$

Từ đó, suy ra: $f(x) = x - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2x-3} - \frac{1}{2x+3}\right)$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \int\left[x - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2x-3} - \frac{1}{2x+3}\right)\right]dx$$

$$= \int x dx - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\int\frac{d(2x-3)}{2x-3} - \frac{1}{2}\int\frac{d(2x+3)}{2x+3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}(\ln|2x-3| - \ln|2x+3|) + C$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right| + C.$$

Bài tập 24. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$\int f(x)dx = \int e^x(1-e^{-x})dx = \int(e^x - 1)dx = e^x - x + C, \text{ ứng với đáp án B.}$$

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (Từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = e^x + x + C$ thì:

  $f(x) = (e^x + x + C)' = e^x + 1 = e^x(1 + e^{-x}) \Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

- Với $F(x) = e^x - x + C$ thì:

  $f(x) = (e^x - x + C)' = e^x - 1 = e^x(1 - e^{-x}) \Rightarrow$ Đáp án B đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (Từ phải qua trái) – *Bạn đọc tự thực hiện.*

Bài tập 25.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta biến đổi:

$$f(x) = 3^{4x} + 2^{2x} + 2.3^{2x}.2^x = 81^x + 4^x + 2.18^x$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \int(81^x + 4^x + 2.18^x)dx = \frac{81^x}{\ln 81} + \frac{4^x}{\ln 4} + \frac{2.18^x}{\ln 18} + C.$$

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta biến đổi:

$$f(x) = 4^x.27^x.4^x = 432^x \Rightarrow \int f(x)dx = \int 432^x.dx = \frac{432^x}{\ln 432} + C.$$

Bài tập 26.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có ngay:

$$\int f(x)dx = \int e^{3x-2}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x-2}d(3x-2)x = \frac{1}{3}e^{3x-2} + C.$$

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta biến đổi:

$$f(x) = 2.\frac{2^x}{10^x} - \frac{1}{5}.\frac{5^x}{10^x} = 2.\left(\frac{1}{5}\right)^x - \frac{1}{5}.\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = 2\int\left(\frac{1}{5}\right)^x.dx - \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{2.\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln\frac{1}{5}} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{5\ln\frac{1}{2}} + C$$

$$= -\frac{2}{5^x \ln 5} + \frac{1}{5.2^x \ln 2} + C.$$

Bài tập 27.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Sử dụng phép nhân liên hợp, ta biến đổi:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}}{x+4-x-3}=\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}=(x+4)^{\frac{1}{2}}-(x+3)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx=\int[(x+4)^{\frac{1}{2}}-(x+3)^{\frac{1}{2}}]dx=\frac{3}{2}[\sqrt{(x+4)^3}+\sqrt{(x+3)^3}]+C.$$

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Sử dụng phép nhân liên hợp, ta biến đổi:

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{2x+1}}{2x-2x-1}=-\sqrt{2x}-\sqrt{2x+1}=-(2x)^{\frac{1}{2}}-(2x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx=-\int[(2x)^{\frac{1}{2}}+(2x+1)^{\frac{1}{2}}]dx$$

$$=-\frac{1}{2}[\int(2x)^{\frac{1}{2}}d(2x)+\int(2x+1)^{\frac{1}{2}}d(2x+1)]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}(2x)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]+C=-\frac{3}{4}[\sqrt{8x^3}+\sqrt{(2x+1)^3}]+C.$$

Bài tập 28.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Sử dụng phép biến đổi :

$$\int x(1-x)^{10}dx=\int[1-(1-x)](1-x)^{10}dx=\int[(1-x)^{10}-(1-x)^{11}]dx$$

$$=-\frac{(1-x)^{11}}{11}+\frac{(1-x)^{12}}{12}+C.$$

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Sử dụng phép biến đổi:

$$\int x(1-3x)^{2008}dx=\frac{1}{3}\int[1-(1-3x)](1-3x)^{2008}dx$$

$$=-\frac{1}{3}.\frac{1}{3}\int[(1-3x)^{2008}-(1-3x)^{2009}]d(1-3x)$$

$$=-\frac{(1-3x)^{2009}}{18081}+\frac{(1-3x)^{2010}}{18090}+C.$$

c. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Sử dụng đồng nhất thức $x^2=(1-x)^2-2(1-x)+1$ ta được:

$$\frac{x^2}{(1-x)^{100}}=\frac{(1-x)^2-2(1-x)+1}{(1-x)^{100}}=\frac{1}{(1-x)^{98}}-\frac{2}{(1-x)^{99}}+\frac{1}{(1-x)^{100}}$$

Khi đó: $\int\frac{x^2dx}{(1-x)^{100}}=-\int\left[\frac{1}{(1-x)^{98}}-\frac{2}{(1-x)^{99}}+\frac{1}{(1-x)^{100}}\right]d(1-x)$

$$=\frac{1}{97(1-x)^{97}}-\frac{2}{98(1-x)^{98}}+\frac{1}{99(1-x)^{99}}+C.$$

Bài tập 29.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta biến đổi:

$$f(x) = (\sin^2x + \cos^2x)^3 - 3\sin^2x.\cos^2x(\sin^2x + \cos^2x)$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4}.\frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{3}{8}\cos 4x + \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \int\left(\frac{3}{8}\cos 4x + \frac{5}{8}\right)dx = \frac{3}{32}\sin 4x + \frac{5}{8}x + C.$$

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có: $\int f(x)dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = -\cot gx - x + C.$

c. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta biến đổi:

$$f(x) = 2\sin^2 2x.\sin x = (1 - \cos 4x)\sin x = \sin x - \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin 3x)$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = -\cos x + \frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{6}\cos 3x + C.$$

Bài tập 30. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$\int f(x)dx = \int 2\sin^2\frac{x}{2}dx = \int(1 - \cos x)dx = x - \sin x + C, \text{ ứng với đáp án A.}$$

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = x - \sin x + C$ thì:

$$f(x) = (x - \sin x + C)' = 1 + \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \Rightarrow \text{Đáp án A đúng.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài tập 31. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \cot^2 x dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = -\cot x - x + C, \text{ ứng với đáp án C.}$$

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (Từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \tan x - x + C$ thì:

$$f(x) = (\tan x - x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x \Rightarrow \text{Đáp án A bị loại.}$$

- Với $F(x) = \tan x + x + C$ thì:

$$f(x) = (\tan x + x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x} + 1 \neq \cot^2 x \Rightarrow \text{Đáp án B bị loại.}$$

- Với $F(x) = -\cot x - x + C$ thì:

$$f(x) = (-\cot x - x + C)' = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 = \cot^2 x \Rightarrow \text{Đáp án C đúng.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (Từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = -\cot x + x + C$ thì:

$$f(x) = (-\cot x + x + C)' = \frac{1}{\sin^2 x} + 1 \neq \cot^2 x \Rightarrow \text{Đáp án D bị loại.}$$

- Với $F(x) = -\cot x - x + C$ thì:

$$f(x) = (-\cot x - x + C)' = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 = \cot^2 x \Rightarrow \text{Đáp án C đúng.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài tập 32. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \frac{\tan x.dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\sin x.dx}{\cos^4 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^4 x}$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^{-3}x + C = -\frac{1}{3\cos^3 x} + C, \text{ ứng với đáp án B.}$$

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (Từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \frac{1}{3\cos^3 x} + C$ thì:

$$f(x) = \left(\frac{1}{3\cos^3 x} + C\right)' = \frac{1}{3}.\frac{(\cos^3 x)'}{\cos^6 x} = \frac{1}{3}.\frac{-3\sin x.\cos^2 x}{\cos^6 x} = -\frac{\tan x}{\cos^3 x}$$

$\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

- Với $F(x) = -\frac{1}{3\cos^3 x} + C$ thì:

$$f(x) = \left(-\frac{1}{3\cos^3 x} + C\right)' = -\frac{1}{3}.\frac{(\cos^3 x)'}{\cos^6 x} = -\frac{1}{3}.\frac{-3\sin x.\cos^2 x}{\cos^6 x} = \frac{\tan x}{\cos^3 x}$$

$\Rightarrow$ Đáp án B đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (Từ phải qua trái) – *Bạn đọc tự thực hiện.*

Bài tập 33.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Sử dụng kết quả $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\cot gx)$, ta được:

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}.\frac{dx}{\sin^2 x} = -\int (1 + \cot g^2 x).d(\cot gx)$$

$$= -\cot gx - \frac{1}{3}\cot g^3 x + C.$$

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

c. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta biến đổi:

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{4 - (1 - \sin 2x)} = \frac{\cos x + \sin x}{4 - (\sin x - \cos x)^2}.$$

Từ đó, suy ra:

$$\int f(x)dx = \int \frac{(\cos x + \sin x)dx}{4-(\sin x - \cos x)^2} = \int \frac{d(\sin x - \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2 - 4}$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x - \cos x - 2}{\sin x - \cos x + 2}\right| + C.$$

Bài tập 34.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta biến đổi:

$$f(x) = \frac{(x-\sqrt{x^2+1})^2}{(x^2-x^2-1)^2} = x^2+x^2+1-2x\sqrt{x^2+1} = 2x^2+1-2x\sqrt{x^2+1}.$$

Từ đó, suy ra:

$$\int f(x)dx = \int(2x^2+1-2x\sqrt{x^2+1})dx = \int(2x^2+1)dx - \int(x^2+1)^{\frac{1}{2}}d(x^2+1)$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + x - \frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C.$$

b. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta biến đổi $f(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{e^x + xe^x}{1+xe^x}$.

Từ đó, suy ra: $\int f(x)dx = \int(1 + \frac{1}{x} - \frac{e^x + xe^x}{1+xe^x})dx = \int(1+\frac{1}{x})dx - \int\frac{d(1+xe^x)}{1+xe^x}$

$$= x + \ln|x| - \ln|1+xe^x| + C = x + \ln\left|\frac{x}{1+xe^x}\right| + C.$$

Bài tập 35.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có: $f(x) = \frac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2} = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2}$

$$= \frac{(b+c)x^2 + (a+b-2c)x + 2a - 2b + c}{(x+2)(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b+c=3 \\ a+b-2c=3 \\ 2a-2b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}.$$

Vậy, với a = 3, b = 2, c = 1 thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Khi đó: $f(x) = \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+2}$.

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \int[\frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+2}]dx$$

$$= -\frac{3}{x-1} + 2\ln|x-1| + \ln|x+2| + C.$$

Bài tập 36.

a. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$4\sin x + 3\cos x = a(\sin x + 2\cos x) + b(\cos x - 2\sin x)$$
$$= (a - 2b)\sin x + (2a + b)\cos x.$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được: $\begin{cases} a - 2b = 4 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$.

Vậy, với $a = 2$, $b = -1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Khi đó:

$$f(x) = \frac{2(\sin x + 2\cos x) - (\cos x - 2\sin x)}{\sin x + 2\cos x} = 2 - \frac{\cos x - 2\sin x}{\sin x + 2\cos x}.$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \int (2 - \frac{\cos x - 2\sin x}{\sin x + 2\cos x})dx = 2\int dx - \int \frac{d(\sin x + 2\cos x)}{\sin x + 2\cos x}$$
$$= 2x - \ln|\sin x + 2\cos x| + C.$$

Bài tập 37.

a. Chọn hàm số phụ $g(x) = \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Gọi F(x) và G(x) theo thứ tự là nguyên hàm của f(x), g(x). Ta có:

$$f(x) + g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 \Rightarrow F(x) + G(x) = \int dx = x + C_1.$$

$$f(x) - g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\Rightarrow F(x) - G(x) = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{d(e^x + e^{-x})}{e^x + e^{-x}} = \ln|e^x + e^{-x}| + C_2.$$

Ta được : $\begin{cases} F(x) + G(x) = x + C_1 \\ F(x) - G(x) = \ln|e^x + e^{-x}| + C_2 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}(\ln|e^x + e^{-x}| + x) + C.$

b Chọn hàm số phụ $g(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}$.

Gọi F(x) và G(x) theo thứ tự là nguyên hàm của f(x), g(x). Ta có:

$$f(x) + g(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = 1 \Rightarrow F(x) + G(x) = \int dx = x + C_1.$$

$$f(x) - g(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$\Rightarrow F(x) - G(x) = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x}$$
$$= \ln|\sin x + \cos x| + C_2.$$

Ta được : $\begin{cases} F(x) + G(x) = x + C_1 \\ F(x) - G(x) = \ln|\sin x + \cos x| + C_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}(x + \ln|\sin x + \cos x|) + C.$$

Bài tập 38. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận:* Chọn hàm số phụ $g(x) = \dfrac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

Gọi F(x) và G(x) theo thứ tự là nguyên hàm của f(x), g(x). Ta có:

$$f(x) + g(x) = \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = 1 \Rightarrow F(x) + G(x) = \int dx = x + C_1.$$

$$f(x) - g(x) = \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

$$\Rightarrow F(x) - G(x) = \int \frac{(\cos^4 x - \sin^4 x)dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{\cos 2x.dx}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x} = \int \frac{2\cos 2x.dx}{2 - \sin^2 2x}$$

$$= -\int \frac{d(\sin 2x)}{\sin^2 2x - 2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sin 2x - \sqrt{2}}{\sin 2x + \sqrt{2}} \right| + C_2$$

Ta được: $\begin{cases} F(x) + G(x) = x + C_1 \\ F(x) - G(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \dfrac{\sin 2x - \sqrt{2}}{\sin 2x + \sqrt{2}} \right| + C_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sin 2x - \sqrt{2}}{\sin 2x + \sqrt{2}} \right|\right) + C.$$

CHỦ ĐỀ 2

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

Các phương pháp đổi biến số được sử dụng khá phổ biến trong việc tìm nguyên hàm. Cơ sở của phương pháp đổi biến số là công thức sau:

Định lí:

a. Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ và $u = \varphi(x)$ là hàm số có đạo hàm thì
$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

b. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục thì khi đặt $x = \varphi(t)$ trong đó $\varphi(t)$ cùng với đạo hàm của nó $\varphi'(t)$ là những hàm số liên tục, ta sẽ được
$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)].\varphi'(t)dt.$$

Từ đó, chúng ta thấy có hai phương pháp đổi biến.

1.1. Đổi biến dạng 1

Định nghĩa: *Phương pháp đổi biến dạng 1 là việc sử dụng một hàm số* $x = u(t)$ *làm biến mới.*

Định lí: *Giả sử* $\alpha < \beta$, *nếu*:

1. *Hàm số* $x = u(t)$ *có đạo hàm liên tục trên đoạn* $[\alpha, \beta]$.
2. *Hàm số hợp* $f(u(t))$ *được xác định trên đoạn* $[\alpha, \beta]$.
3. $u(\alpha) = a$ *và* $u(\beta) = b$.

thì ta có: $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[u(t)].u'(t)dt$.

1.2. Đổi biến dạng 2

Định nghĩa: *Phương pháp đổi biến dạng 2 là việc sử dụng một hàm số* $t = v(x)$ *làm biến mới.*

Như vậy, ở phương pháp này ta biến đổi $f(x)$ thành $g(v(x)).v'(x)$, rồi đặt $t = v(x)$, thì $dt = v'(x)$ đối xứng. Do đó, ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g[v(x)].v'(x)dx = \int_{v(a)}^{v(b)} g(t)dt.$$

2. PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Phương pháp lấy nguyên hàm từng phần được sử dụng khá phổ biến trong việc tìm nguyên hàm. Cơ sở của phương pháp là định lí sau:

Định lí: *Nếu* $u(x)$, $v(x)$ *là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên* I *thì*:

$$\int u(x).v'(x).dx = u(x)v(x) - \int v(x).u'(x).dx$$

hoặc viết $\int u.dv = uv - \int v.du$.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN VÀ BÀI TẬP

Bài toán 1: Phương pháp phân tích.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để tìm nguyên hàm bằng phương pháp phân tích ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi $f(x)$ về dạng: $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)$,

với $f_i(x)$ có nguyên hàm trong bảng công thức và α_i là các hằng số.

Bước 2: Khi đó: $\int f(x)dx = \int \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int f_i(x)dx$

Chú ý quan trọng: Điểm mấu chốt là phép phân tích trong bước 1, các em học sinh có thể rút ra ý tưởng cho riêng mình từ một vài minh hoạ sau:

- Với $f(x) = (x^3 - 2)^2$ thì viết lại $f(x) = x^6 - 4x^3 + 4$.
- Với $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x - 1}$ thì viết lại $f(x) = x - 3 + \dfrac{2}{x - 1}$.
- Với $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$ thì viết lại $f(x) = \dfrac{1}{x - 3} - \dfrac{1}{x - 2}$.
- Với $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x + 1} + \sqrt{3 - 2x}}$ thì viết lại

  $f(x) = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3 - 2x} - \sqrt{2x + 1})$.
- Với $f(x) = (2^x - 3^x)^2$ thì viết lại $f(x) = 4^x - 2.6^x + 9^x$.
- Với $f(x) = 8\cos^3 x.\sin x$ thì viết lại

  $f(x) = 2(\cos 3x + 3\cos x).\sin x = 2\cos 3x.\sin x + 6\cos x.\sin x$

  $= \sin 4x - \sin 2x + 3\sin 2x = \sin 4x + 2\sin 2x$

Đó chỉ là một vài minh hoạ mang tính điển hình.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1. Cho hàm số $f(x) = x(1 - x)^{2009}$. Khi đó $\int f(x)dx$ bằng:

A. $-\dfrac{(1 - x)^{2010}}{2010} - \dfrac{(1 - x)^{2011}}{2011} + C$. **B.** $-\dfrac{(1 - x)^{2010}}{2010} + \dfrac{(1 - x)^{2011}}{2011} + C$.

B. $-\dfrac{(1 - x)^{2009}}{2009} - \dfrac{(1 - x)^{2010}}{2010} + C$. **D.** $= -\dfrac{(1 - x)^{2009}}{2009} + \dfrac{(1 - x)^{2010}}{2010} + C$.

Bài tập 2. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$. Khi đó $\int f(x)dx$ bằng:

A. $\ln\left|\dfrac{x + 1}{x + 2}\right| + C$. **C.** $\ln\left|\dfrac{x + 2}{x + 1}\right| + C$.

B. $\ln\left|\dfrac{x - 2}{x - 1}\right| + C$. **D.** $\ln\left|\dfrac{x - 1}{x - 2}\right| + C$.

Bài tập 3. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{4x^3 - 9x - 1}{4x^2 - 9}$. Khi đó $\int f(x)dx$ bằng:

A. $\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{12}\ln\left|\dfrac{2x-3}{2x+3}\right| + C.$ **B.** $\dfrac{1}{12}x^2 - \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{2x-3}{2x+3}\right| + C.$

C. $\dfrac{1}{12}x^2 + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{2x-3}{2x+3}\right| + C.$ **D.** $\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{12}\ln\left|\dfrac{2x-3}{2x+3}\right| + C.$

Bài tập 4. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-x)^{39}}$. Khi đó $\int f(x)dx$ bằng:

A. $\dfrac{1}{36(1-x)^{36}} + \dfrac{2}{37(1-x)^{37}} + \dfrac{1}{38(1-x)^{38}} + C.$

B. $\dfrac{1}{36(1-x)^{36}} - \dfrac{2}{37(1-x)^{37}} - \dfrac{1}{38(1-x)^{38}} + C.$

C. $\dfrac{1}{36(1-x)^{36}} - \dfrac{2}{37(1-x)^{37}} + \dfrac{1}{38(1-x)^{38}} + C.$

D. $\dfrac{1}{36(1-x)^{36}} + \dfrac{2}{37(1-x)^{37}} - \dfrac{1}{38(1-x)^{38}} + C.$

Bài tập 5. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 2}{x^3 + 1}$ là:

A. $\ln|x^2 - x + 1| + \ln|x + 1| + C.$

B. $\ln|x^2 - x + 1| - \ln|x + 1| + C.$

C. $\ln|x^2 + x + 1| + \ln|x - 1| + C.$

D. $\ln|x^2 + x + 1| - \ln|x - 1| + C.$

Bài tập 6. Cho hàm số $f(x) = \cos3x.\cos5x$. Khi đó $\int f(x)dx$ bằng:

A. $\dfrac{1}{4}\sin8x - \dfrac{1}{16}\sin2x + C.$ **C.** $\dfrac{1}{16}\sin8x + \dfrac{1}{4}\sin2x + C.$

B. $\dfrac{1}{16}\sin8x - \dfrac{1}{4}\sin2x + C.$ **D.** $\dfrac{1}{4}\sin8x + \dfrac{1}{16}\sin2x + C.$

Bài tập 7. Cho hàm số $f(x) = \cos^2 2x.\cos6x$. Khi đó $\int f(x)dx$ bằng:

A. $\dfrac{1}{12}\sin6x + \dfrac{1}{40}\sin10x + \dfrac{1}{8}\sin2x + C.$

B. $\dfrac{1}{12}\cos6x + \dfrac{1}{40}\sin10x + \dfrac{1}{8}\sin2x + C.$

C. $\dfrac{1}{12}\sin6x + \dfrac{1}{40}\cos0x + \dfrac{1}{8}\sin2x + C.$

D. $\dfrac{1}{12}\sin6x + \dfrac{1}{40}\sin10x + \dfrac{1}{8}\cos2x + C.$

Bài tập 8. Cho hàm số $f(x) = \tan x.\tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right).\tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$. Khi đó $\int f(x)dx$ bằng:

A. $-\frac{1}{3}\ln|\sin 3x| + C.$ **C.** $\frac{1}{3}\ln|\sin 3x| + C.$

B. $-\frac{1}{3}\ln|\cos 3x| + C.$ **D.** $\frac{1}{3}\ln|\cos 3x| + C.$

Bài tập 9. Cho hàm số $f(x) = \sin^4 2x$. Khi đó $\int f(x)dx$ bằng:

A. $\frac{1}{8}(3x - \sin 4x + \frac{1}{8}\sin 8x) + C.$ **B.** $\frac{1}{8}(3x + \sin 4x + \frac{1}{8}\sin 8x) + C.$

C. $\frac{1}{8}(3x + \cos 4x + \frac{1}{8}\cos 8x) + C.$ **D.** $\frac{1}{8}(3x - \cos 4x + \frac{1}{8}\cos 8x) + C.$

Bài tập 10. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ là:

A. $\frac{1}{4}(3x + \frac{1}{4}\cos 4x) + C.$ **C.** $\frac{1}{4}(3x + \frac{1}{4}\sin 4x) + C.$

B. $\frac{1}{4}(3x - \frac{1}{4}\cos 4x) + C.$ **D.** $\frac{1}{4}(3x - \frac{1}{4}\sin 4x) + C.$

Bài tập 11. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x.\cos 3x + \cos^3 x.\sin 3x$ là:

A. $\int f(x)dx = \frac{3}{16}\sin 4x + C.$ **C.** $\int f(x)dx = \frac{3}{16}\cos 4x + C.$

B. $\int f(x)dx = -\frac{3}{16}\sin 4x + C.$ **D.** $\int f(x)dx = -\frac{3}{16}\cos 4x + C.$

Bài tập 12. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}$ là:

A. $\sin x - \cos x + C.$ **C.** $\cos x - \sin x + C.$

B. $\sin x + \cos x + C.$ **D.** $\cos x + \sin x + C.$

Bài tập 13. Cho hàm số $f(x) = \tan^2 x$. Khi đó:

A. $\int f(x)dx = \cot x - x + C.$ **C.** $\int f(x)dx = \tan x - x + C.$

B. $\int f(x)dx = \cot x + x + C.$ **D.** $\int f(x)dx = \tan x + x + C.$

Bài tập 14. Cho hàm số $f(x) = \frac{3}{\cos^4 x}$. Khi đó $\int f(x)dx$ bằng:

A. $3\tan x + \tan^3 x + C.$ **C.** $3\tan x + \tan^2 x + C.$

B. $3\tan x - \tan^3 x + C.$ **D.** $3\tan x - \tan^2 x + C.$

Bài tập 15. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin x.\cos^2 x}$. Khi đó $\int f(x)dx$ bằng:

A. $\frac{1}{\cos x} + \ln|\tan\frac{x}{2}| + C.$ **C.** $\frac{1}{\sin x} + \ln|\tan\frac{x}{2}| + C.$

B. $\frac{1}{\cos x} - \ln|\tan\frac{x}{2}| + C.$ **D.** $\frac{1}{\sin x} - \ln|\tan\frac{x}{2}| + C.$

Bài tập 16. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$. Khi đó $\int f(x)dx$ bằng:

A. $\ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C.$ **C.** $\ln\left|\cot\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

B. $\ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C.$ **D.** $\ln\left|\cot\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

Bài tập 17. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}}$. Khi đó $\int f(x)dx$ bằng:

A. $\dfrac{2}{15}\left[\sqrt{(x+2)^3}+\sqrt{(x-3)^3}\right] + C.$ **B.** $\dfrac{1}{15}\left[\sqrt{(x+2)^3}+\sqrt{(x-3)^3}\right] + C.$

C. $\dfrac{1}{15}\left[\sqrt{(x+2)^3}-\sqrt{(x-3)^3}\right] + C.$ **D.** $\dfrac{2}{15}\left[\sqrt{(x+2)^3}-\sqrt{(x-3)^3}\right] + C.$

Bài tập 18. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$. Khi đó $\int f(x)dx$ bằng:

A. $x + \ln(1+e^x) + C.$ **C.** $x - e^x + C.$

B. $x - \ln(1+e^x) + C.$ **D.** $x + e^x + C.$

Bài toán 2: Phương pháp đổi biến số dạng 1.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để sử dụng ***phương pháp đổi biến dạng 1*** tìm nguyên hàm của hàm số f(x) chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chọn $x = \varphi(t)$, trong đó $\varphi(t)$ là hàm số mà ta chọn cho thích hợp.

Bước 2: Lấy vi phân $dx = \varphi'(t)dt$.

Bước 3: Biểu thị f(x)dx theo t và dt. Giả sử rằng $f(x)dx = g(t)dt$.

Bước 4: Khi đó $\int f(x)dx = \int g(t)dt$.

Lưu ý: Các dấu hiệu dẫn tới việc lựa chọn ẩn phụ kiểu trên thông thường là:

Dấu hiệu	Cách chọn
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\left[\begin{array}{l} x = \lvert a\rvert \sin t \text{ với } -\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2} \\ x = \lvert a\rvert \cos t \text{ với } 0 \le t \le \pi \end{array}\right.$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\lvert a\rvert}{\sin t} \text{ với } t \in [-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]\setminus\{0\} \\ x = \dfrac{\lvert a\rvert}{\cos t} \text{ với } t \in [0,\pi]\setminus\{\dfrac{\pi}{2}\} \end{array}\right.$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$\left[\begin{array}{l} x = \lvert a\rvert \tan t \text{ với } -\pi/2 < t < \pi/2 \\ x = \lvert a\rvert \cot t \text{ với } 0 < t < \pi \end{array}\right.$
$\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$	$x = a.\cos 2t$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x = a + (b-a)\sin^2 t$

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 19. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ là:

A. $\sqrt{1-x^2}+C$. **C.** $x\sqrt{1-x^2}+C$.

B. $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+C$.

Bài tập 20. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ là:

A. $\sqrt{1+x^2}+C$. **C.** $x\sqrt{1+x^2}+C$.

B. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+C$.

Bài tập 21. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{[(x-1)(2-x)]^3}}$ là:

A. $\dfrac{2x-3}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}+C$. **C.** $\dfrac{2x+3}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}+C$.

B. $\dfrac{2x-3}{2\sqrt{(x-1)(2-x)}}+C$. **D.** $\dfrac{2x+3}{2\sqrt{(x-1)(2-x)}}+C$.

Bài tập 22. Tìm nguyên hàm $\int \dfrac{x^2dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

Bài toán 3: Phương pháp đổi biến số dạng 2.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để sử dụng ***phương pháp đổi biến dạng 2*** tìm nguyên hàm của hàm số f(x) chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chọn $t = \varphi(x)$, trong đó $\varphi(x)$ là hàm số mà ta chọn cho thích hợp, rồi xác định $x = \psi(t)$ (nếu có thể).

Bước 2: Xác định vi phân $dx = \varphi'(t)dt$.

Bước 3: Biểu thị $f(x)dx$ theo t và dt. Giả sử rằng $f(x)dx = g(t)dt$.

Bước 4: Khi đó: $\int g(t)dt$

Lưu ý: Các dấu hiệu dẫn tới việc lựa chọn ẩn phụ kiểu trên thông thường là:

Dấu hiệu	Có thể chọn
Hàm có mẫu số	t là mẫu số
Hàm $f(x, \sqrt{\varphi(x)})$	$t = \sqrt{\varphi(x)}$
Hàm $f(x)=\dfrac{a.\sin x + b.\cos x}{c.\sin x + d.\cos x + e}$	$t = \tan\dfrac{x}{2}$ (với $\cos\dfrac{x}{2}\neq 0$)
	• Với $x + a > 0$ và $x + b > 0$,

Hàm $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$	đặt: $t = \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}$ Với $x+a < 0$ và $x+b < 0$, đặt: $t = \sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 23. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3(2-3x^2)^8$ là:

A. $\dfrac{(2-3x^2)^{10}}{180} + \dfrac{(2-3x^2)^9}{81} + C.$ **B.** $\dfrac{(2-3x^2)^{10}}{180} - \dfrac{(2-3x^2)^9}{81} + C.$

C. $\dfrac{(2-3x^2)^9}{180} + \dfrac{(2-3x^2)^8}{81} + C$ **D.** $\dfrac{(2-3x^2)^9}{180} - \dfrac{(2-3x^2)^8}{81} + C.$

Bài tập 24. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x-3}$ là:

A. $\ln\left|\dfrac{x^2+x-1}{x^2+x+3}\right| + C.$ **C.** $\ln\left|\dfrac{x^2+x-1}{x^2+x-3}\right| + C.$

B. $\ln\left|\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x+3}\right| + C.$ **D.** $\ln\left|\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x-3}\right| + C.$

Bài tập 25. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^4+1}$ là:

A. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right| + C.$ **C.** $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right| + C.$

B. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right| + C.$ **D.** $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right| + C.$

Bài tập 26. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3x\sqrt{\cos x}$ là:

A. $\dfrac{2}{21}(3\cos^3x - 7\cos x)\sqrt{\cos x} + C.$ **B.** $\dfrac{2}{21}(3\cos^3x + 7\cos x)\sqrt{\cos x} + C$

C. $\dfrac{1}{2}(\cos^3x - 7\cos x)\sqrt{\cos x} + C$ **D.** $\dfrac{1}{2}(\cos^3x + 7\cos x)\sqrt{\cos x} + C$

Bài tập 27. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{\cos x + \sin x.\cos x}{2+\sin x}$ là:

A. $\sin x + \ln|2+\sin x| + C.$ **C.** $\sin x - \ln|2+\sin x| + C.$

B. $\cos x + \ln|2+\sin x| + C.$ **D.** $\cos x - \ln|2+\sin x| + C.$

Bài tập 28. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{dx}{\sin x.\cos^3x}$ là:

A. $\ln|\cot x| + \dfrac{1}{2}\cot^2x + C.$ **C.** $\ln|\cot x| - \dfrac{1}{2}\cot^2x + C.$

B. $\ln|\tan x| + \dfrac{1}{2}\tan^2x + C.$ **D.** $\ln|\tan x| - \dfrac{1}{2}\tan^2x + C.$

Bài tập 29. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{\sin^3 x.\cos^5 x}}$ là:

A. $4\sqrt[4]{\tan x} + C.$ **C.** $\sqrt[4]{\tan x} + C.$

B. $4\sqrt[4]{\cot x} + C.$ **D.** $\sqrt[4]{\cot x} + C.$

Bài tập 30. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{\cos x.\sin^3 x}{1+\sin^2 x}$ là:

A. $\dfrac{1}{2}[1+\cos^2 x + \ln(1+\cos^2 x)] + C.$ **C.** $\dfrac{1}{2}[1+\sin^2 x - \ln(1+\sin^2 x)] + C.$

B. $\dfrac{1}{2}[1+\cos^2 x - \ln(1+\cos^2 x)] + C.$ **D.** $\dfrac{1}{2}[1+\sin^2 x + \ln(1+\sin^2 x)] + C.$

Bài tập 31. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x}}$ là:

A. $-\dfrac{2}{15}(3x^2-4x-8)\sqrt{1-x} + C.$ **C.** $-\dfrac{2}{15}(3x^2+4x+8)\sqrt{1-x} + C.$

B. $-\dfrac{2}{15}(3x^2+4x-8)\sqrt{1-x} + C.$ **D.** $-\dfrac{2}{15}(3x^2-4x+8)\sqrt{1-x} + C.$

Bài tập 32. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{2x+1}}$ là:

A. $\ln\left|\dfrac{\sqrt{2x+1}+1}{\sqrt{2x+1}-1}\right| + C.$ **C.** $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2x+1}+1}{\sqrt{2x+1}-1}\right| + C.$

B. $\ln\left|\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right| + C.$ **D.** $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right| + C.$

Bài tập 33. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}$, (với $x > 3$) là:

A. $2\ln(\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3}) + C.$ **C.** $\ln(\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3}) + C.$

B. $2\ln(\sqrt{x-2} - \sqrt{x-3}) + C.$ **D.** $\ln(\sqrt{x-2} - \sqrt{x-3}) + C.$

Bài tập 34. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$ là:

A. $\dfrac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C.$ **C.** $-\dfrac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C.$

B. $\dfrac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{1-x^2} + C.$ **D.** $-\dfrac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{1-x^2} + C.$

Bài tập 35. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ là:

A. $\ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C.$ **C.** $2\ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C.$

B. $\ln|x - \sqrt{x^2+1}| + C.$ **D.** $2\ln|x - \sqrt{x^2+1}| + C.$

Bài tập 36. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{2x}{x+\sqrt{x^2-1}}$ là:

A. $\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3} + C.$ **C.** $\dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{2}{3}\sqrt{(x^2-1)^3} + C.$

B. $\dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3} + C.$ **D.** $\dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{2}{3}\sqrt{(x^2-1)^3} + C.$

Bài tập 37. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$ là:

A. $\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C.$ **C.** $\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+e^x}+1}{\sqrt{1+e^x}-1}\right| + C.$

B. $\ln(\sqrt{1+e^x}+1) + C.$ **D.** $\ln(\sqrt{1+e^x}-1) + C.$

Bài toán 4: Phương pháp lấy nguyên hàm từng phần.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để tìm nguyên hàm của hàm số f(x) bằng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi: $\int f(x)dx = \int f_1(x).f_2(x)dx.$

Bước 2: Đặt: $\begin{cases} u = f_1(x) \\ dv = f_2(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du \\ v \end{cases}.$

Bước 3: Khi đó $\int f(x)dx = uv - \int vdu.$

Lưu ý: Khi sử dụng *phương pháp lấy nguyên hàm từng phần* để tìm nguyên hàm chúng ta cần tuân thủ các nguyên tắc sau:

a. Lựa chọn phép đặt dv sao cho v được xác định một cách dễ dàng.

b. Tích phân bất định $\int vdu$ được xác định một cách dễ dàng. hơn so với I.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 38. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}$ là:

A. $\ln(\cos x).\cot x + \cot x + x + C.$ **C.** $\ln(\cos x).\tan x + \tan x + x + C.$

B. $\ln(\cos x).\cot x + \cot x - x + C.$ **D.** $\ln(\cos x).\tan x + \tan x - x + C.$

Bài tập 39. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos(\ln x)$ là:

A. $\dfrac{x}{2}[\cos(\ln x) - \sin(\ln x)] + C.$ **C.** $\dfrac{x}{2}[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C.$

B. $x[\cos(\ln x) - \sin(\ln x)] + C.$ **D.** $x[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C.$

Bài tập 40. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ là:

A. $\ln|x + \sqrt{1+x^2}| + x\sqrt{1+x^2} + C.$

B. $\dfrac{1}{2}(\ln|x + \sqrt{1+x^2}| + x\sqrt{1+x^2}) + C.$

C. $\frac{1}{2}(\ln|x+\sqrt{1+x^2}|-x\sqrt{1+x^2})+C.$

D. $\ln|x+\sqrt{1+x^2}|-x\sqrt{1+x^2})+C.$

Bài tập 41. Họ nguyên hàm của hàm số f(x) = x.sinx là:

A. $-x.\sin x+\cos x+C.$ **C.** $-x.\cos x+\sin x+C.$

B. $x.\sin x+\cos x+C.$ **D.** $x.\cos x+\sin x+C.$

Bài tập 42. Họ nguyên hàm của hàm số f(x) = x.sinx.cosx là:

A. $\frac{1}{4}x.\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C.$

C. $-\frac{1}{4}x.\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C.$

B. $\frac{1}{4}x.\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 2x+C.$

D. $-\frac{1}{4}x.\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 2x+C.$

Bài tập 43. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x^2+2).\sin 2x$ là:

A. $-\frac{1}{2}(x^2+2)\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C.$

B. $-\frac{1}{2}(x^2+2)\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x+C.$

C. $\frac{1}{2}(x^2+2)\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C.$

D. $\frac{1}{2}(x^2+2)\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x+C.$

Bài tập 44. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x.\cos x$ là:

A. $\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)e^x+C.$ **C.** $-\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)e^x+C.$

B. $\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)e^x+C.$ **D.** $-\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)e^x+C.$

Bài tập 45. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x.e^{3x}$ là:

A. $\frac{1}{3}x.e^{3x}+\frac{1}{9}e^{3x}+C.$ **C.** $x.e^{3x}+\frac{1}{3}e^{3x}+C.$

B. $\frac{1}{3}x.e^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}+C.$ **D.** $x.e^{3x}-\frac{1}{3}e^{3x}+C.$

Bài tập 46. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2x^3+5x^2-2x+4)e^{2x}$ là:

A. $(x^3+2x^2-2x+3)e^{2x}+C.$ **C.** $(x^3+x^2-2x+3)e^{2x}+C.$

B. $(x^3+2x^2+2x+3)e^{2x}+C.$ **D.** $(x^3+x^2+2x+3)e^{2x}+C.$

Bài tập 47. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2.\ln 2x$ là:

A. $\frac{x^3}{3}\ln 2x+\frac{x^3}{9}+C.$ **C.** $x^3.\ln 2x-\frac{x^3}{9}+C.$

B. $\frac{x^3}{3}\ln 2x-\frac{x^3}{9}+C.$ **D.** $x^3.\ln 2x+\frac{x^3}{9}+C.$

Bài tập 48. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3.\ln x$ là:

A. $\frac{1}{4}x^4.\ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.$ **C.** $\frac{1}{16}x^4.\ln x - \frac{1}{4}x^4 + C.$

B. $\frac{1}{4}x^4.\ln x + \frac{1}{16}x^4 + C.$ **D.** $\frac{1}{16}x^4.\ln x + \frac{1}{4}x^4 + C$

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Sử dụng đồng nhất thức $x = 1 - (1 - x)$, ta được:

$$x(1-x)^{2009} = [1-(1-x)](1-x)^{2009} = (1-x)^{2009} - (1-x)^{2010}.$$

Khi đó: $\int f(x)dx = \int(1-x)^{2009}dx - \int(1-x)^{2010}dx$

$$= -\int(1-x)^{2009}d(1-x) + \int(1-x)^{2010}d(1-x)$$

$$= -\frac{(1-x)^{2010}}{2010} + \frac{(1-x)^{2011}}{2011} + C,$$ ứng với đáp án A.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = -\frac{(1-x)^{2010}}{2010} - \frac{(1-x)^{2011}}{2011} + C$ thì:

$$f(x) = \left[-\frac{(1-x)^{2010}}{2010} - \frac{(1-x)^{2011}}{2011} + C\right]' = (1-x)^{2009} + (1-x)^{2010}$$

$$= (1+1-x)(1-x)^{2009} = (2-x)(1-x)^{2009} \Rightarrow$$ Đáp án A bị loại.

- Với $F(x) = -\frac{(1-x)^{2010}}{2010} + \frac{(1-x)^{2011}}{2011} + C$ thì:

$$f(x) = \left[-\frac{(1-x)^{2010}}{2010} + \frac{(1-x)^{2011}}{2011} + C\right]' = (1-x)^{2009} - (1-x)^{2010}$$

$$= (1-1+x)(1-x)^{2009} = x(1-x)^{2009} \Rightarrow$$ Đáp án B đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài tập 2. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$\int f(x)dx = \int\frac{1}{x^2-3x+2}dx = \int\frac{1}{(x-1)(x-2)}dx = \int\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$= \ln|x-2| - \ln|x-1| + C = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C,$$ ứng với đáp án B.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C$ thì: $f(x) = \left(\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C\right)' = [\ln|x+1| - \ln|x+2| + C]'$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x^2+3x+2}$$

$\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

- Với $F(x) = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C$ thì:

$$f(x) = \left(\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C\right)' = [\ln|x-2| - \ln|x-1| + C]'$$

$$= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x^2-3x+2}$$

$\Rightarrow$ Đáp án B đúng.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp phép đánh giá*: Ta lần lượt thấy:

- Vì $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ nên nguyên hàm của nó không thể chứa $x + 1$ và $x + 2$. Do đó, các đáp án A và C bị loại.
- Với $F(x) = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C$ thì:

$$f(x) = \left(\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C\right)' = [\ln|x-2| - \ln|x-1| + C]'$$

$$= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x^2-3x+2} \Rightarrow \text{Đáp án B đúng.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài tập 3. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$f(x) = x - \frac{1}{4x^2-9} = x - \left(\frac{a}{2x-3} + \frac{b}{2x+3}\right) = x - \frac{2(a+b)x + 3(a-b)}{4x^2-9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(a+b) = 0 \\ 3(a-b) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{6} \text{ và } b = -\frac{1}{6}.$$

Từ đó, suy ra:

$$\int f(x)dx = \int\left[x - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2x-3} - \frac{1}{2x+3}\right)\right]dx$$

$$= \int x dx - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\int\frac{d(2x-3)}{2x-3} - \frac{1}{2}\int\frac{d(2x+3)}{2x+3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}(\ln|2x-3| - \ln|2x+3|) + C$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right| + C, \text{ ứng với đáp án A.}$$

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử – Bạn đọc tự giải tương tự bài 3.*

Bài tập 4. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Sử dụng đồng nhất thức $x^2 = (1 - x)^2 - 2(1 - x) + 1$, ta được:

$$\frac{x^2}{(1-x)^{39}} = \frac{(1-x)^2 - 2(1-x) + 1}{(1-x)^{39}} = \frac{1}{(1-x)^{37}} - \frac{2}{(1-x)^{38}} + \frac{1}{(1-x)^{39}}.$$

Khi đó:

$$\int f(x)dx = \int \frac{dx}{(1-x)^{37}} - \int \frac{2dx}{(1-x)^{38}} + \int \frac{dx}{(1-x)^{39}}$$

$$= \frac{1}{36(1-x)^{36}} - \frac{2}{37(1-x)^{37}} + \frac{1}{38(1-x)^{38}} + C, \text{ ứng với đáp án C.}$$

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \frac{1}{36(1-x)^{36}} + \frac{2}{37(1-x)^{37}} + \frac{1}{38(1-x)^{38}} + C$ thì:

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{(1-x)^{37}} + \frac{2}{(1-x)^{38}} + \frac{1}{(1-x)^{39}}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^{39}}[(1-x)^2 + 2(1-x) + 1] = \frac{x^2 - 4x + 4}{(1-x)^{39}}$$

$\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

- Với $F(x) = \frac{1}{36(1-x)^{36}} - \frac{2}{37(1-x)^{37}} - \frac{1}{38(1-x)^{38}} + C$ thì:

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{(1-x)^{37}} - \frac{2}{(1-x)^{38}} - \frac{1}{(1-x)^{39}}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^{39}}[(1-x)^2 - 2(1-x) - 1] = \frac{x^2 - 2}{(1-x)^{39}}$$

$\Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

- Với $F(x) = \frac{1}{36(1-x)^{36}} - \frac{2}{37(1-x)^{37}} + \frac{1}{38(1-x)^{38}} + C$ thì:

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{(1-x)^{37}} - \frac{2}{(1-x)^{38}} + \frac{1}{(1-x)^{39}}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^{39}}[(1-x)^2 - 2(1-x) + 1] = \frac{x^2}{(1-x)^{39}}$$

$\Rightarrow$ Đáp án C đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài tập 5. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Biến đổi:

$$\frac{x^2 + 2x - 2}{x^3 + 1} = \frac{x^2 + 2x - 2}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B(2x-1)}{x^2 - x + 1} + \frac{C}{x^2 - x + 1}$$

$$= \frac{(A + 2B)x^2 - (A - B - C)x + A - B + C}{x^3 + 1}$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được: $\begin{cases} A + 2B = 1 \\ -A + B + C = 2 \\ A - B + C = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 0 \end{cases}$.

Khi đó: $\frac{x^2+2x-2}{x^3+1} = -\frac{1}{x+1} + \frac{2x-1}{x^2-x+1}$.

Do đó: $\int f(x)dx = \int\left(\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1}\right)dx$

$= \ln|x^2-x+1| - \ln|x+1| + C$, ứng với đáp án B.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \ln|x^2-x+1| + \ln|x+1| + C$ thì:

$$f(x) = F'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{3x^2}{x^3+1} \Rightarrow \text{Đáp án A bị loại.}$$

- Với $F(x) = \ln|x^2-x+1| - \ln|x+1| + C$ thì:

$$f(x) = F'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x^2+2x-2}{x^3+1} \Rightarrow \text{Đáp án B đúng.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài tập 6. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2}\int(\cos8x+\cos2x)dx = \frac{1}{16}\sin8x + \frac{1}{4}\sin2x + C, \text{ ứng với đáp án C.}$$

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (Từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \frac{1}{4}\sin8x - \frac{1}{16}\sin2x + C$ thì:

$$f(x) = F'(x) = 2\cos8x - \frac{1}{8}\cos2x \Rightarrow \text{Đáp án A bị loại.}$$

- Với $F(x) = \frac{1}{16}\sin8x - \frac{1}{4}\sin2x + C$ thì:

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{2}\cos8x - \frac{1}{2}\cos2x = -\sin5x.\sin3x$$

$\Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

- Với $F(x) = \frac{1}{16}\sin8x + \frac{1}{4}\sin2x + C$ thì:

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{2}\cos8x + \frac{1}{2}\cos2x = \cos5x.\cos3x$$

$\Rightarrow$ Đáp án C đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (Từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \frac{1}{4}\sin8x + \frac{1}{16}\sin2x + C$ thì:

$$f(x) = F'(x) = 2\cos8x + \frac{1}{8}\cos2x \Rightarrow \text{Đáp án D bị loại.}$$

- Với $F(x) = \frac{1}{16}\sin8x + \frac{1}{4}\sin2x + C$ thì:

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{2}\cos 8x + \frac{1}{2}\cos 2x = \cos 5x.\cos 3x$$

$\Rightarrow$ Đáp án C đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài tập 7. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận 1*: Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \cos^2 2x.\cos 6x.dx = \int \cos 2x.\cos 2x.\cos 6x.dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos 8x + \cos 4x)\cos 2x.dx = \frac{1}{2}\int (\cos 8x.\cos 2x + \cos 4x.\cos 2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{2}\cos 10x + \cos 6x + \frac{1}{2}\cos 2x\right).dx$$

$$= \frac{1}{40}\sin 10x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{8}\sin 2x + C,$$ ứng với đáp án A.

✍ *Lời giải tự luận 2*: Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \cos^2 2x.\cos 6x.dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 4x)\cos 6x.dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos 6x + \cos 4x\cos 6x)dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos 6x + \frac{1}{2}\cos 10x + \frac{1}{2}\cos 2x\right).dx$$

$$= \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{40}\sin 10x + \frac{1}{8}\sin 2x + C,$$ ứng với đáp án A.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{40}\sin 10x + \frac{1}{8}\sin 2x + C$ thì:

$$f(x) = \left(\frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{40}\sin 10x + \frac{1}{8}\sin 2x + C\right)'$$

$$= \frac{1}{2}\cos 6x + \frac{1}{4}\cos 10x + \frac{1}{4}\cos 2x = \frac{1}{2}\cos 6x + \frac{1}{4}(\cos 10x + \cos 2x)$$

$$= \frac{1}{2}\cos 6x + \frac{1}{2}\cos 6x.\cos 4x = \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\cos 6x$$

$= \cos^2 2x.\cos 6x \Rightarrow$ Đáp án A đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài tập 8. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$f(x) = \tan x.\tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right).\tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \tan 3x,$$

nên:

$$\int f(x)dx = \int \tan 3x.dx = \int \frac{\sin 3x.dx}{\cos 3x} = -\frac{1}{3}\int \frac{d(\cos 3x)}{\cos 3x} = -\frac{1}{3}\ln|\cos 3x| + C,$$

ứng với đáp án B.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = -\frac{1}{3}\ln|\sin 3x| + C$ thì:

$$f(x) = F'(x)' = -\frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \cot 3x \Rightarrow \text{Đáp án A bị loại.}$$

- Với $F(x) = -\frac{1}{3}\ln|\cos 3x| + C$ thì:

$$f(x) = F'(x) = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \tan 3x = \tan x.\tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right).\tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

$\Rightarrow$ Đáp án B đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài tập 9. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \sin^4 x.dx = \int\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int(1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int[1 - 2\cos 4x + \frac{1}{2}(1 + \cos 8x)]dx$$

$$= \frac{1}{8}\int(3 - 4\cos 4x + \cos 8x)dx = \frac{1}{8}(3x - \sin 4x + \frac{1}{8}\sin 8x) + C,$$

ứng với đáp án A.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \frac{1}{8}(3x - \sin 4x + \frac{1}{8}\sin 8x) + C$ thì:

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{8}(3 - 4\cos 4x + \cos 8x) = \frac{1}{8}(3 - 4\cos 4x + 2\cos^2 4x - 1)$$

$$= \frac{1}{4}(1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x) = \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2 = \sin^4 2x$$

$\Rightarrow$ Đáp án A đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài tập 10. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận 1*: (*Sử dụng phép hạ bậc đơn*): Biến đổi f(x) về dạng:

$$f(x) = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1+\cos 4x}{2} = \frac{1}{4}(3 + \cos 4x).$$

Khi đó: $\int f(x)dx = \frac{1}{4}\int(3 + \cos 4x)dx = \frac{1}{4}(3x + \frac{1}{4}\sin 4x) + C$, ứng với đáp án C

✍ *Lời giải tự luận 2*: (*Sử dụng phép hạ bậc toàn cục*): Biến đổi f(x) về dạng:

$$VT = \sin^4x + \cos^4x = (\sin^2x + \cos^2x)^2 - 2\sin^2x.\cos^2x$$

$$= 1 - \frac{1}{2}.\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2}.\frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1}{4}(3 + \cos 4x).$$

Khi đó: $\int f(x)dx = \frac{1}{4}\int(3 + \cos 4x)dx = \frac{1}{4}(3x + \frac{1}{4}\sin 4x) + C$, ứng với đáp án C.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \frac{1}{4}(3x \pm \frac{1}{4}\cos 4x) + C$ thì:

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{4}(3 \mp \sin 4x) \Rightarrow f(0) = \frac{3}{4} \neq \sin^4 0 + \cos^4 0 = 1$$

$\Rightarrow$ Các đáp án A và B bị loại.

- Với $F(x) = \frac{1}{4}(3x - \frac{1}{4}\sin 4x) + C$ thì:

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{4}(3 - \cos 4x) \Rightarrow f(0) = \frac{1}{2} \neq \sin^4 0 + \cos^4 0 = 1$$

$\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài tập 11. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận 1*: (*Sử dụng phép hạ bậc đơn*): Biến đổi f(x) về dạng:

$$f(x) = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}.\cos 3x + \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}.\sin 3x$$

$$= \frac{3}{4}(\cos 3x.\sin x + \sin 3x.\cos x) = \frac{3}{4}\sin 4x.$$

Khi đó: $\int f(x)dx = \frac{3}{4}\int \sin 4x dx = -\frac{3}{16}\cos 4x + C$, ứng với đáp án D.

✍ *Lời giải tự luận 2*: (*Sử dụng phép hạ bậc đối xứng*): Biến đổi f(x) về dạng:

$$f(x) = \sin^2x.\sin x.\cos 3x + \cos^2x.\cos x.\sin 3x$$

$$= (1 - \cos^2x).\sin x.\cos 3x + (1 - \sin^2x).\cos x.\sin 3x$$

$$= \sin x.\cos 3x + \cos x.\sin 3x - (\cos x.\cos 3x + \sin x.\sin 3x)\sin x.\cos x$$

$$= \sin 4x - \frac{1}{2}\cos 2x.\sin 2x = \sin 4x - \frac{1}{4}\sin 4x = \frac{3}{4}\sin 4x.$$

Khi đó: $\int f(x)dx = \frac{3}{4}\int \sin 4x dx = -\frac{3}{16}\cos 4x + C$, ứng với đáp án D.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử* – Bạn đọc tự làm tương tự bài 1,0.

Bài tập 12. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \frac{\cos 2x.dx}{\sin x + \cos x} = \int \frac{(\cos^2x - \sin^2x)dx}{\sin x + \cos x}$$

$$= \int(\cos x - \sin x)dx = \sin x + \cos x + C, \text{ ứng với đáp án B.}$$

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \sin x - \cos x + C$ thì:

$$f(x) = F'(x) = \cos x + \sin x = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x + \cos x} \neq \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}$$

$\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

- Với $F(x) = \sin x + \cos x + C$ thì:

$$f(x) = F'(x) = \cos x - \sin x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} = \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}$$

$\Rightarrow$ Đáp án B đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài tập 13. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Sử dụng kết quả $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$.

Ta được: $\int f(x)dx = \int(\frac{1}{\cos^2 x} - 1)dx = \tan x - x + C$, ứng với đáp án C.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (Từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \cot x - x + C$ thì:

$$f(x) = (\cot x - x + C)' = -\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \neq \tan^2 x \Rightarrow \text{Đáp án A bị loại.}$$

- Với $F(x) = \cot x + x + C$ thì:

$$f(x) = (\cot x + x + C)' = -\frac{1}{\sin^2 x} + 1 = -\cot^2 x \neq \tan^2 x$$

$\Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

- Với $F(x) = \tan x - x + C$ thì:

$$f(x) = (\tan x - x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x \Rightarrow \text{Đáp án C đúng.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (Từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \tan x + x + C$ thì:

$$f(x) = (\tan x + x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x} + 1 \neq \tan^2 x \Rightarrow \text{Đáp án D bị loại.}$$

- Với $F(x) = \tan x - x + C$ thì:

$$f(x) = (\tan x - x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x \Rightarrow \text{Đáp án C đúng.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài tập 14. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Sử dụng kết quả $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\tan x)$.

Ta được: $\int f(x)dx = 3\int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = 3\int(1 + \tan^2 x)\, d(\tan x)$

$= 3\int d(\tan x) + 3\int \tan^2 x d(\tan x) = 3\tan x + \tan^3 x + C,$

ứng với đáp án A.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = 3\tan x + \tan^3 x + C$ thì:

$$f(x) = (3\tan x + \tan^3 x + C)' = \frac{3}{\cos^2 x} + \frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x} = \frac{3}{\cos^2 x} + \frac{3\sin^2 x}{\cos^4 x}$$

$$= \frac{3}{\cos^4 x}(\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{3}{\cos^4 x} \Rightarrow \text{Đáp án A đúng.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài tập 15. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Sử dụng đồng nhất thức $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ta được:

$$\frac{1}{\sin x.\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x.\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{\frac{1}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}.\frac{1}{\tan \frac{x}{2}}.$$

$$\text{Suy ra: } \int f(x)dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}.\frac{1}{\tan \frac{x}{2}}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} + \int \frac{d(\tan \frac{x}{2})}{\tan \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{\cos x} + \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + C, \text{ ứng với đáp án A.}$$

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử* – Bạn đọc tự giải.

Bài tập 16. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận 1*: Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin(x + \frac{\pi}{2})} = \int \frac{dx}{2\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})}$$

$$= \int \frac{dx}{2\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\cos^2(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})} = \int \frac{d\left[\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\right]}{\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})}$$

$$= \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C, \text{ ứng với đáp án A.}$$

✍ *Lời giải tự luận 2*: Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x.dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{1 - \sin^2 x} = -\int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x - 1}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + C = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C, \text{ ứng với đáp án A.}$$

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$ thì:

$$f(x) = \left[\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C\right]' = \frac{\left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]'}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right).\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right).\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\cos x}$$

$\Rightarrow$ Đáp án A đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài tập 17. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$\int f(x)dx = \frac{1}{5}\int(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-3})dx$$

$$= \frac{1}{5}\left[\int(x+2)^{1/2}d(x+2) - \int(x-3)^{1/2}d(x-3)\right]$$

$$= \frac{2}{15}\left[\sqrt{(x+2)^3} - \sqrt{(x-3)^3}\right] + C, \text{ ứng với đáp án D.}$$

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (Từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \frac{2}{15}\left[\sqrt{(x+2)^3} + \sqrt{(x-3)^3}\right] + C$ thì:

$$f(x) = \frac{2}{15}\left[\sqrt{(x+2)^3} + \sqrt{(x-3)^3}\right]' = \frac{2}{15}\left[\frac{3}{2}\sqrt{x+2} + \frac{3}{2}\sqrt{x-3}\right]$$

$$= \frac{1}{5}(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3}) = \frac{1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-3}} \Rightarrow \text{Đáp án A bị loại.}$$

- Bởi trong phép thử trên, hệ số $\frac{2}{15}$ là phù hợp nên các đáp án B, C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (Từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \frac{2}{15}\left[\sqrt{(x+2)^3} - \sqrt{(x-3)^3}\right] + C$ thì:

$$f(x) = \frac{2}{15}\left[\sqrt{(x+2)^3} - \sqrt{(x-3)^3}\right]' = \frac{2}{15}\left[\frac{3}{2}\sqrt{x+2} - \frac{3}{2}\sqrt{x-3}\right]$$

$$= \frac{1}{5}(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-3}) = \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}} \Rightarrow \text{Đáp án D đúng.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài tập 18. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Sử dụng đồng nhất thức:

$$1 = (1 + e^x) - e^x \Rightarrow \frac{1}{1+e^x} = \frac{(1+e^x)-e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}.$$

Từ đó: $\int f(x)dx = \int(1 - \frac{e^x}{1+e^x})dx = \int dx - \int \frac{d(1+e^x)}{1+e^x} = x - \ln(1+e^x) + C,$

ứng với đáp án B.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = x + \ln(1+e^x) + C$ thì:

$$f(x) = [x + \ln(1+e^x) + C]' = 1 + \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1+2e^x}{1+e^x}$$

$\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

- Với $F(x) = x - \ln(1+e^x) + C$ thì:

$$f(x) = [x - \ln(1+e^x) + C]' = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$\Rightarrow$ Đáp án B đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài tập 19. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Đặt $x = \sin t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ suy ra:

$$dx = \cos t.dt \text{ và } f(x).dx = \frac{\cos t.dt}{\cos^3 t} = \frac{dt}{\cos^2 t} = d(\tan t).$$

Khi đó: $\int f(x)dx = \int d(\tan t) = \tan t + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$, ứng với đáp án B.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \sqrt{1-x^2} + C$ thì:

$$f(x) = (\sqrt{1-x^2} + C)' = -\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} \neq \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

$\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

- Với $F(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$ thì:

$$f(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C\right)' = \frac{\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

$\Rightarrow$ Đáp án B đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài tập 20. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Đặt $x = \tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ suy ra:

$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \text{ và } \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{\cos^3 t.dt}{\cos^2 t} = \cos t dt.$$

Khi đó: $\int f(x)dx = \int \cos t dt = \sin t + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$, ứng với đáp án **B**.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử* – Bạn đọc tự thực hiện.

Bài tập 21. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Đặt $x = 1 + \sin^2 t$, với $0 \le < t \le \frac{\pi}{2}$ suy ra:

$$dx = 2\sin t.\cos t.dt = \sin 2t.dt,$$

Khi đó: $\int f(x)dx = \int \frac{dx}{\sqrt{[(x-1)(2-x)]^3}} = \int \frac{\sin 2t.dt}{\sqrt{(\sin^2 t.\cos^2 t)^3}} = \int \frac{\sin 2t.dt}{\sin^3 2t}$

$$= \int \frac{dt}{\sin^2 2t} = -\cot 2t + C = \frac{2x-3}{2\sqrt{(x-1)(2-x)}} + C,$$

ứng với đáp án **B**.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử* – Bạn đọc tự thực hiện.

Bài tập 22. Vì điều kiện $|x| > 1$, ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $x > 1$ đặt $x = \frac{1}{\sin 2t}$, $0 < t < \frac{\pi}{4}$ suy ra:

$$dx = \frac{2\cos 2t dt}{\sin^2 2t},$$

$$\frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-1}} = -\frac{2dt}{\sin^3 2t} = -\frac{2(\cos^2 t + \sin^2 t)^2 dt}{8\sin^3 t \cos^3 t}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\cot t.\frac{1}{\sin^2 t} + \tan t.\frac{1}{\cos^2 t} + \frac{2}{\sin t \cos t}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\cot t.\frac{1}{\sin^2 t} + \tan t.\frac{1}{\cos^2 t} + \frac{2}{\tan t}\frac{1}{\cos^2 t}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}[-\cot t.d(\cot t) + \tan t.d(\tan t) + 2\frac{d(tgt)}{tgt}].$$

Khi đó:

$$-\frac{1}{4}[-\int \cot t.d(\cot t) + \int \tan t.d(\tan t) + 2\int \frac{d(\tan t)}{\tan t}]$$

$$= -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\cot^2 t + \frac{1}{2}\tan^2 t + 2\ln|\tan t|\right) + C = \frac{1}{8}(\cot^2 t - \tan^2 t) - \frac{1}{2}\ln|\tan t| + C$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln|x - \sqrt{x^2-1}| + C.$$

Trường hợp 2: Với $x < -1$ – *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

Bài tập 23. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Đặt $t = 2 - 3x^2$, suy ra:

$dt = -6x.dx$,

$$x^3(2-3x^2)^8dx = x^2(2-3x^2)^8 xdx = \frac{2-t}{3}.t^8.(-\frac{1}{6}dt) = \frac{1}{18}(t^9 - 2t^8)dt.$$

Khi đó: $\int f(x)dx = \frac{1}{18}\int(t^9 - 2t^8)dt = \frac{1}{18}(\frac{1}{10}t^{10} - \frac{2}{9}t^9) + C = \frac{1}{180}t^{10} - \frac{1}{81}t^9 + C$

$$= \frac{(2-3x^2)^{10}}{180} - \frac{(2-3x^2)^9}{81} + C, \text{ ứng với đáp án B.}$$

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Vì hàm số f(x) là hàm đa thức có bậc bằng 19 nên nguyên hàm F(x) của nó phải có bậc bằng 20. Do đó, các đáp án C và D bị loại vì bậc của chúng bằng 18.
- Với $F(x) = \frac{(2-3x^2)^{10}}{180} + \frac{(2-3x^2)^9}{81} + C$ thì:

$$f(x) = F'(x) = -\frac{x(2-3x^2)^9}{3} - \frac{2x(2-3x^2)^8}{3}$$

$$= -\frac{1}{3}x(2-3x^2)^8(2-3x^2+2)$$

$$= -\frac{1}{3}x(2-3x^2)^8(4-3x^2) \Rightarrow \text{Đáp án A bị loại.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài tập 24. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Biến đổi hàm số về dạng: $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2-4}$.

Đặt $t = x^2 + x + 1$, suy ra $dt = (2x + 1)dx$. Khi đó:

$$\int f(x)dx = \int\frac{dt}{t^2-4} = \ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = \ln\left|\frac{x^2+x-1}{x^2+x+3}\right| + C,$$

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \ln\left|\frac{x^2+x-1}{x^2+x+3}\right| + C = \ln|x^2+x-1| - \ln|x^2+x+3|$ thì:

$$f(x) = F'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1} - \frac{2x+1}{x^2+x+3} = \frac{2x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x-3}$$

$\Rightarrow$ Đáp án A đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Để tương ứng với các đáp án A, B, C và D thì hàm số f(x) phải có dạng: $f(x) = \frac{U'}{U} - \frac{V'}{V}$.

Ta có: $f(x) = \frac{2x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x-3} = \frac{2x+1}{(x^2+x-1)(x^2+x+3)}$

Tức là, trong đáp án phải có các đa thức dạng $x^2 + x - 1$ và $x^2 + x + 3$. Suy ra, các đáp án B, C và D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài tập 25. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Biến đổi hàm số về dạng:

$$f(x) = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+x^2} = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{(x+\frac{1}{x})^2-2}.$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$, suy ra $dt = (1 - \frac{1}{x^2})dx$. Khi đó:

$$\int f(x)dx = \int \frac{dt}{t^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right| + C, \text{ ứng với đáp án C.}$$

Bài tập 26. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Đặt $t = \sqrt{\cos x}$, suy ra:

$t^2 = \cos x \Rightarrow 2tdt = -\sin x dx$;

$\sin^3 x \sqrt{\cos x}\, dx = \sin^2 x \sqrt{\cos x}\, \sin x dx = (1 - \cos^2 x)\sqrt{\cos x}\, \sin x dx$

$= (1 - t^4).t.(-2tdt) = 2(t^6 - t^2)dt.$

Khi đó: $\int f(x)dx = 2\int(t^6 - t^2)dt = 2(\frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{3}t^3) + C = \frac{2}{21}(3t^6 - 7t^2)t + C$

$= \frac{2}{21}(3\cos^3 x - 7\cos x)\sqrt{\cos x} + C$, ứng với đáp án A.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \frac{2}{21}(3\cos^3 x - 7\cos x)\sqrt{\cos x} + C$ thì:

$$f(x) = \frac{2}{21}(3\cos^{7/2} x - 7\cos^{3/2} x)'$$

$$= \frac{2}{21}\left(-\frac{21}{2}\sin x.\cos x^{5/2} + \frac{21}{2}\sin x.\cos x^{1/2}\right)$$

$= (-\cos^2 x + 1)\sin x.\sqrt{\cos x} = \sin^3 x \sqrt{\cos x} \Rightarrow$ Đáp án A đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài tập 27. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận 1*: Biến đổi hàm số về dạng $f(x) = \frac{(1+\sin x)\cos x}{2+\sin x}$.

Đặt $t = \sin x$, suy ra:

$$dt = \cos x dx \text{ và } \frac{(1+\sin x)\cos x.dx}{2+\sin x} = \frac{(1+t)dt}{2+t}.$$

Khi đó: $\int f(x)dx = \int \frac{(1+t)dt}{2+t} = \int \left(1 - \frac{1}{2+t}\right)dt = t - \ln|2+t| + C$

$= \sin x - \ln|2 + \sin x| + C$, ứng với đáp án C.

✍ *Lời giải tự luận 2*: Biến đổi hàm số về dạng $f(x) = \frac{(1+\sin x)\cos x}{2+\sin x}$.

Đặt $t = 2 + \sin x$, suy ra: $dt = \cos x dx$ và $\frac{(1+\sin x)\cos x.dx}{2+\sin x} = \frac{(t-1)dt}{t}$.

Khi đó: $\int f(x)dx = \int \frac{(t-1)dt}{t} = \int \left(1 - \frac{1}{t}\right)dt = t - \ln|t| + C$

$= 2 + \sin x - \ln|2 + \sin x| + C = \sin x - \ln|2 + \sin x| + C$,

ứng với đáp án C.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử* – Bạn đọc tự thực hiện.

Bài tập 28. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Biến đổi hàm số f(x) về dạng: $f(x) = \frac{1}{\tan x.\cos^4 x}$.

Đặt $t = \tan x$ suy ra:

$$dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \text{ và } \frac{dx}{\tan x.\cos^4 x} = \frac{1}{\tan x}(1+\tan^2 x)\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{(1+t^2)dt}{t}.$$

Khi đó: $\int f(x)dx = \int \frac{(1+t^2)dt}{t} = \int (\frac{1}{t} + t)dt = \ln|t| + \frac{1}{2}t^2 + C$

$= \ln|\tan x| + \frac{1}{2}\tan^2 x + C$, ứng với đáp án B.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử* – Bạn đọc tự thực hiện.

Bài tập 29. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Biến đổi hàm số f(x) về dạng:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\tan^3 x.\cos^8 x}} = \frac{1}{\cos^2 x.\sqrt[4]{\tan^3 x}}$$

Đặt $t = \tan x$ suy ra:

$$dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \text{ và } \frac{dx}{\cos^2 x.\sqrt[4]{\tan^3 x}} = \frac{dt}{\sqrt[4]{t^3}}.$$

Khi đó: $I = \int \frac{dt}{\sqrt[4]{t^3}} = 4\sqrt[4]{t} + C = 4\sqrt[4]{\tan x} + C$, ứng với đáp án A

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử* – Bạn đọc tự thực hiện.

Bài tập 30. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Đặt $t = 1 + \sin^2 x$, suy ra:

$dt = 2\sin x\cos x dx$,

$$\frac{\cos x.\sin^3 x dx}{1+\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x.\cos x.\sin x dx}{1+\sin^2 x} = \frac{(t-1)dt}{2t} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{t})dt.$$

Khi đó: $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\int(1 - \frac{1}{t})dt = \frac{1}{2}(t - \ln|t|) + C$

$= \frac{1}{2}[1 + \sin^2x - \ln(1 + \sin^2x)] + C$, ứng với đáp án C.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*. Ta lần lượt đánh giá:

- Vì f(x) có mẫu số là $1 + \sin^2x$ nên trong F(x) phải chứa $\ln(1 + \sin^2x)$, tức là các đáp án A và B bị loại.
- Với $F(x) = \frac{1}{2}[1 + \sin^2x + \ln(1 + \sin^2x)] + C$ thì:

$$f(x) = \frac{1}{2}[1 + \sin^2x + \ln(1 + \sin^2x)]' = \frac{1}{2}\left(2\cos x.\sin x + \frac{2\cos x.\sin x}{1 + \sin^2x}\right)$$

$$= \frac{\sin 2x}{2}.\frac{2 + \sin^2x}{1 + \sin^2x} \neq \frac{\cos x.\sin^3x}{1 + \sin^2x} \Rightarrow$$ Đáp án D bị loại.

. Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài tập 31. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Đặt $t = \sqrt{1 - x}$, suy ra:

$x = 1 - t^2$,

$dx = -2tdt$ và $\frac{x^2dx}{\sqrt{1 - x}} = \frac{(1 - t^2)^2(-2tdt)}{t} = -2(t^4 - 2t^2 + 1)dt.$

Khi đó: $\int f(x)dx = -2\int(t^4 - 2t^2 + 1)dt = -2(\frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + t) + C$

$$= -\frac{2}{15}(3t^4 - 10t^2 + 15)t + C$$

$$= -\frac{2}{15}[3(1 - x)^2 - 10(1 - x) + 15]\sqrt{1 - x} + C$$

$$= -\frac{2}{15}(3x^2 + 4x + 8)\sqrt{1 - x} + C$$, ứng với đáp án C.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử* – Bạn đọc tự thực hiện.

Bài tập 32. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Đặt $t = \sqrt{2x + 1}$ suy ra $t^2 = 2x + 1$. Khi đó:

$$2tdt = 2dx \text{ và } \frac{dx}{2x\sqrt{2x + 1}} = \frac{tdt}{(t^2 - 1)t} = \frac{dt}{t^2 - 1}.$$

Khi đó: $\int f(x)dx = \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t - 1}{t + 1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2x + 1} - 1}{\sqrt{2x + 1} + 1}\right| + C,$

ứng với đáp án D.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*. (Từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \ln\left|\frac{\sqrt{2x + 1} + 1}{\sqrt{2x + 1} - 1}\right| + C = \ln\left|\sqrt{2x + 1} + 1\right| - \ln\left|\sqrt{2x + 1} - 1\right| + C$ thì:

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{2(\sqrt{2x+1}+1)\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{2(\sqrt{2x+1}-1)\sqrt{2x+1}}$$

$$= -\frac{1}{x\sqrt{2x+1}} \neq \frac{1}{2x\sqrt{2x+1}} \Rightarrow \text{Đáp án A bị loại.}$$

- Với cách tính đạo hàm như trên thì với các đáp án B và C chúng ta sẽ nhận được hàm số f(x) theo thứ tự là $\frac{1}{x\sqrt{2x+1}}$ và $-\frac{1}{2x\sqrt{2x+1}}$. Do đó, các đáp án B và C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2*: (Từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x)=\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{2x+1}-1\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{2x+1}-1\right|+C$ thì:

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{4(\sqrt{2x+1}-1)\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{4(\sqrt{2x+1}+1)\sqrt{2x+1}}$$

$$= \frac{1}{2x\sqrt{2x+1}} \Rightarrow \text{Đáp án D đúng.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài tập 33. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Biến đổi hàm số f(x) về dạng: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-2)(x-3)}}$.

Với giả thiết $x > 3$, ta đặt $t = \sqrt{x-2} + \sqrt{x-3}$, suy ra:

$$dt = \left(\frac{1}{2\sqrt{x-2}} + \frac{1}{2\sqrt{x-3}}\right)dx = \frac{(\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3})dx}{2\sqrt{(x-2)(x-3)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-3)}} = \frac{2dt}{t}.$$

Khi đó: $\int f(x)dx = 2\int\frac{dt}{t} = 2\ln|t| + C = 2\ln(\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3}) + C,$

ứng với đáp án A.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = 2\ln(\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3}) + C$ thì:

$$f(x) = F'(x) = 2.\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-2}} + \frac{1}{2\sqrt{x-3}}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(x-2)(x-3)}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}} \Rightarrow \text{Đáp án A đúng.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài tập 34. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận 1*: Đặt $t = \sqrt{1-x^2}$, suy ra:

$$x^2 = 1 - t^2,$$

$$2xdx = -2tdt,$$

$$\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2.xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(1-t^2)(-tdt)}{t} = (t^2-1)dt.$$

Khi đó: $\int f(x)dx = \int(t^2-1)dt = \frac{1}{3}t^3 - t + C = \frac{1}{3}(t^2-3)t + C$

$$= -\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C, \text{ ứng với đáp án C.}$$

✍ *Lời giải tự luận 2*: Đặt $x = \sin t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ suy ra:

$$dx = \cos t dt,$$

$$\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sin^3 t.\cos t dt}{\cos t} = \sin^3 t dt = \frac{1}{4}(3\sin t - \sin 3t)dt.$$

Khi đó: $\int f(x)dx = \frac{1}{4}\int(3\sin t - \sin 3t)dt = \tan t + C = -\frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{12}\cos 3t + C$

$$= -\frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{12}(4\cos^3 t - 3\cos t) + C = \frac{1}{3}\cos^3 t - \cos t + C$$

$$= (\frac{1}{3}\cos^2 t - 1)\cos t + C = [\frac{1}{3}(1-\sin^2 t) - 1]\cos t + C$$

$$= [\frac{1}{3}(1-x^2) - 1]\sqrt{1-x^2} + C$$

$$= -\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C, \text{ ứng với đáp án C.}$$

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1*: (Từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C$ thì:

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{3}.2x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3}(x^2+2)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{2x(1-x^2)-(x^2+2)x}{3\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \text{Đáp án A bị loại.}$$

- Bởi trong phép thử trên, chỉ thay dấu là phù hợp nên các đáp án B, D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài tập 35. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Đặt $t = x + \sqrt{x^2+1}$ suy ra:

$$dt = (1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}})dx = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}dx \Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{dt}{t}$$

Khi đó: $\int f(x)dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C$, ứng với đáp án A.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C$ thì:

$$f(x) = (\ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C)' = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$\Rightarrow$ Đáp án A đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài tập 36. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận 1*: Ta biến đổi:

$$\int f(x)dx = \int \frac{2x.dx}{x + \sqrt{x^2-1}} = \int \frac{2x(x - \sqrt{x^2-1}).dx}{x^2 - x^2 + 1}$$

$$= \int 2x^2 dx - \int 2x\sqrt{x^2-1}dx = \frac{2}{3}x^3 - \int \sqrt{x^2-1}d(x^2-1) + C$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}\sqrt{(x^2-1)^3} + C, \text{ ứng với đáp án A.}$$

✍ *Lời giải tự luận 2*: Đặt $t = x + \sqrt{x^2-1}$, suy ra:

$$t - x = \sqrt{x^2-1} \Rightarrow x = \frac{t^2+1}{2t} \Rightarrow dx = \frac{t^2-1}{2t^2}dt.$$

Khi đó: $\int f(x)dx = \int \frac{2xdx}{x + \sqrt{x^2-1}} = \int \frac{2.\frac{t^2+1}{2t}.\frac{t^2-1}{2t^2}dt}{t} = \int \frac{(t^4-1)dt}{2t^4}$

$$= \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{t^4}\right)dt = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{3t^3}) + C$$

$$= \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2-1}) + \frac{1}{6(x + \sqrt{x^2-1})^3} + C$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}\sqrt{(x^2-1)^3} + C, \text{ ứng với đáp án A.}$$

Bài tập 37. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận 1*: Đặt $t = \sqrt{1+e^x}$, suy ra: $t^2 = 1 + e^x$,

$$2tdt = e^x dx \Leftrightarrow dx = \frac{2tdt}{t^2-1} \text{ và } \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \frac{2tdt}{t(t^2-1)} = \frac{2dt}{t^2-1}.$$

Khi đó: $\int f(x)dx = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C,$

ứng với đáp án A.

✍ *Lời giải tự luận 2*: Đặt $t = e^{-x/2}$, suy ra:

$$dt = -\frac{1}{2}e^{-x/2}dx \Leftrightarrow -2dt = \frac{dx}{e^{x/2}},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \frac{dx}{\sqrt{e^x(e^{-x}+1)}} = \frac{dx}{e^{x/2}\sqrt{e^{-x}+1}} = \frac{-2dt}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Khi đó: $\int f(x)dx = -2\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = -2\ln|t + \sqrt{t^2+1}| + C$

$$= -2\ln|e^{-x/2} + \sqrt{e^{-x}+1}| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C,$$

ứng với đáp án A.

Bài tập 38. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Đặt: $\begin{cases} u = \ln(\cos x) \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\dfrac{\sin x}{\cos x}dx \\ v = \tan x \end{cases}$.

Khi đó: $\int f(x)dx = \ln(\cos x).\tan x + \int \tan^2 x.dx = \ln(\cos x).\tan x + \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx$

$= \ln(\cos x).\tan x + \tan x - x + C$, ứng với đáp án D.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1*: (Từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

- Với cotx thì ta nhận được:

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \text{hàm số } f(x) \text{ sẽ có mẫu số chứa } \sin^2 x$$

$\Rightarrow$ Các đáp án A và B bị loại.

- Với $F(x) = \ln(\cos x).\tan x + \tan x + x + C$ thì:

$$f(x) = F'(x) = -\frac{\sin x.\tan x}{\cos x} + \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + 1$$

$$= \frac{-\sin^2 x + \ln(\cos x) + 1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos 2x + \ln(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$\Rightarrow$ Đáp án C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2*: (Từ phải qua trái) : Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \ln(\cos x).\tan x + \tan x - x + C$ thì:

$$f(x) = F'(x) = -\frac{\sin x.\tan x}{\cos x} + \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

$$= \frac{-\sin^2 x + \ln(\cos x) + 1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} \Rightarrow \text{Đáp án D đúng.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài tập 39. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Đặt: $\begin{cases} u = \cos(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{1}{x}\sin(\ln x)dx \\ v = x \end{cases}$.

Khi đó: $I = \int f(x)dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx$. (1)

Xét $J = \int \sin(\ln x)dx$, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \sin(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}\cos(\ln x)dx \\ v = x \end{cases}.$$

Khi đó: $J = x.\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx = x.\sin(\ln x) - I$. (2)

Thay (2) vào (1), ta được: $I = x.\cos(\ln x) + x.\sin(\ln x) - I$

$\Leftrightarrow I = \frac{x}{2}[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C$, ứng với đáp án C.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1*: (Từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \frac{x}{2}[\cos(\ln x) - \sin(\ln x)] + C$ thì:

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{2}[\cos(\ln x) - \sin(\ln x)] + \frac{x}{2}\left[-\frac{\sin(\ln x)}{x} - \frac{\cos(\ln x)}{x}\right]$$

$= -\sin(\ln x) \Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

- Vì hai đáp án A và B chỉ khác nhau hệ số nên đáp án B bị loại.
- Với $F(x) = \frac{x}{2}[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C$ thì:

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{2}[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + \frac{x}{2}\left[-\frac{\sin(\ln x)}{x} + \frac{\cos(\ln x)}{x}\right]$$

$= \cos(\ln x) \Rightarrow$ Đáp án C đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2*: (Từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = x[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C$ thì:

$$f(x) = F'(x) = [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + x\left[-\frac{\sin(\ln x)}{x} + \frac{\cos(\ln x)}{x}\right]$$

$= 2\cos(\ln x) \Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

- Vì hai đáp án C và D chỉ khác nhau hệ số và với hệ số bằng $\frac{1}{2}$ ta sẽ nhận được $f(x) = \cos(\ln x)$, phù hợp.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài tập 40. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận 1*: Đặt $x = \tan t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ suy ra:

$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \text{ và } \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{dt}{\cos^3 t}.$$

Khi đó: $I = \int f(x)dx = \int \frac{dt}{\cos^3 t} = \int \frac{\cos t dt}{\cos^4 t} = \int \frac{\cos t dt}{(1-\sin^2 t)^2}$.

Đặt u = sint, suy ra: du = costdt và $\frac{\cos t dt}{(1-\sin^2 t)^2} = \frac{du}{(u+1)^2(u-1)^2}$.

Khi đó: $I = \int \frac{du}{(u+1)^2(u-1)^2} = \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| - \frac{2u}{(u+1)(u-1)}\right] + C$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{\sin t+1}{\sin t-1}\right| - \frac{2\sin t}{(\sin t+1)(\sin t-1)}\right] + C$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1}\right| - \frac{2\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1)(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1)}\right] + C$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x-\sqrt{1+x^2}}\right| + 2x\sqrt{1+x^2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + 2x\sqrt{1+x^2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + x\sqrt{1+x^2}\right) + C$$, ứng với đáp án B.

✍ *Lời giải tự luận 2*: Đặt $t = x + \sqrt{1+x^2}$, suy ra:

$$t - x = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow (t-x)^2 = 1 + x^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{2t}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2} = t - \frac{t^2-1}{2t} = \frac{t^2+1}{2t}.$$

Khi đó: $dt = (1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}})dx = \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{2t^2}{t^2+1}dx \Leftrightarrow dx = \frac{t^2+1}{2t^2}dt$

$$\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{t^2+1}{2t}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}dt = \frac{1}{4}\frac{(t^2+1)^2}{t^3}dt = \frac{1}{4}(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3})dt$$

Từ đó: $I = \int f(x)dx = \frac{1}{4}\int(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3})dt = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}t^2 + 2\ln|t| - \frac{1}{2t^2}) + C$

$$= \frac{1}{8}[(t^2 - \frac{1}{t^2}) + 4\ln|t|] + C = \frac{1}{8}[4x\sqrt{1+x^2} + 4\ln|x+\sqrt{1+x^2}|] + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + x\sqrt{1+x^2}\right) + C$$, ứng với đáp án B.

✍ *Lời giải tự luận 3*: Đặt: $\begin{cases} u = \sqrt{x^2+1} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} \\ v = x \end{cases}$.

Khi đó: $I = \int f(x)dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}}$. (1)

Trong đó: $J = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{[(x^2+1)-1]dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \sqrt{x^2+1}\,dx - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

$= I - \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C.$ (2)

Thay (2) vào (1) ta được:

$I = x\sqrt{x^2+1} - (I - a\ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C)$

$\Leftrightarrow 2I = x\sqrt{x^2+1} + \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C$

$\Leftrightarrow I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C$, ứng với đáp án B.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử* – Bạn đọc tự thực hiện.

Bài tập 41. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Sử dụng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}.$$

Khi đó: $\int f(x)dx = -x.\cos x + \int \cos x.dx = -x.\cos x + \sin x + C$, ứng với đáp án C.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (Từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = -x.\sin x + \cos x + C$ thì:
  $f(x) = (-x.\sin x + \cos x + C)' = -\sin x - x.\cos x - \sin x$
  $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.
- Với $F(x) = x.\sin x + \cos x + C$ thì:
  $f(x) = (x.\sin x + \cos x + C)' = \sin x + x.\cos x - \sin x$
  $\Rightarrow$ Đáp án B bị loại.
- Với $F(x) = -x.\cos x + \sin x + C$ thì:
  $f(x) = (-x.\cos x + \sin x + C)' = -\cos x + x.\sin x + \cos x = x.\sin x$
  $\Rightarrow$ Đáp án C đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (Từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = x.\cos x + \sin x + C$ thì:
  $f(x) = (x.\cos x + \sin x + C)' = \cos x - x.\sin x + \cos x$
  $\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.
- Với $F(x) = -x.\cos x + \sin x + C$ thì:
  $f(x) = (-x.\cos x + \sin x + C)' = -\cos x + x.\sin x + \cos x = x.\sin x$
  $\Rightarrow$ Đáp án C đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài tập 42. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$\int f(x)dx = \int x.\sin x.\cos x dx = \frac{1}{2}\int x\sin 2x dx.$$

Đặt: $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases}.$

Khi đó: $\int f(x)dx = -\frac{1}{4}x.\cos 2x + \int \frac{1}{4}\cos 2x dx + C$

$= -\frac{1}{4}x.\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C$, ứng với đáp án C

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (Từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \frac{1}{4}x.\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C$ thì:

$f(x) = (\frac{1}{4}x.\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C)' = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{2}x.\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x$

$= \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}x.\sin 2x \Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

- Với $F(x) = \frac{1}{4}x.\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x + C$ thì:

$f(x) = (\frac{1}{4}x.\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x + C)' = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{2}x.\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x$

$= -x.\sin x.\cos x \Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

- Với $F(x) = -\frac{1}{4}x.\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C$ thì:

$f(x) = (-\frac{1}{4}x.\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C)'$

$= -\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}x.\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x = x.\sin x.\cos x$

$\Rightarrow$ Đáp án C đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (Từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = -\frac{1}{4}x.\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x + C$ thì:

$f(x) = (-\frac{1}{4}x.\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x + C)'$

$= -\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}x.\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x$

$= -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}x.\sin 2x \Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

- Với $F(x) = -\frac{1}{4}x.\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C$ thì:

$f(x) = (-\frac{1}{4}x.\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C)'$

$= -\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}x.\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x$

$= x.\sin x.\cos x \Rightarrow$ Đáp án C đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài tập 43. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Sử dụng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = x^2 + 2 \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases}.$$

Khi đó: $F(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 2)\cos 2x + \int x.\cos 2x dx + C$

Đặt: $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}.$

Khi đó: $I = -\frac{1}{2}(x^2 + 2)\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x - \int \frac{1}{2}\sin 2x dx + C$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 + 2)\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

Với $F(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 2)\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$ thì:

$$f(x) = [-\frac{1}{2}(x^2 + 2)\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C]'$$

$$= -x.\cos 2x + (x^2 + 2)\sin 2x + \frac{1}{2}\sin 2x + x.\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x$$

$= (x^2 + 2)\sin 2x \Rightarrow$ Đáp án A đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài tập 44. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận 1*: Sử dụng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos x.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \sin x \end{cases}.$$

Khi đó: $I = \int f(x)dx = e^x.\sin x - \int e^x.\sin x.dx$. (1)

Xét tích phân $J = \int e^x.\sin x.dx$, đặt: $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{cases}.$

Khi đó: $J = -e^x.\cos x + \int e^x.\cos x.dx = -e^x.\cos x + I.$ (2)

Thay (2) vào (1), ta được:

$I = e^x.\sin x - (-e^x.\cos x + I) \Leftrightarrow I = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)e^x + C$, ứng với đáp án B.

✍ *Lời giải tự luận 2*: Ta viết:

$$\int e^x.\cos x.dx = (a + b.\cos x + c.\sin x)e^x + C. \quad (*)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (*), ta được:

$$e^x.\cos x = (-b.\sin x + c.\cos x)e^x + (a + b.\cos x + c.\sin x)e^x$$

$$= [a + (c + b)\cos x + (c - b)\sin x]e^x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b + c = 1 \\ b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0, b = c = \frac{1}{2}.$$

Vậy, ta được: $\int f(x)dx = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)e^x + C$, ứng với đáp án B.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)e^x + C$ thì:

$$f(x) = [\frac{1}{2}(\sin x + \cos x)e^x + C]' = \frac{1}{2}[(\cos x - \sin x)e^x + (\sin x + \cos x)e^x]$$

$$= \cos x.e^x + C \Rightarrow$$ Đáp án A đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài tập 45. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Sử dụng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^{3x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{cases}.$$

Khi đó: $\int f(x)dx = \frac{1}{3}x.e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}.dx = \frac{1}{3}x.e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$, ứng với đáp án B.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \frac{1}{3}x.e^{3x} + \frac{1}{9}e^{3x} + C$ thì:

$$f(x) = (\frac{1}{3}x.e^{3x} + \frac{1}{9}e^{3x} + C)' = \frac{1}{3}(e^{3x} + 3x.e^{3x}) + \frac{1}{3}e^{3x}$$

$$= \frac{2}{3}e^{3x} + x.e^{3x} \Rightarrow$$ Đáp án A bị loại.

- Với $F(x) = \frac{1}{3}x.e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$ thì:

$$f(x) = (\frac{1}{3}x.e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C)' = \frac{1}{3}(e^{3x} + 3x.e^{3x}) - \frac{1}{3}e^{3x}$$

$$= x.e^{3x} \Rightarrow$$ Đáp án B đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài tập 46. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$\int f(x)dx = \int(2x^3 + 5x^2 - 2x + 4)e^{2x}dx = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{2x} + C. \quad (1)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (1), ta được:

$$(2x^3 + 5x^2 - 2x + 4)e^{2x} = [2ax^3 + (3a + 2b)x^2 + (2b + 2c)x + c + 2d]e^{2x}. \quad (2)$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được: $\begin{cases} 2a = 2 \\ 3a + 2b = 5 \\ 2b + 2c = -2 \\ c + 2d = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -2 \\ d = 3 \end{cases}.$

Khi đó: $\int f(x)dx = (x^3 + x^2 - 2x + 3)e^{2x} + C.$

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử* – Bạn đọc tự thực hiện.

Bài tập 47. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Sử dụng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \ln 2x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{1}{3}x^3 \end{cases}.$$

Khi đó: $\int f(x)dx = \dfrac{x^3}{3}\ln 2x - \dfrac{1}{3}\int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3}\ln 2x - \dfrac{x^3}{9} + C$, ứng với đáp án B.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \dfrac{x^3}{3}\ln 2x + \dfrac{x^3}{9} + C$ thì:

$$f(x) = \left(\frac{x^3}{3}\ln 2x + \frac{x^3}{9} + C\right)' = x^2.\ln 2x + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{3}$$

$\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

- Với $F(x) = \dfrac{x^3}{3}\ln 2x - \dfrac{x^3}{9} + C$ thì:

$$f(x) = \left(\frac{x^3}{3}\ln 2x - \frac{x^3}{9} + C\right)' = x^2.\ln 2x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{3} = x^2.\ln 2x$$

$\Rightarrow$ Đáp án B đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài tập 48. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Đặt: $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^3 dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = \dfrac{1}{4}x^4 \end{cases}.$

Khi đó: $\int f(x)dx = \int x^3 \ln x dx = \dfrac{1}{4}x^4\ln x - \int \dfrac{x^3}{4}dx = \dfrac{1}{4}x^4\ln x - \dfrac{1}{16}x^4 + C.$

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \dfrac{1}{4}x^4.\ln x - \dfrac{1}{16}x^4 + C$ thì:

$$f(x) = \left(\frac{1}{4}x^4.\ln x - \frac{1}{16}x^4 + C\right)' = x^3.\ln x + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^3 = x^3.\ln x$$

$\Rightarrow$ Đáp án A đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

CHỦ ĐỀ 3. TÍCH PHÂN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN

Giả sử f(x) *là hàm số liên tục trên một khoảng* K, a *và* b *là hai phần tử bất kì của* K, F(x) *là một nguyên hàm của* f(x) *trên* K. *Hiệu số* F(b) – F(a) *được gọi là tích phân từ* a *đến* b *của* f(x) *và được kí hiệu là* $\int_a^b f(x)dx$. Ta cũng dùng kí hiệu $F(x)\Big|_a^b$ để chỉ hiệu số F(b) – F(a).

Vậy, theo định nghĩa ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Công thức trên được gọi là *công thức Niutơn – Laipnit.*

2. Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

Nếu hàm số f(x) *liên tục và không âm trên* [a, b] *thì tích phân* $\int_a^b f(x)dx$ *là diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của hàm số* y = f(x), *trục* Ox *và hai đường thẳng* x = a *và* x = b.

3. CÁC TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

Giả sử các hàm số f(x), g(x) liên tục trên khoảng K và a, b, c là ba điểm của K, dựa vào định nghĩa tích phân ta có các tính chất sau:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0.$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$
3. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, với $k \in \mathbf{R}$.
4. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$
5. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$
6. Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0.$
7. Nếu $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$
8. Nếu $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$ thì $m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a).$

9. Cho t biến thiên trên đoạn [a, b] thì $G(t) = \int_a^t f(x)dx$ là nguyên hàm của f(t) và G(a) = 0.

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1. Tích phân $\int_3^5 \frac{dx}{x}$ bằng:

A. $\ln\frac{5}{3}$. **B.** ln3. **C.** ln5. **D.** $\ln\frac{3}{5}$.

Bài tập 2. Tích phân $\int_1^e \frac{dx}{x+3}$ bằng:

A. ln(e – 2). **B.** ln(e – 7). **C.** $\ln\frac{3+e}{4}$. **D.** ln[4(e + 3)].

Bài tập 3. Tích phân $\int_{-1}^3 (x^3 + 1)dx$ bằng:

A. 24. **B.** 22. **C.** 20. **D.** 18.

Bài tập 4. Tích phân $\int_1^{16} \sqrt{x}.dx$ bằng:

A. 44. **B.** 42. **C.** 40. **D.** 38.

Bài tập 5. Tích phân $\int_0^4 (3x - e^{\frac{x}{4}})dx$ bằng:

A. 28 – 4e. **B.** 28 – 3e. **C.** 28 – 2e. **D.** 28 – e.

Bài tập 6. Tích phân $\int_1^2 \frac{dx}{(2x-1)^2}$ bằng:

A. 1. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Bài tập 7. Tích phân $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{4}{\cos^2 x} - 3\sin x\right)dx$ bằng:

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Bài tập 8. Biết $\int_0^b (2x - 4)dx = 0$, khi đó b nhận giá trị bằng:

A. b = 0 hoặc b = 2. **C.** b = 1 hoặc b = 2.
B. b = 0 hoặc b = 4. **D.** b = 1 hoặc b = 4.

Bài tập 9. Biết $\int_a^{1/\sqrt{e}} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}$ với a > 0, khi đó a nhận giá trị bằng:

A. $-\frac{1}{e}$. **B.** 1. **C.** e. **D.** $\frac{1}{e}$.

Bài tập 10. Cho $\int_0^2 f(x).dx = 3$, khi đó $\int_0^2 [4f(x) - 3]dx$ bằng:

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Bài tập 11. Cho $\int_1^3 f(x).dx = -2$ và $\int_1^3 g(x).dx = 3$, khi đó $\int_1^3 [3f(x) - g(x)]dx$ bằng:

A. –9. **B.** –6. **C.** 6. **D.** 9.

Bài tập 12. Cho $\int_1^2 f(x).dx = -4$ và $\int_1^5 f(x).dx = 6$, khi đó $\int_2^5 f(x).dx$ bằng:

A. 10. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 2.

Bài tập 13. Cho $\int_0^3 f(z).dz = 3$ và $\int_0^4 f(x).dx = 7$, khi đó $\int_3^4 f(t).dt$ bằng:

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

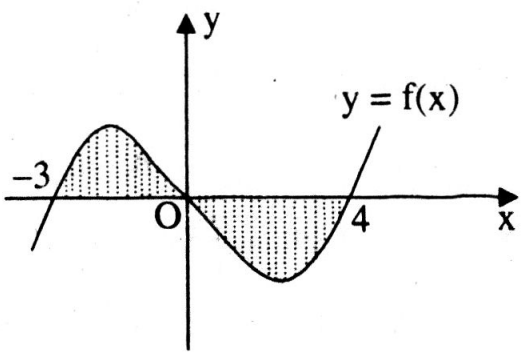
Bài tập 14. Cho đồ thị hàm số y = f(x). Diện tích hình phẳng (phần gạch dọc trong hình) là:

A. $\int_{-3}^{4} f(x)dx$.

B. $\int_{-3}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{4} f(x)dx$.

C. $\int_{-3}^{0} f(x)dx + \int_{4}^{0} f(x)dx$.

D. $\int_{0}^{-3} f(x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx$.



Bài tập 15. Biết $\int_0^{\pi/6} \sin^n x.\cos x.dx = \frac{1}{64}$, khi đó n bằng:

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Bài tập 16. Tích phân $\int_0^a (1+x)^n dx$ (với $n > 0$) bằng:

A. $\frac{(a+1)^{n+1}+1}{n+1}$.

B. $\frac{(a+1)^{n+1}-1}{n+1}$.

C. $\frac{(a+1)^n+1}{n}$.

D. $\frac{(a+1)^n-1}{n}$.

Bài tập 17. Để hàm số $f(x) = a.\sin\pi x + b$ thoả mãn $f(1) = 2$ và $\int_0^1 f(x)dx = 4$ thì a, b nhận giá trị:

A. $a=\pi, b=0$. **B.** $a=\pi, b=2$. **C.** $a=2\pi, b=2$. **D.** $a=2\pi, b=3$.

Bài tập 18. Để hàm số $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + 2$ thỏa mãn $f'(\frac{1}{2}) = -4$ và $\int_{1/2}^{1} f(x)dx = 2 - 3\ln 2$ thì a, b nhận giá trị:

A. a=0,b=1. **B.** a=1,b=-3. **C.** a=-1,b=5. **D.** $a=\frac{1}{2}, b=-1$.

Bài tập 19. Tích phân $\int_{-2}^{2} |x-1| dx$ bằng:

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Bài tập 20. Tích phân $\int_{0}^{1/2} \sqrt{(2x-1)^2} dx$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $-\frac{1}{4}$ **D.** 2.

Bài tập 21. Tích phân $\int_{0}^{3} \sqrt{x^3 - 2x^2 + x} dx$ bằng:

A. $\frac{2-\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\frac{24\sqrt{3}-8}{15}$. **C.** $\frac{24\sqrt{3}+8}{15}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}+2}{5}$.

Bài tập 22. Tích phân $\int_{-2}^{2} |x^2 - 1| dx$ bằng:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Bài tập 23. Tích phân $\int_{-3}^{5} (|x+2| - |x-2|)dx$ bằng:

A. 8. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 2.

Bài tập 24. Tích phân $\int_{0}^{2\pi} \sqrt{1+\sin x} dx$ bằng:

A. $8\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Bài tập 25. Biết $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x - 2$, tích phân $\int_{0}^{2} \max(f(x), g(x))dx$ bằng:

A. $\frac{13}{3}$. **B.** $\frac{15}{4}$. **C.** $\frac{17}{6}$. **D.** $\frac{19}{7}$.

Bài tập 26. Nếu f(x) > 0 trên [a; b] thì:

A. $\int_{a}^{b} f(x).dx > 0$. **C.** $\int_{a}^{b} f(x).dx < 0$.

B. $\int_{a}^{b} f(x).dx \geq 0$. **D.** $\int_{a}^{b} f(x).dx \leq 0$.

Bài tập 27. Nếu $f(x) > g(x)$ trên $[a; b]$ thì:

A. $\int_a^b f(x).dx > \int_a^b g(x).dx$.

B. $\int_a^b f(x).dx < \int_a^b g(x).dx$.

C. $\int_a^b f(x).dx \geq \int_a^b g(x).dx$.

D. $\int_a^b f(x).dx \leq \int_a^b g(x).dx$.

Bài tập 28. Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} x + a \text{ khi } x < 0 \\ x^2 + 1 \text{ khi } x \geq 0 \end{cases}$.

a. Xét tính liên tục của hàm số đã cho tại điểm $x_0 = 0$.

b. Với a để hàm số liên tục tại $x = 0$, hãy xác định $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

A. $\frac{11}{6}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 11.

Bài tập 29. Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi x}{2} \text{ khi } |x| \leq 1 \\ |x - 1| \text{ khi } |x| > 1 \end{cases}.$$

a. Xét tính liên tục của hàm số trên toàn trục số.

b. Với kết quả từ a) hãy xác định $\int_{-2}^{3} f(x)dx$

A. $9 - \frac{2}{\pi}$. **B.** $\frac{9}{2} - \frac{4}{\pi}$. **C.** $\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{9}{2} - \pi$.

Bài tập 30. Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x \text{ khi } |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ ax + b \text{ khi } |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

a. Xác định a, b để hàm số liên tục trên toàn trục số.

A. $a=\frac{2}{\pi}$, $b=0$. **B.** $a=\frac{2}{\pi}$, $b=1$. **C.** $a=\frac{4}{\pi}$, $b=0$. **D.** $a=\frac{4}{\pi}$, $b=1$.

b. Với kết quả từ a) hãy xác định $\int_0^{2\pi/3} f(x)dx$.

A. $\frac{7\pi}{36} - 1$. **B.** $\frac{13\pi}{36}$. **C.** $\frac{14\pi}{36} - 1$. **D.** $\frac{5\pi}{9}$.

Bài tập 31. Chứng minh rằng :

a. $\frac{\pi}{2} \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{3 + 2\sin^2 x}\, dx \leq \frac{\pi\sqrt{5}}{4}$.

b. $1 \leq \int_0^1 \frac{\sqrt{4 + x^2}}{2} dx \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Bài tập 32. Tìm các hằng số a, b để hàm số $f(x) = a.\sin\pi x + b$ thoả mãn $f(1) = 2$ và $\int_0^1 f(x)dx = 4$.

A. $a=\pi, b=2$. **B.** $a=\pi, b=0$. **C.** $a=2\pi, b=1$. **D.** $a=2\pi, b=3$.

Bài tập 33. Tìm a, b để hàm số $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + 2$ thỏa mãn $f(\frac{1}{2}) = -4$ và $\int_{1/2}^{1} f(x)dx = 2 - 3\ln 2$.

A. $a=-1, b=3$. **B.** $a=1, b=-3$. **C.** $a=-3, b=1$. **D.** $a=3, b=-1$.

Bài tập 34. Tính đạo hàm của các hàm số:

a. $F(x) = \int_{2x}^{x^2} \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^2+1}}$.

b. $G(x) = \int_{\sin^2 x}^{\sin x^2} (\sin t^2 + \cos 2t)dt$.

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có: $\int_3^5 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^e = \ln 5 - \ln 3 = \ln\frac{5}{3}$, ứng với đáp án A.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS, bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

∫dx 1 a^{bc} ALPHA X , 3 , 5 = 0.5108

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Dựa theo tính chất 8, bằng cách lập luận:

$$\frac{1}{5} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{3}, \text{ với } \forall x \in [3; 5] \Rightarrow \frac{1}{5}(5-3) \le \int_3^5 \frac{dx}{x} \le \frac{1}{3}(5-3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{5} \le \int_3^5 \frac{dx}{x} \le \frac{2}{3} \Rightarrow \text{Các đáp án B, C và D bị loại.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài tập 2. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$\int_1^e \frac{dx}{x+3} = (\ln|x+3|)\Big|_1^e = \ln(e+3) - \ln 4 = \ln\frac{3+e}{4}, \text{ ứng với đáp án C.}$$

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS, bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

∫dx (ALPHA X + 3) ^ (−) 1 , 1 , ALPHA e)

= 0.3573

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Ta lần lượt:

- Vì $\frac{1}{x+3} > 0$, với $\forall x \in [1;e] \Rightarrow \int_1^e \frac{dx}{x+3} > 0 \Rightarrow$ Đáp án A bị loại.
- Vì $e - 7 < 0$ (vi phạm điều kiện của lôgarit) nên đáp án B bị loại.
- Vì $\frac{1}{x+3} < 1$, với $\forall x \in [1;e] \Rightarrow \int_1^e \frac{dx}{x+3} < \int_1^e dx = e - 1 \Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài tập 3. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$\int_{-1}^{3}(x^3+1)dx = \left(\frac{1}{4}x^4 + x\right)\Big|_{-1}^{3} = \left(\frac{1}{4}3^4 + 3\right) - \left(\frac{1}{4}(-1)^4 - 1\right) = 24,$$

ứng với đáp án A.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS, bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

∫dx ALPHA X SHIFT x⁴ + 1 . (−) 1 . 3) = 24

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài tập 4. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có: $\int_1^{16}\sqrt{x}dx = \int_1^{16}x^{1/2}.dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_{-1}^{3} = \frac{2}{3}(16^{3/2} - 1)\Big|_1^{16} = 42,$

ứng với đáp án B.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS, bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

∫dx √ ALPHA X . 1 . 16) = 42

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài tập 5. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có: $\int_0^4(3x - e^{\frac{x}{4}})dx = (\frac{3}{2}x^2 - 4e^{\frac{x}{4}})\Big|_0^4 = (24 - 4e) - (0 - 4)$

$= 28 - 4e$, ứng với đáp án A.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS, bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

∫dx 3 ALPHA X − SHIFT eˣ ALPHA X a^b 4 . 0 . 4)

= 17.126

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài tập 6. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$\int_1^2 \frac{dx}{(2x-1)^2} = -\frac{1}{2(2x-1)}\Big|_1^2 = -\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3},$$ ứng với đáp án C.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS, bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

∫dx 1 a^{bx} (2 ALPHA X − 1) x^2 , 1 , 2) = 0.3333

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài tập 7. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\frac{4}{\cos^2 x}-3\sin x\right)dx=\left(4\tan x+3\cos x\right)\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}=8,$$ ứng với đáp án D.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS, bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

MODE MODE MODE MODE 2 *(Thiết lập đơn vị đo rad)*

∫dx (4 ÷ (cos ALPHA X) x^2 − 3 sin ALPHA X ,

(−) SHIFT π a^{bx} 4 , SHIFT π a^{bx} 4) = 8

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài tập 8. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$0=\int_0^b(2x-4)dx=(x^2-4x)\Big|_0^b=b^2-4b\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\b=4\end{array}\right.,$$ ứng với đáp án B.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Dựa theo tính chất 1, chúng ta thấy ngay b = 0 thỏa mãn điều kiện đầu bài. Do đó, các đáp án C và D bị loại.
- Với b = 2, ta được:

$$\int_0^2(2x-4)dx=(x^2-4x)\Big|_0^2=4-8=-4\neq 0\Rightarrow$$ Đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử* kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:

- Dựa theo tính chất 1, chúng ta thấy ngay b = 0 thỏa mãn điều kiện đầu bài. Do đó, các đáp án C và D bị loại.
- Với b = 2, ta ấn:

MODE 1

∫dx 2 ALPHA X − 4 , 0 , 2) = −4

⇒ Đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử* kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:

- Với b = 1, ta ấn:

MODE 1

∫dx 2 ALPHA X − 4 , 0 , 1) = −3

⇒ Các đáp án C và D bị loại.

- Với b = 4, ta sử dụng dấu con trỏ trên máy tính để sửa 1 thành 4 rồi ấn:

  [=] [0]

  $\Rightarrow$ b = 4 thỏa mãn $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài tập 9. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có: $\frac{1}{2} = \int_a^{1/\sqrt{e}} \frac{dx}{x} = (\ln|x|)\Big|_a^{1/\sqrt{e}} = \ln\frac{1}{\sqrt{e}} - \ln|a| \Leftrightarrow \ln|a| = -1$

$\Leftrightarrow |a| = \frac{1}{e} \overset{a>0}{\Rightarrow} a = \frac{1}{e}$, ứng với đáp án D.

Bạn đọc đề xuất thêm hai cách:

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử.*

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử* kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS.

Bài tập 10.*Đáp số trắc nghiệm* C.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có: $\int_0^2 [4f(x) - 3]dx = 4\int_0^2 f(x).dx - 3\int_0^2 dx = 4\times 3 - 3\times x\Big|_0^2 = 6,$

Bài tập 11.*Đáp số trắc nghiệm* A.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có: $\int_1^3 [3f(x) - g(x)]dx = 3\int_1^3 f(x).dx - \int_1^3 g(x).dx = 3(-2) - 3 = -9,$

Bài tập 12.*Đáp số trắc nghiệm* A.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có: $\int_1^5 f(x).dx = \int_1^2 f(x).dx + \int_2^5 f(x).dx$

$\Leftrightarrow \int_2^5 f(x).dx = \int_1^5 f(x).dx - \int_1^2 f(x).dx = 6 + 4 = 10$, ứng với đáp án A.

Bài tập 13.*Đáp số trắc nghiệm* B.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có: $\int_0^4 f(t).dt = \int_0^3 f(t).dt + \int_3^4 f(t).dt$

$\Leftrightarrow \int_3^4 f(t).dt = \int_0^4 f(t).dt - \int_0^3 f(t).dt = \int_0^4 f(x).dx - \int_0^3 f(z).dz$

$= 7 - 3 = 4$, ứng với đáp án B.

Bài tập 14.*Đáp số trắc nghiệm* C.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có ngay:

$S = \int_{-3}^0 f(x)dx - \int_0^4 f(x)dx \int_{-3}^0 f(x)dx + \int_4^0 f(x)dx$, ứng với đáp án C.

Bài tập 15.*Đáp số trắc nghiệm* D.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$\frac{1}{64} = \int_0^{\pi/6} \sin^n x.\cos x.dx = \int_0^{\pi/6} \sin^n x.d(\sin x) = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1}\Big|_0^{\pi/6} = \frac{1}{(n+1).2^{n+1}}$$

$\Leftrightarrow (n+1).2^{n+1} = 64 \Leftrightarrow n = 3$, ứng với đáp án D.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (Từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

- Với n = 6 thì:

$$\int_0^{\pi/6} \sin^6 x.\cos x.dx = \int_0^{\pi/6} \sin^6 x.d(\sin x) = \frac{\sin^7 x}{7}\Big|_0^{\pi/6} = \frac{1}{7.2^7}$$

$$= \frac{1}{896} \neq \frac{1}{64} \Rightarrow \text{Đáp án A bị loại.}$$

- Với n = 5 thì:

$$\int_0^{\pi/6} \sin^5 x.\cos x.dx = \int_0^{\pi/6} \sin^5 x.d(\sin x) = \frac{\sin^6 x}{6}\Big|_0^{\pi/6} = \frac{1}{6.2^6}$$

$$= \frac{1}{384} \neq \frac{1}{64} \Rightarrow \text{Đáp án B bị loại.}$$

- Với n = 4 thì: $\int_0^{\pi/6} \sin^4 x.\cos x.dx = \int_0^{\pi/6} \sin^4 x.d(\sin x) = \frac{\sin^5 x}{5}\Big|_0^{\pi/6} = \frac{1}{5.2^5}$

$$= \frac{1}{160} \neq \frac{1}{64} \Rightarrow \text{Đáp án C bị loại.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (Từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

- Với n = 3, ta được:

$$\int_0^{\pi/6} \sin^3 x.\cos x.dx = \int_0^{\pi/6} \sin^3 x.d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4}\Big|_0^{\pi/6} = \frac{1}{4.2^4} = \frac{1}{64}.$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp tự luận*: Ta có:

$$I = \int_0^{\pi/6} \sin^n x.\cos x.dx = \int_0^{\pi/6} \sin^n x.d(\sin x) = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1}\Big|_0^{\pi/6} = \frac{1}{(n+1).2^{n+1}}.$$

- Với n = 6 thì $I = \frac{1}{896} \neq \frac{1}{64}$ nên đáp án A bị loại.
- Với n = 5 thì $I = \frac{1}{384} \neq \frac{1}{64}$ nên đáp án B bị loại.
- Với n = 4 thì $I = \frac{1}{160} \neq \frac{1}{64}$ nên đáp án C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử* (Từ trái qua phải) sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS: Ta lần lượt:

- Với n = 6 thì ấn:

MODE 1

MODE MODE MODE MODE 2 (*Thiết lập đơn vị đo rad*)

$\int$dx (sin ALPHA X) ^ 6 × cos ALPHA X) ,

0 , SHIFT π $a^{b/c}$ 6) = 1⌟896

$\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

- Sử dụng phím trỏ để thay 6 bằng 5, rồi ấn:

= 1⌟384

- Sử dụng phím trỏ để thay 5 bằng 4, rồi ấn:

= 1⌟160

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử* (Từ phải qua trái) sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS: Ta lần lượt:

- Với n = 3 thì ấn:

MODE 1

MODE MODE MODE MODE 2 *(Thiết lập đơn vị đo rad)*

$\int$dx (sin ALPHA X) ^ 3 × cos ALPHA X) ,

0 , SHIFT π $a^{b/c}$ 6) = 1⌟64

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài tập 16. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$I = \int_0^a (1+x)^n d(x+1) = \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^a = \frac{(a+1)^{n+1}-1}{n+1}$$, ứng với đáp án B.

Bài tập 17. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta lần lượt xét các giả thiết:

- Với f(1) = 2 thì $a.\sin\pi + b = 2 \Leftrightarrow b = 2.$ (1)
- Với $\int_0^1 f(x)dx = 4$ thì:

$$4 = \int_0^1 (a.\sin\pi x + b)dx = (-\frac{a}{\pi}\cos\pi x + bx)\Big|_0^1 = \frac{2a}{\pi} + b \overset{(1)}{\Rightarrow} a = \pi.$$

Vậy, với $a = \pi$, b = 2 thoả mãn điều kiện đầu bài.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Với $a = \pi$, b = 0 thì $f(x) = \pi.\sin\pi x$, khi đó:

  $f(1) = \pi.\sin\pi = 0$, không thỏa mãn $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.
- Với $a = \pi$, b = 2 thì $f(x) = \pi.\sin\pi x + 2$, khi đó:

  $f(1) = \pi.\sin\pi + 2 = 2$, thỏa mãn.

  $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (\pi.\sin\pi x + 2)dx = (-\cos\pi x + 2x)\Big|_0^1 = 4$, thỏa mãn.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử* kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS

- Với $a = \pi$, b = 0 thì $f(x) = \pi.\sin\pi x$, khi đó:

  $f(1) = \pi.\sin\pi = 0$, không thỏa mãn $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

- Với $a = \pi$, $b = 2$ thì $f(x) = \pi.\sin\pi x + 2$, khi đó:

  $f(1) = \pi.\sin\pi + 2 = 2$, thỏa mãn.

  $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (\pi.\sin\pi x + 2)dx = 4$, thỏa mãn

  bằng cách thực hiện theo thứ tự:

  MODE 1

  MODE MODE MODE MODE 2 *(Thiết lập đơn vị đo rad)*

  ∫dx SHIFT π × sin ALPHA (SHIFT π ALPHA X)

  , 0 , 1) = 4

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài tập 18. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta lần lượt xét các giả thiết:

- Với $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4$ thì: $f'(x) = -\frac{2a}{x^3} - \frac{b}{x^2} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = -16a - 4b$

  $\Rightarrow -16a - 4b = -4 \Leftrightarrow 4a + b = 1.$ (1)

- Với $\int_{1/2}^1 f(x)dx = 2 - 3\ln 2$ thì:

$$2 - 3\ln 2 = \int_{1/2}^1 \left(\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + 2\right)dx = \left(-\frac{a}{x} + b\ln|x| + 2x\right)\Big|_{1/2}^1$$

$$= a + b\ln 2 + 1 \Rightarrow a + b\ln 2 = 1 - 3\ln 2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a = 1$ và $b = -3$, ứng với đáp án B.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Ta lần lượt đánh giá:

- Với $a = 0$, $b = 1$ thì $f(x) = \frac{1}{x} + 2$, khi đó:

  $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4$, thỏa mãn,

  $\int_{1/2}^1 f(x)dx = \int_{1/2}^1 \left(\frac{1}{x} + 2\right)dx = (\ln|x| + 2x)\Big|_{1/2}^1 = \ln 2 + 1 \neq 1 - 3\ln 2$

  $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

- Với $a = 1$, $b = -3$ thì $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 2$, khi đó:

  $f'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4$, thỏa mãn,

  $\int_{1/2}^1 f(x)dx = \int_{1/2}^1 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 2\right)dx = \left(-\frac{1}{x} - 3\ln|x| + 2x\right)\Big|_{1/2}^1$

  $= 2 - 3\ln 2$, thỏa mãn.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài tập 19. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$\int_{-2}^{2}|x-1|dx = \int_{-2}^{1}|x-1|dx + \int_{1}^{2}|x-1|dx = \int_{-2}^{1}(1-x)dx + \int_{1}^{2}(x-1)dx$$

$$= \left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{1} + \left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_{1}^{2} = 5, \text{ ứng với đáp án D.}$$

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS, bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

∫dx √ (ALPHA X − 1) x² , (−) 2 , 2) = 5

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài tập 20. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$\int_{0}^{1/2}\sqrt{(2x-1)^2}dx = \int_{0}^{1/2}|2x-1|dx = \int_{0}^{1/2}(1-2x)dx = \left(x-x^2\right)\Big|_{0}^{1/2} = \frac{1}{4}.$$

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS, bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

∫dx √ (2 ALPHA X − 1) x² , 0 , 2) = 1⌟4

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài tập 21. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$\int_{0}^{3}\sqrt{x^3-2x^2+x}dx = \int_{0}^{3}\sqrt{x(x-1)^2}dx = \int_{0}^{3}|x-1|\sqrt{x}dx$$

$$= -\int_{0}^{1}(x-1)\sqrt{x}dx + \int_{1}^{3}(x-1)\sqrt{x}dx$$

$$= -\int_{0}^{1}(x^{3/2}-x^{1/2})dx + \int_{1}^{3}(x^{3/2}-x^{1/2})dx$$

$$= -\left(\frac{2}{5}x^{5/2}-\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\Big|_{0}^{1} + \left(\frac{2}{5}x^{5/2}-\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\Big|_{1}^{3} = \frac{24\sqrt{3}+8}{15}$$

ứng với đáp án C.

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS bạn đọc tự thực hiện.

Bài tập 22. ***Đáp số trắc nghiệm*** D.

✍ *Lời giải tự luận*: Xét biểu thức $y = x^2 - 1$ trên đoạn $[-2; 2]$:

$y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2		-1		1		2	$+\infty$
y	//////		+	0	−	0	+	//////	

Do đó :

$$\int_{-2}^{2}|x^2-1|dx = \int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx + \int_{-1}^{1}(1-x^2)dx + \int_{1}^{2}(x^2-1)dx$$

$$= (\frac{1}{3}x^3 - x)\Big|_{-2}^{-1} + (x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_{-1}^{1} + (\frac{1}{3}x^3 - x)\Big|_{1}^{2}$$

$$= (\frac{1}{3}x^3 - x)\Big|_{-2}^{-1} + (x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_{-1}^{1} + (\frac{1}{3}x^3 - x)\Big|_{1}^{2} = 4.$$

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS, bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

∫dx √(ALPHA X x² − 1) x² , (−) 2 , 2) = 4

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài tập 23. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Xét dấu x + 2 và x – 2 trên [– 3, 5], được:

x	–3		–2		2		5
x + 2		–	0	+		+	
x – 2		–		–	0	+	

Khi đó: $I = -\int_{-3}^{-2}4dx + \int_{-2}^{2}2xdx + \int_{2}^{5}4dx = -4x\Big|_{-3}^{-2} + x^2\Big|_{-2}^{2} + 4x\Big|_{2}^{5} = 8.$

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS bạn đọc tự thực hiện.

Bài tập 24. ***Đáp số trắc nghiệm*** B.

✍ *Lời giải tự luận*: Ta có:

$$I = \int_{0}^{2\pi}\sqrt{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}dx = \int_{0}^{2\pi}\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|dx$$

$$= \sqrt{2}\int_{0}^{2\pi}\left|\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right|dx = \sqrt{2}\left[\int_{0}^{3\pi/2}\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})dx - \int_{3\pi/2}^{2\pi}\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})dx\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[-2\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\Big|_{0}^{3\pi/2} + 2\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\Big|_{3\pi/2}^{2\pi}\right] = 4\sqrt{2}.$$

✍ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS, bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

MODE MODE MODE MODE 2 (*Thiết lập đơn vị đo rad*)

∫dx √(1 + sin ALPHA X) , 0 , 2 SHIFT π)

= 5.6569

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài tập 25. ***Đáp số trắc nghiệm*** C.

✍ *Lời giải tự luận*: Xét hiệu:

$f(x) - g(x) = x^2 - 3x + 2 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le x \le 2.$

Do đó:

$$\int_0^2 \max\big(f(x),g(x)\big)dx = \int_0^1 \max\big(f(x),g(x)\big)dx + \int_1^2 \max\big(f(x),g(x)\big)dx$$

$$= \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 (3x-2)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \left(\frac{3x^2}{2} - 2x\right)\Big|_1^2 = \frac{17}{6}.$$

Bài tập 26. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Gọi F(x) là một nguyên hàm của f(x) và với a < c < b, ta có:

$$\int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a) = F'(c)(b-a) = f(c)(b-a) > 0,$$

ứng với đáp án A.

Bài tập 27. ***Đáp số trắc nghiệm*** A.

✍ *Lời giải tự luận*: Gọi F(x), G(x) theo thứ tự là một nguyên hàm của f(x), g(x) và với a < c < b, ta có:

$$\int_a^b f(x).dx - \int_a^b g(x).dx = [F(b) - F(a)] - [G(b) - G(a)]$$

$$= F'(c)(b-a) - G'(c)(b-a) = f(c)(b-a) - g(c)(b-a)$$

$$= [f(c) - g(c)](b-a) > 0, \text{ ứng với đáp án A.}$$

Bài tập 28.

a. Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2+1) = 1$ và $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x+a) = a$,

$f(0) = 1$.

Vậy :

- Nếu $a = 1$ thì $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 1$ nên hàm số liên tục tại $x_0 = 0$.
- Nếu $a \neq 1$ thì $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ nên hàm số gián đoạn tại $x_0 = 0$.

b. Với $a = 1$, ta có:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 (x+1)dx + \int_0^1 (x^2+1)dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_{-1}^0 + \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\Big|_0^1 = \frac{11}{6}.$$

Bài tập 29. Viết lại hàm số dưới dạng:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{khi } |x| > 1 \\ \cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{khi } |x| \le 1 \\ 1-x^2 & \text{khi } |x| < -1 \end{cases}.$$

a. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

- Xét tính liên tục của hàm số tại điểm x = 1, ta có:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x-1) = 0 \text{ và } \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \cos\frac{\pi x}{2} = 0$$

$f(1) = 0$

Suy ra, hàm số liên tục tại điểm x = 1.

- Xét tính liên tục của hàm số tại điểm x = -1 ta có:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \cos\frac{\pi x}{2} = 0 \text{ và } \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (1-x) = 0$$

$$f(-1) = 0$$

Suy ra, hàm số liên tục tại điểm x = −1.

Vậy, hàm số liên tục trên toàn trục số.

b. Ta có ngay: $\int_{-2}^{3} f(x)dx = \int_{-2}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx$

$$= \int_{-2}^{-1} (1-x)dx + \int_{-1}^{1} \cos\frac{\pi x}{2}dx + \int_{1}^{3} (x-1)dx$$

$$= (x - \frac{1}{2}x^2)\Big|_{-2}^{-1} + \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}\Big|_{-1}^{1} + (\frac{1}{2}x^2 - x)\Big|_{1}^{3} = \frac{9}{2} - \frac{4}{\pi}.$$

Bài tập 30.

a. Để hàm số liên tục trên **R** điều kiện là hàm số liên tục tại các điểm $x = \pm\frac{\pi}{2}$.

- Tại điểm $x = \frac{\pi}{2}$, ta có: $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} (ax + b) = \frac{a\pi}{2} + b$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \sin x = 1 = f(\frac{\pi}{2}).$$

Do đó, để hàm số liên tục tại điểm $x = \frac{\pi}{2}$ điều kiện là $\frac{a\pi}{2} + b = 1$. (1)

- Tại điểm $x = -\frac{\pi}{2}$, ta có: $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \sin x = -1 = f(-\frac{\pi}{2})$

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} (ax + b) = -\frac{a\pi}{2} + b.$$

Do đo, để hàm số liên tục tại điểm $x = -\frac{\pi}{2}$ điều kiện là $-\frac{a\pi}{2} + b = -1$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a = \frac{2}{\pi}$ và b = 0.

b. Ta có ngay:

$$\int_{0}^{2\pi/3} f(x)dx = \int_{0}^{\pi/2} f(x)dx + \int_{\pi/2}^{2\pi/3} f(x)dx = \int_{0}^{\pi/2} \sin x.dx + \int_{\pi/2}^{2\pi/3} (ax+b)dx$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} \sin x.dx + \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{2}{\pi}x dx = -\cos x\Big|_{0}^{\pi/2} + \frac{1}{\pi}x^2\Big|_{\pi/2}^{2\pi/3} = \frac{7\pi}{36} - 1.$$

Bài tập 31.

a. Với $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ ta có nhận xét:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \le \sin x \le 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \le \sin^2 x \le 1 \Leftrightarrow 4 \le 3 + 2\sin^2 x \le 5$$

$$\Leftrightarrow 2 \le \sqrt{3+2\sin^2 x} \le \sqrt{5} \Rightarrow \int_{\pi/4}^{\pi/2} 2dx \le \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{3+2\sin^2 x} \le \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{5}dx$$

$$\Leftrightarrow 2x\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \le \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{3+2\sin^2 x} \le \sqrt{5}\, x\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \le \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{3+2\sin^2 x} \le \frac{\pi\sqrt{5}}{4}, \text{ đpcm.}$$

b. Với $x \in [0, 1]$ ta có nhận xét:

$$0 \le x^2 \le 1 \Rightarrow 4 \le 4 + x^2 \le 5 \Leftrightarrow 2 \le \frac{\sqrt{4+x^2}}{2} \le \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 dx \le \int_0^1 \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}dx \le \int_0^1 \frac{\sqrt{5}}{2}dx \Leftrightarrow x\Big|_0^1 \le \int_0^1 \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}dx \le \frac{\sqrt{5}}{2}\Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow 1 \le \int_0^1 \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}dx \le \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ đpcm.}$$

Bài tập 32. Ta lần lượt xét các giả thiết:

- Với $f(1) = 2$ thì:

$$a.\sin\pi + b = 2 \Leftrightarrow b = 2. \qquad (1)$$

- Với $\int_0^1 f(x)dx = 4$ thì:

$$4 = \int_0^1 (a.\sin\pi x + b)dx = (-\frac{a}{\pi}\cos\pi x + bx)\Big|_0^1 = \frac{2a}{\pi} + b \overset{(1)}{\Rightarrow} a = \pi.$$

Vậy, với $a = \pi$, $b = 2$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 33. Ta lần lượt xét các giả thiết:

- Với $f'(\frac{1}{2}) = -4$ thì:

$$f'(x) = -\frac{2a}{x^3} - \frac{b}{x^2} \Rightarrow f'(\frac{1}{2}) = -16a - 4b$$

$$\Rightarrow -16a - 4b = -4 \Leftrightarrow 4a + b = 1. \qquad (1)$$

- Với $\int_{1/2}^1 f(x)dx = 2 - 3\ln 2$ thì:

$$2 - 3\ln 2 = \int_{1/2}^1 (\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + 2)dx = (-\frac{a}{x} + b\ln|x| + 2x)\Big|_{1/2}^1$$

$$= a + b\ln 2 + 1$$

$\Rightarrow a + b\ln 2 = 1 - 3\ln 2.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a = 1$ và $b = -3$.

Bài tập 34.

a. Ta biến đổi:

$$F(x) = \int_{2x}^{0} \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^2+1}} + \int_{0}^{x^2} \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^2+1}} = -\int_{0}^{2x} \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^2+1}} + \int_{0}^{x^2} \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Từ đó, suy ra:

$$F'(x) = -(2x)' \frac{(2x)^2}{\sqrt{(2x)^2+1}} + (x^2)' \frac{(x^2)^2}{\sqrt{(x^2)^2+1}} = \frac{-8x^2}{\sqrt{4x^2+1}} + \frac{2x^5}{\sqrt{(x^4+1}}.$$

b. Ta biến đổi:

$$G(x) = \int_{\sin^2 x}^{0} (\sin t^2 + \cos 2t)dt + \int_{0}^{\sin x^2} (\sin t^2 + \cos 2t)dt$$

$$= -\int_{0}^{\sin^2 x} (\sin t^2 + \cos 2t)dt + \int_{0}^{\sin x^2} (\sin t^2 + \cos 2t)dt$$

Từ đó, suy ra:

$$G'(x) = -(\sin^2 x)'[\sin(\sin^2 x)^2 + \cos 2(\sin^2 x)] + $$
$$+ (\sin x^2)'[\sin(\sin x^2) + \cos 2(\sin x^2)].$$
$$= -2\cos x.\sin x[\sin(\sin^2 x)^2 + \cos 2(\sin^2 x)] +$$
$$+ 2x.\cos x^2[\sin(\sin x^2) + \cos 2(\sin x^2)].$$

CHỦ ĐỀ 4. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

Giả sử phải tính $\int_a^b f(x)dx$ trong đó f(x) là hàm số liên tục trên đoạn [a, b].

1.1. Đổi biến dạng 1

Định nghĩa: *Phương pháp đổi biến dạng 1 là việc sử dụng một hàm số* $x = u(t)$ *làm biến mới.*

Định lí: *Giả sử* $\alpha < \beta$, *nếu:*

1. *Hàm số* $x = u(t)$ *có đạo hàm liên tục trên đoạn* $[\alpha, \beta]$.
2. *Hàm số hợp* $f(u(t))$ *được xác định trên đoạn* $[\alpha, \beta]$.
3. $u(\alpha) = a$ *và* $u(\beta) = b$.

thì ta có: $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[u(t)].u'(t)dt$.

1.2. Đổi biến dạng 2

Định nghĩa: *Phương pháp đổi biến dạng 2 là việc sử dụng một hàm số* $t = v(x)$ *làm biến mới.*

Như vậy, ở phương pháp này ta biến đổi f(x) thành g(v(x)).v'(x), rồi đặt t = v(x), thì dt = v '(x) đối xứng. Do đó, ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g[v(x)].v'(x)dx = \int_{v(a)}^{v(b)} g(t)dt .$$

2. PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Định lí: *Nếu* u(x) *và* v(x) *là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn* [a, b] *thì:*

$$\int_a^b u(x).v'(x)dx = [u(x).v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b v(x).u'(x)dx$$

hay $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN VÀ BÀI TẬP

Bài toán 1: Phương pháp đổi biến số dạng 1.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để sử dụng phương pháp đổi biến dạng 1 trong tính tích phân:

$I = \int_a^b f(x)dx$, với giả thiết hàm số f(x) liên tục trên [a, b]

ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chọn $x = \varphi(t)$, trong đó $\varphi(t)$ là hàm số được lựa chọn một cách thích hợp (ảnh của φ nằm trong tập xác định của f).

Bước 2: Lấy vi phân $dx = \varphi'(t)dt$, giả sử $\varphi'(t)$ liên tục.

Bước 3: Ta lựa chọn một trong hai hướng :

Hướng 1 : Nếu tính được các cận α và β tương ứng theo a và b (với $a = \varphi(\alpha)$ và $b = \varphi(\beta)$) thì ta được:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)).\varphi'(t)dt .$$

Hướng 2 : Nếu không tính được dễ dàng các cận tương ứng theo a và b thì ta lựa chọn việc xác định nguyên hàm, từ đó suy ra giá trị của tích phân xác định (trong trường hợp này φ phải là đơn ánh để diễn tả kết quả hàm số của t thành hàm số của x).

Chú ý:

1. Các dấu hiệu dẫn tới việc lựa chọn ẩn phụ kiểu trên thông thường là:

Dấu hiệu	**Cách chọn**
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\begin{cases} x = \lvert a \rvert \sin t \text{ với } -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \\ x = \lvert a \rvert \cos t \text{ với } 0 \le t \le \pi \end{cases}$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$\begin{cases} x = \frac{\lvert a \rvert}{\sin t} \text{ với } t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\} \\ x = \frac{\lvert a \rvert}{\cos t} \text{ với } t \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \end{cases}$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$\begin{cases} x = \lvert a \rvert \operatorname{tg} t \text{ với } -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ x = \lvert a \rvert \operatorname{cotg} t \text{ với } 0 < t < \pi \end{cases}$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x = a\cos 2t$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x = a + (b-a)\sin^2 t$

2. Để minh họa việc lựa chọn một trong hai hướng trên, ta có ví dụ:

   a. Với $I = \int_0^{1/2} f(x)dx$, việc lựa chọn ẩn phụ $x = \sin t, -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ cho phép ta lựa chọn hướng 1, bởi khi đó:

   - Với $x = 0$, suy ra $t = 0$.
   - Với $x = \frac{1}{2}$, suy ra $t = \frac{\pi}{6}$.

   b. Với $I = \int_0^{1/3} f(x)dx$, việc lựa chọn ẩn phụ $x = \sin t, -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ ta thường lựa chọn hướng 2, bởi khi đó:

   - Với $x = 0$, suy ra $t = 0$.
   - Với $x = \frac{1}{3}$, ta không chỉ ra được số đo góc t.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1. Tính các tích phân:

a. $I = \int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \sqrt{1-x^2}\,dx$.

A. $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}-1}{4}$. **C.** $\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

B. $\frac{\pi}{24} + \frac{2-\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\frac{\pi}{24} - \frac{2-\sqrt{3}}{8}$.

b. $I = \int_{-1}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$.

A. $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{16-3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}-1}{6}$. **D.** $\frac{6-2\sqrt{2}}{9}$.

Bài tập 2. Tính các tích phân:

a. $I = \int_{1}^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

A. $\frac{3}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{2}{\sqrt{7}}$. **D.** $\frac{3}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

b. $I = \int_{0}^{1} x\sqrt{1-x}\,dx$.

A. $\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{2}{11}$. **C.** $\frac{3}{13}$. **D.** $\frac{4}{15}$.

Bài tập 3. Tính các tích phân:

a. $I = \int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-1}.dx}{x^3}$.

A. $\frac{\pi-2}{8}$. **B.** $\frac{\pi-2}{4}$. **C.** $\frac{\pi-2}{3}$. **D.** $\frac{\pi-2}{2}$.

b. $I = \int_{3}^{4} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-4}}$.

A. $4\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{5}}{2} + \ln\frac{3+\sqrt{5}}{4+2\sqrt{3}}$. **C.** $4\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{5}}{2} - \ln\frac{3-\sqrt{5}}{4-2\sqrt{3}}$.

B. $4\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{5}}{2} + \ln\frac{3-\sqrt{5}}{.4-2\sqrt{3}}$. **D.** $4\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{5}}{2} - \ln\frac{3-\sqrt{5}}{4+2\sqrt{3}}$.

c. $I = \int_{4/\sqrt{3}}^{4} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$.

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{\pi}{4}$. **C.** $\frac{\pi}{8}$. **D.** $\frac{\pi}{12}$.

d. $I = \int \frac{2x.dx}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

Bài tập 4. Tính các tích phân:

a. $I = \int_{1}^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}\,dx$.

A. $\frac{4-\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{8-2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{4-\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{8+2\sqrt{2}}{3}$.

b. $I = \int_{0}^{3} \frac{dx}{x^2+3}$.

A. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

c. $I = \int_{0}^{1} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+3)}$

A. $\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{12\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

d. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-1}}$.

Bài tập 5. Tính các tích phân:

a. $I = \int_{-2}^{0} \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx$.

A. $\pi - 1$. **B.** $\pi - 2$. **C.** $\pi - 3$. **D.** $3\pi - 4$.

b. $I = \int_{-1}^{1/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$.

A. $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bài tập 6. Tính các tích phân:

a. $I = \int_{2}^{3} \sqrt{(x-1)(5-x)}dx$.

A. $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

b. $I = \int_{3}^{5} \sqrt{(x-1)(9-x)}dx$.

A. $\frac{\pi}{3}+\sqrt{2}$. **B.** π . . **C.** $\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$. **D.** $\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$

Bài toán 2: Ph. . pháp đổi biến số dạng 2

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để tính tích phân: $I=\int_a^b f(x)dx$

bằng phương pháp đổi biến dạng 2, ta thực hiện các bước:

Bước 1: Chọn:

- $t=\varphi(x)$, có đạo hàm liên tục
- $g(t)$ liên tục trên tập giá trị của φ sao cho $g(\varphi(x)).\varphi'(x)=f(x)$.

Bước 2: Khi đó: $\left[\int g(t)dt\right]_{t=\varphi(x)}=\int f(x)dx$ và $\int_a^b f(x)dx=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt$.

***Lưu ý*:** Các dấu hiệu dẫn tới việc lựa chon ẩn phụ kiểu trên thông thường là:

Dấu hiệu	Có thể chọn
Hàm $f(\varphi'(x), \varphi(x))$	$t=\varphi(x)$
Hàm có mẫu số	t là mẫu số
Hàm $f(x, \sqrt{\varphi(x)})$	$t=\sqrt{\varphi(x)}$
Hàm $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$	• Với $x+a>0$ và $x+b>0$, đặt: $t=\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}$ • Với $x+a<0$ và $x+b<0$, đặt: $t=\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b}$
Hàm $f(x)=\frac{a.\sin x+b.\cos x}{c.\sin x+d.\cos x+e}$	$t=\text{tg}\frac{x}{2}$ (với $\cos\frac{x}{2}\neq 0$)

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 7. Tính các tích phân sau:

a. $I=\int_0^1 x(1-x)^{19}dx$.

A. $\frac{1}{420}$. **B.** $\frac{1}{380}$. **C.** $\frac{1}{342}$. **D.** $\frac{1}{462}$.

b. $I=\int_0^1 (1+3x)(1+2x+3x^2)^{10}dx$.

A. $\frac{6^{12}-1}{24}$. **B.** $\frac{6^{11}-1}{22}$. **C.** $\frac{6^{10}-1}{20}$. **D.** $\frac{6^9-1}{18}$.

Bài tập 8. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^1 \frac{x^5 dx}{x^2+1}$.

A. $\frac{\ln 2-2}{4}$. **B.** $\frac{\ln 2-2}{2}$. **C.** $\frac{\ln 2+2}{4}$. **D.** $\frac{\ln 2+2}{2}$.

b. $I = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{(x^2-1)dx}{x^4+1}$.

A. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{3-2\sqrt{2}}{5}$. **C.** $\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{3+2\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Bài tập 9. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int \frac{dx}{x(x^6+1)^2}$. b. $I = \int \frac{dx}{x(x+1)^2}$.

Bài tập 10. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$.

A. $\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{2}{11}$. **C.** $\frac{3}{13}$. **D.** $\frac{4}{15}$.

b. $I = \int_0^{1/4} \frac{x.dx}{\sqrt{x}-1}$.

A. $\frac{2}{3} - \ln 2$. **B.** $\frac{4}{3} - 2\ln 2$. **C.** $1 - \frac{1}{2}\ln 2$. **D.** $1 + \frac{1}{2}\ln 2$.

Bài tập 11. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^{\pi/6} \frac{tg^4 x dx}{\cos 2x}$. b. $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x.\cos^3 x.dx}{1+\cos^2 x}$.

Bài tập 12. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos x.dx}{6-5\sin x+\sin^2 x}$.

A. $\ln \frac{9}{10}$. **B.** $\ln \frac{10}{9}$. **C.** $\ln \frac{5}{4}$. **D.** $\ln \frac{4}{5}$.

b. $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x.dx}{11-7\sin x-\cos^2 x}$.

A. $\frac{8}{5} \ln \frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{3} \ln \frac{8}{5}$. **C.** $\frac{1}{5} \ln \frac{8}{3}$. **D.** $\frac{8}{3} \ln \frac{1}{5}$.

Bài tập 13. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,dx$.

A. π. **B.** 2π. **C.** 3π. **D.** $2\pi + 1$.

b. $I = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x - \sin^3 x}\,dx}{\sin^3 x}$.

A. $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{2}+1}{3}$. **C.** $\frac{4\sqrt{2}+2}{3}$. **D.** $\frac{4\sqrt{2}-2}{3}$.

Bài tập 14. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_1^e \frac{\sqrt{2+\ln x}}{2x}dx$.

A. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3}$.

b. $I = \int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$.

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Bài tập 15. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_{-1}^{1} \frac{\cos x\,dx}{e^x + 1}$.

A. sin1. **B.** cos1. **C.** tg1. **D.** cotg1.

b. $I = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx$.

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{\pi}{4}$. **C.** $\frac{3\pi}{4}$. **D.** $\frac{2\pi}{3}$.

Bài tập 16. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_{-1}^{1} \frac{x^4 + \sin x}{x^2+1}dx$.

b. $I = \int_{-1}^{1} (e^{x^2}\sin x + e^2.x^2)dx$.

Bài tập 17. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^{\pi} x\sin^3 x\,dx$.

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{\pi}{4}$. **C.** $\frac{3\pi}{4}$. **D.** $\frac{2\pi}{3}$.

b. $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{3^x+1}dx$.

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{\pi}{4}$. **C.** $\frac{\pi}{6}$. **D.** $\frac{\pi}{12}$.

Bài toán 3: Phương pháp tích phân từng phần.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$. (1)

Để sử dụng (1) trong việc tính tích phân $I = \int_a^b f(x)dx$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Biến đổi tích phân ban đầu về dạng: $I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x).f_2(x)dx$.

Bước 2: Đặt: $\begin{cases} u = f_1(x) \\ dv = f_2(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du \\ v \end{cases}$.

Bước 3: Khi đó $I = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$.

Chú ý: Khi sử dụng phương pháp tích phân từng phần để tính tích phân chúng ta cần tuân thủ các nguyên tắc sau:

1. Lựa chọn phép đặt dv sao cho v được xác định một cách dễ dàng.
2. Tích phân $\int_a^b vdu$ được xác định một cách dễ dàng hơn so với I.
3. Chúng ta cần nhớ các dạng cơ bản sau :

   Dạng 1: $I = \int x^\alpha.\ln x dx$, với $\alpha \in \mathbf{R}\backslash\{-1\}$ khi đó đặt $u = \ln x$.

   Dạng 2: $I = \int P(x)e^{\alpha x}dx$ (hoặc $I = \int P(x)e^{\alpha x}dx$) với P là một đa thức thuộc $\mathbf{R}[X]$ và $\alpha \in \mathbf{R}^*$ khi đó đặt $u = P(x)$.

   Dạng 3: $I = \int P(x)\sin\alpha x dx$ (hoặc $\int P(x)\cos\alpha x dx$) với P là một đa thức thuộc $\mathbf{R}[X]$ và $\alpha \in \mathbf{R}^*$ khi đó đặt $u = P(x)$.

   Dạng 4: $I = \int e^{ax}\cos(bx)$ (hoặc $\int e^{ax}\sin(bx)$) với $a, b \neq 0$ khi đó đặt $u = \cos(bx)$ (hoặc $u = \sin(bx)$).

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 18. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^{\pi/3} x.\cos x dx$.

A. $\frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}$. **B.** $\frac{\pi\sqrt{3}-1}{2}$. **C.** $\frac{\pi\sqrt{3}-1}{6}$. **D.** $\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$.

b. $I = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

A. $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \ln\frac{\sqrt{6}}{2}$.

C. $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \ln\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Bài tập 19. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^{\pi/2} e^{-x} \sin 3x dx$.

A. $\frac{3-e^{-\pi/2}}{10}$. **B.** $\frac{1+e^{-\pi/2}}{2}$. **C.** $\frac{1+e^{-\pi/2}}{4}$. **D.** $\frac{3+e^{-\pi/2}}{10}$.

b. $I = \int_0^{\pi/2} e^{-x} \cos 3x dx$.

A. $\frac{1-3e^{-\pi/2}}{10}$. **B.** $\frac{1+3e^{-\pi/2}}{10}$. **C.** $\frac{3-e^{-\pi/2}}{2}$. **D.** $\frac{3+e^{-\pi/2}}{2}$.

Bài tập 20. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^{\pi} e^{2x} \sin^2 x dx$.

A. $\frac{1}{8}(e^{2\pi} - 1)$. **B.** $\frac{1}{4}(e^{2\pi} - 1)$. **C.** $\frac{1}{2}(e^{2\pi} - 1)$. **D.** $\frac{1}{2}(e^{2\pi} + 1)$.

b. $I = \int_1^{e^{\pi}} \cos(\ln x) dx$.

A. $\frac{1}{4}(e^{\pi} - 1)$. **B.** $\frac{1}{2}(e^{\pi} - 1)$. **C.** $\frac{1}{2}(e^{\pi} + 1)$. **D.** $-\frac{1}{2}(e^{\pi} + 1)$.

Bài tập 21. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^{\ln 2} x.e^{-x} dx$.

A. $\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$. **B.** $\frac{1}{2}(1 + \ln 2)$. **C.** $\frac{1}{2}(\ln 2 - 1)$. **D.** $\frac{1}{4}(1 + \ln 2)$.

b. $I = \int_1^{e} \ln^3 x dx$.

A. $6 - 2e$. **B.** $4 - e$. **C.** $4 - 2e$. **D.** $3 - 4e$.

Bài tập 22. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_1^{e} x \ln^2 x dx$.

A. $\frac{e^2+1}{2}$. **B.** $\frac{e^2-1}{2}$. **C.** $\frac{e^2+1}{4}$. **D.** $\frac{e^2-1}{4}$.

b. $I = \int_0^{1} x \ln(x^2 + 1) dx$.

A. $2\ln 2 - 1$. **B.** $2\ln 2 + 1$. **C.** $\ln 2 - \frac{1}{2}$. **D.** $\ln 2 + \frac{1}{2}$.

Bài tập 23. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_1^e (1 - \ln x)^2 dx$.

A. $e - 2$. **B.** $2e - 3$. **C.** $3e - 4$. **D.** $4e + 3$.

b. $I = \int_1^2 \frac{\ln x.dx}{x^2}$.

A. $\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$. **B.** $\frac{1}{2}(1 + \ln 2)$. **C.** $\frac{1}{2}(\ln 2 - 1)$. **D.** $\frac{1}{4}(1 + \ln 2)$.

Bài tập 24. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^{\pi/2} x.\cos^2 x dx$.

A. $\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2} + 1$. **B.** $\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} - 1$. **D.** $\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

b. $I = \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$.

A. $\pi^2 - 4$. **B.** $\pi^2 + 4$. **C.** $2\pi^2 - 3$. **D.** $2\pi^2 + 3$.

Bài tập 25. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^1 e^x \sin^2(\pi x) dx$.

A. $\frac{1}{8}(e + 1)$. **B.** $\frac{1}{4}(e - 1)$. **C.** $\frac{1}{3}(e - 1)$. **D.** $\frac{1}{2}(e + 1)$.

b. $I = \int_0^{\pi/2} e^x \cos^2 x dx$.

A. $\frac{2e^{\pi/2} - 3}{5}$. **B.** $\frac{e^{\pi/2} - 3}{3}$. **C.** $\frac{2e^{\pi/2} - 1}{4}$. **D.** $\frac{e^{\pi/2} + 2}{3}$.

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách đặt ẩn phụ sau:

Cách 1: Đặt $x = \sin t, -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ suy ra $dx = \cos t.dt$

Đổi cận :

- Với $x = \frac{1}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{6}$.
- Với $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó : $I = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sqrt{1 - \sin^2 t}.\cos t.dt = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos^2 t.dt = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/4} (1 + \cos 2t).dt$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{\pi}{24} + \frac{2 - \sqrt{3}}{8}.$$

Cách 2: Đặt $x = \cos t,\ t \in [0, \pi]$ suy ra $dx = -\sin t.dt$.

Đổi cận :

- Với $x = \frac{1}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{3}$.
- Với $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó : $I = -\int_{\pi/3}^{\pi/4} \sqrt{1-\cos^2 t}.\sin t.dt = -\int_{\pi/3}^{\pi/4} \sin^2 t.dt = -\frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/4}(1-\cos 2t)dt$

$$= -\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\pi/3}^{\pi/4} = \frac{\pi}{24} + \frac{2-\sqrt{3}}{8}.$$

b. Đặt $x = 2\sin t,\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ suy ra $dx = 2\cos t.dt$.

Đổi cận:

- Với $x = -1$ thì $t = -\frac{\pi}{6}$.
- Với $x = 2$ thì $t = \frac{\pi}{2}$.

Khi đó: $I = \int_{-\pi/6}^{\pi/2} .\sqrt{4-4\sin^2 t}.2\cos t.dt = 4\int_{-\pi/6}^{\pi/2} .|\cos t|.\cos t.dt$

$$= 4\int_{-\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 t.dt = 2\int_{-\pi/6}^{\pi/2}(1+\cos 2t).dt = 2\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\pi/6}^{\pi/2} = \frac{16-3\sqrt{3}}{12}.$$

Yêu cầu: Bạn đọc hãy thực hiện việc tính tích phân trên bằng việc lựa chọn ẩn phụ theo các cách sau:

a. $x = 2\cos t$ với $t \in [0, \pi]$.

b. $x^2 = 4\cos 2t$ với $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Bài tập 2.

a. Đặt $x = 2\sin t,\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ suy ra $dx = 2\cos t.dt$.

Ta lựa chọn hướng xác định nguyên hàm :

$$\left[\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}\right]_{x=2\sin t} = \int \frac{\cos t.dt}{\cos^3 t} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C = \frac{\sin t}{\cos t} + C$$

$$= \frac{2\sin t}{2\cos t} + C = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + C.$$

Khi đó: $I = \left.\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right|_1^{3/2} = \frac{3}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$.

lb. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách đặt ẩn phụ sau:

Cách 1: Với $x \in [0, 1]$ đặt $x = \sin^2 t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ suy ra $dx = \sin 2t.dt$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$.
- Với $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{2}$.

Khi đó: $I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}.\sin 2t.dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t.\cos t.\sin 2t.dt$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin t.\sin^2 2t.dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \sin t.(1-\cos 4t).dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (\sin t - \cos 4t.\sin t).dt = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} (2\sin t - \sin 5t + \sin 3t).dt$$

$$= \frac{1}{8}(-2\cos t + \frac{1}{5}\cos 5t - \frac{1}{3}\cos 3t)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{15}.$$

Cách 2: Với $x \in [0, 1]$ đặt $x = \cos 2t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ suy ra $dx = -2\sin 2t.dt$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = \frac{\pi}{4}$.
- Với $x = 1$ thì $t = 0$.

Khi đó: $I = -2\int_{\pi/4}^{0} \cos 2t\sqrt{1-\cos 2t}.\sin 2t.dt = \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \sin t.\sin 4t.dt$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\pi/4} (\cos 3t - \cos 5t).dt = \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{1}{3}\sin 3t - \frac{1}{5}\sin 5t)\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{5}.\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{4}{15}.$$

Yêu cầu: Bạn đọc hãy thực hiện việc tính tích phân trên bằng việc lựa chọn ẩn phụ $x = \cos^2 t$ với $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Bài tập 3.

a. Đặt $x = \frac{1}{\sin 2t}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$ suy ra $dx = -\frac{2\cos 2t.dt}{\sin^2 2t}$.

Đổi cận :

- $x = \sqrt{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{8}$.
- $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó : $I = -\int_{\pi/4}^{\pi/8} \frac{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 2t} - 1}.\frac{2\cos 2t.dt}{\sin^2 2t}}{\frac{1}{\sin^3 2t}} = -\int_{\pi/4}^{\pi/8} \frac{\cot g2t.\frac{2\cos 2t.dt}{\sin^2 2t}}{\frac{1}{\sin^3 2t}}$

$$= 2\int_{\pi/8}^{\pi/4} \cos^2 2t.dt = \int_{\pi/8}^{\pi/4} (1+\cos 4t).dt = (t + \frac{1}{4}\sin 4t)\Big|_{\pi/8}^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

Yêu cầu: Bạn đọc hãy thực hiện việc tính tích phân trên bằng việc lựa chọn ẩn phụ $x = \frac{1}{\sin t}$ hoặc $x = \frac{1}{\cos t}$.

b. Đặt $x = \frac{2}{\sin 2t}$, vì $x \in [3, 4]$ nên $3 \le \frac{2}{\sin 2t} \le 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \sin 2t \le \frac{2}{3}$ do đó, để thoả mãn tính chất đơn ánh ta chọn $0 < t < \frac{\pi}{4}$.

Ta có $dx = -\frac{4\cos 2tdt}{\sin^2 2t}$, và lựa chọn hướng xác định nguyên hàm :

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-4}} = -\int \frac{8dt}{\sin^3 2t} = -8\int \frac{(\cos^2 t + \sin^2 t)^2 dt}{8\sin^3 t\cos^3 t}$$

$$= -\int (\cot gt.\frac{1}{\sin^2 t} + tgt.\frac{1}{\cos^2 t} + \frac{2}{\sin t\cos t})dt$$

$$= -\int (\cot gt.\frac{1}{\sin^2 t} + tgt.\frac{1}{\cos^2 t} + \frac{2}{tgt}\frac{1}{\cos^2 t})$$

$$= -[-\int \cot gt.d(\cot gt) + \int tgt.d(tgt) + 2\int \frac{d(tgt)}{tgt}]$$

$$= -(-\frac{1}{2}\cot g^2 t + \frac{1}{2}tg^2 t + 2\ln|tgt|) + C$$

$$= \frac{1}{2}(\cot g^2 t - tg^2 t) - 2\ln|tgt| + C$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} - \ln|x - \sqrt{x^2-4}| + C.$$

Khi đó : $I = (\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} - \ln|x - \sqrt{x^2-4}|)\Big|_3^4 = 4\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{5}}{2} + \ln\frac{3-\sqrt{5}}{4-2\sqrt{3}}$.

Chú ý : Trong lời giải trên sở dĩ ta có :

$$\cot g^2 t - tg^2 t = 4x\sqrt{x^2-4} \text{ và } tgt = x - \sqrt{x^2-4}$$

là bởi : $\cot g^2 t - tg^2 t = \frac{\cos^4 t - \sin^4 t}{\cos^2 t.\sin^2 t} = \frac{4\cos 2t}{\sin^2 2t} = \frac{4\sqrt{1-\sin^2 2t}}{\sin^2 2t}$

$$= \frac{2}{\sin 2t}\sqrt{\frac{4}{\sin^2 2t} - 4} = x\sqrt{x^2-4}.$$

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\sin^2 t}{\sin t \cos t} = \frac{1-\cos 2t}{\sin 2t} = \frac{1-\sqrt{1-\sin^2 2t}}{\sin 2t}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sin 2t} - \sqrt{\frac{4}{\sin^2 2t} - 4}\right) = \frac{1}{2}(x - \sqrt{x^2-4}).$$

c. Đặt $x = \frac{2}{\sin t}$, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ suy ra $dx = -\frac{2\cos t.dt}{\sin^2 t}$.

Đổi cận :

- $x = 4 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$.
- $x = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$.

Khi đó : $I = \int\limits_{\pi/3}^{\pi/6} \frac{-\frac{2\cos t.dt}{\sin^2 t}}{\frac{2}{\sin t}\sqrt{\frac{4}{\sin^2 t} - 4}} = -\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/3}^{\pi/6} dt = -\frac{1}{2}\, t\Big|_{\pi/3}^{\pi/6} = \frac{\pi}{12}$.

Chú ý : Cũng có thể sử dụng phép đổi biến $t = \frac{2}{x}$, bằng cách viết :

$$I = \int\limits_{\sqrt{3}/2}^{1/2} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = -\frac{1}{2}\int\limits_{\sqrt{3}/2}^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Rồi tiếp tục sử dụng phép đổi biến $t = \sin u$, $u \in (0, \frac{\pi}{2})$, ta được:

$$I = -\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/3}^{\pi/6} du = \frac{1}{2}\, u\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\pi}{12}.$$

d. Đặt $t = x + \sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow t - x = \sqrt{x^2-1} \Rightarrow x = \frac{t^2+1}{2t}$ và $dx = \frac{t^2-1}{2t^2}dt$.

Khi đó: $I = \int \frac{2xdx}{x+\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{2.\frac{t^2+1}{2t}.\frac{t^2-1}{2t^2}dt}{t} = \int \frac{(t^4-1)dt}{2t^4} = \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{t^4}\right)dt$

$$= \frac{1}{2}(t + \frac{1}{3t^3}) + C = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2-1}) + \frac{1}{6(x+\sqrt{x^2-1})^3} + C.$$

Chú ý : Bài toán trên còn có thể được giải bằng phương pháp phân tích, cụ thể:

$$I = \int \frac{2xdx}{x+\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{2x(x-\sqrt{x^2-1})dx}{x^2-x^2+1} = \int 2x^2dx - \int 2x\sqrt{x^2-1}dx$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - \int \sqrt{x^2-1}d(x^2-1) + C = \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}\sqrt{(x^2-1)^3} + C.$$

Bài tập 4.

a. Đặt $x = tgt, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ suy ra $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$.

Đổi cận :

- $x = \sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$.
- $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó : $I = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} tgt.\sqrt{1+tg^2t}.\frac{dt}{\cos^2 t} = -\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{d(\cos t)}{\cos^4 t} = \frac{1}{3\cos^3 t}\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{8-2\sqrt{2}}{3}$.

b. Đặt $x = \sqrt{3}\, tgt, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ suy ra $dx = \frac{\sqrt{3}dt}{\cos^2 t} = \sqrt{3}\,(1 + tg^2t)dt$.

Đổi cận :

- $x = 0$ thì $t = 0$.
- $x = 3$ thì $t = \frac{\pi}{3}$.

Khi đó : $I = \int\limits_0^{\pi/3} \frac{\sqrt{3}(1+tg^2t)dt}{3tg^2t+3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int\limits_0^{\pi/3} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} t\Big|_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

c. Ta có: $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+3)} = \frac{a}{x^2+1} + \frac{b}{x^2+3} = \frac{(a+b)x^2+3a+b}{(x^2+1)(x^2+3)}$

$\Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ 3a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow a = -b = \frac{1}{2}$.

Khi đó: $I = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+3}\right)dx = \frac{1}{2}\underbrace{\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+1}}_{I_1} - \frac{1}{2}\underbrace{\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+3}}_{I_2}$. (1)

Với I_1 đặt $x = tgt, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ suy ra $dx = \frac{dt}{\cos^2 t} = (1 + tg^2t)dt$.

Đổi cận :

- $x = 0$ thì $t = 0$.
- $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó : $I_1 = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{(1+tg^2t)dt}{tg^2t+1} = \int\limits_0^{\pi/4} dt = t\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}$. (2)

Với I_2 đặt $x = \sqrt{3}\, tgt, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ suy ra $dx = \frac{\sqrt{3}dt}{\cos^2 t} = \sqrt{3}\,(1 + tg^2t)dt$.

Đổi cận:

- $x = 0$ thì $t = 0$.
- $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{6}$.

Khi đó: $I_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\pi/6} \frac{(1+tg^2t)dt}{tg^2t+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\pi/6} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} t\Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$. (3)

Thay (2), (3) vào (1), ta được $I = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right)$.

d. Biến đổi I về dạng: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}}}$.

Đặt $t = x - \frac{1}{2} \Rightarrow dx = dx$.

Khi đó: $I = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 5/4}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2 - \frac{5}{4}}\right| + C = \ln\left|x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x - 1}\right| + C$.

Chú ý: Trong lời giải trên chúng ta đã sử dụng kết quả:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C.$$

Bài tập 5.

a. Đặt $x = 2.\cos 2t$, $t \in (0, \frac{\pi}{2}]$ suy ra $dx = -4\sin 2t.dt$,

Đổi cận:

- $x = -2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.
- $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó : $I = \int_{\pi/2}^{\pi/4} \sqrt{\frac{2+2.\cos 2t}{2-2.\cos 2t}}(-4.\sin 2t.dt) = -4\int_{\pi/2}^{\pi/4} |\cot gt|.\sin 2t.dt$

$$= -8\int_{\pi/2}^{\pi/4} \cos^2 t.dt = 4\int_{\pi/4}^{\pi/2} (1+\cos 2t)dt = (4t + 2\sin 2t)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \pi - 2.$$

b. Đặt $x = \cos 2t$, $t \in (0, \frac{\pi}{2}]$ suy ra $dx = -2\sin 2t.dt$,

Đổi cận:

- $x = -1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.
- $x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$.

Khi đó :

$$I = \int_{\pi/2}^{\pi/6} \sqrt{\frac{1+\cos 2t}{1-\cos 2t}}(-2\sin 2t.dt) = -2\int_{\pi/2}^{\pi/6} |\cot gt|.\sin 2t.dt$$

$$= 2\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 t.dt = \int_{\pi/6}^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt = \left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Bài tập 6.

a. Đặt $x = 1 + 4\sin^2 t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ suy ra $dx = 4\sin 2t.dt$.

Đổi cận :

- $x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$.
- $x = 3 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó : $I = \int_{\pi/6}^{\pi/4} 4\sin^2 2t.dt = 2\int_{\pi/6}^{\pi/4}(1-\cos 4t)dt = 2\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

b. Đặt $x = 1 + 8\sin^2 t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ suy ra $dx = 8\sin 2t.dt$.

Đổi cận:

- $x = 3 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$.
- $x = 5 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó : $I = \int_{\pi/6}^{\pi/4} 16\sin^2 2t.dt = 8\int_{\pi/6}^{\pi/4}(1-\cos 4t)dt = 8\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$.

Bài tập 7.

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Đặt $t = 1 - x$ suy ra $x = 1 - t$ và $dx = -dt$.

Đổi cận:

- $x = 0 \Rightarrow t = 1$.
- $x = 1 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó: $I = -\int_1^0 (1-t).t^{19}dt = \int_0^1 (t^{19} - t^{20})dt = \left(\frac{t^{20}}{20} - \frac{t^{21}}{21}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{420}$.

Cách 2: Sử dụng đồng nhất thức :

$$x = (x-1) + 1$$

ta được :

$$x(1-x)^{19} = -[(x-1)+1](x-1)^{19} = -(x-1)^{20} - (x-1)^{19}.$$

Khi đó : $I = -\int_0^1 (x-1)^{20}dx - \int_0^1 (x-1)^{19}dx = -\left[\frac{(x-1)^{21}}{21} + \frac{(x-1)^{20}}{20}\right]\Big|_0^1$

$= -\frac{1}{21} + \frac{1}{20} = \frac{1}{420}$.

Tổng quát: Với tích phân bất định :

$I = \int x(ax+b)^{\alpha}dx$, với $a \neq 0$

sử dụng đồng nhất thức : $x = \frac{1}{a}.ax = \frac{1}{a}[(ax+b) - b]$

ta được : $x(ax+b)^{\alpha} = \frac{1}{a}[(ax+b) - b](ax+b)^{\alpha} = \frac{1}{a}[(ax+b)^{\alpha+1} - (ax+b)^{\alpha}]$.

Khi đó : $I = \frac{1}{a}[\int (ax+b)^{\alpha+1}dx - \int (ax+b)^{\alpha}dx]$

$= \frac{1}{a^2}[\int (ax+b)^{\alpha+1}d(ax+b) - \int (ax+b)^{\alpha}d(ax+b)]$.

Ta xét ba trường hợp :

- Với $\alpha = -2$, ta được: $I = \frac{1}{a^2}[\int (ax+b)^{-1}d(ax+b) - \int (ax+b)^{-2}d(ax+b)]$

$= \frac{1}{a^2}[\ln|ax+b| + \frac{1}{ax+b}] + C$.

- Với $\alpha = -1$, ta được: $I = \frac{1}{a^2}[\int d(ax+b) - \int (ax+b)^{-1}d(ax+b)]$

$= \frac{1}{a^2}[ax + b - \ln|ax+b|] + C$.

- Với $\alpha \in R\backslash\{-2, -1\}$, ta được : $I = \frac{1}{a^2}[\frac{(ax+b)^{\alpha+2}}{\alpha+2} + \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}] + C$.

b. Đặt $t = 1 + 2x + 3x^2$ suy ra $dt = (2+6x)dx = 2(1+3x)dx$.

Đổi cận:

- $x = 0 \Rightarrow t = 1$.
- $x = 1 \Rightarrow t = 6$.

Khi đó: $I = \frac{1}{2}\int_1^6 t^{10}dt = \frac{1}{22}t^{11}\Big|_1^6 = \frac{6^{11}-1}{22}$.

Bài tập 8.

a. Đặt $t = x^2 + 1$ suy ra $x^2 = t - 1$ và $dt = 2xdx$.

Đổi cận:

- $x = 0 \Rightarrow t = 1$.
- $x = 1 \Rightarrow t = 2$.

Khi đó: $I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^4.2xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(t-1)^2 dt}{t} = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(t-2+\frac{1}{t}\right)dt$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2 - 2t + \ln|t|\right)\Big|_1^2 = \frac{\ln 2 - 2}{4}.$$

b. Ta lựa chọn hướng xác định nguyên hàm:

$$\int \frac{(x^2-1)dx}{x^4+1} = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+x^2}dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{(x+\frac{1}{x})^2-2}dx.$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$ suy ra $dt = (1 - \frac{1}{x^2})dx$.

Khi đó: $\int \frac{(x^2-1)dx}{x^4+1} = \int \frac{dt}{t^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + C$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right| + C.$$

Suy ra: $I = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right|\Bigg|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{3+2\sqrt{2}}{5}$.

Chú ý: Với tích phân $I = \int_\alpha^\beta \frac{x^2-1}{1+x^4}dx$ ta có thể trình bày bằng cách xét hàm số:

$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}$$

Khi đó: $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right)' = \frac{x^2-1}{x^4+1}$.

Do đó $I = F(x)\Big|_\alpha^\beta$.

Bài tập 9.

a. Đặt $t = x^3$ suy ra $dt = 3x^2dx$ và $\frac{dx}{x(x^6+1)^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{dt}{t(t^2+1)^2}$.

Khi đó: $I = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t(t^2+1)^2}$.

Ta có:

$$\frac{1}{t(t^2+1)^2} = \frac{a}{t} + \frac{bt}{t^2+1} + \frac{ct}{(t^2+1)^2} = \frac{(a+b)t^4 + (2a+b+c)t^2 + a}{t(t^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b+c=0 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}.$$

Khi đó: $\dfrac{dt}{t(t^2+1)^2} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{t}{t^2+1} - \dfrac{t}{(t^2+1)^2}$.

Do đó:

$$I = \int [\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1} - \frac{t}{(t^2+1)^2}]dt = \ln|t| - \frac{1}{2}\ln|t^2+1| + \frac{1}{2}.\frac{1}{t^2+1} + C$$

$$= \frac{1}{2}(\ln\frac{t^2}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1}) + C = \frac{1}{2}(\ln\frac{x^6}{x^6+1} + \frac{1}{x^6+1}) + C.$$

b. Ta có: $\dfrac{1}{x(x+1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2} = \dfrac{(a+b)x^2 + (2a+b+c)x + a}{x(x-1)(x+1)}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b+c=0 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}.$$

Khi đó: $\dfrac{1}{x(x+1)^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Do đó: $I = \int [\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2}]dx$

$$= \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} + C.$$

Chú ý: Cũng có thể trình bày theo cách đặt $t = x + 1 \Rightarrow dt = dx$. Khi đó:

$$I = \int \frac{dt}{(t-1)t^2} = \int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right)dt = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + \frac{1}{t} + C$$

$$= \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} + C.$$

Bài tập 10.

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Đặt $t = 1 - x$ suy ra $x = 1 - t$ và $dx = -dt$.

Đổi cận:

- $x = 0 \Rightarrow t = 1$.
- $x = 1 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó: $I = -\int_1^0 (1-t)\sqrt{t}dt = \int_0^1 (t^{1/2} - t^{3/2})dt = (\dfrac{2}{3}t^{3/2} - \dfrac{2}{5}t^{5/2})\Big|_0^1 = \dfrac{4}{15}$.

Cách 2: Đặt $t = \sqrt{1-x}$ suy ra $t^2 = 1 - x$ và $2tdt = -dx$.

Đổi cận:

- $x = 0 \Rightarrow t = 1$.
- $x = 1 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó: $I = -\int_1^0 (1-t^2)t.2tdt = 2\int_0^1 (t^2 - t^4)dt = 2(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5)\Big|_0^1 = \frac{4}{15}$.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Đặt $t = \sqrt{x}$ suy ra $x = t^2$ và $dx = 2tdt$.

Đổi cận:

- $x = 0 \Rightarrow t = 0$.
- $x = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$.

Khi đó: $I = \int_0^{1/2} \frac{t^2.2t.dt}{t-1} = 2\int_0^{1/2} \left(t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1}\right)dt$

$= 2(\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t + \ln|t-1|)\Big|_0^{1/2} = \frac{4}{3} - 2\ln 2.$

Cách 2: Đặt $t = \sqrt{x} - 1$ suy ra $x = (t+1)^2$ và $dx = 2(t+1)dt$.

Đổi cận:

- $x = 0 \Rightarrow t = -1$.
- $x = \frac{1}{4} \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$.

Khi đó: $I = \int_{-1}^{-1/2} \frac{(t+1)^2.2(t+1).dt}{t} = 2\int_{-1}^{-1/2} \frac{(t+1)^3 dt}{t} = 2\int_{-1}^{-1/2} \left(t^2 + 3t + 3 + \frac{1}{t}\right)dt$

$= 2(\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 3t + \ln|t|)\Big|_{-1}^{-1/2} = \frac{4}{3} - 2\ln 2.$

Bài tập 11.

a. Đặt $t = tgx$ suy ra $\cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ và:

$$dt = \frac{dx}{\cos^2 x} = (1 + tg^2x).dx \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Đổi cận:

- $x = 0 \Rightarrow t = 0$.
- $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Khi đó: $I = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{t^4 \frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{t^4 dt}{1-t^2} = -\int_0^{1/\sqrt{3}} \left(t^2 + 1 + \frac{1}{t^2-1}\right)dt$

$$= -(\frac{1}{3}t^3 + t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|)\Big|_0^{1/\sqrt{3}} = -\frac{10}{9\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right|.$$

b. Đặt $t = 1 + \cos^2 x$ suy ra $dt = -2\sin x.\cos x dx$.

Đổi cận :

- $x = 0 \Rightarrow t = 2$.
- $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Ta có : $\frac{\sin x.\cos^3 x dx}{1+\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x.\cos x.\sin x dx}{1+\cos^2 x} = -\frac{(t-1)dt}{2t}$

$$= -\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{t})dt.$$

Khi đó : $I = \frac{1}{2}\int_1^2 (1 - \frac{1}{t})dt = \frac{1}{2}(t - \ln|t|)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$.

Bài tập 12.

a. Đặt $t = \sin x$ suy ra $dt = \cos x dx$.

Đổi cận:

- $x = 0 \Rightarrow t = 0$.
- $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$.

Khi đó : $I = \int_0^{1/2} \frac{dt}{6 - 5t + t^2} = \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2}\right)dt = \ln\left|\frac{t-3}{t-2}\right| \Big|_0^{1/2} = \ln\frac{10}{9}$.

b. Đặt $t = \sin x$ suy ra $dt = \cos x dx$.

Đổi cận:

- $x = 0 \Rightarrow t = 0$.
- $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Khi đó : $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x.dx}{\sin^2 x - 7\sin x + 10} = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 - 7t + 10} = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(\frac{1}{t-5} - \frac{1}{t-2}\right)dt$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-5}{t-2}\right| \Big|_0^1 = \frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}.$$

Bài tập 13.

a. Đặt $t = \sqrt{x}$ suy ra $t^2 = x$ và $2tdt = dx$.

Đổi cận:

- $x = 0 \Rightarrow t = 0$.
- $x = \pi^2 \Rightarrow t = \pi$.

Khi đó : $I = \int_0^{\pi} 2t\sin t.dt$.

Đặt $t = \pi - u$ suy ra $dt = -du$.

Đổi cận :

- $t = \pi \Rightarrow u = 0.$
- $t = 0 \Rightarrow u = \pi.$

Khi đó : $I = -2\int_{\pi}^{0}(\pi - t).\sin(\pi - t).dt = 2\int_{0}^{\pi}(\pi - t).\sin t.dt$

$$= 2\pi\int_{0}^{\pi}\sin t.dt - \int_{0}^{\pi}t.\sin t.dt = -2\pi.\cos t\Big|_{0}^{\pi} - I$$

$\Leftrightarrow 2I = 4\pi \Leftrightarrow I = 2\pi.$

b. Đặt $t = \sin x$ suy ra $dt = \cos x dx$.

Đổi cận:

- $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1.$
- $x = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}.$

Khi đo : $I = \int_{\pi/6}^{\pi/2}\dfrac{\sqrt{(1-\sin^2 x)\sin x}dx}{\sin^3 x} = \int_{\pi/6}^{\pi/2}\dfrac{\sqrt{\sin x}.\cos x.dx}{\sin^3 x} = \int_{1/2}^{1}t^{-\frac{5}{2}}dt$

$$= -\frac{2}{3}t^{-3/2}\Big|_{1}^{1/2} = \frac{4\sqrt{2} - 2}{3}.$$

Bài tập 14.

a. Đặt $t = \ln x$ suy ra $dt = \dfrac{dx}{x}$.

Đổi cận:

- Với $x = 1$ thì $t = 0.$
- Với $x = e$ thì $t = 1.$

Khi đó: $I = \int_{0}^{1}\dfrac{\sqrt{2+t}}{2}dt = \dfrac{1}{3}(2+t)^{3/2}\Big|_{0}^{1} = \dfrac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{3}.$

b. Đặt $t = \sqrt{x}$ suy ra $t^2 = x$ và $2tdt = dx.$

Đổi cận:

- $x = 0 \Rightarrow t = 0.$
- $x = 1 \Rightarrow t = 1.$

Khi đó : $I = \int_{0}^{1}2te^t dt.$ (*)

Ta đi xác định nguyên hàm của hàm số: $f(x) = 2te^t$, giả sử:

$F(t) = \int 2te^t dt = (at + b)e^t + C.$ (1)

Lấy đạo hàm hai vế của (1), ta được:

$2te^t = (at + a + b)e^t.$ (2)

Đồng nhất hệ số, ta được:

$$\begin{cases} a = 2 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow F(t) = (2t - 2)e^t + C.$$

Do đó: $I = (2t - 2)e^t\Big|_0^1 = 2.$

Chú ý: Để tính được giá trị của I trong (*) chúng ta có thể sử dụng phương pháp tích phân từng phần, cụ thể đặt:

$$\begin{cases} u = t \\ dv = e^t dt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = e^t \end{cases}.$$

Khi đó: $I = 2(te^t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt) = 2(e - e^t\Big|_0^1) = 2.$

Bài tập 15.

a. Viết lại I về dạng : $I = \int_{-1}^{0} \frac{\cos x dx}{e^x + 1} + \int_0^1 \frac{\cos x dx}{e^x + 1}.$ (1)

Xét tính phân $J = \int_{-1}^{0} \frac{\cos x dx}{e^x + 1}$ bằng cách đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt.$

Đổi cận :

- $x = -1 \Rightarrow t = 1.$
- $x = 0 \Rightarrow t = 0.$

Khi đó:

$$J = -\int_1^0 \frac{\cos(-t)dt}{e^{-t} + 1} = \int_0^1 \frac{e^t \cos t dt}{e^t + 1} = \int_0^1 \frac{e^x \cos x dx}{e^x + 1}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$I = \int_0^1 \frac{e^x \cos x dx}{e^x + 1} + \int_0^1 \frac{\cos x dx}{e^x + 1} = \int_0^1 \frac{(e^x + 1)\cos x dx}{e^x + 1} = \int_0^1 \cos x dx$$

$$= \sin x\Big|_0^1 = \sin 1.$$

b. Biến đổi I về dạng: $I = \int_{-1}^{0} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 + 2^x} dx + \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 + 2^x} dx.$ (1)

Xét tích phân $I_1 = \int_{-1}^{0} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 + 2^x} dx$ bằng cách đặt $x = -t$ thì $dx = -dt.$

Đổi cận:

- $x = -1 \Rightarrow t = 1.$
- $x = 0 \Rightarrow t = 0.$

Khi đó:

$$I_1 = \int_1^0 \frac{\sqrt{1 - (-t)^2}}{1 + 2^{-t}}(-dt) = \int_0^1 \frac{2^t \sqrt{1 - t^2}.dt}{1 + 2^t} = \int_0^1 \frac{2^x \sqrt{1 - x^2}.dx}{1 + 2^x}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$I = \int_0^1 \frac{2^x\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}.dx + \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx = \int_0^1 \frac{(1+2^x)\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}.dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}.dx .$$

Đặt $x = \sin u, -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}$ thì $dx = \cos u du$.

Đổi cận:

- $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.
- $x = 0 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó: $I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 u}.\cos u du = \int_0^{\pi/2} |\cos u| \cos u du = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u du$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2u)du = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin 2u)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Bài tập 16.

a. Viết lại I dưới dạng: $I = \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{x^4 dx}{x^2+1}}_{I_1} + \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{\sin x.dx}{x^2+1}}_{I_2}$. (1)

Với tích phân I_1 ta biến đổi:

$$I_1 = \int_{-1}^1 \frac{x^4}{x^2+1}dx = \int_{-1}^1 \frac{x^4-1+1}{x^2+1}dx = \int_{-1}^1 \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \int_{-1}^1 (x^2-1)dx + \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+1} = \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)\Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= -\frac{4}{3} + \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+1}}_{I_{1.2}}. \quad (2)$$

Với $I_{1.2} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+1}$ ta sử dụng phương pháp đổi biến $x = \text{tg}t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ suy ra:

$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t} = (1 + \text{tg}^2 t)dt \text{ và } \frac{dx}{x^2+1} = \frac{(1+\text{tg}^2 t)dt}{\text{tg}^2 t + 1} = dt.$$

Đổi cận:

- $x = -1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4}$.
- $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó: $I_{1.2} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} dt = t\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi}{2}$. (3)

Thay (3) vào (2), ta được $I_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$. (4)

Với tích phân I_2 ta biến đổi:

$$I_2 = \int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x^2+1} dx = \int_{-1}^{0} \frac{\sin x}{x^2+1} dx + \int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x^2+1} dx . \quad (5)$$

Xét tính phân $I_{2.1} = \int_{-1}^{0} \frac{\sin x}{x^2+1} dx$ ta sử dụng phương pháp đổi biến bằng cách đặt $x = -t$ suy ra $dx = -dt$

Đổi cận:

- $x = -1 \Rightarrow t = 1$.
- $x = 0 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó: $I_{2.1} = \int_{1}^{0} \frac{\sin(-t)}{(-t)^2+1}(-dt) = -\int_{0}^{1} \frac{\sin t}{t^2+1} dt = -\int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x^2+1} dx$. (6)

Thay (6) vào (5) ta được $I_2 = 0$. (7)

Thay (4), (7) vào (1) ta được $I = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$.

b. Biến đổi I về dạng: $I = \underbrace{\int_{-1}^{1} e^{x^2} \sin x dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{-1}^{1} e^2 . x^2 dx}_{I_2}$. (1)

Với tích phân I_1 ta biến đổi: $I_1 = \int_{-1}^{0} e^{x^2} \sin x dx + \int_{0}^{1} e^{x^2} \sin x dx$. (2)

Xét tích phân $I_{1.1} = \int_{-1}^{0} e^{x^2} \sin x dx$ ta sử dụng phương pháp đổi biến bằng cách đặt $x = -t$ suy $dx = -dt$.

Đổi cận:

- $x = -1 \Rightarrow t = 1$.
- $x = 0 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó:

$$I_{1.1} = -\int_{1}^{0} e^{(-t)^2} \sin(-t) dt = -\int_{0}^{1} e^{t^2} \sin t dt = -\int_{0}^{1} e^{x^2} \sin x dx . \quad (3)$$

Thay (3) vào (2) ta được $I_1 = 0$.

Do đó: $I = e^2 . \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{1} = \frac{2e^2}{3}$.

Bài tập 17.

a. Đặt $x = \pi - t$ thì $dx = -dt$.

Đổi cận:

- $x = \pi \Rightarrow t = 0$.
- $x = 0 \Rightarrow t = \pi$.

Khi đó: $I = \int_{\pi}^{0}(\pi - t).\sin^3(\pi - t)(-dt) = \int_{0}^{\pi}(\pi - t).\sin^3 t\,dt$

$= \pi\int_{0}^{\pi}\sin^3 t\,dt - \int_{0}^{\pi}t.\sin^3 t\,dt = \frac{\pi}{4}\int_{0}^{\pi}(3\sin t - \sin 3t)dt - I$

$\Leftrightarrow 2I = \frac{\pi}{4}(-3\cos t + \frac{1}{3}\cos 3t)\Big|_0^{\pi} = \frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow I = \frac{2\pi}{3}$.

b. Biến đổi I về dạng: $I = \underbrace{\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin^2 x.dx}{3^x+1}}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{\pi}\frac{\sin^2 x.dx}{3^x+1}}_{I_2}$. (1)

Xét tính phân $I_1 = \int_{-\pi}^{0}\frac{\sin^2 x}{3^x+1}dx$ ta sử dụng phương pháp đổi biến bằng cách đặt $x = -t$ thì $dx = -dt$.

Đổi cận:

- $x = -\pi \Rightarrow t = \pi$.
- $x = 0 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó: $I_1 = \int_{\pi}^{0}\frac{\sin^2(-t)(-dt)}{3^{-t}+1} = -\int_{0}^{\pi}\frac{3^t.\sin^2 t.dt}{3^t+1} = \int_{0}^{\pi}\frac{3^x.\sin^2 x.dx}{3^x+1}$. (2)

Thay (2) vào (1), ta được:

$I = \int_{0}^{\pi}\frac{3^x.\sin^2 x.dx}{3^x+1} + \int_{0}^{\pi}\frac{\sin^2 x.dx}{3^x+1} = \int_{0}^{\pi}\frac{(3^x+1).\sin^2 x.dx}{3^x+1} = \int_{0}^{\pi}\sin^2 x dx$

$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}(1 - \cos 2x)dx = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin 2x)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$.

Bài tập 18.

a. Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

Khi đó: $I = x.\sin x\Big|_0^{\pi/3} - \int_{0}^{\pi/3}\sin x dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \cos x\Big|_0^{\pi/3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}$.

b. Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, bằng cách đặt:

Đặt: $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\sin^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cot x \end{cases}$.

Khi đó: $I = -x.\cot x\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} + \int_{\pi/4}^{\pi/3}\cot x.dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\cos x.dx}{\sin x}$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{d(\sin x)}{\sin x} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \ln|\sin x|\Big|_{\pi/4}^{\pi/3}$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \ln\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Bài tập 19.

a. Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \sin 3x \\ dv = e^{-x}dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = 3\cos 3x dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

Khi đó :

$$I = -e^{-x}\sin 3x\Big|_0^{\pi/2} + 3\int_0^{\pi/2} e^{-x}\cos 3x dx = e^{-\pi/2} + 3\underbrace{\int_0^{\pi/2} e^{-x}\cos 3x dx}_{J}. \quad (1)$$

Xét tích phân J bằng cách đặt: $\begin{cases} u = \cos 3x \\ dv = e^{-x}dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = -3\sin 3x.dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$.

Khi đó : $J = -e^{-x}\cos 3x\Big|_0^{\pi/2} - 3\underbrace{\int_0^{\pi/2} e^{-x}\sin 3x dx}_{I} = 1 - 3I.$ (2)

Thay (2) vào (1), ta được : $I = e^{-\pi/2} + 3(1 - 3I) \Leftrightarrow I = \dfrac{3 + e^{-\pi/2}}{10}$.

Yêu cầu: Các em học sinh hãy giải bài tập trên bằng cách sử dụng *phương pháp hệ số bất định.*

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách giải sau:

Cách 1: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \cos 3x \\ dv = e^{-x}dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = -3\sin 3x dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

Khi đó:

$$I = -e^{-x}\cos 3x\Big|_0^{\pi/2} - 3\int_0^{\pi/2} e^{-x}\sin 3x dx = 1 - 3\underbrace{\int_0^{\pi/2} e^{-x}\sin 3x dx}_{J}. \quad (1)$$

Xét tích phân J bằng cách đặt: $\begin{cases} u = \sin 3x \\ dv = e^{-x}dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = 3\cos 3x dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$.

Khi đó: $J = -e^{-x}\sin 3x\Big|_0^{\pi/2} + 3\underbrace{\int_0^{\pi/2} e^{-x}\cos 3x dx}_{I} = e^{-\pi/2} + 3I.$ (2)

Thay (2) vào (1), ta được:

$$I = 1 - 3(e^{-\pi/2} + 3I) \Leftrightarrow I = \frac{1 - 3e^{-\pi/2}}{10}.$$

Cách 2: Ta đi xác định nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{-x}\cos 3x$, giả sử:

$$F(x) = \int e^{-x}\cos 3x dx = (a + b.\cos 3x + c.\sin 3x)e^{-x} + C. \quad (3)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (3), ta được:

$$e^{-x}\cos 3x = [-a + (3c - b)\cos 3x - (c + 3b)\sin 3x]e^{-x}. \quad (4)$$

Đồng nhất hệ số, ta được: $\begin{cases} a = 0 \\ 3c - b = 1 \\ c + 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -\dfrac{1}{10} \text{ và } c = \dfrac{3}{10} \end{cases}$.

Vậy, ta được $F(x) = \dfrac{1}{10}(-\cos 3x + 3\sin 3x)e^{-x} + C$.

Do đó: $I = \dfrac{1}{10}(-\cos 3x + 3\sin 3x)e^{-x}\Big|_0^{\pi/2} = \dfrac{1 - 3e^{-\pi/2}}{10}$.

Bài tập 20.

a. Biến đổi I về dạng :

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2x}(1 - \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\int_0^{\pi} e^{2x}dx}_{I_1} - \underbrace{\int_0^{\pi} e^{2x}\cos 2xdx}_{I_2}\Big). \quad (1)$$

Xét tích phân I_1, ta có ngay: $I_1 = \int_0^{\pi} e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^{\pi} = \frac{e^{2\pi}}{2} - \frac{1}{2}$. (2)

Xét tích phân I_2 bằng cách đặt: $\begin{cases} u = \cos 2x \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = -2\sin 2xdx \\ v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

Khi đó :

$$I_2 = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{2x}\sin 2xdx = \frac{e^{2\pi}}{2} - \frac{1}{2} + \underbrace{\int_0^{\pi} e^{2x}\sin 2xdx}_{I_{2.1}}. \quad (3)$$

Xét tích phân $I_{2.1}$ bằng cách đặt: $\begin{cases} u = \sin 2x \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = 2\cos 2xdx \\ v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

Khi đó : $I_{2.1} = \frac{1}{2}e^{2x}\sin x\Big|_0^{\pi} - \underbrace{\int_0^{\pi} e^{2x}\cos 2xdx}_{I_2} = -I_2$. (4)

Thay (4) vào (3), ta được : $I_2 = \frac{e^{2\pi}}{2} - \frac{1}{2} - I_2 \Leftrightarrow I_2 = \frac{e^{2\pi}}{4} - \frac{1}{4}$. (5)

Thay (2), (5) vào (1), ta được : $I = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2\pi}}{2} - \frac{1}{2} - \left(\frac{e^{2\pi}}{4} - \frac{1}{4}\right)\right] = \frac{1}{8}(e^{2\pi} - 1)$.

b. Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \cos(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\dfrac{1}{x}\sin(\ln x)dx \\ v = x \end{cases}$$

Khi đó: $I = x.\cos(\ln x)\Big|_1^{e^{\pi}} + \underbrace{\int_1^{e^{\pi}} \sin(\ln x)dx}_{J} = -e^{\pi} - 1 + J$. (1)

Xét tích phân J bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \sin(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}\cos(\ln x)dx \\ v = x \end{cases}.$$

Khi đó: $J = x.\sin(\ln x)\Big|_1^{e^\pi} - \underbrace{\int_1^{e^\pi}\cos(\ln x)dx}_{I} = -I.$ (2)

Thay (2) vào (1), ta được : $I = -e^\pi - 1 - I \Leftrightarrow I = -\dfrac{1}{2}(e^\pi + 1)$.

Chú ý Nếu bài toán yêu cầu tính giá trị của một cặp nguyên hàm:

$$I_1 = \int\sin(\ln x)dx \text{ và } I_2 = \int\cos(\ln x)dx$$

ta nên lựa chọn cách trình bày sau:

- Sử dụng tích phân từng phần cho I_1, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \sin(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}\cos(\ln x)dx \\ v = x \end{cases}.$$

Khi đó : $I_1 = x.\sin(\ln x) - \int\cos(\ln x)dx = x.\sin(\ln x) - I_2$. (3)

- Sử dụng tích phân từng phần cho I_2, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \cos(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\dfrac{1}{x}\sin(\ln x)dx \\ v = x \end{cases}.$$

Khi đó : $I_2 = x\cos(\ln x) + \int\sin(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + I_1$. (4)

- Từ hệ tạo bởi (3) và (4) ta nhận được:

$$I_1 = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C \text{ và } I_2 = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + C.$$

Bài tập 21.

a. Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}.$$

Khi đó : $I = -xe^{-x}\Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} e^{-x}dx = -\dfrac{1}{2}\ln 2 - e^{-x}\Big|_0^{\ln 2} = -\dfrac{1}{2}\ln 2 + \dfrac{1}{2}$.

b. Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \ln^3 x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{3\ln^2 x}{x}.dx \\ v = x \end{cases}.$$

Khi đó: $I = x.\ln^3 x\Big|_1^e - 3\underbrace{\int_1^e \ln^2 x dx}_{J} = e - 3J.$ (1)

Sử dụng tích phân từng phần cho J, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2\ln x}{x}.dx \\ v = x \end{cases}$$

Khi đó : $J = x.\ln^2 x\Big|_1^e - 2\underbrace{\int_1^e \ln x dx}_{K} = e - 2K.$ (2)

Sử dụng tích phân từng phần cho K, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}.$$

Khi đó : $K = x.\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx = e - (e-1) = 1.$ (3)

Thay (3) vào (2) rồi tiếp tục thay (2) vào (1), ta được:

$I = e - 3(e-2) = 6 - 2e.$

Bài tập 22.

a. Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2\ln x}{x}.dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}.$$

Khi đó : $I = \dfrac{x^2}{2}.\ln^2 x\Big|_1^e - \underbrace{\int_1^e x\ln x dx}_{J} = \dfrac{e^2}{2} - J.$ (1)

Sử dụng tích phân từng phần cho J, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}.$$

Khi đó : $J = \dfrac{x^2}{2}.\ln x\Big|_1^e - \dfrac{1}{2}\int_1^e x dx = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{1}{4}x^2\Big|_1^e = \dfrac{e^2+1}{4}.$ (2)

Thay (2) vào (1), ta được $I = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{e^2+1}{4} = \dfrac{e^2-1}{4}.$

b. Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \ln(1+x^2) \\ dv = xdx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2x}{1+x^2}dx \\ v = \dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}.$$

i đó: $I = = = = \frac{x^2}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln 2 - \int_0^1 (x - \frac{x}{1+x^2})dx$

$= = = = \frac{1}{2}\ln 2 - [\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)]\Big|_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$

p 23.

dụng phhuhuhương pháp tích phân từng phần, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = (1(1(1(1 - \ln x)^2 \\ dv = c\,c\,c\,cdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2(\ln x - 1)}{x}.dx \\ v = x \end{cases}.$$

i đó : $I = = = = = x.(1-\ln x)^2\Big|_1^e - 2\int_1^e (\ln x - 1)dx = 1 - 2\underbrace{\int_1^e \ln x.dx}_{J} + 2\underbrace{\int_1^e dx}_{K}.$ (1)

dụng tíchchchchh phân từng phần cho J, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = lr\,ln\,ln\,ln\,x \\ dv = c\,c\,c\,cdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}.$$

ii đó : $J\ J\ J\ J = = x.\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx = e - (e-1) = 1.$ (2)

ói tích phhâhâhâân K, ta có ngay: $K = x\Big|_1^e = e - 1.$ (3)

ay (2), (3(3(3(3)) vào (1), ta được: $I = 1 - 2 + 2(e-1) = 2e - 3.$

t dụng phhuhuhương pháp tích phân từng phần, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = lr\,ln\,ln\,ln\,x \\ dv = = \frac{c\,c\,cdx}{x\,x\,xx^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

ii đó : $I\ \ = = = = -\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{x}\Big|_1^2 = \frac{1-\ln 2}{2}.$

p 24.

ến đổi I v v v về dạng: $I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}(\underbrace{\int_0^{\pi/2} xdx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{\pi/2} x\cos 2xdx}_{I_2})$ (1)

ói tích phhâhâhâân I_1, ta có ngay: $I_1 = \int_0^{\pi/2} xdx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8}.$ (2)

ói tích phhâhâhâân I_2 sử dụng phương pháp tích phân từng phần, đặt:

$$\begin{cases} u = x\,x\,x\,x \\ dv = = c\,c\,c\cos 2xdx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}.$$

Khi đó: $I_2 = \frac{1}{2}x\sin 2x\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2x dx = \frac{1}{2}(x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x)\Big|_0^{\pi/2}$

$= \frac{\pi}{2} - 1.$ (3)

Thay (2), (3) vào (1) ta được: $I = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

b. Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = -\cos x \end{cases}.$$

Khi đó: $I = -x^2.\cos x\Big|_0^{\pi} + 2\underbrace{\int_0^{\pi} x.\cos x.dx}_{J} = \pi^2 + 2J.$ (1)

Với tích phân J sử dụng phương pháp tích phân từng phần, đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}.$$

Khi đó: $I = x.\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x.dx = \cos x\Big|_0^{\pi} = -2$. (2)

Thay (2) vào (1) ta được $I = \pi^2 - 4$.

Bài tập 25.

a. Biến đổi I về dạng:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 e^x(1-\cos 2\pi x)dx = \frac{1}{2}(\underbrace{\int_0^1 e^x dx}_{I_1} - \underbrace{\int_0^1 e^x\cos 2\pi x dx}_{I_2}).$$ (1)

Với tích phân I_1, ta có ngay $I_1 = e^x\Big|_0^1 = e - 1$. (2)

Với tích phân I_2 sử dụng phương pháp tích phân từng phần, đặt:

$$\begin{cases} u = \cos 2\pi x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = -2\sin 2\pi x.dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

Khi đó: $I_2 = e^x\cos 2\pi x\Big|_0^1 + 2\underbrace{\int_0^1 e^x\sin 2\pi x dx}_{I_{2.1}} = e - 1 + 2I_{2.1}$. (3)

Với tích phân $I_{2.1}$ sử dụng phương pháp tích phân từng phần, đặt:

$$\begin{cases} u = \sin 2\pi x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = 2\cos 2\pi x dx \\ v = e^x \end{cases},$$

Khi đó: $I_{2.1} = e^x\sin 2\pi x\Big|_0^1 - 2\underbrace{\int_0^1 e^x\cos 2\pi x dx}_{I_2} = -2I_2$. (4)

Thay (4) vào (3), ta được $I_2 = e - 1 - 2I_2 \Leftrightarrow I_2 = \frac{e-1}{3}$. (5)

Thay (2), (5) vào (1), ta được $I = \frac{1}{2}(e - 1 - \frac{e-1}{3}) = \frac{e-1}{3}$.

b. Ta có thể lựa chọn các cách sau cho việc tính nguyên hàm $I' = \int e^x.\cos^2 x dx$:

Cách 1 : Viết lại I' dưới dạng:

$$I' = \frac{1}{2}\int e^x.(1 + \cos 2x)dx = \frac{1}{2}(\int e^x dx + \int e^x.\cos 2x dx)$$

$$= \frac{1}{2}(e^x + \int e^x.\cos 2x dx). \quad (1)$$

- Tính tích phân $J = \int e^x.\cos 2x dx$ bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \cos 2x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2\sin 2x dx \\ v = e^x \end{cases}$$

Khi đó: $J = e^x\cos 2x + 2\int e^x \sin 2x dx$. (2)

- Tính tích phân $K = \int e^x \sin 2x dx$ bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \sin 2x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2\cos 2x dx \\ v = e^x \end{cases}$$

Khi đó: $K = e^x\sin 2x - 2\int e^x\cos 2x dx = e^x\sin 2x - 2J$. (3)

Thay (3) vào (2), ta được:

$$J = e^x\cos 2x + 2(e^x\sin 2x - 2J) \Leftrightarrow J = \frac{1}{5}(\cos 2x + 2\sin 2x)e^x + C. \quad (4)$$

Thay (4) vào (1), ta được :

$$I' = \frac{1}{2}[e^x + \frac{1}{5}(\cos 2x + 2\sin 2x)e^x] + C = \frac{1}{10}(5 + \cos 2x + 2\sin 2x)e^x + C.$$

Từ đó, suy ra: $I = \frac{1}{10}(5 + \cos 2x + 2\sin 2x)e^x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2e^{\pi/2} - 3}{5}$.

Cách 2 : Viết lại I' dưới dạng:

$$I' = \frac{1}{2}\int e^x.(1 + \cos 2x)dx = (a + b.\cos 2x + c.\sin 2x)e^x + C. \quad (5)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (5), ta được:

$$\frac{1}{2}e^x.(1 + \cos 2x) = (-2b.\sin 2x + 2c.\cos 2x)e^x + (a + b.\cos 2x + c.\sin 2x)e^x$$

$$= [a + (2c + b)\cos 2x + (c - 2b)\sin 2x]e^x. \quad (6)$$

Đồng nhất hệ số, ta được : $\begin{cases} 2a = 1 \\ 2(2c + b) = 1 \\ 2(c - 2b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 1/10 \\ c = 1/5 \end{cases}$.

Vậy, ta có: $I' = \frac{1}{10}(5 + \cos 2x + 2\sin 2x)e^x + C$.

Từ đó, suy ra: $I = \frac{1}{10}(5 + \cos 2x + 2\sin 2x)e^x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2e^{\pi/2} - 3}{5}$.

CHỦ ĐỀ 5
TÍNH TÍCH PHÂN
CÁC DẠNG HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

Bài toán 1: Tính tích phân các hàm số chứa dấu trị tuyệt đối.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để tính tích phân:

$$I = \int_a^b |f(x,m)|dx$$

ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xét dấu biểu thức f(x, m) trên [a, b].

Từ đó phân được đoạn [a, b] thành các đoạn nhỏ, giả sử:

$$[a, b] = [a, c_1] \cup [c_1, c_2] \cup ... \cup [c_k, b].$$

mà trên mỗi đoạn f(x, m) có một dấu.

Bước 2: Khi đó:

$$I = \int_a^{c_1} |f(x,m)|dx + \int_{c_1}^{c_2} |f(x,m)|dx + ... + \int_{c_k}^{b} |f(x,m)|dx .$$

Chú ý: Phương pháp trên được mở rộng tự nhiên cho bài toán tổng quát:

$$I = \int_a^b [|f_1| \pm |f_2| \pm ... \pm [|f_n|]dx .$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^2 |x-1|dx$.

A. 1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 11.

b. $I = \int_0^2 |x^2 + 2x - 3|dx$.

A. 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 9.

Bài tập 2. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_{-1}^{1} (|2x-1| - |x|)^2 dx$.

A. $\frac{25}{8}$. **B.** $\frac{15}{4}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

b. $I = \int_{-5}^{4} \left(\frac{3}{|x-4|-1} - |x+3| \right) dx$.

A. $2\ln 2 - \frac{3}{2}$. **B.** $\ln 2 - \frac{1}{2}$. **C.** $2\ln 8 - \frac{33}{2}$. **D.** $3\ln 8 - \frac{53}{2}$.

Bài tập 3. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_{1/2}^{2} \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2}dx$.

A. $\frac{11}{10}$. **B.** $\frac{9}{8}$. **C.** $\frac{7}{6}$. **D.** $\frac{5}{4}$.

b. $I = \int_{0}^{3} \sqrt{x^3 - 4x^2 + 4x}dx$.

A. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{15}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\frac{32\sqrt{2}-6\sqrt{3}}{15}$.

Bài tập 4. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_{\pi/8}^{3\pi/8} |\cot gx - tgx|dx$.

A. ln2. **B.** $\ln\sqrt{2}$. **C.** $\ln\sqrt{3}$. **D.** ln3.

b. $I = \int_{\pi/6}^{\pi/4} |\cot gx - \cot g2x|dx$.

A. $\ln\frac{\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\ln\frac{3}{2}$.

Bài tập 5. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_{0}^{\pi} |\cos 3x.\sin^3 x + \sin 3x.\cos^3 x|dx$.

A. $\frac{17}{16}$. **B.** $\frac{9}{8}$. **C.** $\frac{5}{4}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

b. $I = \int_{-\pi/12}^{\pi/12} \left|tgx.tg(\frac{\pi}{3} - x).tg(\frac{\pi}{3} + x)\right|dx$.

A. $\frac{1}{3}\ln 2$. **B.** $\frac{2}{3}\ln\sqrt{2}$. **C.** $\frac{2}{3}\ln\sqrt{3}$. **D.** $\frac{1}{3}\ln 3$.

Bài tập 6. Tính các tích phân:

a. $I = \int_{0}^{2} x|a - x|dx$.

b. $I = \int_{1}^{2} |x^2 - (a+2)x + 2a|dx$.

Bài tập 7. Tính các tích phân:

a. $I = \int_{0}^{1} |x^2 - 2x + m|dx$.

b. $I = \int_{0}^{2} |x^2 - 4x + 4m|dx$.

Bài toán 2: Tính tích phân các hàm số hữu tỉ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để xác định tích phân các hàm số hữu tỉ ta cần linh hoạt lựa chọn một trong các phương pháp cơ bản sau:

1. Phương pháp tam thức bậc hai, ta có:

$$\int \frac{xdx}{x^2 \pm a} = \frac{1}{2}\ln|x^2 \pm a| + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \text{ với } a \neq 0.$$

2. Phương pháp đổi biến.
3. Phương pháp phân tích.
4. Sử dụng các phương pháp khác nhau.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 8. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$.

A. $\ln\frac{5}{6}$. **B.** $\ln\frac{3}{4}$. **C.** $\ln\frac{3}{2}$. **D.** $\ln\frac{2}{3}$.

b. $I = \int_{-1}^{1} \frac{(2x^3 - 10x^2 + 16x - 1)dx}{x^2 - 5x + 6}$.

A. $\ln3 - \ln2$. **B.** $2\ln3 - \ln2$. **C.** $4\ln3 - 3\ln2$. **D.** $7\ln3 - 11\ln2$.

Bài tập 9. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_{0}^{1} \frac{x}{(1+2x)^3}dx$.

A. $\frac{1}{18}$. **B.** $\frac{1}{15}$. **C.** $\frac{1}{11}$. **D.** $\frac{1}{8}$.

b. $I = \int_{0}^{1} \frac{x^3 dx}{(x^8 - 4)^2}$.

A. $\frac{1}{2} + \frac{\ln3}{2}$. **B.** $\frac{1}{6} + \frac{\ln3}{12}$. **C.** $\frac{1}{9} + \frac{\ln3}{28}$. **D.** $\frac{1}{96} + \frac{\ln3}{128}$.

Bài tập 10. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_{0}^{1} \frac{x^2 - 1}{1 + x^4}dx$.

A. $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{\sqrt{2}}$ **B.** $\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ **C.** $\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ **D.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

b. $I = \int_0^1 \frac{1+x^4}{1+x^6}dx$.

A. $\frac{\pi}{3}$. **B.** $\frac{\pi}{4}$. **C.** $\frac{\pi}{6}$. **D.** $\frac{\pi}{12}$.

Bài tập 11. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_2^3 \frac{x^2dx}{(1-x)^9}$.

A. $\frac{1}{6}(\frac{1}{2^6}-1)+\frac{2}{7}(\frac{1}{2^7}+1)+\frac{1}{8}(\frac{1}{2^8}-1)$.

B. $\frac{1}{7}(\frac{1}{2^7}-1)+\frac{2}{8}(\frac{1}{2^8}+1)+\frac{1}{9}(\frac{1}{2^9}-1)$.

C. $\frac{1}{6}(\frac{1}{2^6}-1)-\frac{2}{7}(\frac{1}{2^7}+1)-\frac{1}{8}(\frac{1}{2^8}-1)$.

D. $\frac{1}{7}(\frac{1}{2^7}-1)-\frac{2}{8}(\frac{1}{2^8}+1)-\frac{1}{9}(\frac{1}{2^9}-1)$.

b. $I = \int_2^4 \frac{x^3dx}{(x-1)^{10}}$.

A. $\frac{1}{8}(1-\frac{1}{3^8})+\frac{3}{7}(1-\frac{1}{3^7})+\frac{3}{6}(1-\frac{1}{3^6})+\frac{1}{5}(1-\frac{1}{3^5})$.

B. $\frac{1}{8}(1+\frac{1}{3^8})+\frac{3}{7}(1+\frac{1}{3^7})+\frac{3}{6}(1+\frac{1}{3^6})+\frac{1}{5}(1+\frac{1}{3^5})$.

C. $\frac{1}{9}(1-\frac{1}{3^9})+\frac{3}{8}(1-\frac{1}{3^8})+\frac{3}{7}(1-\frac{1}{3^7})+\frac{1}{6}(1-\frac{1}{3^6})$.

D. $\frac{1}{9}(1+\frac{1}{3^9})+\frac{3}{8}(1+\frac{1}{3^8})+\frac{3}{7}(1+\frac{1}{3^7})+\frac{1}{6}(1+\frac{1}{3^6})$.

Bài tập 12. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^1 \frac{x^3+2x^2+10x+1}{x^2+2x+9}dx$.

A. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$. **C.** $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$. **D.** $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$.

b. $I = \int_0^1 \frac{4x+11}{x^2+5x+6}dx$.

A. ln3 – ln2. **B.** ln5 – ln2. **C.** ln7 – ln2. **D.** ln9 – ln2.

Bài tập 13. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_1^2 \frac{(x^2+2x-2)dx}{x^3+1}$.

A. ln2. **B.** ln3. **C.** 2ln2. **D.** 3ln2.

b. $I=\int_1^2 \frac{dx}{x^3+2x^2+x}$.

A. $\ln\frac{3}{4}-\frac{1}{6}$. **B.** $\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{6}$. **C.** $\ln\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$. **D.** $\ln\frac{4}{3}+\frac{1}{6}$.

Bài tập 14. Tính các tích phân sau:

a. $I=\int_4^5 \frac{(x^3-3x^2+x+6)dx}{x^3-5x^2+6x}$.

A. $2+\ln\frac{20}{3}$. **B.** $6-\ln\frac{20}{3}$. **C.** $1+\ln\frac{40}{9}$. **D.** $\ln\frac{40}{9}-1$.

b. $I=\int_{-1}^0 \frac{(7x-4)dx}{x^3-3x+2}$.

A. $\frac{1}{2}-4\ln 2$. **B.** $\frac{1}{2}-3\ln 2$. **C.** $\frac{1}{2}-2\ln 2$. **D.** $\frac{1}{2}-\ln 2$.

Bài tập 15. Tính các tích phân sau:

a. $I=\int_1^2 \frac{(x^3-x^2-4x-1)dx}{x^4+x^3}$.

A. $\ln\frac{8}{3}-\frac{15}{7}$. **B.** $\ln\frac{8}{3}+\frac{5}{6}$. **C.** $\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{2}$. **D.** $\ln\frac{4}{3}+1$.

b. $I=\int_0^1 \frac{dx}{x^4+4x^2+3}$.

A. $\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{12\sqrt{3}}$.

Bài toán 3: Tính tích phân các hàm số lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để xác định tích phân các hàm số lượng giác ta cần linh hoạt lựa chọn một trong các phương pháp cơ bản sau:

1. Sử dụng các dạng nguyên hàm cơ bản.
2. Đại số hoá.
3. Sử dụng các phép biến đổi lượng giác đưa về các nguyên hàm cơ bản.
4. Phương pháp đổi biến.
5. Phương pháp tích phân từng phần.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 16. Tính các tích phân sau:

a. $I=\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^6 x}{\sin^6 x+\cos^6 x}dx$.

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{3}$. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** 0.

b. $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin x.\sin(x+\frac{\pi}{6})}$.

A. $\ln\frac{9}{4}$. **B.** $\ln\frac{7}{3}$. **C.** $\ln\frac{5}{2}$. **D.** $\ln\frac{3}{2}$.

Bài tập 17. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_{0}^{\pi/2} \frac{4\sin x}{(\sin x+\cos x)^3}dx$.

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 9.

b. $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^4 x\cos x}$.

A. $\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{4}{3} - \frac{3}{\sqrt{2}}$. **C.** $\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{4}{3} + \frac{3}{\sqrt{2}}$.

B. $\ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{14}{3} - \frac{26}{9\sqrt{3}}$. **D.** $\ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{14}{3} + \frac{26}{9\sqrt{3}}$.

Bài tập 18. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x+7\cos x+6}{4\sin x+3\cos x+5}dx$.

A. $\frac{\pi}{2}+\ln\frac{9}{8}$ **B.** $\frac{\pi}{2}+\frac{1}{6}$. **C.** $\ln\frac{9}{8}+\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{\pi}{2}+\ln\frac{9}{8}+\frac{1}{6}$.

b. $I = \int_{0}^{\pi/2} \frac{3\sin x+4\cos x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}dx$.

A. $\frac{\pi}{3}+\ln\sqrt{2}$. **B.** $\frac{\pi}{3}+\ln\sqrt{3}$. **C.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}+\ln 3$. **D.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}+\ln 2$.

Bài tập 19. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin 2x}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. $I = \int_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x}$.

A. $\frac{5}{4}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Bài tập 20. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_{0}^{\pi/4} \frac{4\sin^3 x}{1+\cos^4 x}dx$.

b. $I = \int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos 2x}{1+\cos x}dx$.

Bài tập 21. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx$.

A. $\frac{\pi}{2} - 1$. **B.** $\frac{\pi}{2} + 1$. **C.** $\frac{\pi}{3} - 2$. **D.** $\frac{\pi}{3} + 2$.

b. $I = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x - \sin^3 x} dx}{\sin^3 x}$.

A. $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{2}+1}{3}$. **C.** $\frac{4\sqrt{2}+2}{3}$. **D.** $\frac{4\sqrt{2}-2}{3}$.

Bài tập 22. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^{\pi/2} x\cos^2 x dx$.

A. $\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2} + 1$. **B.** $\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} - 1$. **D.** $\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

b. $I = \int_0^{\pi/2} (2x-1).\cos^2 x dx$.

A. $\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4} - 1$. **B.** $\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4}$. **C.** $\frac{\pi^2}{8} - 1$. **D.** $\frac{\pi}{4} - 1$.

Bài tập 23. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^{\pi} x.\cos^4 x.\sin^3 x dx$.

A. $\frac{2\pi}{35}$. **B.** $\frac{4\pi}{17}$. **C.** $\frac{8\pi}{9}$. **D.** $\frac{16\pi}{5}$.

b. $I = \int_0^{\pi/3} \frac{(x+\sin x)dx}{\cos^2 x}$.

A. $1 - \ln 2$. **B.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{3} + 1$. **C.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln 2$. **D.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln 2 +$.

Bài tập 24. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^{2\pi} \frac{x.\cos x dx}{1+\sin^2 x}$.

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{8}$. **C.** $\frac{\pi}{12}$. **D.** 0.

b. $I = \int_0^{e^{\pi}} \cos(\ln x) dx$

A. $\frac{1}{4}(e^{\pi} - 1)$. **B.** $\frac{1}{2}(e^{\pi} - 1)$. **C.** $\frac{1}{2}(e^{\pi} + 1)$. **D.** $-\frac{1}{2}(e^{\pi} + 1)$.

Bài tập 25. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos(n+2)x dx$.

b. $I = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin(n+2)x dx$.

c. $I = \int_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos(n+1)x dx$.

Bài tập 26.

a. Tính các tích phân $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x dx}{1+\sin^4 x}$ và $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x dx}{1+\cos^4 x}$

A. $I = J = \frac{\pi}{4}$. **B.** $I = J = \frac{\pi}{3}$. **C.** $I = J = \frac{\pi}{6}$. **D.** $I = J = \frac{\pi}{2}$.

b. Chứng minh rằng $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x . \sin x}{(1+\sin^4 x)(1+\cos^4 x)} dx > \frac{\pi}{12}$.

Bài tập 27. Cho hàm số:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$$

a. Tìm a, b sao cho $f(x) = a + b\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)$.

A. $a = 1$ và $b = -1$.

B. $a = \frac{1}{2}$ và $b = -\frac{1}{2}$.

C. $a = -1$ và $b = 1$.

D. $a = -\frac{1}{2}$ và $b = \frac{1}{2}$.

b. Tính $I = \int_0^{\pi/3} f(x) dx$.

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{8}$. **C.** $\frac{\pi}{12}$. **D.** $\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Bài tập 28.

a. Chứng minh rằng $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$.

b. Tính $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$.

A. $I = \frac{\pi}{4}$. **B.** $I = \frac{\pi}{3}$. **C.** $I = \frac{\pi}{6}$. **D.** $I = \frac{\pi}{2}$.

Bài tập 29. Tính các tích phân sau:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x} dx}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \text{ và } J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x} dx}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}$$

A. $I = \frac{\pi}{4}$. **B.** $I = \frac{\pi}{3}$. **C.** $I = \frac{\pi}{6}$. **D.** $I = \frac{\pi}{2}$.

Bài tập 30. Cho hàm số:

$$h(x) = \frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}.$$

a. Tìm a, b để $h(x) = \frac{a.\cos x}{(2+\sin x)^2} + \frac{b.\cos x}{2+\sin x}$.

A. a = 4 và b = --2. **C.** a = –4 và b = 2.

B. a = 2 và b = –4. **D.** a = –2 và b = 4.

b. Tính $I = \int_{-\pi/2}^{0} h(x)dx$.

A. ln2 – 2. **B.** ln2 + 1. **C.** ln3 + 2. **D.** ln3 – 2.

Bài toán 4: Tính tích phân các hàm số vô tỉ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để xác định tích phân của các hàm số vô tỉ ta cần linh hoạt lựa chọn một trong các phương pháp cơ bản sau:

1. Sử dụng các dạng nguyên hàm cơ bản, ta có:

a. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \sqrt{x^2 \pm a} + C.$

b. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C.$

c. $\int \sqrt{x^2 \pm a}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a} \pm \frac{a}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C.$

2. Phương pháp đổi biến.
3. Phương pháp tích phân từng phần.
4. Sử dụng các phép biến đổi.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 31. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$.

A. $\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$. **B.** $\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)$. **C.** $\frac{2}{3}(\sqrt{2}+1)$. **D.** $\frac{2}{15}(\sqrt{2}+1)$.

b. $I = \int_0^{2\sqrt{2}} x\sqrt{x^2+1}dx$.

A. $\frac{26}{3}$. **B.** $\frac{28}{3}$. **C.** $\frac{12}{5}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Bài tập 32. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^{7/3} \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{3x+1}}$.

A. $\frac{56}{5}$. **B.** $\frac{46}{15}$. **C.** $\frac{36}{25}$. **D.** $\frac{26}{35}$.

b. $I = \int_0^2 \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{3x+2}}$.

A. $\frac{63}{10}$. **B.** $\frac{70}{20}$. **C.** $\frac{77}{30}$. **D.** $\frac{84}{40}$.

Bài tập 33. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^1 \frac{(x^2-1)dx}{\sqrt{x}+1}$.

A. $\frac{30}{31}$. **B.** $-\frac{30}{13}$. **C.** $\frac{31}{30}$. **D.** $-\frac{13}{30}$.

b. $I = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$.

A. $\frac{41}{20}$. **B.** $\frac{7}{10}$. **C.** $\frac{11}{20}$. **D.** $\frac{141}{20}$.

Bài tập 34. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{(x^5+2x^3)dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

A. $\frac{6}{7}$. **B.** $\frac{16}{7}$. **C.** $\frac{26}{5}$. **D.** $\frac{2}{5}$.

b. $I = \int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}}$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{10}{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Bài tập 35. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}$.

A. $2\ln\frac{4}{3}$. **B.** $2\ln\frac{3}{4}$. **C.** $2-\ln\frac{4}{3}$. **D.** $2+\ln\frac{3}{4}$.

b. $I = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

A. $\ln\frac{3}{2}$. **B.** $2\ln\frac{3}{2}$. **C.** $3\ln\frac{2}{3}$. **D.** $\ln\frac{2}{3}$.

Bài tập 36. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$.

A. $\ln\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. **B.** $\ln\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$. **C.** $\ln\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. **D.** $2\ln\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

b. $I = \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}dx}{x^2}$.

A. $\sqrt{2}-1$. **B.** $\sqrt{2}+1$. **C.** $\sqrt{3}-1$. **D.** $\sqrt{3}+1$.

Bài tập 37. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_5^7 \frac{dx}{\sqrt{x-4}+\sqrt{x+2}}$.

A. $\frac{1}{9}(26+7\sqrt{7}+3\sqrt{3})$. **C.** $\frac{1}{9}(26-7\sqrt{7}-3\sqrt{3})$.

B. $\frac{1}{3}(26+7\sqrt{7}-3\sqrt{3})$. **D.** $\frac{1}{3}(26-7\sqrt{7}+3\sqrt{3})$.

b. $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$.

A. $\frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)$. **B.** $\frac{4}{3}(\sqrt{2}+1)$. **C.** $\frac{1}{3}(\sqrt{3}-1)$. **D.** $\frac{1}{3}(\sqrt{3}+1)$.

Bài tập 38. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$.

A. $\ln\frac{2-\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\ln\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\ln\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$.

b. $I = \int_{\sqrt{7}}^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$.

A. $\ln\frac{4}{7}$. **B.** $\frac{1}{6}\ln\frac{7}{4}$. **C.** $\frac{1}{6}\ln\frac{4}{7}$. **D.** $1+\ln\frac{4}{7}$.

Bài tập 39. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

A. $\frac{1}{2}(\ln\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} - \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1})$. **C.** $\frac{1}{2}(\ln\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} + \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1})$.

B. $\frac{1}{2}(\ln\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} - \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1})$. **D.** $\frac{1}{2}(\ln\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} + \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1})$.

b. $I = \int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx$.

A. $\frac{29}{270}$. **B.** $\frac{1}{30}$. **C.** $\frac{27}{20}$. **D.** $\frac{9}{70}$.

Bài tập 40. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_7^2 \frac{dx}{\sqrt{2+x}+1}$.

A. $\ln\frac{4}{3}+2$. **B.** $\ln\frac{4}{3}-2$. **C.** $2\ln\frac{4}{3}-2$. **D.** $2\ln\frac{4}{3}+2$.

b. $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x+\sqrt{x^2+1}}dx$.

A. $\frac{2\sqrt{2}-1}{15}$. **B.** $\frac{2\sqrt{2}+1}{15}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}-1}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}+1}{5}$.

c. $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}dx}{\sqrt{(1+x)^5}}$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Bài tập 41. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^a x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx$, với $a > 0$.

b. $I = \int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, với $a > 0$.

Bài tập 42. Tính tích phân:

$$I = \int_0^{2a} x\sqrt{2ax-x^2}\,dx, \text{ với } a > 0.$$

Bài tập 43. Tính tích phân:

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^n)\sqrt[n]{1+x^n}}.$$

Bài toán 5: Tính tích phân các hàm số siêu việt.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để xác định tích phân của các hàm số siêu việt ta cần linh hoạt lựa chọn một trong các phương pháp cơ bản sau:

1. Sử dụng các dạng nguyên hàm cơ bản.
2. Phương pháp phân tích.
3. Phương pháp đổi biến.
4. Phương pháp tích phân từng phần.

Bài tập 44. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^1 \frac{(1+e^x)^2}{e^x} dx$.

A. $e - \frac{1}{e} - 2$. **B.** $e + \frac{1}{e} + 2$. **C.** $e + \frac{1}{e} - 2$. **D.** $e - \frac{1}{e} + 2$.

b. $I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$.

A. $\ln\frac{2}{e+1}$. **B.** $\ln\frac{e+1}{2}$. **C.** $\ln\frac{2}{e+2}$. **D.** $\ln\frac{e+2}{2}$.

Bài tập 45. Tính tích phân:

a. $I = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} dx$.

A. $\ln\frac{2e}{1+e}$. **B.** $\ln\frac{e+1}{2e}$. **C.** $\ln\frac{2e}{1+2e}$. **D.** $\ln\frac{2e+1}{2e}$.

b. $I = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx$.

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{2}}{5}$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{5}$.

Bài tập 46. Tính tích phân:

$$I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$$

A. $2 + \frac{\pi}{2}$. **B.** $2 - \frac{\pi}{2}$. **C.** $1 + \frac{\pi}{4}$. **D.** $1 - \frac{\pi}{4}$.

Bài tập 47. Tính tích phân:

$$I = \int_1^e \frac{\ln(\sqrt[3]{1 + \ln^2 x}) dx}{x}.$$

A. $\ln 2 + \frac{\pi}{6}$. **B.** $\ln 3 + \frac{\pi}{6}$. **C.** $\frac{\ln 3 - 2}{3}$. **D.** $\frac{\ln 3 - 2}{3} + \frac{\pi}{6}$.

Bài tập 48. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^2 x.e^{-\frac{x}{2}} dx$.

A. $4 + \frac{8}{e}$. **B.** $4 - \frac{8}{e}$. **C.** $2 + \frac{4}{e}$. **D.** $2 - \frac{4}{e}$.

b. $I = \int_0^1 e^{x+e^x} dx$.

A. $e^{e+1} - e^e$. **B.** $e^{e+1} + e^e$. **C.** $e^{e+1} - 2e^e$. **D.** $e^{e+1} + 2e^e$.

Bài tập 49. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$.

A. $\ln\frac{2e}{e+1}$. **B.** $\ln\frac{e+1}{2e}$. **C.** $\ln\frac{2e}{e+2}$. **D.** $\ln\frac{e+2}{2e}$.

b. $I = \int_0^{\ln 2} \frac{5}{5+e^x}dx$.

A. $\ln\frac{12}{7}$. **B.** $\ln\frac{9}{5}$. **C.** $\ln\frac{6}{5}$. **D.** $\ln\frac{4}{3}$.

Bài tập 50. Tính các tích phân sau: $I = \int_0^{\ln 2} \frac{1-e^x}{1+e^x}dx$.

A. $\ln\frac{2}{3}$. **B.** $\ln\frac{4}{5}$. **C.** $\ln\frac{6}{7}$. **D.** $\ln\frac{8}{9}$.

HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Ta đi xét dấu hàm số $f(x) = x - 1$ trên đoạn $[0, 2]$, được:

x	0		1		2
f(x)		–	0	+	

Khi đó: $I = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx = (x - \frac{1}{2}x^2)\Big|_0^1 + (\frac{1}{2}x^2 - x)\Big|_1^2 = 1.$

b. Ta đi xét dấu hàm số $f(x) = x^2 + 2x - 3$ trên đoạn $[0, 2]$, được:

x	0		1		2
f(x)		–	0	+	

Khi đó: $I = -\int_0^1 (x^2 + 2x - 3)dx + \int_1^2 (x^2 + 2x - 3)dx$

$= -(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x)\Big|_0^1 + (\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x)\Big|_1^2 = 4.$

Bài tập 2.

a. Xét dấu $2x - 1$ và x trên $[-1, 1]$, được:

x	–1		0		1/2		1
2x – 1		–		–	0	+	
x		–	0	+		+	

Khi đó: $I = \int_{-1}^0 (1-2x+x)^2 dx + \int_0^{1/2} (1-2x-x)^2 dx + \int_{1/1}^1 (2x-1-x)^2 dx$

$= \int_{-1}^0 (1-x)^2 dx + \int_0^{1/2} (1-3x)^2 dx + \int_{1/1}^1 (x-1)^2 dx$

$$= \int_{-1}^{0}(x-1)^2\,dx + \int_{0}^{1/2}(3x-1)^2\,dx + \int_{1/1}^{1}(x-1)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{3}(x-1)^3\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{9}(3x-1)^3\Big|_{0}^{1/2} + \frac{1}{3}(x-1)^3\Big|_{1/2}^{1} = \frac{25}{8}.$$

b. Xét dấu $x-4$ và $x+3$ trên $[-5, 4]$, được:

x	−5		−3		4
x − 4		−		−	0
x + 3		−	0	+	

Khi đó: $I = \int_{-5}^{-3}\left(\frac{3}{3-x} + x + 3\right)dx + \int_{-3}^{4}\left(\frac{3}{3-x} - x - 3\right)dx$

$$= \left(-3\ln|3-x| + \frac{1}{2}x^2 + 3x\right)\Big|_{-5}^{-3} + \left(-3\ln|3-x| - \frac{1}{2}x^2 - 3x\right)\Big|_{-3}^{4} = 3\ln 8 - \frac{53}{2}.$$

Bài tập 3.

a. Ta biến đổi I về dạng: $I = \int_{1/2}^{2}\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\,dx = \int_{1/2}^{2}\left|x-\frac{1}{x}\right|dx$.

Ta đi xét dấu hàm số $f(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x}$ trên đoạn $[\frac{1}{2}, 2]$, được:

x	1/2		1		2
f(x)		−	0	+	

Khi đó: $I = -\int_{1/2}^{1}\left(x-\frac{1}{x}\right)dx + \int_{1}^{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)dx$

$$= -\left(\frac{1}{2}x^2 - \ln|x|\right)\Big|_{1/2}^{1} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \ln|x|\right)\Big|_{1}^{2} = \frac{9}{8}.$$

b. Ta có: $I = \int_{0}^{3}\sqrt{x(x-2)^2}\,dx = \int_{0}^{3}|x-2|\sqrt{x}\,dx$

$$= -\int_{0}^{2}(x-2)\sqrt{x}\,dx + \int_{2}^{3}(x-2)\sqrt{x}\,dx$$

$$= -\int_{0}^{2}(x^{3/2} - 2x^{1/2})\,dx + \int_{2}^{3}(x^{3/2} - 2x^{1/2})\,dx$$

$$= -\left(\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{4}{3}x^{3/2}\right)\Big|_{0}^{2} + \left(\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{4}{3}x^{3/2}\right)\Big|_{2}^{3} = \frac{32\sqrt{2} - 6\sqrt{3}}{15}.$$

Bài tập 4.

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$\cot x - \tan x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x.\sin x} = \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} = 2\cot 2x.$$

Khi đó: $I = \int_{\pi/8}^{3\pi/8} |\cot 2x| dx = \int_{\pi/8}^{\pi/4} \cot 2x dx - \int_{\pi/4}^{3\pi/8} \cot 2x dx$

$$= \int_{\pi/8}^{\pi/4} \frac{\cos 2x dx}{\sin 2x} - \int_{\pi/4}^{3\pi/8} \frac{\cos 2x dx}{\sin 2x} = \frac{1}{2} \int_{\pi/8}^{\pi/4} \frac{d(\sin 2x)}{\sin 2x} - \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{3\pi/8} \frac{d(\sin 2x)}{\sin 2x}$$

$$= \frac{1}{2} (\ln |\sin 2x|) \Big|_{\pi/8}^{\pi/4} - \frac{1}{2} (\ln |\sin 2x|) \Big|_{\pi/4}^{3\pi/8} = \ln \sqrt{2}.$$

Cách 2: Ta xét hàm số $f(x) = \cot x - \tan x$ trên đoạn $[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}]$ và thấy:

- Với $x \in [\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4})$ thì $\cot x > \tan x \Leftrightarrow f(x) > 0$.
- Với $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}]$ thì $\cot x < \tan x \Leftrightarrow f(x) < 0$.

Từ đó, suy ra:

$$I = \int_{\pi/8}^{\pi/4} (\cot x - \tan x) dx - \int_{\pi/4}^{3\pi/8} (\cot x - \tan x) dx$$

$$= \int_{\pi/8}^{\pi/4} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) dx - \int_{\pi/4}^{\pi/8} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) dx$$

$$= (\ln |\sin x| + \ln |\cos x|) \Big|_{\pi/8}^{\pi/4} - (\ln |\sin x| + \ln |\cos x|) \Big|_{\pi/4}^{3\pi/8} = \ln \sqrt{2}.$$

b. Hàm số $f(x) = \cot x - \cot 2x$ trên đoạn $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ luôn dương, do đó:

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/4} (\cot x - \cot 2x) dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \right) dx$$

$$= (\ln |\sin x| - \ln |\sin 2x|) \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \ln \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Bài tập 5.

a. Ta có:

$$\cos 3x.\sin^3 x + \sin 3x.\cos^3 x = \frac{1}{4} (3\sin x - \sin 3x)\cos 3x + \frac{1}{4} (3\cos x + \cos 3x)\sin 3x$$

$$= \frac{3}{4} (\sin x.\cos 3x + \cos x.\sin 3x) = \frac{3}{4} \sin 4x.$$

Từ đó, suy ra:

$$I = \frac{3}{4} \int_0^{\pi} |\sin 4x| dx = \frac{3}{2} \left(\int_0^{\pi/4} \sin 4x dx - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin 4x dx \right)$$

$$= \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{4} \cos 4x \Big|_0^{\pi/4} + \frac{1}{4} \cos 4x \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} \right) = \frac{3}{2}.$$

b. Bạn đọc tự chứng minh:

$$\tan(x-\frac{\pi}{3}).\tan x.\tan(x+\frac{\pi}{3}) = \tan 3x.$$

Từ đó, suy ra:

$$I = \int_{-\pi/12}^{\pi/12} |\,tg3x\,|\,dx = -\int_{-\pi/12}^{0} tg3x dx + \int_{0}^{\pi/12} tg3x dx$$

$$= -\int_{-\pi/12}^{0} \frac{\sin 3x dx}{\cos 3x} + \int_{0}^{\pi/12} \frac{\sin 3x dx}{\cos 3x}$$

$$= \frac{1}{3}(\ln|\cos 3x|)\Big|_{-\pi/12}^{0} - \frac{1}{3}(\ln|\cos 3x|)\Big|_{0}^{\pi/12} = \frac{2}{3}\ln\sqrt{2}.$$

Bài tập 6.

a. Ta viết lại tích phân dưới dạng: $I = \int_0^2 x|x-a|dx$.

Ta đi xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $a \geq 2$, khi đó:

$$I = -\int_0^2 x(x-a)dx = -\int_0^2 (x^2 - ax)dx = -(\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2})\Big|_0^2 = 2a - \frac{8}{3}.$$

Trường hợp 2: Nếu $0 < a < 2$, khi đó:

$$I = -\int_0^a x.(x-a)dx + \int_a^2 x.(x-a)dx = -\int_0^a (x^2 - ax)dx + \int_a^2 (x^2 - ax)dx$$

$$= -(\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2})\Big|_0^a + (\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2})\Big|_a^2 = \frac{a^3}{3} - 2a + \frac{8}{3}.$$

Trường hợp 3: Nếu $a \leq 0$, khi đó:

$$I = \int_0^2 x.(x-a)dx = \int_0^2 (x^2 - ax)dx = (\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2})\Big|_0^2 = \frac{8}{3} - 2a.$$

Tóm lại, ta được:

$$I = \begin{cases} 2a - \frac{8}{3} & \text{nếu } a \geq 2 \\ \frac{a^3}{3} - 2a + \frac{8}{3} & \text{nếu } 0 < a < 2. \\ \frac{8}{3} - 2a & \text{nếu } a \leq 0 \end{cases}$$

b. Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_1^2 |(x-2)(x-a)|dx = \int_1^2 (x-2)|x-a|dx.$$

Ta đi xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $a \geq 2$, khi đó:

$$I = -\int_1^2 (x-2)(x-a)dx = -\int_1^2 [x^2 - (a+2)x + 2a]dx$$

$$= -[\frac{x^3}{3} - \frac{(a+2)x^2}{2} + 2ax]\Big|_1^2 = \frac{4-3a}{6}.$$

Trường hợp 2: Nếu $1 < a < 2$, khi đó:

$$I = -\int_1^a (x-2)(x-a)dx + \int_a^2 (x-2)(x-a)dx$$

$$= -\int_1^a [x^2 - (a+2)x + 2a]dx + \int_a^2 [x^2 - (a+2)x + 2a]dx$$

$$= -[\frac{x^3}{3} - \frac{(a+2)x^2}{2} + 2ax]\Big|_1^a + [\frac{x^3}{3} - \frac{(a+2)x^2}{2} + 2ax]\Big|_a^2$$

$$= \frac{a^3}{3} - 2a^2 + \frac{7a}{2} - 2.$$

Trường hợp 3: Nếu $a \le 1$, khi đó:

$$I = \int_1^2 (x-2)(x-a)dx = \int_1^2 [x^2 - (a+2)x + 2a]dx$$

$$= [\frac{x^3}{3} - \frac{(a+1)x^2}{2} + ax]\Big|_1^2 = \frac{3a-4}{6}.$$

Tóm lại, ta được: $I = \begin{cases} \frac{4-3a}{6} & \text{nếu } a \ge 2 \\ \frac{a^3}{3} - 2a^2 + \frac{7a}{2} - 2 & \text{nếu } 1 < a < 2. \\ \frac{3a-4}{6} & \text{nếu } a \le 1 \end{cases}$

Bài tập 7.

a. Xét tam thức $f(x, m) = x^2 - 2x + m$, ta có $\Delta' = 1 - m$.

Ta đi xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $\Delta' \le 0 \Leftrightarrow 1 - m \le 0 \Leftrightarrow m \ge 1$. Khi đó:

$$I = \int_0^1 (x^2 - 2x + m)dx = (\frac{x^3}{3} - x^2 + mx)\Big|_0^1 = m - \frac{2}{3}.$$

Trường hợp 2: Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$. Khi đó:

$$f(x, m) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 = 1 + \sqrt{1-m} > 1 \\ x_2 = 1 - \sqrt{1-m} < 1 \end{bmatrix}.$$

- Nếu $x_2 \le 0$ thì $1 - \sqrt{1-m} \le 0$ hay $m \le 0$. Khi đó:

$$I = -\int_0^1 (x^2 - 2x + m)dx = -(\frac{x^3}{3} - x^2 + mx)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - m.$$

- Nếu $x_2 > 0$ thì $0 < m < 1$. Khi đó:

$$I = \int_0^{1-\sqrt{1-m}} (x^2 - 2x + m)dx - \int_{1-\sqrt{1-m}}^{1} (x^2 - 2x + m)dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + mx\right)\Big|_0^{1-\sqrt{1-m}} - \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + mx\right)\Big|_{1-\sqrt{1-m}}^{1}$$

$$= \frac{4(1-m)\sqrt{1-m} + 3m - 2}{3}.$$

Tóm lại, ta được:

$$I = \begin{cases} m - \frac{2}{3} & \text{nếu } m \geq 1 \\ \frac{4\sqrt{(1-m)^3} + 3m - 2}{3} & \text{nếu } 0 < m < 1. \\ \frac{2}{3} - m & \text{nếu } m \leq 0 \end{cases}$$

b. *Bạn đọc tự giải tương tự câu a).*

Bài tập 8.

a. Ta biến đổi:

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-1} = \frac{(a+b)x - a - 2b}{(x-1)(x-2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ -a - 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ a = 1 \end{cases}.$$

Từ đó, suy ra:

$$I = \int_{-1}^{0} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}\right)dx = (\ln|x-1| - \ln|x-2|)\Big|_{-1}^{0} = \ln\frac{3}{4}.$$

b. Để tiện minh hoạ phương pháp, ở đây sẽ trình bày lời giải thông qua phép tính nguyên hàm:

$$I' = \int \frac{(2x^3 - 10x^2 + 16x - 1)dx}{x^2 - 5x + 6}.$$

Biến đổi:

$$\frac{2x^3 - 10x^2 + 16x - 1}{x^2 - 5x + 6} = 2x + \frac{4x - 1}{x^2 - 5x + 6} = 2x + \frac{4x - 1}{(x-3)(x-2)}$$

$$= 2x + \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-2}.$$

Ta được hằng đẳng thức:

$$4x - 1 = a(x - 2) + b(x - 3). \qquad (1)$$

Để xác định a, b trong (1) ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Phương pháp đồng nhất hệ số

Khai triển vế phải của (1) và sắp xếp đa thức theo thứ tự bậc lùi dần, ta có:

$4x - 1 = (a + b)x - 2a - 3b.$

Đồng nhất hệ số, ta được: $\begin{cases} a + b = 4 \\ -2a - 3b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 11 \\ b = -7 \end{cases}$.

Cách 2: (*Phương pháp trị số riêng*): Lần lượt thay $x = 2$, $x = 3$ vào hai vế của (1) ta được hệ: $\begin{cases} a = 11 \\ b = -7 \end{cases}$.

Từ đó, suy ra: $\frac{2x^3 - 10x^2 + 16x - 1}{x^2 - 5x + 6} = 2x + \frac{11}{x-3} - \frac{7}{x-2}$.

Do đó: $I' = \int (2x + \frac{11}{x-3} - \frac{7}{x-2})dx = x^2 + 11\ln|x-3| - 7\ln|x-2| + C.$

Từ đó, suy ra: $I = (x^2 + 11\ln|x-3| - 7\ln|x-2|)\Big|_{-1}^{1} = 7\ln 3 - 11\ln 2.$

Chú ý:

1. Các em học sinh cần ghi nhận được cách thức thực hiện trong phép biến đổi phân thức: $\frac{2x^3 - 10x^2 + 16x - 1}{x^2 - 5x + 6}$.
   a. Ở bước đầu tiên, ta thực hiện phép chia đa thức (TS cho MS).
   b. Ở bước thứ hai, với nhận xét $\Delta > 0$ ta thực hiện phép phân tích đa thức:
   $$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2).$$
   c. Cuối cùng, là việc phân tách.

   Những lưu ý trên, cho dù rất hiển nhiên nhưng đó chính là định hướng chủ đạo trong việc thực hiện.
2. Trong lời giải trên, việc xác định các hệ số a, b bằng hai cách có độ phức tạp gần giống nhau, tuy nhiên với bài toán cần phân tích thành nhiều hạng tử thì cách 2 thường tỏ ra đơn giản hơn.

Bài tập 9.

a. Sử dụng đồng nhất thức $x = \frac{1}{2}(1 + 2x - 1)$, ta được:

$$\frac{x}{(1+2x)^3} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+2x)^2} - \frac{1}{(1+2x)^3}\right].$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{1}{(1+2x)^2} - \frac{1}{(1+2x)^3}\right]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2(1+2x)} + \frac{1}{4(1+2x)^2}\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{18}.$$

b. Đặt $t = x^4$ suy ra $dt = 4x^3dx$.

Đổi cận:

- $x = 0 \Rightarrow t = 0.$
- $x = 1 \Rightarrow t = 1.$

Khi đó: $I = \frac{1}{4}.\int_0^1 \frac{dt}{(t^2-4)^2}$.

Sử dụng đồng nhất thức $1 = \frac{1}{16}[(t+2)-(t-2)]^2$, ta được:

$$I = \frac{1}{64}\int_0^1 \frac{[(t+2)-(t-2)]^2}{(t^2-4)^2}dt = \frac{1}{64}\int_0^1 [\frac{1}{(t-2)^2} - \frac{2}{t^2-4} + \frac{1}{(t+2)^2}]dt$$

$$= \frac{1}{64}[-\frac{1}{t-2} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| - \frac{1}{t+2}]\Big|_0^1 = \frac{1}{96} + \frac{\ln 3}{128}.$$

Bài tập 10.

a. Tham khảo bài tập 8 câu b) chủ đề 3, ta suy ra:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2 - x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right|\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}.$$

b. Biến đổi:

$$\frac{1+x^4}{1+x^6} = \frac{x^4-x^2+1+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{x^2}{x^6+1}.$$

Khi đó: $I = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}}_{I_1} + \underbrace{\int_0^1 \frac{x^2dx}{x^6+1}}_{I_2}$. (1)

Với tích phân I_1, ta đặt $x = tgt, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ suy ra $dx = \frac{dt}{\cos^2 t} = (1+tg^2t)dt$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$.
- Với $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó: $I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{(1+tg^2t)dt}{tg^2t+1} = \int_0^{\pi/4} dt = t\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}$. (2)

Với tích phân I_2, ta đặt $x^3 = tgt, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ suy ra $3x^2dx = \frac{dt}{\cos^2 t} = (1+tg^2t)dt$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$.
- Với $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó: $I_2 = \frac{1}{3}.\int_0^{\pi/4} \frac{(1+tg^2t)dt}{tg^2t+1} = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} dt = \frac{1}{3}t\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{12}$. (3)

Thay (2), (3) vào (1), ta được $I = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$.

Bài tập 11.

a. Sử dụng đồng nhất thức $x^2 = (1-x)^2 - 2(1-x) + 1$ ta được:

$$\frac{x^2}{(1-x)^9} = \frac{(1-x)^2 - 2(1-x)+1}{(1-x)^9} = \frac{1}{(1-x)^7} - \frac{2}{(1-x)^8} + \frac{1}{(1-x)^9}.$$

Khi đó: $I = \int_2^3 \frac{dx}{(1-x)^7} - 2\int_2^3 \frac{dx}{(1-x)^8} + \int_2^3 \frac{dx}{(1-x)^9}$

$$= -\int_2^3 \frac{d(1-x)}{(1-x)^7} + 2\int_2^3 \frac{d(1-x)}{(1-x)^8} - \int_2^3 \frac{d(1-x)}{(1-x)^9}\Big|_2^3$$

$$= \frac{1}{6(1-x)^6}\Big|_2^3 - \frac{2}{7(1-x)^7}\Big|_2^3 + \frac{1}{8(1-x)^8}\Big|_2^3$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2^6} - 1\right) + \frac{2}{7}\left(\frac{1}{2^7} + 1\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2^8} - 1\right).$$

b. Sử dụng đồng nhất thức (*công thức Taylo*):

$$x^3 = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$$

ta được: $\frac{x^3}{(x-1)^{10}} = \frac{1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3}{(x-1)^{10}}$

$$= \frac{1}{(x-1)^{10}} + \frac{3}{(x-1)^9} + \frac{3}{(x-1)^8} + \frac{1}{(x-1)^7}.$$

Khi đó: $I = \int_2^4 \left[\frac{1}{(x-1)^{10}} + \frac{3}{(x-1)^9} + \frac{3}{(x-1)^8} + \frac{1}{(x-1)^7}\right]dx$

$$= \left[-\frac{1}{9(x-1)^9} - \frac{3}{8(x-1)^8} - \frac{3}{7(x-1)^7} - \frac{1}{6(x-1)^6}\right]\Big|_2^4$$

$$= \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{3^9}\right) + \frac{3}{8}\left(1 - \frac{1}{3^8}\right) + \frac{3}{7}\left(1 - \frac{1}{3^7}\right) + \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{3^6}\right).$$

Bài tập 12.

a. Biến đổi: $\frac{x^3 + 2x^2 + 10x + 1}{x^2 + 2x + 9} = x + \frac{x+1}{x^2 + 2x + 9} = x + \frac{1}{2}.\frac{2x+2}{x^2 + 2x + 9}.$

Khi đó: $I = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2}.\frac{2x+2}{x^2 + 2x + 9}\right)dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln|x^2 + 2x + 9|\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}.$

b. Biến đổi: $\frac{4x+11}{x^2 + 5x + 6} = \frac{4x+11}{(x+2)(x+3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+3} = \frac{(a+b)x + 3a + 2b}{(x+2)(x+3)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ 3a + 2b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Khi đó: $\frac{4x+11}{x^2 + 5x + 6} = \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+3}.$

Do đó: $I = \int_0^1 \left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+3}\right)dx = (3\ln|x+2| + \ln|x+3|)\Big|_0^1 = \ln\frac{9}{2}$.

Bài tập 13.

a. Biến đổi:

$$\frac{x^2+2x-2}{x^3+1} = \frac{x^2+2x-2}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b(2x-1)}{x^2-x+1} + \frac{c}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{(a+2b)x^2 - (a-b-c)x + a - b + c}{x^3+1}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+2b=1 \\ -a+b+c=2 \\ a-b+c=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=0 \end{cases}.$$

Khi đó: $\frac{x^2+2x-2}{x^3+1} = -\frac{1}{x+1} + \frac{2x-1}{x^2-x+1}$.

Do đó: $I = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{2x-1}{x^2-x+1}\right)dx = \left(\ln\left|\frac{x^2-x+1}{x+1}\right|\right)\Big|_1^2 = \ln 2.$

b. Biến đổi: $\frac{1}{x^3+2x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$

$$= \frac{(a+b)x^2 + (2a+b+c)x + a}{x(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b+c=0 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}.$$

Khi đó: $\frac{1}{x^3+2x^2+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$.

Do đó: $I = \int_1^2 \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right]dx = (\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1})\Big|_1^2 = \ln\frac{4}{3} - \frac{1}{6}$.

Bài tập 14.

a. Ta có:

$$\frac{x^3-3x^2+x+6}{x^3-5x^2+6x} = 1 + \frac{2x^2-5x+6}{x^3-5x^2+6x} = 1 + \frac{2x^2-5x+6}{x(x-2)(x-3)}$$

$$= 1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}.$$

Ta được hằng đẳng thức:

$$2x^2 - 5x + 6 = a(x-3)(x-2) + bx(x-3) + cx(x-2). \quad (1)$$

Để xác định a, b, c trong (1) ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (*Phương pháp đồng nhất hệ số*): Khai triển vế phải của (1) và sắp xếp đa thức theo thứ tự bậc lùi dần, ta có:

$$2x^2 - 5x + 6 = (a + b + c)x^2 - (5a + 3b + 2c)x + 6a.$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được: $\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 5a + 3b + 2c = 5 \\ 6a = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$.

Cách 2: (*Phương pháp trị số riêng*): Lần lượt thay x = 0, x = 2, x = 3 vào hai vế của (1) ta được a = 1, b = –2 và c = 3.

Khi đó: $\dfrac{x^3 - 3x^2 + x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} = 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{3}{x-3}$.

Do đó: $I = \int\limits_4^5 \left(1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{3}{x-3}\right)dx$

$= (x + \ln|x| - 2\ln|x - 2| + 3\ln|x - 3|)\Big|_4^5 = 1 + \ln\dfrac{40}{9}$.

Chú ý: Nếu chưa có được kiến thức về dạng phân tích các em học sinh có thể định hướng thông qua phép biến đổi dần, cụ thể:

$$\frac{x^3 - 3x^2 + x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} = 1 + \frac{2x^2 - 5x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x}$$

$$= 1 + \frac{3x^2 - 10x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} - \frac{x^2 - 5x}{x^3 - 5x^2 + 6x}$$

$$= 1 + \frac{3x^2 - 10x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} - \frac{x - 5}{x^2 - 5x + 6}$$

$$= 1 + \frac{3x^2 - 10x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} - \frac{x - 5}{(x-2)(x-3)}$$

$$= 1 + \frac{3x^2 - 10x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} - \left(\frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3}\right)$$

$$= 1 + \frac{3x^2 - 10x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} - \frac{(a+b)x - 3a - 2b}{(x-2)(x-3)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ -3a - 2b = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}.$$

Khi đó: $\dfrac{x^3 - 3x^2 + x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} = 1 + \dfrac{3x^2 - 10x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} - \dfrac{3}{x-2} + \dfrac{2}{x-3}$.

Do đó: $I = \int\limits_4^5 \left(1 + \dfrac{3x^2 - 10x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} - \dfrac{3}{x-2} + \dfrac{2}{x-3}\right)dx$

$= (x + \ln|x^3 - 5x^2 + 6x| - 3\ln|x - 2| + 2\ln|x - 3|)\Big|_4^5 = 1 + \ln\dfrac{40}{9}$.

b. Ta có:

$$\frac{7x-4}{x^3-3x+2}=\frac{7x-4}{(x+2)(x-1)^2}=\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+2}$$

$$=\frac{(b+c)x^2+(a+b-2c)x+2a-2b+c}{(x+2)(x-1)^2}$$

Ta được hằng đẳng thức:

$7x-4=a(x+2)+b(x-1)(x+2)+c(x-1)^2$. (1)

Để xác định a, b, c trong (1) ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (*Phương pháp đồng nhất hệ số*): Khai triển vế phải của (1) và sắp xếp đa thức theo thứ tự bậc lùi dần, ta có:

$7x-4=(b+c)x^2+(a+b-2c)x+2a-2b+c.$

Đồng nhất đẳng thức, ta được: $\begin{cases}b+c=0\\a+b-2c=7\\2a-2b+c=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\\c=-2\end{cases}$.

Cách 2: (*Phương pháp trị số riêng*): Lần lượt thay $x=0$, $x=2$, $x=3$ vào hai vế của (1) ta được hệ: $\begin{cases}a=1\\b=2\\c=-2\end{cases}$.

Khi đó: $\frac{7x-4}{x^3-3x+2}=\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+2}$.

Do đó: $I=\int_{-1}^{0}\left[\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+2}\right]dx$

$$=\left(-\frac{1}{x-1}+2\ln|x-1|-2\ln|x+2|\right)\Big|_{-1}^{0}=\frac{1}{2}-4\ln 2.$$

Bài tập 15.

a. Ta có:

$$\frac{x^3-x^2-4x-1}{x^4+x^3}=\frac{x^3-x^2-4x-1}{x^3(x+1)}=\frac{a}{x^3}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x}+\frac{d}{x+1}$$

$$=\frac{(c+d)x^3+(b+c)x^2+(a+b)x+a}{x^3(x+1)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}c+d=1\\b+c=-1\\a+b=-4\\a=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-3\\c=2\\d=-1\end{cases}.$$

Khi đó: $\frac{x^3-x^2-4x-1}{x^4+x^3}=-\frac{1}{x^3}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x}-\frac{1}{x+1}$.

Do đó: $I = \int_1^2 (-\frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1})dx = (\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{x} + 2\ln|x| - \ln|x+1|)\Big|_1^2$

$= \ln\frac{8}{3} - \frac{15}{7}$.

b. Biến đổi: $\frac{1}{x^4+4x^2+3} = \frac{1}{(x^2+1)(x^2+3)} = \frac{1}{2}.(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+3})$.

Khi đó: $I = \frac{1}{2}.(\underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}}_{I_1} - \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{x^2+3}}_{I_2})$. (1)

Với tích phân I_1, ta đặt $x = \tan t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ suy ra $dx = \frac{dt}{\cos^2 t} = (1 + \tan^2 t)dt$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$.
- Với $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó: $I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{(1+\tan^2 t)dt}{\tan^2 t + 1} = \int_0^{\pi/4} dt = t\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}$. (2)

Với tích phân I_2, ta đặt $x = \sqrt{3}\tan t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ suy ra:

$dx = \frac{\sqrt{3}dt}{\cos^2 t} = \sqrt{3}(1 + \tan^2 t)dt$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$.
- Với $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{6}$.

Khi đó: $I_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\pi/6} \frac{(1+\tan^2 t)dt}{\tan^2 t + 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\pi/6} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} t\Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$. (3)

Thay (2), (3) vào (1), ta được $I = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{12\sqrt{3}}$.

Bài tập 16.

a. Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$, khi đó $dt = -dx$.

Đổi cận:

- $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.
- $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.

Khi đó: $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^6 x.dx}{\sin^6 x + \cos^6 x} = \int_{\pi/2}^{0} \frac{\sin^6(\frac{\pi}{2} - t)(-dt)}{\sin^6(\frac{\pi}{2} - t) + \cos^6(\frac{\pi}{2} - t)}$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^6 t.dt}{\sin^6 t + \cos^6 t} = \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^6 x.dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}}_{J}.$$

Mặt khác, ta có: $I + J = \int_0^{\pi/2} dx = x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$.

Từ đó, suy ra $I = \frac{\pi}{4}$.

Chú ý: Phương pháp trên được sử dụng cho dạng tổng quát:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2n} x.dx}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}, \text{ với } n \in \mathbf{N}^+.$$

b. Sử dụng đồng nhất thức:

$$1 = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\sin[(x + \frac{\pi}{6}) - x]}{\frac{1}{2}} = 2\sin[(x + \frac{\pi}{6}) - x].$$

Ta được: $\frac{dx}{\sin x.\sin(x + \frac{\pi}{6})} = \frac{2\sin[(x + \frac{\pi}{6}) - x]}{\sin x.\sin(x + \frac{\pi}{6})}$

$$= \frac{2[\sin(x + \frac{\pi}{6})\cos x - \sin x.\cos(x + \frac{\pi}{6})]}{\sin x.\sin(x + \frac{\pi}{6})}$$

$$= 2[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos(x + \frac{\pi}{6})}{\sin(x + \frac{\pi}{6})}].$$

Khi đó: $I = 2\int_{\pi/6}^{\pi/3} [\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos(x + \frac{\pi}{6})}{\sin(x + \frac{\pi}{6})}]dx = 2[\ln|\sin x| - \ln|\sin(x + \frac{\pi}{6})|]\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \ln\frac{9}{4}$.

Bài tập 17.

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách giải sau:

Cách 1: Giả sử:

$$4\sin x = a(\sin x + \cos x) + b(\cos x - \sin x) = (a - b)\sin x + (a + b)\cos x$$

Đồng nhất hệ số, ta được: $\begin{cases} a-b=4 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases}$.

Khi đó: $I = \int_0^{\pi/2} \frac{2dx}{(\sin x+\cos x)^2} - 2\int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x-\sin x)dx}{(\sin x+\cos x)^3}$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{2dx}{2\sin^2(x+\frac{\pi}{4})} - \int_0^{\pi/2} \frac{2d(\sin x+\cos x)}{(\sin x+\cos x)^3}$$

$$= [-\cot g(x+\frac{\pi}{4}) + \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}]\Big|_0^{\pi/2} = 2.$$

Cách 2: Sử dụng nguyên hàm phụ bằng việc xét tích phân:

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{4\cos x.dx}{(\sin x+\cos x)^3}.$$

Ta có nhận xét:

$$I+J = \int_0^{\pi/2} \frac{4}{(\sin x+\cos x)^2}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2(x+\frac{\pi}{4})} = -\cot(x+\frac{\pi}{4})\Big|_0^{\pi/2} = 4.$$

$$J-I = \int_0^{\pi/2} \frac{4(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^3}dx = -\frac{2}{(\sin x+\cos x)^2}\Big|_0^{\pi/2} = 0.$$

Từ đó, suy ra $I = 2$.

b. Đặt $t = \sin x$, khi đó $dt = \cos x dx$.

Đổi cận:

- $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$.
- $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó: $I = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dt}{t^4(1-t^2)} = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{(t^4-t^4+t^2-t^2+1)dt}{t^4(1-t^2)}$

$$= \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} (\frac{1}{1-t^2}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^4})dt = (\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{t} - \frac{1}{3t^3})\Big|_{1/2}^{\sqrt{3}/2}$$

$$= \ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{14}{3} - \frac{26}{9\sqrt{3}}.$$

Bài tập 18.

a. Giả sử:

$$\sin x + 7\cos x + 6 = a(4\sin x + 3\cos x + 5) + b(4\cos x - 3\sin x) + c$$
$$= (4a-3b)\sin x + (3a+4b)\cos x + 5a + c.$$

Đồng nhất hệ số, ta được: $\begin{cases} 4a - 3b = 1 \\ 3a + 4b = 7 \\ 5a + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1.$

Khi đó: $I = \int_0^{\pi/2} (1 + \frac{4\cos x - 3\sin x}{4\sin x + 3\cos x + 5} + \frac{1}{4\sin x + 3\cos x + 5})dx$

$$= \int_0^{\pi/2} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{(4\cos x - 3\sin x)dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} + \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}. \quad (1)$$

Trong đó:

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} dx = x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{(4\cos x - 3\sin x)dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int_0^{\pi/2} \frac{d(4\sin x + 3\cos x + 5)}{4\sin x + 3\cos x + 5}$$

$$= \ln|4\sin x + 3\cos x + 5|\Big|_0^{\pi/2} = \ln\frac{9}{8}. \quad (3)$$

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5[1 + \cos(x - \alpha)]} = \frac{1}{10} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x - \alpha}{2}}$$

$$= \frac{1}{10} \tan\frac{x - \alpha}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{6}. \quad (4)$$

Thay (2), (3), (4) vào (1), ta được $I = \frac{\pi}{2} + \ln\frac{9}{8} + \frac{1}{6}$.

Chú ý:

1. Giá trị α trong lời giải trên được xác định bởi $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ và $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.
2. Lời khuyên dành cho các em học sinh trong việc tính giá trị của I_3 là sử dụng phép đặt ẩn phụ $t = \tan\frac{x}{2}$, cụ thể:

Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$, ta được:

$$dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2}(1 + \tan^2\frac{x}{2})dx = \frac{1}{2}(1 + t^2)dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1 + t^2},$$

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2} \text{ và } \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Đổi cận:

- $x = 0 \Rightarrow t = 0.$
- $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1.$

Khi đó: $I_3 = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{8t}{1+t^2} + \frac{3(1-t^2)}{1+t^2} + 5} = \int_0^1 \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$.

b. Biến đổi I về dạng:

$$I = \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{3\sin x dx}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{4\cos x dx}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}}_{I_2}. \quad (1)$$

Với tích phân I_1 đặt t = cosx, khi đó dt = − sinxdx.

Đổi cận:

- $x = 0 \Rightarrow t = 1$.
- $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.

Khi đó: $I_1 = \int_1^0 \frac{-3dt}{3(1-t^2)+4t^2} = 3\int_0^1 \frac{dt}{3+t^2}$.

Đặt $t = \sqrt{3}\tan u$, $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ suy ra:

$$dt = \frac{\sqrt{3}du}{\cos^2 u} = \sqrt{3}(1+\tan^2 u)du \text{ và } \frac{dt}{t^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{(1+\tan^2 u)du}{\tan^2 u + 1} = \frac{du}{\sqrt{3}}.$$

Đổi cận:

- $t = 0 \Rightarrow u = 0$.
- $t = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{6}$.

Khi đó: $I_1 = \frac{3}{\sqrt{3}}\int_0^{\pi/6} du = \frac{3}{\sqrt{3}} u\Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. (2)

Với tích phân I_2 đặt t = sinx, khi đó dt = cosxdx.

Đổi cận:

- $x = 0 \Rightarrow t = 0$.
- $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Khi đó: $I_2 = \int_0^1 \frac{4dt}{3t^2 + 4(1-t^2)} = 4\int_0^1 \frac{dt}{4-t^2} = \ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right|\Big|_0^1 = \ln 3$. (3)

Thay (2), (3) vào (1) ta được $I = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \ln 3$.

Bài tập 19.

a. Ta có: $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos^2(x - \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{2}\tan(x - \frac{\pi}{4})\Big|_0^{\pi/2} = 1$

b. Ta có: $I=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\cos^2 x}.\frac{dx}{\cos^2 x}=\int_0^{\pi/4}(1+\tan^2 x)d(\tan x)=(\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x)\Big|_0^{\pi/4}=\frac{4}{3}$.

Bài tập 20.

a. Đặt t = cosx, khi đó dt = – sinxdx.

Đổi cận:

- $x=0\Rightarrow t=1$.
- $x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó: $I=-\int_1^{\sqrt{2}/2}\frac{4(1-t^2)dt}{1+t^4}=4\int_1^{\sqrt{2}/2}\frac{(t^2-1)dt}{1+t^4}$.

Tới đây, tham khảo bài tập 8 câu b) chủ đề 3, ta suy ra:

$$I=\frac{4}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-x\sqrt{2}+}{x^2+x\sqrt{2}+}\right|^{\sqrt{2}/2}_{1}=\frac{4}{2\sqrt{2}}\ln\frac{5(2+\sqrt{2})}{2-\sqrt{2}}.$$

b. Ta biến đổi: $I=\int_0^{\pi/2}\frac{(1-2\sin^2 x)dx}{1+\cos x}=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\cos x}-2\int_0^{\pi/2}(1-\cos x)dx$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}-2\int_0^{\pi/2}(1-\cos x)dx=\text{tg}\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi/2}-2(x-\sin x)\Big|_0^{\pi/2}=3-\pi.$$

Bài tập 21.

a. Đặt t = cosx, khi đó dt = – sinxdx.

Đổi cận:

- $x=0\Rightarrow t=1$.
- $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0$.

Khi đó: $I=-\int_1^0\frac{(1-t^2)dt}{1+t^2}=\int_0^1\left(\frac{2}{t^2+1}-1\right)dt=2\underbrace{\int_0^1\frac{dt}{t^2+1}}_{I_1}-\underbrace{\int_0^1 dt}_{I_2}$. (1)

Với tích phân I_1 đặt t = tgu, $-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$ suy ra $dt=\frac{du}{\cos^2 u}=(1+\text{tg}^2u)du$.

Đổi cận :

- t = 0 thì u = 0.
- t = 1 thì $u=\frac{\pi}{4}$.

Khi đó: $I=\int_0^{\pi/4}\frac{(1+\text{tg}^2u)du}{\text{tg}^2u+1}=\int_0^{\pi/4}du=u\Big|_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}$. (2)

Với tích phân I_2 ta có ngay $I_2=1$. (3)

Thay (2), (3) vào (1), ta được $I=\frac{\pi}{2}-1$.

b. *Tham khảo bài tập 13 câu b) chủ đề 3.*

Bài tập 22.

a. *Tham khảo bài tập 24 câu a) chủ đề 3.*

b. Biến đổi I về dạng:

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(2x-1)(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{\pi/2}(2x-1)dx}_{I_2}+\underbrace{\int_0^{\pi/2}x\cos 2xdx}_{I_2}. \quad (1)$$

Với tích phân I_1, ta có ngay:

$$I_1=\int_0^{\pi/2}(2x-1)dx=(x^2-x)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

Tích phân I_2 được tính bằng phương pháp tích phân từng phần, đặt:

$$\begin{cases}u=x\\dv=\cos 2xdx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}du=dx\\v=\frac{1}{2}\sin 2x\end{cases}.$$

Khi đó: $I_2=\frac{1}{2}x\sin 2x\Big|_0^{\pi/2}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2xdx=\frac{1}{2}(x\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x)\Big|_0^{\pi/2}$

$$=\frac{\pi}{2}-1. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) ta được $I=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}-1=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{4}-1.$

Bài tập 23.

a. Đặt $t=\pi-x$, khi đó $dt=-dx$.

Đổi cận:

- $x=0\Rightarrow t=\pi.$
- $x=\pi\Rightarrow t=0.$

Khi đó: $I=\int_\pi^0(\pi-t).\cos^4(\pi-t).\sin^3(\pi-t)(-dt)=\int_0^\pi(\pi-t).\cos^4 t.\sin^3 tdt$

$$=\pi\int_0^\pi.\cos^4 t.\sin^3 tdt-\int_0^\pi t.\cos^4 t.\sin^3 tdt=\pi\int_0^\pi.\cos^4 t.\sin^3 tdt-I$$

$$\Leftrightarrow 2I=\pi\int_0^\pi.\cos^4 t.\sin^3 tdt\Leftrightarrow I=\frac{\pi}{2}\underbrace{\int_0^\pi.\cos^4 t.\sin^2 t.\sin tdt}_{J}.$$

Với tích phân J, đặt $u=\cos t$, khi đó $du=-\sin t.dt$.

Đổi cận:

- $t=0\Rightarrow u=1.$
- $t=\pi\Rightarrow u=-1.$

Khi đó: $J=-\int_1^{-1}u^4(1-u^2)du=-\int_1^{-1}(u^4-u^6)du=-(\frac{1}{5}u^5-\frac{1}{7}u^7)\Big|_1^{-1}=\frac{4}{35}.$

Từ đó suy ra $I=\frac{2\pi}{35}.$

b. Viết lại I dưới dạng: $I = \underbrace{\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{\pi/3} \frac{x dx}{\cos^2 x}}_{I_2}$, (1)

Với tích phân I_1, ta có ngay: $I_1 = -\int_0^{\pi/3} \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}\Big|_0^{\pi/3} = 1.$ (2)

Với tích phân I_2, đặt: $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = tgx \end{cases}$.

Khi đó:

$$I_2 = xtgx\Big|_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} tgxdx = (xtgx + \ln|\cos x|)\Big|_0^{\pi/3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln 2. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) ta được $I = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln 2 + 1$.

Bài tập 24.

a. Đặt $t = 2\pi - x$, khi đó $dt = -dx$.

Đổi cận:

- $x = 0 \Rightarrow t = 2\pi$.
- $x = 2\pi \Rightarrow t = 0$.

Khi đó: $I = -\int_{2\pi}^{0} \frac{(2\pi - t).\cos(2\pi - t)dt}{1 + \sin^2(2\pi - t)} = 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos t dt}{1 + \sin^2 t} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{t.\cos t.dt}{1 + \sin^2 t}}_{I}$

$$\Leftrightarrow 2I = 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos t dt}{1 + \sin^2 t} \Leftrightarrow I = \pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos t dt}{1 + \sin^2 t}.$$

Đặt $u = \sin t$, khi đó $du = \cos t dt$.

Đổi cận:

- $t = 0 \Rightarrow u = 0$.
- $t = 2\pi \Rightarrow u = 0$.

Khi đó $I = \pi \int_0^0 \frac{du}{1 + u^2} = 0$.

b. *Tham khảo bài tập 20 câu b) chủ đề 3.*

Bài tập 25. *Bạn đọc tự giải bằng phương pháp tích phân từng phần.*

Bài tập 26.

a. Với tích phân I, bằng phép đổi biến $t = \sin^2 x$ suy ra $dt = \sin 2x dx$.

Đổi cận :

- Với $x = 0$ thì $t = 0$.
- Với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 1$.

Khi đó $I = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{\pi}{4}$.

Tương tự ta cũng được $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x dx}{1+\cos^4 x} = \frac{\pi}{4}$.

b. Ta có : $\sin^4 x + \cos^4 x \le 1 \Leftrightarrow 2 + \sin^4 x + \cos^4 x \le 3$

$$\Rightarrow \frac{\cos x.\sin x}{(1+\sin^4 x)(1+\cos^4 x)} = \frac{\sin 2x}{2(1+\sin^4 x)(1+\cos^4 x)}$$

$$\ge \frac{1}{6}\frac{(1+\sin^4 x+1+\cos^4 x)\sin 2x}{2(1+\sin^4 x)(1+\cos^4 x)} = \frac{1}{6}\left(\frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x} + \frac{co.s2x}{1+\sin^4 x}\right)$$

dấu đẳng thúc chỉ xảy ra tại $x = 0$ hoặc $x = \frac{\pi}{2}$, do đó:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x.\sin x}{(1+\sin^4 x)(1+\cos^4 x)}dx > \frac{1}{6}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2xdx}{1+\sin^4 x} + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2xdx}{1+\cos^4 x}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

Bài tập 27.

a. Ta có: $\frac{\sin x}{\sin x+\cos x} = \frac{(a-b)\sin x+(a+b)\cos x}{\sin x+\cos x}$

Đồng nhất hệ số, ta được: $\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-a \end{cases}$.

Khi đó: $\frac{\sin x}{\sin x+\cos x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$. (1)

b. Sử dụng (1) ta được:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \frac{(\cos x-\sin x)dx}{\sin x+\cos x} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}(\ln|\sin x+\cos x|)\Big|_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Bài tập 28.

a. Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$, khi đó $dt = -dx$.

Đổi cận:

- $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.
- $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.

Khi đó: $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x.dx}{\sin^4 x+\cos^4 x} = \int_{\pi/2}^0 \frac{\sin^4(\frac{\pi}{2}-t)(-dt)}{\sin^4(\frac{\pi}{2}-t)+\cos^4(\frac{\pi}{2}-t)}$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4 t.dt}{\sin^4 t+\cos^4 t} = \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4 x.dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}}_{I}, \text{ đpcm.}$$

b. Mặt khác, ta có: $I + J = \int_0^{\pi/2} dx = x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$.

Bài tập 29. Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$, khi đó $dt = -dx$.

Đổi cận:

- $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.
- $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.

Khi đó: $I = -\int_{\pi/2}^{0} \frac{\sqrt{\sin(\frac{\pi}{2} - t)}dt}{\sqrt{\sin(\frac{\pi}{2} - t)} + \sqrt{\cos(\frac{\pi}{2} - t)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos t}dt}{\sqrt{\sin t} + \sqrt{\cos t}} = J.$

Mặt khác, ta có: $I + J = \int_0^{\pi/2} dx = x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = J = \frac{\pi}{4}$.

Bài tập 30.

a. Ta có: $\frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2} = \frac{a\cos x}{(2+\sin x)^2} + \frac{b\cos x}{2+\sin x}$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin x.\cos x}{(2+\sin x)^2} = \frac{(a+2b)\cos x + b\sin x.\cos x}{(2+\sin x)^2}$$

Đồng nhất hệ số, ta được: $\begin{cases} a + 2b = 0 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 2 \end{cases}$.

Khi đó: $\frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2} = -\frac{4\cos x}{(2+\sin x)^2} + \frac{2\cos x}{2+\sin x}$. (1)

b. Sử dụng (1) ta được: $I = \int_{-\pi/2}^{0} [-\frac{4\cos x}{(2+\sin x)^2} + \frac{2\cos x}{2+\sin x}]dx$

$$= \int_{-\pi/2}^{0} [-\frac{4}{(2+\sin x)^2} + \frac{2}{2+\sin x}]d(\sin x)$$

$$= (\frac{4}{2+\sin x} + \ln|2+\sin x|)\Big|_{-\pi/2}^{0} = \ln 2 - 2.$$

Chú ý: Giả sử bài toán được phát biểu tổng quát hơn, như:

"Tính tích phân $I = \int_{-\pi/2}^{0} \frac{\sin 2x dx}{(2+\sin x)^2}$"

Để các em học sinh dễ nhìn nhận ra phương pháp thực hiện, ta trình bày như sau:
Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_{-\pi/2}^{0} \frac{2\sin x.\cos x dx}{(2+\sin x)^2}$$

Đặt t = sinx, khi đó dt = cosxdx.

Đổi cận:

- $x = 0 \Rightarrow t = 0.$
- $x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow t = -1.$

Khi đó: $I = 2\int_{-1}^{0}\frac{tdt}{(2+t)^2} = 2\int_{-1}^{0}\frac{(2+t)-2}{(2+t)^2}dt = 2\int_{-1}^{0}[\frac{1}{2+t} - \frac{1}{(2+t)^2}]dt$

$= 2(\ln|2+t| + \frac{1}{2+t})\Big|_{-1}^{0} = 2\ln 2 - 1.$

Bài tập 31.

a. Đặt $t = \sqrt{x^2+1}$ suy ra $dt = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow dx = \frac{tdt}{x}.$

Đổi cận:

- Với x = 0 thì t = 1.
- Với x = 1 thì $t = \sqrt{2}$.

Khi đó: $I = \int_{1}^{\sqrt{2}}(t^2-1)t^2dt = \int_{1}^{\sqrt{2}}(t^4-t^2)dt = (\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3)\Big|_{1}^{\sqrt{2}} = \frac{2}{15}(\sqrt{2}+1).$

b. Đặt $t = \sqrt{x^2+1}$ suy ra $dt = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow xdx = tdt.$

Đổi cận:

- Với x = 0 thì t = 1.
- Với $x = 2\sqrt{2}$ thì t = 3.

Khi đó: $I = \int_{1}^{3}t^2dt = \frac{1}{3}t^3)\Big|_{1}^{3} = \frac{26}{3}.$

Bài tập 32.

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách đặt ẩn phụ sau:

Cách 1: Đặt t = 3x + 1 suy ra dt = 3dx.

Đổi cận:

- Với x = 0 thì t = 1.
- Với $x = \frac{7}{3}$ thì t = 8.

Khi đó: $I = \frac{1}{9}\int_{1}^{8}\frac{(t+2)dt}{\sqrt[3]{t}} = \frac{1}{9}\int_{1}^{8}(t^{2/3} + 2t^{-1/3})dt = \frac{1}{9}(\frac{3}{5}t^{5/3} + 3t^{2/3})\Big|_{1}^{8} = \frac{46}{15}.$

Cách 2: Đặt $t = \sqrt[3]{3x+1} \Rightarrow t^3 = 3x + 1$ suy ra $3t^2dt = 3dx.$

Đổi cận:

- Với x = 0 thì t = 1.
- Với $x = \frac{7}{3}$ thì t = 2.

Khi đó: $I = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{(t^3+2)t^2dt}{t} = \frac{1}{3}\int_1^2 (t^4+2t)dt = \frac{1}{3}(\frac{1}{5}t^5+t^2)\Big|_1^2 = \frac{46}{15}$.

b. Đặt $t = \sqrt[3]{3x+2} \Rightarrow t^3 = 3x+2$ suy ra $3t^2dt = 3dx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 1$.
- Với $x = 2$ thì $t = 2$.

Khi đó: $I = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{(t^3+1)t^2dt}{t} = \frac{1}{3}\int_1^2 (t^4+t)dt = \frac{1}{3}(\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{2}t^2)\Big|_1^2 = \frac{77}{30}$.

Bài tập 33.

a. Đặt $t = \sqrt{x}+1$ suy ra: $\sqrt{x} = t-1 \Rightarrow x = (t-1)^2 \Rightarrow dx = 2(t-1)dt$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 1$.
- Với $x = 1$ thì $t = 2$.

Khi đó: $I = 2\int_1^2 \frac{[(t-1)^4-1](t-1)dt}{t} = 2\int_1^2 (t-2)(t^2-2t+2)(t-1)dt$

$= 2\int_1^2 (t^4-5t^3+10t^2-10t+4)dt = 2(\frac{1}{5}t^5-\frac{5}{4}t^4+\frac{10}{3}t^3-5t^2+4t)\Big|_1^2 = -\frac{13}{30}$.

b. Đặt $t = \sqrt[3]{1+x^2} \Rightarrow t^3 = 1+x^2$ suy ra $3t^2dt = 2xdx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 1$.
- Với $x = \sqrt{7}$ thì $t = 2$.

Khi đó: $I = \frac{3}{2}\int_1^2 \frac{(t^3-1)t^2dt}{t} = \frac{3}{2}\int_1^2 (t^4-t)dt = \frac{3}{2}(\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{2}t^2)\Big|_1^2 = \frac{141}{20}$.

Bài tập 34.

a. Đặt $t = \sqrt{x^2+1}$ suy ra $t^2 = x^2+1 \Rightarrow 2tdt = xdx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 1$.
- Với $x = \sqrt{3}$ thì $t = 2$.

Khi đó: $I = \int_1^2 \frac{[(t^2-1)^2+2(t^2-1)]tdt}{t} = \int_1^2 (t^4-1)dt = (\frac{1}{5}t^5-t)\Big|_1^2 = \frac{26}{5}$.

b. Đặt $t = \sqrt{2x+1}$ suy ra $t^2 = 2x+1 \Rightarrow 2tdt = 2dx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 1$.
- Với $x = 4$ thì $t = 3$.

Khi đó: $I = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{(t^2-1)tdt}{t} = \frac{1}{2}\int_1^3 (t^2-1)dt = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}t^3-t)\Big|_1^3 = \frac{10}{3}$.

Bài tập 35.

a. Đặt $t = \sqrt{x}$ suy ra $x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$.

Đổi cận:

- Với x = 1 thì t = 1.
- Với x = 4 thì t = 2.

Khi đó: $I = 2\int_1^2 \frac{tdt}{t^2(t+1)} = 2\int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)} = 2\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt$

$= 2(\ln|t| - \ln|t+1|)\Big|_1^2 = 2\ln\frac{4}{3}$.

b. Viết lại tích phân I dưới dạng:

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}} = \left(\ln\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\right|\right)\Big|_{-1}^{0} = \ln\frac{3}{2}.$$

Bài tập 36.

a. Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}$ suy ra:

$$dt = \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x+2}}\right)dx = \frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2})dx}{2\sqrt{(x+1)(x+2)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)}} = \frac{2dt}{t}.$$

Đổi cận:

- Với x = 1 thì $t = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.
- Với x = 2 thì $t = \sqrt{3} + 2$.

Khi đó: $I = 2\int_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}^{\sqrt{3}+2} \frac{dt}{t} = 2\ln|t|\Big|_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}^{\sqrt{3}+2} = 2\ln\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách đặt ẩn phụ sau:

Cách 1 : Đặt $x = \sin t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ suy ra dx = cost.dt.

Đổi cận :

- $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.
- $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó : $I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos t.dt}{\sin^2 t} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\sin t}\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \sqrt{2} - 1.$

Cách 2 : Đặt $x = \cos t, t \in (0, \pi)$ – *Bạn đọc tự làm.*

Bài tập 37.

a. Biến đổi I về dạng:

$$I = -\frac{1}{6}\int_5^7 (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+2})dx = -\frac{1}{6}.\frac{2}{3}[(x-4)^{3/2} - (x+2)^{3/2}]\Big|_5^7$$

$$= \frac{1}{9}(26 - 7\sqrt{7} - 3\sqrt{3}).$$

b. Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_0^1 (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})dx = \frac{2}{3}[(x+1)^{3/2} - x^{3/2}]\Big|_0^1 = \frac{4}{3}(\sqrt{2} - 1).$$

Bài tập 38.

a. Đặt $t = \sqrt{x^3 + 1}$ suy ra $t^2 = x^3 + 1 \Rightarrow 2tdt = 3x^2dx$.
Đổi cận:

- Với $x = 1$ thì $t = \sqrt{2}$.
- Với $x = 2$ thì $t = 3$

Khi đó: $I = \int_{\sqrt{2}}^{3} \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right|_{\sqrt{2}}^{3} = \frac{1}{2} \ln \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}$.

b. Đặt $t = \sqrt{x^2 + 9}$ suy ra $t^2 = x^2 + 9 \Rightarrow 2tdt = 2xdx$.
Đổi cận:

- Với $x = \sqrt{7}$ thì $t = 4$.
- Với $x = 4$ thì $t = 5$.

Khi đó: $I = \int_4^5 \frac{dt}{t^2 - 9} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{t-3}{t+3} \right|_4^5 = \frac{1}{6} \ln \frac{7}{4}$.

Bài tập 39.

a. Đặt $t = \sqrt{x^2 + 1}$ suy ra $t^2 = x^2 + 1 \Rightarrow 2tdt = 2xdx$.
Đổi cận:

- Với $x = 1$ thì $t = \sqrt{2}$.
- Với $x = 2$ thì $t = \sqrt{5}$.

Khi đó: $I = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} - \ln \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right)$.

b. Đặt $t = \sqrt{1 + 3x^8}$ suy ra $t^2 = 1 + 3x^8 \Rightarrow 2tdt = 24x^7dx$.
Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 1$.
- Với $x = 1$ thì $t = 2$.

Khi đó: $I = \frac{1}{36} \int_1^2 (t^2 - 1)t^2 dt = \frac{1}{36} \left(\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3 \right)\Big|_1^2 = \frac{29}{270}$.

Bài tập 40.

a. Đặt $t = \sqrt{2 + x}$ suy ra $t^2 = 2 + x \Rightarrow 2tdt = dx$.
Đổi cận:

- Với $x = 7$ thì $t = 3$.
- Với $x = 2$ thì $t = 2$.

Khi đó: $I = 2\int_3^2 \frac{tdt}{t+1} = 2\int_3^2 \left(1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = 2(t - \ln|t+1|)\Big|_3^2 = 2\ln\frac{4}{3} - 2$.

b. Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_0^1 x^3(x - \sqrt{x^2+1})dx = \underbrace{\int_0^1 x^4 dx}_{I_1} - \underbrace{\int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}dx}_{I_2}. \quad (1)$$

Với tích phân I_1, ta có ngay: $I_1 = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}x^5\Big|_0^1 = \frac{1}{5}$. (2)

Với tích phân I_2, đặt $t = \sqrt{x^2+1}$ suy ra:

$t^2 = x^2 + 1 \Rightarrow 2tdt = 2xdx$ và $x^3\sqrt{x^2+1}\,dx = (t^2-1)t^2dt = (t^4 - t^2)dt$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 1$.
- Với $x = 1$ thì $t = \sqrt{2}$.

Khi đó: $I_2 = \int_1^{\sqrt{2}} (t^4 - t^2)dt = (\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3)\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{4-2\sqrt{2}}{15}$. (3)

Thay (2); (3) vào (1) ta được $I = \frac{2\sqrt{2}-1}{15}$.

c. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách đặt ẩn phụ sau:

Cách 1: Đặt $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \Rightarrow x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow dx = \frac{-4tdt}{(1+t^2)^2}$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 1$.
- Với $x = 1$ thì $t = 0$.

Khi đó: $I = \int_1^0 t\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^2 \cdot \frac{-4tdt}{(1+t^2)^2} = -\int_1^0 t^2 dt = -\frac{1}{3}t^3\Big|_1^0 = \frac{1}{3}$.

Cách 2: Đặt $x = \cos 2t \Rightarrow dx = -2\sin 2t.dt$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = \frac{\pi}{4}$.
- Với $x = 1$ thì $t = 0$.

Khi đó:

$$I = -2\int_{\pi/4}^0 \sqrt{\frac{1-\cos 2t}{1+\cos 2t}} \frac{\sin 2tdt}{(1+\cos 2t)^2} = \int_0^{\pi/4} \frac{tg^2 tdt}{\cos^2 t} = \int_0^{\pi/4} tg^2 td(tgt)$$

$$= \frac{1}{3}tg^3 t\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{3}.$$

Bài tập 41.

a. Đặt: $\begin{cases} u = x \\ dv = x\sqrt{x^2 + a^2}\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + a^2)^3} \end{cases}$.

Khi đó: $I = \frac{1}{3} x \sqrt{(x^2 + a^2)^3} \Big|_0^a - \frac{1}{3}\int_0^a (x^2 + a^2)\sqrt{x^2 + a^2}\,dx$

$$= \frac{2a^4\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3}\int_0^a x^2\sqrt{x^2 + a^2}\,dx - \frac{1}{3}a^2\int_0^a \sqrt{x^2 + a^2}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3} I = \frac{2a^4\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3}a^2\int_0^a \sqrt{x^2 + a^2}\,dx. \qquad (1)$$

Ta biết rằng:

$$J = \int_0^a \sqrt{x^2 + a^2}\,dx = \left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right|\right)\Big|_0^a$$

$$= \frac{a^2\sqrt{2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|1 + \sqrt{2}\right|. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$I = \frac{3}{4}\left[\frac{2a^4\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3}a^2\left(\frac{a^2\sqrt{2}}{2} + \frac{a}{2}\ln\left|1 + \sqrt{2}\right|\right)\right]$$

$$= \frac{a^4}{8}\left[3\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})\right].$$

Chú ý: Bởi hạn chế chương trình trong sách giáo khoa nên khi thực hiện bài thi các em học sinh cần chứng minh lại công thức:

$$\int \sqrt{x^2 \pm a}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a} \pm \frac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C.$$

b. *Bạn đọc tự giải tương tự câu a).*

Bài tập 42. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 43. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 44.

a. Đặt $t = e^x$ thì $e^x dx = dt$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 1$.
- Với $x = 1$ thì $t = e$.

Khi đó: $I = \int_1^e \frac{(1 + t)^2}{t^2} dt = \int_1^e \left(\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t} + 1\right) dt = \left(-\frac{1}{t} + 2\ln|t| + t\right)\Big|_1^e = e - \frac{1}{e} + 2.$

b. Đặt $t = e^x$ thì $e^x dx = dt$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 1$.
- Với $x = 1$ thì $t = e$.

Khi đó: $I = \int_1^e \frac{dt}{t+1} = (\ln|t+1|)\Big|_1^e = \ln\frac{e+1}{2}$.

Bài tập 45. Tính tích phân:

a. Đặt $t = e^{-x}$ thì $dt = -e^{-x}dx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 1$.
- Với $x = 1$ thì $t = \frac{1}{e}$.

Khi đó: $I = \int_1^{1/e} \frac{-dt}{1+t} = -\ln\left|1+t\right|\Big|_1^{1/e} = \ln\frac{2e}{1+e}$.

b. Đặt $t = e^x$ thì $dt = e^x dx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 1$.
- Với $x = \ln 2$ thì $t = 2$.

Khi đó: $I = \int_1^2 \frac{tdt}{\sqrt{t+1}} = \int_1^2 \frac{[(t+1)-1]dt}{\sqrt{t+1}} = \int_1^2 (\sqrt{t+1} - \frac{1}{\sqrt{t+1}})dt$

$$= \frac{2}{3}[(t+1)^{3/2} - 2(t+1)^{1/2}]\Big|_1^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Bài tập 46. Đặt $t = \sqrt{e^x - 1}$ thì $t^2 = e^x - 1 \Rightarrow 2tdt = e^x dx \Leftrightarrow dx = \frac{2tdt}{t^2+1}$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$.
- Với $x = \ln 2$ thì $t = 1$.

Khi đó: $I = 2\int_0^1 \frac{t^2 dt}{t^2+1} = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt = 2(\underbrace{\int_0^1 dt}_{I_1} - \underbrace{\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1}}_{I_2})$. (1)

Với tích phân I_1 ta có ngay $I_1 = 1$. (2)

Với tích phân I_2 đặt $t = tgu$, $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ suy ra $dt = \frac{du}{\cos^2 u} = (1 + tg^2 u)du$.

Đổi cận :

- $t = 0$ thì $u = 0$.
- $t = 1$ thì $u = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó: $I_2 = \int_0^{\pi/4} \frac{(1+tg^2 u)du}{tg^2 u + 1} = \int_0^{\pi/4} du = u\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}$. (3)

Thay (2), (3) vào (1), ta được $I = 2 - \frac{\pi}{2}$.

Bài tập 47. Biến đổi I về dạng: $I = \frac{1}{3}\int_1^e \frac{\ln(1+\ln^2 x)}{x}dx$.

Đặt $t = \ln x$ suy ra $dt = \frac{dx}{x}$.

Đổi cận:

- Với x = 1 thì t = 0.
- Với x = e thì t = 1.

Khi đó $I = \frac{1}{3}\int_0^1 \ln(1+t^2)dt$.

Đặt: $\begin{cases} u = \ln(1+t^2) \\ dv = dt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{2tdt}{1+t^2} \\ v = t \end{cases}$.

Khi đó:

$$I = \frac{1}{3}[t.\ln(1+t^2)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t^2dt}{1+t^2}] = \frac{\ln 3}{3} - \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{(t^2+1-1)dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{\ln 3}{3} - \frac{2}{3}(\int_0^1 dt + \underbrace{\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}}_{J}) = \frac{\ln 3}{3} - \frac{2}{3}t\Big|_0^1 + \frac{2}{3}.\frac{\pi}{4} = \frac{\ln 3 - 2}{3} + \frac{\pi}{6}.$$

Chú ý: Trong lời giải trên chúng ta đã sử dụng kết quả $J = \frac{\pi}{4}$ đã được chứng minh trong bài tập 46.

Bài tập 48.

a. Đặt: $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-\frac{x}{2}}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -2e^{-\frac{x}{2}} \end{cases}$.

Khi đó : $I = -2xe^{-\frac{x}{2}}\Big|_0^2 + 2\int_0^2 e^{-\frac{x}{2}}dx = -\frac{4}{e} - 4e^{-\frac{x}{2}}\Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{e}$.

b. Viết lại I dưới dạng: $I = \int_0^1 e^x e^{e^x}dx$.

Đặt $t = e^x$ suy ra $e^x dx = dt$.

Đổi cận:

- Với x = 0 thì t = 1.
- Với x = 1 thì t = e.

Khi đó $I = \int_1^e te^t dt$.

Đặt: $\begin{cases} u = t \\ dv = e^t dt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = e^t \end{cases}$.

Khi đó: $I = te^t\Big|_1^e - \int_1^e e^t dt = e^{e+1} - e - e^t\Big|_1^e = e^{e+1} - e^e$.

Bài tập 49.

a. Đặt $t = e^x$ thì $e^x dx = dt$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 1$.
- Với $x = 1$ thì $t = e$.

Khi đó: $I = \int_1^e \frac{dt}{t(t+1)} = \int_1^e \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \left(\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\right)\Big|_1^e = \ln\frac{2e}{e+1}$.

b. Đặt $t = e^x$ thì $dt = e^x dx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 1$.
- Với $x = \ln 2$ thì $t = 2$.

Khi đó: $I = \int_1^2 \frac{5dt}{t(t+5)} = \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+5}\right)dt = \left(\ln\left|\frac{t}{t+5}\right|\right)\Big|_1^2 = \ln\frac{12}{7}$.

Bài tập 50. Đặt $t = e^x$ thì $dt = e^x dx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 1$.
- Với $x = \ln 2$ thì $t = 2$.

Khi đó: $I = \int_1^2 \frac{(1-t)dt}{t(t+1)} = \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t+1}\right)dt = \left(\ln|t| - 2\ln|t+1|\right)\Big|_1^2 = \ln\frac{8}{9}$.

CHỦ ĐỀ 6
ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN

Bài toán 1: Chứng minh đẳng thức tích phân.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương pháp được sử dụng nhiều nhất để chứng minh các đẳng thức tích phân là phương pháp đổi biến, việc lựa chọn phép đặt ẩn phụ phụ thuộc vào cận a, b và tính chất của hàm số f(x) dưới dấu tích phân. Ngoài ra, còn sử dụng:

- Phương pháp phân tích.
- Phương pháp tích phân từng phần.
- Phương pháp quy nạp toán học.
- Sử dụng tích phân truy hồi.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1. Chứng minh rằng:

a. $\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx = \frac{\pi}{4}$.

b. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{x^2.|\sin x|}{1+2^x}dx = \pi + 2$.

Bài tập 2. Chứng minh rằng: $\int_{-1}^{1}(e^{x^2}\sin x + e^2.x^2)dx = \frac{2e^2}{3}$.

Bài tập 3. Chứng minh rằng: $\int_{-1/2}^{1/2}\cos x.\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx = 0$.

Bài tập 4. Chứng minh rằng:

a. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{\cos^n x dx}{\cos^n x + \sin^n x} = \frac{\pi}{4}$.

b. $\int_{0}^{3\pi}\sin x.\sin 2x.\sin 3x.\cos 5x dx = 0$.

Bài tập 5. Chứng minh rằng:

$$\int_{0}^{2004\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx = 4008\sqrt{2}.$$

Bài tập 6. Cho hàm số f(x) liên tục và là hàm lẻ trên [–a, a]. Chứng minh rằng:

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx = 0.$$

Bài tập 7. Cho hàm số f(x) liên tục và là hàm chẵn trên đoạn [–a, a]. Chứng minh rằng:

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx = 2\int_{0}^{a}f(x)dx.$$

Bài tập 8. Cho hàm số f(x) liên tục và chẵn trên **R**. Chứng minh rằng :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(x)dx}{a^x+1} = \int_{0}^{\alpha}f(x)dx \text{ với } \forall\alpha \in \mathbf{R}^+ \text{ và } a > 0.$$

Bài tập 9. Cho hàm số f(x) liên tục trên $[0, \frac{\pi}{2}]$. Chứng minh rằng :

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx .$$

Bài toán 2: Chứng minh bất đẳng thức tích phân.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chứng minh một bất đẳng thức tích phân, ta thường sử dụng lại ba tính chất 6, 7, 8 của tích phân xác định. Ngoài ra, một tính chất rất đơn giản cũng thường được sử dụng trong phép tính tích phân là:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx .$$

Như vậy, để chứng minh bất đẳng thức: $\int_a^b f(x)dx \le A$

ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định một hàm số g(x) thoả mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} f(x) \le g(x), \ \forall x \in [a,b] \\ \int_a^b g(x)dx = A \end{cases}$$

Bước 2: Khi đó $f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx = A.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi f(x) = g(x).

Chú ý: Để thực hiện được bước 1 trong bài toán trên (tìm ra hàm g(x)) ta thường lựa chọn một trong các hướng sau :

Hướng 1. Đánh giá hàm số f(x) theo các cận a, b.

Ở hướng này, từ $x \in [a, b]$ sau một vài phép đánh giá nhỏ ta thu được:

$$f(x) \le g(x).$$

Hướng 2. Sử dụng đạo hàm xét tính đơn điệu của hàm số f(x) trên [a, b].

Bằng việc xét hàm số f(x) trên đoạn [a, b] ta tìm được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số, tức là :

$$m \le f(x) \le M.$$

Hướng 3. Sử dụng các bất đẳng thức.

Ngoài ra cũng có thể sử dụng định lý về dấu của tam thức để chứng minh một bất đẳng thức tích phân.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 10. Chứng minh rằng $\int_0^1 \frac{dx}{2+x+x^2} < \frac{\pi}{8}$.

Bài tập 11. Chứng minh rằng $\frac{\sqrt{3}}{4} < \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x.dx}{x} < \frac{1}{2}$.

Bài tập 12. Chứng minh rằng $\int_0^1 x\sin^2 x dx < \frac{1}{4}$.

Bài tập 13. Chứng minh rằng $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx > \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

Bài tập 14. Chứng minh rằng:

$$\pi < \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} < 2\pi.$$

Bài tập 15. Chứng minh rằng:

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{3} < \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\cos^2 x + \cos x + 1}} < \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Bài tập 16. Chứng minh rằng:

a. $\int_0^1 \frac{e^{2x}\cos x dx}{1+x^2} < \frac{\pi e^2}{4}$.

b. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^x \sin x dx}{1+x^2} < \frac{\pi e^{\sqrt{2}}}{12}$.

Bài tập 17. Chứng minh rằng:

a. $\int_0^1 \sqrt{3+e^{-x}} dx \le 2$.

b. $\frac{\sqrt{3}}{12} < \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cot x}{x} dx < \frac{1}{3}$.

Bài tập 18. Chứng hai tích phân:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x dx}{1+\sin^4 x} \quad \text{và} \quad J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x dx}{1+\cos^4 x}.$$

a. Tính các tích phân I, J.

b. Chứng minh rằng $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x.\sin x}{(1+\sin^4 x)(1+\cos^4 x)} dx > \frac{\pi}{12}$.

HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Biến đổi tích phân I ở VT về dạng:

$$I = \underbrace{\int_{-1}^0 \frac{\sqrt{1-x^2}dx}{1+2^x}}_{I_1} + \underbrace{\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}dx}{1+2^x}}_{I_2}. \quad (1)$$

Xét tích phân I_1 với phép đổi biến $x = -t$ thì $dx = -dt$.

Đổi cận:

- $x = -1 \Rightarrow t = 1$.
- $x = 0 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó: $I_1 = \int_1^0 \frac{\sqrt{1-(-t)^2}(-dt)}{1+2^{-t}} = \int_0^1 \frac{2^t\sqrt{1-t^2}.dt}{1+2^t} = \int_0^1 \frac{2^x\sqrt{1-x^2}.dx}{1+2^x}$. (2)

Thay (2) vào (1), ta được:

$$I = \int_0^1 \frac{2^x\sqrt{1-x^2}.dx}{1+2^x} + \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}dx}{1+2^x} = \int_0^1 \frac{(1+2^x)\sqrt{1-x^2}.dx}{1+2^x}$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}.dx .$$

Đặt $x = \sin u$, $-\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}$ thì $dx = \cos u du$.

Đổi cận:

- $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.
- $x = 0 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó: $I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 u}.\cos u du = \int_0^{\pi/2} |\cos u|\cos u du = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u du$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2u)du = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin 2u)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}, \text{đpcm.}$$

b. Biến đổi tích phân I ở VT về dạng:

$$I = \int_{-\pi/2}^0 \frac{x^2.|\sin x|dx}{1+2^x} + \int_0^{\pi/2} \frac{x^2.|\sin x|dx}{1+2^x}$$

$$= -\underbrace{\int_{-\pi/2}^0 \frac{x^2.\sin x.dx}{1+2^x}}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{x^2.\sin x.dx}{1+2^x}}_{I_2}. \qquad (1)$$

Xét tích phân I_1 với phép đổi biến $x = -t$ thì $dx = -dt$.
Đổi cận:

- $x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.
- $x = 0 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó: $I_1 = \int_{\pi/2}^0 \frac{(-t)^2.\sin(-t).(-dt)}{1+2^{-t}} = -\int_0^{\pi/2} \frac{2^t.t^2.\sin t.dt}{1+2^t} = -\int_0^{\pi/2} \frac{2^x x^2.\sin x.dx}{1+2^x}$.

Thay I_1 vào (1), ta được:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{2^x x^2.\sin x.dx}{1+2^x} + \int_0^{\pi/2} \frac{x^2.\sin x.dx}{1+2^x} = \int_0^{\pi/2} \frac{(1+2^x)x^2.\sin x.dx}{1+2^x}$$

$$= \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx .$$

Đặt: $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

Khi đó: $I = -x^2\cos x\Big|_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} x.\cos x dx = 2\int_0^{\pi/2} x.\cos x dx$.

Đặt: $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$.

Khi đó: $I = 2(x.\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx) = 2[\frac{\pi}{2} - (-\cos x)\Big|_0^{\pi/2}] = \pi + 2$, đpcm.

Bài tập 2. Biến đổi tích phân I ở VT về dạng:

$$I = \underbrace{\int_{-1}^{1} e^{x^2} \sin x dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{-1}^{1} e^2 . x^2 dx}_{I_2}. \quad (1)$$

Với tích phân I_1, ta biến đổi: $I_1 = \underbrace{\int_{-1}^{0} e^{x^2} \sin x dx}_{I_{1.1}} + \underbrace{\int_{0}^{1} e^{x^2} \sin x dx}_{I_{1.2}}$. (2)

Xét tích phân $I_{1.1}$ bằng phép đổi biến $x = -t$ thì $dx = -dt$.

Đổi cận:

- $x = -1 \Rightarrow t = 1$.
- $x = 0 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó: $I_{1.1} = -\int_1^0 e^{(-t)^2} \sin(-t) dt = -\int_0^1 e^{t^2} \sin t dt = -\int_0^1 e^{x^2} \sin x dx$. (3)

Thay (3) vào (2), ta được $I_1 = 0$.

Do đó, ta có ngay: $I = e^2 . \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2e^2}{3}$, đpcm.

Bài tập 3. Biến đổi tích phân I ở VT về dạng:

$$I = \underbrace{\int_{-1/2}^{0} \cos x . \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{1/2} \cos x . \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx}_{I_2}. \quad (1)$$

Xét tích phân I_1 bằng phép đổi biến $x = -t$ thì $dx = -dt$.

Đổi cận:

- $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$.
- $x = 0 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó: $I_1 = -\int_{1/2}^{0} \cos(-t) . \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) dt = -\int_0^{1/2} \cos t . \ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right) dt$

$$= -\int_0^{1/2} \cos x . \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx = -I_2. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được $I = 0$, đpcm.

Bài tập 4.

a. Xét tích phân I ở VT với phép đổi biến $t = \frac{\pi}{2} - x$ thì $dx = -dt$.

Đổi cận:

- $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.
- $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.

Khi đó: $I = \int\limits_{\pi/2}^{0} \frac{\cos^n(\frac{\pi}{2} - t)(-dt)}{\cos^n(\frac{\pi}{2} - t) + \sin^n(\frac{\pi}{2} - t)} = \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin^n t dt}{\cos^n t + \sin^n t}$

$$= \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx$$

Do đó: $2I = \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos^n x + \sin^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx = \int\limits_{0}^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$, đpcm.

b. Biến đổi tích phân I ở VT về dạng:

$$I = \int\limits_{0}^{3\pi/2} \sin x.\sin 2x.\sin 3x.\cos 5x dx + \int\limits_{3\pi/2}^{3\pi} \sin x.\sin 2x.\sin 3x.\cos 5x dx . \quad (1)$$

Xét tích phân $J = \int\limits_{3\pi/2}^{3\pi} \sin x.\sin 2x.\sin 3x.\cos 5x dx$ với phép đổi biến

$x = 3\pi - t$ thì $dx = -dt$.

Đổi cận:

- $x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{3\pi}{2}$.
- $x = 3\pi \Rightarrow t = 0$.

Khi đó $J = -\int\limits_{3\pi/2}^{0} \sin(3\pi - t).\sin 2(3\pi - t).\sin 3(3\pi - t).\cos 5(3\pi - t) dt$

$$= -\int\limits_{0}^{3\pi/2} \sin t.\sin 2t.\sin 3t.\cos 5t dt$$

$$= -\int\limits_{0}^{3\pi/2} \sin x.\sin 2x.\sin 3x.\cos 5x dx . \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được $I = 0$, đpcm.

Bài tập 5. Trước tiên, chúng ta đi phát biểu và chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề: Nếu f(x) liên tục trên **R** và tuần hoàn với chu kỳ T thì:

$$\int\limits_{a}^{a+T} f(x)dx = \int\limits_{0}^{T} f(x)dx .$$

Chứng minh

Ta có: $\int\limits_{0}^{T} f(x)dx = \underbrace{\int\limits_{0}^{a} f(x)dx}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_{a}^{a+T} f(x)dx}_{I_2} + \underbrace{\int\limits_{a+T}^{T} f(x)dx}_{I_3} . \quad (1)$

Xét tích phân I_3 với phép đổi biến $t = x - T$ thì $dx = dt$.
Đổi cận:

- $x = a + T \Rightarrow t = a$.
- $x = T \Rightarrow t = 0$.

Khi đó:

$$I_3 = \int_a^0 f(t+T)dt = -\int_0^a f(t)dt = -\int_0^a f(x)dx . \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được $\int_0^T f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx$, đpcm.

Chứng minh đẳng thức: Biến đổi tích phân I ở VT về dạng:

$$I = \sqrt{2}\int_0^{2004\pi} |\sin x|\,dx$$

$$= \sqrt{2}\left(\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx + \int_{2\pi}^{4\pi} |\sin x|\,dx + ... + \int_{2002\pi}^{2004\pi} |\sin x|\,dx\right).$$

Theo bổ đề trên, ta được:

$$\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx = \int_{2\pi}^{4\pi} |\sin x|\,dx = ... = \int_{2002\pi}^{2004\pi} |\sin x|\,dx .$$

Vậy, ta được:

$$I = 1002\sqrt{2}\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx = 1002\sqrt{2}\left(\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx - \int_0^{\pi} \sin x dx\right)$$

$$= 1002\sqrt{2}\left(-\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}\right) = 4008\sqrt{2} .$$

Bài tập 6. Biến đổi tích phân I ở VT về dạng:

$$I = \underbrace{\int_{-a}^0 f(x)dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^a f(x)dx}_{I_2} . \quad (1)$$

Xét tính phân I_1 với phép đổi biến $x = -t$ thì $dx = -dt$.
Đổi cận:

- $x = -a \Rightarrow t = a$.
- $x = 0 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó:

$$I_1 = -\int_a^0 f(-t)dt \overset{f(t) \text{ lẻ nên } f(-t)=-f(t)}{=} -\int_0^a f(t)dt = -\int_0^a f(x)dx . \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được $I = -\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 0$, đpcm.

Bài tập 7. Biến đổi tích phân I ở VT về dạng:

$$I = \underbrace{\int_{-a}^0 f(x)dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^a f(x)dx}_{I_2} . \quad (1)$$

Xét tính phân I_1 với phép đổi biến $x = -t$ thì $dx = -dt$.

Đổi cận:

- $x = -a \Rightarrow t = a.$
- $x = 0 \Rightarrow t = 0.$

Khi đó: $I_1 = -\int_a^0 f(-t)dt \overset{f(t)\text{chẵn nên } f(-t)=f(t)}{=} \int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(x)dx$. (2)

Thay (2) vào (1) ta được:

$$I = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx \text{ , đpcm.}$$

Bài tập 8. Biến đổi tích phân I ở VT về dạng: $I = \underbrace{\int_{-\alpha}^0 \frac{f(x)dx}{a^x+1}}_{I_1} + \underbrace{\int_0^\alpha \frac{f(x)dx}{a^x+1}}_{I_2}$. (1)

Xét tích phân I_1 với phép đổi biến $x = -t$ thì $dx = -dt$.

Đổi cận:

- $x = -\alpha \Rightarrow t = \alpha.$
- $x = 0 \Rightarrow t = 0.$

Khi đó:

$$I_1 = -\int_\alpha^0 \frac{f(-t)dt}{a^{-t}+1} \overset{f(t)\text{chẵn nên } f(-t)=f(t)}{=} \int_0^\alpha \frac{a^t f(t)dt}{a^t+1} = \int_0^\alpha \frac{a^x f(x)dx}{a^x+1}.$$ (2)

Thay (2) vào (1) ta được:

$$I = \int_0^\alpha \frac{a^x f(x)dx}{a^x+1} + \int_0^\alpha \frac{f(x)dx}{a^x+1} = \int_0^\alpha \frac{(a^x+1)f(x)dx}{a^x+1} = \int_0^\alpha f(x)dx \text{ , đpcm.}$$

Bài tập 9. Xét tích phân ở VT với phép đổi biến $t = \frac{\pi}{2} - x$ thì $dx = -dt$.

Đổi cận:

- $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$
- $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0.$

Khi đó:

$$VT = -\int_{\pi/2}^0 f(\sin(\frac{\pi}{2} - t)dt = \int_0^{\pi/2} f(\cos t)dt = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx \text{ , đpcm.}$$

Chú ý: Việc sử dụng đẳng thức trên để tính tích phân

$$I = \int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx \quad (\text{hoặc } I = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx)$$

thường được thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Bằng phép đổi biến $t = \frac{\pi}{2} - x$ như trong phần chứng minh tính chất,

ta thu được $I = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$.

Bước 2: Đi xác định kI (nó được phân tích

$$kI = \alpha \int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx + \beta \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx)),$$

thường là:

$$2I = \int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx + \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx = \int_0^{\pi/2} [f(\sin x) + f(\cos x)]dx$$

Từ đó suy ra giá trị của I.

Bài tập 10. Kí hiệu bất đẳng thức là (*). Với $x \in [0, 1]$ thì ta được:

$$x \geq x^2 \Rightarrow 2 + x + x^2 \geq 2 + 2x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2 + x + x^2} \leq \frac{1}{2(1 + x^2)},$$

dấu đẳng thức chỉ xảy ra tại x = 0 hoặc x = 1, do đó:

$$\int_0^1 \frac{dx}{2 + x + x^2} < \int_0^1 \frac{dx}{2(1 + x^2)} = \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}}_{I}. \quad (1)$$

Xét tích phân I bằng phép đổi biến $x = tgt, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ suy ra:

$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t} = (1 + \tan^2 t)dt \text{ và } \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{(1 + \tan^2 t)dt}{\tan^2 t + 1} = dt.$$

Đổi cận :

- Với x = 0 thì t = 0.
- Với x = 1 thì $t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó $I = \int_0^{\pi/4} dt = t\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}$. (2)

Thay (2) vào (1), ta được $\int_0^1 \frac{dx}{2 + x + x^2} < \frac{\pi}{8}$, đpcm.

Nhận xét : Trong lời giải bài toán trên, sở dĩ chúng ta đi đánh giá hàm số

$$f(x) = \frac{1}{2 + x + x^2} \leq \frac{1}{2(1 + x^2)}, \quad (3)$$

mà không lựa chọn việc đánh giá

$$f(x) = \frac{1}{2 + x + x^2} \leq \frac{1}{2 + x} \quad (4)$$

cho dù việc lấy tích phân ở (4) đơn giản hơn rất nhiều so với (3), là vì vế trái của (*) đó là một biểu thức chứa π và kết quả đó chỉ có được ở tích phân trên khi nguyên hàm là một hàm lượng giác ngược. Hãy nhớ lại :

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{t}{a} + C, \text{ trong đó } x = a\tan t.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = t + C, \text{ trong đó } x = a\sin t.$$

Bài tập 11. Xét hàm số $y = \frac{\sin x}{x}$ trên miền $D = [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$.

Đạo hàm : $y' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{(x - tgx)\cos x}{x^2} < 0, \forall x \in D$

suy ra hàm số nghịch biến trên D.

Từ đó, suy ra : $y(\frac{\pi}{3}) \le \frac{\sin x}{x} \le y(\frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{3}{\pi}$

dấu đẳng thức chỉ xảy ra ở vế phải tại $x = \frac{\pi}{6}$ và vế trái $x = \frac{\pi}{3}$, do đó :

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/3} dx < \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{3}{\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/3} dx \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} < \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{1}{2}.$$

Bài tập 12. Xét hàm số $y = \sin x - x$ trên miền $D = [0, 1]$.

Đạo hàm : $y' = \cos x - 1 < 0$ suy ra hàm số nghịch biến trên D.

Từ đó suy ra : $0 < \sin x \le x \Rightarrow x\sin^2 x \le x^3$

dấu đẳng thức chỉ xảy ra tại $x = 0$, do đó:

$$\int_0^1 x\sin^2 x dx < \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{4}, \text{ đpcm.}$$

Bài tập 13. Ta biến đổi bất đẳng thức về dạng:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx > 0,$$

bất đẳng thức trên luôn đúng do $\frac{\sin x}{x} > 0$, với mọi $x \in (0, \pi)$.

Bài tập 14. Ta có nhận xét:

$$\sin^4 x + \cos^4 x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x.\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \ge \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 1 \le \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x} \le 2 \Rightarrow \pi < \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} < 2\pi, \text{ đpcm.}$$

Bài tập 15. Ta có nhận xét:

$$\cos^2 x + \cos x + 1 = (\cos x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} \le \cos^2 x + \cos x + 1 \le 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \le \sqrt{\cos^2 x + \cos x + 1} \le \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \le \frac{1}{\sqrt{\cos^2 x + \cos x + 1}} \le \frac{2}{\sqrt{3}}$$

dấu đẳng thức chỉ xảy ra ở vế trái tại $x = 0$ và vế phải tại $x = \frac{2\pi}{3}$, do đó:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\pi} dx < \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\cos^2 x + \cos x + 1}} < \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\pi} dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi\sqrt{3}}{3} < \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\cos^2 x + \cos x + 1}} < \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}, \text{ đpcm.}$$

Bài tập 16.

a. Với $x \in [0, 1]$ thì ta có nhận xét:

$$\begin{cases} 1 < e^{2x} < e^2 \\ 0 < \cos x < 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < e^{2x}\cos x < e^2 \Leftrightarrow \frac{e^{2x}\cos x}{1+x^2} < \frac{e^2}{1+x^2}.$$

Do đó, suy ra: $\int_0^1 \frac{e^{2x}\cos x dx}{1+x^2} < \int_0^1 \frac{e^2 dx}{1+x^2} = e^2.t\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi e^2}{4}$, đpcm.

b. Với $x \in [1, \sqrt{3}]$ thì ta có nhận xét:

$$\begin{cases} e < e^x < e^{\sqrt{3}} \\ 0 < \sin x < 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < e^x \sin x < e^{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{e^x \sin x}{1+x^2} < \frac{e^{\sqrt{3}}}{1+x^2}.$$

Do đó, suy ra:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^x \sin x dx}{1+x^2} < \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{\sqrt{3}} dx}{1+x^2} = e^{\sqrt{3}}.t\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{\pi e^{\sqrt{2}}}{12}, \text{ đpcm.}$$

Chú ý: Trong lời giải của bài toán trên chúng ta đã sử dụng kết quả:

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = t + C, \text{ trong đó } x = \tan t.$$

Bài tập 17.

a. Với $x \in [0, 1]$ thì ta có nhận xét: $e^{-x} \le 1 \Rightarrow \sqrt{3+e^{-x}} \le \sqrt{3+1} = 2$ dấu đẳng thức chỉ xảy ra tại $x = 0$, do đó:

$$\int_0^1 \sqrt{3+e^{-x}}\, dx \le \int_0^1 2dx = 2x\Big|_0^1 = 2, \text{ đpcm.}$$

b. Xét hàm số $y = \frac{\cot x}{x}$ trên miền $D = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$.

Đạo hàm : $y' = \frac{-\frac{x}{\sin^2 x} - \cot x}{x^2} < 0, \forall x \in D \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên D.

Từ đó, suy ra : $y(\frac{\pi}{3}) \le \frac{\cot x}{x} \le y(\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{\pi} \le \frac{\cot x}{x} \le \frac{4}{\pi}$

dấu đẳng thức chỉ xảy ra ở vế phải tại $x = \frac{\pi}{4}$ và vế trái $x = \frac{\pi}{3}$, do đó :

$$\frac{\sqrt{3}}{\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/3} dx < \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cot x.dx}{x} < \frac{4}{\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/3} dx \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{12} < \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cot x}{x} dx < \frac{1}{3}.$$

Bài tập 18. Tham khảo bài tập 26 chủ đề 4.

CHỦ ĐỀ 7
PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN

Bài toán 1: Giải phương trình, bất phương trình chứa tích phân.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thường thực hiện theo các bước:

Bước 1: Trước tiên, cần xác định tích phân trong phương trình, bất phương trình đó, sau đó sẽ thu được một phương trình, bất phương trình đại số quen thuộc.

Bước 2: Giải phương trình đại số nhận được.

Như vậy các em học sinh cần :

- Nắm vững các phương pháp tính tích phân.
- Bổ sung thêm kiến thức về đại số.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1. Tìm các nghiệm dương của phương trình sau: $\int\limits_{1/e}^{x} \frac{(1+\ln t)dt}{t} = 0.$

A. $x = 2e.$ **B.** $x = e.$ **C.** $x = \frac{1}{e}.$ **D.** $x = \frac{2}{e}.$

Bài tập 2. Giải các phương trình:

a. $\int\limits_{0}^{x}(2^{t-1}.\ln 2 - 2t + 2)dt = 2^{x^2-x} + \frac{1}{2}.$

A. $x = 1.$ **B.** $x = 2.$ **C.** $x = 4.$ **D.** $x = 8.$

b. $\int\limits_{0}^{x}(4\sin^4 t - \frac{3}{2})dt = 0.$

A. $x = \frac{k\pi}{4}.$ **B.** $x = \frac{k\pi}{2}.$ **C.** $x = k\pi.$ **D.** $x = 2k\pi.$

Bài tập 3. Giải phương trình: $\int\limits_{0}^{x}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)^3}} = tgx.$

A. $x = 0.$ **B.** $x = \pi.$ **C.** $x = 2\pi.$ **D.** $x = 3\pi.$

Bài tập 4. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình : $\int\limits_{0}^{x}\cos(t - x^2)dt = \sin x.$

Bài tập 5. Giải phương trình ẩn x :

$$\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{x}\frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1+\sqrt{1-t^2}}} = \sqrt{6} - 2x(1+2\sqrt{1-x^2}).$$

A. $x = \frac{1}{3}.$ **B.** $x = \frac{1}{2}.$ **C.** $x = \frac{3}{2}.$ **D.** $x = \frac{5}{3}.$

Bài tập 6. Tìm nghiệm $x \geq 1$ thoả mãn phương trình :

$$\int_1^x 7^{t-1} \ln 7 dt = 6\log_7(6x-5).$$

A. $x=0$ và $x=1$. **B.** $x=1$ và $x=2$. **C.** $x=2$ và $x=3$. **D.** $x=3$ và $x=4$.

Bài tập 7. Giải và biện luận phương trình sau với ẩn x: $2\int_0^x (mt-m+2)dt = 3-m$.

Bài tập 8. Cho phương trình : $x^3 + \int_1^x [3t^2 + 4(6m-1)t - 3(2m-1)]dt = 1$.

Tìm m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt có tổng bình phương bằng 28.

A. $m = 1$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = \frac{1}{12}$. **D.** $m = -\frac{1}{12}$.

Bài tập 9. Giải bất phương trình: $\frac{1}{2^{\cos^2 x}} + \frac{1}{2^{\sin^2 x}} \leq \int_0^x (\cos t - \sin t)dt + 1$.

A. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$. **B.** $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$. **C.** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$. **D.** $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

Bài toán 2: Sử dụng tích phân chứng minh phương trình có nghiệm.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên (a, b) với $f(x)$ là hàm số liên tục trên [a, b], ta có thể thực hiện các bước sau :

Bước 1: Xác định giá trị của tích phân $I = \int_a^b f(x)dx$.

Bước 2: Nếu $I = 0$ thì kết luận phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong (a, b).

Lưu ý: Ta cũng biết nhiều bài toán yêu cầu "*Chứng minh rằng phương trình có nghiệm với mọi tham số*", khi đó ta cần lựa chọn [a, b] thích hợp để $I = 0$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 10. Giả sử $\frac{a}{2003}+\frac{b}{2002}+\frac{c}{2001} = 0$. Chứng minh rằng phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thuộc khoảng (0, 1).

Bài tập 11. Chứng minh rằng phương trình: $\sum_{i=1}^{n} a_i \cos(ix) = 0$

luôn có nghiệm với mọi $a_i \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1,n}$.

Bài tập 12. Chứng minh rằng phương trình: $\sum_{i=1}^{n} a_i \sin(ix) = 0$

luôn có nghiệm với mọi $a_i \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1,n}$.

Bài tập 13. Chứng minh rằng phương trình: $\sum_{i=1}^{n} a_i \cos[i(\frac{\pi}{2} - x)] = 0$

luôn có nghiệm với mọi $a_i \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1,n}$.

Bài tập 1. Biến đổi VT của phương trình về dạng:

$$VT = \int_{1/e}^{x}(1+\ln t)d(\ln t) = (\ln t + \frac{1}{2}\ln^2 t)\Big|_{1/e}^{x} = \ln x + \frac{1}{2}\ln^2 x + \frac{1}{2}.$$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$\ln x + \frac{1}{2}\ln^2 x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \ln^2 x + 2\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{e}$.

Bài tập 2.

a. Ký hiệu phương trình ban đầu là (1).

Biến đổi VT của phương trình về dạng:

$$VT = (2^{t-1} - t^2 + 2t)\Big|_0^x = (2^{x-1} - x^2 + 2x) - \frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được: $2^{x-1} + x - 1 = 2^{x^2-x} + x^2 - x$.

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ đồng biến trên $\mathbf{R}$.

Vậy, phương trình được viết dưới dạng :

$f(x-1) = f(x^2 - x) \Leftrightarrow x - 1 = x^2 - x \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$.

b. Ký hiệu phương trình ban đầu là (1).

Biến đổi VT của phương trình về dạng:

$$VT = \int_0^x (\frac{1}{2}\cos 4t - 2\cos 2t)dt = (\frac{1}{8}\sin 4t - \sin 2t)\Big|_0^x$$

$$= \frac{1}{8}\sin 4x - \sin 2x. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được :

$$\frac{1}{8}\sin 4x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow (\frac{1}{4}\cos 2x - 1)\sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 3. Xét tích phân $I = \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)^3}}$ với phép đổi biến $t = \sin u$, $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$

suy ra: $dt = \cos u du$ và $\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)^3}} = \frac{\cos u du}{\cos^3 u} = \frac{du}{\cos^2 u} = d(\tan u)$.

Khi đó: $I = \int d(\tan u) = \tan u + C = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} + C$.

Do đó, phương trình có dạng:

$$\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\Big|_0^x = \tan x \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ trên $[0, 1)$

$t'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $[0, 1)$

Khi đó : $(2) \Leftrightarrow f(x) = f(\sin x) \Leftrightarrow x = \sin x \overset{x\in[0,1)}{\Leftrightarrow} x = 0.$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Bài tập 4. Biến đổi VT của phương trình về dạng:

$$VT = \sin(t - x^2)\Big|_0^x = \sin(x - x^2) - \sin(-x^2) = \sin x^2 - \sin(x^2 - x).$$

Do đó, phương trình có dạng:

$$\sin x^2 - \sin(x^2 - x) = \sin x \Leftrightarrow 2\cos\frac{2x^2 - x}{2}\sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{x}{2} = 0 \\ \cos\dfrac{2x^2 - x}{2} = \cos\dfrac{x}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ \dfrac{2x^2 - x}{2} = -\dfrac{x}{2} + 2l\pi \\ \dfrac{2x^2 - x}{2} = \dfrac{x}{2} + 2m\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\sqrt{2l\pi},\ l = 0,1,... \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 8m\pi}}{2},\ m = 0,1,... \end{array}\right. , k, l, m \in \mathbf{Z}.$$

Bài tập 5. Biến đổi VT của phương trình về dạng:

$$VT = -2\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{x} \frac{\dfrac{-2tdt}{2\sqrt{1-t^2}}}{2\sqrt{1+\sqrt{1-t^2}}} = -2\sqrt{1+\sqrt{1-t^2}}\Big|_{\sqrt{3}/2}^{x}$$

$$= -2\left(\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \sqrt{6} - 2\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\ .$$

Do đó, phương trình có dạng:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = x(1 + 2\sqrt{1-x^2}). \qquad (1)$$

Điều kiện $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$ (2)

Đặt $x = \sin u$ với $u \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$. Khi đó, phương trình (1) có dạng:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-\sin^2 u}} = \sin u(1 + 2\sqrt{1-\sin^2 u})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\cos u} = \sin u(1+2\cos u)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{u}{2} = \sin u + \sin 2u \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{u}{2} = 2\sin\frac{3u}{2}\cos\frac{u}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{u}{2}\left(1-\sqrt{2}\sin\frac{3u}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{u}{2}=0 \quad (1)\\ \sin\dfrac{3u}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=\dfrac{\pi}{6}\\ u=\dfrac{\pi}{2} \text{ loại}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Vậy, nghiệm của phương trình là $x = \frac{1}{2}$.

Bài tập 6. Biến đổi VT của phương trình về dạng: $VT = 7^{t-1}\Big|_1^x = 7^{x-1} - 1$.

Do đó, phương trình có dạng: $7^{x-1} - 1 = 6\log_7(6x-5)$.

Điều kiện $6x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{6}$.

Đặt $y - 1 = \log_7(6x-5)$.

Khi đó, phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases}7^{x-1} = 6(y-1)+1\\ y-1=\log_7(6x-5)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7^{x-1}=6y-5 \quad (1)\\ 7^{y-1}=6x-5 \quad (2)\end{cases} \quad (I)$$

Trừ theo vế hai phương trình của (I), ta được:

$$7^{x-1} + 6x = 7^{y-1} + 6y. \qquad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = 7^{t-1} + 6t$ là hàm đơn điệu trên **R**.

Khi đó (3) được viết lại dưới dạng: $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Khi đó (2) có dạng: $7^{x-1} - 6x + 5 = 0$.

Xét hàm số $g(x) = 7^{x-1} - 6x + 5$ trên tập $D = (\frac{5}{6}, +\infty)$.

- Đạo hàm: $g'(x) = 7^{x-1}.\ln 7 - 6$

  $g''(x) = 7^{x-1}.\ln^2 7 > 0, \forall x \in D \Rightarrow g'(x)$ là hàm đồng biến trên D.

Từ đó, theo định lý Rôn phương trình $g(x) = 0$ có không quá 2 nghiệm trên D.

Nhận xét rằng $g(1) = g(2) = 0$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = 2$.

Bài tập 7. Biến đổi VT của phương trình về dạng:

$$VT = [mt^2 - 2(m-2)t]\Big|_0^x = mx^2 - 2(m-2)x.$$

Do đó, phương trình có dạng: $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$. (1)

Xét hai trường hợp của m.

Trường hợp 1: Với $m = 0$, ta được :

$$(1) \Leftrightarrow 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}.$$

Trường hợp 2: Với $m \neq 0$, ta tính biệt thức $\Delta' = 4 - m$.

- Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 4 - m < 0 \Leftrightarrow m > 4$, thì (1) vô nghiệm.

- Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 4$, thì (1) có nghiệm kép $x_0 = \frac{1}{2}$.
- Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 4$, thì (1) có 2 nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{m - 2 \pm \sqrt{4 - m}}{m}$.

Kết luận :

- Với $m = 0$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{4}$.
- Với $m = 4$, phương trình có nghiệm kép $x_0 = \frac{1}{2}$.
- Với $m > 4$, phương trình vô nghiệm.
- Với $0 \neq m < 4$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{m - 2 \pm \sqrt{4 - m}}{m}$.

Bài tập 8. Trước hết ta đi xác định tích phân I ở trong phương trình:

$$I = [t^3 + 2(6m - 1)t^2 - 3(2m - 1)t]\Big|_1^x$$

$$= x^3 + 2(6m - 1)x^2 - 3(2m - 1)x - 6m - 2.$$

Do đó, phương trình có dạng:

$$2x^3 + 2(6m - 1)x^2 - 3(2m - 1)x - 3(1 + 2m) = 0. \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)[2x^2 + 12mx + 3(1 + 2m)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ f(x) = 2x^2 + 12mx + 3(1 + 2m) = 0 \quad (2) \end{bmatrix}$$

Trước hết, phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_f > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36m^2 - 12m - 6 > 0 \\ 17 + 6m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m > \frac{1 + \sqrt{7}}{6} \\ -\frac{17}{6} \neq m < \frac{1 - \sqrt{7}}{6} \end{bmatrix} .(*)$$

Khi đó, phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -6m \\ x_1 . x_2 = \frac{3(1 + 2m)}{2} \end{cases}.$$

Tổng bình phương các nghiệm của (1) bằng 28

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 1^2 = 28 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 27 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 27$$

$$\Leftrightarrow 36m^2 - 3(1 + 2m) = 27 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} m = 1.$$

Vậy, với $m = 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 9. Trước hết ta đi xác định tích phân I ở trong bất phương trình:

$$I = (\sin t + \cos t)\Big|_0^x = \sin x + \cos x - 1.$$

Do đó, bất phương trình có dạng: $\frac{1}{2^{\cos^2 x}} + \frac{1}{2^{\sin^2 x}} \leq \sin x + \cos x.$

Ta có nhận xét:

$$VT = \frac{1}{2^{1-\sin^2 x}} + \frac{1}{2^{\sin^2 x}} = \frac{2^{\sin^2 x}}{2} + \frac{1}{2^{\sin^2 x}} \overset{\text{Côsi}}{\geq} 2\sqrt{\frac{2^{\sin^2 x}}{2} \cdot \frac{1}{2^{\sin^2 x}}} = \sqrt{2}.$$

$$VP = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2}.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} VT = \sqrt{2} \\ VP = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2^{\sin^2 x}}{2} = \frac{1}{2^{\sin^2 x}} \\ \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2^{\sin^2 x})^2 = 2 \\ x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 10. Xét hàm số $f(x) = ax^{2002} + bx^{2001} + cx^{2000}$, ta có:

$$I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (ax^{2002} + bx^{2001} + cx^{2000})dx$$

$$= \left(\frac{a}{2003}x^{2003} + \frac{b}{2002}x^{2002} + \frac{c}{2001}x^{2001}\right)\Big|_0^1 = \frac{a}{2003} + \frac{b}{2002} + \frac{c}{2001} = 0$$

$\Leftrightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong $(0, 1)$

$\Leftrightarrow (ax^2 + bx + c)x^{2000} = 0$ có ít nhất một nghiệm trong $(0, 1)$

$\Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm trong $(0, 1)$.

Bài tập 11. Phương trình $\sum_{i=1}^{n} a_i \cos(ix) = 0$ luôn có nghiệm với mọi $a_i \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1,n}$ bởi :

$$\int_0^{\pi} \sum_{i=1}^{n} a_i \cos(ix)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\pi} a_i \cos(ix)dx = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i}\sin(ix)\right]\Big|_0^{\pi} = 0.$$

Bài tập 12. Phương trình $\sum_{i=1}^{n} a_i \sin(ix) = 0$ luôn có nghiệm với mọi $a_i \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1,n}$ bởi:

$$\int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{n} a_i \sin(ix)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{2\pi} a_i \sin(ix)dx = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i}\cos(ix)\right]\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Bài tập 13, *Hướng dẫn*: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sin(ix) = 0. \qquad (*)$$

Việc chứng minh phương trình (*) luôn có nghiệm xem bài tập 28.

CHỦ ĐỀ 8.
SỬ DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH CỦA HÌNH PHẲNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

a. *Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số* $y = f(x)$, ($f(x)$ *liên tục trên đoạn* $[a, b]$), *trục* Ox *và hai đường thẳng* $x = a$ *và* $x = b$ *được cho bởi công thức*:

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx .$$

b. *Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng* $x = a$, $x = b$, *và đồ thị của hai hàm số* $y = f_1(x)$ *và* $y = f_2(x)$ ($f_1(x)$ và $f_2(x)$ *liên tục trên đoạn* $[a, b]$) *được cho bởi công thức*: $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\,dx$.

2. DIỆN TÍCH CỦA HÌNH TRÒN VÀ CỦA HÌNH ELÍP

a. *Hình tròn bán kính* R *có diện tích* $S = \pi R^2$.

b. *Hình elíp* (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *có diện tích* $S = \pi ab$.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN VÀ BÀI TẬP

Bài toán 1: Diện tích hình phẳng dạng 1.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Với yêu cầu:

"Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ (liên tục trên đoạn $[a, b]$), hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ và trục Ox"

ta thực hiện các bước sau :

Bước 1: Gọi S là diện tích cần xác định, ta có :

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx . \qquad (1)$$

Bước 2: Xét dấu biểu thức $f(x)$ trên $[a, b]$.

Từ đó phân được đoạn $[a, b]$ thành các đoạn nhỏ, giả sử :

$$[a, b] = [a, c_1] \cup [c_1, c_2] \cup \ldots \cup [c_k, b]$$

mà trên mỗi đoạn $f(x)$ chỉ có một dấu.

Bước 3: Khi đó : $S = \int_a^{c_1} |f(x)|\,dx + \int_{c_1}^{c_2} |f(x)|\,dx + \ldots + \int_{c_k}^{b} |f(x)|\,dx$. (2)

Chú ý : Nếu bài toán phát biểu dưới dạng:

" Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $x = f(y)$ (liên tục trên đoạn $[a, b]$), hai đường thẳng $y = a$, $y = b$ và trục Oy "

khi đó công thức tính diện tích là : $S = \int_a^b |f(y)|\,dy$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$y = \sin^3 x + \cos^3 x$ và trục Ox giữa hai giao điểm liên tiếp.

A. $\frac{5\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Bài tập 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

$y = \sin^2 x \cos^3 x$; $y = 0$ và $x = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$.

A. $\frac{7}{15}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{10}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Bài tập 3. Cho hàm số : (C): $y = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + m}$.

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với $m = 1$.

b. Với $m = 1$, tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ và (C).

A. $\frac{1}{2} - \ln 2$. **B.** $\frac{1}{2} - \ln 3$. **C.** $\frac{3}{2} - \ln 2$. **D.** $\frac{3}{2} - \ln 3$.

Bài tập 4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

a. $y = \frac{1}{x^2 + a^2}$, $y = 0$, $x = \pm t$. b. $y = \frac{R^3}{x^2 + R^2}$, $y = 0$, $x = \pm t$.

Từ đó, tìm $S = \lim\limits_{t \to +\infty} S(t)$.

Bài toán 2: Diện tích hình phẳng dạng 2.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Với yêu cầu :

"Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ *(liên tục trên đoạn* $[a, b]$*), hai đường thẳng* $x = a$, $x = b$"

ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Gọi S là diện tích cần xác định, ta có :

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx. \qquad (1)$$

Bước 2: Xét dấu biểu thức $f(x) - g(x)$ trên $[a, b]$.

Từ đó phân được đoạn $[a, b]$ thành các đoạn nhỏ, giả sử :

$$[a, b] = [a, c_1] \cup [c_1, c_2] \cup ... \cup [c_k, b]$$

mà trên mỗi đoạn $f(x) - g(x)$ chỉ có một dấu.

Bước 3: Khi đó :

$$S = \int_a^{c_1} |f(x) - g(x)|dx + ... + \int_{c_k}^b |f(x) - g(x)|dx. \qquad (2)$$

Chú ý: Nếu bài toán phát biểu dưới dạng :

"Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $x = f_1(y)$ *và* $x = f_2(y)$ *(liên tục trên đoạn* $[a, b]$*), hai đường thẳng* $y = a$, $y = b$ *và trục* Oy "

khi đó công thức tính diện tích là :

$$S = \int_a^b |f_1(y) - f_2(y)|\,dy.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$y = |1 - 2\sin^2\frac{3x}{2})|\ ;\ y = 1 + \frac{12x}{\pi}\ ;\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{2}.$$

A. $2\pi - 1$. **B.** $2\pi + 1$. **C.** $\pi - 2$. **D.** $\pi + 2$.

Bài tập 6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$y = 2^x\ ;\ y = 3 - x\ ;\ x = 0.$$

A. $\frac{3}{2} + \frac{2}{\ln 3}$. **B.** $\frac{3}{2} - \frac{2}{\ln 3}$. **C.** $\frac{5}{2} + \frac{2}{\ln 2}$. **D.** $\frac{5}{2} - \frac{2}{\ln 2}$.

Bài tập 7. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$y = (x + 1)^5;\ y = e^x;\ x = 1.$$

A. $\frac{23}{2} - e$. **B.** $\frac{23}{2} + e$. **C.** $\frac{3}{2} - 2e$. **D.** $\frac{2}{3} + 3e$.

Bài tập 8. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$y = -x^2 + 2x\ ;\ y = -3x.$$

A. $\frac{125}{2}$. **B.** $\frac{125}{3}$. **C.** $\frac{125}{6}$. **D.** $\frac{125}{8}$.

Bài tập 9. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \text{ và } y = |x|$$

A. $\frac{23}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Bài tập 10. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

$$y = \sin^3 x,\ y = \cos^3 x \text{ và trục Oy với } 0 \le x \le \frac{\pi}{4}.$$

A. $\sqrt{2} - 1$. **B.** $2\sqrt{2} - 1$. **C.** $4\sqrt{2} - 5$. **D.** $5\sqrt{2} - 4$.

Bài tập 11. Xét hình bị chặn bởi Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng đi qua điểm $A(x_0, y_0)$ $(y_0 > x_0^2)$ và có hệ số góc k. Xác định k để hình nói trên có diện tích nhỏ nhất.

Bài tập 12. Cho Parabol (P): $y = x^2 + 2$. Xét hình giới hạn bởi một tiếp tuyến bất kỳ của (P) và các đường $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$. Tìm các tiếp tuyến để hình nói trên có diện tích lớn nhất.

Bài tập 13. Xét hình giới hạn bởi Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng đi qua điểm $A(x_0, x_0^2)$ không trùng với gốc O và vuông góc với tiếp tuyến tại A của (P). Tìm các điểm A để hình nói trên có diện tích nhỏ nhất.

Bài toán 3: Diện tích hình phẳng dạng 3.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Với yêu cầu :

"Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của ba hàm số

$y = f(x)$, $y = g(x)$ *và* $y = h(x)$"

ta thực hiện các bước sau :

Bước 1: Giải các phương trình :

$f(x) - g(x) = 0$ và $f(x) - h(x) = 0$ hoặc $g(x) - h(x) = 0$.

Bước 2: Thiết lập công thức diện tích.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 14. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi : $y = x^2$; $y = \frac{x^2}{8}$; $y = \frac{8}{x}$.

A. 4ln2. **B.** 8ln2. **C.** 10ln3. **D.** 4ln3.

Bài tập 15. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

$y = -x^2 + x$; $y = x^2$; $y = x^2 + x - 2$.

A. $\frac{23}{3}$. **B.** $\frac{23}{8}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Bài tập 16. Cho Parabol (P): $y = x^2 - 4x + 5$.

a. Viết phương trình hai tiếp tuyến của (P) kẻ tại hai điểm A(1, 2) và B(4, 5).

b. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và hai tiếp tuyến trên.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Bài tập 17. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

$y = |x^2 - 1|$; $y = |x| + 5$.

A. $\frac{73}{3}$. **B.** $\frac{7}{3}$. **C.** $\frac{3}{7}$. **D.** $\frac{3}{73}$.

Bài toán 4: Diện tích hình tròn – elíp và ứng dụng.

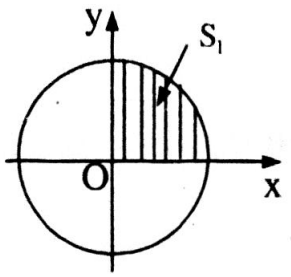
PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Trước tiên:

1. Với hình tròn (C) biết: (C): $x^2 + y^2 = R^2$.

Suy ra phương trình của (C) trong góc phần tư thứ I là:

$y = \sqrt{R^2 - x^2}$.



Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$S = 4S_1 = 4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx . \qquad (1)$$

Để tính (1) ta thực hiện phép đổi biến, đặt:

$x = R\sin t$, với $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow dx = R\cos t.dt$.

Đổi cận:

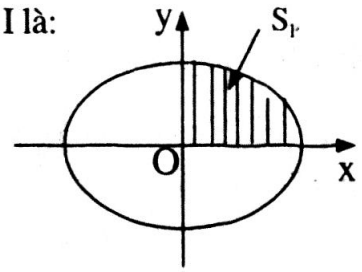
- Với $x = 0 \Rightarrow t = 0$.
- Với $x = R \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

Khi đó : $S = 4R\int_0^{\pi/2}\sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t}.\cos t dt = 4R^2\int_0^{\pi/2}|\cos t|.\cos t dt$

$$= 4R^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t dt = 2R^2\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt = 2R^2(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\pi/2} = \pi R^2.$$

2. Với hình Elíp (E), có phương trình: (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$

Suy ra, phương trình của (E) trong góc phần tư thứ I là:



$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\ .$$

Gọi S là diện tích cần xác định, ta có :

$$S = 4S_1 = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx\ . \qquad (1)$$

Để tính (1) ta thực hiện phép đổi biến, đặt :

$$x = a\sin t, \text{ với } -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow dx = a\cos t.dt.$$

Đổi cận :

- Với $x = 0 \Rightarrow t = 0$.
- Với $x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

Khi đó : $S = 4ab\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}.\cos t dt = 4ab\int_0^{\pi/2}|\cos t|.\cos t dt$

$$= 4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 t dt = 2ab\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt = 2ab(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\pi/2} = \pi ab.$$

Từ hai lời giải trên, chúng ta có được ý tưởng chung để tính diện tích một hình giới hạn bởi một đường cong kín nhận O làm tâm đối xứng và các trục toạ độ làm trục đối xứng, các em học sinh hãy thử áp dụng nó cho bài toán *tính diện tích giới hạn bởi đường cong* (C): $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 18. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

(P): $y^2 = 2px$ và (C): $27py^2 = 8(x - p)^3$.

Bài tập 19. Cho Parabol (P) và đường tròn (C) có phương trình:

(P): $y^2 = 2px$ $(p > 0)$; (C): $x^2 + y^2 = 24p^2$.

Tính tỉ số diện tích mà Parabol (P) chia đường tròn (C).

Bài tập 20. Cho Parabol (P) và elíp (E) có phương trình:

$$(P): y^2 = 2px\ (p > 0);\quad (E): \frac{x^2}{2p^2} + \frac{y^2}{p^2} = 1.$$

Tính tỉ số diện tích mà Parabol (P) chia elíp (E).

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Hoành độ giao điểm:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 0 \Leftrightarrow \text{tg}^3 x = -1 \Leftrightarrow \text{tg}x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

ở đây, chúng ta chọn hai giao điểm liên tiếp là $x = -\frac{\pi}{4}$ và $x = \frac{3\pi}{4}$.

Diện tích hình phẳng cần tính được cho bởi:

$$S = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} |\sin^3 x + \cos^3 x|\,dx = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (\sin^3 x + \cos^3 x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (3\sin x - \sin 3x + \cos 3x + 3\cos x)dx$$

$$= \frac{1}{12}(-9\cos x + \cos 3x + \sin 3x + 9\sin x)\Big|_{-\pi/4}^{3\pi/4} = \frac{5\sqrt{2}}{3}\ (\text{đvdt}).$$

Bài tập 2. Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$S = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos^3 x.dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2x}{2}.\frac{3\cos x - \cos 3x}{4}dx$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} (3\cos 2x.\cos x - \cos 3x + 3\cos x - \cos 2x.\cos 3x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} (\frac{3}{2}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos 5x + 4\cos x)dx$$

$$= \frac{1}{8}(\frac{1}{2}\sin 3x - \frac{1}{10}\sin 5x + 4\sin x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{7}{15}\ (\text{đvdt})$$

Bài tập 3.

a. *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

b. Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$S = \int_0^1 \frac{(x^2 + 3x + 1)dx}{x+1} = \int_0^1 \left(x + 2 - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= (\frac{1}{2}x^2 + 2x - \ln|x+1|)\Big|_0^1 = \frac{3}{2} - \ln 2\ (\text{đvdt})$$

Bài tập 4.

a. Diện tích S(t) được cho bởi:

$$S(t) = \int_{-t}^{t} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \underbrace{\int_{-t}^{0} \frac{dx}{x^2 + a^2}}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{t} \frac{dx}{x^2 + a^2}}_{I_2}. \qquad (1)$$

Với tích phân I_1 sử dụng phép đổi biến x = – u suy ra dx = –du.

Đổi cận:

- $x = -t \Rightarrow u = t$.
- $x = 0 \Rightarrow u = 0$.

Khi đó: $I_1 = \int_t^0 \frac{du}{(-u)^2 + a^2} = \int_0^t \frac{du}{u^2 + a^2} = \int_0^t \frac{dx}{x^2 + a^2}$. (2)

Thay (2) vào (1), ta được: $S(t) = \int_0^t \frac{dx}{x^2 + a^2} + \int_0^t \frac{dx}{x^2 + a^2} = 2\int_0^t \frac{dx}{x^2 + a^2}$.

Ta đi xác định nguyên hàm $I = \int \frac{dx}{x^2 + a^2}$ bằng phép đổi biến x = a.tanu suy ra

$dx = \frac{adu}{\cos^2 u} = a(1 + \tan^2 u)du$.

Khi đó: $I = \int \frac{a(1+\tan^2 u)du}{a^2 \tan^2 u + a^2} = \frac{1}{a}\int du = u + C = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$.

Từ đó, suy ra:

$$S(t) = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\Big|_0^t = \frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a}.$$

$$S = \lim_{t\to+\infty} S(t) = \frac{1}{a}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2a}.$$

b. Thực hiện tương tự câu a), ta được:

$$S(t) = 2R^2\arctan\frac{t}{R} \text{ và } S = \lim_{t\to+\infty} S(t) = 2R^2.\frac{\pi}{2} = \pi R^2.$$

Bài tập 5. Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$S = \int_0^{\pi/2} \left|1 - 2\sin^2\frac{3x}{2} - 1 - \frac{12x}{\pi}\right| dx = \int_0^{\pi/2} |(1 + \frac{12x}{\pi} - |\cos 3x|)dx$$

$$= \int_0^{\pi/6} |(1 + \frac{12x}{\pi} - \cos 3x)dx + \int_{\pi/6}^{\pi/2} |(1 + \frac{12x}{\pi} + \cos 3x)dx = 2\pi - 1. \text{ (đvdt)}$$

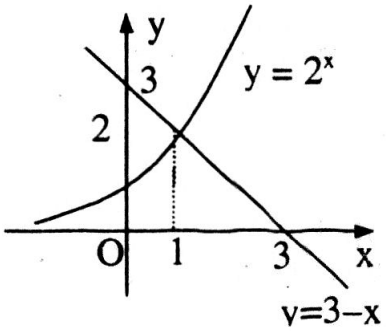
Bài tập 6. Hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = 2^x$ và $y = 3 - x$ là nghiệm của phương trình :

$$2^x = 3 - x. \quad (1)$$

- Vế phải của (1) là một hàm nghịch biến.
- Vế trái của (1) là một hàm đồng biến.

Do vậy, (1) có nghiệm duy nhất x = 1.

Gọi S là diện tích cần xác định, ta có :



$$S = \int_0^1 \left(3 - x - 2^x\right)dx$$

$$= \left(3x - \frac{1}{2}x - \frac{2^x}{\ln 2}\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{2} - \frac{2}{\ln 2} \text{ (đvdt)}.$$

Chú ý : Trong bài toán trên sở dĩ ta có ngay $S = \int_0^1 (3 - x - 2^x)dx$ là bởi đồ thị của $y = 3 - x$ ở phía trên đồ thị của $y = 2^x$ trên đoạn [0, 1]. Như vậy trong nhiều bài toán nếu mô tả được hình vẽ ta có thể xác định ngay được dấu.

Bài tập 7. Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình :

$(x + 1)^5 = e^x \Rightarrow x = 0.$

Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$S = \int_0^1 |(x+1)^5 - e^x| dx = \int_0^1 [(x+1)^5 - e^x]dx$$

$$= [\frac{1}{6}(x + 1)^6 - e^x]\Big|_0^1 = \frac{2^6}{6} - e - \frac{1}{6} + 1 = \frac{69}{6} - e \text{ (đvdt).}$$

Yêu cầu: Các em học sinh hãy lí giải *"Tại sao phương trình* $(x + 1)^5 = e^x$ *chỉ có nghiệm duy nhất* $x = 0$ *?"*

Bài tập 8. Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình:

$$-x^2 + 2x = -3x \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = 5 \end{bmatrix}.$$

Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$S = \int_0^5 |-x^2 + 2x + 3x| dx = \int_0^1 (-x^2 + 5x]dx = (-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2)\Big|_0^5$$

$$= -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} = \frac{125}{6} \text{ (đvdt).}$$

Bài tập 9. Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình:

$$x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} = |x| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x - 3 = 0 & \text{với } x \geq 0 \\ 2x^2 + 5x - 3 = 0 & \text{với } x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ x = -3 \end{bmatrix}.$$

Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$S = \int_{-3}^1 |x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} - |x|| dx$$

$$= \int_{-3}^0 |x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}| dx + \int_0^1 |x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}| dx$$

$$= \int_{-3}^0 (x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2})dx - \int_0^1 (x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2})dx$$

$$= (\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{3}{2}x)\Big|_{-1}^0 - (\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x)\Big|_0^1 = \frac{23}{3} \text{ (đvdt).}$$

Bài tập 10. Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình:

$$\sin^3 x = \cos^3 x \Leftrightarrow \tan^3 x = 1 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ vì } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}.$$

Diện tích hình phẳng cần tính được cho bởi:

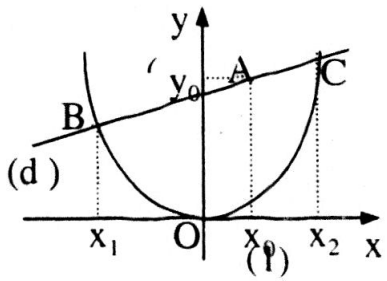
$$S = \int_0^{\pi/4} |\sin^3 x - \cos^3 x| dx = \int_0^{\pi/4} (\cos^3 x - \sin^3 x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/4} (\cos 3x + 3\cos x - 3\sin x + \sin 3x)dx$$

$$= \frac{1}{12}(\sin 3x + 9\sin x + 9\cos x - \cos 3x)\Big|_0^{\pi/4} = 5\sqrt{2} - 4 \text{ (đvdt)}.$$

Bài tập 11. Ta lần lượt thực hiện:

a. Tính diện tích hình phẳng: Gọi (d) là đường thẳng đi qua $A(x_0, y_0)$ $(y_0 > x_0^2)$ và có hệ số góc k, ta có :



$$(d): \quad y = k(x - x_0) + y_0$$

$$\Leftrightarrow (d): \quad y = kx - kx_0 + y_0.$$

Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình:

$$x^2 = kx - kx_0 + y_0 \Leftrightarrow x^2 - kx + kx_0 - y_0 = 0$$

ta có : $\Delta = k^2 - 4(kx_0 - y_0) = (k - 2x_0)^2 + (y_0 - x_0^2)$.

Do $y_0 > x_0^2$ nên $\Delta > 0$, $\forall k$ bởi vậy (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 (giả sử $x_1 < x_2$) theo thứ tự là hoành độ giao điểm B, C của (d) và (P).

Diện tích hình phẳng được tính bởi :

$$S = \int_{x_1}^{x_2} (kx - kx_0 + y_0 - x^2)dx = \left[\frac{k}{2}x^2 - (kx_0 - y_0)x - \frac{x^3}{3}\right]\Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{1}{6}(x_2 - x_1)(k^2 - 4kx_0 + 4y_0). \qquad (2)$$

Mặt khác: $x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \sqrt{k^2 - 4kx_0 + 4y_0}$. (3)

Thay (3) vào (2), ta được : $S = \frac{1}{6}(k^2 - 4kx_0 + 4y_0)\sqrt{k^2 - 4kx_0 + 4y_0}$.

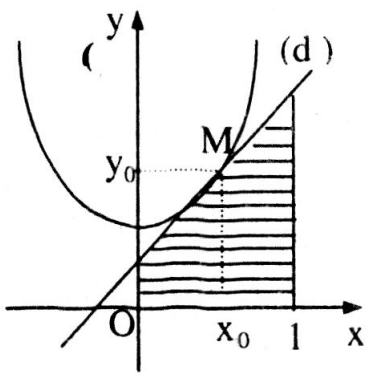
b. Xác định k để hình nói trên có diện tích nhỏ nhất: Ta có:

$S_{min} \Leftrightarrow k = 2x_0$ (nghiệm kép của phương trình $k^2 - 4kx_0 + 4y_0 = 0$).

Khi đó, ta được $S_{min} = 4(y_0 - x_0^2)$.

Bài tập 12. Ta lần lượt thực hiện:

a. Tính diện tích hình phẳng: Lấy điểm $M(x_0, x_0^2 + 2) \in (P)$, tiếp tuyến tại M có phương trình:



$$(d): y = y'(x_0)(x - x_0) + x_0^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow (d): y = 2x_0x - x_0^2 + 2.$$

Diện tích hình phẳng được tính bởi :

$$S = \int_0^1 (2x_0 x - x_0^2 + 2)dx = -x_0^2 + x_0 + 2.$$

Ta có: $-x_0^2 + x_0 + 2 = \frac{9}{4} - (x_0 - \frac{1}{2})^2 \le \frac{9}{4} \Leftrightarrow S \le \frac{9}{4}$.

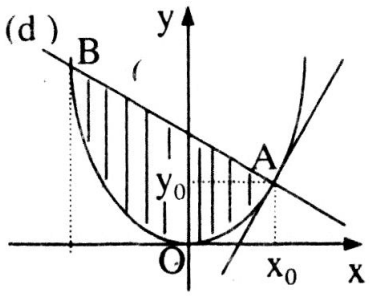
b. Khi đó, suy ra $S_{Max} = \frac{9}{4}$, đạt được khi :

$$x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow M(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}) \Rightarrow \text{tiếp tuyến (d): } y = x + \frac{3}{4}.$$

Bài tập 13. Ta lần lượt thực hiện:

a. Tính diện tích hình phẳng: Vì (P) nhận Oy làm trục đối xứng nên không mất tính tổng quát ta chỉ cần xét với $x_0 > 0$.

Gọi (d) là đường thẳng đi qua $A(x_0, y_0)$ $(y_0 > x_0^2)$ và vuông góc với tiếp tuyến tại A, ta có :



$$(d): y = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0) + x_0^2$$

$$\Leftrightarrow (d): y = -\frac{x}{2x_0} + x_0^2 + \frac{1}{2}.$$

Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình :

$$x^2 = -\frac{x}{2x_0} + x_0^2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + \frac{x}{2x_0} - x_0^2 - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_A = x_0 \\ x_B = -x_0 - \frac{1}{2x_0} \end{bmatrix}.$$

Diện tích hình phẳng được tính bởi :

$$S = \int_{-x_0 - \frac{1}{2x_0}}^{x_0} (-x^2 - \frac{x}{2x_0} + x_0^2 + \frac{1}{2})dx = \frac{1}{6}(2x_0 + \frac{1}{2x_0})^3. \qquad (1)$$

b. Diện tích nhỏ nhất: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta được:

$$2x_0 + \frac{1}{2x_0} \ge 2 \Leftrightarrow S \ge \frac{4}{3}.$$

Suy ra $S_{Min} = \frac{4}{3}$, đạt được khi : $2x_0 = \frac{1}{2x_0} \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow A(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

Vậy, tồn tại hai điểm $A_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ và $A_2(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ để $S_{Min} = \frac{4}{3}$.

Bài tập 14. Hoành độ giao điểm của các đồ thị đã cho là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \dfrac{x^2}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0; \quad \begin{cases} y = x^2 \\ y = \dfrac{8}{x} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2; \quad \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{8} \\ y = \dfrac{8}{x} \end{cases} \Leftrightarrow x = 4 .$$

Diện tích hình phẳng cần tính là :

$$S = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^2}{8} \right) dx + \int_4^2 \left(\frac{8}{x} - \frac{x^2}{8} \right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{24}x^3 \right) \Big|_0^2 + \left(8\ln x - \frac{1}{24}x^3 \right) \Big|_2^4 = 8\ln 2.$$

Bài tập 15. Hoành độ giao điểm của các đồ thị đã cho là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = -x^2 + x \\ y = x^2 + x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1; \qquad \begin{cases} y = -x^2 + x \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x^2 + x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

(*Bạn đọc cần vẽ đồ thị ba parabol trên trên cùng một hệ trục toạ độ để hiểu công thức tính diện tích*): Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S = \int_{-1}^{0} (-x^2 + x - x^2 - x + 2)dx + \int_0^{1/2} (-x^2 + x - x^2)dx +$$

$$+ \int_{-1}^{0} (x^2 - x^2 - x + 2)dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (-2x^2 + 2)dx + \int_0^{1/2} (-2x^2 + x)dx + \int_{-1}^{0} (-x + 2)dx$$

$$= \left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(-\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^{1/2} + \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_{-1}^{0}$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{1}{24} + \frac{3}{2} = \frac{23}{8} \text{ (đvdt)}$$

Bài tập 16.

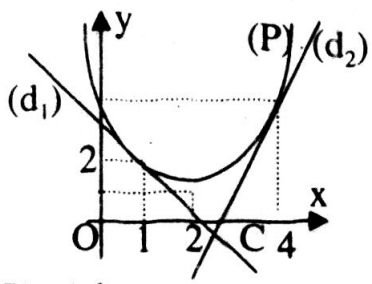
a. Ta lần lượt có:

- Phương trình tiếp tuyến của (P) kẻ tại điểm $A \in (P)$ có dạng:

(d_1): $y = y'(1)(x - 1) + 2$

$\Leftrightarrow (d_1)$: $y = -2(x - 1) + 2$

$\Leftrightarrow (d_1)$: $y = -2x + 4$.



- Phương trình tiếp tuyến của (P) kẻ tại điểm $B \in (P)$ có dạng:

(d_2): $y = y'(4)(x - 4) + 5$

$\Leftrightarrow (d_2)$: $y = 4(x - 4) + 5 \Leftrightarrow (d_2)$: $y = 4x - 11$.

b. Hoành độ giao điểm C của (d_1) và (d_2) là nghiệm của phương trình:

$$-2x + 4 = 4x - 11 \Leftrightarrow x = \frac{15}{6}.$$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và hai tiếp tuyến được cho bởi:

$$S = S_1 + S_2 = \int_1^{15/6} (x^2 - 4x + 5 + 2x - 4)\,dx + \int_{15/6}^{4} (x^2 - 4x + 5 - 4x + 11)\,dx.$$

$$= \int_1^{15/6} (x^2 - 2x + 1)dx + \int_{15/6}^{4} (x^2 - 8x + 16)dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x\right)\Big|_1^{15/6} + \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 16x\right)\Big|_{15/6}^{4} = \frac{9}{4} \text{ (đvdt)}$$

Bài tập 17. Các hàm số $y = |x^2 - 1|$ và $y = |x| + 5$ đều chẵn nên diện tích hình phẳng S giới hạn bởi hai đồ thị hàm số được cho bởi:

$S = 2S_1$,

với S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số với $x \geq 0$, tức là của $y = |x^2 - 1|$ và $y = x + 5$.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$|x^2 - 1| = x + 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = x + 5 & \text{với } x \geq 1 \\ -x^2 + 1 = x + 5 & \text{với } 0 \leq x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Khi đó, diện tích S_1 được cho bởi:

$$S_1 = \int_0^3 (x + 5 - |x^2 - 1|)dx = \int_0^1 (x + 5 + x^2 - 1)dx + \int_1^3 (x + 5 - x^2 + 1)dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 + x + 4)dx + \int_1^3 (-x^2 + x + 6)dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x\right)\Big|_0^1 + \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x\right)\Big|_1^3 = \frac{73}{6} \text{ (đvdt)}$$

Từ đó suy ra $S = 2S_1 = \frac{73}{3}$ (đvdt).

Bài tập 18. Không mất tính tổng quát ta giả sử $p \geq 0$.

Trước tiên, ta có:

- Hàm số $y^2 = 2px$ xác định với $x \geq 0$.
- Hàm số $27py^2 = 8(x - p)^3$ xác định với $x \geq p$.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$2px = \frac{8(x-p)^3}{27p} \Leftrightarrow 2p^2x = \left[\frac{2(x-p)}{3}\right]^3. \quad (1)$$

Đặt $t = \frac{2(x-p)}{3}$, $t \geq 0$ suy ra $x = \frac{1}{2}(3t + 2p)$ và khi đó (1) có dạng:

$3p^2t + 2p^3 = t^3 \Leftrightarrow t(t-p)(t+p) = 2p^2(t+p)$

$\overset{t\geq 0}{\Leftrightarrow} t^2 - pt - 2p^2 = 0 \overset{t\geq 0}{\Leftrightarrow} t = 2p \Leftrightarrow x = 4p.$

Nhận xét rằng:

- Hàm số $y = \sqrt{\frac{8}{27p}}(x-p)^{3/2}$ chỉ xác định với $x \geq p$.
- Trong khoảng $p < x < 4p$ thì $\sqrt{2p}\,x^{1/2} > \sqrt{\frac{8}{27p}}(x-p)^{3/2}$.
- Hình phẳng cần tính đối xứng qua Ox.

Từ đó, ta nhận được:

$$S = 2\left\{\int_0^p \sqrt{2p}x^{1/2}dx + \int_p^{4P}\left[\sqrt{2p}x^{1/2} - \sqrt{\frac{8}{27p}}(x-p)^{3/2}\right]dx\right\} = \frac{88p^2\sqrt{2}}{15}.$$

Bài tập 19. Tham khảo ví dụ 2 trang 95/ Học và ôn tập toán Giải tích 12 tập II – *Đề nghị bạn đọc trình bày lời giải chi tiết.*

Bài tập 20. Tham khảo ví dụ 2 trang 95/ Học và ôn tập toán Giải tích 12 tập II – *Đề nghị bạn đọc trình bày lời giải chi tiết.*

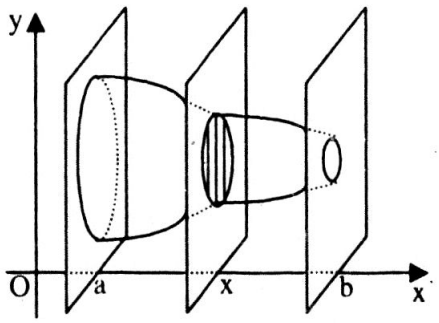
CHỦ ĐỀ 8
SỬ DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH THỂ TÍCH CỦA CÁC VẬT THỂ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. CÔNG THỨC TÍNH THỂ TÍCH

Giả sử vật thể T được giới hạn bởi hai mặt phẳng song song (α), (β).
Ta chọn trục Ox sao cho:

$$\begin{cases} Ox \perp (\alpha) \text{ và giả sử } Ox \cap (\alpha) = a \\ Ox \perp (\beta) \text{ và giả sử } Ox \cap (\beta) = b \end{cases}$$



Giả sử mặt phẳng $(\gamma) \perp Ox$ và $(\gamma) \cap Ox = x$ $(a \le x \le b)$ cắt T theo một thiết diện có diện tích S(x) (là hàm số liên tục theo biến x). Khi đó, *thể tích* V *của vật thể* T *được cho bởi công thức*:

$$V = \int_a^b S(x)dx .$$

2. THỂ TÍCH KHỐI NÓN VÀ KHỐI CHÓP, KHỐI NÓN CỤT VÀ KHỐI CHÓP CỤT

a. *Thể tích khối nón (khối chóp) có diện tích đáy bằng* B *và chiều cao* h *được cho bởi* $V = \frac{1}{3}Bh$.

b. *Thể tích khối nón cụt (khối chóp cụt) có diện tích hai đáy là* B_1, B_2 *và chiều cao* h *được cho bởi* $V = \frac{1}{3}(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1.B_2})h$.

3. THỂ TÍCH CỦA VẬT THỂ TRÒN XOAY

a. *Thể tích của vật thể tròn xoay sinh bởi miền* (D) *giới hạn bởi* y = f(x), x = a, x = b, y = 0 *quay quanh trục* Ox *được cho bởi công thức*:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx .$$

b. *Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền* (D) *giới hạn bởi* x = f(y), y = a, y = b, x = 0, *quay quanh trục* Oy *được cho bởi công thức*:

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy = \pi \int_a^b f^2(y)dy .$$

4. THỂ TÍCH CỦA KHỐI CẦU

Thể tích của khối cầu có bán kính R *được cho bởi* $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN VÀ BÀI TẬP

Bài toán 1: Thể tích vật thể T.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng kiến thức trong phần "*Công thức tính thể tích*" và hãy hiểu cần thực hiện theo hai bước.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1. Tính thể tích phần hình trụ bán kính đáy R, giới hạn bởi đáy với phần phía dưới của hai mặt phẳng (P) và (Q), biết:

- Mặt phẳng (P) đi qua một đường kính của đáy hợp với đáy một góc α $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$.
- Mặt phẳng (Q) cắt hình trụ, song song và cách đáy một khoảng bằng $h < R\tan\alpha$.

Bài tập 2. Tính thể tích khối nón đỉnh S, đáy là một đường tròn có bán kính bằng R, chiều cao h.

Bài tập 3. Tính thể tích khối nón đỉnh S, đáy là một Elíp có nửa độ dài hai trục bằng 2, 3, chiều cao 5.

A. 10π. **B.** 9π. **C.** 6π. **D.** 3π.

Bài tập 4. Tính thể tích vật thể đỉnh S, chiều cao h, đáy là một viên phân Parabol có đáy bằng chiều cao và bằng 2h.

A. $\frac{h^3}{9}$. **B.** $\frac{4h^3}{9}$. **C.** $\frac{6h^3}{9}$. **D.** $\frac{8h^3}{9}$.

Bài toán 2: Thể tích vật thể tròn xoay dạng 1.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có hai dạng sau:

Dạng 1: Với yêu cầu:

"*Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi* $y = f(x), x = a, x = b, y = 0$ *quay quanh trục* Ox"

ta áp dụng công thức: $V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.

Dạng 2: Với yêu cầu:

"*Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi* $x = f(y), y = a, y = b, x = 0$, *quay quanh trục* Oy"

ta áp dụng công thức: $V = \pi \int_a^b x^2 dy = \pi \int_a^b f^2(y)dy$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 5. Tính thể tích của vật thể tròn xoay sinh ra bởi phép quay xung quanh Oy của hình giới hạn bởi Parabol (P): $y = \frac{x^2}{2}$, $y = 2$, $y = 4$ và trục Oy.

A. π. **B.** 4π. **C.** 6π. **D.** 12π.

Bài tập 6. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo nên khi ta quay hình H quanh trục Ox, với:

a. $H = \{y = 0;\ y = \sqrt{1 + \cos^4 x + \sin^4 x}\ ;\ x = \frac{\pi}{2}; x = \pi\ \}$.

A. $\frac{7\pi^2}{8}$. **B.** $\frac{6\pi^2}{7}$. **C.** $\frac{5\pi^2}{6}$. **D.** $\frac{\pi^2}{2}$.

b. $H = \{y = x\ln x;\ y = 0;\ x = 1;\ x = e\}$.

A. $\frac{\pi(e^3 - 1)}{3}$. **B.** $\frac{\pi(e^3 + 1)}{2}$. **C.** $\frac{\pi(e^3 - 3)}{27}$. **D.** $\frac{\pi(5e^3 - 3)}{27}$.

c. $H = \{y = 0;\ y = \sqrt{\cos^6 x + \sin^6 x}\ ;\ x = 0, x = \frac{\pi}{2}\ \}$.

A. $\frac{\pi^2}{3}$. **B.** $\frac{\pi^2}{2}$. **C.** $\frac{5\pi^2}{6}$. **D.** $\frac{5\pi^2}{16}$.

d. $H = \{y = 3ax - x^2\ (a > 0),\ y = 0\}$

A. $\frac{81a^2\pi}{10}$. **B.** $\frac{81a^3\pi}{10}$. **C.** $\frac{81a^4\pi}{10}$. **D.** $\frac{81a^5\pi}{10}$.

Bài tập 7. Cho miền D giới hạn bởi đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 8$ và Parabol (P): $y^2 = 2x$.

a. Tính diện tích S của miền D.

A. $\pi + \frac{1}{3}$. **B.** $2\pi + \frac{4}{3}$. **C.** $3\pi + \frac{5}{4}$. **D.** $4\pi + \frac{6}{5}$.

b. Tính thể tích V sinh bởi D khi quay quanh Ox.

A. $\frac{\pi(\sqrt{2} - 7)}{3}$. **B.** $\frac{\pi(\sqrt{2} + 7)}{2}$. **C.** $\frac{\pi(\sqrt{2} - 1)}{4}$. **D.** $\frac{8\pi(8\sqrt{2} - 7)}{3}$.

Bài tập 8. Tính thể tích của Parapol bởi đường tròn xoay có đáy B và chiều cao h.

A. $\frac{Bh}{2}$. **B.** $\frac{Bh}{3}$. **C.** $\frac{Bh}{6}$. **D.** $\frac{Bh}{12}$.

Bài toán 3: Thể tích vật thể tròn xoay dạng 2.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có hai dạng sau:

Dạng 1: Với yêu cầu:

" Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi $y = f(x), y = g(x), x = a, x = b$ quay quanh trục Ox"

ta áp dụng công thức: $V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)|\,dx$.

Dạng 2: Với yêu cầu:

" Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi $x = f(y), x = g(y), y = a, y = b$ quay quanh trục Oy"

ta áp dụng công thức:

$$V = \pi \int_a^b |f^2(y) - g^2(y)|\,dy .$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 9. Cho hình phẳng D trong mặt phẳng Oxy giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$. Tính thể tích vật thể tròn xoay khi D quay quanh trục Ox.

A. $\frac{\pi}{10}$. **B.** $\frac{3\pi}{10}$. **C.** $\frac{\pi}{3}$. **D.** $\frac{2\pi}{3}$.

Bài tập 10. Cho hình phẳng D trong mặt phẳng Oxy giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4x + 6$, $y = -x^2 - 2x + 6$. Tính thể tích vật thể tròn xoay khi D quay quanh trục Ox.

A. π. **B.** 2π. **C.** 3π. **D.** 8π.

Bài tập 11. Cho hình phẳng D trong mặt phẳng Oxy giới hạn bởi các đường $y = 2x^2$, $y = 2x + 4$. Tính thể tích vật thể tròn xoay khi D quay quanh trục Ox.

A. $\frac{2\pi}{3}$. **B.** $\frac{28\pi}{3}$. **C.** $\frac{288\pi}{3}$. **D.** $\frac{88\pi}{3}$.

Bài tập 12. Cho hình phẳng D giới hạn bởi hai đường cong

$y^2 = (4 - x)^3$ và $y^2 = 4x$.

a. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi miền D.

b. Tính thể tích vật thể tròn xoay khi D quay quanh trục Ox.

Bài toán 4: Thể tích vật thể tròn xoay dạng 3.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Với yêu cầu " *Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi một đường (C) kín*" ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Khi quay quanh Ox, ta thực hiện hai bước sau:

Bước 1: Phân đường cong kín (C) thành hai cung

(C_1): $y = f_1(x) = y_1$ và (C_2): $y = f_2(x) = y_2$

với $a \le x \le b$ và $f_1(x)$, $f_2(x)$ cùng dấu.

Bước 2: Thể tích cần xác định được cho bởi:

$$V = \pi \int_a^b |y_1^2 - y_2^2| \, dx .$$

Trường hợp 2: Khi quay quanh Oy, ta thực hiện theo hai bước sau:

Bước 1: Phân đường cong kín (C) thành hai cung

(C_1): $x = f_1(y) = x_1$ và (C_2): $x = f_2(y) = x_2$

với $a \le y \le b$ và $f_1(y)$, $f_2(y)$ cùng dấu.

Bước 2: Thể tích cần xác định được cho bởi: $V = \pi \int_a^b |x_1^2 - x_2^2| \, dy$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 13. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo nên bởi hình tròn $x^2 + (y - b)^2 \le a^2$ $(0 < a \le b)$ khi quay quanh Ox.

A. $2\pi^2 ab$. **B.** $2\pi^2 a^2 b$. **C.** $2\pi^2 ab^2$. **D.** $2\pi^2 a^2 b^2$.

Bài tập 14. Cho hình tròn tâm I(2, 0), bán kính R = 1, quay quanh trục Oy. Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo nên.

Bài tập 15. Cho miền (H) giới hạn bởi đường cong y = sinx và đoạn $0 \le x \le \pi$ của trục Ox. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo nên bởi (H) khi quay quanh:

a. Trục Ox.

b. Trục Oy.

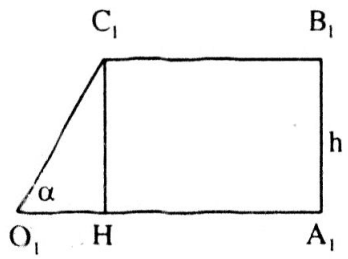
Bài tập 16. Gọi (d) là đường thẳng qua M(1, 1) với hệ số góc k < 0. Giả sử (d) cắt Ox, Oy lần lượt tại A và B.

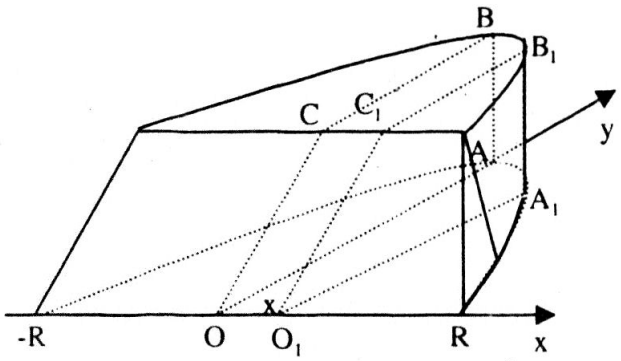
a. Tính thể tích khối tròn xoay sinh bởi ΔOAB khi quay quanh trục Ox. Xác định k để khối tròn xoay đó có thể tích nhỏ nhất.

b. Tính thể tích khối tròn xoay sinh bởi ΔOAB khi quay quanh trục Oy. Xác định k để khối tròn xoay đó có thể tích nhỏ nhất.

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Chọn hệ trục toạ độ sao cho Ox là đường kính giao tuyến của đáy hình trụ với mặt phẳng (P), Oy là đường kính vuông góc với Ox của đáy, khi đó:





a. Thiết diện tại hoành độ x là hình thang vuông $O_1A_1B_1C_1$ có $A_1\hat{O}_1C_1 = \alpha$ và diện tích được cho bởi: $S(x) = \frac{1}{2} A_1B_1(O_1A_1+B_1C_1)$ (1)

trong đó: $A_1B_1 = h$, $O_1A_1 = \sqrt{R^2 - x^2}$, $B_1C_1 = O_1A_1 - O_1H = \sqrt{R^2 - x^2} - h.\tan\alpha$.

Do đó: $S(x) = \frac{1}{2} h(2\sqrt{R^2 - x^2} - h\tan\alpha)$.

b. Thể tích vật thể được cho bởi:

$$V = \int_{-R}^{R} S(x)dx = \frac{1}{2} h \int_{-R}^{R} (2\sqrt{R^2 - x^2} - h\tan\alpha)dx$$

$$= h \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx - \frac{1}{2} xh^2\tan\alpha \Big|_{-R}^{R}$$

$$= hR \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{R^2(1 - \sin^2 t)} \cos t\, dt - Rh^2\tan\alpha$$

$$= \frac{hR^2}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t)dt - Rh^2\tan\alpha$$

$$= \frac{hR^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - Rh^2\tan\alpha = \frac{hR^2}{2}(\pi - 2\tan\alpha).$$

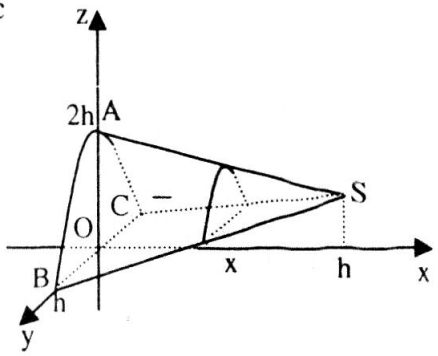
Bài tập 2. $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

Bài tập 3. Ta có ngay:

- Diện tích đáy được cho bởi $B = \pi.2.3 = 6\pi$.
- Thể tích vật thể được cho bởi $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}.6\pi.5 = 10\pi$.

Bài tập 4. Chọn hệ trục toạ độ sao cho viên phân Parabol đáy ở trong mặt phẳng Oyz nhận Oz làm trục đối xứng và đáy của viên phân thuộc trục Oy, khi đó:

- Phương trình Parabol đáy (ABC) được cho bởi:



$$z = my^2 + 2h$$

Mặt khác: $z(\pm a) = 0 \Rightarrow m = -\frac{2}{h}$.

Vậy phương trình Parabol đáy (ABC):

$$z = -\frac{2}{h}y^2 + 2h.$$

- Diện tích đáy được cho bởi:

$$B = \int_{-a}^{a}\left(-\frac{2}{h}y^2 + 2h\right)dy = \left(-\frac{2}{3h}y^3 + 2hy\right)\Big|_{-a}^{a} = \frac{8h^2}{3}.$$

- Diện tích thiết diện được cho bởi:

$$\frac{S(x)}{B} = \left(\frac{h-x}{h}\right)^2 \Leftrightarrow S(x) = \frac{8}{3}.(h-x)^2.$$

- Thể tích vật thể được cho bởi:

$$V = \int_0^h S(x)dx = \frac{8}{3}\int_0^h (h-x)^2 dx = \frac{8}{9}(h-x)^3\Big|_0^h = \frac{8h^3}{9}.$$

Bài tập 5. Ta có ngay $V = \pi\int_2^4 2ydy = 12\pi$ (đvtt).

Bài tập 6. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo nên khi ta quay hình H quanh trục Ox.

a. Thể tích vật tròn xoay cần tính được cho bởi:

$$V = \pi\int_{\pi/2}^{\pi}(1 + \cos^4 x + \sin^4 x)dx = \pi\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{7 - \cos 4x}{4}\right)dx$$

$$= \pi\left(\frac{7}{4}x - \frac{1}{16}\sin 4x\right)\Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{7}{8}\pi^2 \text{ (đvtt)}.$$

b. Thể tích vật thể tròn xoay cần tính là: $V = \pi\int_1^e (x\ln x)^2 dx$.

Để tính tích phân trên ta sử dụng phương pháp tích phân từng phần, đặt:

$$\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2}{x}\ln x dx \\ v = \dfrac{1}{3}x^3 \end{cases}.$$

Khi đó: $V = \pi\left(\dfrac{1}{3}x^3\ln^2 x\right)\Big|_1^e - \dfrac{2\pi}{3}\int_1^e x^2 \ln x dx = \dfrac{\pi e^3}{3} - \dfrac{2\pi}{3}\underbrace{\int_1^e x^2 \ln x dx}_{I}$. (1)

Xét tích phân I, đặt: $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = \dfrac{1}{3}x^3 \end{cases}$.

Khi đó: $I = \dfrac{1}{3}x^3\ln x\Big|_1^e - \dfrac{1}{3}\int_1^e x^2 dx = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{1}{9}x^3\Big|_1^e = \dfrac{2e^3}{9} + \dfrac{1}{9}$. (2)

Thay (2) vào (1), ta được $V = \dfrac{\pi(5e^3 - 3)}{27}$ (đvtt).

c. Thể tích vật thể tròn xoay cần tính là:

$$V = \pi\int_0^{\pi/2}(\cos^6 x + \sin^6 x)dx = \pi\int_0^{\pi/2}(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x)dx$$

$$= \pi\int_0^{\pi/2}(\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x)dx = \pi(\frac{5}{8}x + \frac{3}{32}\sin 4x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{5\pi^2}{16} \text{ (đvtt).}$$

d. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và Ox là:

$$3ax - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3a \end{cases}.$$

Khi đó, thể tích cần xác định được cho bởi:

$$V = \pi\int_0^{3a}(3ax - x^2)^2 dx = \pi\int_0^{3a}(x^4 - 6ax^3 + 9a^2x^2)dx$$

$$= \pi(\frac{1}{5}x^5 - \frac{3a}{2}x^4 + 3a^2x^3)\Big|_0^{3a} = \frac{81a^5\pi}{10} \text{ (đvtt).}$$

Bài tập 7.

a. Hoành độ các giao điểm của (P) và (C) là nghiệm của:

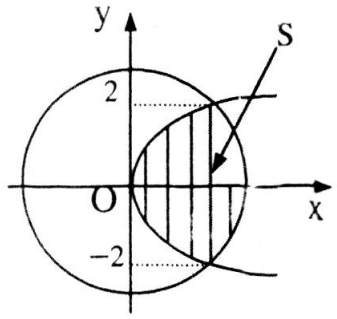
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 2x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = \pm 2.$$

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và (C), ta được :

$$S = 2\int_0^2 (\sqrt{8-y^2} - \frac{y^2}{2})dy = 2(\underbrace{\int_0^2 \sqrt{8-y^2}\,dy}_{I_1} - \underbrace{\int_0^2 \frac{y^2 dy}{2}}_{I_2}). \quad (1)$$

Xét tích phân I_1, ta sử dụng phép đổi biến :

$$y = 2\sqrt{2}\sin t \Rightarrow dy = 2\sqrt{2}\cos t.dt.$$



Đổi cận :

- $y = 0 \Rightarrow t = 0.$
- $y = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}.$

Khi đó : $I_1 = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \sqrt{8-8\sin^2 t}.\cos t dt = 8\int_0^{\pi/4} |\cos t|.\cos t dt$

$$= 8\int_0^{\pi/4} \cos^2 t dt = 4\int_0^{\pi/4} (1+\cos 2t)dt = 4(t + \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\pi/4} = \pi + 2. \quad (2)$$

Ngoài ra, ta cũng có ngay $I_2 = \frac{y^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$ (3)

Thay (2), (3) vào (1), ta được : $S = 2[(\pi + 2) - \frac{4}{3}] = 2\pi + \frac{4}{3}.$

b. Hoành độ giao điểm của (C) và (P) là nghiệm của phương trình:

$$8 - x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow} x = 2.$$

Thể tích vật tròn xoay cần tính được cho bởi:

$$V = V_1 + V_2 = 2\pi\left[\int_0^2 2x dx + \int_2^{2\sqrt{2}} (8-x^2)dx\right]$$

$$= 2\pi\left[x^2\Big|_0^2 + (8x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_2^{2\sqrt{2}}\right] \equiv \frac{8\pi(8\sqrt{2}-7)}{3} \text{ (đvtt).}$$

Bài tập 8. $V = \frac{Bh}{2}.$

Bài tập 9. Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình:

$$x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = 1 \end{bmatrix}$$

Thể tích vật tròn xoay cần tính được cho bởi:

$$V = \pi\int_0^1 |x^4 - x|dx = \pi(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5)\Big|_0^1 = \frac{3\pi}{10} \text{ (đvtt).}$$

Bài tập 10. Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 4x + 6 = -x^2 - 2x + 6 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = 1 \end{bmatrix}.$$

Thể tích vật tròn xoay cần tính là:

$$V = \pi \int_0^1 \left| \left(x^2 - 4x + 6\right)^2 - \left(-x^2 - 2x + 6\right)^2 \right| dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left(12x^3 - 36x^2 + 24x\right) dx = \pi\left(3x^4 - 12x^3 + 12x^2\right)\Big|_0^1 = 3\pi \text{ (đvtt)}.$$

Bài tập 11. Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình:

$$2x^2 = 2x + 4 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -1 \\ x = 2 \end{bmatrix}.$$

Thể tích vật tròn xoay cần tính là:

$$V = \pi \int_{-1}^{2} \left| 4x^4 - (2x + 4)^2 \right| dx = 4\pi \int_{-1}^{2} (-x^4 + x^2 + 4x + 4) dx$$

$$= 4\pi\left(-\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{288\pi}{3} \text{ (đvtt)}.$$

Bài tập 12. Tham khảo bài tập 18 chủ đề 7.

Bài tập 13. Xét (C): $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ có tâm I(0, b), bán kính R = a.

Vậy, ta được:

- Nửa (C) ở trên có phương trình:

$$y = f_1(x) = b + \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{với } x \in [-a, a].$$

- Nửa (C) ở dưới có phương trình:

$$y = f_2(x) = b - \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{với } x \in [-a, a]$$

Khi đó, thể tích vật thể tròn xoay cần tính là

$$V = \pi \int_{-a}^{a} \left[\left(b + \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 - \left(b - \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 \right] dx = 4\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

Thực hiện phép đổi biến x = a.sint thì dx = a.costdt.

Đổi cận:

- Với x = −a thì $t = -\frac{\pi}{2}$.
- Với x = a thì $t = \frac{\pi}{2}$.

Khi đó: $V = 4\pi a^2 b \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t}\cos t dt = 2\pi a^2 b \int (1 + \cos 2t) dt$

$$= 2\pi a^2 b\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\pi^2 a^2 b.$$

Bài tập 14. Xét (C): $(x-2)^2 + y^2 = 1$ có tâm I(2, 0), bán kính R = 1.

Vậy, ta được:

- Nửa (C) ở bên phải có phương trình:

$$x = f_1(y) = 2 + \sqrt{1-y^2} \quad \text{với } y \in [-1, 1].$$

- Nửa (C) ở bên trái có phương trình:

$$x = f_2(y) = 2 - \sqrt{1-y^2} \quad \text{với } y \in [-1, 1].$$

Khi đó, thể tích vật thể tròn xoay cần tính là:

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left[\left(2 + \sqrt{1-y^2}\right)^2 - \left(2 - \sqrt{1-y^2}\right)^2 \right] dy = 8\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\, dy$$

Thực hiện phép đổi biến y = sint thì dy = costdt.

Đổi cận:

- Với y = −1 thì $t = -\frac{\pi}{2}$.
- Với y = 1 thì $t = \frac{\pi}{2}$.

Khi đó:

$$V = 8\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t}\cos t\, dt = 8\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 2t) dt$$

$$= 4\pi\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi^2.$$

Bài tập 15. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 16.

Phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

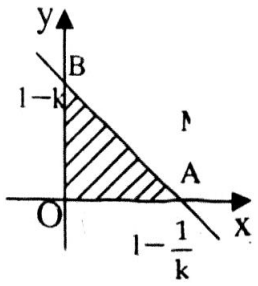
(d): y = k(x − 1) + 1.

Vì (d)∩Ox = {A}, toạ độ A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = k(x-1)+1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{k-1}{k}, 0\right).$$

Vì (d)∩Oy = {B}, toạ độ B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = k(x-1)+1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0, 1-k).$$



a. Gọi V_{Ox} là thể tích của vật thể sinh bởi ΔOAB khi quay quanh trục Ox, để xác định V_{Ox} ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng hệ quả của bài toán 1, ta được:

$$V_{Ox} = \frac{1}{3}\pi(1-k)^2.\frac{k-1}{k} = \frac{\pi}{3}\left(k^2 - 3k + 3 - \frac{1}{k}\right).$$

Cách 2: Sử dụng bài toán 2, ta được:

$$V_{Ox} = \pi \int_0^{\frac{k-1}{k}} y^2 dx = \int_0^{\frac{k-1}{k}} [k(x-1)+1]^2 dx = \frac{\pi}{3}\left(k^2 - 3k + 3 - \frac{1}{k}\right).$$

- Xác định $\text{Min}V_{Ox}$

Xét hàm số $f(k) = k^2 - 3k + 3 - \frac{1}{k}$ với $k < 0$.

Đạo hàm:

$$f'(k) = 2k - 3 + \frac{1}{k^2},\ f'(k) = 0 \Leftrightarrow 2k - 3 + \frac{1}{k^2} = 0 \overset{k<0}{\Leftrightarrow} k = -\frac{1}{2}.$$

Bảng biến thiên:

k	0		$-1/2$		$+\infty$
f'(k)	0	–	0	+	
f(k)	$+\infty$	↘	27/4	↗	$+\infty$

Vậy, ta được $\text{Min}V_{Ox} = \frac{9\pi}{4}$, đạt được khi $k = -\frac{1}{2}$.

b. Gọi V_{Oy} là thể tích của vật thể sinh bởi ΔOAB khi quay quanh trục Oy, để xác định V_{Oy} ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng hệ quả của bài toán 1, ta được:

$$V_{Oy} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{k-1}{k}\right)^2.(1-k) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{3}{k} - k + 3\right).$$

Cách 2: Sử dụng bài toán 2, ta được:

$$V_{Ox} = \pi\int_0^{1-k} x^2 dy = \int_0^{\frac{k-1}{k}} \left[\frac{1}{k}(y-1)+1\right]^2 dy = \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{3}{k} - k + 3\right).$$

- Xác định $\text{Min}V_{Oy}$

Xét hàm số $g(k) = \frac{1}{k^2} - \frac{3}{k} - k + 3$ với $k < 0$.

Đạo hàm:

$$g'(k) = -\frac{2}{k^3} + \frac{3}{k^2} - 1,\ g'(k) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{k^3} + \frac{3}{k^2} - 1 = 0 \overset{k<0}{\Leftrightarrow} k = -2.$$

Bảng biến thiên

k	0		-2		$+\infty$
g'(k)	0	–	0	+	
g(k)	$+\infty$	↘	27/4	↗	$+\infty$

Vậy, ta được $\text{Min}V_{Oy} = \frac{9\pi}{4}$, đạt được khi $k = -2$.

MỤC LỤC

GIỚI THIỆU CHUNG 3

Chủ đề 1: **Nguyên hàm** 5

Bài toán 1: Chứng minh rằng F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên (a, b) bằng định nghĩa 6

Bài toán 2: Xác định giá trị của tham số để F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên (a, b) 7

Bài toán 3: Tìm nguyên hàm 8

Hướng dẫn – Giải – Đáp số 15

Chủ đề 2: **Một số phương pháp tìm nguyên hàm** 31

Bài toán 1: Phương pháp phân tích 32

Bài toán 2: Phương pháp đổi biến dạng 1 35

Bài toán 3: Phương pháp đổi biến dạng 2 36

Bài toán 4: Phương pháp lấy nguyên hàm từng phần 39

Hướng dẫn – Giải – Đáp số 41

Chủ đề 3: **Tích phân** 68

Hướng dẫn – Giải – Đáp số 73

Chủ đề 4: **Các phương pháp tính tích phân** 86

Bài toán 1: Phương pháp đổi biến dạng 1 86

Bài toán 2: Phương pháp đổi biến dạng 2 90

Bài toán 3: Phương pháp tích phân từng phần 93

Hướng dẫn – Giải – Đáp số 95

Chủ đề 5: **Tính tích phân các hàm số thường gặp** 120

Bài toán 1: Tính tích phân các hàm số chứa dấu trị tuyệt đối 120

Bài toán 2: Tính tích phân các hàm số hữu tỉ 122

Bài toán 3: Tính tích phân các hàm số lượng giác 124

Bài toán 4: Tính tích phân các hàm số vô tỉ 128

Bài toán 5: Tính tích phân các hàm số siêu việt 131

Hướng dẫn – Giải – Đáp số 133

Chủ đề 6: **Đẳng thức, bất đẳng thức tích phân** 164
Bài toán 1: Chứng minh đẳng thức tích phân 164
Bài toán 2: Chứng minh bất đẳng thức tích phân 165
Hướng dẫn – Giải – Đáp số 166
Chủ đề 7: **Phương trình, bất phương trình tích phân** 175
Bài toán 1: Giải phương trình, bất phương trình chứa tích phân 175
Bài toán 2: Sử dụng tích phân chứng minh phương trình có nghiệm 176
Hướng dẫn – Giải – Đáp số 177
Chủ đề 8: **Sử dụng tích phân tính diện tích hình phẳng** 182
Bài toán 1: Diện tích hình phẳng dạng 1 182
Bài toán 2: Diện tích hình phẳng dạng 2 183
Bài toán 3: Diện tích hình phẳng dạng 3 185
Bài toán 4: Diện tích hình tròn, elíp và ứng dụng 185
Hướng dẫn – Giải – Đáp số 187
Chủ đề 9: **Sử dụng tích phân tính thể tích của các vật thể** 195
Bài toán 1: Thể tích vật thể T 196
Bài toán 2: Thể tích vật thể tròn xoay dạng 1 196
Bài toán 3: Thể tích vật thể tròn xoay dạng 2 197
Bài toán 4: Thể tích vật thể tròn xoay dạng 3 198
Hướng dẫn – Giải – Đáp số 199

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9724852; (04) 9724770. Fax: (04) 9714899

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập: THU HÀ – TRẦN HƯNG

Chế bản: Nhà sách HỒNG ÂN

Trình bày bìa: ĐÌNH TÔ

Đơn vị/ Người liên kết xuất bản:
Nhà sách HỒNG ÂN

SÁCH LIÊN KẾT

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM GIẢI TÍCH 12
TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Mã số: 1L – 136 ĐH2008
In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ti TNHH In Bao Bì Phong Tân - TP. Hồ Chí Minh.
Số xuất bản: 349 - 2008/CXB/06 – 66/ĐHQGHN, ngày 22/4/2008.
Quyết định xuất bản số: 136 LK/XB.
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2008.