

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

NEW

TRẮC NGHIỆM NÂNG CAO TOÁN 12

CÓ ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT

ÔN THI THPT QUỐC GIA NĂM 2017

MỤC LỤC

HÀM SỐ	3
HÌNH ĐA DIỆN.....	27
I – HÌNH CHÓP	27
II – HÌNH LĂNG TRỤ	41
MŨ - LÔ GARIT	49
HÌNH NÓN - TRỤ - CẦU	66
NGUYÊN HÀM , TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG.....	81
HÌNH HỌC TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN OXYZ.....	96
SỐ PHỨC.....	123

HÀM SỐ

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 + mx + 2$ có đồ thị (C_m) . Tìm m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

A. $m > -3$

B. $m < -3$

C. $m > 3$

D. $m < 3$

Hướng dẫn giải:

Số giao điểm của đồ thị (C_m) với Ox là số nghiệm của phương trình $x^3 + mx + 2 = 0$

Với $m = 0$ vô nghiệm nên không có giao điểm

Với $m \neq 0$ ta có

$$m = -x^2 - \frac{2}{x} = f(x); (*)$$

$$f'(x) = -2x + \frac{2}{x^2} = \frac{-2(x^3 - 1)}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1$$

Ta có bảng biến thiên của $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$		-3		$-\infty$

Số nghiệm phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm $f(x)$ và đường thẳng $y=m$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $m > -3$ thì phương trình (*) có 1 nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án B.

Câu 2. Cho hàm số: $y = x^4 - 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm này tạo thành một tam giác đều

A. $m = 2 - \sqrt[3]{3}$

B. $2 - \sqrt{3}$

C. $3 - \sqrt{2}$

D. $3 - \sqrt[3]{2}$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $y' = 4x^3 - 4(m-2)x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2 - m \end{cases}$$

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow$ PT $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m < 2$ (*)

Khi đó tọa độ các điểm cực trị là: $A(0, m^2 - 5m + 5)$, $B(\sqrt{2-m}; 1-m)$, $C(-\sqrt{2-m}; 1-m) \Rightarrow$

$\overline{AB} = (\sqrt{2-m}; -m^2 + 4m - 4)$; $\overline{AC} = (-\sqrt{2-m}; -m^2 + 4m - 4)$ Do ΔABC luôn cân tại A, nên bài

toán thỏa mãn khi $\hat{A} = 60^\circ \Leftrightarrow \cos \hat{A} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| |\overline{AC}|} = 0 \Leftrightarrow m = 2 - \sqrt[3]{3}$

Chọn đáp án A.

Câu 3. Cho hàm số $y = x^3 - \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị là (C). Tìm tất cả những điểm trên đồ thị (C) sao cho hệ

số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại những điểm đó là giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = \frac{4x^2 + 3}{x^4 + 1}$

A. $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$

B. $\left(-1; -\frac{3}{2}\right); \left(\frac{4}{3}; \frac{40}{27}\right)$

C. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1+\sqrt{2}}{4}\right); \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1+\sqrt{2}}{4}\right)$

D. $\left(\frac{1}{2}; 0\right); (-2; -10)$

Hướng dẫn giải:

* Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $g(x) = \frac{4x^2 + 3}{x^4 + 1}$

- Đặt $t = x^2$, với $t \geq 0$ ta có hàm số $g(t) = \frac{4t + 3}{t^2 + 1}$;

- $g'(t) = \frac{-4t^2 - 6t + 4}{(t^2 + 1)^2}$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -2; t = \frac{1}{2}$;

- Ta lại có: $\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = 0$; $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$, bảng biến thiên của hàm số:

t	$-\infty$	-2	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(t)$		0	$+$	0	$-$
$g(t)$	0	-1	3	4	0

- Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $g(x) = 4$, đạt được khi $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

* Tìm các điểm thuộc đồ thị (C)

- Ta có: $y' = 3x^2 - x$, giả sử điểm $M_0(x_0, f(x_0)) \in (C)$, thì hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại M_0 là $f'(x_0) = 3x_0^2 - x_0$

- Vậy: $3x_0^2 - x_0 = 4$ suy ra $x_0 = -1; x_0 = \frac{4}{3}$, tung độ tương ứng $f(-1) = -\frac{3}{2}$; $f(\frac{4}{3}) = \frac{40}{27}$

+ Có hai điểm thỏa mãn giả thiết $\left(-1; -\frac{3}{2}\right); \left(\frac{4}{3}; \frac{40}{27}\right)$.

Chọn đáp án B.

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{2x-4}{x+1}$ có đồ thị (C) điểm $A(-5; 5)$. Tìm m để đường thẳng $y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt M và N sao cho tứ giác $OAMN$ là hình bình hành (O là gốc tọa độ).

A. $m = 0$

B. $m = 0; m = 2$

C. $m = 2$

D. $m = -2$

Hướng dẫn giải:

Do các điểm O và A thuộc đường thẳng $\Delta: y = -x$ nên để $OAMN$ là hình bình hành thì

$$MN = OA = 5\sqrt{2}$$

Hoành độ của M và N là nghiệm của pt: $\frac{2x-4}{x+1} = -x + m \Leftrightarrow x^2 + (3-m)x - (m+4) = 0$ ($x \neq -1$) (1)

Vì $\Delta = m^2 - 2m + 25 > 0, \forall m$, nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt, (d) luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt

Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của (1) ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 3 \\ x_1 x_2 = -(m + 4) \end{cases}$

$$\text{Gọi } M(x_1; -x_1 + m), N(x_2; -x_2 + m) \Rightarrow MN^2 = 2(x_1 - x_2)^2 = 2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] = 2m^2 - 4m + 50$$

$$MN = 5\sqrt{2} \Rightarrow 2m^2 - 4m + 50 = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 0 \end{cases}$$

+ $m = 0$ thì O, A, M, N thẳng hàng nên không thỏa mãn.

+ $m = 2$ thỏa mãn.

Chọn đáp án C.

Câu 5. Cho hàm số: $y = \frac{x+2}{x-1}$ (C). Tìm a sao cho từ $A(0, a)$ kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) nằm ở hai phía trục Ox.

A. $\left(\frac{-2}{3}; +\infty\right)$

B. $(-2; +\infty) \setminus \{1\}$

C. $(-2; +\infty)$

D. $\left(\frac{-2}{3}; +\infty\right) \setminus \{1\}$

Hướng dẫn giải:

Đường thẳng qua $A(0, a)$ có hệ số góc k có phương trình $y = kx + a$ tiếp xúc (C)

$$\Leftrightarrow kx + a = \frac{x+2}{x-1} \text{ có nghiệm kép} \Leftrightarrow (kx + a)(x-1) = x+2 \text{ có nghiệm kép}$$

$$\Leftrightarrow kx^2 - (k-a+1)x - (a-2) = 0 \text{ có nghiệm kép}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = (k-a+1)^2 - 4k(a-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ h(k) = k^2 + 2(a+5)k + (a-1)^2 = 0 \end{cases} \text{ có 2 nghiệm } k \text{ phân biệt}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 12(a+2) > 0 \\ h(0) = (a-1)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-2; +\infty) \setminus \{1\} \quad (1)$$

Khi đó $\begin{cases} x_1 = \frac{k_1 - (a-1)}{2k_1} \Rightarrow y_1 = \frac{k_1 + (a+1)}{2} \\ x_2 = \frac{k_2 - (a-1)}{2k_2} \Rightarrow y_2 = \frac{k_2 + (a+1)}{2} \end{cases}$

Mà

$$y_1 y_2 < 0 \Rightarrow [k_1 + (a+1)][k_2 + (a+1)] < 0$$

$$\Leftrightarrow k_1 k_2 + (a+1)(k_1 + k_2) + (a+1)^2 = -4(3a+2) < 0$$

$$\Rightarrow a > \frac{-2}{3} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow a \in \left(\frac{-2}{3}; +\infty\right) \setminus \{1\}$$

Chọn đáp án D.

Câu 6. Hai điểm M, N thuộc hai nhánh của đồ thị $y = \frac{3x-1}{x-3}$. Khi đó độ dài đoạn thẳng MN ngắn nhất bằng?

A. 8

B. 4

C. $x_M < 3$

D. $8\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Giả sử } x_M < 3, x_N > 3, \text{ khi đó } M\left(3-m; 3-\frac{8}{m}\right), N\left(3+n; 3+\frac{8}{n}\right) \text{ với } m, n > 0$$

$$MN^2 = (m+n)^2 + \left(\frac{8}{m} + \frac{8}{n}\right)^2 \geq (2\sqrt{mn})^2 + 64 \left(2\sqrt{\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}}\right)^2 = 4 \left(mn + \frac{64}{mn}\right) \geq 64$$

$\Rightarrow MN \geq 8$. Kết luận MN ngắn nhất bằng 8

Chọn đáp án A.

Câu 7. Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$

A. $m = 1$

B. $m = -2$

C. $m = 2$

D. $m = -1$

Hướng dẫn giải:

+ $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6mx = 0$. Đồ thị có 2 điểm cực trị khi: $m \neq 0$

+ Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là: $y = 2m^2 \cdot x - 3m - 3$

+ Trung điểm 2 điểm cực trị là $I(m; 2m^3 - 3m - 1)$

+ Điều kiện để 2 điểm cực trị đối xứng qua $d: x + 8y - 74 = 0$

$$\begin{cases} 2m^2 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = -1 \\ m + 8(2m^3 - 3m - 1) - 74 = 0 \end{cases}$$

+ Từ đó thấy $m = 2$ thỏa mãn hệ trên.

Chọn đáp án C.

Câu 8. Cho $f(x) = e^{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết rằng $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \dots f(2017) = e^{\frac{m}{n}}$ với m, n là các số tự nhiên và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $m - n^2$.

A. $m - n^2 = 2018$.

B. $m - n^2 = -2018$.

C. $m - n^2 = 1$.

D. $m - n^2 = -1$.

Hướng dẫn giải:

Xét các số thực $x > 0$

$$\text{Ta có: } \sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}} = \sqrt{\frac{(x^2 + x + 1)^2}{x^2(x+1)^2}} = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x} = 1 + \frac{1}{x(x+1)} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

$$\text{Vậy, } f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \dots f(2017) = e^{\left(1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018}\right)} = e^{2018 - \frac{1}{2018}} = e^{\frac{2018^2 - 1}{2018}},$$

$$\text{hay } \frac{m}{n} = \frac{2018^2 - 1}{2018}$$

Ta chứng minh $\frac{2018^2 - 1}{2018}$ là phân số tối giản.

Giả sử d là ước chung của $2018^2 - 1$ và 2018

Khi đó ta có $2018^2 - 1 : d, 2018 : d \Rightarrow 2018^2 : d$ suy ra $1 : d \Leftrightarrow d = \pm 1$

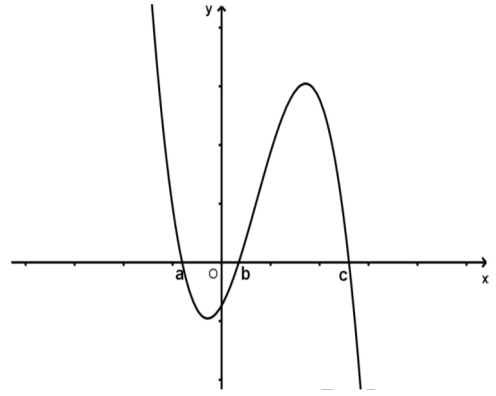
Suy ra $\frac{2018^2 - 1}{2018}$ là phân số tối giản, nên $m = 2018^2 - 1, n = 2018$.

Vậy $m - n^2 = -1$.

Chọn đáp án C.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a < b < c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. $f(c) > f(a) > f(b)$.
 B. $f(c) > f(b) > f(a)$.
 C. $f(a) > f(b) > f(c)$.
 D. $f(b) > f(a) > f(c)$.



Hướng dẫn giải:

Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên các đoạn $[a; b]$ và $[b; c]$, lại có $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.

Do đó diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường:
$$\begin{cases} y = f'(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \quad \text{là:}$$

$$S_1 = \int_a^b |f'(x)| dx = - \int_a^b f'(x) dx = -f(x) \Big|_a^b = f(a) - f(b). \text{ Vì } S_1 > 0 \Rightarrow f(a) > f(b) \quad (1)$$

Tương tự: diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường:
$$\begin{cases} y = f'(x) \\ y = 0 \\ x = b \\ x = c \end{cases} \quad \text{là:}$$

$$S_2 = \int_b^c |f'(x)| dx = \int_b^c f'(x) dx = f(x) \Big|_b^c = f(c) - f(b). \text{ } S_2 > 0 \Rightarrow f(c) > f(b) \quad (2).$$

Mặt khác, dựa vào hình vẽ ta có: $S_1 < S_2 \Leftrightarrow f(a) - f(b) < f(c) - f(b) \Leftrightarrow f(a) < f(c) \quad (3).$

(có thể so sánh $f(a)$ với $f(b)$ dựa vào dấu của $f'(x)$ trên đoạn $[a; b]$ và so sánh $f(b)$ với $f(c)$ dựa vào dấu của $f'(x)$ trên đoạn $[b; c]$).

Từ (1), (2) và (3)

Chọn đáp án A.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (2m - 1)x - (3m + 2)\cos x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $-3 \leq m \leq -\frac{1}{5}$. B. $-3 < m < -\frac{1}{5}$. C. $m < -3$. D. $m \geq -\frac{1}{5}$.

Hướng dẫn giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = (2m - 1) + (3m + 2)\sin x$

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \leq 0, \forall x$ tức là: $(2m - 1) + (3m + 2)\sin x \leq 0 \quad (1), \forall x$

+) $m = -\frac{2}{3}$ thì (1) thành $-\frac{7}{3} \leq 0, \forall x$

+) $m > -\frac{2}{3}$ thì (1) thành $\sin x \leq \frac{1 - 2m}{3m + 2} \Rightarrow \frac{1 - 2m}{3m + 2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{5m + 1}{3m + 2} \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < m \leq -\frac{1}{5}$

$$+) m < -\frac{2}{3} \text{ thì (1) thành } \sin x \geq \frac{1-2m}{3m+2} \Rightarrow \frac{1-2m}{3m+2} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{m+3}{3m+2} \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m < -\frac{2}{3}$$

$$\text{Kết hợp được: } -3 \leq m \leq -\frac{1}{5}$$

Chọn đáp án A.

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số: $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x + 3$ nghịch biến trên khoảng có độ dài lớn hơn 3

A. $m < 0$ hoặc $m > 6$

B. $m > 6$

C. $m < 0$

D. $m = 9$

Hướng dẫn giải:

Dùng BBT để xét sự đồng biến và nghịch biến của hàm số trên các khoảng

$$y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)$$

$$\Delta' = 9(m-1)^2 - 36(m-2) = 9m^2 - 54m + 81 \geq 0$$

Dấu bằng xảy ra khi $m = 3$

Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $y' = 0$ ($x_1 < x_2$)

$$\text{Theo Viet: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - m \\ x_1 \cdot x_2 = m - 2 \end{cases}$$

Ta có BBT

t	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
y'	+	0	-	+
y				

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1, x_2) \Rightarrow$ pt $y' = 0$ phải có 2 nghiệm phân biệt $\Rightarrow m \neq 3$

Gọi Độ dài khoảng nghịch biến của hàm số là D

$$D = |x_1 - x_2| \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = (1 - m)^2 - 4(m - 2) = m^2 - 6m + 9$$

$$D > 3 \Leftrightarrow D^2 > 9 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 9 > 9 \Leftrightarrow m^2 - 6m > 0 \Leftrightarrow m < 0 \text{ hoặc } m > 6 \text{ (thỏa mãn)}$$

Chọn đáp án A.

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và A là điểm thuộc (C). Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ A đến các tiệm cận của (C).

A. $2\sqrt{2}$

B. 2

C. 3

D. $2\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:

Gọi $M\left(m; \frac{m+1}{m-1}\right) \in (C)$ ($m \neq 1$). Tổng khoảng cách từ M đến 2 đường tiệm cận $x = 1$ và $y = 1$ là

$$S = |m-1| + \left| \frac{m+1}{m-1} - 1 \right| = |m-1| + \frac{2}{|m-1|} \geq 2\sqrt{|m-1| \cdot \frac{2}{|m-1|}} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow |m-1| = \frac{2}{|m-1|} \Leftrightarrow |m-1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow m = 1 \pm \sqrt{2}$$

Chọn đáp án A.

Câu 13. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (C). Tìm k để đường thẳng $d: y = kx + 2k + 1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

A. 12

B. -4

C. -3

D. 1

Hướng dẫn giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$$\frac{2x+1}{x+1} = kx + 2k + 1 \Leftrightarrow 2x + 1 = (x+1)(kx + 2k + 1); (x \neq -1)$$

$$\Leftrightarrow kx^2 + (3k-1)x + 2k = 0 \quad (1); \quad (x \neq -1)$$

d cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 1 \\ \Delta = k^2 - 6k + 1 > 0 \\ k(-1)^2 + (3k-1)(-1) + 2k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k < 3 - 2\sqrt{2} \vee k > 3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Khi đó: $A(x_1; kx_1 + 2k + 1), B(x_2; kx_2 + 2k + 1)$ với x_1, x_2 là nghiệm của (1).

$$\text{Theo định lý Viet ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-3k+1}{k} \\ x_1 x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } d(A; Ox) = d(B; Ox) \Leftrightarrow |kx_1 + 2k + 1| = |kx_2 + 2k + 1|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} kx_1 + 2k + 1 = kx_2 + 2k + 1 \\ kx_1 + 2k + 1 = -kx_2 - 2k - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \end{cases}$$

Do hai điểm A, B phân biệt nên ta loại nghiệm $x_1 = x_2$. Do đó $k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = -3$.

Chọn đáp án C.

Câu 14. Nếu đồ thị hàm số $y = \frac{x-4}{x+1}$ cắt đường thẳng (d): $2x + y = m$ tại hai điểm AB sao cho độ dài

AB nhỏ nhất thì

A. $m = -1$

B. $m = 1$

C. $m = -2$

D. $m = 2$

Hướng dẫn giải:

Phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x-4}{x+1} = -2x + m \quad (x \neq -1)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - (m-3)x - m - 4 = 0$$

$$\Delta = (m+1)^2 + 40 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

Suy ra (d) luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm A, B

$$x_A + x_B = \frac{m-3}{2}; \quad x_A \cdot x_B = \frac{-m-4}{2};$$

$$y_A = -2x_A + m; \quad y_B = -2x_B + m$$

$$y_B - y_A = -2(x_B - x_A)$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{5(x_B - x_A)^2}$$

$$= \sqrt{5[(x_B + x_A)^2 - 4x_A x_B]} = \sqrt{5\left[\left(\frac{m-3}{2}\right)^2 - 4\frac{-m-4}{2}\right]} = \sqrt{\frac{5}{4}[(m+1)^2 + 40]} \geq 5\sqrt{2}$$

Vậy AB nhỏ nhất khi $m = -1$

Chọn đáp án A.

Câu 15. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 1 - m^2$. Tìm m để trên đồ thị hàm số có hai điểm đối xứng qua gốc tọa độ

A. $-1 \leq m \leq 0$ hoặc $m \geq 1$

B. $-1 < m < 0$ hoặc $m > 1$

C. $1 > m > 0$ hoặc $m < -1$ D. $1 \geq m \geq 0$ hoặc $m \leq -1$ **Hướng dẫn giải:**Gọi hai điểm đối xứng nhau qua O là $A(x_0, y_0), B(-x_0, -y_0)$ Khi đó ta có $y_0 = x_0^3 - 3mx_0^2 + 3(m^2 - 1)x_0 + 1 - m^2$ và $-y_0 = -x_0^3 - 3mx_0^2 - 3(m^2 - 1)x_0 + 1 - m^2$ Từ đó suy ra: $-6mx_0^2 + 2 - 2m^2 = 0(*)$ Nếu $x_0 = 0$ thì $2 - 2m^2 = 0$ suy ra $y_0 = 1 - m^2 = 0$. Vậy $A \equiv B \equiv O$

Do đó: đồ thị hàm số có hai điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ O

$$\Leftrightarrow \text{phương trình } (*) \text{ có nghiệm khác } 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 2 - 2m^2 \neq 0 \\ \Delta' = 6m(2 - 2m^2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 0 \text{ hay } m > 1$$

Chọn đáp án B.

Câu 16. Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 - m^3$ có đồ thị (C_m) và đường thẳng $d: y = m^2x + 2m^3$. Biết rằng m_1, m_2 ($m_1 > m_2$) là hai giá trị thực của m để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 83$. Phát biểu nào sau đây là **đúng** về quan hệ giữa hai giá trị m_1, m_2 ?

A. $m_1 + m_2 = 0$.B. $m_1^2 + 2m_2 > 4$.C. $m_2^2 + 2m_1 > 4$. D. $m_1 - m_2 = 0$.**Hướng dẫn giải:**

$$x^3 + 3mx^2 - m^2x - 3m^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = -m \text{ (DK : } m \neq 0) \\ x = -3m \end{cases}$$

$$ycbt \Leftrightarrow x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 83 \Leftrightarrow m^4 + m^4 + 81m^4 = 83 \Leftrightarrow m = \pm 1 \Rightarrow m_1 + m_2 = 0.$$

Chọn đáp án A.

Câu 17. Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ có đồ thị là (C). Gọi I là giao điểm của 2 đường tiệm cận của (C). Tìm tọa độ điểm M trên (C) sao cho độ dài IM là ngắn nhất?

A. $M_1(0; -3)$ và $M_2(-2; 5)$ B. $M_1(1; -1)$ và $M_2(-3; 3)$ C. $M_1\left(2; -\frac{1}{3}\right)$ và $M_2\left(-4; \frac{7}{3}\right)$ D. $M_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{3}\right)$ và $M_2\left(-\frac{5}{2}; \frac{11}{3}\right)$ **Hướng dẫn giải:**Gọi $M\left(m; \frac{m-3}{m+1}\right)$ thuộc đồ thị, có $I(-1; 1)$

$$IM = \sqrt{(m+1)^2 + \frac{16}{(m+1)^2}}, IM = \sqrt{(m+1)^2 + \frac{16}{(m+1)^2}} \geq \sqrt{2\sqrt{16}} \geq 2\sqrt{2}$$

IM nhỏ nhất khi $IM = 2\sqrt{2}$. Khi đó $(m+1)^2 = 4$. Tìm được hai điểm $M_1(1; -1)$ và $M_2(-3; 3)$.**Chọn đáp án B.**

Câu 18. Giá trị của tham số m để diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 2mx + m^2 + 1$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2$ đạt giá trị nhỏ nhất là:

A. $m = 2$ B. $m = 1$ C. $m = -1$ D. $m = -2$ **Hướng dẫn giải:**Vì với m tùy ý ta luôn có $3x^2 + 2mx + m^2 + 1 > 0 \quad \forall x$ nên diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_0^2 (3x^2 + 2mx + m^2 + 1) dx = \left[x^3 + mx^2 + (m^2 + 1)x \right]_0^2 = 2m^2 + 4m + 10 = 2(m+1)^2 + 8$$

S đạt giá trị nhỏ nhất bằng 8 khi $m = -1$. (dùng casio thử nhanh hơn)

Chọn đáp án C.

Câu 19. Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$ hợp với 2 trục tọa độ 1

tam giác có diện tích S bằng:

A. S=1,5

B. S=2

C. S=3

D. S=1

Ta có kết quả: Nếu đồ thị hàm số $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ có điểm cực trị $(x_0; y_0)$ thì $y_0 = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$

Suy ra phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $y=2x-2$ (d)

(d) cắt 2 trục tọa độ tại 2 điểm A(0;-2), B(1;0) nên diện tích tam giác OAB bằng 1

Chọn đáp án D.

Câu 20. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$ có đồ thị (C). Giá trị của m thì (C) cắt trục

hoành tại 3 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$ là

A. $m < 1$

B. $\begin{cases} -\frac{1}{4} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$

C. $-\frac{1}{4} < m < 1$

D. $\frac{1}{4} < m < 1$

Hướng dẫn giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành là

$$x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - x - m = 0 \end{cases}$$

(C) và trục hoành cắt nhau tại 3 điểm phân biệt: $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{1}{4} \end{cases}$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 1 < 4 \Leftrightarrow 1 + 2m + 1 < 4 \Leftrightarrow m < 1$$

Chọn đáp án B.

Câu 21. Cho hàm số $y = (x-m)^3 - 3x + m^2$ (1). Gọi M là điểm cực đại của đồ thị hàm số (1) ứng với một giá trị m thích hợp đồng thời là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số (1) ứng với một giá trị khác của m. Số điểm M thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

A. 1

B. 2

C. 3

D. 0

Hướng dẫn giải:

Ta có $y' = 3(x-m)^2 - 3, y'' = 6(x-m)$

$$\text{Suy ra } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m-1 \\ x = m+1 \end{cases}$$

Vì $x = x_1 = m-1, y''(m-1) < 0$ nên hàm số đạt cực đại $x = x_1 = m-1$ tại và giá trị cực đại là $y_1 = m^2 - 3m + 2$.

Tương tự, ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x = x_2 = m+1$ và giá trị cực tiểu là $y_2 = m^2 - 3m - 2$.

Ta giả sử điểm M là điểm cực đại của đồ thị hàm số ứng với giá trị m_1 và là điểm cực tiểu ứng của đồ thị hàm số ứng với giá trị m_2 .

Từ YCBT suy ra hệ phương trình
$$\begin{cases} m_1 - 1 = m_2 + 1 \\ m_1^2 - 3m_1 + 2 = m_2^2 - 3m_2 - 2 \end{cases}$$

Giải hệ ta tìm được nghiệm $m_1 = \frac{3}{2}, m_2 = -\frac{1}{2}$ và suy ra tồn tại duy nhất một điểm $M\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ thỏa bài toán.

Chọn đáp án A.

Câu 21. Cho một tam giác đều ABC cạnh a. Người ta dựng một hình chữ nhật MNPQ có cạnh MN nằm trên cạnh BC, hai đỉnh P và Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác. Xác định giá trị lớn nhất của hình chữ nhật đó?

A. $\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$

B. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

C. 0

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

Hướng dẫn giải:

Gọi H là trung điểm của BC $\Rightarrow BH = CH = \frac{a}{2}$

Đặt $BM = x$ (s iều kiện $0 < x < \frac{a}{2}$), ta có:

$$MN = 2MH = 2(BH - BM) = 2\left(\frac{a}{2} - x\right) = a - 2x$$

Tam giác MBQ vuông ở M, $\hat{B} = 60^\circ$ và $BM = x \Rightarrow QM = x\sqrt{3}$

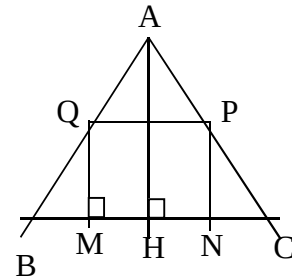
Hình chữ nhật MNPQ có diện tích:

$$S(x) = MN \cdot QM = (a - 2x)x\sqrt{3} = \sqrt{3}(ax - 2x^2)$$

$$S'(x) = \sqrt{3}(a - 4x); S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{4} \in \left(0; \frac{a}{2}\right)$$

x	0	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{2}$
S'	+	0	-
S		$\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$	

Vậy $\max_{x \in \left(0; \frac{a}{2}\right)} S(x) = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2$ khi $x = \frac{a}{4}$



Chọn đáp án A.

Câu 22. Cho hàm số $y = \frac{x}{1-x}$ (C). Tìm m để đường thẳng $d: y = mx - m - 1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $AM^2 + AN^2$ đạt giá trị nhỏ nhất với $A(-1;1)$.

A. $m = 1$

B. $m = 2$

C. $m = -1$

D. $m = 3$

Hướng dẫn giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và $d: \frac{x}{1-x} = mx - m - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ mx^2 - 2mx + m + 1 = 0(1) \end{cases}$

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow m < 0$

Gọi I là trung điểm của MN $\Rightarrow I(1; -1)$ cố định.

Ta có: $AM^2 + AN^2 = 2AI^2 + \frac{MN^2}{2}$

Do $AM^2 + AN^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MN$ nhỏ nhất

$$MN^2 = (x_2 - x_1)^2(1+m)^2 = -4m - \frac{4}{m} \geq 8. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow m = -1$$

Vậy $\min(AM^2 + AN^2) = 20$ khi $m = -1$

Chọn đáp án C.

Câu 23. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị là:

A. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$

B. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$

C. $m = -1$ hoặc $m = 3$

D. $1 \leq m \leq 3$

Hướng dẫn giải:

Đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ là đồ thị hàm số $y = f(x)$ tịnh tiến trên trục Oy m đơn vị

Để đồ thị hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y = f(x) + m$ xảy ra hai trường hợp sau:

+ Nằm phía trên trục hoành hoặc điểm cực tiểu thuộc trục Ox và cực đại dương

+ Nằm phía dưới trục hoành hoặc điểm cực đại thuộc trục Ox và cực tiểu dương

Khi đó $m \geq 3$ hoặc $m \leq -1$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án A.

Câu 24. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 1$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 1 (O là gốc tọa độ).

A. $m = 1$

B. $m = 2$

C. $m = \pm 1$

D. $m = 3$

Hướng dẫn giải:

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx = 3x(x - 2m)$. Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì $m \neq 0$.

Khi đó hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0;1)$ và $B(2m; -4m^3 + 1)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm B lên trục tung, ta có $BH = |2m|$. Diện tích của tam giác OAB là

$$S = \frac{1}{2} BH \cdot OA = \frac{1}{2} \cdot |2m|$$

Theo đề bài $S=1$ nên ta có $\frac{1}{2} \cdot |2m| = 1$ suy ra $m = \pm 1$. Vậy $m = \pm 1$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án C.

Câu 25. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{2\sin^2 x}{\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2}}$ là

A. 0

B. 4

C. 8

D. 2

Hướng dẫn giải:

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}, \text{ ta có } f(x) = \frac{2\sin^2 x}{\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2}} = \frac{2\sin^2 x}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x} = \frac{4\sin^2 x}{2 - \sin^2 x}.$$

Đặt $\sin^2 x = t$ ($t \in [0;1]$), hàm số trở thành $g(t) = \frac{4t}{-t+2}$ với $t \in [0;1]$, ta có

$$g'(t) = \frac{8}{(-t+2)^2} > 0 \forall t \in [0;1], \text{ suy ra hàm số đồng biến trên } [0;1], \text{ vậy}$$

$$\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \max_{t \in [0;1]} g(t) = g(1) = 4, \text{ xảy ra khi } t = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Chọn đáp án B.

Câu 26. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + m$ có đồ thị (C), với m là tham số. Giả sử đồ thị (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ thỏa mãn $x_1 < x_2 < x_3$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $1 < x_1 < x_2 < 3 < x_3 < 4$

B. $0 < x_1 < 1 < x_2 < 3 < x_3 < 4$

C. $x_1 < 0 < 1 < x_2 < 3 < x_3 < 4$

D. $1 < x_1 < 3 < x_2 < 4 < x_3$

Hướng dẫn giải:

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$. Dựa vào đồ thị ta tìm được $-4 < m < 0$ thì đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + m$ cắt Ox tại 3 điểm phân biệt.

Ta có $y(0).y(1) < 0$; $y(1).y(3) < 0$; $y(3).y(4) < 0$ do đó $0 < x_1 < 1 < x_2 < 3 < x_3 < 4$

Chọn đáp án B.

Câu 27. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng

$$\left(0; \frac{\pi}{4}\right).$$

A. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$. **B.** $m \leq 0$.

C. $1 \leq m < 2$.

D. $m \geq 2$.

Hướng dẫn giải:

$$y' = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}(\tan x - m) - \frac{1}{\cos^2 x}(\tan x - 2)}{(\tan x - m)^2} = \frac{2 - m}{\cos^2 x(\tan x - m)^2}$$

Hàm số đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ khi và chỉ khi hàm số xác định trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ và $y' \geq 0 \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x \neq m, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \\ 2 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m \leq 2 \end{cases}$$

Chọn đáp án A.

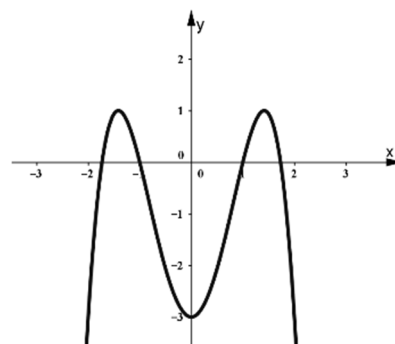
Câu 28. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a > 0, b < 0, c > 0$

B. $a < 0, b > 0, c < 0$

C. $a < 0, b < 0, c < 0$

D. $a > 0, b < 0, c < 0$



Hướng dẫn giải:

Do giới hạn của y khi x tiến tới vô cùng thì $-\infty$ nên $a < 0$. Loại A và D

$$y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$$

Do $a < 0$ mà nếu $b < 0$ thì phương trình $2ax^2 + b = 0$ vô nghiệm
 Nên $b > 0$ thì hàm số mới có 3 cực trị.

Chọn đáp án B.

Câu 29. Cho hàm số: $y = x + 1 + \frac{1}{x-1}$ (C) Tìm những điểm trên đồ thị (C) có hoành độ lớn hơn 1 sao cho tiếp tuyến tại điểm đó tạo với 2 đường tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

A. $M = \left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 2 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$

B. $M = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 2 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$

C. $M = (1; 2 + \sqrt{2})$

D. $M = \left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 2 + \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$

Hướng dẫn giải:

Gọi $M = (a; y(a)) \in (C); a > 0$ thì $y(a) = a + 1 + \frac{1}{a-1} = \frac{a^2}{a-1}$

PTTT của (C) tại M là: $y - y(a) = y'(a)(x - a) \Leftrightarrow y = \frac{a^2 - 2a}{(a-1)^2}(x - a) + \frac{a^2}{a-1}$ (d)

Tiệm cận ngang $x = 1$; Tiệm cận xiên $y = x + 1$

Giao điểm của 2 tiệm cận là $I = (1; 2)$

Giao điểm của d với tiệm cận ngang $x = 1$ là $A = \left(1; \frac{2a}{a-1}\right)$

Với tiệm cận xiên là: $B = (2a - 1; 2a)$

Ta cần $AI = \frac{2}{|a-1|}; BI = 2\sqrt{2}|a-1|$, nên $AI \cdot BI = 4\sqrt{2}$ với $a > 1$

Lại cần $\angle AIB = \frac{\pi}{4}$ suy ra $AB^2 = AI^2 + BI^2 - 2AI \cdot BI \cos \frac{\pi}{4} = AI^2 + BI^2 - \sqrt{2}AI \cdot BI$

Theo bất đẳng thức C-si: $AB^2 \geq 2AI \cdot BI - \sqrt{2}AI \cdot BI = (2 - \sqrt{2})AI \cdot BI$

$\Leftrightarrow AB \geq 2\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$ (1)

Đặt p là chu vi tam giác ABI thì: $p = AB + AI + BI \geq AB + 2\sqrt{AI \cdot BI} \geq 2\sqrt{2(\sqrt{2}-1)} + 4\sqrt{2}$

Điều kiện xảy ra $\Leftrightarrow AI = BI \Leftrightarrow a = 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

Vậy $\min p = 2\sqrt{2(\sqrt{2}-1)} + 4\sqrt{2} \Leftrightarrow a = 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

Hay điểm cần tìm là $M = \left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 2 + \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$

Chọn đáp án D.

Câu 30. Cho hàm số: $y = \frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2}$ (C) và điểm $M \in (C)$ có hoành độ $x_M = a$. Với giá trị nào của a thì tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) 2 điểm phân biệt khác M.

A. $\begin{cases} |a| < \sqrt{3} \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} |a| < \sqrt{3} \\ a \neq 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a < \sqrt{3} \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} |a| < \sqrt{7} \\ a \neq \pm 2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

§iôm $M \in (C)$, $x_M = a \Rightarrow y_M = \frac{a^4}{2} - 3a^2 + \frac{5}{2}$ ta cã Pt tiếp tuyến vớ i (C) cã d¹ng

$$(\Delta): y = y'_M(x - x_M) + y_M \text{ vớ i } y'_M = 2a^3 - 6a$$

$$\Rightarrow (\Delta) \quad y = (2a^3 - 6a)(x - a) + \frac{a^4}{2} - 3a^2 + \frac{5}{2}$$

Hoành độ giao điểm của (Δ) và (C) là nghiệm của phương trình

$$\frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2} = (2a^3 - 6a)(x - a) + \frac{a^4}{2} - 3a^2 + \frac{5}{2} \Leftrightarrow (x - a)^2(x^2 + 2ax + 3a^3 - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ g(x) = x^2 + 2ax + 3a^2 - 6 = 0 \end{cases}$$

Bài toán trở thành tìm a để $g(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác a

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{g(x)} = a^2 - (3a^2 - 6) > 0 \\ g(a) = 6a^2 - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3 < 0 \\ a^2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| < \sqrt{3} \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$$

Chọn đáp án A.

Câu 31. Cho hàm số: $y = \frac{2x-3}{x-2}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) , biết tiếp tuyến đó cắt đường

tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A, B sao cho $AB = \sqrt{2}IB$, với $I(2, 2)$.

A. $y = -x + 2$; $y = -x - 3$

B. $y = x + 2$; $y = -x + 6$

C. $y = -x + 2$; $y = -x + 6$

D. $y = x - 2$; $y = x - 6$

Hướng dẫn giải:

Gọi $M\left(x_0; \frac{2x_0-3}{x_0-2}\right) \in (C)$. PTTT của (C) tại M : $y = -\frac{1}{(x_0-2)^2}x + \frac{2x_0^2-6x_0+6}{(x_0-2)^2}$

Do $AB = \sqrt{2}IB$ và tam giác AIB vuông tại $I \Rightarrow IA = IB$ nên hệ số góc của tiếp tuyến $k = 1$ hoặc $k = -1$. vì $y' = \frac{-1}{(x-2)^2} < 0$ nên ta có hệ số góc tiếp tuyến $k = -1$.

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{(x_0-2)^2} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ có hai phương trình tiếp tuyến $y = -x + 2$; $y = -x + 6$

Chọn đáp án C.

Câu 32. Cho hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m) , đường thẳng d có phương trình $y = x + 4$ và điểm $K(1; 3)$. Tìm các giá trị của tham số m để d cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0; 4)$, B, C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$.

A. $m = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{2}$

B. $m = \frac{1 \pm \sqrt{137}}{2}$

C. $m = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$

D. $m = \frac{1 \pm \sqrt{142}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d :

$$x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4 = x + 4 \Leftrightarrow x(x^2 + 2mx + m + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2mx + m + 2 = 0 (*) \end{cases}$$

d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 2 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (2; +\infty)$$

Khi đó $B = (x_1; x_1 + 4)$, $C = (x_2; x_2 + 4)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của (*).

Theo Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 x_2 = m + 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{2(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{2(x_1 + x_2)^2 - 8x_1 x_2} = 2\sqrt{2(m^2 - m - 2)}$$

Ta có khoảng cách từ K đến d là $h = \sqrt{2}$. Do đó diện tích ΔKBC là:

$$S = \frac{1}{2} \cdot h \cdot BC = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2(m^2 - m - 2)} = 2\sqrt{m^2 - m - 2}$$

$$S = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{m^2 - m - 2} = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{137}}{2} \text{ (TM).}$$

Chọn đáp án B.

Câu 33. Cho hàm số: $y = x^3 - 2009x$ có đồ thị là (C). M_1 là điểm trên (C) có hoành độ $x_1 = 1$. Tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1 , tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại điểm M_3 khác M_2 , tiếp tuyến của (C) tại điểm M_{n-1} cắt (C) tại điểm M_n khác M_{n-1} ($n = 4; 5; \dots$), gọi $(x_n; y_n)$ là tọa độ điểm M_n . Tìm n để: $2009x_n + y_n + 2^{2013} = 0$

A. $n = 685$

B. $n = 627$

C. $n = 675$

D. $n = 672$

Hướng dẫn giải:

Gọi $M_k(x_k; y_k)$ suy ra tiếp tuyến tại M_k : $y - y_k = y'(x_k)(x - x_k)$

$$\Leftrightarrow y = (3x_k^2 - 2009)(x - x_k) + x_k^3 - 2009x_k$$

Tọa độ điểm M_{k+1} được xác định:

$$x^3 - 2009x = (3x_k^2 - 2009)(x - x_k) + x_k^3 - 2009x_k \Leftrightarrow (x - x_k)(x^2 + x \cdot x_k - 2x_k^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = x_k \vee x = -2x_k \Rightarrow x_{k+1} = -2x_k$$

Ta có: $x_1 = 1; x_2 = -2; x_3 = 4; \dots; x_n = (-2)^{n-1}$

$$2009x_n + y_n + 2^{2010} = 0 \Leftrightarrow 2009x_n + x_n^3 - 2009x_n + 2^{2010} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2)^{3n-3} = -2^{2013} = (-2)^{2013} \Leftrightarrow 3n - 3 = 2013 \Leftrightarrow n = 672$$

Chọn đáp án D.

Câu 34. Cho hàm số $y = \frac{3x - 2m}{mx + 1}$ với m là tham số. Xác định m để đường thẳng d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại C, D sao cho diện tích ΔOAB bằng 2 lần diện tích ΔOCD .

A. $m = \pm \frac{5}{3}$

B. $m = \pm 3$

C. $m = \pm \frac{2}{3}$

D. $m = \pm \frac{1}{3}$

Hướng dẫn giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của d và đồ thị: $3mx^2 - 3m^2x - m = 0, x \neq \frac{-1}{m}$

Vì $m \neq 0$ nên phương trình $\Leftrightarrow 3x^2 - 3mx - 1 = 0$ (*). Ta có $\Delta = 9m^2 + 12 > 0, \forall m \neq 0$ và

$f\left(\frac{-1}{m}\right) = \frac{3}{m^2} + 2 \neq 0, \forall m \neq 0$ (ở đây $f(x)$ là vế trái của (*)) nên d luôn cắt đồ thị tại 2 điểm A, B phân biệt $\forall m \neq 0$

Ta có $A(x_1; 3x_1 - 3m), B(x_2; 3x_2 - 3m)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của (*). Kẻ đường cao OH của

$$\Delta OAB \text{ ta có } OH = d(0; d) = \frac{|-3m|}{\sqrt{10}} \text{ và } AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (3x_2 - 3x_1)^2} = \sqrt{10(x_2 - x_1)^2} \\ = \sqrt{10(x_1 + x_2)^2 - 40x_1x_2} = \sqrt{10m^2 + \frac{40}{3}}$$

(Định lý Viet đối với (*)).

Mặt khác ta có $C(m; 0), D(0; -3m)$ (để ý $m \neq 0$ thì C, D, O phân biệt). Ta tìm m để

$$S_{\Delta OAB} = 2S_{\Delta OCD} \text{ hay } \sqrt{10m^2 + \frac{40}{3}} \cdot \frac{|-3m|}{\sqrt{10}} = 2|m||3m| \Leftrightarrow m = \pm \frac{2}{3}$$

Chọn đáp án C.

Câu 35. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 + (4-3m)x + 1$ có đồ thị là (C_m) , m là tham số. Tìm các giá trị của m để trên (C_m) có duy nhất một điểm có hoành độ âm mà tiếp tuyến của (C_m) tại điểm đó vuông góc với đường thẳng $d: x + 2y = 0$.

A. $\begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{2}{3} \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} m < 0 \\ m > 1 \end{cases}$ **C.** $0 < m < \frac{1}{3}$ **D.** $\begin{cases} m < -1 \\ m > \frac{5}{3} \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

$y' = mx^2 + 2(m-1)x + 4 - 3m$. Tiếp tuyến có hệ số góc bằng 2

Ta tìm $m: mx^2 + 2(m-1)x + 4 - 3m = 2$ (*) có đúng một nghiệm âm

$$(*) \Leftrightarrow (x-1)(mx + 3m - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } mx = 2 - 3m$$

$m = 0$: không thỏa yêu cầu

$$m \neq 0, \text{ yêu cầu bài toán xảy ra khi } \frac{2-3m}{m} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{2}{3} \end{cases}$$

Chọn đáp án C.

Câu 36. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $P(2; 5)$. Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho tam giác PAB đều. Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng d và đồ thị (C) là:

A. $m = 1, m = -5$ **B.** $m = 1, m = 4$ **C.** $m = 6, m = -5$ **D.** $m = 1, m = -8$

Hướng dẫn giải:

$$\frac{2x-1}{x+1} = -x + m \Leftrightarrow x^2 - (m-3)x - m - 1 = 0 \quad (1), \text{ với } x \neq -1$$

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 13 > 0 \\ 0.m - 3 \neq 0 \end{cases} \text{ (đúng } \forall m)$$

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1), ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 3 \\ x_1x_2 = -m - 1 \end{cases}$

Giả sử $A(x_1; -x_1 + m), B(x_2; -x_2 + m)$

Khi đó ta có: $AB = \sqrt{2(x_1 - x_2)^2}$

$$PA = \sqrt{(x_1 - 2)^2 + (-x_1 + m - 5)^2} = \sqrt{(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2},$$

$$PB = \sqrt{(x_2 - 2)^2 + (-x_2 + m - 5)^2} = \sqrt{(x_2 - 2)^2 + (x_1 - 2)^2}$$

Suy ra ΔPAB cân tại P

Do đó ΔPAB đều $\Leftrightarrow PA^2 = AB^2$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = 2(x_1 - x_2)^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + 4(x_1 + x_2) - 6x_1x_2 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -5 \end{cases}. \text{ Vậy giá trị cần tìm là } m = 1, m = -5.$$

Chọn đáp án C.

Câu 37. Cho hàm số $y = x^4 - mx^3 + 4x + m + 2$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số ban đầu có 3 cực trị và trọng tâm của tam giác với 3 đỉnh là tọa độ các cực trị trùng với tâm đối xứng của đồ thị

hàm số $y = \frac{4x}{4x - m}$.

A. $m = 2$

B. $m = 1$

C. $m = 4$

D. $m = 3$

Hướng dẫn giải:

Hàm số đã cho có 3 cực trị khi phương trình $y'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow 4x^3 - 3mx^2 + 4 = 0 \text{ có 3 nghiệm phân biệt}$$

$$\text{Xét } g(x) = 4x^3 - 3mx^2 + 4 \text{ thì } g'(x) = 12x^2 - 6mx \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \frac{m}{2}$$

$$\text{Do } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \text{ và } g(0) = 4 > 0, g\left(\frac{m}{2}\right) = \frac{16 - m^3}{4} \text{ nên } g(x) = 0$$

$$\text{có 3 nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{2} > 0 \\ \frac{16 - m^3}{4} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2\sqrt[3]{2} \text{ (hãy sinh các bất đẳng thức biến thiên)}$$

$$\text{của hàm } \mu(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2} \text{ trên } \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ có tìm ra kết quả trên)}$$

$$\text{Khi đó tâm đối xứng của đồ thị hàm số } y = \frac{4x}{4x - m} \text{ là } I\left(\frac{m}{4}; 1\right)$$

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$ là 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho thì

x_1, x_2, x_3 là nghiệm phương trình: $4x^3 - 3mx^2 + 4 = 0$ nên theo định lý Viet ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \frac{3m}{4} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{m}{4} \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = \frac{9m^2}{16} \end{cases}$$

$$\text{Viết hàm số ban đầu dưới dạng: } y(x) = y'(x)\left(\frac{x}{4} - \frac{m}{16}\right) + \left(-\frac{3m^2x^2}{16} + 3x + \frac{5m}{4} + 2\right), \text{ với } x \neq \frac{m}{4}$$

$$y_i = y(x_i) = y'(x_i)\left(\frac{x_i}{4} - \frac{m}{16}\right) + \left(-\frac{3m^2x_i^2}{16} + 3x_i + \frac{5m}{4} + 2\right) = -\frac{3m^2x_i^2}{16} + 3x_i + \frac{5m}{4} + 2$$

$$\text{do } y'(x_i) = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\text{Tổ hợp: } \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = -\frac{m^2}{16}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (x_1 + x_2 + x_3) + \frac{5m}{4} + 2 = -\frac{9m^4}{16^2} + \frac{5m}{4} + 2$$

Trọng tâm của tam giác ABC là $G(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}) \equiv I(\frac{m}{4}; 1)$ khi và chỉ

$$\text{khi: } \frac{y_1+y_2+y_3}{3} = 1 \Leftrightarrow -\frac{9m^4}{16^2} + \frac{5m}{4} + 2 = 1 \Leftrightarrow (m-4)(9m^3+36m^2+144m+64) = 0$$

$\forall m > 2\sqrt[3]{2}$ nên $m = 4$ là giá trị duy nhất cần tìm.

Chọn đáp án C.

Câu 38. Tìm tham số m để hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + 3(m+1)x + 2$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài lớn hơn 4.

A. $m < \frac{1-\sqrt{21}}{2}$

B. $m < \frac{1-\sqrt{21}}{2}$ hoặc $m > \frac{1+\sqrt{21}}{2}$

C. $m > \frac{1+\sqrt{21}}{2}$

D. $\frac{1-\sqrt{21}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{21}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Ta có $D = \mathbb{R}$, $y' = 3x^2 + 6mx + 3(m+1) = 3(x^2 + 2mx + m+1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2mx + m+1 = 0$ (1). Điều kiện cần và đủ để hàm số nghịch biến trên một đoạn có độ dài lớn hơn 4 $\Leftrightarrow y' \leq 0$ trên đoạn có độ dài lớn hơn 4 $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$ ($x_1 \neq x_2$) thỏa mãn $|x_1 - x_2| > 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ |x_1 - x_2| > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ |2\sqrt{\Delta'}| > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta' > 4 \Leftrightarrow m^2 - m - 1 > 4$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 5 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1-\sqrt{21}}{2} \vee m > \frac{1+\sqrt{21}}{2}.$$

Vậy hàm số (1) nghịch biến trên một đoạn có độ dài lớn hơn 4

$$\Leftrightarrow m < \frac{1-\sqrt{21}}{2} \vee m > \frac{1+\sqrt{21}}{2}$$

Chọn đáp án B.

Câu 39. Đường thẳng $d: y = x + a$ luôn cắt đồ thị hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$ (H) tại hai điểm phân biệt A, B

. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (H) tại A và B. Tìm a để tổng $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $a = 1$

B. $a = 2$

C. $a = -5$

D. $a = -1$

Hướng dẫn giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (H) :

$$\frac{-x+1}{2x-1} = x+a \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ 2x^2 + 2ax - a - 1 = 0 (*) \end{cases}$$

Đặt $g(x) = 2x^2 + 2ax - a - 1$

Vì $\begin{cases} \Delta'_g = a^2 + 2a + 2 > 0, \forall a \\ g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \neq 0, \forall a \end{cases}$ nên (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác $\frac{1}{2}$ với mọi a .

Vậy d luôn cắt (H) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi a .

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của (*). Theo định lý Vi-ét ta có

$$x_1 + x_2 = -a, \quad x_1 x_2 = \frac{-a-1}{2}.$$

Tiếp tuyến tại A và B có hệ số góc là $k_1 = \frac{-1}{(2x_1-1)^2}; k_2 = \frac{-1}{(2x_2-1)^2}$

$$\text{Ta có } k_1 + k_2 = \frac{-1}{(2x_1-1)^2} + \frac{-1}{(2x_2-1)^2} = -\left[\frac{(2x_1-1)^2 + (2x_2-1)^2}{(2x_1-1)^2(2x_2-1)^2} \right]$$

$$= -\left[\frac{4(x_1+x_2)^2 - 8x_1x_2 - 4(x_1+x_2) + 2}{(2x_1-1)^2(2x_2-1)^2} \right] \quad (\text{do } (2x_1-1)^2(2x_2-1)^2 = 1)$$

$$= -4(a+1)^2 - 2 \leq -2, \forall a. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow a = -1$$

Vậy $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất bằng -2 khi $a = -1$.

Chọn đáp án D.

Câu 40. Tìm m để phương trình $x^4 - (2m+3)x^2 + m + 5 = 0$ có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn :
 $-2 < x_1 < -1 < x_2 < 0 < x_3 < 1 < x_4 < 3$

A. Không có m

B. $m = 1$

C. $m = 4$

D. $m = 3$

Hướng dẫn giải:

Đặt $x^2 = X \geq 0$, ta có phương trình: $f(X) = X^2 - (2m+3)X + m + 5 = 0$ (*)

để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ thì phương trình (*) có hai nghiệm thỏa mãn: $0 < X_1 < X_2$. Khi đó $x_1 = -\sqrt{X_2}; x_2 = -\sqrt{X_1}; x_3 = \sqrt{X_1}; x_4 = \sqrt{X_2}$

Do đó: $-2 < -\sqrt{X_2} < -1 < -\sqrt{X_1} < 0 < \sqrt{X_1} < 1 < \sqrt{X_2} < 3$

$$\Leftrightarrow 2 > \sqrt{X_2} > 1 > \sqrt{X_1} > 0 \Leftrightarrow 4 > X_2 > 1 > X_1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} af(1) < 0 \\ af(0) > 0 \\ af(4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+3 < 0 \\ m+5 > 0 \\ -7m+9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m > -5 \\ m < \frac{9}{7} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ không tồn tại m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án A.

Câu 41. Cho hàm số: $y = x^3 - \frac{3}{2}mx^2 + \frac{1}{2}m^3$. Xác định m để đường thẳng $y = x$ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$.

A. $m = 0; m = \pm\sqrt{2}$

B. $m = 0$

C. $m = \pm\sqrt{2}$

D. $m = 0; m = \sqrt{2}$

Hướng dẫn giải:

PT hoành độ giao điểm: $x^3 - \frac{3}{2}mx^2 - x + \frac{1}{2}m^3 = 0$ (1)

Đường thẳng $y = x$ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt $A, B, C \Leftrightarrow$ pt (1) có 3 nghiệm phân biệt x_A, x_B, x_C . Theo Vi et ta có : $x_A + x_B + x_C = \frac{3}{2}m$ (2)

$$\text{theo gt } AB = BC \Leftrightarrow 2x_B = x_A + x_C \quad (3)$$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow x_B = \frac{m}{2}$. Vậy $x = \frac{m}{2}$ là một nghiệm của (1).

Chia $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}mx^2 - x + \frac{1}{2}m^3$ cho $x - \frac{m}{2}$ ta được:

$$f(x) = (x - \frac{m}{2}) (x^2 - mx - 1 - \frac{m^2}{2}) - \frac{m}{2} + \frac{m^3}{4}.$$

$$x = \frac{m}{2} \text{ là nghiệm của (1)} \Leftrightarrow -\frac{m}{2} + \frac{m^3}{4} = 0 \Leftrightarrow m=0, m = \pm\sqrt{2}$$

Khi đó $f(x) = (x - \frac{m}{2}) (x^2 - mx - 1 - \frac{m^2}{2})$ có 3 nghiệm phân biệt

vì $\varphi(x) = x^2 - mx - 1 - \frac{m^2}{2}$ có 2 nghiệm trái dấu và có $\varphi(\frac{m}{2}) = -1 - \frac{3m^2}{4} \neq 0, \forall m$

Vậy: $m = 0; m = \pm\sqrt{2}$

Chọn đáp án A.

Câu 42. Cho hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2m(2m-1)$. Xác định m để hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.

A. $-3 < m < 2$

B. $-2 \leq m \leq 2$

C. $-3 \leq m \leq 1$

D. $-3 \leq m \leq 2$

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$y' = g(x) = 3x^2 - 2(m+1)x - (2m^2 - 3m + 2)$$

$$\Delta' = 7m^2 - 7m + 7 = 7(m^2 - m + 1) > 0, \forall m$$

$$y' \geq 0, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} g(2) \geq 0 \\ \frac{S}{2} - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 + m - 6 \leq 0 \\ m - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 2$$

Chọn đáp án D.

Câu 43. Bạn A có một đoạn dây dài $20m$. Bạn chia đoạn dây thành hai phần. Phần đầu uốn thành một tam giác đều. Phần còn lại uốn thành một hình vuông. Hỏi độ dài phần đầu bằng bao nhiêu để tổng diện tích hai hình trên là nhỏ nhất?

A. $\frac{40}{9+4\sqrt{3}}m$.

B. $\frac{180}{9+4\sqrt{3}}m$.

C. $\frac{120}{9+4\sqrt{3}}m$.

D. $\frac{60}{9+4\sqrt{3}}m$.

Hướng dẫn giải:



Bạn A chia sợi dây thành hai phần có độ dài $x(m)$ và $20 - x(m)$, $0 < x < 20$ (như hình vẽ).

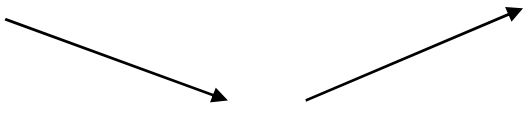
Phần đầu uốn thành tam giác đều có cạnh $\frac{x}{3}(m)$, diện tích $S_1 = \left(\frac{x}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{x^2\sqrt{3}}{36}(m^2)$

Phần còn lại uốn thành hình vuông có cạnh $\frac{20-x}{4}(m)$, diện tích $S_2 = \left(\frac{20-x}{4}\right)^2(m^2)$

Tổng diện tích hai hình nhỏ nhất khi $f(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{36} + \left(\frac{20-x}{4}\right)^2$ nhỏ nhất trên khoảng $(0; 20)$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{x\sqrt{3}}{18} - \frac{20-x}{8} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{180}{4\sqrt{3}+9}.$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{180}{4\sqrt{3}+9}$	20
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên ta được $x = \frac{180}{4\sqrt{3}+9}$.

Chọn đáp án D.

Câu 44. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} -8+4a-2b+c > 0 \\ 8+4a+2b+c < 0 \end{cases}$. Số giao điểm của đồ thị hàm số

$y = x^3 + ax^2 + bx + c$ và trục Ox là

A. 0.**B.** 1.**C.** 2.**D.** 3.**Hướng dẫn giải:**

Ta có hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Mà $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ nên tồn tại số $M > 2$ sao cho $y(M) > 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ nên tồn tại số $m < -2$ sao

cho $y(m) < 0$; $y(-2) = -8 + 4a - 2b + c > 0$ và $y(2) = 8 + 4a + 2b + c < 0$.

Do $y(m).y(-2) < 0$ suy ra phương trình $y = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(m; -2)$.

$y(-2).y(2) < 0$ suy ra phương trình $y = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-2; 2)$.

$y(2).y(M) < 0$ suy ra phương trình $y = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(2; M)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ và trục Ox có 3 điểm chung.

Chọn đáp án D.

Câu 45. Tập hợp các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{(mx^2-2x+1)(4x^2+4mx+1)}$ có đúng 1

đường tiệm cận là

A. $\{0\}$.**B.** $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.**C.** $\emptyset$ **D.** $(-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$.**Hướng dẫn giải:**

Có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$. Nên hàm số luôn có 1 đường tiệm cận ngang $y = 0$. Vậy ta tìm điều kiện để hàm số không có tiệm cận đứng.

Xét phương trình: $(mx^2 - 2x + 1)(4x^2 + 4mx + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 - 2x + 1 = 0 & (1) \\ 4x^2 + 4mx + 1 = 0 & (2) \end{cases}$

TH1: Xét $m = 0$, ta được $y = \frac{2x-1}{(-2x+1)(4x^2+1)} = -\frac{1}{4x^2+1}$ (thỏa ycbt)

TH2: Xét $m \neq 0$. Có: $\Delta_1 = 1 - m$ và $\Delta_2 = 4m^2 - 4$

Th2a. Cả 2 phương trình (1) và (2) đều vô nghiệm: $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m < 0 \\ 4m^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -1 < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$

Th2b: (1) vô nghiệm, (2) có nghiệm kép $x = \frac{1}{2}$: ta thấy trường hợp này vô lí (vì $m > 1$)

Th2c: (2) vô nghiệm, (1) có nghiệm kép $x = \frac{1}{2}$: ta thấy trường hợp này vô lí (vì $-1 < m < 1$)

Chọn đáp án A.

Câu 46. Đường thẳng $d: y = x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ tại 3 điểm phân biệt $A(0;4), B$ và C sao cho diện tích tam giác MBC bằng 4, với $M(1;3)$. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

A. $m = 2$ hoặc $m = 3$. **B.** $m = -2$ hoặc $m = 3$. **C.** $m = 3$.

D. $m = -2$ hoặc $m = -3$.

Hướng dẫn giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của d và đồ thị (C) : $x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4 = 4$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 + (m+2)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \varphi(x) = x^2 + 2mx + m + 2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Với $x = 0$, ta có giao điểm là $A(0;4)$.

d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(0) = m + 2 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - m - 2 > 0 \end{cases} \quad (*)$$

Ta gọi các giao điểm của d và (C) lần lượt là $A, B(x_B; x_B + 2), C(x_C; x_C + 2)$ với x_B, x_C là nghiệm của phương trình (1).

$$\text{Theo định lí Viet, ta có: } \begin{cases} x_B + x_C = -2m \\ x_B \cdot x_C = m + 2 \end{cases}$$

Ta có diện tích của tam giác MBC là $S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot d(M, BC) = 4$.

Phương trình d được viết lại là: $d: y = x + 4 \Leftrightarrow x - y + 4 = 0$.

$$\text{Mà } d(M, BC) = d(M, d) = \frac{|1 - 3 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó: } BC = \frac{8}{d(M, BC)} = \frac{8}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow BC^2 = 32$$

$$\text{Ta lại có: } BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = 2(x_C - x_B)^2 = 32$$

$$\Leftrightarrow (x_B + x_C)^2 - 4x_B \cdot x_C = 16 \Leftrightarrow (-2m)^2 - 4(m + 2) = 16$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 24 = 0 \Leftrightarrow m = 3 \vee m = -2.$$

Đối chiếu với điều kiện, loại đi giá trị $m = -2$.

Chọn đáp án C.

Câu 47. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y = 2(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3})$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4(x^2 + y^2) + 15xy$ là:

A. $\min P = -83$

B. $\min P = -63$

C. $\min P = -80$

D. $\min P = -91$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } x + y = 2(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}) \Leftrightarrow (x+y)^2 = 4(x+y) + 8\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{y+3} \geq 4(x+y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq 4 \\ x+y \leq 0 \end{cases} \text{ Mặt khác}$$

$$x+y = 2(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}) \leq 2\sqrt{2(x+y)} \Leftrightarrow x+y \leq 8 \Rightarrow x+y \in [4;8]$$

Xét biểu thức $P = 4(x^2 + y^2) + 15xy = 4(x+y)^2 + 7xy$ và đặt

$$t = x+y \in [4;8] \Rightarrow P = 4t^2 + 7xy.$$

$$\text{Lại có } (x+3)(y+3) \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq -3(x+y) - 9 \Rightarrow P \geq 4(x+y)^2 - 21(x+y) - 63 \\ = 4t^2 - 21t - 63.$$

Xét hàm số $f(t) = 4t^2 - 21t - 63$ trên đoạn $[4;8]$ suy ra $P_{\min} = f(7) = -83$

Chọn đáp án A.

Câu 48. Gọi (C_m) là đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - m + 2017$. Tìm m để (C_m) có đúng 3 điểm chung phân biệt với trục hoành, ta có kết quả:

A. $m = 2017$

B. $2016 < m < 2017$

C. $m \geq 2017$

D. $m \leq 2017$

Hướng dẫn giải:

- Phương pháp: Tìm m để phương trình ẩn x tham số m có n nghiệm phân biệt thuộc khoảng K

+ Cô lập m , đưa phương trình về dạng $m = f(x)$

+ Vẽ đồ thị (hoặc bảng biến thiên) của $y=f(x)$ trên K

+ Biện luận để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại n điểm phân biệt trên K

- Cách giải: (C_m) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình

$$x^4 - 2x^2 - m + 2017 = 0 \Leftrightarrow m = x^4 - 2x^2 + 2017 \text{ có 3 nghiệm phân biệt.}$$

Xét hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2017$ trên $\mathbb{R}$

Có $y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 1$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		0		1		$+\infty$	
y'	-		0		+		0		+	
y	$+\infty$				2017				$+\infty$	
			2016				2016			

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi $m=2017$

Chọn đáp án A.

Câu 49. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{mx^4 + 3}}$ có hai đường tiệm cận

ngang.

A. $m = 0$

B. $m < 0$

C. $m > 0$

D. $m > 3$

Hướng dẫn giải:

Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{mx^4 + 3}}$ có hai đường tiệm cận ngang khi và chỉ khi các giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = a (a \in \mathbb{R}), \lim_{x \rightarrow -\infty} y = b (b \in \mathbb{R}) \text{ tồn tại. Ta có:}$$

+ với $m = 0$ ta nhận thấy $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$ suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

+ Với $m < 0$, khi đó hàm số có TXĐ $D = \left(-\sqrt[4]{-\frac{3}{m}}; \sqrt[4]{-\frac{3}{m}}\right)$, khi đó $\lim_{x \rightarrow +\infty} y, \lim_{x \rightarrow -\infty} y$ không tồn tại suy ra đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang.

+ Với $m > 0$, khi đó hàm số có TXĐ $D = \mathbb{R}$ suy ra $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)}{x^2 \sqrt{m + \frac{3}{x^2}}}, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{x^2 \sqrt{m + \frac{3}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{m}}$ suy ra

đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang.

Vậy $m > 0$ thỏa YCBT.

Chọn đáp án C.

Câu 50. Cho hàm số $y = |x^2 + 2x + a - 4|$. Tìm a để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $a = 3$

B. $a = 2$

C. $a = 1$

D. Một giá trị khác

Hướng dẫn giải:

Ta có $y = |x^2 + 2x + a - 4| = |(x+1)^2 + a - 5|$. Đặt $u = (x+1)^2$ khi đó $\forall x \in [-2; 1]$ thì $u \in [0; 4]$ Ta được hàm số $f(u) = |u + a - 5|$. Khi đó

$$\max_{x \in [-2; 1]} y = \max_{u \in [0; 4]} f(u) = \max\{f(0), f(4)\} = \max\{|a-5|; |a-1|\}$$

$$\text{Trường hợp 1: } |a-5| \geq |a-1| \Leftrightarrow a \leq 3 \Rightarrow \max_{u \in [0; 4]} f(u) = 5-a \geq 2 \Leftrightarrow a = 3$$

$$\text{Trường hợp 2: } |a-5| \leq |a-1| \Leftrightarrow a \geq 3 \Rightarrow \max_{u \in [0; 4]} f(u) = a-1 \geq 2 \Leftrightarrow a = 3$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\max_{x \in [-2; 1]} y = 2 \Leftrightarrow a = 3$

Chọn đáp án A.

Câu 51. Giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \sqrt{x^3 + 2(1 + \sqrt{x^3 + 1})} + \sqrt{x^3 + 2(1 - \sqrt{x^3 + 1})}$ là:

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Hướng dẫn giải:

$$y = \sqrt{x^3 + 2(1 + \sqrt{x^3 + 1})} + \sqrt{x^3 + 2(1 - \sqrt{x^3 + 1})}$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{(\sqrt{x^3 + 1} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x^3 + 1} - 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow y = |\sqrt{x^3 + 1} + 1| + |\sqrt{x^3 + 1} - 1|$$

Điều kiện để hàm số xác định $x \geq -1$

$$\text{Ta có } y = \sqrt{x^3 + 1} + 1 + |\sqrt{x^3 + 1} - 1|$$

$$\text{- Nếu } -1 \leq x < 0 \text{ thì } \sqrt{x^3 + 1} - 1 < 0 \Rightarrow |\sqrt{x^3 + 1} - 1| = 1 - \sqrt{x^3 + 1} \Rightarrow y = 2$$

$$\text{- Nếu } x \geq 0 \text{ thì } \sqrt{x^3 + 1} - 1 \geq 0 \Rightarrow y = 2\sqrt{x^3 + 1} \geq 2$$

Vậy: $y \geq 2, \forall x \geq -1, y = 2 \Leftrightarrow x = 0$

Chọn đáp án C.

HÌNH ĐA DIỆN

I – HÌNH CHÓP

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có chân đường cao nằm trong tam giác ABC ; các mặt phẳng (SAB) , (SAC) và (SBC) cùng tạo với mặt phẳng (ABC) một góc bằng nhau. Biết $AB = 25$, $BC = 17$, $AC = 26$; đường thẳng SB tạo với mặt đáy một góc bằng 45° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = 680$ B. $V = 408$ C. $V = 578$ D. $V = 600$

Hướng dẫn giải:

Gọi J là chân đường cao của hình chóp $S.ABC$; H, K và L lần lượt là hình chiếu của J trên các cạnh AB, BC và CA .

Suy ra, $\widehat{SHJ}$, $\widehat{SLJ}$ và $\widehat{SKJ}$ lần lượt là góc tạo bởi mặt phẳng (ABC) với các mặt phẳng (SAB) , (SBC) và (SAC) .

Theo giả thiết, ta có $\widehat{SHJ} = \widehat{SLJ} = \widehat{SKJ}$, suy ra các tam giác vuông SJH, SJL và SJK bằng nhau.

Từ đó, $JH = JL = JK$. Mà J nằm trong tam giác ABC nên J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Áp dụng công thức Hê-rông, ta tính được diện tích của tam giác ABC là $S = 204$. Kí hiệu p là nửa chu vi tam giác ABC , r là

bán kính đường tròn nội tiếp của ABC . Ta có $r = \frac{S}{p} = \frac{204}{34} = 6$. Đặt $x = BH = BL$, $y = CL = CK$,

$z = AH = AK$.

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 17 \\ x + z = 25 \\ y + z = 26 \end{cases}$$

Giải ra được $(x; y; z) = (8; 9; 17)$

$JB = \sqrt{JH^2 + BH^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Ta có $\widehat{SBJ} = (\widehat{SB}, (\widehat{ABC})) = 45^\circ$, suy ra SJB là tam giác vuông cân tại J . $SJ = JB = 10$.

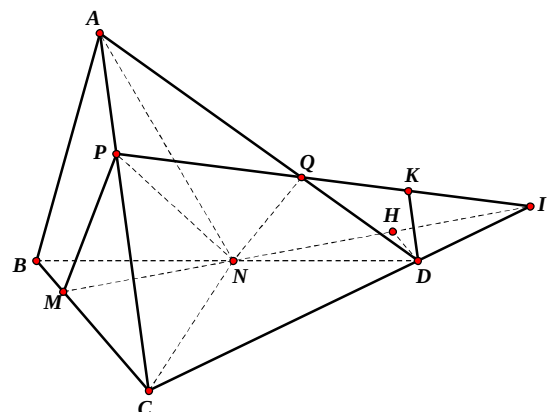
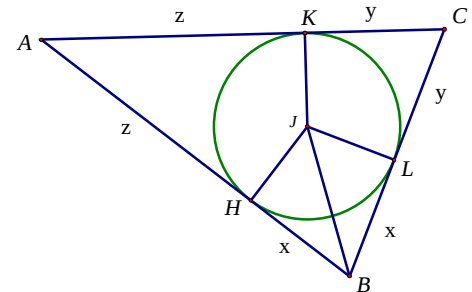
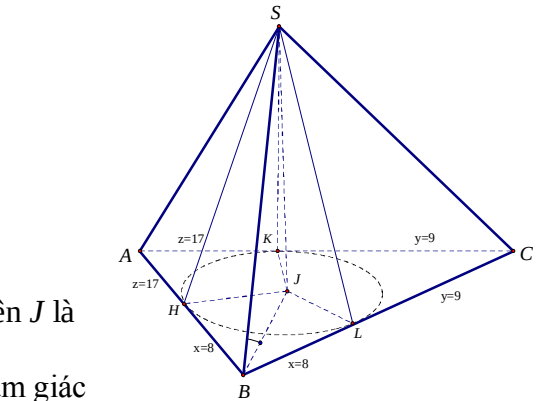
Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3}SJ.S_{ABC} = 680$

Chọn đáp án A.

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$, M, N, P lần lượt thuộc BC, BD, AC sao cho $BC = 4BM, BD = 2BN, AC = 3AP$, mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q . Tính tỷ số thể tích hai phần khối tứ diện $ABCD$ bị chia bởi mặt phẳng (MNP) .

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{7}{13}$ C. $\frac{5}{13}$ D. $\frac{1}{3}$

Hướng dẫn giải:



Gọi $I = MN \cap CD, Q = PI \cap AD$, kẻ $DH \parallel BC (H \in IM), DK \parallel AC (K \in IP)$

$$\Delta NMB = \Delta NDH \Rightarrow \frac{ID}{IC} = \frac{DH}{CM} = \frac{BM}{CM} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{IK}{IP} = \frac{DK}{CP} = \frac{ID}{IC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{DK}{2AP} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{DK}{AP} = \frac{2}{3}$$

ΔAPQ đồng dạng ΔDKQ

$$\Rightarrow \frac{AQ}{DQ} = \frac{AP}{DK} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{AQ}{AD} = \frac{3}{5}$$

Đặt $V = V_{ABCD}$ Ta có:

$$\frac{V_{ANPQ}}{V_{ANCD}} = \frac{AP}{AC} \cdot \frac{AQ}{AD} = \frac{1}{5}, \frac{V_{ANCD}}{V_{ABCD}} = \frac{V_{DACN}}{V_{DABC}} = \frac{DN}{DB} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{ANPQ} = \frac{1}{10}V$$

$$\frac{V_{CDMP}}{V_{CDBA}} = \frac{CM}{CB} \cdot \frac{CP}{CA} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{CDMP} = \frac{1}{2}V \Rightarrow V_{N.ABMP} = \frac{1}{2}V_{DABMP} = \frac{1}{2}(V - V_{CDMP}) = \frac{1}{4}V$$

$$\Rightarrow V_{ABMNQP} = V_{ANPQ} + V_{N.ABMP} = \frac{7}{20}V \Rightarrow \frac{V_{ABMNQP}}{V_{CDMNQP}} = \frac{7}{13}$$

Chọn đáp án B.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = a$, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn AC , $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC . Tính thể tích khối tứ diện $SMBC$ theo a .

A. $\frac{a^3\sqrt{14}}{48}$

B. $\frac{a^3\sqrt{14}}{24}$

C. $\frac{a^3\sqrt{14}}{16}$

D. $\frac{a^3\sqrt{14}}{8}$

Hướng dẫn giải:

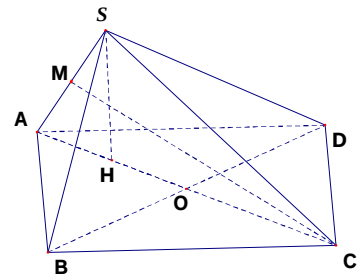
Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

$$\text{Ta có: } \frac{AM}{AC} = \frac{AH}{SA} \Rightarrow AM = \frac{AH \cdot AC}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4} \cdot a\sqrt{2}}{a} = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow MC = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{SMC} = \frac{1}{2}SM \cdot MC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} = \frac{a^2\sqrt{7}}{8}$$

$$\Rightarrow V_{SMAC} = \frac{1}{3}BO \cdot S_{SMC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{7}}{8} = \frac{a^3\sqrt{14}}{48}$$



Chọn đáp án A.

Câu 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy là α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Mặt phẳng (P) qua AC và vuông góc với mặt phẳng (SAD) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Tỷ lệ thể tích hai khối đa diện là gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau

A. 0,11

B. 0,13

C. 0,7

D. 0,9

Hướng dẫn giải:

$S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều $SO \perp (ABCD)$. Gọi N là trung điểm CD

$$\Rightarrow \begin{cases} CD \perp SN, CD \perp ON \\ (SCD) \cap (ABCD) = CD \Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = \widehat{SNO} \end{cases}$$

Kẻ $CM \perp SD$. Ta có

$$\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SD$$

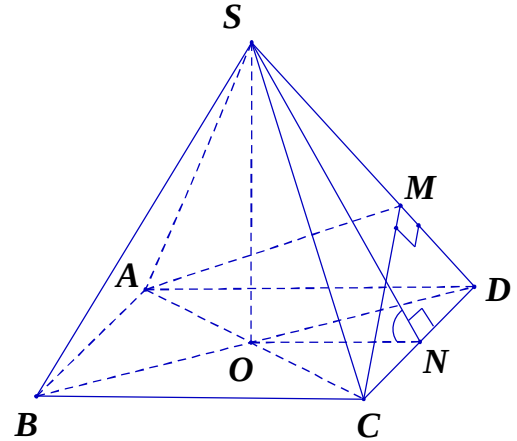
$$\Rightarrow SD \perp (ACM) \Rightarrow (ACM) \perp (SAD) \text{ nên mặt phẳng}$$

(P) là (ACM)

+ Xét tam giác SON vuông tại N có :

$$SN = \frac{ON}{\cos \widehat{SNO}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3a}{2}$$

$$SO = \sqrt{SN^2 - ON^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{2}$$



+ Xét tam giác SOD vuông tại O có : $SD = \sqrt{SO^2 + OD^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$

Ta có $S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2} CM \cdot SD = \frac{1}{2} SN \cdot CD \Rightarrow CM = \frac{SN \cdot CD}{SD} = \frac{\frac{3a}{2} \cdot a}{\frac{a\sqrt{10}}{2}} = \frac{3a\sqrt{10}}{10}$

- Xét tam giác MCD vuông tại M có : $DM = \sqrt{CD^2 - CM^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{3a\sqrt{10}}{10}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{10}$

Ta có : $\frac{V_{MACD}}{V_{SABCD}} = \frac{V_{MACD}}{2 \cdot V_{SACD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{DM}{DS} \cdot \frac{DA}{DA} \cdot \frac{DC}{DA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{DM}{DS} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{a\sqrt{10}}{10}}{\frac{a\sqrt{10}}{2}} = \frac{1}{10}$

$\Rightarrow V_{MACD} = \frac{1}{10} V_{SABCD}$. Mặt phẳng (P) chia khối chóp $S.ABCD$ thành 2 khối $MACD$ và $SABCM$

$\Rightarrow V_{SABCD} = V_{MACD} + V_{SABCM} \Rightarrow V_{SABCM} = \frac{9}{10} V_{SABCD}$. Do đó : $\frac{V_{MACD}}{V_{SABCM}} = \frac{1}{9} \approx 0,11$

Chọn đáp án A.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$, có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Các mặt bên (SAB) , (SAC) , (SBC) lần lượt tạo với đáy các góc lần lượt là $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) nằm bên trong tam giác ABC .

A. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{(4 + \sqrt{3})}$. **B.** $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2(4 + \sqrt{3})}$. **C.** $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4(4 + \sqrt{3})}$. **D.** $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{8(4 + \sqrt{3})}$.

Hướng dẫn giải:

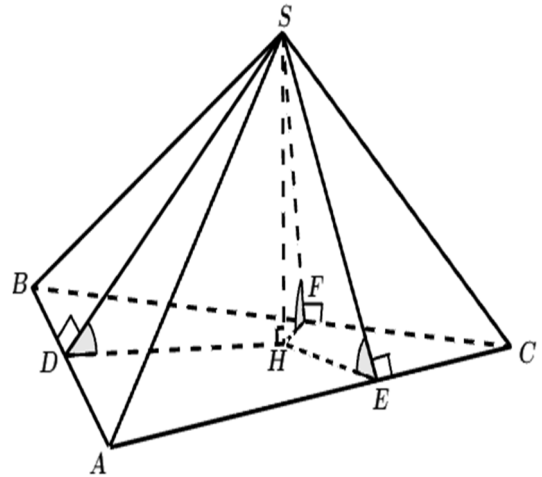
Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) . Kẻ $HD \perp AB (D \in AB)$, $HE \perp AC (E \in AC)$, $HF \perp BC (F \in BC)$. Khi đó ta có

$$HD = \frac{SH}{\tan 30^\circ} = SH\sqrt{3}, \quad HE = \frac{SH}{\tan 45^\circ} = SH,$$

$$HF = \frac{SH}{\tan 60^\circ} = \frac{SH}{\sqrt{3}}. \text{ Ta có } S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ suy ra}$$

$$\frac{1}{2}SH \left(1 + \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow SH = \frac{3a}{2(4 + \sqrt{3})}.$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{2(4 + \sqrt{3})} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8(4 + \sqrt{3})}.$$



Chọn đáp án D.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , góc giữa SC và $mp(ABC)$ là 45° . Hình chiếu của S lên $mp(ABC)$ là điểm H thuộc AB sao cho $HA = 2HB$. Biết $CH = \frac{a\sqrt{7}}{3}$. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng SA và BC :

A. $\frac{a\sqrt{210}}{30}$

B. $\frac{a\sqrt{210}}{20}$

C. $\frac{a\sqrt{210}}{45}$

D. $\frac{a\sqrt{210}}{15}$

Hướng dẫn giải:

+ D là đỉnh của hình bình hành $ABCD$ thì $d(SA; BC) = d(B; (SAD)) = 1,5 \cdot d(H; (SAD))$

+ Kẻ HE vuông AD , E thuộc AD . Kẻ HI vuông SE , I thuộc AE thì $d(H; (SAD)) = HI$

+ Tính $HI = \frac{a\sqrt{210}}{30}$

Chọn đáp án B.

Câu 7. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông ở A , $AB = a$, $AC = 2a$. Đỉnh S cách đều A, B, C ; mặt bên (SAB) hợp với mặt đáy (ABC) góc 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{\sqrt{3}}{3} a^3$

B. $V = a^3$

C. $V = \frac{1}{3} a^3$

D. $V = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} a^3$

Hướng dẫn giải:

Gọi M, N, H lần lượt là trung điểm của AB, AC , và BC

Ta có tam giác SAB cân suy ra $SM \perp AB$

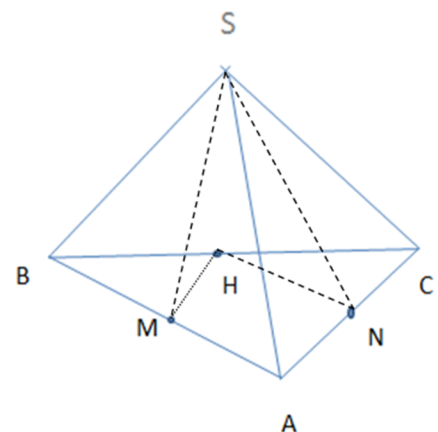
$$HM \parallel AC \Rightarrow HM \perp AB \Rightarrow AB \perp (SMH) \Rightarrow AB \perp SH \quad (1)$$

$$\text{Và } [(SAB), (ABC)] = SMH = 60^\circ$$

$$\text{Tương tự } AC \perp (SNH) \Rightarrow AC \perp SH \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow SH \perp (ABC)$$

$$\text{Ta có } SH = MH. \tan 60^\circ = \frac{AC}{2} \sqrt{3} = a\sqrt{3}$$



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AB = a^2. \text{ Vậy } V = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{3} a^3 \text{ (đvdt)}$$

Chọn đáp án A.

Câu 8. Cho hình chóp S.ABCD có SA=x, các cạnh còn lại bằng 2. Tìm giá trị của x để thể tích khối chóp lớn nhất

A. $\sqrt{6}$

B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{7}$

D. $2\sqrt{6}$

Hướng dẫn giải:

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có OD=OB và SB=SD nên $SO \perp BD$, do đó

$BO \perp (SAC)$.

Mặt khác $SO^2 = SB^2 - OB^2 = AB^2 - OB^2 = OA^2$ nên $SO = OA = OC$. Do đó tam giác SAC vuông tại S.

Ta có $AC^2 = x^2 + 4 \Rightarrow 4OA^2 = x^2 + 4$.

Do đó $4OB^2 = 12 - x^2 \Rightarrow 0 < x < 2\sqrt{3}$.

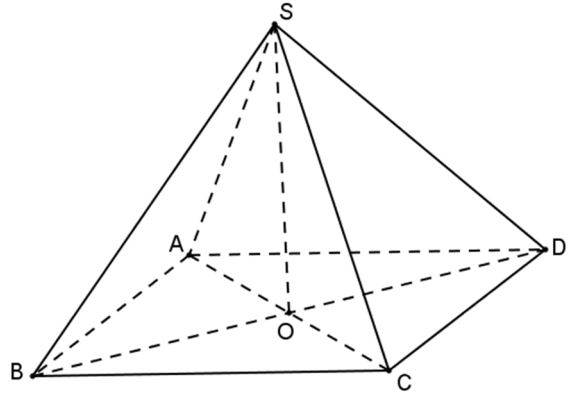
Và $16S_{SOA}^2 = x^2(4OA^2 - x^2) = 4x^2$.

Để $V_{S.ABCD}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi

V_{SOAB} đạt giá trị lớn nhất.

Do đó $V_{S.ABCD}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $x^2(12 - x^2)$ đạt giá trị lớn nhất.

Suy ra $x^2 = 12 - x^2 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \sqrt{6}$.



Chọn đáp án A.

Câu 9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành, M là trung điểm của AD. Gọi S' là giao của SC với mặt phẳng chứa BM và song song với SA. Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp S'.BCDM và S.ABCD.

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{1}{4}$

Hướng dẫn giải:

Trong $(ABCD)$, gọi $\{I\} = AC \cap BM$, trong (SAC) , kẻ đường thẳng qua I, $\parallel SA$, cắt SC tại S' $\Rightarrow$

S' là giao điểm của SC với mp chứa BM, $\parallel SA$.

Do M là trung điểm của AD nên

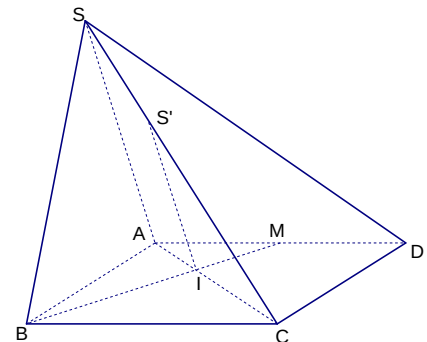
$$dt(BCDM) = \frac{3}{4} dt(ABCD) \Rightarrow V_{S'.BCDM} = \frac{3}{4} V_{S'.ABCD}$$

Gọi H, H' lần lượt là hình chiếu của S, S' trên ABCD

$$\Rightarrow \frac{S'H'}{SH} = \frac{CS'}{CS} = \frac{CI}{CA} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow V_{S'.BCDM} = \frac{3}{4} V_{S'.ABCD} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} V_{S.ABCD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD}$$

Chọn đáp án A.



Câu 10. Đáy của hình chóp SABC là tam giác cân ABC có $AB = AC = a$ và $\widehat{B} = \widehat{C} = \alpha$. Các cạnh bên cùng tạo với đáy một góc β . Tính thể tích hình chóp SABC.

A. $V = \frac{a^3 \tan \beta}{6}$

B. $V = \frac{a^3 \cos \alpha \tan \beta}{6}$

C. $V = \frac{a^3 \cos \alpha \tan \beta}{3}$

D. $V = \frac{a^3 \sin 2\alpha}{6}$

Hướng dẫn giải:

Kẻ $SO \perp (ABC) \Rightarrow OA$ là hình chiếu vuông góc của SA lên (ABC)

Do đó $(SA; (ABC)) = \widehat{SAO} = \beta$. Tương tự ta cũng có $\widehat{SBO} = \widehat{SCO} = \beta$.

Nên $\Delta SAO = \Delta SBO = \Delta SCO \Rightarrow AO = BO = CO$.

Theo định lí sin ta có: $\frac{AC}{\sin B} = \frac{a}{\sin \alpha} = 2OA \Rightarrow OA = \frac{a}{2 \sin \alpha}$.

Nên $SO = OA \cdot \tan \beta = \frac{a \tan \beta}{2 \sin \alpha}$.

Mặt khác $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} a^2 \sin(180 - 2\alpha) = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{2}$.

Vậy $V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SO = \frac{1}{6} \frac{a^2 \sin 2\alpha}{2} \cdot \frac{a \tan \beta}{2 \sin \alpha} = \frac{a^3 \cos \alpha \tan \beta}{6}$.

Chọn đáp án B.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình thang vuông tại A và B . $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M , N là trung điểm của SB và SD . Tính V hình chóp biết rằng (MAC) vuông góc với (NAC) .

A. $\frac{3a^3}{2}$

B. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{a^3}{2}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Gọi I , H lần lượt là trung điểm AD và AB , O là giao điểm của AC và BI , vẽ $HK \parallel BI$ (K thuộc AC)

Ta có $ABCI$ là hình vuông nên AC vuông góc với BI

Mà AC vuông góc NI (do $NI \parallel SA$)

Suy ra $AC \perp (NIO) \Rightarrow \angle NOI = ((NAC), (ACD)) = \alpha$

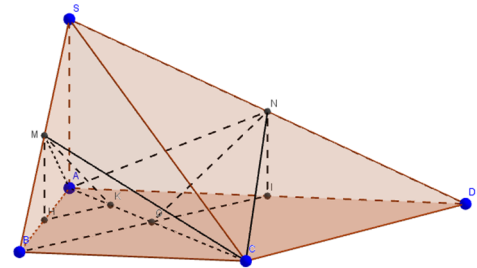
Tương tự ta có $\angle MKH = ((MAC), (ACB)) = \beta$

Theo đề ta có $\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \tan \alpha = \cot \beta \Rightarrow \frac{NI}{NO} = \frac{HK}{MH}$

Suy ra

$$NI \cdot MH = OI \cdot HK \Rightarrow \frac{SA}{2} \cdot \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow SA = a$$

$$\text{Mà } S_{ABCD} = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{a^3}{2}$$



Chọn đáp án C.

Câu 12. Cho tứ diện $S.ABC$, M và N là các điểm thuộc các cạnh SA và SB sao cho $MA = 2SM$, $SN = 2NB$, (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SC . Kí hiệu (H_1) và (H_2) là các khối đa diện có được khi chia khối tứ diện $S.ABC$ bởi mặt phẳng (α) , trong đó, (H_1) chứa điểm S , (H_2)

chứa điểm A ; V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của (H_1) và (H_2) . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{4}{5}$

B. $\frac{5}{4}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{4}{3}$

Hướng dẫn giải:

Kí hiệu V là thể tích khối tứ diện $SABC$.

Gọi P , Q lần lượt là giao điểm của (α) với các đường thẳng BC , AC .

Ta có $NP \parallel MQ \parallel SC$. Khi chia khối (H_1) bởi mặt phẳng (QNC) , ta được hai khối chóp $N.SMQC$ và $N.QPC$.

$$\text{Ta có: } \frac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}} = \frac{d(N, (SAC))}{d(B, (SAC))} \cdot \frac{S_{SMQC}}{S_{SAC}};$$

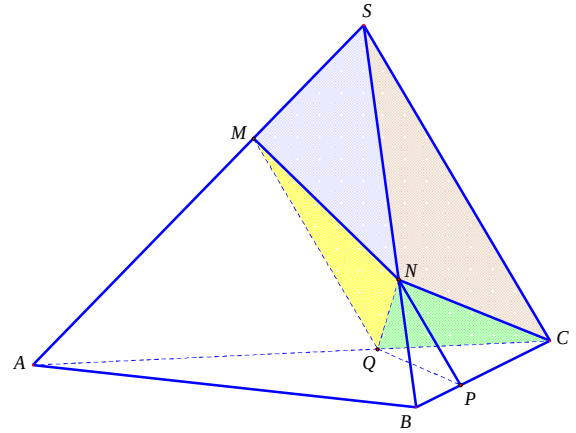
$$\frac{d(N, (SAC))}{d(B, (SAC))} = \frac{NS}{BS} = \frac{2}{3};$$

$$\frac{S_{AMQ}}{S_{ASC}} = \left(\frac{AM}{AS}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{S_{SMQC}}{S_{ASC}} = \frac{5}{9}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{9} = \frac{10}{27}$$

$$\begin{aligned} \frac{V_{N.QPC}}{V_{S.ABC}} &= \frac{d(N, (QPC))}{d(S, (ABC))} \cdot \frac{S_{QPC}}{S_{ABC}} \\ &= \frac{NB}{SB} \cdot \frac{CQ}{CA} \cdot \frac{CP}{CB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27} \end{aligned}$$

$$\frac{V_1}{V} = \frac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}} + \frac{V_{N.QPC}}{V_{S.ABC}} = \frac{10}{27} + \frac{2}{27} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{V_1}{V_1 + V_2} = \frac{4}{9} \Rightarrow 5V_1 = 4V_2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{5}$$



Chọn đáp án A.

Câu 13. Một người dự định làm một thùng đựng đồ hình lăng trụ tứ giác đều có thể tích là V . Để làm thùng hàng tốn ít nguyên liệu nhất thì chiều cao của thùng đựng đồ bằng

A. $x = V^{\frac{2}{3}}$

B. $x = \sqrt[3]{V}$

C. $x = V^{\frac{1}{4}}$

D. $x = \sqrt{V}$

Hướng dẫn giải:

Gọi a là độ dài cạnh đáy, x là độ dài đường cao của thùng đựng đồ ($a, x > 0$)

$$\text{Khi đó, } V = a^2 x \Rightarrow a = \sqrt{\frac{V}{x}} \Rightarrow S_{tp} = 2a^2 + 4ax = 2\frac{V}{x} + 4\sqrt{Vx}$$

Để làm thùng hàng tốn ít nguyên liệu nhất thì S_{tp} nhỏ nhất $\Rightarrow 2\frac{V}{x} + 4\sqrt{Vx}$ nhỏ nhất.

Cách 1 : Xét hàm số $f(x) = 2\frac{V}{x} + 4\sqrt{Vx}$ trên $(0; +\infty)$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{-2V}{x^2} + \frac{2\sqrt{V}}{\sqrt{x}}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 \sqrt{V} = V \sqrt{x} \Leftrightarrow x = V^{\frac{1}{3}}$$

x	0	$V^{\frac{1}{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
		-	+
$f(x)$			

$f(V^{\frac{1}{3}})$

Từ BBT ta thấy để làm thùng hàng tốn ít nguyên liệu nhất thì chiều cao của thùng đựng đồ bằng $V^{\frac{1}{3}}$.

Cách 2: ta có $2\frac{V}{x} + 4\sqrt{Vx} = 2\frac{V}{x} + 2\sqrt{Vx} + 2\sqrt{Vx} \geq 6\sqrt[3]{V^2}$

Dấu "=" xảy ra tại $\frac{V}{x} = \sqrt{Vx} \Leftrightarrow x^3 = V \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{V}$

Chọn đáp án B.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết rằng diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ là $4\pi (dm^2)$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AC gần với giá trị nào nhất sau đây ?

A. $\frac{2}{7} dm.$

B. $\frac{3}{7} dm.$

C. $\frac{4}{7} dm.$

D. $\frac{6}{7} dm.$

Hướng dẫn giải:

Gọi $x > 0$ là cạnh của hình vuông $ABCD$ và H là trung điểm cạnh AD

Để dàng chứng minh $SH \perp (ABCD)$, $SH = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Gọi $O = AC \cap BD$ và G là trọng tâm ΔSAD , đồng thời d_1, d_2 lần lượt là 2 trục đường tròn ngoại tiếp $ABCD, \Delta SAD$

(d_1 qua O và $\parallel SH$, d_2 qua G và $\parallel AB$)

$\Rightarrow I = d_1 \cap d_2$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp

$S.ABCD \Rightarrow R = SI$

$$S = 4\pi R^2 \Rightarrow R = 1 = SI = \sqrt{SG^2 + GI^2} = \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{21}}{7} (dm)$$

Gọi E là điểm thỏa $ADEC$ là hình bình hành $\Rightarrow ED \parallel AC \Rightarrow d(AC; SD) = d(AC; (SDE))$

$\Rightarrow d(AC; SD) = d(A; (SDE)) = 2d(H; (SDE)) = 2HP$ (phần chứng minh $HP \perp (SDE)$ xin dành cho bạn đọc)

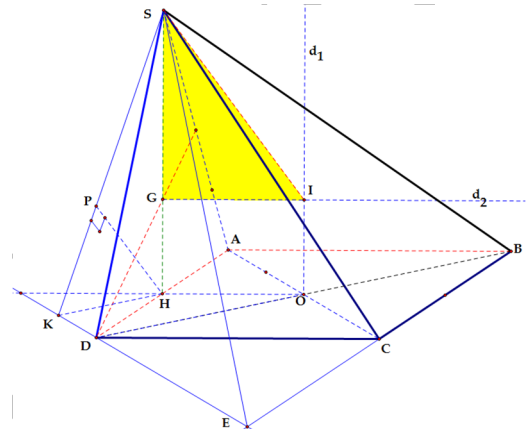
$$\Delta SKH : \frac{1}{HP^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{KH^2} = \frac{1}{\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{x\sqrt{2}}{4}\right)^2}$$

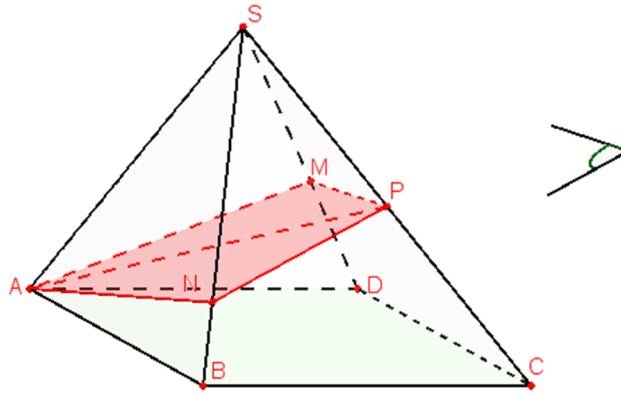
$$\Rightarrow HP = \frac{x\sqrt{21}}{14} = \frac{3}{7} dm \Rightarrow d(AC; SD) = \frac{6}{7} dm$$

Chọn đáp án D.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V . Điểm P là trung điểm của SC , một mặt phẳng qua AP cắt hai cạnh SD và SB lần lượt tại M và N . Gọi V_1 là thể tích của khối

chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V}$?





A. $\frac{3}{8}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{1}{8}$

Hướng dẫn giải:

Đặt $x = \frac{SM}{SD}$; $y = \frac{SN}{SB}$, ($0 < x, y \leq 1$) khi đó ta có: $V_{SABC} = V_{SADC} = V_{SABD} = V_{SBCD} = \frac{V}{2}$

Ta có:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{V_{SAMPN}}{V} = \frac{V_{SAMP} + V_{SANP}}{V} = \frac{V_{SAMP}}{2V_{SADC}} + \frac{V_{SANP}}{2V_{SABC}} = \frac{1}{2} \left(\frac{SM}{SD} \cdot \frac{SP}{SC} + \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} \right) = \frac{1}{4} (x + y) \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } \frac{V_1}{V} = \frac{V_{SAMPN}}{V} = \frac{V_{SAMN}}{2V_{SABD}} + \frac{V_{SMNP}}{2V_{SBCD}} = \frac{1}{2} \left(xy + \frac{1}{2}xy \right) = \frac{3}{4}xy \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{1}{4}(x + y) = \frac{3}{4}xy \Rightarrow y = \frac{x}{3x - 1} \text{ do } 0 < y \leq 1 \Rightarrow \frac{x}{3x - 1} \leq 1 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Từ (2) suy ra } \frac{V_1}{V} = \frac{3}{4}xy = \frac{3}{4}x \cdot \frac{x}{3x - 1} = \frac{3x^2}{4(3x - 1)} = \frac{3}{4}f(x), \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \right)$$

$$\text{Khảo sát hàm số } y = f(x), \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \right) \Rightarrow \min_{x \in \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \right)} f(x) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{1}{3}$$

Chọn đáp án B.

Câu 16. Nếu một tứ diện chỉ có đúng một cạnh có độ dài lớn hơn 1 thì thể tích tứ diện đó lớn nhất là bao nhiêu?

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{1}{8}$

D. $\frac{5}{8}$

Hướng dẫn giải:

Giả sử tứ diện ABCD có cạnh lớn nhất là AB, suy ra các tam giác ACD và BCD có tất cả các cạnh đều không lớn hơn 1. Các chiều

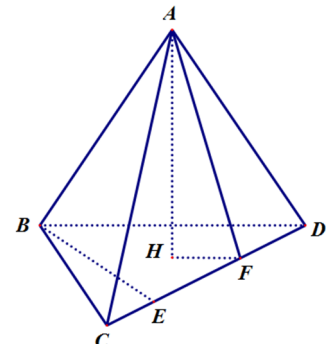
cao AF và BE của chúng không lớn hơn $\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$, trong đó

$$CD = a \leq 1.$$

$$\text{Chiều cao của hình tứ diện } AH \leq AF \leq \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$$

(do tam giác AHF vuông tại H có AF là cạnh huyền)

Thể tích của khối tứ diện là:



$$V = \frac{1}{3} S_{BCD} . AH = \frac{1}{3} . \frac{1}{2} . BE . CD . AH \leq \frac{1}{3} . \frac{1}{2} . a . \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) = \frac{1}{24} a (4 - a^2)$$

Để tìm giá trị lớn nhất của V ta xét biểu thức $a(4 - a^2)$.

Vì $0 \leq a \leq 1$ nên $a(4 - a^2) \leq 3$ và $V \leq \frac{1}{24} a(4 - a^2) \leq \frac{1}{8}$.

Chọn đáp án C.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và góc giữa SC với mặt phẳng (SAB) bằng 30° . Gọi M là điểm di động trên cạnh CD và H là hình chiếu vuông góc của S trên đường thẳng BM . Khi điểm M di động trên cạnh CD thì thể tích của khối chóp $S.ABH$ đạt giá trị lớn nhất bằng?

A. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$

B. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{6}$

D. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$

Hướng dẫn giải:

Ta có góc giữa SC và mặt phẳng (SAB) là $\widehat{CSB} = 30^\circ$

Trong tam giác SBC có $SB = BC \cot 30^\circ = a\sqrt{3}$

Trong tam giác SAB có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$

Thể tích khối chóp $S.ABH$ là: $V_{S.ABH} = \frac{1}{3} S_{ABH} . SA = \frac{1}{3} . \frac{1}{2} HA . HB . a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{6} HA . HB$

Ta có $HA^2 + HB^2 = AB^2 = a^2$ và theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$a^2 = HA^2 + HB^2 \geq 2.HA.HB \Rightarrow HA.HB \leq \frac{a^2}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $HA = HB \Leftrightarrow \widehat{ABM} = 45^\circ \Leftrightarrow M \equiv D$

$$\text{Khi đó } V_{S.ABH} = \frac{a\sqrt{2}}{6} HA.HB \leq \frac{a\sqrt{2}}{6} . \frac{a^2}{2} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

Chọn đáp án D.

Câu 18. Hai hình chóp tam giác đều có chung chiều cao, đỉnh của hình chóp này trùng với tâm của đáy hình chóp kia. Mỗi cạnh bên của hình chóp này đều cắt một cạnh bên của hình chóp kia. Cạnh bên l của hình chóp thứ nhất tạo với đường cao một góc α . Cạnh bên của hình chóp thứ 2 tạo với đường cao một góc β . Tìm thể tích phần chung của hai hình chóp.

A. $V = \frac{l^3 \sqrt{3} \cos^3 \alpha}{4(\cot g \alpha + \cot g \beta)^2}$

B. $V = \frac{l^3 \sqrt{3} \cos^3 \alpha}{2(\cot g \alpha + \cot g \beta)^2}$

C. $V = \frac{l \sqrt{3} \cos^3 \alpha}{2(\cot g \alpha + \cot g \beta)^2}$

D. $V = \frac{l^3 \sqrt{5} \cos \alpha}{4(\cot g \alpha + \cot g \beta)^2}$

Hướng dẫn giải:

Đặt 2 hình chóp tam giác đều là: $O.ABC$ và $O'.A'B'C'$ với O là tâm của tam giác ABC và O' là tâm của tam giác $A'B'C'$.

Theo bài ra thì OO' là đường cao chung của 2 hình chóp.

Đặt D, E, F là các giao điểm của các cặp cạnh bên tương ứng của 2 hình chóp. Phần thể tích chung

của 2 hình chóp là thể tích của khối đa diện $ODEFO'$. Ký hiệu V là thể tích đó thì $V = \frac{1}{3} OO' . S_{\triangle DEF}$

$\Delta OO'C$ vuông tại O' nên $OO' = l \cos \alpha$

Do tính đối xứng nên OO' đi qua tâm I của ΔDEF .

Trong ΔIOE ta có: $OI = IE \cot g \alpha$

Trong $\Delta IO'E$ có: $O'I = IE \cot g \beta$

Suy ra $OO' = IE(\cot g \alpha + \cot g \beta)$

$$\Leftrightarrow IE = \frac{OO'}{\cot g \alpha + \cot g \beta} = \frac{l \cos \alpha}{\cot g \alpha + \cot g \beta}$$

Tam giác DEF đều, đường cao $EJ = \frac{3}{2} EI$

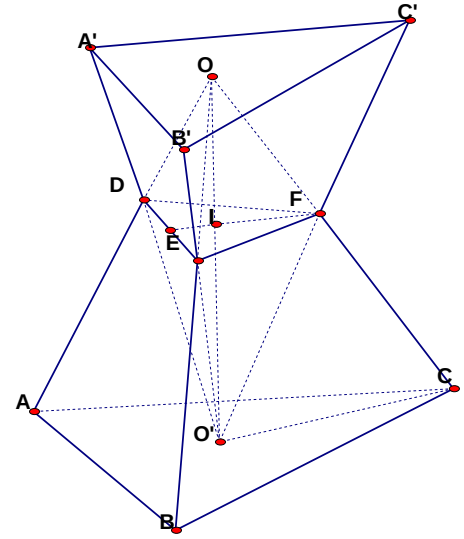
$$\text{Diện tích } S_{\Delta DEF} = \frac{DE^2 \sqrt{3}}{4} \text{ với } DE = \frac{2EJ \sqrt{3}}{3} = EI \sqrt{3}$$

$$\text{Do đó } S_{\Delta DEF} = \frac{3l^2 \sqrt{3} \cos^2 \alpha}{4(\cot g \alpha + \cot g \beta)^2}$$

Vậy thể tích phần chung của 2 hình chóp là:

$$V = \frac{l^3 \sqrt{3} \cos^3 \alpha}{4(\cot g \alpha + \cot g \beta)^2}$$

Chọn đáp án A.



Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là nửa lục giác đều với cạnh a ($a > 0$). Cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. M là một điểm khác B trên SB sao cho $AM \perp MD$. Tính tỉ số $\frac{SM}{SB}$.

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{5}{4}$

Hướng dẫn giải:

Đặt hình chóp vào hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Suy ra ta có: $A = (0; 0; 0)$, $D = (2a; 0; 0)$, $S =$

$(0; 0; a\sqrt{3})$ và

$B = \left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$. Suy ra phương trình của

$$SB \text{ là: } \frac{2x}{a} = \frac{2y}{a\sqrt{3}} = \frac{z - a\sqrt{3}}{-a\sqrt{3}}$$

Gọi $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc cạnh SB , ta có:

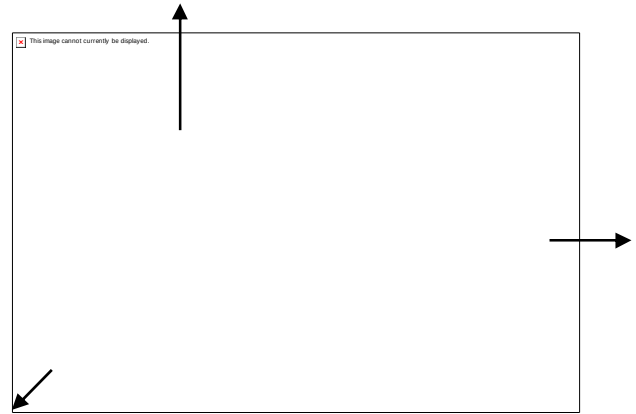
$$\begin{cases} y_0 = \sqrt{3}x_0 \\ z_0 = a\sqrt{3} - 2\sqrt{3}x_0 \end{cases}$$

Mặt khác $AM \perp DN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DM} = 0$

$$\Leftrightarrow x_0^2 - 2ax_0 + y_0^2 + z_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{3a}{8}$$

$$\Leftrightarrow M = \left(\frac{3a}{8}; \frac{3a\sqrt{3}}{8}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow \overrightarrow{SM} = \frac{3}{4} \overrightarrow{SB} \text{ hay } \frac{SM}{SB} = \frac{3}{4}.$$

Chọn đáp án A.



Câu 20. Cho khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB > 1$, các cạnh còn lại có độ dài không lớn hơn 1. Gọi V là thể tích của khối tứ diện. Tìm giá trị lớn nhất của V .

A. $\frac{3}{8}$

B. $\frac{1}{8}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{5}{8}$

Hướng dẫn giải:

Theo giả thiết $\triangle ACD$ và $\triangle BCD$ có tất cả các cạnh không lớn hơn 1.

Đặt $CD = a$ ($0 < a \leq 1$).

Gọi AM, BN lần lượt là chiều cao của $\triangle ACD$ và $\triangle BCD$.

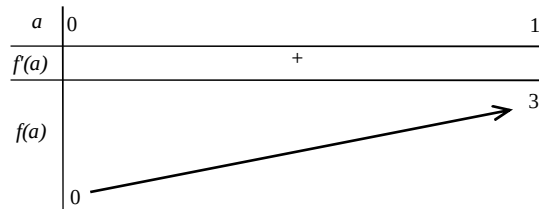
Ta có $AM \leq \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$; $BN \leq \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$.

Gọi AH là chiều cao của tứ diện, ta có $AH \leq AM \leq \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$.

Thể tích của tứ diện $ABCV = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle BCD} \cdot AH = \frac{1}{6} \cdot BN \cdot CD \cdot AH \leq \frac{a}{6} (1 - \frac{a^2}{4})$

Xét $f(a) = a(4 - a^2)$ trên $(0, 1]$. Ta có $f(a)$ liên tục trên $(0, 1]$.

$f'(a) = 4 - 3a^2$, $f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \notin (0; 1]$.



Vậy $\max_{(0,1]} f(a) = f(1) = 3$.

Suy ra $\max V = \frac{1}{8}$ khi $\triangle ACD$ và $\triangle BCD$ là hai tam giác đều cạnh bằng 1, hai mặt phẳng (ACD) và

(BCD) vuông góc với nhau. Khi đó tính được $AB = \frac{\sqrt{6}}{2} > 1$.

Chọn đáp án B.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D' . Tính thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ theo a .

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{20}$

B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{20}$

C. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{10}$

D. $\frac{3\sqrt{5}a^3}{10}$

Hướng dẫn giải:

$BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB'$

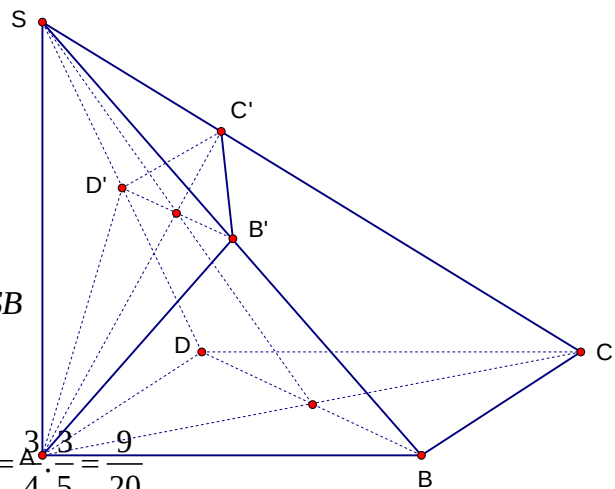
$SC \perp (P) \Rightarrow SC \perp AB' \Rightarrow AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp SB$

Tương tự $AD' \perp SD$

$V_{S.AB'C'D'} = V_{S.AB'C'} + V_{S.AD'C'}$

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{SB' \cdot SB}{SB^2} \cdot \frac{SC' \cdot SC}{SC^2} = \frac{SA^2}{SB^2} \cdot \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$$

(1)



$$\frac{V_{S.AD'C'}}{V_{S.ADC}} = \frac{SD' \cdot SC'}{SD \cdot SC} = \frac{SD' \cdot SD}{SD^2} \cdot \frac{SC' \cdot SC}{SC^2} = \frac{SA^2}{SD^2} \cdot \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20} \quad (2)$$

$$\text{Do } V_{S.ABC} = V_{S.ADC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$$

Cộng (1) và (2) theo vế ta được

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{a^3\sqrt{3}} + \frac{V_{S.AD'C'}}{a^3\sqrt{3}} = \frac{9}{20} + \frac{9}{20} \Leftrightarrow V_{S.AB'C'D'} = \frac{9}{10} \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{20}$$

Chọn đáp án A.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ thỏa mãn $SA = \sqrt{5}, SB = SC = SD = AB = BC = CD = DA = \sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Tính thể tích khối chóp $S.MCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SM, CD .

A. $\sqrt{\frac{15}{23}}$

B. $\sqrt{\frac{5}{23}}$

C. $\sqrt{\frac{15}{29}}$

D. $\sqrt{\frac{13}{23}}$

Hướng dẫn giải:

Ta thấy $ABCD$ là hình thoi, tam giác SBD cân tại S suy ra $BD \perp (SAC)$

Gọi O là giao điểm của AC và BD , ta thấy $\triangle SBD = \triangle ABD = \triangle CBD$ (c.c.c)

Suy ra $OA = OC = OS = \frac{1}{2} \cdot AC$ nên $\triangle SAC$ vuông tại S .

Xét $\triangle SAC$ ta có $AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow OC = \sqrt{2}, OD = \sqrt{CD^2 - OC^2} = 1 \Rightarrow BD = 2$

Thể tích

$$V_{S.CMD} = \frac{1}{4} V_{S.ABCD} = \frac{1}{12} \cdot BD \cdot S_{\triangle SAC} = \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{15}}{12}$$

Gọi N là trung điểm của AD nên $CD \parallel (SMN)$

Suy ra

$$d(CD, SM) = d(CD, (SMN)) = d(C, (SMN)) = \frac{3 \cdot V_{C.SMN}}{S_{\triangle SMN}} (*)$$

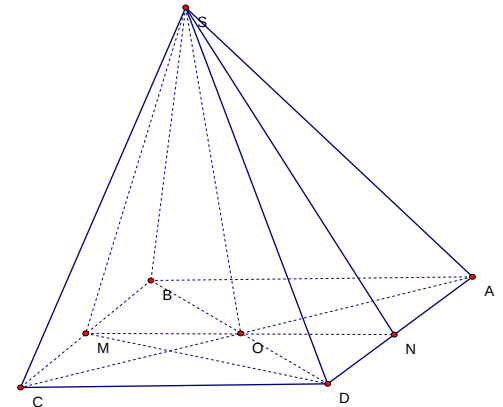
$$\text{Thể tích } V_{C.SMN} = V_{S.MCD} = \frac{\sqrt{15}}{12} \quad (1).$$

Ta có $MN = \sqrt{3}, SM = \frac{3}{2}, SN = \frac{\sqrt{13}}{2}$ (sử dụng công thức đường trung tuyến)

Theo định lý hàm số cosin trong $\triangle SMN$ ta có $\cos \widehat{SMN} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \sin \widehat{SMN} = \frac{\sqrt{23}}{3\sqrt{3}}$

$$\text{Vậy } S_{\triangle SMN} = \frac{1}{2} \cdot SM \cdot MN \cdot \sin \widehat{SMN} = \frac{\sqrt{23}}{4} \quad (2).$$

$$\text{Thay (1), (2) vào (*) ta được } d(CD, SM) = \frac{3 \cdot V_{C.SMN}}{S_{\triangle SMN}} = \frac{\frac{3\sqrt{15}}{12}}{\frac{\sqrt{23}}{4}} = \sqrt{\frac{15}{23}}.$$



Chọn đáp án A.

Câu 23. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Mặt phẳng (P) chứa cạnh BC cắt cạnh AD tại E. Biết góc giữa hai mặt phẳng (P) và (BCD) có số đo là α thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{5\sqrt{2}}{7}$. Gọi thể tích của hai tứ diện ABCE

và tứ diện BCDE lần lượt là V_1 và V_2 . Tính tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{3}{8}$

B. $\frac{1}{8}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{5}{8}$

Hướng dẫn giải:

+) Gọi M là trung điểm BC.

Khi đó $BC \perp (MAD)$ nên $(P) \perp (AMD)$;

$(P) \cap (AMD) = ME$.

Kẻ $AH \perp ME$ thì $AH \perp (BCE)$ (do $AH \subset (AMD)$)

Kẻ $DK \perp ME$ nên $DK \perp (BCE)$ (do $DK \subset (AMD)$).

Hiển nhiên AH song song DK

$$\text{Khi đó } \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_{A.BCE}}{V_{D.BCE}} = \frac{AH}{DK}$$

+) Gọi β là góc giữa (P) và (ABC) ($0 < \beta < \frac{\pi}{2}$).

Hiển nhiên $\widehat{DME} = \alpha$; $\widehat{AME} = \beta$.

Vì $AM = DM$ nên:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{AH}{DK} \Rightarrow \sin \beta = \frac{V_1}{V_2} \cdot \sin \alpha = t \cdot \sin \alpha \quad (1)$$

$$\text{+) Trong tam giác OMA: } \cos(\alpha + \beta) = \frac{MO}{MA} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{3} \quad (2)$$

Từ (1) có: $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - t^2 \cdot \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - t^2 \cdot x}$; với $x = \sin^2 \alpha$.

$$\text{Thay vào (2) ta có: } \sqrt{1 - t^2 x} \cdot \sqrt{1 - x} - t \cdot x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{(1 - t^2 x)(1 - x)} = t \cdot x + \frac{1}{3}.$$

$$\text{+) Giải phương trình có: } x = \frac{8}{(9t^2 + 6t + 9)}.$$

$$\text{Vì } \sin^2 \alpha = x \rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{x}{1 - x} = \frac{8}{9t^2 + 6t + 9} \cdot \frac{9t^2 + 6t + 9}{9t^2 + 6t + 1} = \frac{8}{9t^2 + 6t + 1}$$

$$\text{Theo giả thiết suy ra } \frac{8}{9t^2 + 6t + 1} = \frac{50}{49} \Leftrightarrow 9t^2 + 6t + 1 = \frac{196}{25} \Leftrightarrow 9t^2 + 6t - \frac{171}{25} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{5} \\ t = \frac{-19}{15} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \frac{V_{ABCE}}{V_{DBCE}} = \frac{3}{5}$$

Chọn đáp án C.

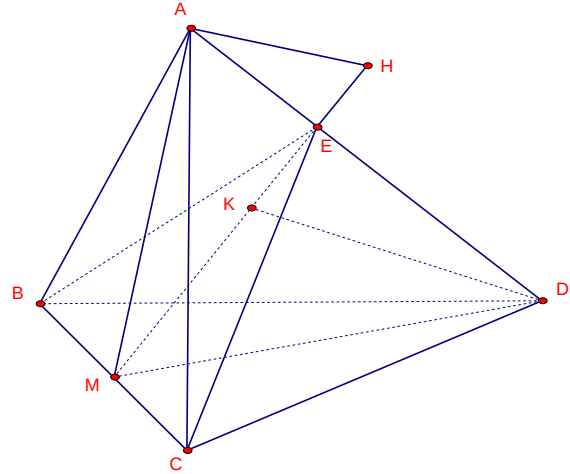
Câu 24. Cho khối chóp S.ABC có $SA = a$, $SB = a\sqrt{2}$, $SC = a\sqrt{3}$. Thể tích lớn nhất của khối chóp là

A. $a^3\sqrt{6}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.



Hướng dẫn giải:

Gọi H là hình chiếu của A lên $(SBC) \Rightarrow V = \frac{1}{3}AH.S_{SBC}$.

Ta có $AH \leq SA$; dấu “=” xảy ra khi $AS \perp (SBC)$.

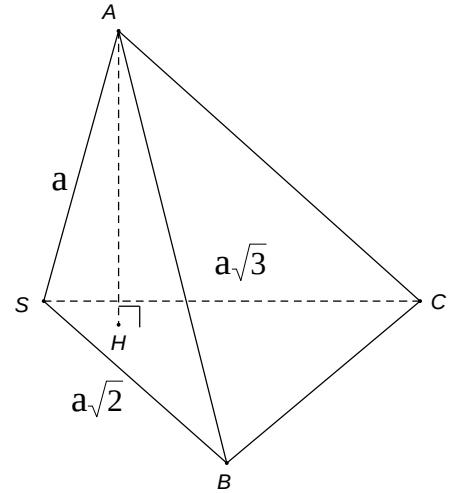
$S_{SBC} = \frac{1}{2}SB.SC.\sin \widehat{SBC} \leq \frac{1}{2}SB.SC$, dấu “=” xảy ra khi $SB \perp SC$.

Khi đó, $V = \frac{1}{3}AH.S_{SBC} \leq \frac{1}{3}AS \cdot \frac{1}{2}SB \cdot SC = \frac{1}{6}SA \cdot SB \cdot SC$.

Dấu “=” xảy ra khi SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau.

Suy ra thể tích lớn nhất của khối chóp là

$$V = \frac{1}{6}SA.SB.SC = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$

**Chọn đáp án D.**

Câu 25. Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân, $AB = AC = a$, $SC \perp (ABC)$ và $SC = a$. Mặt phẳng qua C , vuông góc với SB cắt SA, SB lần lượt tại E và F . Tính thể tích khối chóp $S.CEF$.

A. $V_{SCEF} = \frac{\sqrt{2}a^3}{36}$.

B. $V_{SCEF} = \frac{a^3}{18}$.

C. $V_{SCEF} = \frac{a^3}{36}$.

D. $V_{SCEF} = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}$.

Hướng dẫn giải: Từ C hạ $CF \perp SB, (F \in SB)$, $CE \perp SA, (E \in SA)$

Ta có $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp SC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAC) \Rightarrow AB \perp CE$
 $\Rightarrow CE \perp (SAB) \Rightarrow CE \perp SB$

Vậy mặt phẳng qua C và vuông góc SB là mặt (CEF) .

Ta có $\frac{V_{SCEF}}{V_{SCAB}} = \frac{SE}{SA} \cdot \frac{SF}{SB}$

Tam giác vuông SAC vuông tại C ta có:

$$SA = \sqrt{SC^2 + AC^2} = a\sqrt{2}$$

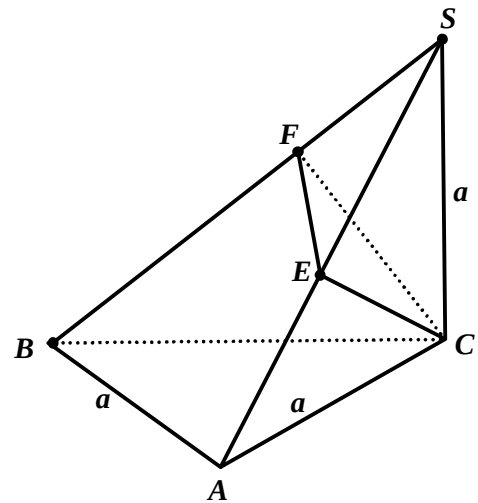
và $\frac{SE}{SA} = \frac{SC^2}{SA^2} = \frac{a^2}{2a^2} \Rightarrow \frac{SE}{SA} = \frac{1}{2}$

Tam giác vuông SBC vuông tại C ta có:

$$SB = \sqrt{SC^2 + BC^2} = a\sqrt{3}$$

và $\frac{SF}{SB} = \frac{SC^2}{SB^2} = \frac{a^2}{3a^2} \Rightarrow \frac{SF}{SB} = \frac{1}{3}$

Do đó $\frac{V_{SCEF}}{V_{SCAB}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{SCEF} = \frac{1}{6}V_{SABC} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}SA.S_{ABC} = \frac{1}{36}a^3$.

Chọn đáp án C.**II – HÌNH LĂNG TRỤ**

Câu 24. Một hình hộp có 6 mặt đều là các hình thoi có góc bằng 60° và cạnh bằng a . Tính thể tích của hình hộp đó.

- A. $\frac{a^3}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$
C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $AB = AD = BD = a$; $AA' = A'B = A'D = a$

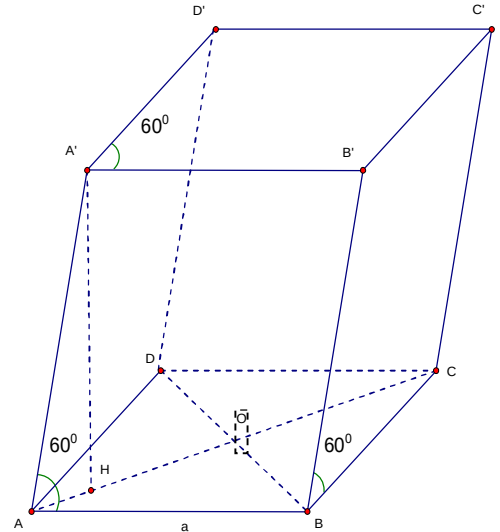
$\Rightarrow A'ABCD$ là tứ diện đều

$\Rightarrow$ Chân đường cao $A'H$ trùng với tâm của $\triangle ABD$

$$\Rightarrow HA = HB = HD = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow A'H^2 = AA'^2 - AH^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} = \frac{6a^2}{9}$$

$$\Rightarrow A'H = \frac{a\sqrt{6}}{3} \text{ Từ đó tìm được } V = \frac{\sqrt{2}a^3}{2}$$



Chọn đáp án B.

Câu 25. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Các điểm E và F lần lượt là trung điểm của $C'B'$ và $C'D'$. Mặt phẳng (AEF) cắt khối lập phương đã cho thành hai phần, gọi V_1 là thể tích khối chứa điểm A' và V_2 là thể tích khối chứa điểm C' . Khi đó $\frac{V_1}{V_2}$ là

- A. $\frac{25}{47}$ B. 1. C. $\frac{17}{25}$ D. $\frac{8}{17}$

Hướng dẫn giải:

Đường thẳng EF cắt $A'D'$ tại N , cắt $A'B'$ tại M , AN cắt DD' tại P , AM cắt BB' tại Q .

Từ đó mặt phẳng (AEF) cắt khối lăng trụ thành

hai khối đó là $ABCD.C'QEPF$ và

$AQEPB'A'D'$.

Gọi $V = V_{ABCD.A'B'C'D'}$, $V_3 = V_{A.A'MN}$,

$V_4 = V_{PFD'N}$, $V_4 = V_{QMB'E}$.

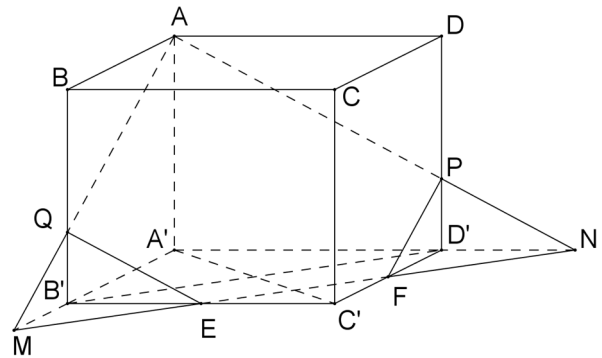
Do tính đối xứng của hình lập phương nên ta có

$V_4 = V_5$.

$$V_3 = \frac{1}{6}AA'.A'M.A'N = \frac{1}{6}a \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3a^3}{8}, V_4 = \frac{1}{6}PD'.D'F.D'N = \frac{1}{6} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{72}$$

$$V_1 = V_3 - 2V_4 = \frac{25a^3}{72}, V_2 = V - V_1 = \frac{47a^3}{72}. \text{ Vậy } \frac{V_1}{V_2} = \frac{25}{47}.$$

Chọn đáp án A.



Câu 26. Cho lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A , $BC=2a$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BB'C)$ bằng 60° . Tính thể tích lăng trụ $ABCA'B'C'$.

A. $a^3\sqrt{2}$

B. $2a^3$

C. $a^3\sqrt{6}$

D. $\sqrt{3}a^3$

Hướng dẫn giải:

Từ A kẻ $AI \perp BC \Rightarrow I$ là trung điểm BC

$AI \perp (BCC'B') \Rightarrow AI \perp B'C$ (1)

Từ I kẻ $IM \perp B'C$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow B'C \perp (IAM)$

Vậy góc giữa $(AB'C)$ và $(B'CB)$ là

$$\widehat{AMI} = 60^\circ$$

Ta có $AI = \frac{1}{2} BC = a$; $IM =$

$$\frac{AI}{\tan 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$BH = 2IM = \frac{2a}{\sqrt{3}};$$

$$\frac{1}{B'B^2} = \frac{1}{BH^2} - \frac{1}{BC^2} = \frac{3}{4a^2} - \frac{1}{4a^2} = \frac{1}{2a^2}$$

Suy ra $BB' = a\sqrt{2}$; $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AI \cdot BC = \frac{1}{2} a \cdot 2a = a^2$

$$V_{ABC A'B'C'} = a\sqrt{2} \cdot a^2 = a^3\sqrt{2}$$

Chọn đáp án A.

Câu 27. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

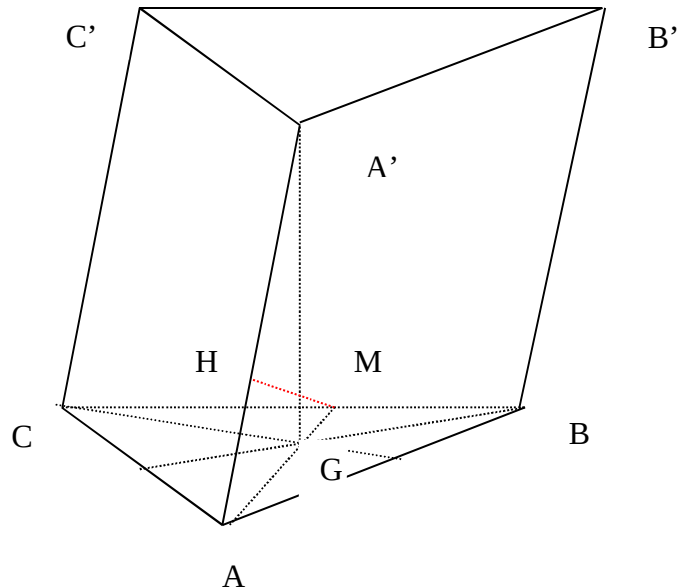
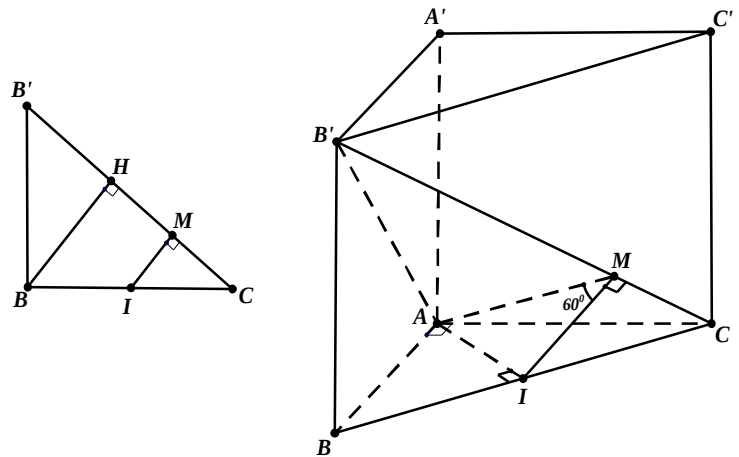
Hướng dẫn giải:

Gọi M là trung điểm BC, dựng MH vuông góc với $A'A$. suy ra

$$MH = d(BC, A'A) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Đặt } AH = x, \text{ ta có } A'A = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{3}}$$

$$\text{Từ } A'A, MH = A'G \cdot AM, \text{ suy ra } x = \frac{a}{3}. \text{ Vậy } V = \frac{a}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

Chọn đáp án A.

Câu 28. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm G của tam giác ABC . Biết khoảng cách giữa

AA' và BC là $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{36}$

Hướng dẫn giải:

Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow BC \perp (A'AM)$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của G, M trên AA'

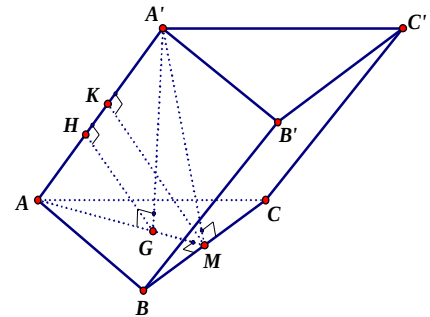
Vậy KM là đoạn vuông góc chung của AA' và BC , do đó $d(AA', BC) = KM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

$$\triangle AGH \sim \triangle AMH \Rightarrow \frac{KM}{GH} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow GH = \frac{2}{3}KM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$\triangle AA'G$ vuông tại G , HG là đường cao, $A'G = \frac{a}{3}$

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'G = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$



Chọn đáp án C.

Câu 29. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt thuộc các cạnh bên AA', CC' sao cho $MA = MA'$ và $NC = 4NC'$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Trong bốn khối tứ diện $GA'B'C'$, $BB'MN$, $ABB'C'$ và $A'BCN$, khối tứ diện nào có thể tích nhỏ nhất?

A. Khối $A'BCN$

B. Khối $GA'B'C'$

C. Khối $ABB'C'$

D. Khối $BB'MN$

Hướng dẫn giải:

+ Nhận thấy khoảng cách từ G và A xuống mặt phẳng $(A'B'C')$ là bằng nhau (do G, A thuộc mặt phẳng $(ABC) \parallel (A'B'C')$)

$$V_{GA'B'C'} = V_{A.A'B'C'}$$

Mà $V_{A.A'B'C'} = V_{ABB'C'}$ (Do 2 hình chóp này có 2 đáy $AA'B'$ và ABB' diện tích bằng nhau; chung đường cao hạ từ C')

$$\Rightarrow V_{GA'B'C'} = V_{ABB'C'}$$

$\Rightarrow$ Không thể khối chóp $GA'B'C'$ hoặc $ABB'C'$ thể tích nhỏ nhất

$\rightarrow$ Loại B, C

+ So sánh Khối $A'BCN$ và Khối $BB'MN$

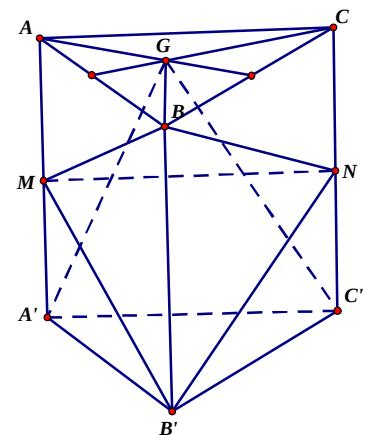
Nhận thấy khoảng cách từ M và A' xuống mặt $BBCC'$ là bằng nhau

$\rightarrow$ Khối $A'BCN$ và Khối $BB'MN$ có đường cao hạ từ M và A' bằng nhau. Mặt khác Diện tích đáy $BNB' >$ Diện tích đáy BCN

$\Rightarrow$ Khối $A'BCN <$ Khối $BB'MN$.

$\Rightarrow$ Khối $A'BCN$ có diện tích nhỏ hơn.

Chọn đáp án A.



Câu 30. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , góc $\widehat{BAC}$ nhọn. Góc giữa AA' và BC' là 30° , khoảng cách giữa AA' và BC' là a . Góc giữa hai mặt bên $(AA'B'B)$ và $(AA'C'C)$ là 60° . Thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

- A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$ D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$

Hướng dẫn giải:

Ta có góc giữa hai mặt bên $(AA'B'B)$ và $(AA'C'C)$ là $\widehat{BAC} = 60^\circ$
 $\Rightarrow \triangle ABC$ đều.

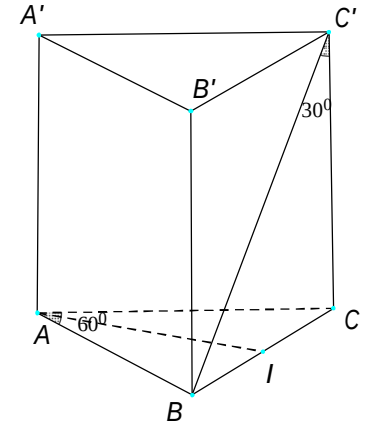
Vì $AA' \parallel CC' \Rightarrow (\widehat{AA'; BC'}) = (\widehat{CC'; BC'}) = \widehat{BC'C} = 30^\circ$

Kẻ $AI \perp BC \Rightarrow AI \perp (BB'C'C)$

$d(AA'; BC') = d(AA'; (BB'C'C)) = AI = a$

$\Rightarrow BC = \frac{2a}{\sqrt{3}}, CC' = \frac{BC}{\tan 30^\circ} = 2a \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

Chọn đáp án A.



Câu 31. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$, có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$.

Lấy M, N lần lượt trên cạnh $AB', A'C$ sao cho $\frac{AM}{AB'} = \frac{A'N}{A'C} = \frac{1}{3}$. Tính thể tích V của khối $BMNC'C$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{108}$ B. $\frac{2a^3\sqrt{6}}{27}$ C. $\frac{3a^3\sqrt{6}}{108}$ D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{27}$

Hướng dẫn giải:

Gọi G, K lần lượt là tâm các hình chữ nhật $ABB'A'$ và $AA'C'C$.

Ta có: $\frac{AM}{AB'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AM}{AG} = \frac{2}{3}$ (Do G trung điểm AB').

Xét tam giác ABA' có AG là trung tuyến và $\frac{AM}{AG} = \frac{2}{3}$. Suy ra

M là trọng tâm tam giác ABA' . Do đó BM đi qua trung điểm I của AA' .

Ta có: $\frac{A'N}{A'C} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{A'N}{A'K} = \frac{2}{3}$ (Do K là trung điểm $A'C$).

Xét tam giác $AA'C'$ có $A'K$ là trung tuyến và $\frac{A'N}{A'K} = \frac{2}{3}$. Suy ra

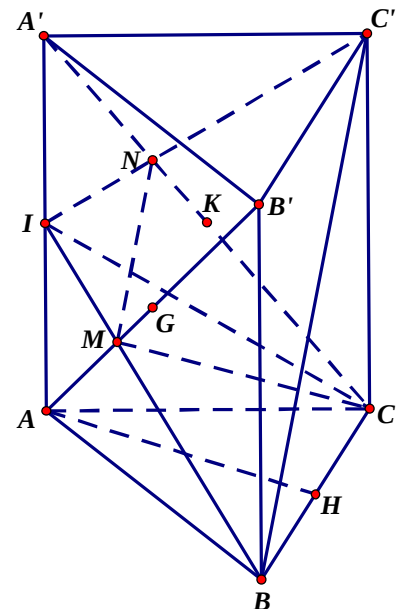
N là trọng tâm của tam giác $AA'C'$. Do đó $C'N$ đi qua trung điểm I của AA' .

Từ M là trọng tâm tam giác ABA' và N là trọng tâm của tam giác $AA'C'$. Suy ra:

$$\frac{IM}{IB} = \frac{IN}{IC'} = \frac{1}{3}.$$

Gọi $V_1; V_2$ lần lượt là thể tích các khối chóp $IMNC; IBCC'$. Ta có:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{IM}{IB} \cdot \frac{IN}{IC'} \cdot \frac{IC}{IC} = \frac{1}{9}. \text{ Mà } V_1 + V = V_2. \text{ Suy ra } V = \frac{8}{9}V_2.$$



Hạ AH vuông góc với BC tại H thuộc BC. Ta được AH vuông góc với mặt phẳng $(BB'C'C)$. AA' song song với mặt phẳng $(BB'C'C)$ nên khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(BB'C'C)$ bằng khoảng

cách từ A đến $(BB'C'C)$ và bằng AH. Ta có: $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$V_2 = \frac{1}{3} d[I; (BB'C'C)] \cdot S_{\Delta BCC'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}. \text{ Suy ra } V = \frac{8}{9} V_2 = \frac{2a^3\sqrt{6}}{27}.$$

Chọn đáp án B.

Câu 32. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có khoảng cách giữa $A'C$ và $C'D'$ là 1 cm. Thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là:

A. 8 cm^3 .

B. $2\sqrt{2} \text{ cm}^3$.

C. $3\sqrt{3} \text{ cm}^3$.

D. 27 cm^3 .

Hướng dẫn giải:

Để tìm khoảng cách giữa $A'C$ và $C'D'$, ta dựng một mặt phẳng chứa $A'C$ và song song với $C'D'$.
Để thấy đó là mặt phẳng $(CA'B')$.

Gọi a là độ dài cạnh của khối lập phương, lúc này ta có:

$$d(C'D', A'C) = d[C'D', (CA'B')] = d[D', (CA'B')]$$

Để tính khoảng cách từ điểm D' đến mặt phẳng $(CA'B')$, ta xét khối tứ diện $D'CA'B'$.

$$V_{D'CA'B'} = \frac{1}{3} \cdot CC' \cdot S_{\Delta B'A'D'} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{6} \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$S_{CA'B'} = \frac{1}{2} \cdot CB' \cdot B'A' = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 \text{ (cm}^2\text{)} \text{ (do tam giác } CA'B' \text{ vuông tại B')}$$

$$\text{Suy ra: } d[D', (CA'B')] = \frac{3V_{D'CA'B'}}{S_{CA'B'}} = \frac{\frac{a^3}{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2} a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a \text{ (cm)} \Rightarrow a = \sqrt{2} \text{ (cm)}.$$

$$\text{Do đó } V = a^3 = 2\sqrt{2} \text{ cm}^3$$

Chọn đáp án B.

Câu 33. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm $A'B'$. Mặt phẳng (P) qua BM đồng thời song song với $B'D'$. Biết mặt phẳng (P) chia khối hộp thành hai khối có thể tích là V_1, V_2 (Trong đó

V_1 là thể tích khối chứa A). Tính tỉ số $F = \frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{7}{17}$.

B. 1.

C. $\frac{17}{25}$.

D. $\frac{8}{17}$.

Hướng dẫn giải:

*Gọi N là trung điểm $A'D'$. Khi đó $(P) \equiv BDNM$.

Thấy $BM \cap DN \cap AA' = I$.

Khi đó: $V_1 = V(A'MNABD)$; $V_2 = V - V_1$. (Với V là thể tích hình hộp)

$$* \text{ Ta có: } \frac{V(A'MN)}{V(AA'B'D')} = \frac{S(AMN)}{S(A'B'D')} = \frac{1}{4}$$

* Mà: $\frac{V(AA'B'D')}{V} = \frac{1}{6}$ nên có: $V(IA'MN) = \frac{1}{24}V$

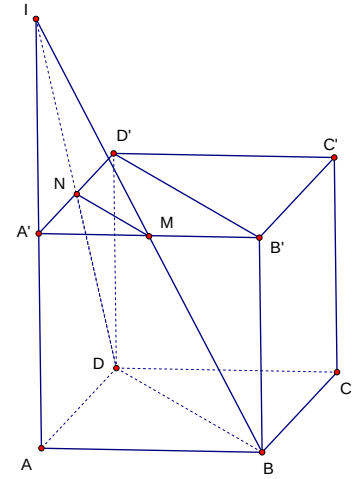
* Lại có: $\frac{V(IA'MN)}{V(IABD)} = \frac{IA' \cdot IM \cdot IN}{IA \cdot IB \cdot ID} = \frac{1}{8}$

* Vậy: $V(IABD) = \frac{1}{3}V$

* Do đó: $V_1 = \frac{1}{3}V - \frac{1}{24}V = \frac{7}{24}V$ nên $V_2 = V - V_1 = \frac{17}{24}V$. Vậy:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{17}$$

Chọn đáp án A.



Câu 34. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AA' và $B'C'$. Mặt phẳng (IJK) chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

A. $\frac{25}{47}$.

B. 1.

C. $\frac{49}{95}$.

D. $\frac{8}{17}$.

Hướng dẫn giải:

Chứng minh $EI = IJ = JF$. Từ đó suy ra

$$\frac{EB}{EB'} = \frac{EM}{EK} = \frac{FA'}{FB'} = \frac{1}{3}. \text{ Lại từ đó suy ra } \frac{FN}{FK} = \frac{1}{2}.$$

Ta có: $d(K, A'B') = (1/2)d(C', A'B')$, $FB' = (3/2)A'B'$. Suy ra $S_{KFB'} = (3/4)S_{A'B'C'}$.

Mặt khác vì $\frac{EB}{EB'} = \frac{1}{3}$ nên suy ra $d(E, (KFB')) = (3/2)h$ (h là chiều cao lăng trụ).

Do đó $V_{EKFB'} = (3/8)V$ (V là thể tích lăng trụ).

$$\frac{V_{EBIM}}{V_{EB'FK}} = \frac{EI}{EF} \cdot \frac{EM}{EK} \cdot \frac{EB}{EB'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27} \text{ nên } V_{EBIM} = \frac{1}{27} \cdot \frac{3}{8}V = \frac{1}{72}V.$$

$$\frac{V_{FA'JN}}{V_{FB'EK}} = \frac{FJ}{FE} \cdot \frac{FA'}{FB'} \cdot \frac{FN}{FK} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18} \text{ nên } V_{FA'JN} = \frac{1}{18} \cdot \frac{3}{8}V = \frac{1}{48}V.$$

Mặt phẳng (IJK) chia khối lăng trụ thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích phần chứa điểm B' và V_2 là thể tích phần chứa điểm C .

Ta có $V_1 = (3/8 - 1/72 - 1/48)V = (49/144)V$ nên $V_2 = (95/144)V$.

$$\text{Do đó } V_1/V_2 = \frac{49}{95}.$$

Chọn đáp án C.

Câu 35. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Biết khoảng cách giữa hai đường

thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Hướng dẫn giải:

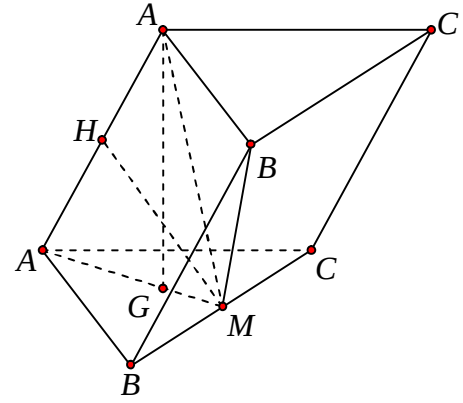
M là trung điểm của BC thì $BC \perp (AA'M)$.

Gọi MH là đường cao của tam giác $A'M$ thì
 $MH \perp A'A$ và $HM \perp BC$ nên HM là khoảng cách
 AA' và BC .

$$\text{Ta có } A'A.HM = A'G.AM \Leftrightarrow \frac{a\sqrt{3}}{4}.A'A = \frac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{A'A^2 - \frac{a^2}{3}}$$

$$\text{Đường cao của lăng trụ là } A'G = \sqrt{\frac{4a^2}{9} - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a}{3}.$$

$$\text{Thể tích } V_{LT} = \frac{a}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$



Chọn đáp án B.

Câu 36. Cho hình lăng trụ có tất cả các cạnh đều bằng a , đáy là lục giác đều, góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy là 60° . Tính thể tích khối lăng trụ

A. $V = \frac{27}{8}a^3$.

B. $V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^3$.

C. $V = \frac{3}{2}a^3$.

D. $\frac{9}{4}a^3$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $ABCDEF$ là lục giác đều nên góc ở đỉnh bằng 120° .

ABC là tam giác cân tại B , DEF là tam giác cân tại E .

$$S_{ABC} = S_{DEF} = \frac{1}{2}a.a.\sin 120^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC.\cos B}$$

$$= \sqrt{a^2 + a^2 - 2.a.a.\left(-\frac{1}{2}\right)} = a\sqrt{3}$$

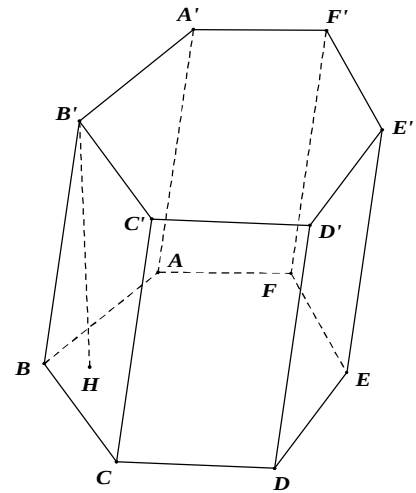
$$S_{ACDF} = AC.AF = a\sqrt{3}.a = a^2\sqrt{3}$$

$$S_{ABCDEF} = S_{ABC} + S_{ACDF} + S_{DEF} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + a^2\sqrt{3} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\widehat{B'BH} = 60^\circ \Rightarrow B'H = BB' \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$V = B'H \cdot S_{ABCDEF} = a\sqrt{3} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9}{4}a^3$$

Chọn đáp án D.



MŨ - LÔ GARIT

Câu 1. Cho phương trình $5^{x^2+2mx+2} - 5^{2x^2+4mx+2} - x^2 - 2mx - m = 0$. Tìm m để phương trình vô nghiệm?

A. $m > 0$ B. $m < 1$ C. $0 < m < 1$ D. $\begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

+Phương trình tương đương: $5^{x^2+2mx+2} + (x^2 + 2mx + 2) = 5^{2x^2+4mx+2} + (2x^2 + 4mx + 2)$

+ Do hàm $f(t) = 5^t + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên ta có: $(x^2 + 2mx + 2) = (2x^2 + 4mx + 2)$

+ Từ đó điều kiện để pt vô nghiệm là **C**.

Chọn đáp án C.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt:

$$\log_3(1-x^2) + \log_{\frac{1}{3}}(x+m-4) = 0.$$

A. $\frac{-1}{4} < m < 0$.B. $5 \leq m \leq \frac{21}{4}$.C. $5 < m < \frac{21}{4}$.D. $\frac{-1}{4} \leq m \leq 2$.

Hướng dẫn giải:

$$\log_3(1-x^2) + \log_{\frac{1}{3}}(x+m-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2 > 0 \\ \log_3(1-x^2) = \log_3(x+m-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1;1) \\ 1-x^2 = x+m-4 \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x) = x^2 + x + m - 5 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\in (-1;1)$

Cách 1: Dùng định lí về dấu tam thức bậc hai.

Để thỏa yêu cầu bài toán ta phải có phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm thỏa: $-1 < x_1 < x_2 < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a.f(-1) > 0 \\ a.f(1) > 0 \\ \Delta > 0 \\ -1 < \frac{S}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-5 > 0 \\ m-3 > 0 \\ 21-4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 5 < m < \frac{21}{4}.$$

Cách 2: Dùng đạo hàm

Xét hàm số $f(x) = x^2 + x - 5 \Rightarrow f'(x) = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

Có $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{21}{4}$; $f(1) = -3$; $f(-1) = -5$

Ta có bảng biến thiên

x	-1	$-\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	-5	$-\frac{21}{4}$	-3

Dựa vào bảng biến thiên, để có hai nghiệm phân biệt trong khoảng $(-1;1)$ khi

$$-\frac{21}{4} < -m < -5 \Rightarrow \frac{21}{4} > m > 5.$$

Cách 3: Dùng MTCT

Sau khi đưa về phương trình $x^2 + x + m - 5 = 0$, ta nhập phương trình vào máy tính.

* Giải khi $m = -0,2$: không thỏa $\Rightarrow$ loại **A, D**.

* Giải khi $m = 5$: không thỏa $\Rightarrow$ loại **B**.

Chọn đáp án C.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho bất phương trình sau có tập nghiệm là $(-\infty; 0]$:

$$m2^{x+1} + (2m+1)(3-\sqrt{5})^x + (3+\sqrt{5})^x < 0.$$

A. $m \leq -\frac{1}{2}$.

B. $m \leq \frac{1}{2}$.

C. $m < \frac{1}{2}$.

D. $m < -\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Phương trình đã cho tương đương

$$2m + (2m+1)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x < 0 \quad (1). \text{ Đặt } t = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x > 0 \text{ ta được:}$$

$$2m + (2m+1)\frac{1}{t} + t < 0 \Leftrightarrow f(t) = t^2 + 2mt + 2m + 1 < 0 \quad (2). \text{ Bất phương trình (1) nghiệm đúng}$$

$\forall x \leq 0$ nên bất phương trình (2) có nghiệm $0 < t \leq 1$, suy ra phương trình $f(t) = 0$ có 2 nghiệm

$$t_1, t_2 \text{ thỏa } t_1 \leq 0 < 1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) \leq 0 \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 \leq 0 \\ 4m+2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -0,5 \\ m < -0,5 \end{cases}. \text{ Vậy } m < -\frac{1}{2} \text{ thỏa mãn}$$

Chọn đáp án C.

Câu 4. Tính giá trị của biểu thức $P = \ln(\tan 1^\circ) + \ln(\tan 2^\circ) + \ln(\tan 3^\circ) + \dots + \ln(\tan 89^\circ)$.

A. $P = 1$.

B. $P = \frac{1}{2}$.

C. $P = 0$.

D. $P = 2$.

Hướng dẫn giải:

$$P = \ln(\tan 1^\circ) + \ln(\tan 2^\circ) + \ln(\tan 3^\circ) + \dots + \ln(\tan 89^\circ)$$

$$= \ln(\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ)$$

$$= \ln(\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \dots \tan 45^\circ \cdot \cot 44^\circ \cdot \cot 43^\circ \dots \cot 1^\circ)$$

$$= \ln(\tan 45^\circ) = \ln 1 = 0. (\text{vì } \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1)$$

Chọn đáp án C.

Câu 5. Cho phương trình: $m \cdot 2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2 \cdot 2^{6-5x} + m \quad (1)$. Tìm m để PT có 4 nghiệm phân biệt.

A. $-\frac{1}{4} < m < 0$.

B. $5 \leq m \leq \frac{21}{4}$.

C. $\begin{cases} 0 < m < 2. \\ m \neq \frac{1}{8}, m \neq \frac{1}{256} \end{cases}$

D. $-\frac{1}{4} \leq m \leq 2$.

Hướng dẫn giải:

Viết lại PT (1) dưới dạng:

$$m \cdot 2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2 \cdot 2^{6-5x} + m \Leftrightarrow m \cdot 2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2^{(x^2-5x+6)+(1-x^2)} + m$$

$$\Leftrightarrow m \cdot 2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2^{x^2-5x+6} \cdot 2^{1-x^2} + m$$

Đặt : $\begin{cases} u = 2^{x^2-5x+6} \\ v = 2^{1-x^2} \end{cases}$, $u, v > 0$. Khi đó PT tương đương với :

$$mu + v = uv + m \Leftrightarrow (u-1)(v-m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2-5x+6} = 1 \\ 2^{1-x^2} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=2 \\ 2^{1-x^2} = m(*) \end{cases}$$

Đề (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2 và 3.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 1-x^2 = \log_2 m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ x^2 = 1 - \log_2 m \end{cases}. \text{ Khi đó điều kiện là :}$$

$$\begin{cases} m > 0 \\ 1 - \log_2 m > 0 \\ 1 - \log_2 m \neq 4 \\ 1 - \log_2 m \neq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 2 \\ m \neq \frac{1}{8} \\ m \neq \frac{1}{256} \end{cases} \Leftrightarrow m \in (0; 2) \setminus \left\{ \frac{1}{8}; \frac{1}{256} \right\}$$

Vậy với $m \in (0; 2) \setminus \left\{ \frac{1}{8}; \frac{1}{256} \right\}$ thỏa điều kiện đề bài.

Chọn đáp án C.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\log_3^2 x - (m+2) \cdot \log_3 x + 3m - 1 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 = 27$

A. $m = \frac{4}{3}$

B. $m = 25$

C. $m = \frac{28}{3}$

D. $m = 1$

Hướng dẫn giải:

$$(\log_3 x)^2 - (m+2) \cdot \log_3 x + 3m - 1 = 0(1)$$

Đặt $\log_3 x = t$

$$\text{Phương trình trở thành: } t^2 - (m+2)t + 3m - 1 = 0(2)$$

Phương trình (1) nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 - 4(3m-1) = m^2 - 8m + 8 > 0 \text{ (đúng)}$$

Gọi t_1, t_2 là 2 nghiệm của phương trình (2)

$$\Rightarrow x_1 = 3^{t_1}, x_2 = 3^{t_2} \Rightarrow 3^{t_1} 3^{t_2} = 27 \Leftrightarrow t_1 + t_2 = 3$$

Theo Vi-et: $t_1 + t_2 = m + 2$. Suy ra $m = 1$

Chọn đáp án D.

Câu 7. Trong tất cả các cặp $(x; y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) \geq 1$. Tìm m để tồn tại duy nhất cặp $(x; y)$ sao cho $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0$.

A. $(\sqrt{10} - \sqrt{2})^2$.

B. $\sqrt{10} - \sqrt{2}$ và $\sqrt{10} + \sqrt{2}$.

C. $(\sqrt{10} - \sqrt{2})^2$ và $(\sqrt{10} + \sqrt{2})^2$.

D. $\sqrt{10} - \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) \geq 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 \leq 0 \quad (1)$.

Giả sử $M(x; y)$ thỏa mãn pt (1), khi đó tập hợp điểm M là hình tròn (C_1) tâm $I(2; 2)$ bán kính $R_1 = \sqrt{2}$.

Các đáp án đề cho đều ứng với $m > 0$. Nên dễ thấy $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0$ là phương trình đường tròn (C_2) tâm $J(-1; 1)$ bán kính $R_2 = \sqrt{m}$.

Vậy để tồn tại duy nhất cặp $(x; y)$ thỏa đề khi chỉ khi (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài

$$\Leftrightarrow IJ = R_1 + R_2 \Leftrightarrow \sqrt{10} = \sqrt{m} + \sqrt{2} \Leftrightarrow m = (\sqrt{10} - \sqrt{2})^2.$$

Chọn đáp án A.

Câu 8. Cho n là số nguyên dương, tìm n sao cho

$$\log_a 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{a}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \dots + n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 1008^2 \times 2017^2 \log_a 2019$$

A. $n=2017$

B. $n=2018$

C. $n=2019$

D. $n=2016$

Hướng dẫn giải:

$$\log_a 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{a}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \dots + n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 1008^2 \times 2017^2 \log_a 2019$$

$$\Leftrightarrow \log_a 2019 + 2^3 \log_a 2019 + 3^3 \log_a 2019 + \dots + n^3 \log_a 2019 = 1008^2 \times 2017^2 \log_a 2019$$

$$\Leftrightarrow (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) \log_a 2019 = 1008^2 \times 2017^2 \log_a 2019$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \left(\frac{2016 \cdot 2017}{2} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow n = 2017$$

Chọn đáp án A.

Câu 9. Phương trình $\log_{\sqrt{2}}(mx - 6x^3) + 2\log_{\frac{1}{2}}(-14x^2 + 29x - 2) = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt khi:

A. $m < 19$

B. $m > 39$

C. $19 < m < \frac{39}{2}$

D. $19 < m < 39$

Hướng dẫn giải:

$$\log_{\sqrt{2}}(mx - 6x^3) + 2\log_{\frac{1}{2}}(-14x^2 + 29x - 2) = 0 \Leftrightarrow \log_2(mx - 6x^3) - \log_2(-14x^2 + 29x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow mx - 6x^3 = -14x^2 + 29x - 2 \Leftrightarrow m = \frac{6x^3 - 14x^2 + 29x - 2}{x}$$

$$f(x) = \frac{6x^3 - 14x^2 + 29x - 2}{x} \Leftrightarrow f'(x) = 12x - 14 + \frac{2}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow f(1) = 19 \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{39}{2} \\ x = -\frac{1}{3} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{121}{3} \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên suy ra đáp án

Chọn đáp án C.

Câu 10. Biết phương trình $\log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$ có nghiệm duy nhất $x = a + b\sqrt{2}$ trong đó a, b là các số nguyên. Tính $a + b$?

A. 5

B. -1

C. 1

D. 2

Hướng dẫn giải:

$$\log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \Leftrightarrow \log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{Đk: } \begin{cases} x > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \log_5 (2\sqrt{x}+1) - \log_5 x = \log_3 (x-1)^2 - \log_3 4x$$

$$\Leftrightarrow \log_5 (2\sqrt{x}+1) + \log_3 4x = \log_5 x + \log_3 (x-1)^2 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = 2\sqrt{x}+1 \Rightarrow 4x = (t-1)^2$$

$$(1) \text{ có dạng } \log_5 t + \log_3 (t-1)^2 = \log_5 x + \log_3 (x-1)^2 \quad (2)$$

$$\text{Xét } f(y) = \log_5 y + \log_3 (y-1)^2, \text{ do } x > 1 \Rightarrow t > 3 \Rightarrow y > 1.$$

$$\text{Xét } y > 1: f'(y) = \frac{1}{y \ln 5} + \frac{1}{(y-1)^2 \ln 3} \cdot 2(y-1) > 0$$

$$\Rightarrow f(y) \text{ là hàm đồng biến trên miền } (1; +\infty)$$

$$(2) \text{ có dạng } f(t) = f(x) \Leftrightarrow t = x \Leftrightarrow x = 2\sqrt{x}+1 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 + \sqrt{2} \\ \sqrt{x} = 1 - \sqrt{2} \end{cases} \quad (\text{vn}) \Leftrightarrow x = 3 + 2\sqrt{2} \text{ (tm)}.$$

Chọn đáp án C.

Câu 11. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm : $\log_4 (x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8 (4+x)^3$

A. 1 nghiệm

B. 2 nghiệm

C. 3 nghiệm

D. Vô nghiệm

Hướng dẫn giải:

$$\log_4 (x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8 (4+x)^3 \quad (2) \text{ Điều kiện: } \begin{cases} x+1 \neq 0 \\ 4-x > 0 \\ 4+x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 4 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \log_2 |x+1| + 2 = \log_2 (4-x) + \log_2 (4+x) \Leftrightarrow \log_2 |x+1| + 2 = \log_2 (16-x^2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 4|x+1| = \log_2 (16-x^2) \Leftrightarrow 4|x+1| = 16-x^2$$

$$+ \text{ Với } -1 < x < 4 \text{ ta có phương trình } x^2 + 4x - 12 = 0 \text{ (3); (3) } \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -6 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } -4 < x < -1 \text{ ta có phương trình } x^2 - 4x - 20 = 0 \text{ (4); (4) } \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{24} \\ x = 2 + \sqrt{24} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 2$ hoặc $x = 2(1 - \sqrt{6})$,

Chọn đáp án B.

Câu 12. Cho phương trình $(2-m^2)5^x - 3.3^x + m^2(15x-5) = 0$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình có nghiệm trong khoảng $(0; 2)$.

A. $\mathbb{R}$

B. $(-2; 3)$

C. $(0; +\infty)$

D. $(-\infty; 1)$

Hướng dẫn giải:

Đặt $f(x) = (2-m^2)5^x - 3.3^x + m^2(15x-5)$. Do f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên f cũng liên tục trên đoạn $[0; 2]$.

Ta có $f(0) = (2-m^2)5^0 - 3.3^0 + m^2(15.0-5) = -6m^2 - 1 < 0, \forall m$.

$f(2) = (2-m^2)5^2 - 3.3^2 + m^2(15.2-5) = 13 > 0$.

Khi đó $f(0).f(2) < 0, \forall m$.

Vậy $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(0; 2)$ với mọi giá trị thực của m .

Chọn đáp án A.

Câu 13. Phương trình $\log_3(x^2 + x + 1) = x(2-x) + \log_3 x$ có bao nhiêu nghiệm

A. 1 nghiệm

B. 2 nghiệm

C. 3 nghiệm

D. Vô nghiệm

Hướng dẫn giải:

điều kiện $x > 0$

Phương trình tương đương với $\log_3 \left(\frac{x^2 + x + 1}{x} \right) = 2x - x^2$

Ta có $2x - x^2 = 1 - (x-1)^2 \leq 1$

Và $\log_3 \left(\frac{x^2 + x + 1}{x} \right) = \log_3 \left(x + \frac{1}{x} + 1 \right) = \log_3 \left(\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 + 3 \right) \geq \log_3 3 = 1$

Do đó $\log_3 \left(\frac{x^2 + x + 1}{x} \right) = 2x - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Chọn đáp án A.

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}, x \in \mathbb{R}$. Tính $P = f(\sin^2 10^\circ) + f(\sin^2 20^\circ) + \dots + f(\sin^2 80^\circ)$

A. 4

B. 8

C. 9

D. 3

Hướng dẫn giải:

Nếu $a+b=1$ thì $f(a)+f(b)=1$. Do đó $P=1+1+1+1=4$

Chọn đáp án A.

Câu 15. Phương trình $3^{3+3x} + 3^{3-3x} + 3^{4+x} + 3^{4-x} = 10^3$ có tổng các nghiệm là ?

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải:

$$3^{3+3x} + 3^{3-3x} + 3^{4+x} + 3^{4-x} = 10^3 \quad (7)$$

$$(7) \Leftrightarrow 27 \cdot 3^{3x} + \frac{27}{3^{3x}} + 81 \cdot 3^x + \frac{81}{3^x} = 10^3 \Leftrightarrow 27 \cdot \left(3^{3x} + \frac{1}{3^{3x}} \right) + 81 \cdot \left(3^x + \frac{1}{3^x} \right) = 10^3 \quad (7')$$

$$\text{Đặt } t = 3^x + \frac{1}{3^x} \stackrel{\text{Cosi}}{\geq} 2\sqrt{3^x \cdot \frac{1}{3^x}} = 2$$

$$\Rightarrow t^3 = \left(3^x + \frac{1}{3^x} \right)^3 = 3^{3x} + 3 \cdot 3^{2x} \cdot \frac{1}{3^x} + 3 \cdot 3^x \cdot \frac{1}{3^{2x}} + \frac{1}{3^{3x}} \Leftrightarrow 3^{3x} + \frac{1}{3^{3x}} = t^3 - 3t$$

$$\text{Khi đó: } (7') \Leftrightarrow 27(t^3 - 3t) + 81t = 10^3 \Leftrightarrow t^3 = \frac{10^3}{27} \Leftrightarrow t = \frac{10}{3} > 2 \quad (N)$$

$$\text{Với } t = \frac{10}{3} \Rightarrow 3^x + \frac{1}{3^x} = \frac{10}{3} \quad (7'')$$

$$\text{Đặt } y = 3^x > 0. \text{ Khi đó: } (7'') \Leftrightarrow y + \frac{1}{y} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3y^2 - 10y + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 & (N) \\ y = \frac{1}{3} & (N) \end{cases}$$

$$\text{Với } y = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow \boxed{x=1}$$

$$\text{Với } y = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \boxed{x=-1}$$

Chọn đáp án A.

Câu 16. Gọi $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $(\sqrt{5}-1)^x + (\sqrt{5}+1)^x = 5 \cdot 2^{x-1}$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?

A. $(x_1, +\infty) \cap (-1, 1) = (-1, 1)$

B. $(x_2, +\infty) \cap (-1, 1) = (-1, 1)$

C. $(x_1, x_2) \cap (-1, 0) = (-1, 0)$

D. $(x_1, x_2) \cap (-1, 1) = (-1, 1)$

Hướng dẫn giải:

$$(\sqrt{5}-1)^x + (\sqrt{5}+1)^x = 5 \cdot 2^{x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^x + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^x = \frac{5}{2}(1).$$

$$\text{Nhận xét: } \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^x \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^x = 1^x = 1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^x = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{-x}$$

$$+ \text{Đặt } t = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^x > 0, (1) \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \Rightarrow x_1 = \log_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} 2, x_2 = \log_{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \frac{1}{2}.$$

Câu 17. Phương trình $\sqrt{1+\log_9 x} - \sqrt{3\log_9 x} = \log_3 x - 1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên ?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Hướng dẫn giải:

Giải phương trình: $\sqrt{1+\log_9 x} - \sqrt{3\log_9 x} = \log_3 x - 1$. Điều kiện xác định: $x \geq 1$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\log_9 x} - \sqrt{3\log_9 x} &= \log_3 x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+\log_9 x} - \sqrt{3\log_9 x} = 2\log_9 x - 1 \\ \Leftrightarrow 1 - 2\log_9 x &= (2\log_9 x - 1)(\sqrt{1+\log_9 x} + 3\sqrt{\log_9 x}) \Leftrightarrow \\ (2\log_9 x - 1)(\sqrt{1+\log_9 x} + 3\sqrt{\log_9 x} + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\log_9 x = 1 &\text{ vì: } \sqrt{1+\log_9 x} + \sqrt{3\log_9 x} + 1 > 0 \Leftrightarrow x = 3. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm phương trình đã cho: $x = 3$.

Chọn đáp án B.

Câu 18. Tìm m để bất phương trình $1 + \log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m)$ thỏa mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $-1 < m \leq 0$.

B. $-1 < m < 0$.

C. $2 < m \leq 3$.

D. $2 < m < 3$.

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} \text{BPT thỏa mãn với mọi } x \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + 4x + m > 0 \\ 5(x^2 + 1) \geq mx^2 + 4x + m \end{cases} (\forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \\ \begin{cases} mx^2 + 4x + m > 0 \\ (5-m)x^2 - 4x + 5-m \geq 0 \end{cases} (\forall x \in \mathbb{R}) &\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 16 - 4m^2 < 0 \\ 5 - m > 0 \\ 16 - 4(5-m)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \\ m > 2 \\ m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 3. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C.

Câu 19. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $2^x = 3^y = 6^{-z}$. Giá trị biểu thức $M = xy + yz + xz$ là:

A. 0

B. 1

C. 6

D. 3

Hướng dẫn giải:

Khi một trong ba số x, y, z bằng 0 thì các số còn lại bằng 0. Khi đó $M=0$

Khi $x, y, z \neq 0$ ta đặt $2^x = 3^y = 6^{-z} = k$ suy ra $2 = k^{\frac{1}{x}}, 3 = k^{\frac{1}{y}}, 6 = k^{-\frac{1}{z}}$.

Do $2.3=6$ nên $k^{\frac{1}{x}}.k^{\frac{1}{y}} = k^{-\frac{1}{z}}$ hay $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{z}$

Từ đó suy ra $M=0$

Chọn đáp án A.

Câu 20. Cho $a \log_6 3 + b \log_6 2 + c \log_6 5 = 5$, với a, b và c là các số hữu tỷ. Các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng?

A. $a = b$

B. $a > b$

C. $b > a$

D. $c > a > b$

Hướng dẫn giải:

$$\Leftrightarrow \log_6 3^a 2^b 5^c = 5$$

$$\Leftrightarrow 3^a \cdot 2^b \cdot 5^c = 6^5 = 3^5 \cdot 2^5 \cdot 5^0$$

Do a, b, c là các số hữu tỷ nên $\begin{cases} a = b = 5 \\ c = 0 \end{cases}$

Chọn đáp án A.

Câu 21. Với $a > 0, a \neq 1$, cho biết: $t = a^{\frac{1}{1-\log_a u}}$; $v = a^{\frac{1}{1-\log_a t}}$. Chọn khẳng định đúng:

A. $u = a^{\frac{-1}{1-\log_a v}}$

B. $u = a^{\frac{1}{1+\log_a t}}$

C. $u = a^{\frac{1}{1+\log_a v}}$

D. $u = a^{\frac{1}{1-\log_a v}}$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Từ giả thiết suy ra: } \log_a t = \frac{1}{1-\log_a u} \cdot \log_a a = \frac{1}{1-\log_a u}$$

$$\log_a v = \frac{1}{1-\log_a t} \cdot \log_a a = \frac{1}{1-\log_a t} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-\log_a u}} = \frac{1-\log_a u}{-\log_a u}$$

$$\Leftrightarrow -\log_a v \log_a u = 1 - \log_a u \Leftrightarrow \log_a u (1 - \log_a v) = 1 \Leftrightarrow \log_a u = \frac{1}{1 - \log_a v} \Leftrightarrow u = a^{\frac{1}{1 - \log_a v}}$$

Chọn đáp án D.

Câu 22. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $m \cdot 2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2 \cdot 2^{6-5x} + m$ có 3 nghiệm phân biệt.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Hướng dẫn giải:

$$Pt \Leftrightarrow m(2^{x^2-5x-6} - 1) + 2^{1-x^2}(1 - 2^{x^2-5x-6}) \Leftrightarrow (2^{x^2-5x-6} - 1)(m - 2^{1-x^2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2-5x+6} - 2 = 0 \\ 2^{1-x^2} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \\ 2^{1-x^2} = m \end{cases} (*)$$

TH1: (*) có nghiệm duy nhất (nghiệm $x=0$) $\Rightarrow m = 2$.

TH2: (*) Có 2 nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm là 2 và nghiệm còn lại khác 3

$$\Rightarrow m = 2^{-3}.$$

TH3: (*) Có 2 nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm là 3 và nghiệm còn lại khác 2

$$\Rightarrow m = 2^{-8}.$$

Vậy, có 3 giá trị của m thỏa mãn.

Chọn đáp án C.

Câu 23. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} = m(\log_4 x^2 - 3)$ có nghiệm thuộc $[32; +\infty)$?

A. $m \in (1; \sqrt{3}]$.

B. $m \in [1; \sqrt{3})$.

C. $m \in [-1; \sqrt{3})$.

D. $m \in (-\sqrt{3}; 1]$.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $x > 0$. Khi đó phương trình tương đương: $\sqrt{\log_2^2 x - 2 \log_2 x - 3} = m(\log_2 x - 3)$.

Đặt $t = \log_2 x$ với $x \geq 32 \Rightarrow \log_2 x \geq \log_2 32 = 5$ hay $t \geq 5$.

Phương trình có dạng $\sqrt{t^2 - 2t - 3} = m(t - 3)$ (*).

Khi đó bài toán được phát biểu lại là: "Tìm m để phương trình (*) có nghiệm $t \geq 5$ "

Với $t \geq 5$ thì (*) $\Leftrightarrow \sqrt{(t-3)(t+1)} = m(t-3) \Leftrightarrow \sqrt{t-3}(\sqrt{t+1} - m\sqrt{t-3}) = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t+1} - m\sqrt{t-3} = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt{\frac{t+1}{t-3}}$$

Ta có $\frac{t+1}{t-3} = 1 + \frac{4}{t-3}$. Với $t \geq 5 \Rightarrow 1 < 1 + \frac{4}{t-3} \leq 1 + \frac{4}{5-3} = 3$ hay

$$1 < \frac{t+1}{t-3} \leq 3 \Rightarrow 1 < \sqrt{\frac{t+1}{t-3}} \leq \sqrt{3}$$

suy ra $1 < m \leq \sqrt{3}$. Vậy phương trình có nghiệm với $1 < m \leq \sqrt{3}$.

Chọn đáp án A.

Câu 24. Tập các giá trị của m để bất phương trình $\frac{\log_2^2 x}{\sqrt{\log_2^2 x - 1}} \geq m$ nghiệm đúng với mọi $x > 0$ bằng

A. $(-\infty; 1]$

B. $[1; +\infty)$

C. $(-5; 2)$

D. $[0; 3)$

Hướng dẫn giải:

Đặt $t = \log_2^2 x (t > 1)$. Khi đó ta có $\frac{t}{\sqrt{t-1}} \geq m (*)$

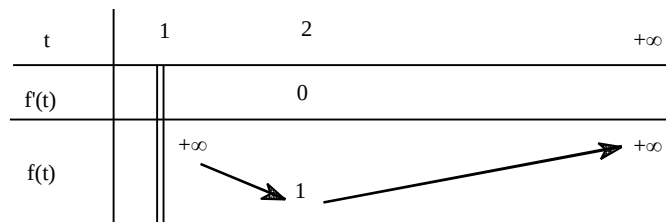
Bất phương trình ban đầu có nghiệm với mọi $x > 0 \Leftrightarrow (*)$ nghiệm đúng với mọi $t > 1$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t}{\sqrt{t-1}}$ trên $(1; +\infty)$

$$f'(t) = \frac{t-2}{(\sqrt{t-1})^3}, \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty \quad \lim_{t \rightarrow 1} f(t) = +\infty$$

BBT



Từ BBT ta có kết luận bất phương trình có nghiệm với mọi $t > 1 \Leftrightarrow m \leq 1$

Chọn đáp án A.

Câu 25. Giả sử p và q là các số thực dương sao cho: $\log_9 p = \log_{12} q = \log_{16} (p+q)$. Tìm giá trị của

$$\frac{p}{q}$$

A. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{8}{5}$

C. $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$

D. $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$

Hướng dẫn giải:

Đặt: $t = \log_9 p = \log_{12} q = \log_{16} (p+q)$ thì: $p = 9^t$, $q = 12^t$, $16^t = p+q = 9^t + 12^t$ (1)

Chia hai vế của (1) cho 9^t ta được: $\left(\frac{4}{3}\right)^{2t} = 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^t$, đặt $x = \left(\frac{4}{3}\right)^t = \frac{q}{p} > 0$ đưa về phương trình:

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \text{ do } x > 0, \text{ suy ra } \frac{q}{p} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

Chọn đáp án D.

Câu 26. Tập nghiệm của bất phương trình: $81 \cdot 9^{x-2} + 3^{x+\sqrt{x}} - \frac{2}{3} \cdot 3^{2\sqrt{x}+1} \geq 0$ là

A. $S = [1; +\infty) \cup \{0\}$. **B.** $S = [1; +\infty)$. **C.** $S = [0; +\infty)$. **D.** $S = [2; +\infty) \cup \{0\}$.

Hướng dẫn giải:

ĐKXD: $x \geq 0$.

$$\text{BPT đã cho} \Leftrightarrow 81 \cdot \frac{9^x}{81} + 3^x \cdot 3^{\sqrt{x}} - \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 3^{2\sqrt{x}} \geq 0 \Leftrightarrow 3^{2x} + 3^x \cdot 3^{\sqrt{x}} - 2 \cdot 3^{2\sqrt{x}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (3^x - 3^{\sqrt{x}})(3^x + 2 \cdot 3^{\sqrt{x}}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3^x - 3^{\sqrt{x}} \geq 0 \text{ (vì } 3^x + 2 \cdot 3^{\sqrt{x}} > 0, \forall x \geq 0.)$$

$$\Leftrightarrow 3^x \geq 3^{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \geq 1 \\ \sqrt{x} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của BPT đã cho là $S = [1; +\infty) \cup \{0\}$.

Chọn đáp án A.

Câu 27. Cho (u_n) là cấp số nhân với số hạng tổng quát $u_n > 0; u_n \neq 1$. Khi đó khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\frac{\log_{u_{k-1}} 2017}{\log_{u_{k+1}} 2017} = \frac{\log_{u_{k-1}} 2017 - \log_{u_k} 2017}{\log_{u_k} 2017 - \log_{u_{k+1}} 2017}$

B. $\frac{\log_{u_{k+1}} 2017}{\log_{u_{k-1}} 2017} = \frac{\log_{u_{k-1}} 2017 - \log_{u_k} 2017}{\log_{u_k} 2017 - \log_{u_{k+1}} 2017}$

C. $\frac{\log_{u_{k-1}} 2017}{\log_{u_{k+1}} 2017} = \frac{\log_{u_{k+1}} 2017 - \log_{u_k} 2017}{\log_{u_k} 2017 - \log_{u_{k-1}} 2017}$

D. $\frac{\log_{u_{k-1}} 2017}{\log_{u_{k+1}} 2017} = \frac{\log_{u_k} 2017 - \log_{u_{k-1}} 2017}{\log_{u_k} 2017 - \log_{u_{k+1}} 2017}$

Hướng dẫn giải:

Vì (u_n) là cấp số nhân nên $u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}$

$$\Rightarrow 2 \log_{2017} u_k = \log_{2017} u_{k-1} + \log_{2017} u_{k+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\log_{u_k} 2017} - \frac{1}{\log_{u_{k-1}} 2017} = \frac{1}{\log_{u_{k+1}} 2017} - \frac{1}{\log_{u_k} 2017}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_{u_{k-1}} 2017}{\log_{u_{k+1}} 2017} = \frac{\log_{u_{k-1}} 2017 - \log_{u_k} 2017}{\log_{u_k} 2017 - \log_{u_{k+1}} 2017}$$

Chọn đáp án A.

Câu 28. Số nghiệm của phương trình $\log_3 |x^2 - \sqrt{2}x| = \log_5 (x^2 - \sqrt{2}x + 2)$ là

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Hướng dẫn giải:

ĐK: $x \neq 0; x \neq \sqrt{2}$.

$$\text{Đặt } t = x^2 - \sqrt{2}x \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x + 2 = t + 2 \Rightarrow \log_3 |t| = \log_5 (t + 2).$$

$$\text{Đặt } \log_3 |t| = \log_5 (t+2) = u, \begin{cases} \log_3 |t| = u \\ \log_5 (t+2) = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |t| = 3^u \\ t+2 = 5^u \end{cases} \Rightarrow |5^u - 2| = 3^u$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5^u - 2 = 3^u \\ 5^u - 2 = -3^u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^u + 3^u = 2 \\ 3^u + 2 = 5^u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^u + 3^u = 2 & (1) \\ \left(\frac{3}{5}\right)^u + 2\left(\frac{1}{5}\right)^u = 1 & (2) \end{cases}$$

Xét (1): $5^u + 3^u = 2$

Ta thấy $u = 0$ là 1 nghiệm, dùng phương pháp hàm số hoặc dùng BĐT để chứng minh nghiệm $u = 0$ là duy nhất.

Với $u = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$, phương trình này vô nghiệm.

Xét (2): $\left(\frac{3}{5}\right)^u + 2\left(\frac{1}{5}\right)^u = 1$

Ta thấy $u = 1$ là 1 nghiệm, dùng phương pháp hàm số hoặc dùng BĐT để chứng minh nghiệm $u = 1$ là duy nhất.

Với $u = 1 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x - 3 = 0$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa $x \neq 0$; $x \neq \sqrt{2}$.

Chọn đáp án B.

Câu 29. Cho $f(x) = e^{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết rằng $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \dots f(2017) = e^{\frac{m}{n}}$ với m, n là các số tự nhiên và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $m - n^2$.

A. $m - n^2 = 2018$.

B. $m - n^2 = -2018$.

C. $m - n^2 = 1$.

D. $m - n^2 = -1$.

Hướng dẫn giải:

Xét các số thực $x > 0$

$$\text{Ta có: } \sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}} = \sqrt{\frac{(x^2 + x + 1)^2}{x^2(x+1)^2}} = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x} = 1 + \frac{1}{x(x+1)} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

$$\text{Vậy, } f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \dots f(2017) = e^{\left(1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018}\right)} = e^{2018 - \frac{1}{2018}} = e^{\frac{2018^2 - 1}{2018}},$$

$$\text{hay } \frac{m}{n} = \frac{2018^2 - 1}{2018}$$

Ta chứng minh $\frac{2018^2 - 1}{2018}$ là phân số tối giản.

Giả sử d là ước chung của $2018^2 - 1$ và 2018

Khi đó ta có $2018^2 - 1 : d$, $2018 : d \Rightarrow 2018^2 : d$ suy ra $1 : d \Leftrightarrow d = \pm 1$

Suy ra $\frac{2018^2 - 1}{2018}$ là phân số tối giản, nên $m = 2018^2 - 1$, $n = 2018$.

Vậy $m - n^2 = -1$.

Chọn đáp án D.

Câu 30. Hỏi phương trình $3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x + 5 \cdot 4^x = 6 \cdot 5^x$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Hướng dẫn giải:

$$pt \Leftrightarrow 3.\left(\frac{2}{5}\right)^x + 4.\left(\frac{3}{5}\right)^x + 5.\left(\frac{4}{5}\right)^x - 6 = 0$$

Xét hàm số $f(x) = 3.\left(\frac{2}{5}\right)^x + 4.\left(\frac{3}{5}\right)^x + 5.\left(\frac{4}{5}\right)^x - 6$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 3.\left(\frac{2}{5}\right)^x \cdot \ln \frac{2}{5} + 4.\left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot \ln \frac{3}{5} + 5.\left(\frac{4}{5}\right)^x \cdot \ln \frac{4}{5} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Do đó hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ mà $f(0) = 6 > 0$, $f(2) = -22 < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án C.

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $9^x - 2(m+1).3^x - 3 - 2m > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- A.** m tùy ý. **B.** $m \neq -\frac{4}{3}$. **C.** $m < -\frac{3}{2}$. **D.** $m \leq -\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Đặt $t = 3^x$, $t > 0$

$$ycbt \Leftrightarrow t^2 - 2(m+1)t - 3 - 2m > 0, \forall t > 0 \Leftrightarrow m < \frac{t^2 - 2t - 3}{2t + 2}, \forall t > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}(t+3), \forall t > 0$$

$$f(t) = \frac{1}{2}(t+3), f'(t) = \frac{1}{2} > 0, \forall t > 0 \Rightarrow \text{hàm số đồng biến trên } (0, +\infty)$$

$$\text{Vậy } ycbt \Leftrightarrow m < f(t), \forall t > 0 \Leftrightarrow m \leq f(0) = -\frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án D.

Câu 32. Tìm tập hợp tất cả các tham số m sao cho phương trình $4^{x^2-2x+1} - m.2^{x^2-2x+2} + 3m - 2 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

- A.** $(-\infty; 1)$. **B.** $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. **C.** $[2; +\infty)$. **D.** $(2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải:

Đặt $t = 2^{(x-1)^2}$ ($t \geq 1$)

Phương trình có dạng: $t^2 - 2mt + 3m - 2 = 0 (*)$

Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 > 0 \\ x_{1,2} = m \pm \sqrt{m^2 - 3m + 2} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 > 0 \\ \sqrt{m^2 - 3m + 2} < m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 > 0 \\ m - 1 \geq 0 \\ m^2 - 3m + 2 < m^2 - 2m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$$

Chọn đáp án D.

Câu 33. Cho x, y là số thực dương thỏa mãn $\ln x + \ln y \geq \ln(x^2 + y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x + y$

- A.** $P = 6$. **B.** $P = 2\sqrt{2} + 3$. **C.** $P = 2 + 3\sqrt{2}$. **D.** $P = \sqrt{17} + \sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

Từ $\ln x + \ln y \geq \ln(x^2 + y) \Leftrightarrow xy \geq x^2 + y$. Ta xét:

Nếu $0 < x \leq 1$ thì $y \geq xy \geq x^2 + y \Leftrightarrow 0 \geq x^2$ mâu thuẫn.

Nếu $x > 1$ thì $xy \geq x^2 + y \Leftrightarrow y(x-1) \geq x^2 \Leftrightarrow y \geq \frac{x^2}{x-1}$. Vậy $P = x + y \geq x + \frac{x^2}{x-1}$.

Ta có $f(x) = x + \frac{x^2}{x-1}$ xét trên $(1; +\infty)$.

$$\text{Có } f'(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 - 2x + 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} (\text{loại}) \\ x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} (\text{nhanh}) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \min_{(1; +\infty)} f(x) = f\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 3.$$

Chọn đáp án B.

Câu 34. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} \leq m \cdot \log_{5-\sqrt{4-x}} 3$ có nghiệm.

A. $m > 2\sqrt{3}$

B. $m \geq 2\sqrt{3}$

C. $m \geq 12 \log_3 5$

D. $2 \leq m \leq 12 \log_3 5$

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $x \in [0; 4]$. Ta thấy $4 - x \leq 4 \Rightarrow 5 - \sqrt{4 - x} \geq 3 \Rightarrow \log_{5-\sqrt{4-x}} 3 > 0$

Khi đó bất phương trình đã cho trở thành $m > f(x) = (x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}) \cdot \log_3(5 - \sqrt{4-x})$ (*)

Với $u = x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} \Rightarrow u' = \frac{3\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x+12}}$ và

$v = \log_3(5 - \sqrt{4-x}) \Rightarrow v' = \frac{1}{2\sqrt{4-x}(5 - \sqrt{4-x}) \cdot \ln 3}$

Suy ra $f'(x) > 0; \forall x \in (0; 4) \Rightarrow f(x)$ là hàm số đồng biến trên đoạn $[0; 4]$

Để bất phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq \min_{[0; 4]} f(x) = f(0) = 2\sqrt{3}$

Chọn đáp án A.

Câu 35. Tìm giá trị của a để phương trình $(2 + \sqrt{3})^x + (1 - a)(2 - \sqrt{3})^x - 4 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn: $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3$, ta có a thuộc khoảng:

A. $(-\infty; -3)$

B. $(-3; +\infty)$

C. $(3; +\infty)$

D. $(0; +\infty)$

Hướng dẫn giải:

Ta có $(2 + \sqrt{3})^x (2 - \sqrt{3})^x = 1 \Rightarrow (2 - \sqrt{3})^x = \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^x}$. Đặt $t = \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^x}$ ($t > 0$), phương trình

đã cho trở thành $t + \frac{1-a}{t} - 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 - a = 0$ (*)

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm dương phân

biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 = 4 > 0 \\ t_1 t_2 = 1 - a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a < 1$

$$\text{Ta có } x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3 \Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^{x_1-x_2} = 3 \Leftrightarrow \frac{(2+\sqrt{3})^{x_1}}{(2+\sqrt{3})^{x_2}} = 3 \Leftrightarrow \frac{t_1}{t_2} = 3$$

Vì $t_1 + t_2 = 4$ nên điều này xảy ra khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm $t=3$ và $t=1$

Khi đó $1-a=3.1=3 \Leftrightarrow a=-2$.

Chọn đáp án B.

Câu 36. Gọi m là số chữ số cần dùng khi viết số 2^{30} trong hệ thập phân và n là số chữ số cần dùng khi viết số 30^2 trong hệ nhị phân. Ta có tổng $m+n$ bằng

A. 18

B. 20

C. 19

D. 21

Hướng dẫn giải:

- Phương pháp: Số chữ số cần dùng khi viết số A trong hệ thập phân là $[\log A] + 1$ với $[x]$ là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng x .

Tổng quát: số chữ số cần dùng khi viết số A trong hệ n -phân là $[\log_n A] + 1$

Dựa vào 2 kết quả trên ta có

$$m = [\log 2^{30}] + 1 = [30 \log 2] + 1 = 10$$

$$n = [\log_2 30^2] + 1 = [2 \log_2 30] + 1 = 10$$

$$\Rightarrow m+n=20$$

Chọn đáp án B.

Câu 37. Cho hàm số $y = |x^2 + 2x + a - 4|$. Tìm a để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $a=3$

B. $a=2$

C. $a=1$

D. Một giá trị khác

Hướng dẫn giải:

Ta có $y = |x^2 + 2x + a - 4| = |(x+1)^2 + a - 5|$. Đặt $u = (x+1)^2$ khi đó $\forall x \in [-2;1]$ thì $u \in [0;4]$ Ta

được hàm số $f(u) = |u + a - 5|$. Khi đó

$$\max_{x \in [-2;1]} y = \max_{u \in [0;4]} f(u) = \max\{f(0), f(4)\} = \max\{|a-5|; |a-1|\}$$

$$\text{Trường hợp 1: } |a-5| \geq |a-1| \Leftrightarrow a \leq 3 \Rightarrow \max_{u \in [0;4]} f(u) = 5-a \geq 2 \Leftrightarrow a=3$$

$$\text{Trường hợp 2: } |a-5| \leq |a-1| \Leftrightarrow a \geq 3 \Rightarrow \max_{u \in [0;4]} f(u) = a-1 \geq 2 \Leftrightarrow a=3$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } \max_{x \in [-2;1]} y = 2 \Leftrightarrow a=3$$

Chọn đáp án A.

Câu 38. Cho phương trình $2\log_3(\cot x) = \log_2(\cos x)$. Phương trình này có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}\right)$

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

Hướng dẫn giải:

Điều kiện $\sin x > 0, \cos x > 0$. Đặt $u = \log_2(\cos x)$ khi đó $\begin{cases} \cot^2 x = 3^u \\ \cos x = 2^u \end{cases}$

Vì $\cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$ suy ra $\frac{(2^u)^2}{1 - (2^u)^2} = 3^u \Leftrightarrow f(u) = \left(\frac{4}{3}\right)^u + 4^u - 1 = 0$

$$f'(u) = \left(\frac{4}{3}\right)^u \ln\left(\frac{4}{3}\right) + 4^u \ln 4 > 0, \forall u \in \mathbb{R}. \text{ Suy ra hàm số } f(u) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}, \text{ suy ra phương}$$

trình $f(u) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm, ta thấy $f(-1) = 0$ suy ra

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Theo điều kiện ta đặt suy ra nghiệm thỏa mãn là $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$. Khi đó phương trình nằm trong khoảng

$$\left(\frac{\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}\right) \text{ là } x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{7\pi}{3}. \text{ Vậy phương trình có hai nghiệm trên khoảng } \left(\frac{\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}\right).$$

Chọn đáp án C.

Câu 39. Trong các nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 2x + y$ bằng:

A. $\frac{9}{4}$.

B. $\frac{9}{2}$.

C. $\frac{9}{8}$.

D. 9.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Bất PT} \Leftrightarrow \log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2y^2 > 1 \\ 2x+y \geq x^2 + 2y^2 \end{cases} \quad (I), \quad \begin{cases} 0 < x^2 + 2y^2 < 1 \\ 0 < 2x+y \leq x^2 + 2y^2 \end{cases} \quad (II).$$

$$\text{Xét } T = 2x + y$$

$$\text{TH1: } (x; y) \text{ thỏa mãn (II) khi đó } 0 < T = 2x + y \leq x^2 + 2y^2 < 1$$

$$\text{TH2: } (x; y) \text{ thỏa mãn (I) } x^2 + 2y^2 \leq 2x + y \Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(\sqrt{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \leq \frac{9}{8}. \text{ Khi đó}$$

$$2x + y = 2(x-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{9}{4} \leq \sqrt{\left(2^2 + \frac{1}{2}\right)\left[(x-1)^2 + \left(\sqrt{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\right]} + \frac{9}{4} \leq \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{9}{8}} + \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$$

$$\text{Suy ra: } \max T = \frac{9}{2} \Leftrightarrow (x; y) = \left(2; \frac{1}{2}\right)$$

Chọn đáp án B.

Câu 40. Xét các số thực thỏa mãn. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a^2(a^2) + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$

A. $P_{\min} = 19$

B. $P_{\min} = 13$

C. $P_{\min} = 14$

D. $P_{\min} = 15$

Hướng dẫn giải:

$$P = \frac{1}{\left(\log_{a^2} \frac{a}{b}\right)^2} + 3(\log_b a - 1) = \frac{4}{(1 - \log_a b)^2} + 3(\log_b a - 1)$$

$$\text{Đặt } t = \log_a b \text{ do } a > b > 1 \text{ nên } 0 < t < 1$$

$$P = \frac{4}{(1-t)^2} + \frac{3}{t} - 3$$

Xét $f(t) = \frac{4}{(1-t)^2} + \frac{3}{t} - 3$ trên $(0;1)$ ta thấy GTNN của $f(t)$ là $f\left(\frac{1}{3}\right) = 15$

Chọn đáp án D.

HÌNH NÓN - TRỤ - CẦU

Câu 1. Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{6}$. Đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = \frac{1}{2}AD = a$. Gọi E là trung điểm của AD. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ECD.

A. $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

B. $R = a\sqrt{6}$.

C. $R = \frac{a\sqrt{30}}{3}$.

D. $R = \frac{a\sqrt{26}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi H là trung điểm của CD và d là đường thẳng qua H và vuông góc với đáy. Gọi I và R là tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp S.CDE. Suy ra I thuộc d. Đặt $IH = x$.

Trong mp(ASIH) kẻ đường thẳng qua I và song song với AH cắt AS tại K.

Ta có:

$$ID^2 = IH^2 + HD^2 = x^2 + \frac{a^2}{2}.$$

$$IS^2 = IK^2 + KS^2 = AH^2 + KS^2 = AC^2 + CH^2 + KS^2 = 2a^2 + \frac{a^2}{2} + (a\sqrt{6} - x)^2$$

$$\text{Suy ra: } x^2 + \frac{a^2}{2} = 2a^2 + \frac{a^2}{2} + (a\sqrt{6} - x)^2 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{6}a}{3}. \text{ Vậy bán kính mặt cầu bằng } R = \frac{\sqrt{30}a}{3}.$$

Chọn đáp án C.

Câu 2. Cho tứ diện ABCD với $BC = a$, các cạnh còn lại đều bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (BCD). Gọi I, J lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AD. Giả sử hình cầu đường IJ kính tiếp xúc với CD. Giá trị $\cos \alpha$ là:

A. $3 - 2\sqrt{3}$

B. $2\sqrt{3} - 3$

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{2 - \sqrt{3}}{3}$

Hướng dẫn giải:

Gọi O là trung điểm IJ và F là điểm tiếp xúc giữa hình cầu đường kính IJ và đường thẳng CD. Hình cầu đường kính IJ tiếp xúc với CD khi và chỉ khi khoảng cách từ O đến CD bằng nửa độ dài IJ.

$$\text{Ta có } AI = DI = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vì FC và CI là hai tiếp tuyến xuất phát từ một điểm nên } FC = CI = \frac{a}{2}$$

$$\text{Tương tự ta có } DJ = DF = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{2}$$

Tam giác ADI cân có IJ là đường trung tuyến nên tam giác IDJ vuông tại J.

$$\text{Suy ra } \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \widehat{JID} = \frac{JD}{DI} = \frac{\frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1)}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

Do vậy $\cos \alpha = 2\sqrt{3} - 3$ nên

Chọn đáp án B.

Câu 3. Cho hình vẽ bên. Tam giác SOA vuông tại O có $MN \in SO$ với M, N lần lượt nằm trên cạnh SA, OA . Đặt $SO = h$ không đổi. Khi quay hình vẽ quanh SO thì tạo thành một hình trụ nội tiếp hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O bán kính $R = OA$. Tìm độ dài của MN để thể tích khối trụ là lớn nhất.

A. $MN = \frac{h}{2}$

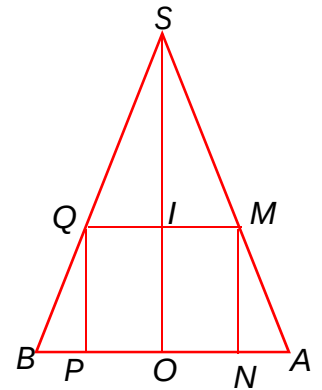
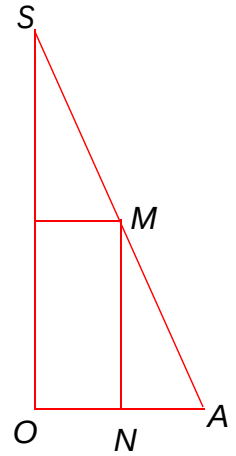
B. $MN = \frac{h}{3}$

C. $MN = \frac{h}{4}$

D. $MN = \frac{h}{6}$

Hướng dẫn giải :

Ta thấy khi quay quanh trục SO sẽ tạo nên một khối trụ nằm trong khối chóp. Khi đó thiết diện qua trục của hình trụ là hình chữ nhật $MNPQ$. Ta có hình sau:



Ta có $SO = h$; $OA = R$. Khi đó đặt $OI = MN = x$.

Theo định lý Thales ta có $\frac{IM}{OA} = \frac{SI}{SO} \Rightarrow IM = \frac{OA \cdot SI}{SO} = \frac{R \cdot (h - x)}{h}$. Thể

tích khối trụ $V = \pi IM^2 \cdot IH = \frac{\pi R^2}{h^2} \cdot x(h - x)^2$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$2x(h - x)^2 \leq \left[\frac{2x + 2(h - x)}{3} \right]^3$$

Vậy $V \leq \frac{4\pi R^2 h}{27}$. Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{h}{3}$. Hay $MN = \frac{h}{3}$.

Chọn đáp án B.

Câu 4. Một hình nón bị cắt bởi mặt phẳng (P) song song với đáy.

Mặt phẳng (P) chia hình nón làm hai phần (N_1) và (N_2) . Cho hình cầu nội tiếp (N_2) như hình vẽ sao cho thể tích hình cầu bằng một nửa thể tích của (N_2) . Một mặt phẳng đi qua trục hình nón và vuông góc với đáy cắt (N_2) theo thiết diện là hình thang cân, tang góc nhọn của hình thang cân là

A. 2

B. 4

C. 1

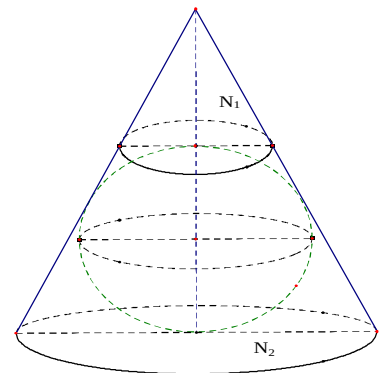
D. $\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:

Giả sử ta có mặt cắt của hình nón cụt và các đại lượng như hình vẽ. Gọi α là góc cần tìm.

Xét $\triangle AHD$ vuông tại H có $DH = h$, $AH = R - r \Rightarrow h = 2r_0 = AH \cdot \tan \alpha = (R - r) \tan \alpha$ (1)

Thể tích khối cầu là $V_1 = \frac{4}{3} \pi r_0^3 = \frac{\pi h^3}{6}$



Thể tích của (N_2) là $V_2 = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow h^2 = R^2 + r^2 + Rr \quad (2)$$

Ta có $BC = R + r$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$$\text{Mà } h^2 = BC^2 - (R - r)^2 = 4Rr \quad (3)$$

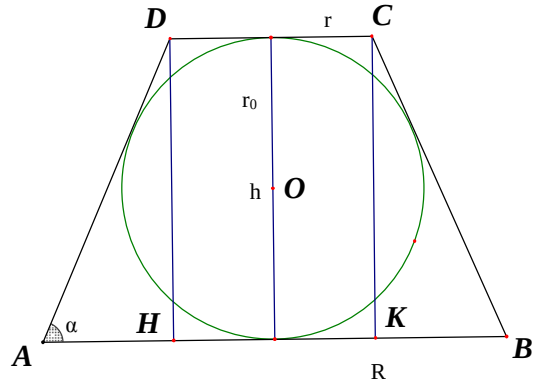
$$\text{Từ (2), (3)} \Rightarrow (R - r)^2 = Rr \quad (4)$$

$$\text{Từ (1), (3), (4)} \Rightarrow h^2 = (R - r)^2 \cdot \tan^2 \alpha = 4(R - r)^2$$

(vì α là góc nhọn)

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha = 4 \Rightarrow \tan \alpha = 2$$

Chọn đáp án A.



Câu 5. Cho tam giác ABC có độ dài cạnh huyền 5. Người ta quay tam giác ABC quanh một cạnh góc vuông để sinh ra hình nón. Hỏi thể tích V khối nón sinh ra lớn nhất là bao nhiêu.

A. $V = \frac{250\sqrt{3}\pi}{27}$

B. $V = \frac{25\sqrt{2}\pi}{27}$

C. $V = \frac{20\sqrt{3}\pi}{27}$

D. $V = \frac{250\sqrt{6}\pi}{27}$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{1}{3}\pi(25 - y^2)y = \frac{25}{3}\pi y - \frac{1}{3}\pi y^3.$$

$$\text{Xét hàm số } V = \frac{25}{3}\pi y - \frac{1}{3}\pi y^3 \text{ với } 0 < y < 5.$$

$$\text{Ta có } V' = \frac{25}{3}\pi - \pi y^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Khi đó thể tích lớn nhất là } V = \frac{250\sqrt{3}\pi}{27}.$$

Chọn đáp án A.

Câu 6. Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón có thể tích 27cm^3 . Với chiều cao h và bán kính đáy là r. Tìm r để lượng giấy tiêu thụ ít nhất.

A. $r = \sqrt[4]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$

B. $r = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$

C. $r = \sqrt[4]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$

D. $r = \sqrt[6]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{3V}{\pi r^2} \Rightarrow \text{độ dài đường sinh là:}$$

$$l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{\left(\frac{3V}{\pi r^2}\right)^2 + r^2} = \sqrt{\left(\frac{81}{\pi r^2}\right)^2 + r^2} = \sqrt{\frac{3^8}{\pi^2 r^4} + r^2}$$

$$\text{Diện tích xung quanh của hình nón là: } S_{xq} = \pi r l = \pi r \sqrt{\frac{3^8}{\pi^2 r^4} + r^2} = \pi \sqrt{\frac{3^8}{\pi^2 r^2} + r^4}$$

$$\text{Áp dụng BĐT Cauchy ta được giá trị nhỏ nhất là khi } r = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}.$$

Chọn đáp án B.

Câu 7. Cho một khối trụ có bán kính đáy $r = a$ và chiều cao $h = 2a$. Mặt phẳng (P) song song với trục OO' của khối trụ chia khối trụ thành 2 phần, gọi V_1 là thể tích phần khối trụ chứa trục OO' , V_2 là thể tích phần còn lại của khối trụ. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$, biết rằng (P) cách OO' một khoảng bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

A. $\frac{3\pi + 2}{\pi - 2}$.

B. $\frac{3\pi - 2}{\pi - 2}$.

C. $\frac{2\pi + 3}{\pi - 2}$.

D. $\frac{2\pi - 3}{\pi - 2}$.

Hướng dẫn giải:

Thể tích khối trụ $V = \pi r^2 h = \pi a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3$.

Gọi thiết diện là hình chữ nhật $ABB'A'$.

Dựng lăng trụ $ABCD, A'B'C'D'$ như hình vẽ.

Gọi H là trung điểm AB .

Ta có $OH \perp AB \Rightarrow OH \perp (ABB'A') \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

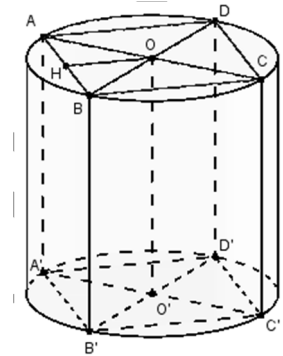
$\Rightarrow AH = BH = \frac{a\sqrt{2}}{2} = OH$.

$\Rightarrow \Delta OAB$ vuông cân tại $O \Rightarrow ABCD$ là hình vuông.

Từ đó suy ra:

$V_2 = \frac{1}{4}(V - V_{ABCD, A'B'C'D'}) = \frac{1}{4}(2\pi a^3 - (a\sqrt{2})^2 \cdot 2a) = \frac{a^3(\pi - 2)}{2}$.

$V_1 = V - V_2 = 2\pi a^3 - \frac{a^3(\pi - 2)}{2} = \frac{a^3(3\pi + 2)}{2}$. Suy ra $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3\pi + 2}{\pi - 2}$.



Chọn đáp án A.

Câu 8. Trong số các khối trụ có thể tích bằng V , khối trụ có diện tích toàn phần bé nhất thì có bán kính đáy là

A. $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

B. $R = \sqrt[3]{\frac{4\pi}{V}}$.

C. $R = \sqrt[3]{\frac{\pi}{V}}$.

D. $R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

Hướng dẫn giải:

$V = \pi R^2 \cdot h \Rightarrow l = h = \frac{V}{\pi R^2}$, $S_{TP} = S_{xq} + 2S_d = 2\pi Rl + 2\pi R^2 = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2$

Xét hàm số $f(R) = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2$ với $R > 0$, $f'(R) = \frac{-2V + 4\pi R^3}{R^2}$, $f'(R) = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

Bảng biến thiên

R	0	$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$+\infty$
$f'(R)$	+	0	-
$f(R)$	$+\infty$		$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy diện tích toàn phần nhỏ nhất khi $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

Chọn đáp án A.

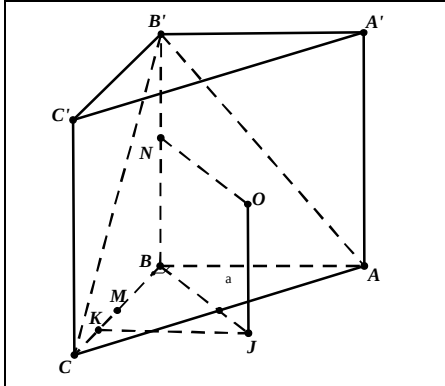
Câu 9. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân $AB=BC=a$. Mặt phẳng $(AB'C)$ tạo với $(BCC'B')$ một góc α với $\tan \alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $B'ACM$.

A. $\frac{3\sqrt{10}a}{8}$

B. $\frac{3\sqrt{10}a}{4}$

C. $\frac{3\sqrt{13}a}{8}$

D. $\frac{\sqrt{13}a}{2}$



Trục không có tính chất đặc biệt, ta sử dụng phương pháp 4 để giải

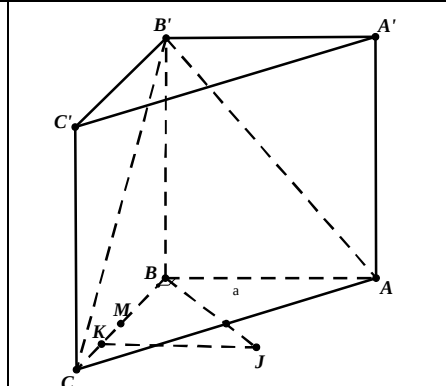
$$R^2 = B'O^2 = NO^2 + B'N^2 \\ = BJ^2 + (\overline{BB'} - \overline{JO})^2 \\ = OM^2 = OJ^2 + JM^2$$

Chú ý $\widehat{CBJ} = 45^\circ$

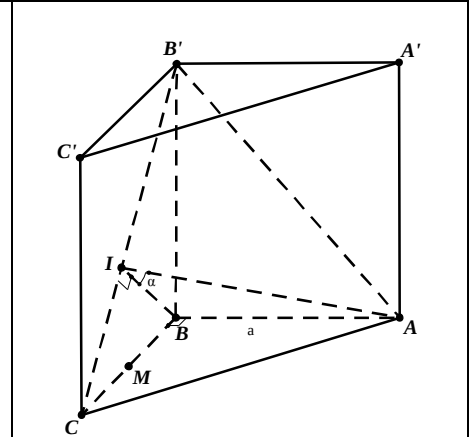
Giải phương trình ta tìm được

$$OJ = \frac{5\sqrt{2}a}{8}$$

$$R = \frac{3\sqrt{10}a}{8}$$



Xác định tâm đáy: giao của hai đường thẳng trung trực MC và BI .



Dựng góc: chú ý BA vuông góc với giao tuyến CB'

Từ tam giác vuông BIA và góc α , tính được BI . Từ BI sử dụng

$$\frac{1}{BI^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{B'B^2} \text{ tính được } B'B = a\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án A.

Câu 10. Cho hình nón có bán kính đáy là a , đường sinh tạo với mặt phẳng đáy góc α . Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình nón.

A. $V = \frac{3\pi a^3}{4\sin^3 2\alpha}$

B. $V = \frac{4\pi a^3}{3\sin^3 3\alpha}$

C. $V = \frac{4\pi a^3}{3\sin^3 2\alpha}$

D. $V = \frac{4\pi a^3}{3\sin^3 \alpha}$

Hướng dẫn giải:

Nếu mặt phẳng (P) qua trục của hình nón thì (P) cắt hình nón theo tam giác cân SMN , (P) cắt mặt cầu ngoại tiếp hình nón theo đường tròn có bán kính là R . Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình nón, O là tâm đường tròn đáy của hình nón.

Ta có $S_{\triangle SMN} = MO.SO = a.a.\tan \alpha = a^2 \tan \alpha$.

$$\text{Mặt khác } S_{\triangle SMN} = \frac{SM.SN.MN}{4R} = \frac{SM^2.2a}{4R} = \frac{\left(\frac{a}{\cos \alpha}\right)^2.2a}{4R} = \frac{a^3}{2R \cos^2 \alpha}.$$

$$\text{Do đó } \frac{a^3}{2R \cos^2 \alpha} = a^2 \tan \alpha \Rightarrow R = \frac{a}{2 \cos^2 \alpha \tan \alpha} = \frac{a}{\sin 2\alpha}.$$

R cũng là bán kính của mặt cầu ngoại tiếp.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \frac{a^3}{\sin^3 2\alpha}.$$

Chọn đáp án C.

Câu 11. Cho hình nón có chiều cao h , đường tròn đáy bán kính R . Một mặt phẳng (P) song song với đáy cách đáy một khoảng bằng d cắt hình nón theo đường tròn (L). Dựng hình trụ có một đáy là (L), đáy còn lại thuộc đáy của hình nón và trục trùng với trục hình nón. Tìm d để thể tích hình trụ là lớn nhất.

A. $d = \frac{h}{3}$

B. $d = \frac{h}{2}$

C. $d = \frac{h}{6}$

D. $d = \frac{h}{4}$

Hướng dẫn giải:

Gọi r là bán kính của (L).

Ta có $\frac{r}{R} = \frac{h-d}{h} \Rightarrow r = \frac{R}{h}(h-d)$

$$\Rightarrow V = \pi \frac{R^2}{h^2} (h-d)^2 \cdot d = \pi \frac{R^2}{2h^2} (h-d)(h-d) \cdot 2d \leq \pi \frac{R^2}{2h^2} \left(\frac{(h-d) + (h-d) + 2d}{3} \right)^3 = \frac{4\pi R^2 h}{27}$$

Dấu bằng xảy ra khi $h-d = 2d \Leftrightarrow d = \frac{h}{3}$.

Chọn đáp án A.

Câu 12. Trong số các hình trụ có diện tích toàn phần đều bằng S thì bán kính R và chiều cao h của khối trụ có thể tích lớn nhất là:

A. $R = \sqrt{\frac{S}{2\pi}}; h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{2\pi}}$

B. $R = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}; h = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$

C. $R = \sqrt{\frac{2S}{3\pi}}; h = 4\sqrt{\frac{2S}{3\pi}}$

D. $R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}; h = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$

Hướng dẫn giải:

Gọi thể tích khối trụ là V , diện tích toàn phần của hình trụ là S .

Ta có: $S = S_{\text{day}} + S_{\text{xq}} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$. Từ đó suy ra:

$$\frac{S}{2\pi} = R^2 + Rh \Leftrightarrow \frac{S}{2\pi} = R^2 + \frac{V}{\pi R} = R^2 + \frac{V}{2\pi R} + \frac{V}{2\pi R} \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 3\sqrt{\frac{V^2}{4\pi^2}}$$

hay $27 \frac{V^2}{4\pi^2} \leq \left(\frac{S}{2\pi} \right)^3 \Leftrightarrow V \leq \sqrt{\frac{S^3}{54\pi}}$

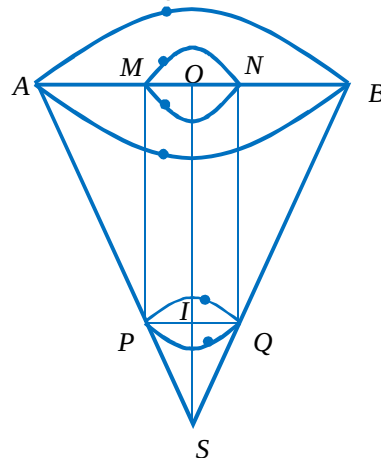
Vậy $V_{\max} = \sqrt{\frac{S^3}{54\pi}}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow R^2 = \frac{V}{2\pi R} = \frac{\pi R^2 h}{2\pi R} = \frac{Rh}{2}$ hay $h = 2R$.

Khi đó $S = 6\pi R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ và $h = 2R = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.

Chọn đáp án D.

Câu 13. Một bình đựng nước dạng hình nón (không đáy) đựng đầy nước. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào đó một khối trụ và đo được thể tích nước tràn ra ngoài

là $\frac{16\pi}{9}dm^3$. Biết rằng một mặt của khối trụ nằm trên mặt trên của hình nón, các điểm trên đường tròn đáy còn lại đều thuộc các đường sinh của hình nón (như hình vẽ) và khối trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón. Diện tích xung quanh S_{xq} của bình nước là:



- A.** $S_{xq} = \frac{9\pi\sqrt{10}}{2}dm^2$. **B.** $S_{xq} = 4\pi\sqrt{10}dm^2$. **C.** $S_{xq} = 4\pi dm^2$. **D.** $S_{xq} = \frac{3\pi}{2}dm^2$.

Hướng dẫn giải:

Xét hình nón : $h = SO = 3r$, $r = OB$, $l = SA$. Xét hình trụ : $h_1 = 2r = NQ$, $r_1 = ON = QI$

$$\Delta SQI \sim \Delta SBO \Rightarrow \frac{QI}{BO} = \frac{SI}{SO} = \frac{1}{3} \Rightarrow r_1 = \frac{r}{3} \Rightarrow \text{Thể tích khối trụ là :}$$

$$V_t = \pi r_1^2 h_1 = \frac{2\pi r^3}{9} = \frac{16\pi}{9} \Rightarrow r = 2 \Rightarrow h = 6 \Rightarrow l = \sqrt{h^2 + r^2} = 2\sqrt{10} \Rightarrow S_{xq} = \pi r l = 4\pi\sqrt{10}dm^2$$

Chọn đáp án B.

Câu 14. Cho một miếng tôn hình tròn có bán kính 50cm. Biết hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích miếng tôn ở trên. Khi đó hình nón có bán kính đáy là

- A.** $10\sqrt{2}cm$ **B.** 20cm **C.** $50\sqrt{2}cm$ **D.** 25cm

Hướng dẫn giải:

Đặt $a = 50cm$. Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình nón lần lượt là $x, y (x, y > 0)$. Ta có $SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Khi đó diện tích toàn phần của hình nón là

$$S_{tp} = \pi x^2 + \pi x \sqrt{x^2 + y^2}$$

Theo giả thiết ta có:

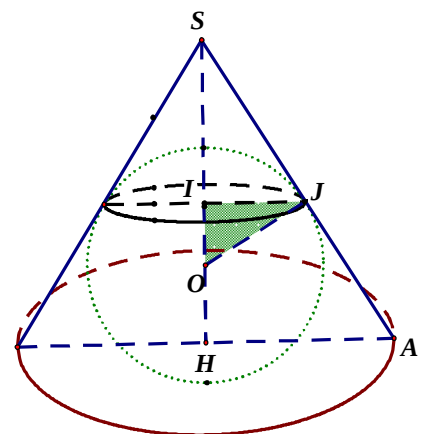
$$\pi x^2 + \pi x \sqrt{x^2 + y^2} = \pi a^2 \Leftrightarrow x \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow x \sqrt{x^2 + y^2} = a^2 - x^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 (x^2 + y^2) = a^4 + x^4 - 2a^2 x^2, (DK : x < a) \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^4}{y^2 + 2a^2}$$

Khi đó thể tích khối nón là:

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{a^4}{y^2 + 2a^2} \cdot y = \frac{1}{3} \pi a^4 \cdot \frac{y}{y^2 + 2a^2}$$



V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{y^2 + 2a^2}{y}$ đạt giá trị nhỏ nhất

$$\text{Ta có } \frac{y^2 + 2a^2}{y} = y + \frac{2a^2}{y} \geq 2\sqrt{y \cdot \frac{2a^2}{y}} = 2\sqrt{2}a$$

Vậy V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $y = \frac{2a^2}{y}$, tức là $y = a\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{a}{2} = 25\text{cm}$

Chọn đáp án D.

Câu 15. Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông có cạnh góc vuông bằng a . Tính diện tích của thiết diện qua đỉnh tạo với đáy một góc 60° .

A. $\frac{a^2}{2}$

B. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{a^2}{3}$

Hướng dẫn giải:

Gọi thiết diện qua trục là ΔSAB vuông cân tại S ,
 $SA = SB = a$

Gọi O là tâm của đáy, $SO = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Gọi thiết diện qua đỉnh, tạo với đáy góc 60° là ΔSAC .

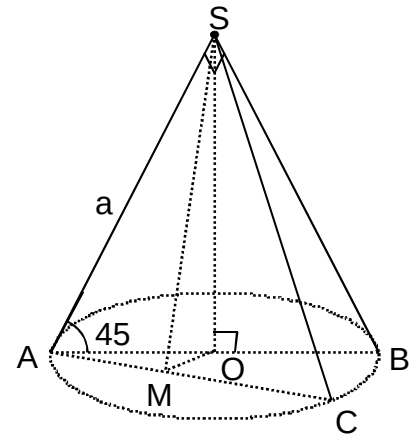
Gọi M là trung điểm AC , góc giữa mặt phẳng (SAC) với mặt đáy là $\widehat{SMO} = 60^\circ$

$$* SM = \frac{SO}{\sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \quad (\Delta SMO \text{ vuông tại } O).$$

$$* OM = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$* AC = 2AM = 2\sqrt{OA^2 - OM^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$* S_{SAC} = \frac{1}{2} SM \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$$



Chọn đáp án C.

Câu 16. Cho hình chóp $SABC$ với SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $BC = \sqrt{3}a$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SC . Mặt cầu qua các điểm A, B, C, H, K có bán kính bằng:

A. 1

B. 2

C. $\sqrt{3}$

D. Không đủ dữ kiện để tính

Hướng dẫn giải:

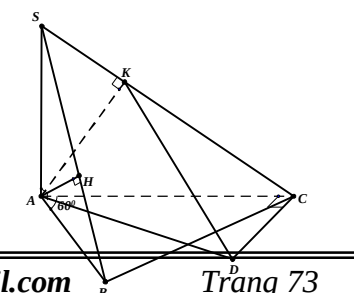
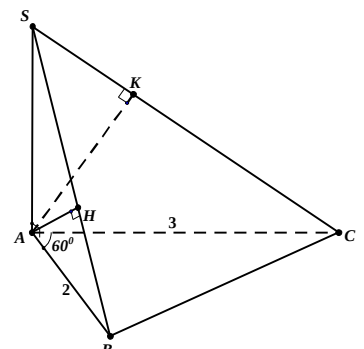
Gọi AD là đường kính của đường tròn (ABC)

Suy ra, $AC \perp DC$, suy ra $CD \perp (SAC)$ hay $AE \perp DE$

Tương tự, $AH \perp HD$. Suy ra mặt cầu qua các điểm A, B, C, H, K có

$$\text{đường kính } AD = \frac{BC}{\sin 60^\circ} = 2.$$

Chọn đáp án B.



Câu 17. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh BC. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Gọi G là trọng tâm tam giác SAC. Bán kính mặt cầu tâm G và tiếp xúc với mặt phẳng (SAB) là:

A. $\frac{\sqrt{13}a}{13}$

B. $\frac{\sqrt{13}a}{39}$

C. $\frac{3\sqrt{13}a}{26}$

D. $\frac{\sqrt{13}a}{26}$

Hướng dẫn giải:

+ Gọi H là trung điểm BC

+ $(SA, (ABC)) = \widehat{SAH} = 60^\circ$

+ $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $SH = AH \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}$

+ Bán kính mặt cầu là:

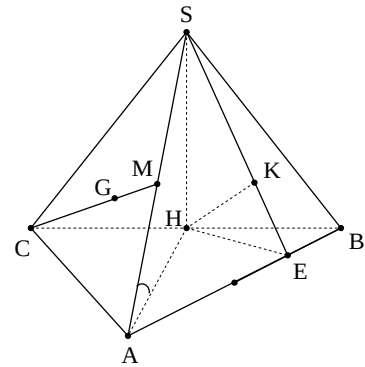
$$R = d(G, (SAB)) = \frac{1}{3}d(C, (SAB)) = \frac{2}{3}d(H, (SAB))$$

+ Gọi E là hình chiếu của H trên AB và K là hình chiếu của H trên SE.

Chứng minh: $HK \perp (SAB)$

+ Tính được: $HE = \frac{a\sqrt{3}}{4}$; $HK = \frac{3a}{2\sqrt{13}}$

+ $R = \frac{2}{3}HK = \frac{a}{\sqrt{13}}$



Chọn đáp án A.

Câu 18. Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ và điểm C thay đổi trên nửa đường tròn đó, đặt $\alpha = \widehat{CAB}$ và gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB. Tìm α sao cho thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay tam giác ACH quanh trục AB đạt giá trị lớn nhất.

A. $\alpha = 60^\circ$.

B. $\alpha = 45^\circ$.

C. $\arctan \frac{1}{\sqrt{2}}$.

D. $\alpha = 30^\circ$.

Hướng dẫn giải:

$$AC = AB \cdot \cos \alpha = 2R \cdot \cos \alpha$$

$$CH = AC \cdot \sin \alpha = 2R \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha; AH = AC \cdot \cos \alpha = 2R \cdot \cos^2 \alpha$$

Thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay tam giác ACH quanh trục AB là

$$V = \frac{1}{3}AH \cdot \pi CH^2 = \frac{8}{3}R^3 \cdot \cos^4 \alpha \cdot \sin^2 \alpha.$$

$$\text{Đặt } t = \cos^2 \alpha \ (0 < t < 1) \Rightarrow V = \frac{8}{3}R^3 t^2 (1-t)$$

$$= \frac{8}{6}R^3 \cdot t \cdot t(2-2t) \leq \frac{8}{6}R^3 \left(\frac{t+t+2-2t}{3} \right)^3$$

$$\text{Vậy } V \text{ lớn nhất khi } t = \frac{2}{3} \text{ khi } \alpha = \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

⚡Chú ý: có thể dùng PP hàm số để tìm GTNN của hàm $f(t) = t^2(1-t)$

Chọn đáp án C.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=3$. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB , SC , SD lần lượt tại các điểm M , N , P . Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$.

A. $V = \frac{32\pi}{3}$.

B. $V = \frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$.

C. $V = \frac{108\pi}{3}$.

D. $V = \frac{125\pi}{6}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $CB \perp (SAD)$, $AM \subset (SAB) \Rightarrow AM \perp CB$ (1)

$(\alpha) \perp SC$, $AM \subset (\alpha) \Rightarrow AM \perp SC$ (2)

$\Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp MC \Rightarrow \widehat{AMC} = 90^\circ$.

Chứng minh tương tự ta có $\widehat{APC} = 90^\circ$

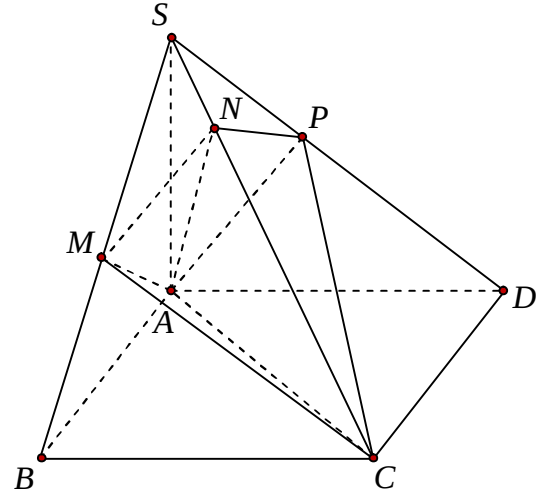
Có $AN \perp SC \Rightarrow \widehat{ANC} = 90^\circ$. Ta có:

$\widehat{AMC} = \widehat{APC} = \widehat{ANC} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ mặt cầu đường kính AC là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$.

Bán kính cầu này là $r = \frac{AC}{2} = 2$. Thể tích khối cầu:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{32\pi}{3}$$



Chọn đáp án A.

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC và ABD là các tam giác đều cạnh a và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ theo a .

A. $\frac{5}{3}\pi a^2$

B. $\frac{11}{3}\pi a^2$

C. $2\pi a^2$

D. $\frac{4}{3}\pi a^2$

Hướng dẫn giải:

Gọi M là Trung điểm của AB

Vì Tam giác ADB và tam giác ABC là tam giác đều

$\rightarrow DM \perp AB; CM \perp AB$

Do có ABC và ABD là các tam giác đều cạnh a và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau $\Rightarrow$ Góc

$\widehat{DMC} = 90^\circ$

Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp Tam giác ABC

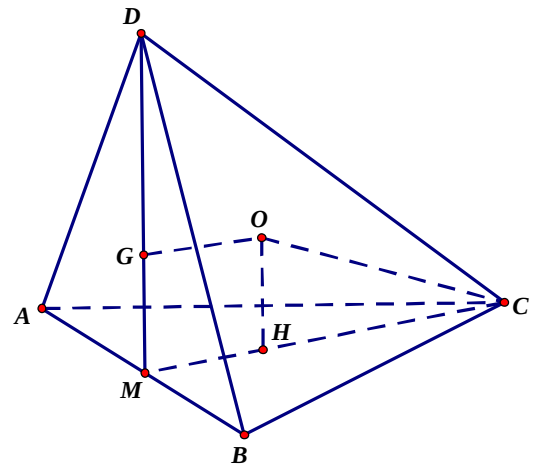
G là tâm đường tròn ngoại tiếp Tam giác ABD

$\Rightarrow H, G$ đồng thời là trọng tâm của tam giác ABC và ABD

$$\Rightarrow \begin{cases} H \in CM; CH = \frac{2}{3}CM \\ G \in DM; DG = \frac{2}{3}DM \end{cases}$$

Kẻ Đường vuông góc với đáy (ABC) từ H và Đường vuông góc với (ABD) từ G .

Do hai đường vuông góc này đều thuộc (DMC) nên chúng cắt nhau tại O .



$\Rightarrow O$ chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCG và $R = OC$.

$$\text{Tam giác } ABC \text{ đều} \rightarrow CM = CB \cdot \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow CH = \frac{\sqrt{3}}{3}a; HM = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

$$\text{CMTT ta có } GM = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

$$\text{Từ đó nhận thấy } OGMH \text{ là hình vuông} \rightarrow OH = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

Tam giác OHC vuông tại H $\rightarrow$ Áp dụng định lý Pitago ta có:

$$CM = CB \cdot \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow CH = \frac{\sqrt{3}}{3}a; HM = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

$$OC = \sqrt{CH^2 + OH^2} = \frac{\sqrt{5}}{12}a = R \Rightarrow V = 4\pi R^2 = \frac{5}{3}\pi a^2$$

Chọn đáp án A.

Câu 21. Cho một mặt cầu bán kính bằng 1. Xét các hình chóp tam giác đều ngoại tiếp mặt cầu trên. Hỏi thể tích nhỏ nhất của chúng là bao nhiêu?

A. $\min V = 8\sqrt{3}$.

B. $\min V = 4\sqrt{3}$.

C. $\min V = 9\sqrt{3}$.

D. $\min V = 16\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi cạnh đáy của hình chóp là a

Ta có $\Delta SIJ \sim \Delta SMH$

$$\Rightarrow \frac{SI}{SM} = \frac{IJ}{MH} \Rightarrow MH(SH - IH) = IJ\sqrt{SH^2 - HM^2}$$

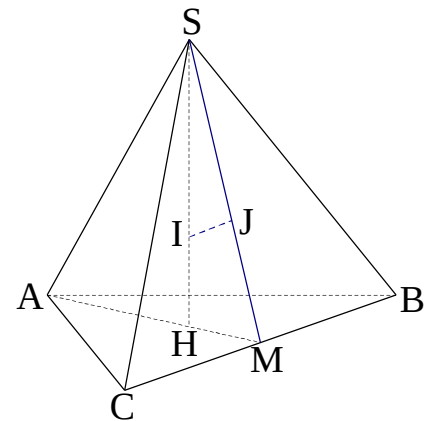
$$\Rightarrow MH^2(SH - 1)^2 = SH^2 - HM^2$$

$$\Rightarrow (a^2 - 12)SH^2 - 2a^2SH = 0 \Rightarrow SH = \frac{2a^2}{a^2 - 12} (a^2 \neq 12)$$

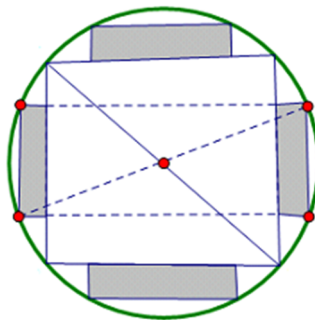
$$S = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SH = \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{2a^4}{a^2 - 12} = \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{1}{\frac{1}{a^2} - \frac{12}{a^4}}$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{a^2} - \frac{12}{a^4} \leq \frac{1}{48} \Rightarrow S \geq 8\sqrt{3}$$

Chọn đáp án A.



Câu 22. Từ một khúc gỗ tròn hình trụ có đường kính bằng 40 cm, cần xẻ thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và bốn miếng phụ được tô màu xám như hình vẽ dưới đây. Tìm chiều rộng x của miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất.



$$\text{A. } x = \frac{3\sqrt{34} - 17\sqrt{2}}{2} (\text{cm})$$

$$\text{B. } x = \frac{3\sqrt{34} - 19\sqrt{2}}{2} (\text{cm})$$

$$\text{C. } x = \frac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2} (\text{cm})$$

$$\text{D. } x = \frac{5\sqrt{34} - 13\sqrt{2}}{2} (\text{cm})$$

Hướng dẫn giải:

Diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là $S = S_{MNPQ} + 4xy$

$$\text{Cạnh hình vuông } MN = \frac{MP}{\sqrt{2}} = \frac{40}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2} (\text{cm})$$

$$\Rightarrow S = (20\sqrt{2})^2 + 4xy = 800 + 4xy \quad (1)$$

$$\text{Ta có } 2x = AB - MN = AB - 20\sqrt{2} < BD - 20\sqrt{2} = 40 - 20\sqrt{2} \Rightarrow 0 < x < 20 - 10\sqrt{2}$$

$$\text{Lại có } AB^2 + AD^2 = BD^2 = 40^2 \Rightarrow (2x + 20\sqrt{2})^2 + y^2 = 1600$$

$$\Rightarrow y^2 = 800 - 80x\sqrt{2} - 4x^2 \Rightarrow y = \sqrt{800 - 80x\sqrt{2} - 4x^2}$$

$$\text{Thế vào (1)} \Rightarrow S = 800 + 4x\sqrt{800 - 80x\sqrt{2} - 4x^2} = 800 + 4\sqrt{800x^2 - 80x^3\sqrt{2} - 4x^4}$$

Xét hàm số $f(x) = 800x^2 - 80x^3\sqrt{2} - 4x^4$, với $x \in (0; 20 - 10\sqrt{2})$ có

$$f'(x) = 1600x - 240x^2\sqrt{2} - 16x^3 = 16x(100 - 15x\sqrt{2} - x^2)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} x \in (0; 20 - 10\sqrt{2}) \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; 20 - 10\sqrt{2}) \\ 16x(100 - 15x\sqrt{2} - x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2}$$

Khi đó $x = \frac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2}$ chính là giá trị thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án C.

Câu 23. Một hình trụ có bán kính đáy bằng 50cm và có chiều cao là 50cm. Một đoạn thẳng AB có chiều dài là 100cm và có hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy. Tính khoảng cách d từ đoạn thẳng đó đến trục hình trụ.

$$\text{A. } d = 50\text{cm}$$

$$\text{B. } d = 50\sqrt{3}\text{cm}$$

$$\text{C. } d = 25\text{cm}$$

$$\text{D. } d = 25\sqrt{3}\text{cm}$$

Hướng dẫn giải:

Kẻ AA_1 vuông góc với đáy, A_1 thuộc đáy. Suy ra:

$$OO_1 \parallel AA_1 \Rightarrow OO_1 \parallel (AA_1B) \Rightarrow d(OO_1, AB) = d(OO_1, (AA_1B)) = d(O_1, (AA_1B))$$

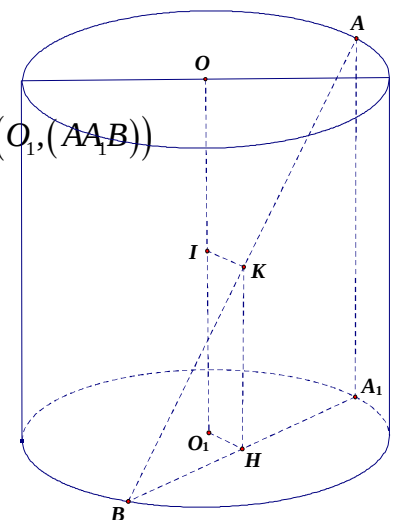
Tiếp tục kẻ $O_1H \perp AB$ tại H, vì O_1H nằm trong đáy nên cũng vuông góc với AA_1 suy ra:

$$O_1H \perp (AA_1B). \text{ Do đó}$$

$$d(OO_1, AB) = d(OO_1, (AA_1B)) = d(O_1, (AA_1B)) = O_1H$$

$$\text{Xét tam giác vuông } AA_1B \text{ ta có } A_1B = \sqrt{AB^2 - AA_1^2} = 50\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } O_1H = \sqrt{O_1A_1^2 - A_1H^2} = 25\text{cm}$$

Chọn đáp án C.

Câu 24. Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón có thể tích 27cm^3 với chiều cao là h và bán kính đáy là r . để lượng giấy tiêu thụ là ít nhất thì giá trị của r là:

A. $r = \sqrt[4]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$ B. $r = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$ C. $r = \sqrt[4]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$ D. $r = \sqrt[6]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$

Hướng dẫn giải:

Thể tích của cốc: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 27 \Rightarrow r^2 h = \frac{81}{\pi} \Rightarrow h = \frac{81}{\pi} \cdot \frac{1}{r^2}$

Lượng giấy tiêu thụ ít nhất khi và chỉ khi diện tích xung quanh nhỏ nhất.

$$\begin{aligned} S_{xq} &= 2\pi r l = 2\pi r \sqrt{r^2 + h^2} = 2\pi r \sqrt{r^2 + \frac{81^2}{\pi^2} \frac{1}{r^4}} = 2\pi \sqrt{r^4 + \frac{81^2}{\pi^2} \frac{1}{r^2}} \\ &= 2\pi \sqrt{r^4 + \frac{81^2}{2\pi^2} \frac{1}{r^2} + \frac{81^2}{2\pi^2} \frac{1}{r^2}} \geq 2\pi \sqrt{3^3 \sqrt{r^4 \cdot \frac{81^2}{2\pi^2} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{81^2}{2\pi^2} \frac{1}{r^2}}} = 2\sqrt{3}\pi \sqrt[6]{\frac{81^4}{4\pi^4}} \quad (\text{theo BĐT Cauchy}) \\ S_{xq} \text{ nhỏ nhất} &\Leftrightarrow r^4 = \frac{81^2}{2\pi^2} \frac{1}{r^2} \Leftrightarrow r^6 = \frac{3^8}{2\pi^2} \Leftrightarrow r = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}} \end{aligned}$$

Chọn đáp án B.

Câu 25. Cho một hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều. Thể tích của hình lăng trụ là V . Để diện tích toàn phần của hình lăng trụ nhỏ nhất thì cạnh đáy của lăng trụ là:

A. $\sqrt[3]{4V}$ B. $\sqrt[3]{V}$ C. $\sqrt[3]{2V}$ D. $\sqrt[3]{6V}$

Hướng dẫn giải:

Gọi cạnh đáy của lăng trụ là a , chiều cao lăng trụ là h .

Theo bài ra ta có $V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot h \rightarrow h = \frac{4V}{a^2 \sqrt{3}}$

Diện tích toàn phần của lăng trụ là: $S_{\text{toàn phần}} = S_{\text{2 đáy}} + S_{\text{xung quanh}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} + 3a \cdot \frac{4V}{a^2 \sqrt{3}}$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có: $S_{\text{toàn phần}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} + \frac{4\sqrt{3}V}{a}$

$$= \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{3}V}{a} + \frac{2\sqrt{3}V}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}V}{a} \cdot \frac{2\sqrt{3}V}{a}}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}V}{a} = \frac{2\sqrt{3}V}{a}$ hay $a = \sqrt[3]{4V}$.

Chọn đáp án A.

Câu 26. Trong không gian cho hai điểm phân biệt A, B cố định. Tìm tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3}{4} AB^2$

A. Mặt cầu đường kính AB.

B. Tập hợp rỗng (tức là không có điểm M nào thỏa mãn điều kiện trên).

C. Mặt cầu có tâm I là trung điểm của đoạn thẳng AB và bán kính $R = AB$.

D. Mặt cầu có tâm I là trung điểm của đoạn thẳng AB và bán kính $R = \frac{3}{4} AB$

Hướng dẫn giải:

+ Tam giác MAB có đường trung tuyến IM $\rightarrow \overrightarrow{MI} = \frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}}{2}$

$$\overrightarrow{MI} = \frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}}{2}$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{MI})^2 = \frac{(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})^2}{4} = \frac{(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})^2 + 4\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}}{4} = \frac{(\overrightarrow{BA})^2 + 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot AB^2}{4} = AB^2$$

$$MI = AB$$

Vậy Tập hợp điểm M trong không gian là Mặt cầu có tâm I là trung điểm của đoạn thẳng AB và bán kính $R = AB$

Chọn đáp án C.

Câu 27. Gọi r và h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của một hình nón. Kí hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình nón và thể tích của khối cầu nội tiếp hình nón. Giá trị bé nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là

A. $\frac{5}{4}$.

B. $\frac{4}{3}$.

C. 3.

D. 2.

Hướng dẫn giải:

Ta có: Thể tích khối nón là $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Xét mặt cắt qua tâm SAB, kẻ tia phân giác của góc $\widehat{SBO}$, cắt SO tại I.

$$\text{Ta có: } \frac{IO}{IS} = \frac{OB}{SB} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} \Rightarrow IS = IO \cdot \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{r}$$

$$\text{Mặt khác: } IO + IS = h$$

Do đó ta có bán kính của mặt cầu nội tiếp hình chóp là

$$R = IO = \frac{rh}{r + \sqrt{h^2 + r^2}}$$

$$\text{Thể tích khối cầu là } V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \frac{r^3 h^3}{(r + \sqrt{h^2 + r^2})^3}.$$

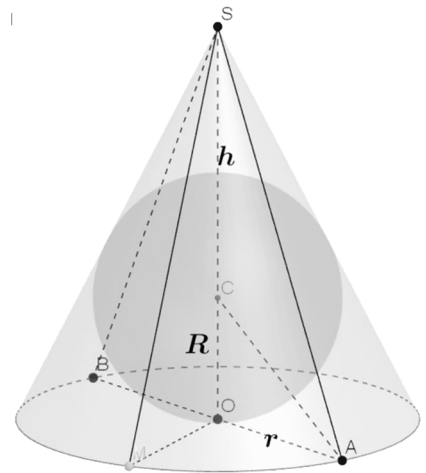
$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{(r + \sqrt{r^2 + h^2})^3}{4rh^2} = \frac{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}}\right)^3}{4 \frac{h^2}{r^2}}. \text{ Đặt } t = \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}} \ (t \geq 1) \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{(1+t)^3}{4(t^2-1)} = \frac{(t+1)^2}{4(t-1)}$$

$$\text{Đặt } f(t) = \frac{(t+1)^2}{t-1}, \text{ Điều kiện: } t \geq 1, f'(t) = \frac{t^2 - 2t - 3}{(t-1)^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3, f(3) = 8$$

$$\text{BBT} \Rightarrow f(t) \geq 8 \forall t \geq 1 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} \geq 2$$

Chọn đáp án D.

Câu 28. Giá trị lớn nhất của thể tích khối nón nội tiếp trong khối cầu có bán kính R là



A. $\frac{1}{3}\pi R^3$.

B. $\frac{4}{3}\pi R^3$.

C. $\frac{4\sqrt{2}}{9}\pi R^3$.

D. $\frac{32}{81}\pi R^3$.

Hướng dẫn giải:

Rõ ràng trong hai khối nón cùng bán kính đáy nội tiếp trong một khối cầu thì khối nón có chiều cao lớn hơn thì thể tích lớn hơn, nên ta chỉ xét khối nón có chiều cao lớn hơn trong hai khối nón đó.

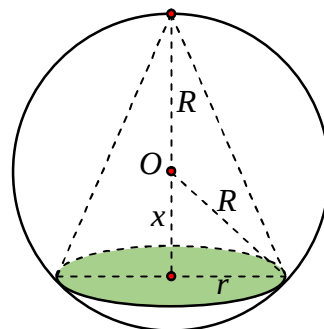
Giả sử rằng khối nón có đáy là hình tròn (C) bán kính r . Gọi x với $f'(x)$ là khoảng cách giữa tâm khối cầu đến đáy khối nón. Khi đó chiều cao lớn nhất của khối nón nội tiếp khối cầu với đáy là hình tròn (C) sẽ là $h = R + x$. Khi đó bán kính đáy nón là

$r = \sqrt{R^2 - x^2}$, suy ra thể tích khối nón là

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(R+x)(R^2 - x^2) = \frac{1}{3}\pi(R+x)(R+x)(R-x) = \frac{1}{6}\pi(R+x)(R+x)(2R-2x)$$

$$\text{Áp dụng BĐT Cô-si ta có } V \leq \frac{1}{6}\pi \frac{(R+x+R+x+2R-2x)^3}{27} = \frac{32\pi R^3}{81}$$

Chọn đáp án D.



NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Câu 1. Cho tích phân $C = \int_a^b \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 3}} dx$ trong đó a là nghiệm của phương trình $2^{x^2+1} = 2$, b là một số dương và $b > a$. Gọi $A = \int_1^2 x^2 dx$. Tìm chữ số hàng đơn vị của b sao cho $C = 3A$.

A. 3

B. 2

C. 4

D. 5

Hướng dẫn giải:

Giải phương trình $2^{x^2+1} = 2 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow a = 0$

Tính tích phân C . Đặt: $t = \sqrt{e^x + 3} \Rightarrow t^2 = e^x + 3 \Rightarrow 2tdt = e^x dx$

$$C = \int_2^{\sqrt{e^b+3}} \frac{2t}{t} dt = \int_2^{\sqrt{e^b+3}} 2dt = 2t \Big|_2^{\sqrt{e^b+3}} = 2\sqrt{e^b+3} - 4$$

Tính tích phân A ta có $A = \frac{7}{3}$

Theo giả thiết

$$C = 3A \Leftrightarrow 2\sqrt{e^b+3} - 4 = 3 \cdot \frac{7}{3} \Leftrightarrow \sqrt{e^b+3} = \frac{11}{2} \Leftrightarrow e^b = \frac{109}{4} \Leftrightarrow b = \ln \frac{109}{4} \approx 3,305053521$$

Chọn đáp án A.

Câu 2. Cho biết tích phân $I = \int_1^e x(2x^2 + \ln x) dx = \frac{a.e^4 + b.e^2 + c}{4}$ với a, b, c là các ước nguyên của 4.

Tổng $a + b + c = ?$

A. 2

B. 4

C. 3

D. 1

Hướng dẫn giải:

$$I = \int_1^e x(2x^2 + \ln x) dx = 2 \int_1^e x^3 dx + \int_1^e x \ln x dx.$$

$$2 \int_1^e x^3 dx = \frac{1}{2} x^4 \Big|_1^e = \frac{1}{2} (e^4 - 1)$$

$$\text{Ta có } \int_1^e x \ln x dx = \frac{1}{2} \left[x^2 \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x^2 \frac{1}{x} dx \right] = \frac{1}{2} \left[e^2 - \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^e \right] = \frac{e^2 + 1}{4}$$

$$I = \int_1^e x(2x^2 + \ln x) dx = \frac{1}{2} (e^4 - 1) + \frac{e^2 + 1}{4} = \frac{2e^4 + e^2 - 1}{4}$$

Chọn đáp án A.

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = \frac{a}{(x+1)^3} + b.xe^x$. Biết rằng $f'(0) = -22$ và $\int_0^1 f(x) dx = 5$. Khi đó tổng $a + b$ bằng?

A. $-\frac{146}{13}$ B. $\frac{26}{11}$ C. $-\frac{26}{11}$ D. $\frac{146}{13}$.

Hướng dẫn giải:

$$f'(x) = \frac{-3a}{(x+1)^4} + be^x(1+x)$$

$$f'(0) = -22 \Leftrightarrow -3a + b = -22 \quad (1)$$

$$\int_0^1 f(x)dx = 5 \Leftrightarrow a \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^3} dx + b \int_0^1 x e^x dx = 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{4} + b = 5 \quad (2)$$

Giải hệ (1) và (2) ta được: $a = \frac{108}{13}$, $b = \frac{38}{13}$.

Chọn đáp án D.

Câu 4. Cho $\int_0^1 f(x)dx = 5$. Tính $I = \int_0^1 f(1-x)dx$

A. 5

B. 10

C. $\frac{1}{5}$

D. $\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải:

Đặt $t = 1 - x \Rightarrow dt = -dx$, $x = 0 \Rightarrow t = 1$
 $x = 1 \Rightarrow t = 0$

$$I = - \int_1^0 f(t)dt = 5$$

Chọn đáp án A.

Câu 5. Biết tích phân $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x} dx = \frac{a\pi+b}{8}$ trong đó $a, b \in \mathbb{N}$. Tính tổng $a+b$?

A. 0

B. 1

C. 3

D. -1

Hướng dẫn giải:

$$I = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x} dx = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x} dx + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x} dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$$

$$\text{Đặt } x = \sin t \Rightarrow I = \frac{\pi+2}{8}.$$

Chọn đáp án C.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(-1;0;-1)$, cắt

$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}$, sao cho $\cos(d; \Delta_2)$ là nhỏ nhất, biết phương trình của đường thẳng

$\Delta_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{2}$. Phương trình đường thẳng d là?

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$

B. $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{-2}$

C. $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{-5} = \frac{z+1}{-2}$

D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$

Hướng dẫn giải:

Gọi $M = d \cap \Delta_1 \Rightarrow M(1+2t; 2+t; -2-t)$.

d có vector chỉ phương là $\vec{u}_d = \overrightarrow{AM} = (2t+2; t+2; -1-t)$.

Δ_2 có vector chỉ phương $\vec{u}_2 = (-1; 2; 2)$.

$$\cos(d; \Delta_2) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{t^2}{6t^2 + 14t + 9}}.$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{6t^2 + 14t + 9}$, ta suy ra được $\min f(t) = f(0) = 0$.

Do đó $\min[\cos(d; \Delta_2)] = 0$ khi $t = 0$. Nên $\overrightarrow{AM} = (2; 2; -1)$.

Vậy phương trình đường thẳng d là: $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

Chọn đáp án A.

Câu 7. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{\tan x}{\cos x \sqrt{1 + a \cos^2 x}}$, biết $F(0) = 0$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Tính

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right)?$$

A. $\sqrt{5} - \sqrt{3}$

B. $\sqrt{5} - 1$

C. $\sqrt{3} + \sqrt{5}$

D. $\sqrt{5} - \sqrt{2}$

Hướng dẫn giải:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos x \sqrt{1 + a \cos^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x \sqrt{\tan^2 x + 1 + a}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\sqrt{\tan^2 x + 1 + a}} d\sqrt{\tan^2 x + 1 + a}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\tan^2 \frac{\pi}{4} + 1 + a} - \sqrt{\tan^2 0 + 1 + a} = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow \sqrt{a+2} = \sqrt{a+1} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a+2 = a+1 + 2\sqrt{a+1}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 5 - 2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \frac{3 - \sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{a+1} \Rightarrow a = 1$$

$$\text{Do đó } F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{\cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}} dx = \sqrt{\tan^2 \frac{\pi}{3} + 2} - \sqrt{\tan^2 \frac{\pi}{4} + 2} = \sqrt{5} - \sqrt{3}.$$

Chọn đáp án A.

Câu 8. Cho $f(x)$ là hàm liên tục và $a > 0$. Giả sử rằng với mọi $x \in [0; a]$, ta có $f(x) > 0$ và

$$f(x)f(a-x) = 1. \text{ Tính } \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)}$$

A. $\frac{a}{2}$

B. $2a$

C. $\frac{a}{3}$

D. $a \ln(a+1)$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Đặt } t = a - x \text{ ta có: } \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = -\int_a^0 \frac{dt}{1+f(a-t)} = \int_0^a \frac{f(t)dt}{f(t)+1}$$

$$\text{Suy ra: } \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = \frac{a}{2}$$

Chọn đáp án A.

Câu 9. Tích phân $I = \int_1^2 \frac{x^{2001}}{(1+x^2)^{1002}} dx$ có giá trị là

A. $\frac{1}{2002.2^{1001}}$

B. $\frac{1}{2001.2^{1001}}$

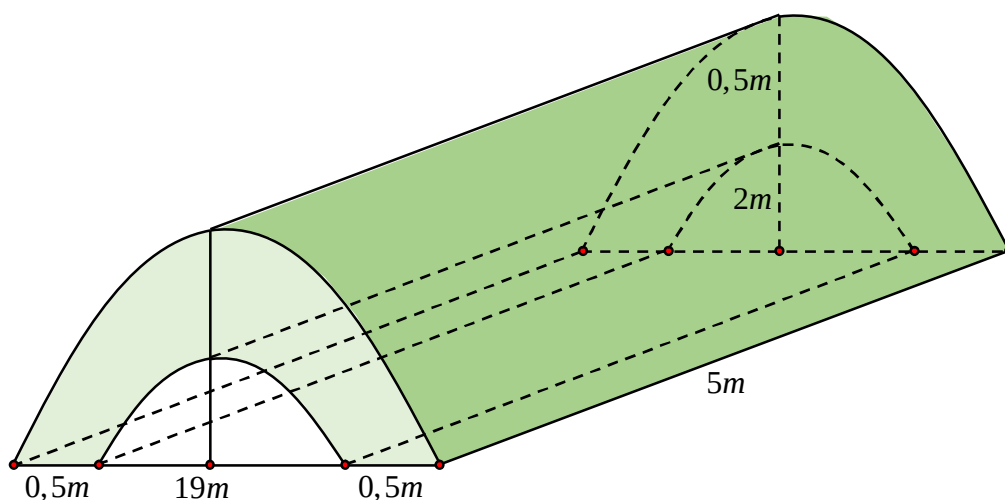
C. $\frac{1}{2001.2^{1002}}$

D. $\frac{1}{2002.2^{1002}}$

Hướng dẫn giải:

$$I = \int_1^2 \frac{x^{2004}}{x^3(1+x^2)^{1002}} dx = \int_1^2 \frac{1}{x^3 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)^{1002}} dx. \text{ Đặt } t = \frac{1}{x^2} + 1 \Rightarrow dt = -\frac{2}{x^3} dx.$$

Câu 10. Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã X có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol).



A. $19m^3$

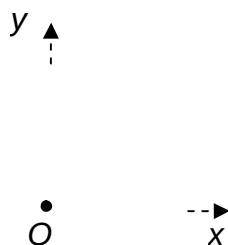
B. $21m^3$

C. $18m^3$

D. $40m^3$

Hướng dẫn giải:

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Ta có

Gọi $(P_1): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2}; 0\right), B(0; 2)$

Nên ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 0 = a \cdot \left(\frac{19}{2}\right)^2 + 2 \\ 2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{8}{361} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2$$

Gọi $(P_2): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $C(10; 0), D\left(0; \frac{5}{2}\right)$

Câu 11. Cho f, g là hai hàm liên tục trên $[1; 3]$ thỏa: $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10$.

$\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6$. Tính $\int_1^3 [f(x) + g(x)] dx$.

A. 8.

B. 9.

C. 6.

D. 7.

Hướng dẫn giải:

+ Ta có $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx + 3 \int_1^3 g(x) dx = 10$.

+ Tương tự $\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6 \Leftrightarrow 2 \int_1^3 f(x) dx - \int_1^3 g(x) dx = 6$.

+ Xét hệ phương trình $\begin{cases} u + 3v = 10 \\ 2u - v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 \\ v = 2 \end{cases}$, trong đó $u = \int_1^3 f(x) dx$, $v = \int_1^3 g(x) dx$.

+ Khi đó $\int_1^3 [f(x) + g(x)] dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_1^3 g(x) dx = 4 + 2 = 6$.

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a \cdot (10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{40} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}$

Ta có thể tích của bê tông là: $V = 5.2 \left[\int_0^{10} \left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2} \right) dx - \int_0^{\frac{19}{2}} \left(-\frac{8}{361}x^2 + 2 \right) dx \right] = 40m^3$

Câu 12. Gọi S_a là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^{2x} - 2e^x$, trục Ox và đường thẳng $x = a$ với $a < \ln 2$. Kết quả giới hạn $\lim_{a \rightarrow -\infty} S_a$ là:

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Hướng dẫn giải:

Ta có $S_a = \int_a^{\ln 2} (e^{2x} - 2e^x) dx = \frac{1}{2}e^{2a} - 2e^a + 2$

Suy ra $\lim_{a \rightarrow -\infty} S_a = 2$, chọn đáp án **B**.

Câu 13. Một khối cầu có bán kính $5dm$, người ta cắt bỏ 2 phần bằng 2 mặt phẳng vuông góc bán kính và cách tâm $3dm$ để làm một chiếc lu đựng. Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.

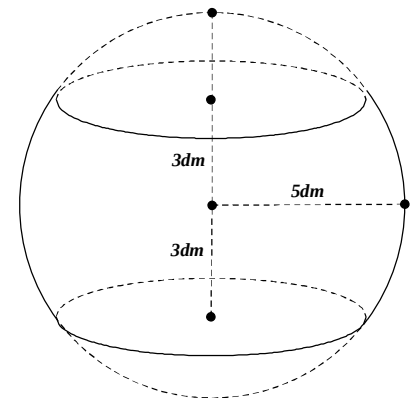
A. $132\pi (dm^3)$ B. $41\pi (dm^3)$ C. $\frac{100}{3}\pi (dm^3)$ D. $43\pi (dm^3)$

Hướng dẫn giải:

Đặt hệ trục với tâm O, là tâm của mặt cầu; đường thẳng đứng là Ox, đường ngang là Oy; đường tròn lớn có phương trình $x^2 + y^2 = 25$.

Thể tích là do hình giới hạn bởi Ox, đường cong $y = \sqrt{25 - x^2}$, $x = 3, x = -3$ quay quanh Ox.

$V = \pi \int_{-3}^3 (25 - x^2) dx = 132\pi$ (bấm máy)



Câu 14. Một vật di chuyển với gia tốc $a(t) = -20(1+2t)^{-2} \text{ (m/s}^2\text{)}$. Khi $t = 0$ thì vận tốc của vật là 30 m/s . Tính quãng đường vật đó di chuyển sau 2 giây (làm tròn kết quả đến chữ số hàng đơn vị).

A. $S = 106 \text{ m}$.B. $S = 107 \text{ m}$.C. $S = 108 \text{ m}$.D. $S = 109 \text{ m}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $v(t) = \int a(t) dt = \int -20(1+2t)^{-2} dt = \frac{10}{1+2t} + C$. Theo đề ta có

$v(0) = 30 \Leftrightarrow C + 10 = 30 \Leftrightarrow C = 20$. Vậy quãng đường vật đó đi được sau 2 giây là:

$$S = \int_0^2 \left(\frac{10}{1+2t} + 20 \right) dt = \left(5 \ln(1+2t) + 20t \right) \Big|_0^2 = 5 \ln 5 + 100 \approx 108 \text{ m}.$$

Câu 15. Tìm giá trị của tham số m sao cho: $y = x^3 - 3x + 2$ và $y = m(x+2)$ giới hạn bởi hai hình phẳng có cùng diện tích

A. $0 < m < 1$ B. $m = 1$ C. $1 < m < 9$ D. $m = 9$

Hướng dẫn giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x + 2 = m(x+2)$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ hoặc } x = 1 \pm \sqrt{m}, m \geq 0.$$

Điều kiện d: $y = m(x+2)$ và (C): $y = x^3 - 3x + 2$ giới hạn 2 hình phẳng: $0 < m \neq 9$.

Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích các hình phẳng nhận được theo thứ tự từ trái sang phải.

Nếu $m = 1$: d đi qua điểm uốn $(0; 2)$ của (C). Khi đó $S_1 = S_2 = \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx = 4$

Nếu $0 < m < 1$: $S_1 > 4 > S_2$

Nếu $1 < m < 9$: $S_1 < 4 < S_2$

Nếu $m > 9 \Rightarrow 1 - \sqrt{m} < -2; 1 + \sqrt{m} > 4$. Khi đó:

$$S_1 = \int_{1-\sqrt{m}}^{-2} |x^3 - 3x + 2 - m(x+2)| dx; S_2 = \int_{-2}^{1+\sqrt{m}} |x^3 - 3x + 2 - m(x+2)| dx$$

$$S_2 - S_1 = 2m\sqrt{m} > 0$$

Vậy $m = 1$ thỏa yêu cầu bài toán

Câu 16. Cho $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-1}$

B. $I_n = \frac{n-2}{n} I_{n-2}$

C. $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

D. $I_n = 2I_{n-2}$

Hướng dẫn giải:

Với $I_0 = \frac{\pi}{2}; I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$.

Đặt $u = \cos^{n-1} x \Rightarrow du = -(n-1) \cos^{n-2} x \cdot \sin x dx$.

$dv = \cos x dx$ chọn $v = \sin x$.

$$\text{Suy ra } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \cos^{n-1} x \cdot \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \cdot \sin^2 x dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \cdot (1 - \cos^2 x) dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$$

$$\text{Do đó } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x dx.$$

Chọn đáp án C.

Câu 17. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 - 2x - 2m - \frac{1}{3}$ có đồ thị (C). Tìm $m \in \left(0; \frac{5}{6}\right)$ sao cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và các đường thẳng $x=0$, $x=2$, $y=0$ và có diện tích bằng 4.

A. $m = \frac{1}{4}$

B. $m = \frac{1}{3}$

C. $m = \frac{1}{2}$

D. $m = 1$

Hướng dẫn giải:

Xét hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 - 2x - 2m - \frac{1}{3}$ trên $[0; 2]$. Ta có $y' = x^2 + 2mx - 2$,

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -m - \sqrt{m^2 + 2} \\ x = -m + \sqrt{m^2 + 2} \end{cases}. \text{ Do } m \in \left(0; \frac{5}{6}\right) \text{ nên } -m - \sqrt{m^2 + 2} < 0, \quad 0 < -m + \sqrt{m^2 + 2} < 2$$

$$\text{và } y(0) = -2m - \frac{1}{3} < 0, \quad y(2) = 2m - \frac{5}{3} < 0.$$

Ta có bảng biến thiên trong $[0; 2]$

x	0	$-m + \sqrt{m^2 + 2}$	2
y'	-	0	+
y	$y(0)$		$y(2)$

Dựa vào BBT suy ra $y < 0, \forall x \in (0; 2)$

Gọi S là diện tích hình phẳng cần tìm. Ta có:

$$S = 4 \Leftrightarrow \int_0^2 \left| \frac{1}{3}x^3 + mx^2 - 2x - 2m - \frac{1}{3} \right| dx = 4$$

$$\Leftrightarrow - \int_0^2 \left(\frac{1}{3}x^3 + mx^2 - 2x - 2m - \frac{1}{3} \right) dx = 4 \Leftrightarrow \frac{4m+10}{3} = 4 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

Chọn đáp án C.

Câu 18. Trong hệ trục Oxy, cho tam giác OAB vuông ở A, điểm B nằm trong góc phần tư thứ nhất. A nằm trên trục hoành, OB = 2017. Góc $\widehat{AOB} = \alpha$, $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{3}\right)$. Khi quay tam giác đó quanh trục Ox ta được khối nón tròn xoay. Thể tích của khối nón lớn nhất khi:

- A.** $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ **B.** $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ **D.** $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Hướng dẫn giải:

Phương trình đường thẳng OB: $y = x \cdot \tan \alpha$; $OA = 2017 \cos \alpha$.

Khi đó thể tích nón tròn xoay là:

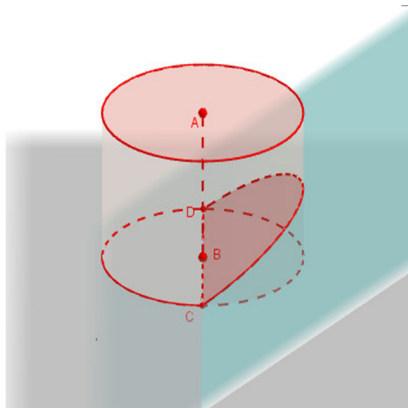
$$V = \pi \int_0^{2017 \cos \alpha} x^2 \tan^2 \alpha \cdot dx = \frac{2017^3 \cdot \pi}{3} \cdot \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha = \frac{2017^3 \cdot \pi}{3} \cdot \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha).$$

Đặt $t = \cos \alpha \Rightarrow t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. Xét hàm số $f(t) = t(1 - t^2)$, $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

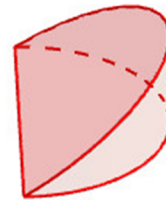
Ta tìm được $f(t)$ lớn nhất khi $t = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án A.

Câu 19. Từ một khúc gỗ hình trụ có đường kính 30cm, người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua đường kính đáy và nghiêng với đáy một góc 45° để lấy một hình nêm (xem hình minh họa dưới đây)



Hình 1



Hình 2

Kí hiệu V là thể tích của hình nêm (Hình 2). Tính V .

- A.** $V = 2250 (cm^3)$ **B.** $V = \frac{225\pi}{4} (cm^3)$ **C.** $V = 1250 (cm^3)$ **D.** $V = 1350 (cm^3)$

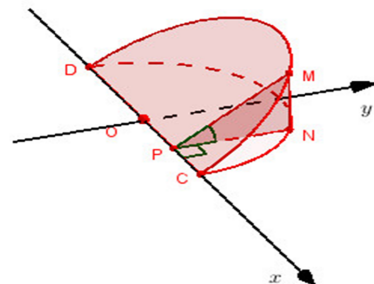
Hướng dẫn giải:

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó hình nêm có đáy

là nửa hình tròn có phương trình:

$$y = \sqrt{225 - x^2}, x \in [-15; 15]$$

Một mặt phẳng cắt vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x , ($x \in [-15; 15]$)



cắt hình nêm theo thiết diện có diện tích là $S(x)$ (xem hình).

Dễ thấy $NP = y$ và $MN = NP \tan 45^\circ = y = \sqrt{15 - x^2}$ khi đó $S(x) = \frac{1}{2} MN \cdot NP = \frac{1}{2} \cdot (225 - x^2)$

suy ra thể tích hình nêm là: $V = \int_{-15}^{15} S(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-15}^{15} (225 - x^2) dx = 2250 (cm^3)$

Câu 20. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + 2 (C)$ cắt trục ox tại bốn điểm phân biệt và thỏa mãn hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục ox của phần nằm phía trên trục ox có diện tích bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục ox của phần nằm phía dưới trục ox .

A. 3

B. -3

C. 2

D. 4

Hướng dẫn giải:

Điều kiện để (C) cắt trục ox tại 4 điểm phân biệt là $m > 2$

Do tính đối xứng của đồ thị qua trục tung nên bài toán xảy ra khi

$$\int_0^{x_3} (x^4 - 2mx^2 + m + 2) dx = - \int_{x_3}^{x_4} (x^4 - 2mx^2 + m + 2) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{x_4} (x^4 - 2mx^2 + m + 2) dx = 0 \Leftrightarrow 3x_4^4 - 10mx_4^2 + 15(m + 2) = 0$$

$$\text{Suy ra } x_4 \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x_4^4 - 2mx_4^2 + m + 2 = 0 \\ 3x_4^4 - 10mx_4^2 + 15(m + 2) = 0 \end{cases} \Rightarrow x_4^2 = \frac{3m + 6}{m} \Rightarrow m = 3$$

Chọn đáp án A.

Câu 21. Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + m$ có đồ thị là (C) . Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) với $y < 0$ và trục hoành, S' là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) với $y > 0$ và trục hoành. Với giá trị nào của m thì $S = S'$?

A. $m = 2$ B. $m = \frac{2}{9}$ C. $m = \frac{20}{9}$ D. $m = 1$

Hướng dẫn giải: Phương trình hoành độ giao điểm $x^4 - 4x^2 + m = 0 (*)$

Đặt $x^2 = t; t \geq 0$, phương trình trở thành: $t^2 - 4t + m = 0 (**)$

Để $S > 0, S' > 0$ thì $0 < m < 4$. Khi đó $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt $-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$ với $t_1; t_2, (t_1 < t_2)$ là hai nghiệm dương phân biệt của $(**)$

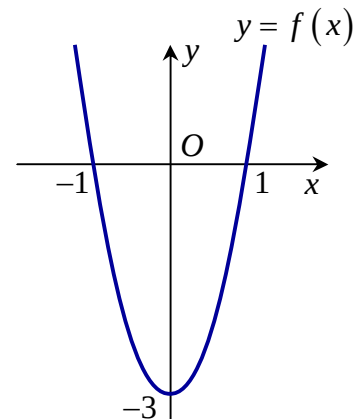
Do ĐTHS hàm bậc 4 nhận Oy làm trục đối xứng nên

$$S = S' \Leftrightarrow \int_0^{\sqrt{t_1}} (x^4 - 4x^2 + m) dx = \int_{\sqrt{t_2}}^{\sqrt{t_1}} (x^4 - 4x^2 + m) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\sqrt{t_2}} (x^4 - 4x^2 + m) dx = 0 \Leftrightarrow \frac{t_2^2}{5} - \frac{4t_2}{3} + m = 0$$

Kết hợp với $(**)$ ta được $m = \frac{20}{9}$.

Chọn đáp án C.



Câu 22. Cho $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) có đồ thị (C) . Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành.

- A. $S = 9$. B. $S = \frac{27}{4}$.
C. $S = \frac{21}{4}$. D. $S = \frac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Từ đồ thị suy ra $f'(x) = 3x^2 - 3$.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x^2 - 3) dx = x^3 - 3x + C.$$

Do (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ x_0 âm nên

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1.$$

Vậy $f(-1) = 4$ nên có ngay $C = 2$. Vậy phương trình đường cong (C) là $y = x^3 - 3x + 2$.

$$\text{Xét phương trình } x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Diện tích hình phẳng cần tìm là } \int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2) dx = \frac{27}{4}.$$

Chọn đáp án B.

Câu 23. Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn $[-6; 6]$. Biết rằng $\int_{-1}^2 f(x) dx = 8$ và

$$\int_1^3 f(-2x) dx = 3. \text{ Tính } \int_{-1}^6 f(x) dx.$$

- A. $I = 11$. B. $I = 5$. C. $I = 2$. D. $I = 14$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Xét tích phân } K = \int_1^3 f(-2x) dx$$

$$\text{Đặt } u = -2x \Rightarrow du = -2dx \Rightarrow dx = -\frac{du}{2}$$

$$\text{Đổi cận: Khi } x = 1 \Rightarrow u = -2; x = 3 \Rightarrow u = -6$$

$$\text{Vậy, } K = -\frac{1}{2} \int_{-2}^{-6} f(u) du = \frac{1}{2} \int_{-6}^{-2} f(x) dx. \text{ Mà } K = 3, \text{ nên } \int_{-6}^{-2} f(x) dx = 6.$$

$$\text{Vì } f \text{ là hàm chẵn trên } [-6; 6] \text{ nên } \int_2^6 f(x) dx = \int_{-6}^{-2} f(x) dx = 6.$$

$$\text{Từ đó suy ra } I = \int_{-1}^6 f(x) dx = \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx = 8 + 6 = 14.$$

Chọn đáp án D.

Câu 24. Biết $\int_0^2 e^x (2x + e^x) dx = a.e^4 + b.e^2 + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Tính $S = a + b + c$

- A. $S = 2$ B. $S = -4$ C. $S = -2$ D. $S = 4$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } I = \int_0^2 e^x (2x + e^x) dx = \int_0^2 e^{2x} dx + \int_0^2 2x \cdot e^x dx = \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^2 + 2 \int_0^2 x e^x dx = \frac{e^x}{2} - \frac{1}{2} + 2 \int_0^2 x e^x dx$$

Đặt

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow I = \frac{e^4}{2} - \frac{1}{2} + (2x \cdot e^x) \Big|_0^2 - 2 \int_0^2 e^x dx = \frac{e^4}{2} - \frac{1}{2} + (2x \cdot e^2) \Big|_0^2 - (2e^x) \Big|_0^2 = \frac{e^4}{2} + 2e^2 + \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}; c = \frac{3}{2} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow S = a + b + c = 4$$

Chọn đáp án D.

Câu 25. Rút gọn biểu thức: $T = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n, n \in \mathbb{N}^*$.

A. $T = \frac{2^n}{n+1}$

B. $T = 2^{n+1}$

C. $T = \frac{2^n - 1}{n+1}$

D. $T = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$

Hướng dẫn giải:

Ta có

$$T = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n. \text{ Nhận thấy các số } \frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{n+1} \text{ thay đổi ta nghĩ ngay đến biểu thức}$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c.$$

Ở đây ta sẽ có lời giải như sau: $(1+x)^n = C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + x^3C_n^3 + \dots + x^nC_n^n.$

$$\text{Khi đó ta suy ra } \int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 (C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + x^3C_n^3 + \dots + x^nC_n^n) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} (x+1)^{n+1} \Big|_0^1 = \left(C_n^0 x + \frac{x^2}{2} C_n^1 + \frac{x^3}{3} C_n^2 + \dots + \frac{x^{n+1}}{n+1} C_n^n \right) \Big|_0^1 \Leftrightarrow \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n.$$

Chọn đáp án D.

Câu 26. Hàm số nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. $F(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$

B. $F(x) = \ln(1 + \sqrt{1+x^2}) + C$

C. $F(x) = \sqrt{1+x^2} + C$

D. $F(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} + C$

Hướng dẫn giải:

Ta có bài toán gốc sau:

Bài toán gốc: Chứng minh $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + c (a \in \mathbb{R})$

$$\text{Đặt } t = x + \sqrt{x^2 + a} \Rightarrow dt = \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a}} \right) dx \Leftrightarrow dt = \frac{x + \sqrt{x^2 + a}}{\sqrt{x^2 + a}} dx \Leftrightarrow dt = \frac{tdx}{\sqrt{x^2 + a}} \Leftrightarrow \frac{dt}{t} = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$$

$$\text{Vậy khi đó } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + c \text{ (điều phải chứng minh).}$$

Khi đó áp dụng công thức vừa chứng minh ta có

$$F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + c = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c.$$

Chọn đáp án A.

Câu 27. Trong các số dưới đây, số nào ghi giá trị của $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{x-1} \cdot \cos x}{1+2^x} dx$

A. $\frac{1}{2}$

B. 0

C. 2

D. 1

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{x-1} \cos x}{1+2^x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x \cos x}{(1+2^x) \cdot 2} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x \cos x}{(1+2^x) \cdot 2} dx \quad (1)$$

Đặt $x = -t$ ta có $x = 0$ thì $t = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{2}$ và $dx = -dt$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x \cos x}{(1+2^x) \cdot 2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{-t} \cos(-t)}{(1+2^{-t}) \cdot 2} d(-t) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(1+2^t) \cdot 2} dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+2^x) \cdot 2} dx$$

Thay vào (1) có

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{x-1} \cos x}{1+2^x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x \cos x}{(1+2^x) \cdot 2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+2^x) \cdot 2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+2^x) \cos x}{(1+2^x) \cdot 2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2} dx = \frac{\sin x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{x-1} \cos x}{1+2^x} dx = \frac{1}{2}$$

Chọn đáp án A.

Câu 28. Người ta dựng một cái lều vải (H) có dạng hình “chóp lục giác cong đều” như hình vẽ bên. Đáy của (H) là một hình lục giác đều cạnh $3m$. Chiều cao $SO = 6m$ (SO vuông góc với mặt phẳng đáy). Các cạnh bên của (H) là các sợi dây $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ nằm trên các đường parabol có trục đối xứng song song với SO . Giả sử giao tuyến (nếu có) của (H) với mặt phẳng (P) vuông góc với SO là một lục giác đều và khi (P) qua trung điểm của SO thì lục giác đều có cạnh $1m$. Tính thể tích phần không gian nằm bên trong cái lều (H) đó.

A. $\frac{135\sqrt{3}}{5} (m^3)$.

B. $\frac{96\sqrt{3}}{5} (m^3)$.

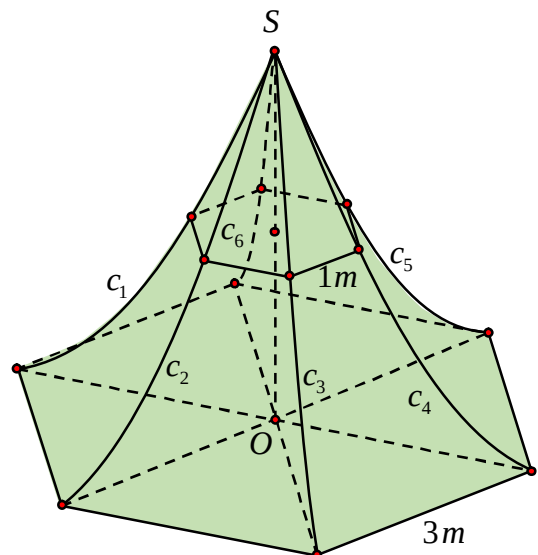
C. $\frac{135\sqrt{3}}{4} (m^3)$.

D. $\frac{135\sqrt{3}}{8} (m^3)$.

Hướng dẫn giải:

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có parabol cần tìm đi qua 3 điểm có tọa độ lần lượt là $A(0;6)$,

$B(1;3)$, $C(3;0)$ nên có phương trình là $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 6$



Theo hình vẽ ta có cạnh của “thiết diện lục giác” là BM .

Nếu ta đặt $t = OM$ thì $BM = \frac{7}{2} - \sqrt{2t + \frac{1}{4}}$ (chú ý là ta phải

lấy giá trị có dấu “-” trước dấu căn và cho B chạy từ C đến A).

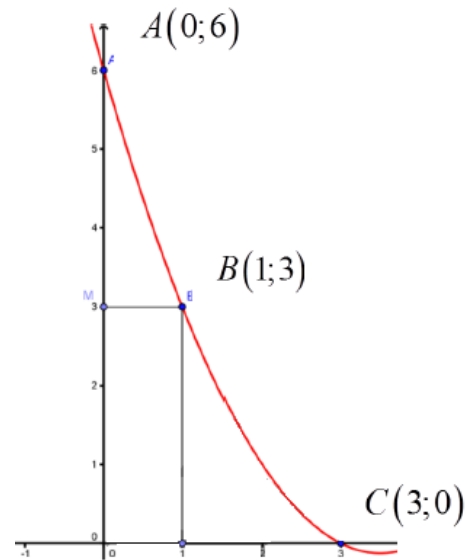
Khi đó, diện tích của “thiết diện lục giác” bằng

$$S(t) = 6 \cdot \frac{BM^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{7}{2} - \sqrt{2t + \frac{1}{4}} \right)^2 \text{ với } t \in [0; 6].$$

Vậy thể tích của “túp lều” theo đề bài là:

$$V = \int_0^6 S(t) dt = \int_0^6 \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{7}{2} - \sqrt{2t + \frac{1}{4}} \right)^2 dt = \dots = \frac{135\sqrt{3}}{8}$$

Chọn đáp án D.



Câu 29. Xét hàm số $y = f(x)$ liên tục trên miền $D = [a; b]$ có đồ thị là một đường cong C . Gọi S là phần giới hạn bởi C và các đường thẳng $x = a$, $x = b$. Người ta chứng minh được rằng diện tích mặt cong tròn xoay tạo thành khi xoay S quanh Ox bằng $S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$. Theo kết quả trên, tổng diện tích bề mặt của khối tròn xoay tạo thành khi xoay phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = \frac{2x^2 - \ln x}{4}$ và các đường thẳng $x = 1$, $x = e$ quanh Ox là

A. $\frac{2e^2 - 1}{8} \pi$.

B. $\frac{4e^4 - 9}{64} \pi$.

C. $\frac{4e^4 + 16e^2 + 7}{16} \pi$.

D. $\frac{4e^4 - 9}{16} \pi$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{2x^2 - \ln x}{4} = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4} \Rightarrow f'(x) = x - \frac{1}{4x} \Rightarrow (f'(x))^2 = \left(x - \frac{1}{4x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{16x^2} - \frac{1}{2}$$

Lại có $f'(x) = x - \frac{1}{4x} > 0, \forall x \in (1; e)$, nên $f(x)$ đồng biến trên $[1; e]$. Suy ra

$$f(x) \geq f(1) = \frac{1}{2} > 0, \forall x \in [1; e].$$

Từ đây ta thực hiện phép tính như sau

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4} \right) \sqrt{1 + \left(x^2 + \frac{1}{16x^2} - \frac{1}{2} \right)} dx$$

$$S = 2\pi \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4} \right) \sqrt{x^2 + \frac{1}{16x^2} + \frac{1}{2}} dx = 2\pi \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4} \right) \sqrt{\left(x + \frac{1}{4x} \right)^2} dx$$

$$= 2\pi \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4} \right) \left(x + \frac{1}{4x} \right) dx$$

$$= 2\pi \int_1^e \left(\frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{8} x - \frac{1}{4} x \ln x - \frac{1}{16} \frac{\ln x}{x} \right) dx$$

$$= 2\pi (I_1 + I_2 + I_3)$$

$$\text{Với } I_1 = \int_1^e \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x \right) dx = \left(\frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{16} \right) \Big|_1^e = \frac{2e^4 + e^2 - 3}{16}$$

$$I_2 = \int_1^e \left(-\frac{1}{4}x \ln x \right) dx = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} x^2 (2 \ln x - 1) \Big|_1^e = -\frac{1}{16}e^2 - \frac{1}{16}$$

$$I_3 = \int_1^e \left(-\frac{1}{16} \frac{\ln x}{x} \right) dx = -\frac{1}{32} \ln^2 x \Big|_1^e = -\frac{1}{32}.$$

Chọn đáp án D.

Câu 30. Cho hàm số $y = \frac{x^4}{2} - 2m^2x^2 + 2$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị của hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu, đồng thời đường thẳng cùng phương với trục hoành qua điểm cực đại tạo với đồ thị một hình phẳng có diện tích bằng $\frac{64}{15}$ là

- A. $\emptyset$. B. $\{\pm 1\}$. C. $\left\{ \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm 1 \right\}$. D. $\left\{ \pm \frac{1}{2}; \pm 1 \right\}$.

Hướng dẫn giải:

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

$$y' = 2x^3 - 4m^2x = 2x(x^2 - 2m^2); \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{2}m \\ x = -\sqrt{2}m \end{cases}$$

Đồ thị của hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow m \neq 0$

Vì $a = \frac{1}{2} > 0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ suy ra điểm cực đại của đồ thị hàm số là $A(0; 2)$

Đường thẳng cùng phương với trục hoành qua điểm cực đại có phương trình là $d: y = 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và d là:

$$\frac{x^4}{2} - 2m^2x^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 = 4m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2|m| \\ x = -2|m| \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là: (chú ý rằng hàm số đã cho là hàm chẵn)

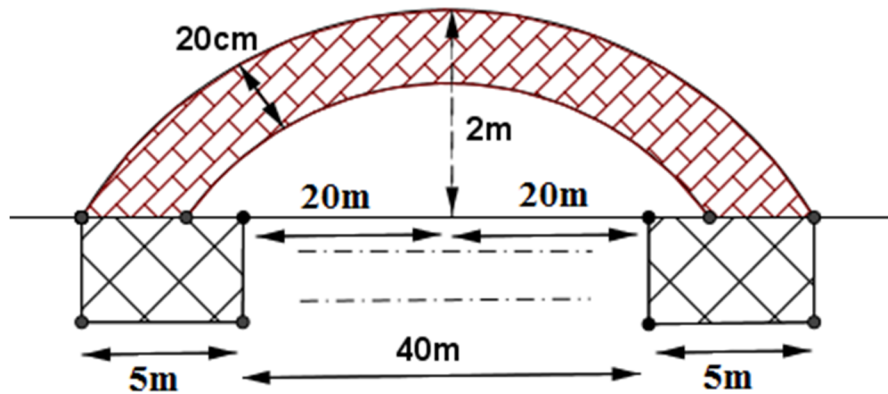
$$\begin{aligned} S &= \int_{-2|m|}^{2|m|} \left| \frac{x^4}{2} - 2m^2x^2 \right| dx = 2 \int_0^{2|m|} \left| \frac{x^4}{2} - 2m^2x^2 \right| dx = 2 \left| \int_0^{2|m|} \left(\frac{x^4}{2} - 2m^2x^2 \right) dx \right| \\ &= 2 \left| \left(\frac{x^5}{10} - \frac{2}{3}m^2x^3 \right) \Big|_0^{2|m|} \right| = \frac{64}{15}|m|^5 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } S = \frac{64}{15} \Leftrightarrow |m| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

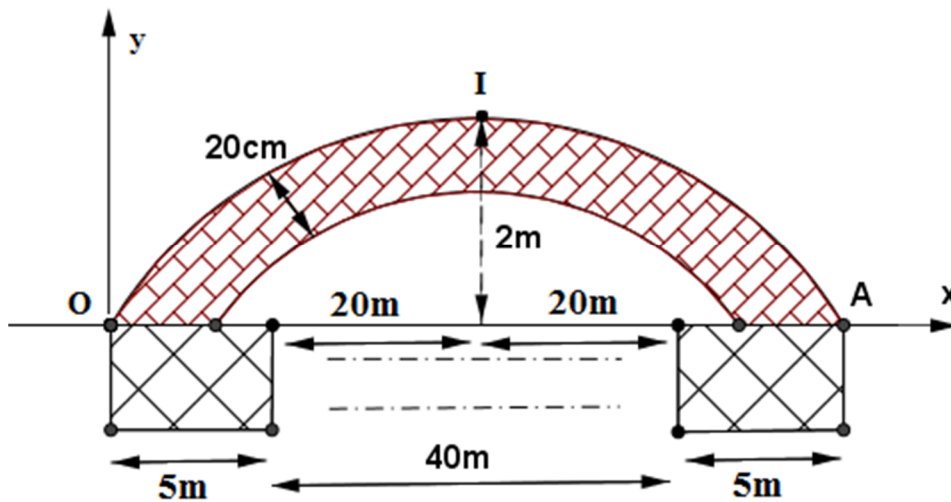
Chọn đáp án B.

Câu 31. Thành phố định xây cây cầu bắc ngang con sông dài 500m, biết rằng người ta định xây cầu có 10 nhịp cầu hình dạng parabol, mỗi nhịp cách nhau 40m, biết 2 bên đầu cầu và giữa mỗi nhịp nối người

ta xây 1 chân trụ rộng 5m. Bề dày nhịp cầu không đổi là 20cm. Biết 1 nhịp cầu như hình vẽ. Hỏi lượng bê tông để xây các nhịp cầu là bao nhiêu (bỏ qua diện tích cốt sắt trong mỗi nhịp cầu)

A. $20m^3$ B. $50m^3$ C. $40m^3$ D. $100m^3$ **Hướng dẫn giải:**

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ với gốc $O(0;0)$ là chân cầu (điểm tiếp xúc Parabol trên), đỉnh $I(25; 2)$, điểm $A(50;0)$ (điểm tiếp xúc Parabol trên với chân đế)



Gọi Parabol trên có phương trình $(P_1): y_1 = ax^2 + bx + c = ax^2 + bx$ (do (P) đi qua O)

$\Rightarrow y_2 = ax^2 + bx - \frac{20}{100} = ax^2 + bx - \frac{1}{5}$ là phương trình parabol dưới

Ta có (P_1) đi qua I và A $\Rightarrow (P_1): y_1 = -\frac{2}{625}x^2 + \frac{4}{25}x \Rightarrow y_2 = -\frac{2}{625}x^2 + \frac{4}{25}x - \frac{1}{5}$

Khi đó diện tích mỗi nhịp cầu là $S = 2S_1$ với S_1 là phần giới hạn bởi $y_1; y_2$ trong khoảng $(0; 25)$

$$S = 2 \left(\int_0^{25} \left(-\frac{2}{625}x^2 + \frac{4}{25}x \right) dx + \int_{0,2}^{25} \frac{1}{5} dx \right) \approx 9,9m^2$$

Vì bề dày nhịp cầu không đổi nên coi thể tích là tích diện tích và bề dày
 $V = S \cdot 0,2 \approx 9,9 \cdot 0,2 \approx 1,98m^3 \Rightarrow$ số lượng bê tông cần cho mỗi nhịp cầu $\approx 2m^3$

Vậy 10 nhịp cầu 2 bên cần $\approx 40m^3$ bê tông.

Chọn đáp án C.

HÌNH HỌC TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN OXYZ

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;5;0)$, $B(3;3;6)$ và đường thẳng Δ

có phương trình tham số $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Một điểm M thay đổi trên đường thẳng Δ , xác định vị

trí của điểm M để chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó tọa độ của điểm M là:

- A.** $M(1;0;2)$ **B.** $M(2;4;3)$ **C.** $M(-3;2;-2)$ **D.** $M(1;4;3)$

Hướng dẫn giải:

Gọi P là chu vi của tam giác MAB thì $P = AB + AM + BM$

Vì AB không đổi nên P nhỏ nhất khi và chỉ khi $AM + BM$ nhỏ nhất.

Điểm $M \in \Delta$ nên $M(-1+2t; 1-t; 2t)$; $AM + BM = \sqrt{(3t)^2 + (2\sqrt{5})^2} + \sqrt{(3t-6)^2 + (2\sqrt{5})^2}$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ta xét hai vector $\vec{u} = (3t; 2\sqrt{5})$ và $\vec{v} = (-3t+6; 2\sqrt{5})$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{(3t)^2 + (2\sqrt{5})^2} \\ |\vec{v}| = \sqrt{(3t-6)^2 + (2\sqrt{5})^2} \end{cases} \Rightarrow AM + BM = |\vec{u}| + |\vec{v}| \text{ và } \vec{u} + \vec{v} = (6; 4\sqrt{5}) \Rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = 2\sqrt{29}$$

Mặt khác, ta luôn có $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$ Như vậy $AM + BM \geq 2\sqrt{29}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \frac{3t}{-3t+6} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow t = 1$

$\Rightarrow M(1;0;2)$ và $\min(AM + BM) = 2\sqrt{29}$. Vậy khi $M(1;0;2)$ thì $\min P = 2(\sqrt{11} + \sqrt{29})$

Chọn đáp án A.

Câu 2. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho các phương trình mặt phẳng

$(\alpha_m): 3mx + 5\sqrt{1-m^2}y + 4mz + 20 = 0, m \in [-1;1]$.

Xét các mệnh đề sau:

(I) Với mọi $m \in [-1;1]$ thì các mặt phẳng (α_m) luôn tiếp xúc với một mặt cầu không đổi.

(II) Với mọi $m \neq 0$ thì các mặt phẳng (α_m) luôn cắt mặt phẳng (Oxz).

(III) $d[O;(\alpha_m)] = \sqrt{5}, \forall m \in [-1;1]$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** Chỉ (I) và (II) **B.** Chỉ (I) và (III) **C.** Chỉ (II) và (III) **D.** Cả 3 đều đúng.

Hướng dẫn giải:

$$+ \text{Ta có } d[O;(\alpha_m)] = \frac{|20|}{\sqrt{9m^2 + 25(1-m^2) + 16m^2}} = \frac{20}{\sqrt{25}} = 4, \text{ với mọi } m \in [-1;1].$$

Do đó với mọi m thay đổi trên $[-1;1]$ thì các mặt phẳng (α_m) luôn tiếp xúc với mặt cầu tâm O, bán kính $R = 4$. Khẳng định (I) đúng.

+ Vector pháp tuyến của mặt phẳng (α_m) là $\vec{n} = (3m; 5\sqrt{1-m^2}; 4m)$ và vector pháp tuyến của mặt phẳng (Oxz) là $\vec{j} = (0;1;0)$.

(α_m) cắt (Oxz) khi và chỉ khi $\left[\vec{n}; \vec{j}\right] \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$. Khẳng định (II) đúng.

+ Khẳng định (III) sai.

Chọn đáp án A.

Câu 3. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho 2 đường thẳng:

$$\Delta_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-3}, \Delta_2: \begin{cases} x=t \\ y=2-t \\ z=1+2t \end{cases} \text{ và mặt cầu } (S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 6z - 5 = 0$$

Viết phương trình mặt phẳng (α) song song với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có chu vi bằng $\frac{2\sqrt{365}\pi}{5}$.

A. $x-5y-3z-4=0; x-5y-3z+10=0$

B. $x-5y-3z+10=0$

C. $x-5y-3z+3+\sqrt{511}=0; x-5y-3z+3-\sqrt{511}=0$

D. $x-5y-3z-4=0$

Chọn đáp án B.

Hướng dẫn giải:

+ Δ_1 qua $M_1(2; -1; 1)$ và có vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (1; 2; -3)$.

Δ_2 qua $M_2(0; 2; 1)$ và có vector chỉ phương $\vec{u}_2 = (1; -1; 2)$.

+ Mặt phẳng (α) song song với Δ_1, Δ_2 nên có vector pháp tuyến: $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (1; -5; -3)$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $x-5y-3z+D=0$

+ Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -1; 3)$ và bán kính $R=4$.

Gọi r là bán kính đường tròn (C), ta có: $2\pi r = \frac{2\sqrt{365}\pi}{5} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{365}}{5}$

$$\text{Khi đó: } d(I, (\alpha)) = \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{\sqrt{35}}{5} \Rightarrow \frac{|D-3|}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{35}}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} D=-4 \\ D=10 \end{cases}$$

+ Phương trình mặt phẳng $(\alpha): x-5y-3z-4=0$ (1) hay $x-5y-3z+10=0$ (2).

Vì $\Delta_1 \not\parallel (\alpha), \Delta_2 \not\parallel (\alpha)$ nên M_1 và M_2 không thuộc $(\alpha) \Rightarrow$ loại (1).

Vậy phương trình mặt phẳng (α) cần tìm là: $x-5y-3z+10=0$.

Chọn đáp án B.

Câu 4. Trong không gian Oxyz, cho 2 đường thẳng $d: \begin{cases} x=3+t \\ y=-2-t \\ z=\sqrt{2}t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x=t' \\ y=5+t' \\ z=\sqrt{2}t'-3\sqrt{2}-5 \end{cases}$

Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa (d) và tạo với mặt phẳng Oyz một góc nhỏ nhất.

A. $3x+y+\sqrt{2}z+7=0$.

B. $3x-y-\sqrt{2}z-7=0$.

C. $-3x+y-\sqrt{2}z+7=0$.

D. $3x+y-\sqrt{2}z-7=0$.

Hướng dẫn giải:

Giả sử $(\beta): Ax+By+Cz+D=0$ (đk: $A^2+B^2+C^2>0$), (β) có vtpt là $\vec{n}=(A; B; C)$

$$d \subset (\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} A \in (\beta) \\ \vec{n} \cdot \vec{a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3A-2B+D=0 \\ A-B+C\sqrt{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D=-A+2C\sqrt{2} \\ B=A+C\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\cos(\widehat{(\beta), (Oyz)}) = \left| \cos(\vec{n}, \vec{i}) \right| = \frac{|A|}{\sqrt{A^2 + (A + C\sqrt{2})^2 + C^2}}$$

TH 1: $A = 0$ (không thỏa đb hoặc $\widehat{(\beta), (Oyz)}$ không nhỏ nhất)

TH 2: $A \neq 0$, ta có:

$$\cos(\widehat{(\beta), (Oyz)}) = \frac{1}{\sqrt{1 + (1 + \frac{C}{A}\sqrt{2})^2 + (\frac{C}{A})^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{C}{A}\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \frac{C}{A}\sqrt{2} + (\frac{\sqrt{6}}{3})^2 + \frac{12}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{C}{A}\sqrt{3} + \frac{\sqrt{6}}{3})^2 + \frac{12}{9}}}$$

$$\widehat{(\beta), (Oyz)} \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \cos(\widehat{(\beta), (Oyz)}) \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow (\frac{C}{A}\sqrt{3} + \frac{\sqrt{6}}{3})^2 \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \frac{C}{A}\sqrt{3} + \frac{\sqrt{6}}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \text{ (choïn)} \\ C = -\frac{\sqrt{2}}{3} \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} B = \frac{1}{3} \\ D = -\frac{7}{3} \end{cases}. \text{ Vậy: } (\beta): 3x + y - \sqrt{2}z - 7 = 0$$

Chọn đáp án D.

Câu 5. Trong không gian tọa độ Oxyz cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = -t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$ và mp

$(P): 2x - y - 2z - 2 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) qua d và tạo với (P) một góc nhỏ nhất.

A. $x - y - z + 3 = 0$

B. $x + y - z + 3 = 0$

C. $x + y + z + 3 = 0$

D. $x - y + z + 3 = 0$

Hướng dẫn giải:

Đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng: $\begin{cases} \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} \\ \frac{x}{-1} = \frac{z-2}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$.

Do vậy mặt phẳng (R) qua d thì (R) thuộc chùm mặt phẳng: $2x + y + 1 + m(x + z - 2) = 0$.

Hay mp $(R): (2+m)x + y + mz + 1 - 2m = 0$ (*). Mp (R) có $\vec{n}_1 = (m+2; 1; m); \vec{n}_p = (2; -1; -2)$.

Vậy:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_p|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_p|} = \frac{2(m+2) + 1 - 2m}{\sqrt{(m+2)^2 + 1 + m^2} \sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{5}{3\sqrt{2m^2 + 4m + 5}} = \frac{5}{3} \frac{1}{\sqrt{2(m+1)^2 + 3}} \leq \frac{5}{3\sqrt{3}}$$

Do α nhỏ nhất cho nên $\cos \alpha$ lớn nhất khi $m = -1$.

Vậy thay vào (*) ta có mp $(R): x + y - z + 3 = 0$.

Chọn đáp án B.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, gọi (α) là mặt phẳng qua hai điểm $A(2; 0; 1)$ và $B(-2; 0; 5)$ đồng thời hợp với mặt phẳng (Oxz) một góc 45° . Khoảng cách từ O tới (α) là:

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $K; H$ lần lượt là hình chiếu vuông góc điểm O lên đường thẳng AB và mặt phẳng (α) .

Ta có: $A, B \in (Oxz)$

$$\Rightarrow (\alpha) \cap (Oxz) = AB$$

$$\begin{cases} OH \perp (\alpha) \\ OK \perp AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HK \perp AB \\ OK \perp AB \end{cases}$$

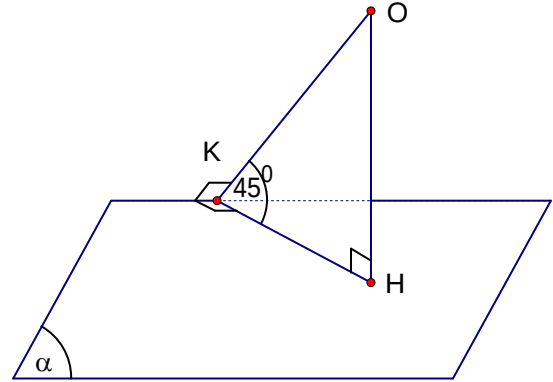
$$\Rightarrow (\widehat{(Oxz), (\alpha)}) = (\widehat{KH, OK}) = \widehat{OKH}$$

Suy ra tam giác OHK vuông cân tại H

$$\text{Khi đó: } d(O, (\alpha)) = OH = \frac{OK}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Mặt khác: } OK = d(O, AB) = \frac{|\vec{OA} \wedge \vec{AB}|}{|\vec{AB}|} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Khi đó: } d(O, (\alpha)) = OH = \frac{OK}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}.$$

**Chọn đáp án A.**

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $2x - y + z + 1 = 0$ và hai điểm $M(3; 1; 0)$, $N(-9; 4; 9)$. Tìm điểm $I(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|IM - IN|$ đạt giá trị lớn nhất. Biết a, b, c thỏa mãn điều kiện:

A. $a + b + c = 21$

B. $a + b + c = 14$

C. $a + b + c = 5$

D. $a + b + c = 19$.

Hướng dẫn giải:

Nhận thấy 2 điểm M, N nằm về hai phía của mặt phẳng (P) .

Gọi R là điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (P) , khi đó đường thẳng MR đi qua điểm $M(3; 1; 0)$

và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$. Gọi

$$H = MR \cap (P) \Rightarrow H(1; 2; -1) \Rightarrow R(-1; 3; -2).$$

Ta có $|IM - IN| = |IR - IN| \leq RN$. Đẳng thức xảy ra khi I, N, R thẳng hàng. Do đó tọa độ điểm I là

$$\text{giao điểm của đường thẳng NR: } \begin{cases} x = -1 - 8t \\ y = 3 + t \\ z = -2 + 11t \end{cases} \quad (t \text{ là tham số}) \text{ và mặt phẳng } (P).$$

Dễ dàng tìm được $I(7; 2; 13)$.

Chọn đáp án A.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$ và hai điểm $A(1; -3; 0)$, $B(5; -1; -2)$. M là một điểm trên mặt phẳng (P) . Giá trị lớn nhất của $T = |MA - MB|$ là:

A. $T = 2\sqrt{5}$.

B. $T = 2\sqrt{6}$.

C. $T = \frac{4\sqrt{6}}{2}$.

D. $T = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: A, B nằm khác phía so với (P) . Gọi B' là điểm đối xứng với B qua (P) . Suy ra $B'(-1; -3; 4)$.

$T = |MA - MB| = |MA - MB'| \leq AB' = 2\sqrt{5}$. Đẳng thức xảy ra khi M, A, B' thẳng hàng.

Chọn đáp án A.

Câu 9. Cho hai điểm A(-1, 3, -2); B(-9, 4, 9) và mặt phẳng (P): $2x - y + z + 1 = 0$. Điểm M thuộc (P). Tính GTNN của AM + BM.

- A. $\sqrt{6} + \sqrt{204}$ B. $\frac{\sqrt{7274} + \sqrt{31434}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{2004} + \sqrt{726}}{3}$ D. $3\sqrt{26}$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $(2 \cdot (-1) - 3 + (-2) + 1)(2 \cdot (-9) - 4 + 9 + 1) = 72 > 0 \Rightarrow A, B$ nằm cùng phía so với mặt phẳng (P).

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (P). Mặt phẳng (P) có vpt $\vec{n}(2, -1, 1)$

Đường thẳng AA' đi qua A(-1, 3, -2) có vtcp $\vec{n}(2, -1, 1)$ có pt:
$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

Gọi H là giao của AA' và (P) ta có: $2(-1+2t) - (3-t) + (-2+t) + 1 = 0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow H(1, 2, -1)$.

Ta có H là trung điểm của AA' $\Rightarrow A'(3, 1, 0)$.

Đường A'B đi qua A'(3, 1, 0) có vtcp $\overrightarrow{A'B}(-12, 3, 9)$ có pt:
$$\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 1 + t \\ z = 3t \end{cases}$$

Gọi N là giao điểm của A'B và mặt phẳng (P) ta có:

$2(3-4t) - (1+t) + 3t + 1 = 0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow N(-1, 2, 3)$.

Để MA+MB nhỏ nhất thì $M \equiv N$ khi đó $MA+MB = A'B = \sqrt{(-12)^2 + 3^2 + 9^2} = \sqrt{234} = 3\sqrt{26}$

Chọn đáp án D.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}$ và

$d_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 sao cho góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d_2 là lớn nhất.

- A. $x + y + z + 6 = 0$. B. $7x - y + 5z - 9 = 0$. C. $x + y - z - 6 = 0$. D. $x + y + z - 3 = 0$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: d_1 đi qua $M(1; -2; 0)$ và có VTCP $\vec{u} = (1; 2; -1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $A(x-1) + B(y+2) + Cz = 0, (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$.

Ta có: $d \subset (P) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow C = A + 2B$

Gọi $\alpha = ((P), d_2) \Rightarrow \sin \alpha = \frac{|4A + 3B|}{3\sqrt{2A^2 + 4AB + 5B^2}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{(4A + 3B)^2}{2A^2 + 4AB + 5B^2}}$

Với $B = 0 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Với $B \neq 0$. Đặt $t = \frac{A}{B}$, ta được $\sin \alpha = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{(4t+3)^2}{2t^2+4t+5}}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{(4t+3)^2}{2t^2+4t+5}$. Ta có: $f'(t) = \frac{16t^2+124t+84}{(2t^2+4t+5)^2}$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{3}{4} \\ t = -7 \end{cases}$$

BBT:	t	$-\infty$	-7	$-\frac{3}{4}$	$+\infty$	
	f'(t)	+	0	-	0	+
	f(t)		$\nearrow \frac{25}{3}$	$\searrow$	$\nearrow$	

Dựa vào BBT ta có: $\max f(t) = \frac{25}{3}$ khi $t = -7 \Leftrightarrow \frac{A}{B} = -7$

$$\text{Khi đó: } \sin \alpha = f(-7) = \frac{5\sqrt{3}}{9}$$

Vậy $\sin \alpha = \frac{5\sqrt{3}}{9}$ khi $\frac{A}{B} = -7 \Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (P): $7x - y + 5z - 9 = 0$

Chọn đáp án B.

Câu 11. Cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\beta): x + 2y - 2z - 4 = 0$ $(\alpha): 2x - 2y - z + 1 = 0$, và mặt cầu S có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$. Tìm m để đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 8$.

A. -9

B. -12

C. 5

D. 2

Hướng dẫn giải:

Ta có $\vec{n}_1 = (2; -2; -1)$, $\vec{n}_2 = (1; 2; -2)$ lần lượt là VTPT của (α) và (β)

Suy ra VTCP của đường thẳng d là $\vec{u} = \frac{1}{3}[\vec{n}_1; \vec{n}_2] = (2; 1; 2)$,

Ta có $A(6; 4; 5)$ là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β) nên $A \in d$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 3; 0)$, bán kính $R = \sqrt{13 - m}$ với $m < 13$.

$$\vec{IA} = (8; 1; 5) \Rightarrow [\vec{IA}, \vec{u}] = (-3; -6; 6) \Rightarrow d(I, d) = 3$$

Gọi H là trung điểm của AB $\Rightarrow AH = \frac{AB}{2} = 4$ và $IH = 3$.

Trong tam giác vuông IHA ta có: $IA^2 = IH^2 + AH^2 \Leftrightarrow R^2 = 9 + 16$

$\Leftrightarrow 13 - m = 25 \Leftrightarrow m = -12$. Vậy $m = -12$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án B.

Câu 12. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho tám điểm $A(-2; -2; 0)$, $B(3; -2; 0)$, $C(3; 3; 0)$, $D(-2; 3; 0)$, $M(-2; -2; 5)$, $N(-2; -2; 5)$, $P(3; -2; 5)$, $Q(-2; 3; 5)$. Hỏi hình đa diện tạo bởi tám điểm đã cho có bao nhiêu mặt đối xứng.

A. 3.

B. 6.

C. 8.

D. 9

Hướng dẫn giải:

Vì tám điểm đã cho tạo nên một hình lập phương, nên hình đa diện tạo bởi tám điểm này có 9 mặt đối xứng.

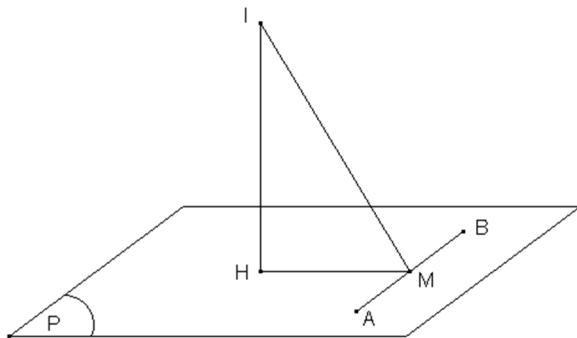
Chọn đáp án D.

Câu 13. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho $A(2;-1;6)$, $B(-1;2;4)$ và $I(-1;-3;2)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ I đến (P) lớn nhất.

A. $3x + 7y + 6z - 35 = 0$. **B.** $7x - y + 5z - 9 = 0$. **C.** $x + y - z - 6 = 0$. **D.** $x + y + z - 3 = 0$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $IA = \sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{29}$ và $IB = \sqrt{0^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB, vì $IA = IB$ nên $IM \perp AB$, ta có $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 5\right)$; $IM = \frac{\sqrt{94}}{2}$.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P):

Nếu H, M là hai điểm phân biệt thì tam giác IHM vuông tại H, $IH < IM$ hay $IH < \frac{\sqrt{94}}{2}$.

Nếu H trùng với M thì $IH = IM = \frac{\sqrt{94}}{2}$. Vậy ta có $IH \leq \frac{\sqrt{94}}{2}$, IH lớn nhất khi $H \equiv M$.

Khi đó (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_p = \vec{IH} = \vec{IM} = \left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}; 3\right)$. Vậy phương trình mặt phẳng (P) là

$$\frac{3}{2}(x-2) + \frac{7}{2}(y+1) + 3(z-6) = 0 \text{ hay } 3x + 7y + 6z - 35 = 0$$

Chọn đáp án A.

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;2;2)$, $B(5;4;4)$ và mặt phẳng (P): $2x + y - z + 6 = 0$. Tọa độ điểm M nằm trên (P) sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất là:

A. $(-1;3;2)$ **B.** $(2;1;-11)$ **C.** $(-1;1;5)$ **D.** $(1;-1;7)$

Hướng dẫn giải:

+ Kiểm tra phương án A không thuộc (P).

+ Tính trực tiếp $MA^2 + MB^2$ trong 3 phương án B, C, D và so sánh. Chọn **C**.

Câu 15. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai điểm $M(0;-1;2)$ và $N(-1;1;3)$. Mặt phẳng (P) đi qua M, N sao cho khoảng cách từ $K(0;0;2)$ đến (P) đạt giá

trị lớn nhất. (P) có vectơ pháp tuyến là:

A. $(1;1;-1)$ **B.** $(1;-1;1)$
C. $(1;-2;1)$ **D.** $(2;-1;1)$

Hướng dẫn giải:

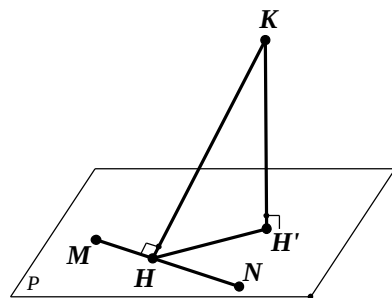
- Khoảng cách từ K đến (P) lớn nhất bằng KH, khi H' trùng H

- Vậy mặt phẳng (P) qua MN và vuông góc với KH.

- Tìm H và viết (P) hoặc:

- (P) chứa MN và vuông góc với (MNP).

Gọi H, H' là hình chiếu của K lên MN và (P).



Ta có: $d(k, (P)) = KH \leq KH'$ không đổi.

Vậy $d(K, (P))$ lớn nhất khi và chỉ khi H' trùng H hay (P) vuông góc với KH .

$$\overrightarrow{MK} = (0; 1; 0); \overrightarrow{NK} = (1; -1; -1); \overrightarrow{MN} = (-1; 2; 1)$$

$$(MNK) \text{ có vtpt là } \vec{n} = [\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{NK}] = (-1; 0; -1)$$

$$\text{Do } \begin{cases} HK \subset (MNK) \\ HK \perp MN \end{cases} \text{ nên HK có vtcp là } [\overrightarrow{MN}, \vec{n}] = (2; 2; -2).$$

Chọn đáp án A.

Câu 16. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho điểm $A(0; 1; 1), B(1; 0; -3), C(-1; -2; -3)$ và mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0$. Tìm tọa độ điểm D trên mặt cầu (S) sao cho tứ diện $ABCD$ có thể tích lớn nhất.

A. $D(1; 0; 1)$ **B.** $D\left(\frac{7}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ **C.** $D\left(\frac{-1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{-5}{3}\right)$ **D.** $D(1; -1; 0)$

Hướng dẫn giải:

Ta thấy câu C và D có điểm D không thuộc (S) . Loại **C, D**.

Ta tính thể tích cho điểm D ở câu A và câu **B**. Điểm B ở câu B có thể tích lớn hơn.

Chọn đáp án B.

Câu 1.5. Phương trình nào sau đây không phải là phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t, t \in \mathbb{R} \text{ trên mặt phẳng (Oxy):} \\ z = 3 + t \end{cases}$$

A. $\begin{cases} x = 3 + 2t' \\ y = 1 + 3t', t' \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = 1 + 4t' \\ y = -2 + 6t', t' \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = 2 + 3t', t' \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 5 - 2t' \\ y = 4 - 3t', t' \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

$A(1; -2; 3), B(3; 1; 4)$ thuộc d . Hình chiếu của A, B trên mặt phẳng (Oxy) là $A'(1; -2; 0), B'(3; 1; 0)$

Phương trình hình chiếu đi qua A' hoặc B' và nhận véc tơ cùng phương với $\overrightarrow{A'B'} = (2; 3; 0)$ làm véc tơ chỉ phương.

Chọn đáp án C.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$ và hai điểm $A(1; -3; 0), B(5; -1; -2)$. M là một điểm trên mặt phẳng (P) . Giá trị lớn nhất của $T = |MA - MB|$ là:

A. $T = 2\sqrt{5}$. **B.** $T = 2\sqrt{6}$. **C.** $T = \frac{4\sqrt{6}}{2}$. **D.** $T = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: A, B nằm khác phía so với (P) . Gọi B' là điểm đối xứng với B qua (P) . Suy ra $B'(-1; -3; 4)$.

$T = |MA - MB| = |MA - MB'| \leq AB' = 2\sqrt{5}$. Đẳng thức xảy ra khi M, A, B' thẳng hàng.

Chọn đáp án A.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;-2;1)$, $A(1;2;-3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$. Tìm vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M , vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng bé nhất.

A. $\vec{u} = (2;1;6)$.

B. $\vec{u} = (1;0;2)$.

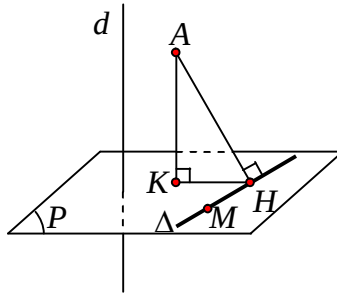
C. $\vec{u} = (3;4;-4)$.

D. $\vec{u} = (2;2;-1)$.

Hướng dẫn giải:

Gọi (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với d . Phương trình của $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên $\Delta, (P)$.



Ta có $K(-3;-2;-1)$

$$d(A, \Delta) = AH \geq AK$$

Vậy khoảng cách từ A đến Δ bé nhất khi Δ đi qua M, K . Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;0;2)$

Chọn đáp án B.

Câu 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Tính khoảng cách từ điểm $M(1;2;-1)$ đến mặt phẳng (P) ?

A. $\frac{11\sqrt{18}}{18}$

B. $3\sqrt{2}$

C. $\frac{\sqrt{11}}{18}$

D. $\frac{4}{3}$

Hướng dẫn giải:

Gọi H là hình chiếu của A trên d ; K là hình chiếu của A trên (P) .

Ta có $d(A, (P)) = AK \leq AH$ (không đổi)

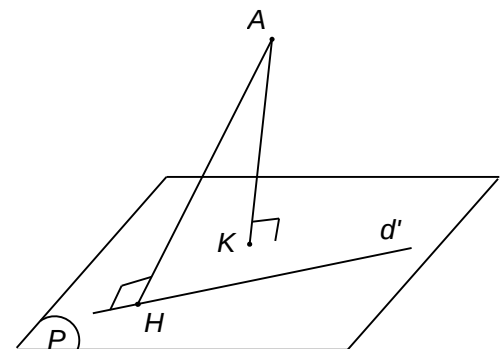
$\Rightarrow$ GTLN của $d(A, (P))$ là AH

$\Rightarrow d(A, (P))$ lớn nhất khi $K \equiv H$.

Ta có $H(3;1;4)$, (P) qua H và $\perp AH$

$$\Rightarrow (P): x - 4y + z - 3 = 0$$

$$\text{Vậy } d(M, (P)) = \frac{11\sqrt{18}}{18}.$$



Chọn đáp án A.

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét các điểm $A(0;0;1)$, $B(m;0;0)$, $C(0;n;0)$,

$D(1;1;1)$ với $m > 0; n > 0$ và $m + n = 1$. Biết rằng khi m, n thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) và đi qua d . Tính bán kính R của mặt cầu đó?

A. $R=1$. B. $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $R=\frac{3}{2}$. D. $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $I(1;1;0)$ là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (Oxy)

Ta có: Phương trình theo đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + z = 1$

Suy ra phương trình tổng quát của (ABC) là $nx + my + mnz - mn = 0$

Mặt khác $d(I, (ABC)) = \frac{|1 - mn|}{\sqrt{m^2 + n^2 + m^2n^2}} = 1$ (vì $m + n = 1$) và $ID = 1 = d(I, (ABC))$

Nên tồn tại mặt cầu tâm I (là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng Oxy) tiếp xúc với (ABC) và đi qua D

Chọn đáp án A.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 2 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với giá của véc tơ $\vec{v} = (1; 6; 2)$, vuông góc với mặt phẳng (α): $x + 4y + z - 11 = 0$ và tiếp xúc với (S).

A. $\begin{cases} 2x - y + 2z - 3 = 0 \\ 2x - y + 2z + 21 = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 2x - y + 2z + 3 = 0 \\ 2x - y + 2z - 21 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 2x - y + z + 3 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 2x - y + z + 13 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Vậy: (P): $2x - y + 2z + 3 = 0$ hoặc (P): $2x - y + 2z - 21 = 0$

(S) có tâm $I(1; -3; 2)$ và bán kính $R = 4$. VTPT của (α) là $\vec{n} = (1; 4; 1)$.

$\Rightarrow$ VTPT của (P) là: $\vec{n}_p = [\vec{n}, \vec{v}] = (2; -1; 2) \Rightarrow$ PT của (P) có dạng: $2x - y + 2z + m = 0$.

Vì (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I, (P)) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -21 \\ m = 3 \end{cases}$.

Vậy: (P): $2x - y + 2z + 3 = 0$ hoặc (P): $2x - y + 2z - 21 = 0$.

Chọn đáp án B.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho bốn điểm $A(1; -2; 0)$, $B(0; -1; 1)$, $C(2; 1; -1)$, $D(3; 1; 4)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng cách đều bốn điểm đó?

A. 1. B. 4. C. 7. D. Vô số.

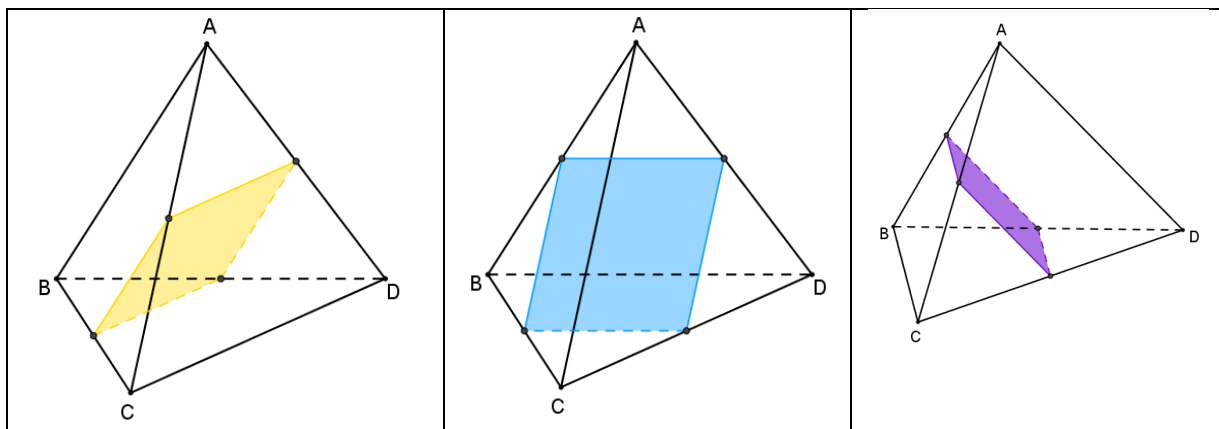
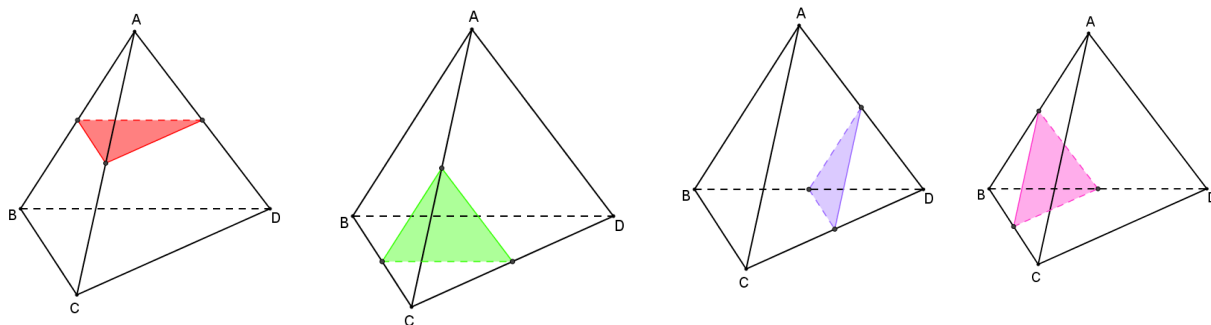
Hướng dẫn giải:

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1; 3; -1)$, $\overrightarrow{AD} = (2; 3; 4)$.

Khi đó $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-4; 0; -4)$ suy ra $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = -24 \neq 0$.

Do đó A, B, C, D không đồng phẳng và là 4 đỉnh của một tứ diện.

Khi đó sẽ có 7 mặt phẳng cách đều bốn đỉnh của tứ diện. Bao gồm: 4 mặt phẳng đi qua trung điểm của ba cạnh tứ diện và 3 mặt phẳng đi qua trung điểm bốn cạnh tứ diện (như hình vẽ).



Chọn đáp án C.

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; -2; 0)$, $B(0; -1; 1)$, $C(2; 1; -1)$ và $D(3; 1; 4)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng cách đều bốn điểm đó ?

- A.** 1 mặt phẳng. **B.** 4 mặt phẳng. **C.** 7 mặt phẳng. **D.** Có vô số mặt phẳng.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 1)$; $\overrightarrow{AC} = (1; 3; -1)$; $\overrightarrow{AD} = (2; 3; 4)$

Khi đó: $[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = -24 \neq 0$ do vậy A, B, C, D không đồng phẳng

Do đó có 7 mặt phẳng cách đều 4 điểm đã cho bao gồm.

- +) Mặt phẳng qua trung điểm của AD và song song với mặt phẳng (ABC)
- +) Mặt phẳng qua trung điểm của AB và song song với mặt phẳng (ACD)
- +) Mặt phẳng đi qua trung điểm của AC và song song với mặt phẳng (ABD)
- +) Mặt phẳng đi qua trung điểm của AB và song song với mặt phẳng (BCD)
- +) Mặt phẳng qua trung điểm của AB và CD đồng thời song song với BC và AD
- +) Mặt phẳng qua trung điểm của AD và BC đồng thời song song với AB và CD
- +) Mặt phẳng qua trung điểm của AC và BD đồng thời song song với BC và AD

Chọn đáp án C.

Câu 24. Đường thẳng Δ song song với $d: \frac{x+4}{3} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+2}{1}$ và cắt cả hai đường thẳng

$d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$ và $d_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{1}$. Phương trình nào không phải đường thẳng Δ

A. $\Delta: \frac{x+4}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+1}{1}$

B. $\Delta: \frac{x-3}{3} = \frac{y-\frac{7}{3}}{-4} = \frac{z-\frac{2}{3}}{1}$

$$\text{C. } \Delta: \frac{x+9}{3} = \frac{y+7}{-4} = \frac{z+2}{1}$$

$$\text{D. } \Delta: \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-1}{1}$$

Hướng dẫn giải:

Giải: Gọi M, N là giao điểm của Δ và d_1, d_2 .

$$\text{Khi đó M, N thuộc } d_1, d_2 \text{ nên } \begin{cases} x_M = 1+3t \\ y_M = -1+t \\ z_M = 2+2t \end{cases} \begin{cases} x_N = -2+2t' \\ y_N = 3+4t' \\ z_N = t' \end{cases}.$$

Vector chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{MN} = (-3+2t'-3t; 4+4t'-t; -2+t'-2t)$

$$\Delta \text{ song song với } d: \frac{x+4}{3} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+2}{1} \text{ nên } \frac{-3+2t'-3t}{3} = \frac{4+4t'-t}{-4} = \frac{-2+t'-2t}{1}$$

$$\text{Giải hệ ta được } t' = -1; t = -\frac{4}{3}. \text{ Vậy } N(-4; -1; -1), M\left(-3; -\frac{7}{3}; -\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{Vậy } \Delta: \frac{x+4}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+1}{1}$$

Chọn đáp án A.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(1;5;0), B(3;3;6) và đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 1-t \\ z = 2t \end{cases}$. Một điểm M thay đổi trên đường thẳng Δ sao cho chu vi tam giác

MAB đạt giá trị nhỏ nhất. Tọa độ điểm M và chu vi tam giác ABC là

$$\text{A. } M(1;0;2); P = 2(\sqrt{11} + \sqrt{29})$$

$$\text{B. } M(1;2;2); P = 2(\sqrt{11} + \sqrt{29})$$

$$\text{C. } M(1;0;2); P = \sqrt{11} + \sqrt{29}$$

$$\text{D. } M(1;2;2); P = \sqrt{11} + \sqrt{29}$$

Hướng dẫn giải:

• Gọi P là chu vi của tam giác MAB thì $P = AB + AM + BM$.

Vì AB không đổi nên P nhỏ nhất khi và chỉ khi $AM + BM$ nhỏ nhất.

$$\text{Điểm } M \in \Delta \text{ nên } M(-1+2t; 1-t; 2t). AM + BM = \sqrt{(3t)^2 + (2\sqrt{5})^2} + \sqrt{(3t-6)^2 + (2\sqrt{5})^2}$$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ta xét hai vectơ $\vec{u} = (3t; 2\sqrt{5})$ và $\vec{v} = (-3t+6; 2\sqrt{5})$.

$$\text{Ta có } |\vec{u}| = \sqrt{(3t)^2 + (2\sqrt{5})^2}; |\vec{v}| = \sqrt{(3t-6)^2 + (2\sqrt{5})^2}$$

$$\Rightarrow AM + BM = |\vec{u}| + |\vec{v}| \text{ và } \vec{u} + \vec{v} = (6; 4\sqrt{5}) \Rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = 2\sqrt{29}$$

Mặt khác, ta luôn có $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$ Như vậy $AM + BM \geq 2\sqrt{29}$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \vec{u}, \vec{v} \text{ cùng hướng} \Leftrightarrow \frac{3t}{-3t+6} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow t = 1$$

$$\Rightarrow M(1;0;2) \text{ và } \min(AM + BM) = 2\sqrt{29}. \text{ Vậy khi } M(1;0;2) \text{ thì } \min P = 2(\sqrt{11} + \sqrt{29})$$

Chọn đáp án A.

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(1;2; -1), B(7; -2; 3) và đường thẳng d

$$\text{có phương trình } \begin{cases} x = 2+3t \\ y = -2t \\ z = 4+2t \end{cases} (t \in \mathbb{R}). \text{ Điểm M trên } d \text{ sao cho tổng khoảng cách từ M đến A và B là}$$

nhỏ nhất có tổng các tọa độ là:

A. $M=(2;0;4)$.

B. $M=(2;0;1)$.

C. $M=(1;0;4)$.

D. $M=(1;0;2)$.

Hướng dẫn giải:

Nếu M nằm trên d thì điểm I có tọa độ là $M=(2+3t;-2t;4+2t)$. Từ đó ta có:

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = (3t+1; -2-2t; 2t+5) \Rightarrow AM = \sqrt{(3t+1)^2 + (2+2t)^2 + (2t+5)^2}$$

$$\text{Tương tự: } \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = (3t-5; 2-2t; 2t+1) \Rightarrow BM = \sqrt{(3t-5)^2 + (2-2t)^2 + (2t+1)^2}$$

$$\text{Từ (*): } MA=MB = \sqrt{(3t+1)^2 + (2+2t)^2 + (2t+5)^2} = \sqrt{(3t-5)^2 + (2-2t)^2 + (2t+1)^2}$$

$$\text{Hay: } \Leftrightarrow \sqrt{17t^2 + 34t + 30} = \sqrt{17t^2 - 36t + 30} \Leftrightarrow 34t + 36t = 0 - 11 \Leftrightarrow 70t = 0 \rightarrow t = 0$$

Tọa độ M thỏa mãn yêu cầu là: $M=(2;0;4)$.

Chọn đáp án A.

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (Q): $x + 2y - z + 5 = 0$ và đường thẳng

$d: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (Q)

một góc nhỏ nhất là

A. (P): $y - z + 4 = 0$

B. (P): $x - z + 4 = 0$

C. (P): $x + y - z + 4 = 0$

D. (P): $y - z - 4 = 0$

Hướng dẫn giải:

PT mặt phẳng (P) có dạng: $ax + by + cz + d = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$). Gọi $a = \widehat{((P), (Q))}$.

Chọn hai điểm $M(-1; -1; 3), N(1; 0; 4) \in d$. Ta có: $\begin{cases} M \in (P) \\ N \in (P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -a - b \\ d = 7a + 4b \end{cases}$

$$\Rightarrow (P): ax + by + (-2a - b)z + 7a + 4b = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{6}} \cdot \frac{|a+b|}{\sqrt{5a^2 + 4ab + 2b^2}}$$

$$\text{TH1: Nếu } a = 0 \text{ thì } \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{6}} \cdot \frac{|b|}{\sqrt{2b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = 30^0.$$

$$\text{TH2: Nếu } a \neq 0 \text{ thì } \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\left|1 + \frac{b}{a}\right|}{\sqrt{5 + 4\frac{b}{a} + 2\left(\frac{b}{a}\right)^2}}. \text{ Đặt } x = \frac{b}{a} \text{ và } f(x) = \cos^2 \alpha$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{9}{6} \cdot \frac{x^2 + 2x + 1}{5 + 4x + 2x^2}.$$

Dựa vào BBT, ta thấy $\min f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow a = 90^0 > 30^0$

Do đó chỉ có trường hợp 1 thỏa mãn, tức $a = 0$. Khi đó chọn $b = 1, c = 1, d = 4$.

Vậy: (P): $y - z + 4 = 0$.

Chọn đáp án A.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, gọi d đi qua điểm $A(1; -1; 2)$, song song với

(P): $2x - y - z + 3 = 0$, đồng thời tạo với đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ một góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là.

$$\text{A. } \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{7}.$$

$$\text{B. } \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z+2}{7}.$$

$$\text{C. } \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{7}.$$

$$\text{D. } \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{-7}.$$

Hướng dẫn giải:

Δ có vector chỉ phương $\vec{a}_\Delta = (1; -2; 2)$

d có vector chỉ phương $\vec{a}_d = (a; b; c)$

(P) có vector pháp tuyến $\vec{n}_p = (2; -1; -1)$

Vì $d \notin (P)$ nên $\vec{a}_d \perp \vec{n}_p \Leftrightarrow \vec{a}_d \cdot \vec{n}_p = 0 \Leftrightarrow 2a - b - c = 0 \Leftrightarrow c = 2a - b$

$$\cos(\Delta, d) = \frac{|5a - 4b|}{3\sqrt{5a^2 - 4ab + 2b^2}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{(5a - 4b)^2}{5a^2 - 4ab + 2b^2}}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{a}{b}, \text{ ta có: } \cos(\Delta, d) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{(5t - 4)^2}{5t^2 - 4t + 2}}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{(5t - 4)^2}{5t^2 - 4t + 2}, \text{ ta suy ra được: } \max f(t) = f\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Do đó: } \max[\cos(\Delta, d)] = \sqrt{\frac{5\sqrt{3}}{27}} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{1}{5}$$

$$\text{Chọn } a = 1 \Rightarrow b = -5, c = 7$$

$$\text{Vậy phương trình đường thẳng } d \text{ là } \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{7}$$

Chọn đáp án A.

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(P): x + 4y - 2z - 6 = 0, (Q): x - 2y + 4z - 6 = 0$.

Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa giao tuyến của $(P), (Q)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều.

$$\text{A. } x + y + z + 6 = 0. \quad \text{B. } x + y + z - 6 = 0. \quad \text{C. } x + y - z - 6 = 0. \quad \text{D. } x + y + z - 3 = 0.$$

Hướng dẫn giải:

Chọn $M(6; 0; 0), N(2; 2; 2)$ thuộc giao tuyến của $(P), (Q)$

Gọi $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ lần lượt là giao điểm của (α) với các trục Ox, Oy, Oz

$$\Rightarrow (\alpha): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 (a, b, c \neq 0)$$

$$(\alpha) \text{ chứa } M, N \Rightarrow \begin{cases} \frac{6}{a} = 1 \\ \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Hình chóp } O.ABC \text{ là hình chóp đều} \Rightarrow OA = OB = OC \Rightarrow |a| = |b| = |c|$$

$$\text{Vậy phương trình } x + y + z - 6 = 0.$$

Chọn đáp án B.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $\begin{cases} y = 0 \\ 2x - y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$ Oxyz cho điểm $M(1;0;0)$ và $N(0;0;-1)$, mặt phẳng (P) qua điểm M, N và tạo với mặt phẳng $(Q): x - y - 4 = 0$ một góc bằng 45° . Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $\begin{cases} y = 0 \\ 2x - y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} y = 0 \\ 2x - y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 2x - y - 2z + 2 = 0 \\ 2x - y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 2x - 2z + 2 = 0 \\ 2x - 2z - 2 = 0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Gọi vectơ pháp tuyến của mp (P) và (Q) lần lượt là $\vec{n}_p(a;b;c)$ ($a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$), $\vec{n}_q$

(P) qua $M(1;0;0) \Rightarrow (P): a(x-1) + by + cz = 0$

(P) qua $N(0;0;-1) \Rightarrow a + c = 0$

(P) hợp với (Q) góc $45^\circ \Rightarrow \left| \cos(\vec{n}_p, \vec{n}_q) \right| = \cos 45^\circ \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{\sqrt{2a^2+b^2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -2b \end{cases}$

Với $a = 0 \Rightarrow c = 0$ chọn $b = 1$ phương trình $(P): y = 0$

Với $a = -2b$ chọn $b = -1 \Rightarrow a = 2$ phương trình mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 2 = 0$.

Chọn đáp án A.

Câu 31. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm $A(10;2;1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A , song song với đường thẳng d sao cho khoảng cách giữa d và (P) lớn nhất. Khoảng cách từ điểm $M(-1;2;3)$ đến mp (P) là

A. $\frac{97\sqrt{3}}{15}$.

B. $\frac{76\sqrt{790}}{790}$.

C. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

D. $\frac{3\sqrt{29}}{29}$.

Hướng dẫn giải:

(P) là mặt phẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng d nên (P) chứa đường thẳng d' đi qua điểm A và song song với đường thẳng d .

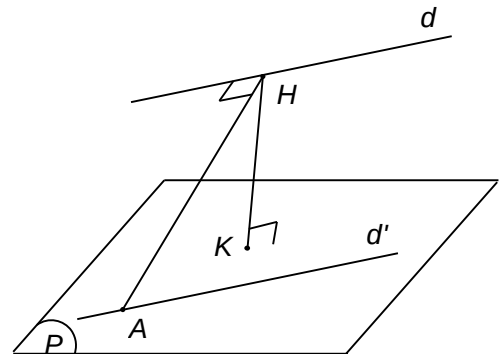
Gọi H là hình chiếu của A trên d , K là hình chiếu của H trên (P) .

Ta có $d(d, (P)) = HK \leq AH$ (AH không đổi)

$\Rightarrow$ GTLN của $d(d, (P))$ là AH

$\Rightarrow d(d, (P))$ lớn nhất khi AH vuông góc với (P) .

Khi đó, nếu gọi (Q) là mặt phẳng chứa A và d thì (P) vuông góc với (Q) .



$$\Rightarrow \vec{n}_P = [\vec{u}_d, \vec{n}_Q] = (98; 14; -70)$$

$$\Rightarrow (P): 7x + y - 5z - 77 = 0 \Rightarrow d(M, (P)) = \frac{97\sqrt{3}}{15}.$$

Chọn đáp án A.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(1;2;3) và đường thẳng d:

$\frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và có khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất. Khi đó (P) có một vectơ pháp tuyến là

A. $\vec{n} = (4; 5; 13)$

B. $\vec{n} = (4; 5; -13)$

C. $\vec{n} = (4; -5; 13)$

D. $\vec{n} = (-4; 5; 13)$

Hướng dẫn giải:

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên d và (P)

Khi đó: $d(A, (P)) = AK \leq AH$ hay $d(A, (P))$ lớn nhất khi và chỉ khi $H \equiv K$

Ta có: $H(-3+2t; -1+t; -t); \vec{a} = (2; 1; -1)$ và $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{3}$

Suy ra: $\overrightarrow{AH} = (-\frac{4}{3}; -\frac{5}{3}; -\frac{13}{3})$

Hay một vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (4; 5; 13)$

Chọn đáp án A.

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(2;-2;0), đường thẳng

$\Delta: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{1}$. Biết mặt phẳng (P) có phương trình $ax + by + cz + d = 0$ đi qua A, song song với Δ và khoảng cách từ Δ tới mặt phẳng (P) lớn nhất. Biết a, b là các số nguyên dương có ước chung lớn nhất bằng 1. Hỏi tổng $a + b + c + d$ bằng bao nhiêu?

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. -1.

Hướng dẫn giải:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng Δ .

Do $H \in \Delta \Rightarrow H(-1-t; 3t; 2+t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (-t-3; 3t+2; t+2)$

Do $AH \perp \Delta \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}_\Delta = 0$ với $\vec{u}_\Delta = (-1; 3; 1)$

$$\Leftrightarrow -1 \cdot (-t-3) + 3 \cdot (3t+2) + 1 \cdot (t+2) = 0 \Leftrightarrow 11t = -11$$

$$\Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow H(0; -3; 1)$$

Gọi F là hình chiếu vuông góc của H trên (P), khi đó: $d(\Delta, (P)) = d(H, (P)) = HF \leq HA$

Suy ra $d(\Delta, (P))_{\max} = HA$. Dấu “=” xảy ra khi $F \equiv A \Rightarrow AH \perp (P)$, hay bài toán được phát biểu lại là:

“Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với AH”

Ta có $\overrightarrow{AH} = (-2; -1; 1) = -(2; 1; -1)$, suy ra $\vec{n}_{(P)} = (2; 1; -1)$

Suy ra phương trình mặt phẳng (P) là: $2(x-2) + y + 2 - z = 0 \Leftrightarrow 2x + y - z - 2 = 0$.

$$\text{Do } \begin{cases} a, b \in \mathbb{N}^* \\ (a, b) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2, b = 1 \\ c = -1, d = -2 \end{cases} \Rightarrow a + b + c + d = 0.$$

Chọn đáp án B.

Câu 34. Trong không gian tọa độ Oxyz cho $M(2;1;0)$ và đường thẳng d có phương trình:

$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M , cắt và vuông góc với d . Viết phương trình đường thẳng Δ ?

A.
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = -2t \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = -2t \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - 4t \\ z = -2t \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

PTTS của d là
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases}$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên d , đường thẳng Δ cần tìm là đường thẳng MH .

Vì H thuộc d nên $H(1+2t; -1+t; -t)$ suy ra $\overrightarrow{MH} = (2t-1; -2+t; -t)$.

Vì $MH \perp d$ và d có 1 VTCP là $\vec{u} = (2; 1; -1)$ nên $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$. Do đó $\overrightarrow{MH} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

Vậy PTTS của Δ là:
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = -2t \end{cases}$$

Chọn đáp án A.

Câu 35. Cho đường thẳng $(d): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ và mp $(P): x + y - 2 = 0$. Tìm phương trình đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) cắt và vuông góc với (d) .

A.
$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 0 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 1 + 3t \\ z = 5 \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = 0 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 5 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Gọi I là giao điểm của (d) và (P)

$I(1-t; 1-t; 2t), I \in (P) \Rightarrow t = 0 \Rightarrow I(1; 1; 0)$

(d) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-1; -1; 2)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1; 0)$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm là $\vec{u}_\Delta = [\vec{u}, \vec{n}] = (-2; 2; 0)$

Phương trình mặt phẳng cần tìm là
$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 0 \end{cases}$$

Chọn đáp án A.

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có điểm A trùng với gốc tọa độ, $B(a; 0; 0), D(0; a; 0), A'(0; 0; b)$ với $(a > 0, b > 0)$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC' . Giả sử $a + b = 4$, hãy tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $A'BDM$?

$$\text{A. } \max V_{A'MBD} = \frac{64}{27}$$

$$\text{B. } \max V_{A'MBD} = 1$$

$$\text{C. } \max V_{A'MBD} = -\frac{64}{27}$$

$$\text{D. } \max V_{A'MBD} = \frac{27}{64}$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } C(a; a; 0), B'(a; 0; b), D'(0; a; b), C'(a; a; b) \Rightarrow M\left(a; a; \frac{b}{2}\right)$$

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{AB} = (a; 0; -b), \overrightarrow{AD} = (0; a; -b), \overrightarrow{AM} = \left(a; a; -\frac{b}{2}\right)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] = (ab; ab; a^2) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{3a^2b}{2} \Rightarrow V_{A'MBD} = \frac{a^2b}{4}$$

$$\text{Do } a, b > 0 \text{ nên áp dụng BĐT Côsi ta được: } 4 = a + b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a + b \geq 3\sqrt{\frac{1}{4}a^2b} \Rightarrow a^2b \leq \frac{64}{27}$$

$$\text{Suy ra: } \max V_{A'MBD} = \frac{64}{27}.$$

Chọn đáp án A.

Câu 37. Cho $A(-1; 3; 5), B(2; 6; -1), C(-4; -12; 5)$ và điểm $(P): x + 2y - 2z - 5 = 0$. Gọi M là điểm thuộc (P) sao cho biểu thức $S = |\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB}| + |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm hoành độ điểm M .

$$\text{A. } x_M = 3$$

$$\text{B. } x_M = -1$$

$$\text{C. } x_M = 1$$

$$\text{D. } x_M = -3$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Gọi } I \text{ là điểm } \overrightarrow{IA} - 4\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow I(3; 7; -3)$$

$$\text{Gọi } G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \Rightarrow G(-1; -1; 3)$$

Nhận thấy, M, I nằm khác phía so với $\text{mp}(P)$.

$$\text{Cố } S = 3(MI + MG) \geq 3GI. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } M \text{ là giao điểm của } GI \text{ và } (P) \Rightarrow M(1; 3; 1)$$

Chọn đáp án C.

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 1; -1), B(0; 3; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y - z + 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ có giá trị nhỏ nhất.

$$\text{A. } M(-4; -1; 0).$$

$$\text{B. } M(-1; -4; 0).$$

$$\text{C. } M(4; 1; 0).$$

$$\text{D. } M(1; -4; 0).$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Gọi } I(a; b; c) \text{ là điểm thỏa mãn } 2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}, \text{ suy ra } I(4; -1; -3).$$

$$\text{Ta có } 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{MI}. \text{ Suy ra } |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MI}| = MI.$$

Do đó $|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất hay M là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P) .

$$\text{Đường thẳng đi qua } I \text{ và vuông góc với } (P) \text{ có là } d: \frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{-1}.$$

Tọa độ hình chiếu M của I trên (P) thỏa mãn

$$\begin{cases} \frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{-1} \\ x + y - z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(1; -4; 0).$$

Chọn đáp án D.

Câu 39. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-1}$ và $d_2: \begin{cases} x = 2-t \\ y = 3-t \\ z = -2 \end{cases}$. Mặt

phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$ (với $a; b; c; d \in \mathbb{R}$) vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt d_1, d_2 đoạn thẳng có độ dài nhỏ nhất. Tính $a + b + c + d$.

A. -14**B.** 1**C.** -8**D.** -12**Hướng dẫn giải:**

Ta có mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng d_1 nên (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; 1)$.

Phương trình (P) có dạng $(P): x + 2y - z + d = 0$.

Gọi M là giao điểm của (P) với d_1 và N là giao của (P) với d_2 suy ra $M\left(\frac{2-d}{6}; \frac{2-d}{3}; \frac{10+d}{6}\right)$,
 $N\left(\frac{-4-d}{3}; \frac{-1-d}{3}; -2\right)$.

Ta có $MN^2 = \frac{d^2}{18} + \frac{16d}{9} + \frac{155}{9}$.

Để MN nhỏ nhất thì MN^2 nhỏ nhất, nghĩa là $d = -16$.

Khi đó $a + b + c + d = -14$.

Chọn đáp án A.

Câu 40. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}$ và $d_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d_1 sao cho góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d_2 là lớn nhất. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -1; 2)$.

B. (P) qua điểm $A(0; 2; 0)$.

C. (P) song song với mặt phẳng $(Q): 7x - y + 5z - 3 = 0$.

D. (P) cắt d_2 tại điểm $B(2; -1; 4)$.

Hướng dẫn giải:

d_1 qua $M(1; -2; 0)$ và có VTCP $\vec{u} = (1; 2; -1)$. Vì $d_1 \subset (P)$ nên $M \in (P)$.

Pt mặt phẳng (P) có dạng: $A(x-1) + B(y+2) + Cz = 0$ ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$).

Ta có: $d_1 \subset (P) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow C = A + 2B$.

Gọi $\alpha = (\widehat{(P), d_2}) \Rightarrow \sin \alpha = \frac{|4A + 3B|}{3\sqrt{2A^2 + 4AB + 5B^2}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{(4A + 3B)^2}{2A^2 + 4AB + 5B^2}}$.

TH1: Với $B = 0$ thì $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

TH2: Với $B \neq 0$. Đặt $t = \frac{A}{B}$, ta được: $\sin \alpha = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{(4t + 3)^2}{2t^2 + 4t + 5}}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{(4t+3)^2}{2t^2+4t+5}$. Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\max f(x) = \frac{25}{7}$ khi $t = -7$ khi

$$\frac{A}{B} = -7. \text{ Khi đó } \sin \alpha = f(-7) = \frac{5\sqrt{3}}{9}.$$

So sánh TH1 và TH2 $\Rightarrow \alpha$ lớn nhất với $\sin \alpha = \frac{5\sqrt{3}}{9}$ khi $\frac{A}{B} = -7$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(P): 7x - y + 5z - 9 = 0$.

Chọn đáp án B

Câu 41. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;0;2), B(3;1;4), C(3;-2;1)$. Tìm tọa độ điểm S , biết SA vuông góc với (ABC) , mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$ có bán kính bằng $\frac{3\sqrt{11}}{2}$ và S có cao độ âm.

A. $S(-4;-6;4)$.

B. $S(3;4;0)$.

C. $S(2;2;1)$.

D. $S(4;6;-4)$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;1;2); \overrightarrow{AC} = (2;-2;-1)$, suy ra $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

Tam giác ABC vuông nên I và S có thể sử dụng các tính chất của phép dựng tâm để tính.

Tính được IM .

$$MI \perp (ABC) \Rightarrow \overrightarrow{MI} = k[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \rightarrow k$$

$\overrightarrow{AS} = 2\overrightarrow{MI}$, tìm S .

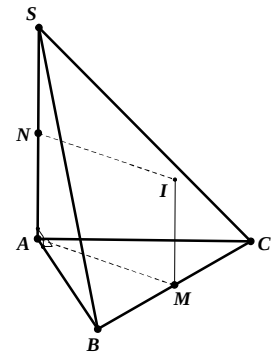
$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (3;6;-6)$$

Gọi $M\left(3; \frac{-1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ là trung điểm BC . Ta có:

$$IM^2 = IB^2 - BM^2 = \left(\frac{3\sqrt{11}}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} = \frac{81}{4} \Rightarrow IM = \frac{9}{2}$$

$$\text{Suy ra } \frac{9}{2} = 9|k| \Leftrightarrow k = \pm \frac{1}{2}$$

$$k = \frac{1}{2} \text{ thì } \overrightarrow{AS} = 2\overrightarrow{MI} = (3;6;-6) \Rightarrow S(4;6;-4)$$



$MI \perp (ABC)$

Chọn đáp án D.

Câu 42. Trong không gian với tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = y+1 = z-3$ và mặt phẳng $(P): x+2y-z+5=0$. Mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và tạo với (P) một góc nhỏ nhất có phương trình

A. $x-z+3=0$.

B. $x+y-z+2=0$.

C. $x-y-z+3=0$.

D. $y-z+4=0$.

Hướng dẫn giải:

Gọi Δ là giao tuyến giữa (P) và (Q) . Khi đó, góc giữa $(P), (Q)$ nhỏ nhất khi chỉ khi $\Delta \perp d$.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(-1;-1;3)$ và có vector chỉ phương là $\vec{u}_d = (2;1;1)$.

Vector chỉ phương của Δ là $\vec{u}_\Delta = \vec{n} \wedge \vec{u}_d = (3;-3;-3)$.

Vector pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_Q = \vec{u}_d \wedge \vec{u}_\Delta = (0;9;-9)$.

Mặt phẳng (Q) đi qua $M(-1;-1;3)$ và nhận vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (0;1;-1)$ có phương trình $y - z + 4 = 0$

Chọn đáp án D.

Câu 43. Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(1,0,-1)$ và mặt phẳng (P): $x + y - z - 3 = 0$. Mặt cầu S có tâm I nằm trên mặt phẳng (P), đi qua điểm A và gốc tọa độ O sao cho chu vi tam giác OIA bằng $6 + \sqrt{2}$. Phương trình mặt cầu S là:

- A. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$ hoặc $(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$.
 B. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$ hoặc $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 9$
 C. $(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$ hoặc $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$
 D. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$ hoặc $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 9$

Hướng dẫn giải:

Gọi $I(x, y, z)$ là tâm của S.

Khi đó $I \in (P)$, $IO = IA$, $IO + IA + AO = 6 + \sqrt{2}$ nên ta suy ra hệ

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{2} = 6 + \sqrt{2} \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + z + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ ta tìm được $I(2,2,1)$ hoặc $I(-1,2,-2)$

Chọn đáp án D.

Câu 44. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(0;2;0)$, $B(-1;1;4)$ và $C(3;-2;1)$. Mặt cầu (S) tâm I đi qua A, B, C và độ dài $OI = \sqrt{5}$ (biết tâm I có hoành độ nguyên, O là gốc tọa độ). Bán kính mặt cầu (S) là

- A. $R = 1$ B. $R = 3$ C. $R = 4$ D. $R = \sqrt{5}$

Hướng dẫn giải:

Phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$

Vì 4 điểm O, A, B, C thuộc mặt cầu (S) nên ta có hệ:

$$\begin{cases} A \in (S) \\ B \in (S) \\ C \in (S) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4b + d + 4 = 0 \\ -2a + 2b + 8c + d + 18 = 0 \\ 6a - 4b + 2c + d + 14 = 0 \end{cases}$$

$$OI = \sqrt{5} \Leftrightarrow OI^2 = 5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 5$$

$$\text{Suy ra } a = -1; b = 0; c = -2; d = -4 \Rightarrow R = 3$$

Chọn đáp án B.

Câu 45. Cho hình chóp O.ABC có $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ đôi một vuông góc với nhau. Điểm M cố định thuộc tam giác ABC có khoảng cách lần lượt đến các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB) là 1,2,3. Khi tồn tại a,b,c thỏa thể tích khối chóp O.ABC nhỏ nhất, giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp O.ABC là

- A. 18 B. 27
 C. 6 D. Không tồn tại a,b,c thỏa yêu cầu bài toán

Hướng dẫn giải:

Chọn hệ trục tọa độ thỏa $O(0,0,0)$, $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$

Điểm M cố định thuộc tam giác ABC có khoảng các lần lượt đến các mặt phẳng (OBC) , (OCA) , (OAB) là 1,2,3 nên tọa độ điểm M là $(1,2,3)$

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Vì M thuộc mặt phẳng (ABC) nên $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$

$$V_{OABC} = \frac{1}{6} abc$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 3\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} \Leftrightarrow \frac{1}{6} abc \geq 27$

Chọn đáp án B.

Câu 46. Cho hai điểm $M(1;2;3)$, $A(2;4;4)$ và hai mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 1 = 0$,

$(Q): x - 2y - z + 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M cắt (P) , (Q) lần lượt tại B , C sao cho tam giác ABC cân tại A và nhận AM là đường trung tuyến.

A. $\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$

B. $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$

C. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$

D. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$

Hướng dẫn giải:

Gọi $B(a;b;c)$, từ giả thiết suy ra M là trung điểm của BC , suy ra $C(2-a;4-b;6-c)$.

$B \in (P)$, $C \in (Q)$ nên có hai pt: $a + b - 2c + 1 = 0$ (1); $-a + 2b + c - 8 = 0$ (2).

$\overrightarrow{AM}(-1;-2;-1)$, $\overrightarrow{BC}(2-2a;4-2b;6-2c)$.

Tam giác ABC cân tại A nên: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow a + 2b + c - 8 = 0$ (3).

Từ (1), (2) và (3) có hệ:
$$\begin{cases} a + b - 2c + 1 = 0 \\ -a + 2b + c - 8 = 0 \\ a + 2b + c - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow B(0;3;2), C(2;1;4).$$

Đường thẳng Δ qua B và C có pt $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

Chọn đáp án D.

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ hai điểm

$A(2;0;3)$ và $B(2;-2;-3)$. Biết điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc Δ thì $MA^4 + MB^4$ nhỏ nhất. Tìm x_0

A. $x_0 = 0$

B. $x_0 = 1$

C. $x_0 = 2$

D. $x_0 = 3$

Hướng dẫn giải:

Phương trình đường thẳng AB là:
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = t_1 \\ z = 3 + 3t_1 \end{cases} \quad (t_1 \in \mathbb{R}).$$
 Dễ thấy đường thẳng Δ và AB cắt nhau tại

điểm $I(2; -1; 0)$ suy ra AB và Δ đồng phẳng.

Lại có $\overrightarrow{IA}(0; 1; 3), \overrightarrow{IB}(0; -1; -3) \Rightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB} \Rightarrow IA + IB = AB$.

Ta có: $MA^4 + MB^4 \geq \frac{1}{2}(MA^2 + MB^2)^2 \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(MA + MB)^2\right)^2 \geq \frac{1}{8}AB^4 = \frac{1}{8}(IA + IB)^4$.

Do đó $MA^4 + MB^4$ nhỏ nhất khi M trùng với điểm $I(2; -1; 0)$

Chọn đáp án C.

Câu 48. Trong hệ trục tọa độ Oxyz cho 3 điểm $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với $a, b, c > 0$. Giả sử a, b, c thay đổi nhưng thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = k^2$ không đổi. Diện tích tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{k^2\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{k^2\sqrt{3}}{6}$

C. $k^2\sqrt{3}$

D. k^2

Hướng dẫn giải:

Phương trình (ABC): $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Gọi $H(x; y; z)$ là hình chiếu vuông góc của O lên (ABC)

$$\text{Khi đó } \begin{cases} H \in (ABC) \\ OH \perp AB \\ OH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bcx + cay + abz = abc \\ -ax + by = 0 \\ -ax + cz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{ab^2c^2}{(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2} \\ y = \frac{a^2bc^2}{(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2} \\ z = \frac{a^2b^2c}{(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{abc}{\sqrt{(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2}}$$

$$\text{Ta có } V_{OABC} = \frac{1}{6}OA.OB.OC = \frac{1}{6}abc$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{3V_{OABC}}{OH} = \frac{1}{2}\sqrt{(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq \frac{a^4 + b^4}{2} + \frac{b^4 + c^4}{2} + \frac{c^4 + a^4}{2} = a^4 + b^4 + c^4$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

$$\text{Vậy } \max S = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^4}{3}} = \frac{k^2\sqrt{3}}{6}$$

Chọn đáp án B.

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho thể tích tứ diện OABC có giá trị nhỏ nhất là

- A. $\frac{x}{7} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$ B. $\frac{x}{27} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$ C. $\frac{x}{-27} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$ D. $\frac{x}{27} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = -1$

Hướng dẫn giải:

Giả sử $A(a;0;0) \in Ox, B(0;b;0) \in Oy, C(0;0;c) \in Oz$ ($a, b, c > 0$).

Khi đó PT mặt phẳng (P) có dạng: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Ta có: $M(9;1;1) \in (P) \Rightarrow \frac{9}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ (1); $V_{OABC} = \frac{1}{6}abc$ (2)

$$(1) \Leftrightarrow abc = 9bc + ac + ab \geq 3\sqrt[3]{9(abc)^2} \Leftrightarrow (abc)^3 \geq 27 \cdot 9(abc)^2 \Leftrightarrow abc \geq 243$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} 9bc = ac = ab \\ \frac{9}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 27 \\ b = 3 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow (P): \frac{x}{27} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1.$$

Chọn đáp án B.

Câu 50. Trong không gian Oxyz cho 4 điểm $A(2;3;2)$, $B(6;-1;-2)$, $C(-1;-4;3)$, $D(1;6;-5)$. Gọi M là một điểm nằm trên đường thẳng CD sao cho tam giác MAB có chu vi bé nhất. Khi đó tọa độ điểm M là:

- A. $M(0;1;-1)$ B. $M(2;11;-9)$ C. $M(3;16;-13)$ D. $M(-1;-4;3)$

Hướng dẫn giải:

Tam giác MAB có độ dài cạnh $AB = 4\sqrt{3}$ không đổi, do đó chu vi bé nhất khi và chỉ khi $MA + MB$ bé nhất.

$\overrightarrow{AB} = (4; -4; -4)$; $\overrightarrow{CD} = (2; 10; -8)$. Vì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ nên $AB \perp CD$, suy ra điểm M cần tìm là hình chiếu vuông góc của A, cũng là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng CD. Từ đó tìm ra điểm $M(0;1;-1)$.

Chọn đáp án A.

Câu 51. Trong không gian tọa độ Oxyz cho điểm $A(0;1;1)$, $B(1;0;-3)$, $C(-1;-2;-3)$ và mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0$. Tìm tọa độ điểm D trên mặt cầu (S) sao cho tứ diện ABCD có thể tích lớn nhất.

- A. $D\left(\frac{7}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ B. $D\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{5}{3}\right)$ C. $D\left(\frac{7}{3}; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$ D. $D\left(\frac{7}{3}; -\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$

Hướng dẫn giải:

Ta có (S): $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$ suy ra (S) có tâm $I(1;0;-1)$, bán kính $R = 2$

Và $\overrightarrow{AB} = (1; -1; -4)$; $\overrightarrow{AC} = (-1; -3; -4)$

Mặt phẳng (ABC) có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-8; 8; -4)$

Suy ra mp(ABC) có phương trình: $-8x + 8(y-1) - 4(z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y + z + 1 = 0$

Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{3}d(D; (ABC)) \cdot S_{ABC}$ nên V_{ABCD} lớn nhất khi và chỉ khi $d(D; (ABC))$ lớn nhất. Gọi

D_1, D_2 là đường kính của mặt cầu (S) vuông góc với mp(ABC). Ta thấy với D là 1 điểm bất kỳ thuộc (S) thì $d(D; (ABC)) \leq \max\{d(D_1; (ABC)); d(D_2; (ABC))\}$.

Dấu “=” xảy ra khi D trùng với D_1 hoặc D_2

Đường thẳng D_1D_2 đi qua $I(1;0;-1)$, và có VTCP là $\vec{n}_{ABC} = (2;-2;1)$

Do đó (D_1D_2) có phương trình:
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Tọa độ điểm D_1 và D_2 thỏa mãn hệ:
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = -1 + t \\ (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{3} \\ t = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow D_1\left(\frac{7}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right) \& D_2\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{5}{3}\right)$

Ta thấy: $d(D_1; (ABC)) > d(D_2; (ABC))$. Vậy điểm $D\left(\frac{7}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ là điểm cần tìm

Chọn đáp án D.

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M , cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt. Tính diện tích lớn nhất S của tam giác OAB .

A. $S = \sqrt{7}$.

B. $S = 4$.

C. $S = 2\sqrt{7}$.

D. $S = 2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Vì $OM = 1 < R$ nên M thuộc miền trong của mặt cầu (S) . Gọi A, B là giao điểm của đường thẳng với mặt cầu. Gọi H là chân đường cao hạ từ O của tam giác OAB .

Đặt $x = OH$, ta có $0 < x \leq OM = 1$, đồng thời

$HA = \sqrt{R^2 - OH^2} = \sqrt{8 - x^2}$. Vậy diện tích tam giác OAB là

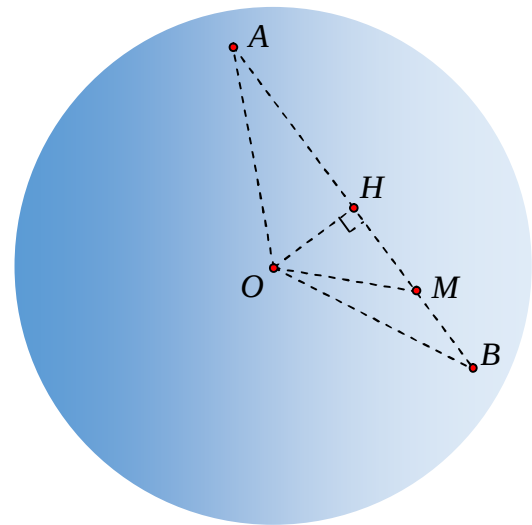
$$S_{OAB} = \frac{1}{2} OH \cdot AB = OH \cdot HA = x\sqrt{8 - x^2}.$$

Khảo sát hàm số $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$ trên $(0;1]$, ta được

$$\max_{(0;1]} f(x) = f(1) = \sqrt{7}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của $S_{\Delta OAB} = \sqrt{7}$, đạt được khi $x = 1$ hay $H \equiv M$, nói cách khác là $d \perp OM$.

Chọn đáp án A.



Câu 53. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 1 = 0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = m + t \end{cases}$. Tìm m để d

cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho các mặt phẳng tiếp diện của (S) tại A và tại B vuông góc với nhau.

A. $m = -1$ hoặc $m = -4$ B. $m = 0$ hoặc $m = -4$ C. $m = -1$ hoặc $m = 0$

D. Cả A, B, C đều sai

Hướng dẫn giải:Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì trước tiên d phải cắt mặt cầu, tức là phương trình $(2-t)^2 + t^2 + (m+t)^2 - 2(2-t) + 4(m+t) + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow 3t^2 + 2(m+1)t + m^2 + 4m + 1 = 0$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 3m^2 - 12m - 3 > 0$

$$\Leftrightarrow m^2 + 5m + 1 < 0.$$

Với phương trình có hai nghiệm phân biệt, áp dụng định lý Viet ta có

$$t_1 t_2 = \frac{m^2 + 4m + 1}{3}; t_1 + t_2 = \frac{-2}{3}(m+1)$$

Khi đó $\overrightarrow{IA} = (1-t_1; t_1; m+2+t_1), \overrightarrow{IB} = (1-t_2; t_2; m+2+t_2).$ Vậy $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = (1-t_1)(1-t_2) + t_1 t_2 + (m+2+t_1)(m+2+t_2) = 0$

$$\Leftrightarrow 3t_1 t_2 + (m+1)(t_1 + t_2) + (m+2)^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m + 1 - \frac{2}{3}(m+1)^2 + (m+2)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -4 \end{cases} \text{ (TM).}$$

Chọn đáp án A.

Câu 54. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm $A(1;0;1), B(1;2;1), C(4;1;-2)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$. Tìm trên (P) điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó M có tọa độ

A. $M(1;1;-1)$ B. $M(1;1;1)$ C. $M(1;2;-1)$ D. $M(1;0;-1)$ **Hướng dẫn giải:**Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có $G(2;1;0)$, ta có

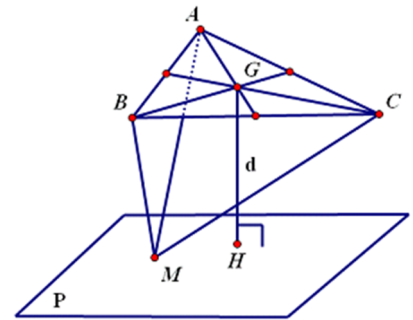
$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \quad (1)$$

Từ hệ thức (1) ta suy ra:

 $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt GTNN $\Leftrightarrow MG$ đạt GTNN $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của G trên (P) .Gọi (d) là đường thẳng qua G và vuông góc với (P) thì (d) có

$$\text{phương trình tham số là } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$$

$$\text{Tọa độ M là nghiệm của hệ phương trình } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow M(1;0;-1)$$

**Chọn đáp án D.**

Câu 55. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$ và đường thẳng

$(d): \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$. Tìm m để (d) cắt (S) tại hai điểm M, N sao cho độ dài MN bằng 8.

A. $m = -24$

B. $m = 8$

C. $m = 16$

D. $m = -12$

Hướng dẫn giải:

(S) có tâm $I(-2;3;0)$ và bán kính $R = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 0^2 - m} = \sqrt{13 - m} (m < 13)$

Gọi H là trung điểm M, N $\Rightarrow MH = 4$

Đường thẳng (d) qua $A(0;1;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2;1;2) \Rightarrow d(I;d) = \frac{\left| \left[\vec{u}, \overrightarrow{AI} \right] \right|}{\left| \vec{u} \right|} = 3$

Suy ra $R = \sqrt{MH^2 + d^2(I;d)} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

Ta có $\sqrt{13 - m} = 5 \Leftrightarrow 13 - m = 25 \Leftrightarrow m = -12$

Chọn đáp án D.

Câu 56. Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(2;0;-2), B(3;-1;-4), C(-2;2;0)$. Điểm D trong mặt phẳng (Oyz) có cao độ âm sao cho thể tích của khối tứ diện ABCD bằng 2 và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (Oxy) bằng 1 có thể là:

A. $D(0;-3;-1)$

B. $D(0;2;-1)$

C. $D(0;1;-1)$

D. $D(0;3;-1)$

Hướng dẫn giải:

Do $D \in (Oyz) \longrightarrow D(0;b;c)$ với $c < 0$

Theo giả thiết: $d[D, (Oxy)] = 1 \Leftrightarrow |c| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 (\text{loại}) \\ c = -1 \end{cases} \longrightarrow D(0;b;-1)$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;-1;-2), \overrightarrow{AC} = (-4;2;2), \overrightarrow{AD} = (-2;b;1)$

Suy ra $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (2;6;-2) \longrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 6b - 6$

Cũng theo giả thiết, ta có: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}| = |b - 1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ b = -1 \end{cases}$

Chọn đáp án D.

SỐ PHỨC

Câu 1. Cho hai số phức phân biệt $z_1; z_2$ thỏa điều kiện $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ là số ảo. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $|z_1| = 1; |z_2| = 1$ B. $z_1 = \overline{z_2}$ C. $|z_1| = |z_2|$ D. $z_1 = -z_2$

Hướng dẫn giải:

$$z_1 \neq z_2 \Leftrightarrow z_1 - z_2 \neq 0.$$

$$\text{Thì } \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \text{ là số ảo} \Leftrightarrow \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} + \overline{\left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}\right)} = 0. \Leftrightarrow \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} + \frac{\overline{z_1 + z_2}}{\overline{z_1 - z_2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (z_1 + z_2)(\overline{z_1 - z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = 0. \Leftrightarrow 2(z_1 \overline{z_1} - z_2 \overline{z_2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1 \overline{z_1} - z_2 \overline{z_2} = 0. \Leftrightarrow |z_1|^2 - |z_2|^2 = 0.$$

Chọn đáp án A.

Câu 2. Gọi $z_1; z_2; z_3; z_4$ là 4 nghiệm phức của phương trình $z^4 + (4 - m)z^2 - 4m = 0$. Tìm tất cả các giá trị m để $|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = 6$.

- A. $m = -1$ B. $m = \pm 2$ C. $m = \pm 3$ D. $m = \pm 1$

Hướng dẫn giải:

$$z^4 + (4 - m)z^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow (z^2 + 4)(z^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_{1,2} = \pm 2i \\ z_{3,4} = \pm \sqrt{-m} \end{cases} \text{ nếu } m \leq 0 \text{ hoặc}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_{1,2} = \pm 2i \\ z_{3,4} = \pm i\sqrt{m} \end{cases} \text{ nếu } m > 0$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} 6 = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = 4 + 2\sqrt{-m} \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$$

$$\text{hoặc } \begin{cases} 6 = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = 4 + 2\sqrt{m} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

Kết hợp lại thì $m = \pm 1$ thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án D.

Câu 3. Tìm số phức z biết z thỏa mãn phương trình $\frac{z}{z} + z = 2$

- A. 1 B. $1+i$ C. $1-i$ D. i

Hướng dẫn giải:

$$\frac{z}{z} + z = 2 \Leftrightarrow z + z\bar{z} = 2\bar{z}$$

$$\Leftrightarrow a + bi + a^2 + b^2 = 2(a - bi)$$

$$\Leftrightarrow (a + a^2 + b^2) + bi = 2a - 2bi$$

$$\begin{cases} a + a^2 + b^2 = 2a \\ b = -2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 1$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0 \text{ (loại)}$$

Chọn đáp án A.

Câu 4. Trong các số phức thỏa điều kiện $|z - 4i - 2| = |2i - z|$, modun nhỏ nhất của số phức z bằng?

A. $2\sqrt{2}$

B. 2

C. 1

D. $3\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Giả sử số phức $z = x + yi$ $x, y \in \mathbb{R}$

Theo đề $|z - 4i - 2| = |2i - z|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow x + y - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 4 - x \quad (1)$$

$$\text{Mà } |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (4-x)^2} \quad (\text{thay (1) vào})$$

$$= \sqrt{2(x-2)^2 + 8} \geq 2\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án A.

Câu 5. Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $|z| \geq 2$. Tìm tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \left| \frac{z+i}{z} \right|.$$

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải:

Ta có $1 - \left| \frac{i}{z} \right| \leq \left| 1 + \frac{i}{z} \right| \leq 1 + \left| \frac{i}{z} \right| \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{|z|} \leq \left| 1 + \frac{i}{z} \right| \leq 1 + \frac{1}{|z|}$. Mặt khác $|z| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{|z|} \leq \frac{1}{2}$ suy ra $\frac{1}{2} \leq P \leq \frac{3}{2}$

Suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất là $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$. Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 2.

Chọn đáp án B.

Câu 6. Số phức z có mô đun lớn nhất và thỏa mãn điều kiện $\left| \bar{z}(1+i) - 3 + 2i \right| = \frac{\sqrt{13}}{2}$ là:

A. $z = 1 + 3i$

B. $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}i$

C. $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

D. $z = \frac{3}{4} + \frac{15}{4}i$

Hướng dẫn giải:

+ Gọi $z = x + yi$. Từ giả thiết ta có: $(x + y - 3)^2 + (x - y + 2)^2 = \frac{13}{4}$

+ Đồng thời $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ lớn nhất.

Chọn đáp án A.

Câu 7. Tính tổng mô-đun tất cả các nghiệm của phương trình: $(z+i)(z^2-1)(z^3+i)=0$

A. 3

B. 4

C. 6

D. 8

Hướng dẫn giải:

$$(z+i)(z^2-1)(z^3+i)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z=-i \\ z=\pm 1 \\ z^3-i^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-i \\ z=\pm 1 \\ z=i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-i \\ z=\pm 1 \\ z=i \\ z=\frac{-i \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Suy ra tổng mô-đun các nghiệm bằng 6.

Chọn đáp án C.

Câu 8. Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của 3 số phức: $1+2i$; $(1-i)(1+2i)$; $\frac{2+6i}{3-i}$. Diện tích của tam giác ABC bằng:

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Dùng máy tính casio ta có A(1;2), B(3;1), C(0;2)

Dùng công thức $S = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right|$ Với $\overrightarrow{AB} = (2; -1; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; 0; 0)$

Dùng máy tính ta có kết quả B: $S=1/2$

(Có thể dùng công thức tính diện tích phần Oxy tính nhanh hơn)

Chọn đáp án B.

Câu 9. Cho số phức $z = \frac{m+1}{1+m(2i-1)}$ ($m \in \mathbb{R}$). Số các giá trị nguyên của m để $|z-i| < 1$ là

A. $\emptyset$

B. 1

C. 4

D. Vô số

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } z-i = \frac{m+1}{1+m(2i-1)} - i = \frac{m+1-i(1+2mi-m)}{1+m(2i-1)} = \frac{3m+1+(m-1)i}{1-m+2mi}$$

$$\Rightarrow |z-i| = \left| \frac{3m+1+(m-1)i}{1-m+2mi} \right| = \frac{|3m+1+(m-1)i|}{|1-m+2mi|} < 1$$

$$\Leftrightarrow |3m+1+(m-1)i| < |1-m+2mi| \Leftrightarrow (3m+1)^2 + (m-1)^2 < (1-m)^2 + 4m^2$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 + 6m + 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < -\frac{1}{5}$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ Không có giá trị của m thỏa mãn.

Chọn đáp án A.

Câu 10. Cho hai số phức $z_1; z_2$ thỏa mãn $|iz_1 + \sqrt{2}| = \frac{1}{2}$ và $z_2 = iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 - z_2|$.

- A.** $2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ **B.** $2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ **C.** $\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$ **D.** $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

Hướng dẫn giải:

Bài toán này, thực chất là dựa trên kiến thức “Biểu diễn hình học số phức”. Ta thấy nếu đặt $z_1 = x_1 + y_1i$ ($x_1, y_1 \in \mathbb{R}$). Khi đó điểm $M(x_1; y_1)$ là điểm biểu diễn số phức z_1 thỏa mãn:

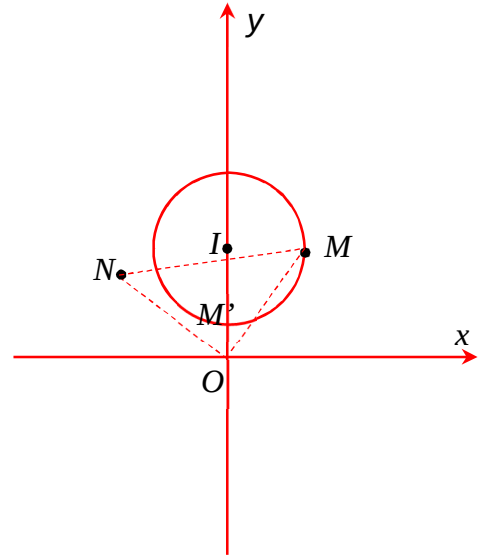
$$\begin{aligned} |i(x_1 + y_1i) + \sqrt{2}| &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow |ix_1 - y_1 + \sqrt{2}| = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x_1^2 + (y_1 - \sqrt{2})^2 &= \frac{1}{4}. \text{ Suy ra tập hợp các điểm } M \text{ biểu} \\ \text{diễn } z_1 &\text{ là đường tròn } (C) \text{ có tâm } I(0; \sqrt{2}) \text{ và bán kính} \\ R &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Khi đó nếu N là điểm biểu diễn của số phức z_2 thì việc tìm GTNN của $|z_1 - z_2|$ là việc tìm GTNN của MN .

Theo đề thì $z_2 = iz_1 = -y_1 + x_1i \Rightarrow N(-y_1; x_1)$ là điểm biểu diễn z_2 . Ta nhận thấy rõ ràng

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = -x_1y_1 + x_1y_1 = 0 \Rightarrow OM \perp ON. \text{ Dễ nhận thấy } OM = ON = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

Ta có hình vẽ sau:



Do OMN là tam giác vuông cân tại O nên $MN = OM\sqrt{2}$, do đó để MN nhỏ nhất thì OM nhỏ nhất. Dễ thấy, OM nhỏ nhất khi $M \equiv M'$ (M' là giao điểm của OI với đường tròn như hình vẽ) Tức là

$$M\left(0; \sqrt{2} - \frac{1}{2}\right). \text{ Khi đó } MN = OM\sqrt{2} = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Chọn đáp án A.

Câu 11. Trong mặt phẳng phức Oxy , trong các số phức z thỏa $|z+1-i| \leq 1$. Nếu số phức z có môđun lớn nhất thì số phức z có phần thực bằng bao nhiêu ?

- A.** $\frac{-\sqrt{2}-2}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}-2}{2}$ **C.** $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải:

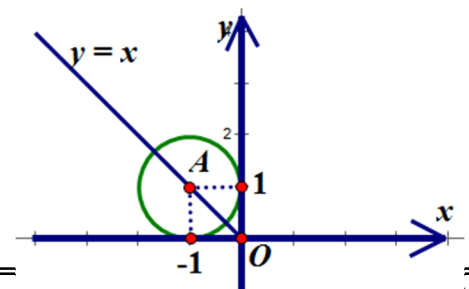
Gọi $M(x, y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

Gọi A là điểm biểu diễn số phức $-1+i$

Ta có: $|z+1-i| \leq 1 \Leftrightarrow MA \leq 1$. Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức là hình tròn tâm $A(-1,1)$, $R=1$ như hình vẽ

Để $\max|z| \Leftrightarrow \max(OM)$

$$\Rightarrow M \text{ thỏa hệ: } \begin{cases} (x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 1 \\ y = -x \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}-2}{2}, x = -\frac{\sqrt{2}+2}{2}$$

Chọn đáp án A.

Câu 12. Trong mặt phẳng phức Oxy , các số phức z thỏa $|z+2i-1|=|z+i|$. Tìm số phức z được biểu diễn bởi điểm M sao cho MA ngắn nhất với $A(1,3)$.

A. $3+i$.

B. $1+3i$.

C. $2-3i$.

D. $-2+3i$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $M(x, y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$

Gọi $E(1, -2)$ là điểm biểu diễn số phức $1-2i$

Gọi $F(0, -1)$ là điểm biểu diễn số phức $-i$

Ta có: $|z+2i-1|=|z+i| \Leftrightarrow ME = MF \Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường trung trực $EF: x-y-2=0$.

Để MA ngắn nhất khi $MA \perp EF$ tại $M \Leftrightarrow M(3,1) \Rightarrow z = 3+i$

Chọn đáp án A.

Câu 13. Trong các số phức z thỏa mãn $\left| \frac{2z-i}{2+iz} \right| \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$.

A. 1.

B. 2.

C. $\sqrt{2}$

D. $\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$\left| \frac{2z-i}{2+iz} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2z-i}{2+iz} \cdot \frac{2\bar{z}+i}{2-i\bar{z}} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (2z-i)(2\bar{z}+i) \leq (2+iz)(2-i\bar{z}) \\ 2+iz \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow z\bar{z} \leq 1$$

Chọn đáp án A.

Câu 14. Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn từng điều kiện sau: $|z| = |\bar{z} - 3 + 4i|$.

A. $3x + 4y - \frac{25}{2} = 0$

B. $3x + 4y - 25 = 0$

C. $3x - 4y - \frac{25}{2} = 0$

D. $3x - 4y - 25 = 0$

Hướng dẫn giải:

Vì $|z| = |\bar{z}|$ nên $|\bar{z} - 3 + 4i| = |\overline{\bar{z} - 3 + 4i}| = |z - 3 - 4i|$,

suy ra $|z| = |\bar{z} - 3 + 4i| \Leftrightarrow |z| = |z - 3 - 4i| \Leftrightarrow \left| \frac{z-3-4i}{z} \right| = 1$

Tập hợp điểm có tọa độ z thỏa mãn $\left| \frac{z-3-4i}{z} \right| = 1$ là đường trung trực của đoạn thẳng OA , với

$O(0)$ và $A(3+4i)$. Đường trung trực này đi qua trung điểm $K\left(\frac{3}{2} + 2i\right)$ của đoạn thẳng OA và

nhận vectơ $\overrightarrow{OA}(3+4i)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là:

$$3\left(x - \frac{3}{2}\right) + 4(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - \frac{25}{2} = 0.$$

Chọn đáp án A.

Câu 15. Điểm M biểu diễn số phức $z \neq 0$ và điểm M' biểu diễn số phức $z' = \frac{1}{z}$. Nếu điểm M di động

trên đường tròn tâm A(-1;1) bán kính $R = \sqrt{2}$ thì M' di động trên đường nào?

A. $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$

B. $2x + 2y + 1 = 0$

C. $2x - 2y + 1 = 0$

D. $2x + 2y - 1 = 0$

Hướng dẫn giải:

Ta có $z' = \frac{1}{z} = \frac{z}{|z|^2}$. Do đó
$$\begin{cases} x' = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ y' = \frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

M di động trên đường tròn tâm A(-1;1) bán kính $R = \sqrt{2}$ nên

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 + 2x - 2y}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow 2x' - 2y' + 1 = 0$$

Chọn đáp án C.

Câu 16. Tìm số thực $m = a - b\sqrt{20}$ (a, b là các số nguyên khác 0) để phương trình

$2z^2 + 2(m-1)z + (2m+1) = 0$ có hai nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| + |z_2| = \sqrt{10}$. Tìm a .

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Hướng dẫn giải:

$$\Delta' = m^2 - 6m - 1 \in \mathbb{R}$$

$$\text{TH1: } \Delta' > 0 \text{ hay } m \in (-\infty; 3 - \sqrt{10}) \cup (3 + \sqrt{10}; +\infty)$$

$$\text{Khi đó } |z_1| + |z_2| = \sqrt{10} \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + 2|z_1 z_2| = 10$$

$$\Leftrightarrow (1-m)^2 - (2m+1) + |2m+1| = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 \geq 0 \\ (1-m)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 + \sqrt{10} \\ m = 3 - \sqrt{20} \end{cases} \quad (\text{loại})$$

$$\text{TH2: } \Delta' < 0 \text{ hay } m \in (3 - \sqrt{10}; 3 + \sqrt{10})$$

$$\text{Khi đó: } |z_1| + |z_2| = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left| \frac{1-m+i\sqrt{-(m^2-6m-1)}}{2} \right| + \left| \frac{1-m-i\sqrt{-(m^2-6m-1)}}{2} \right| = \sqrt{10}$$

$$\text{Hay } \sqrt{(1-m)^2 + (-m^2+6m+1)} = \sqrt{10} \Leftrightarrow m = 2$$

$$\text{Vậy } m = 2 \text{ hoặc } m = 3 - \sqrt{20}$$

Chọn đáp án C.

Câu 17. Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = 3 - 2i + (2 - i)z$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. 20

B. $\sqrt{20}$ C. $\sqrt{7}$

D. 7

Hướng dẫn giải:

Đặt $w = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$

$$w = 3 - 2i + (2 - i)z$$

$$\Rightarrow x + yi = 3 - 2i + (2 - i)z$$

$$\Rightarrow z = \frac{x - 3 + (y + 2)i}{2 - i} = \frac{2x - y - 8}{5} + \frac{x + 2y + 1}{5}i$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{2x - y - 8}{5}\right)^2 + \left(\frac{x + 2y + 1}{5}\right)^2} = 2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 4y - 7 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 20$$

Bán kính của đường tròn là $r = \sqrt{20}$

Chọn đáp án B.

Câu 18. Cho hai số phức u, v thỏa mãn $|u| = |v| = 10$ và $|3u - 4v| = \sqrt{2016}$. Tính $M = |4u + 3v|$.

A. $\sqrt{2984}$ B. $\sqrt{2884}$ C. $\sqrt{2894}$ D. $\sqrt{24}$

Hướng dẫn giải:

Ta có $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$. Đặt $N = |3u - 4v|$.

$$\text{Khi đó } N^2 = (3u - 4v)(3\bar{u} - 4\bar{v}) = 9|u|^2 + 16|v|^2 - 12(u\bar{v} + v\bar{u}).$$

$$\text{Tương tự ta có } M^2 = 16|u|^2 + 9|v|^2 - 12(u\bar{v} + v\bar{u}).$$

$$\text{Do đó } M^2 + N^2 = 25(|u|^2 + |v|^2) = 5000.$$

$$\text{Suy ra } M^2 = 5000 - N^2 = 5000 - 2016 = 2984 \Rightarrow M = \sqrt{2984}.$$

Chọn đáp án A.

Câu 19. Cho số phức z thỏa mãn: $z - \frac{\bar{z}}{1 + 3i} = \frac{6 + 7i}{5}$. Tìm phần thực của số phức z^{2017} .

A. -2^{1008} B. 2^{1008} C. 2^{504} D. 2^{2017}

Hướng dẫn giải:

Cho số phức z thỏa mãn: $z - \frac{\bar{z}}{1 + 3i} = \frac{6 + 7i}{5}$. Tìm phần thực của số phức z^{2013} .

$$\text{Gọi số phức } z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = a - bi \text{ thay vào (1) ta có } a + bi - \frac{a - bi}{1 + 3i} = \frac{6 + 7i}{5}$$

$$a + bi - \frac{(a - bi)(1 - 3i)}{10} = \frac{6 + 7i}{5} \Leftrightarrow 10a + 10bi - a + 3b + i(b + 3a) = 12 + 14i$$

$$\Leftrightarrow 9a + 3b + i(11b + 3a) = 12 + 14i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9a + 3b = 12 \\ 11b + 3a = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$a = b = 1 \Rightarrow z = 1 + i \Rightarrow z^{2017} = ((1+i)^4)^{504} (1+i) = (-4)^{504} (1+i) = 2^{1008} + 2^{1008}i$$

Chọn đáp án B.

Câu 20. Cho số phức z có mô đun bằng 2017 và w là số phức thỏa mãn biểu thức $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w}$.

Mô đun của số phức w bằng:

A. 1

B. 2

C. 2016

D. 2017

Hướng dẫn giải:

$$\text{Từ } \frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w} \Leftrightarrow \frac{z+w}{zw} - \frac{1}{z+w} = 0 \Leftrightarrow \frac{(z+w)^2 - zw}{zw(z+w)} = 0$$

$$\Rightarrow z^2 + w^2 + zw = 0 \Leftrightarrow z^2 + zw + \frac{1}{4}w^2 + \frac{3}{4}w^2 = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{2}w\right)^2 = -\frac{3}{4}w^2 \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{2}w\right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{3}w}{2}\right)^2$$

$$\text{Từ } \left(z + \frac{w}{2}\right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{3}w}{2}\right)^2 \Rightarrow z = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)w \Rightarrow w = \frac{z}{\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$\text{Suy ra: } |w| = \frac{2017}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}} = 2017$$

Chọn đáp án D.

Câu 21. Biết số phức Z thỏa điều kiện $3 \leq |z - 3i + 1| \leq 5$. Tập các điểm biểu diễn của Z tạo thành một hình phẳng. Diện tích hình phẳng đó bằng

A. 16π

B. 4π

C. 9π

D. 25π

Hướng dẫn giải:

Đặt $z = x + yi$

$$|z - 3i - 1| = |x - 1 + (y - 3)i| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}$$

Do đó

$$3 \leq |z - 3i + 1| \leq 5 \Leftrightarrow 9 \leq (x-1)^2 + (y-3)^2 \leq 25$$

Tập hợp các điểm biểu diễn của Z là hình phẳng nằm trong đường tròn

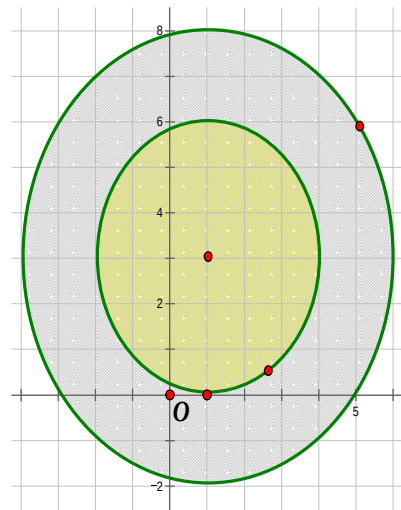
Tâm $I(1; 3)$ với bán kính bằng $R=5$ đồng thời nằm ngoài đường tròn tâm $I(1; 3)$ với bán kính $r=3$

Diện tích của hình phẳng đó là

$$S = \pi \cdot 5^2 - \pi \cdot 3^2 = 16\pi$$

Chọn đáp án A.

hợp
của



Câu 22. Số Phức cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $z_1 + z_2 + z_3 = 1$. Mệnh đề nào sau đây là sai.

A. Trong ba số đó có hai số đối nhau.

- B.** Trong ba số đó phải có một số bằng 1.
C. Trong ba số đó có nhiều nhất hai số bằng 1.
D. Tích của ba số đó luôn bằng 1.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $z_1 + z_2 + z_3 = 1 \Leftrightarrow 1 - z_1 = z_2 + z_3$.

Nếu $1 - z_1 = 0$ thì $z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow z_2 = -z_3$.

Nếu $1 - z_1 \neq 0$ thì điểm P biểu diễn số phức $1 - z_1 = z_2 + z_3$ không trùng với gốc tọa độ O.

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức $-z_1$ và A là điểm biểu diễn của số 1.

Khi đó ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP}$ (do P là điểm biểu diễn của số $1 + (-z_1)$) nên OAPM là hình bình hành. Mà $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ nên các điểm biểu diễn cho ba số z_1, z_2, z_3 đều nằm trên đường tròn đơn vị. Ta cũng có $OA = OM = 1$ nên OAPM là hình thoi. Khi đó ta thấy M, A là giao điểm của đường trung trực đoạn OP với đường tròn đơn vị.

Tương tự do P cũng là điểm biểu diễn của $z_2 + z_3$, nếu M' và A' là hai điểm biểu diễn của số z_2, z_3 thì ta cũng có M', A' là giao điểm đường trung trực của OP và đường tròn đơn vị.

Vậy $M' \equiv M, A' \equiv A$ hoặc ngược lại. Nghĩa là $z_2 = 1, z_3 = -z_1$ hoặc $z_3 = 1, z_2 = -z_1$.

Do đó A, B là mệnh đề đúng.

C đúng là hiển nhiên, vì nếu ba số đều 1 một thì tổng bằng 3.

D sai vì với $z_1 = 1, z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ thỏa hai tính chất trên của đề bài nhưng

$$z_1 z_2 z_3 \neq 1.$$

Chọn đáp án D.

Câu 23. Cho z là số phức có mô đun bằng 2017 và w là số phức thỏa mãn $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w}$. Mô đun của số phức w là

A. 2015**B.** 1**C.** 2017**D.** 0**Hướng dẫn giải:**

Từ $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w}$ ta suy ra $z^2 + w^2 + zw = 0$

$$\Rightarrow \left(z + \frac{w}{2}\right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{3}w}{2}\right)^2 \Rightarrow z = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)w$$

Lấy mô đun hai vế ta có $|z| = |w| = 2017$.

Chọn đáp án C.

Câu 24. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 + 3i| = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$

A. $\sqrt{13} - 3$ **B.** 2**C.** $\sqrt{13} - 2$ **D.** 2**Hướng dẫn giải:**

Các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 2 + 3i| = 3$ nằm trên đường tròn (C) tâm $I(2; -3)$ và bán kính $R = 3$.

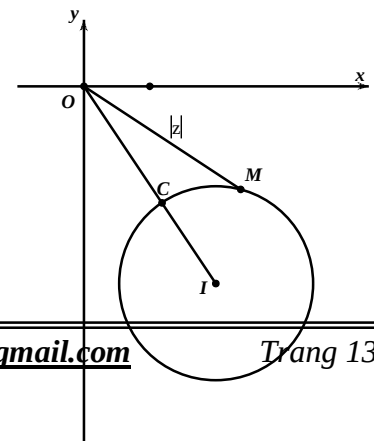
(Ý nghĩa hình học của $|z|$: độ dài OM)

Ta có $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ điểm $M \in (C)$ và OM nhỏ nhất.

(Bài toán hình học giải tích quen thuộc)

Ta có: $OM \geq OI - IM = OI - R = \sqrt{13} - 3$.

Dấu « = » xảy ra khi M là giao điểm của (C) và đoạn thẳng OI.



Vậy GTNN của $|z|$ là: $\sqrt{13} - 3$.

Chọn đáp án A.

Câu 25. Cho số phức z thỏa mãn: $|z - 3 + 4i| = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Hướng dẫn giải:

Giả sử $z = a + bi$, ta có: $|a + bi - 3 + 4i| = 4 \Rightarrow (a - 3)^2 + (b + 4)^2 = 16$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a - 3 = 4 \sin \varphi \\ b + 4 = 4 \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 + 4 \sin \varphi \\ b = 4 \cos \varphi - 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |z|^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 \sin^2 \varphi + 24 \sin \varphi + 16 \cos^2 \varphi + 16 - 32 \cos \varphi$$

$$= 41 + 24 \sin \varphi - 32 \cos \varphi$$

$$= 41 + 40 \left(\frac{3}{5} \sin \varphi - \frac{4}{5} \cos \varphi \right)$$

$$\text{Đặt } \cos \alpha = \frac{3}{5}, \sin \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow |z|^2 = a^2 + b^2 = 41 + 40 \sin(\varphi - \alpha) \geq 1.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \varphi - \alpha = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} + \alpha + k2\pi.$$

Vậy $\min |z| = 1$.

Chọn đáp án A.

Câu 26. Tìm phần thực của số phức $z = (1 + i)^n$, $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn phương trình $\log_4(n - 3) + \log_4(n + 9) = 3$

A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

Hướng dẫn giải:

Điều kiện $n > 3$, $n \in \mathbb{N}$

Phương trình $\log_4(n - 3) + \log_4(n + 9) = 3 \Leftrightarrow \log_4(n - 3)(n + 9) = 3 \Leftrightarrow n = 7$ (so đk)

$$z = (1 + i)^7 = (1 + i) \cdot \left[(1 + i)^2 \right]^3 = (1 + i)(2i)^3 = 8 - 8i$$

Vậy phần thực của số phức z là 8.

Chọn đáp án D.

Câu 27. Cho số phức z thỏa mãn $|z| \leq 1$ và số phức $w = \frac{2z - 1}{2 + iz}$. Khi đó mô đun của số phức w là:

A. $|w| = 2$

B. $1 < |w| < 2$.

C. $|w| \leq 1$

D. $|w| > 2$

Hướng dẫn giải:

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). $|z| \leq 1 \Rightarrow a^2 + b^2 \leq 1$.

$$\left| \frac{2z - 1}{2 + iz} \right| = \frac{\sqrt{4a^2 + (2b - 1)^2}}{\sqrt{(2 - b)^2 + a^2}}. \text{ Xét } \left| \frac{2z - 1}{2 + iz} \right| > 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{4a^2 + (2b - 1)^2}}{\sqrt{(2 - b)^2 + a^2}} > 1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow a^2 + b^2 > 1. \text{ (vô lý)}$$

Nên $|w| \leq 1$.

Chọn đáp án C.

Câu 28. Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (1 + i\sqrt{3})z + 2$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó?

A. $r = 4$ **B.** $r = 2$ **C.** $r = 16$ **D.** $r = 25$ **Hướng dẫn giải:**

Giả sử $z = a + bi$; $w = x + yi$; $(a, b, x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow (a - 1)^2 + b^2 = 4$

Theo đề

$$w = (1 + i\sqrt{3})z + 2 \Leftrightarrow x + yi = (1 + i\sqrt{3})z + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2 - b\sqrt{3} \\ y = b + a\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = a - 1 - b\sqrt{3} \\ y - \sqrt{3} = b + \sqrt{3}(a - 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = (a - 1 - b\sqrt{3})^2 + (b + (a - 1)\sqrt{3})^2 = 4((a - 1)^2 + b^2) = 16$$

$$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 16 \text{ suy ra bán kính đường tròn là } r = \sqrt{16} = 4.$$

Chọn đáp án A.

Câu 29. Tìm phần ảo của số phức z , biết số phức z thỏa mãn $i \cdot \bar{z} = 2 + i + (1 + i)^2 + \dots + (1 + i)^{2017}$.

A. 1**B.** 2^{1009} **C.** -2^{1009} **D.** $2^{1009}i$ **Hướng dẫn giải:**

Ta thấy $1; 1 + i; (1 + i)^2; \dots; (1 + i)^{2017}$ lập thành một cấp số nhân gồm 2018 số hạng với $u_1 = 1$ công bội $q = 1 + i$.

$$\text{Suy ra } i \cdot \bar{z} = S_{2018} = u_1 \frac{q^{2018} - 1}{q - 1} = \frac{(1 + i)^{2018} - 1}{i} = i - i(1 + i)^{2018}$$

$$\Leftrightarrow \bar{z} = 1 - (1 + i)^{2018} = 1 - [(1 + i)^2]^{1009} = 1 - (2i)^{1009} = 1 - 2^{1009}i$$

$$\Rightarrow z = 1 + 2^{1009}i$$

Vậy phần ảo của z là 2^{1009} .

Chọn đáp án B.

Câu 30. Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (3 + 4i)z + i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r = 4$.**B.** $r = 5$.**C.** $r = 20$.**D.** $r = 22$.**Hướng dẫn giải:**

$$\text{Gọi } w = a + bi, \text{ ta có } w = a + bi = (3 + 4i)z + i \Leftrightarrow z = \frac{a + (b - 1)i}{3 + 4i} = \frac{[a + (b - 1)i](3 - 4i)}{9 - 16i^2}$$

$$= \frac{3a + 4b - 4}{25} + \frac{(3b - 4a - 3)}{25}i \Rightarrow |z| = \frac{\sqrt{(3a + 4b - 4)^2 + (3b - 4a - 3)^2}}{25}$$

$$\text{Mà } |z| = 4 \text{ nên } \Leftrightarrow (3a + 4b - 4)^2 + (3b - 4a - 3)^2 = 100^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2b = 399$$

Theo giả thiết, tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (3 + 4i)z + i$ là một đường tròn nên ta có

$$a^2 + b^2 - 2b = 399 \Leftrightarrow a^2 + (b - 1)^2 = 400 \Rightarrow r = \sqrt{400} = 20$$

Chọn đáp án C.

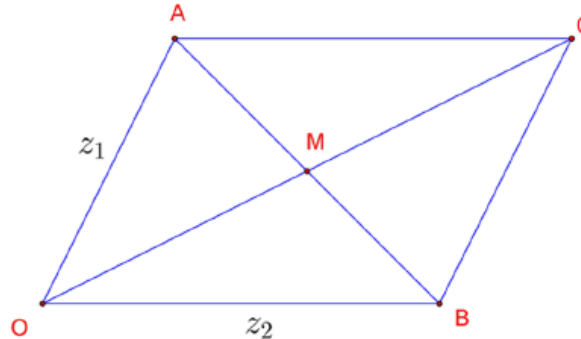
Câu 31. Với hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z_1| + |z_2|$

A. $P = 5 + 3\sqrt{5}$.

B. $P = 2\sqrt{26}$.

C. $P = 4\sqrt{6}$.

D. $P = 34 + 3\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Đặt $OA = |z_1|$, $OB = |z_2|$ (với O là gốc tọa độ, A, B là điểm biểu diễn của z_1, z_2).

Dựng hình bình hành $OACB$, khi đó ta có $AB = |z_1 - z_2| = 2$, $OC = |z_2 + z_1| = 10$, $OM = 5$

Theo định lý đường trung tuyến ta có

$$OM^2 = \frac{2(OA^2 + OB^2) - AB^2}{4} \Rightarrow OA^2 + OB^2 = 52 \Rightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 = 52$$

$$\text{Ta có } |z_1| + |z_2| \leq \sqrt{2(|z_1|^2 + |z_2|^2)} = 2\sqrt{26} \Rightarrow P_{\max} = 2\sqrt{26}$$

Chọn đáp án B.