

BÀI 1. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Bài toán. Chứng minh mệnh đề chứa biến $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n .
Phương pháp.

- Bước 1. Với $n = 1$, ta chứng minh $P(1)$ đúng.
- Bước 2. Giả sử $P(n)$ đúng với $n = k \geq 1$.
 Ta cần chứng minh $P(n)$ đúng với $n = k + 1$.
 Kết luận, mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n .

Để chứng minh mệnh đề chứa biến $P(n)$ đúng với $n \geq p$, p là số nguyên dương. Ta cũng làm các bước tương tự như trên.

- Bước 1. Với $n = p$, ta chứng minh $P(p)$ đúng.
- Giả sử $P(n)$ đúng với $n = k \geq p$.
 Ta cần chứng minh $P(n)$ đúng với $n = k + 1$.
 Kết luận, mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n .

B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 1.1. Chứng minh mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên n

Thực hiện theo các bước đã nêu ở phần tóm tắt lý thuyết.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta có

$$\textcircled{1} 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad \textcircled{2} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

LỜI GIẢI

$\textcircled{1}$ Đặt $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. (1)

Với $n = 1$ thì $S_1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$. Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có

$$S_k = 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k + 1$, tức là cần chứng minh

$$S_{k+1} = 1 + 2 + 3 + \dots + (k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Thật vậy, ta có

$$S_{k+1} = S_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Vậy (1) đúng với $n = k + 1$.

Do đó, $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

$$\textcircled{2} \text{ Đặt } T_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \quad (1)$$

Với $n = 1$ thì $T_1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1 = 1^3$. Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có

$$T_k = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k + 1$, tức là cần chứng minh

$$T_{k+1} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2 [(k+1)+1]^2}{4} = \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4}.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= T_k + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2 [k^2 + 4(k+1)]}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2 (k^2 + 4k + 4)}{4} = \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4}. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với $n = k + 1$.

Do đó, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

Nhận xét. Với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta có $T_n = S_n^2$.

□

VÍ DỤ 2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta luôn có

- ① $u_n = n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3. ② $u_n = 9^n - 1$ chia hết cho 8.

 **Lời giải**

- ① Với $n = 1$ ta có $u_1 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 9$ chia hết cho 3. Vậy mệnh đề đúng với $n = 1$.
Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là $u_k = k^3 + 3k^2 + 5k$ chia hết cho 3.
Ta cần chứng minh $u_{k+1} = (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1)$ chia hết cho 3.
Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3(k+1)^2 + 5k + 5 \\ &= (k^3 + 3k^2 + 5k) + 3(k+1)^2 + 3k + 6. \end{aligned}$$

Vì $(k^3 + 3k^2 + 5k) : 3, 3(k+1)^2 : 3, 3k : 3$ và $6 : 3$ nên $u_{k+1} : 3$. Vậy mệnh đề đúng với $n = k+1$.

Do đó, ta có điều phải chứng minh.

- ② Với $n = 1$ ta có $u_1 = 9^1 - 1 = 8$ chia hết cho 8. Vậy mệnh đề đúng với $n = 1$.
Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là $u_k = 9^k - 1$ chia hết cho 8.
Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 9^{k+1} - 1$ chia hết cho 8.
Thật vậy, ta có

$$u_{k+1} = 9^{k+1} - 1 = 9 \cdot 9^k - 9 + 8 = [9(9^k - 1) + 8] : 8.$$

Vậy mệnh đề đúng với $n = k+1$.

Do đó, ta có điều phải chứng minh. □

VÍ DỤ 3. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 3$, ta luôn có

① $3^n > n^2 + 4n + 5.$

② $2^n > 2n + 1.$

LỜI GIẢI

- ① Với $n = 3$ ta thấy bất đẳng thức đã cho đúng.
Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k \geq 3, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có $3^k > k^2 + 4k + 5$. (1)
Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, tức là

$$3^{k+1} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5 \text{ hay } 3^{k+1} > k^2 + 6k + 10.$$

Thật vậy, nhân cả hai vế của bất đẳng thức (1) với 3 ta được

$$3 \cdot 3^k > 3(k^2 + 4k + 5) \Leftrightarrow 3^{k+1} > k^2 + 6k + 10 + 2k^2 + 6k + 5 \Rightarrow 3^{k+1} > k^2 + 6k + 10 \text{ (vì } k \geq 3).$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k+1$.

Do đó, ta có điều phải chứng minh.

- ② Với $n = 3$ ta thấy bất đẳng thức đã cho đúng.
Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k \geq 3, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có $2^k > 2k + 1$. (1)
Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, tức là $2^{k+1} > 2(k+1) + 1$ hay $2^{k+1} > 2k + 3$.

Thật vậy, nhân cả hai vế của bất đẳng thức (1) với 2 ta được

$$2 \cdot 2^k > 2(2k + 1) \Leftrightarrow 2^{k+1} > 2k + 2k + 2. \quad (2)$$

Vì $k \geq 3$ nên $2k \geq 6$. Do đó (2) tương đương với

$$2^{k+1} > 2k + 6 + 2 \Rightarrow 2^{k+1} > 2k + 3.$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k+1$.

Do đó, ta có điều phải chứng minh. □

2 BÀI TẬP ỨNG DỤNG

BÀI 1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có

$$\textcircled{1} \quad 1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

$$\textcircled{2} \quad 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2.$$

$$\textcircled{3} \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

$$\textcircled{5} \quad 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \dots + (n-1)n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12} \text{ với mọi } n \geq 2, n \in \mathbb{N}.$$

$$\textcircled{6} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \quad \text{Đặt } S_n = 1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \quad (1)$$

Với $n = 1$ thì $S_1 = \frac{1(1+1)(1+2)}{6} = 1$. Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có

$$S_k = 1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k + 1$, tức là cần chứng minh

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} = \frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}. \end{aligned}$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với $n = k + 1$.

Do đó, $1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

$$\textcircled{2} \quad \text{Đặt } S_n = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2. \quad (1)$$

Với $n = 1$ thì $S_1 = 1(1+1)^2 = 1 \cdot 4 = 4$. Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có

$$S_k = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + k(3k+1) = k(k+1)^2.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k + 1$, tức là cần chứng minh

$$S_{k+1} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + k(3k+1) + (k+1)[3(k+1)+1] = (k+1)[(k+1)+1]^2 = (k+1)(k+2)^2.$$

Thật vậy, ta có

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)(3k+4) = k(k+1)^2 + (k+1)(3k+4) = (k+1)(k^2 + k + 3k + 4) = (k+1)(k+2)^2.$$

Vậy (1) đúng với $n = k+1$.

Do đó, $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

$$\textcircled{3} \text{ Đặt } S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (1)$$

Với $n = 1$ thì $S_1 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = 1 = 1^2$. Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có

$$S_k = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k+1$, tức là cần chứng minh

$$S_{k+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 3k + 4k + 6)}{6} = \frac{(k+1)[k(2k+3) + 2(2k+3)]}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với $n = k+1$.

Do đó, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

$$\textcircled{4} \text{ Đặt } S_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}. \quad (1)$$

Với $n = 1$ thì $S_1 = \frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)} = \frac{1}{6} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có

$$S_k = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k+1$, tức là cần chứng minh

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]} = \frac{(k+1)[(k+1)+3]}{4[(k+1)+1][(k+1)+2]} \\ &= \frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}. \end{aligned}$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{k(k+3)^2 + 4}{4(k+1)(k+2)(k+3)} \\ &= \frac{k^3 + 6k^2 + 9k + 4}{4(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{(k+1)^2(k+4)}{4(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với $n = k+1$.

Do đó, $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

$$\textcircled{5} \text{ Đặt } S_n = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \cdots + (n-1)n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}. \quad (1)$$

Với $n = 2$ thì $S_2 = \frac{2(2^2-1)(3 \cdot 2+2)}{12} = 4 = 1 \cdot 2^2$. Vậy (1) đúng với $n = 2$.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 2, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có

$$S_k = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \cdots + (k-1)k^2 = \frac{k(k^2-1)(3k+2)}{12}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k+1$, tức là cần chứng minh

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \cdots + [(k+1)-1](k+1)^2 = \frac{(k+1)[(k+1)^2-1][3(k+1)+2]}{12} \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)(3k+5)}{12}. \end{aligned}$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + k(k+1)^2 = \frac{k(k^2-1)(3k+2)}{12} + k(k+1)^2 = k \left[\frac{3k^3 + 14k^2 + 21k + 10}{12} \right] \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)(3k+5)}{12}. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với $n = k+1$.

Do đó, $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \cdots + (n-1)n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

$$\textcircled{6} \text{ Đặt } S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}. \quad (1)$$

Với $n = 1$ thì $S_1 = \frac{2^1 - 1}{2^1} = \frac{1}{2}$. Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có

$$S_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^k} = \frac{2^k - 1}{2^k}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k+1$, tức là cần chứng minh

$$S_{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}.$$

Thật vậy, ta có

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^k - 1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 2 + 1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}.$$

Vậy (1) đúng với $n = k+1$.

Do đó, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

□

BÀI 2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có

$$\textcircled{1} \quad u_n = n^3 + 11n \text{ chia hết cho } 6.$$

$$\textcircled{2} \quad u_n = 2n^3 - 3n^2 + n \text{ chia hết cho } 6.$$

$$\textcircled{3} \quad u_n = 4^n + 15n - 1 \text{ chia hết cho } 9.$$

$$\textcircled{4} \quad u_n = 7 \cdot 2^{2n-2} + 3^{2n-1} \text{ chia hết cho } 5.$$

Lời giải.

- ① Với $n = 1$ ta có $u_1 = 1^3 + 11 \cdot 1 = 12$ chia hết cho 6. Vậy mệnh đề đúng với $n = 1$.
Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là $u_k = k^3 + 11k$ chia hết cho 6.
Ta cần chứng minh $u_{k+1} = (k+1)^3 + 11(k+1)$ chia hết cho 6.
Thật vậy, ta có

$$u_{k+1} = (k+1)^3 + 11(k+1) = k^3 + 3k(k+1) + 1 + 11k + 11 = k^3 + 11k + 3k(k+1) + 12.$$

Vì $(k^3 + 11k) : 6, 3k(k+1) : 6$ và $12 : 6$ nên $u_{k+1} : 6$. Vậy mệnh đề đúng với $n = k+1$.
Do đó, ta có điều phải chứng minh.

- ② Với $n = 1$ ta có $u_1 = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1 = 0$ chia hết cho 6. Vậy mệnh đề đúng với $n = 1$.
Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là $u_k = 2k^3 - 3k^2 + k$ chia hết cho 6.
Ta cần chứng minh $u_{k+1} = (k+1)^3 - 3(k+1)^2 + (k+1)$ chia hết cho 6.
Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2(k+1)^3 - 3(k+1)^2 + (k+1) = 2k^3 + 6k(k+1) + 2 - 3k^2 - 6k - 3 + k + 1 \\ &= [(2k^3 - 3k^2 + k) + 6k(k+1) - 6k] : 6. \end{aligned}$$

Vậy mệnh đề đúng với $n = k+1$.
Do đó, ta có điều phải chứng minh.

- ③ Với $n = 1$ ta có $u_1 = 4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 18$ chia hết cho 9. Vậy mệnh đề đúng với $n = 1$.
Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là $u_k = 4^k + 15k - 1$ chia hết cho 9.
Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 4^{k+1} + 15(k+1) - 1$ chia hết cho 9.
Thật vậy, ta có

$$u_{k+1} = 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 4 \cdot 4^k + 60k - 4 - 45k + 18 = [4(4^k + 15k - 1) - 45k + 18] : 9.$$

Vậy mệnh đề đúng với $n = k+1$.
Do đó, ta có điều phải chứng minh.

- ④ Với $n = 1$ ta có $u_1 = 7 \cdot 2^{2 \cdot 1 - 2} + 3^{2 \cdot 1 - 1} = 10$ chia hết cho 5. Vậy mệnh đề đúng với $n = 1$.
Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là $u_k = 7 \cdot 2^{2k-2} + 3^{2k-1}$ chia hết cho 5.
Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 7 \cdot 2^{2(k+1)-2} + 3^{2(k+1)-1}$ chia hết cho 5.
Thật vậy, ta có

$$u_{k+1} = 7 \cdot 2^{2(k+1)-2} + 3^{2(k+1)-1} = 4 \cdot 7 \cdot 2^{2k-2} + 9 \cdot 3^{2k-1} = [4(7 \cdot 2^{2k-2} + 3^{2k-1}) + 5 \cdot 3^{2k-1}] : 5.$$

Vậy mệnh đề đúng với $n = k+1$.
Do đó, ta có điều phải chứng minh.

□

BÀI 3. Chứng minh rằng

- ① $2^{n+2} > 2n + 5$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. ② $n^n \geq (n+1)^{n-1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải.

- ① Với $n = 1$ ta thấy bất đẳng thức đã cho đúng.
Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có $2^{k+2} > 2k + 5$. (1)
Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, tức là $2^{(k+1)+2} > 2(k+1) + 5$ hay $2^{k+3} > 2k + 7$.

Thật vậy, nhân cả hai vế của bất đẳng thức (1) với 2 ta được

$$2 \cdot 2^{k+2} > 2(2k + 5) \Leftrightarrow 2^{k+3} > 2k + 7 + 2k + 3 \Rightarrow 2^{k+3} > 2k + 7 \text{ (vì } k \geq 1 \text{ nên } 2k + 3 > 0).$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k+1$.
Do đó, ta có điều phải chứng minh.

② Với $n = 1$ ta thấy bất đẳng thức đã cho đúng.

Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có

$$k^k \geq (k+1)^{k-1} \Leftrightarrow \frac{k^k}{(k+1)^{k-1}} \geq 1.$$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, tức là

$$(k+1)^{k+1} \geq [(k+1)+1]^{(k+1)-1} \text{ hay } (k+1)^{k+1} \geq (k+2)^k.$$

Thật vậy, với mọi số dương k ta có

$$\begin{aligned} (k+1)^2 > k(k+2) &\Rightarrow (k+1)^{2k} > [k(k+2)]^k \\ &\Rightarrow \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+2)^k} > \frac{k^k}{(k+1)^{k-1}} \geq 1 \\ &\Rightarrow (k+1)^{k+1} \geq (k+2)^k. \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k+1$.

Do đó, ta có điều phải chứng minh. □

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 4. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có

① $2 + 5 + 8 + \cdots + (3n-1) = \frac{n(3n+1)}{2}.$

② $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$

③ $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \cdots + n(3n-1) = n^2(n+1).$

④ $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$

⑤ $2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$

⑥ $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n},$ với mọi $n \geq 2, n \in \mathbb{N}.$

⑦ $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \cdots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}.$

Lời giải.

① Đặt $S_n = 2 + 5 + 8 + \cdots + (3n-1) = \frac{n(3n+1)}{2}.$ (1)

Với $n = 1$ thì $S_1 = \frac{1(3 \cdot 1 + 1)}{2} = 2$. Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có

$$S_k = 2 + 5 + 8 + \cdots + (3k-1) = \frac{k(3k+1)}{2}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k + 1$, tức là cần chứng minh

$$S_{k+1} = 2 + 5 + 8 + \cdots + (3k - 1) + [3(k + 1) - 1] = \frac{(k + 1)[3(k + 1) + 1]}{2} = \frac{(k + 1)(3k + 4)}{2}.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (3k + 2) = \frac{k(3k + 1)}{2} + (3k + 2) = \frac{3k^2 + k + 2(3k + 2)}{2} = \frac{3k^2 + 7k + 4}{2} \\ &= \frac{3k^2 + 3k + 4k + 4}{2} = \frac{3k(k + 1) + 4(k + 1)}{2} = \frac{(k + 1)(3k + 4)}{2}. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với $n = k + 1$.

Do đó, $2 + 5 + 8 + \cdots + (3n - 1) = \frac{n(3n + 1)}{2}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

② Đặt $S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n + 1)$. (1)

Với $n = 1$ thì $S_1 = \frac{1(1 + 1)(1 + 2)}{3} = 2 = 1 \cdot 2$. Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có

$$S_k = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + k(k + 1) = \frac{k(k + 1)(k + 2)}{3}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k + 1$, tức là cần chứng minh

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (k + 1)[(k + 1) + 1] = \frac{(k + 1)[(k + 1) + 1][(k + 1) + 2]}{3} \\ &= \frac{(k + 1)(k + 2)(k + 3)}{3}. \end{aligned}$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (k + 1)(k + 2) = \frac{k(k + 1)(k + 2)}{3} + (k + 1)(k + 2) = \frac{k(k + 1)(k + 2) + 3(k + 1)(k + 2)}{3} \\ &= \frac{(k + 1)(k + 2)(k + 3)}{3}. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với $n = k + 1$.

Do đó, $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

③ Đặt $S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \cdots + n(3n - 1) = n^2(n + 1)$. (1)

Với $n = 1$ thì $S_1 = 1^2(1 + 1) = 2 = 1 \cdot 2$. Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có

$$S_k = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \cdots + k(3k - 1) = k^2(k + 1).$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k + 1$, tức là cần chứng minh

$$S_{k+1} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \cdots + (k + 1)[3(k + 1) - 1] = (k + 1)^2[(k + 1) + 1] = (k + 1)^2(k + 2).$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (k + 1)(3k + 2) = k^2(k + 1) + (k + 1)(3k + 2) = (k + 1)(k^2 + 3k + 2) \\ &= (k + 1)(k + 1)(k + 2) = (k + 1)^2(k + 2). \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với $n = k + 1$.

Do đó, $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \cdots + n(3n - 1) = n^2(n + 1)$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

$$\textcircled{4} \text{ Đặt } S_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}. \quad (1)$$

Với $n = 1$ thì $S_1 = \frac{1(4 \cdot 1^2 - 1)}{3} = 1 = 1^2$. Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có

$$S_k = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 = \frac{k(4k^2-1)}{3}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k+1$, tức là cần chứng minh

$$S_{k+1} = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 + [2(k+1)-1]^2 = \frac{(k+1)[4(k+1)^2-1]}{3} = \frac{(k+1)(4k^2+8k+3)}{3}$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (2k+1)^2 = \frac{k(4k^2-1)}{3} + (2k+1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1) + 3(2k+1)^2}{3} \\ &= \frac{(2k+1)(2k^2-k+6k+3)}{3} = \frac{(2k+1)(k+1)(2k+3)}{3} = \frac{(k+1)(4k^2+8k+6)}{3}. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với $n = k+1$.

Do đó, $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

$$\textcircled{5} \text{ Đặt } S_n = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}. \quad (1)$$

Với $n = 1$ thì $S_1 = \frac{2 \cdot 1(1+1)(2 \cdot 1+1)}{3} = 4 = 2^2$. Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có

$$S_k = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2k)^2 = \frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k+1$, tức là cần chứng minh

$$S_{k+1} = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2k)^2 + [2(k+1)]^2 = \frac{2(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{3} = \frac{2(k+1)(k+2)(2k+3)}{3}$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (2k+2)^2 = \frac{2k(k+1)(2k+1)}{3} + (2k+2)^2 = \frac{2k(k+1)(2k+1) + 12(k+1)^2}{3} \\ &= \frac{2(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{3} = \frac{2(k+1)(2k^2+3k+4k+6)}{3} = \frac{2(k+1)[k(2k+3) + 2(2k+3)]}{3} \\ &= \frac{2(k+1)(k+2)(2k+3)}{3}. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với $n = k+1$.

Do đó, $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

$$\textcircled{6} \text{ Đặt } S_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}. \quad (1)$$

Với $n = 2$ thì $S_2 = \frac{2+1}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$. Vậy (1) đúng với $n = 2$.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 2, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có

$$S_k = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{k+1}{2k}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k + 1$, tức là cần chứng minh

$$S_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{(k+1)+1}{2(k+1)} = \frac{k+2}{2(k+1)}.$$

Thật vậy, ta có

$$S_{k+1} = S_k \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+1}{2k} \cdot \frac{k^2+2k}{(k+1)^2} = \frac{k+2}{2(k+1)}.$$

Vậy (1) đúng với $n = k + 1$.

Do đó, $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

$$\textcircled{7} \text{ Đặt } S_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \cdots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}. \quad (1)$$

Với $n = 1$ thì $S_1 = \frac{1}{3} - \frac{2 \cdot 1 + 3}{4 \cdot 3^1} = \frac{1}{3}$. Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có

$$S_k = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \cdots + \frac{k}{3^k} = \frac{3}{4} - \frac{2k+3}{4 \cdot 3^k}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k + 1$, tức là cần chứng minh

$$S_{k+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \cdots + \frac{k+1}{3^{k+1}} = \frac{3}{4} - \frac{2(k+1)+3}{4 \cdot 3^{k+1}} = \frac{3}{4} - \frac{2k+5}{4 \cdot 3^{k+1}}.$$

Thật vậy, ta có

$$S_{k+1} = S_k + \frac{k+1}{3^{k+1}} = \frac{3}{4} - \frac{2k+3}{4 \cdot 3^k} + \frac{k+1}{3^{k+1}} = \frac{3}{4} - \frac{6k+9-4k-4}{4 \cdot 3^{k+1}} = \frac{3}{4} - \frac{2k+5}{4 \cdot 3^{k+1}}.$$

Vậy (1) đúng với $n = k + 1$.

Do đó, $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \cdots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

□

BÀI 5. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có

- | | |
|--|--|
| ① $u_n = n^3 - n$ chia hết cho 3. | ② $u_n = 13^n - 1$ chia hết cho 6. |
| ③ $u_n = 4^n + 6n + 8$ chia hết cho 9. | ④ $u_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ chia hết cho 7. |
| ⑤ $u_n = 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ chia hết cho 133. | ⑥ $u_n = 2^{4n} - 1$ chia hết cho 15. |

Lời giải.

- ① Với $n = 1$ ta có $u_1 = 1^3 - 1 = 0$ chia hết cho 3. Vậy mệnh đề đúng với $n = 1$.
Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là $u_k = k^3 - k$ chia hết cho 3.
Ta cần chứng minh $u_{k+1} = (k+1)^3 - (k+1)$ chia hết cho 3.
Thật vậy, ta có

$$u_{k+1} = (k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 2k = k^3 - k + 3(k^2 + k).$$

Vì $(k^3 - k) : 3, 3(k^2 + k) : 3$ nên $u_{k+1} : 3$. Vậy mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Do đó, ta có điều phải chứng minh.

- ② Với $n = 1$ ta có $u_1 = 13^1 - 1 = 12$ chia hết cho 6. Vậy mệnh đề đúng với $n = 1$.
 Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là $u_k = 13^k - 1$ chia hết cho 6.
 Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 13^{k+1} - 1$ chia hết cho 6.
 Thật vậy, ta có

$$u_{k+1} = 13^{k+1} - 1 = 13^{k+1} - 13 + 12 = 13(13^k - 1) + 12.$$

Vì $13(13^k - 1) : 6, 12 : 6$ nên $u_{k+1} : 6$. Vậy mệnh đề đúng với $n = k + 1$.
 Do đó, ta có điều phải chứng minh.

- ③ Với $n = 1$ ta có $u_1 = 4^1 + 6 \cdot 1 + 8 = 18$ chia hết cho 9. Vậy mệnh đề đúng với $n = 1$.
 Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là $u_k = 4^k + 6k + 8$ chia hết cho 9.
 Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 4^{k+1} + 6(k+1) + 8$ chia hết cho 9.
 Thật vậy, ta có

$$u_{k+1} = 4^{k+1} + 6(k+1) + 8 = 4(4^k + 6k + 8) - 18k - 18 = 4(4^k + 6k + 8) - 18(k+1).$$

Vì $4(4^k + 6k + 8) : 9, 18(k+1) : 9$ nên $u_{k+1} : 9$. Vậy mệnh đề đúng với $n = k + 1$.
 Do đó, ta có điều phải chứng minh.

- ④ Với $n = 1$ ta có $u_1 = 3^{2 \cdot 1 + 1} + 2^{1+2} = 35$ chia hết cho 7. Vậy mệnh đề đúng với $n = 1$.
 Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là $u_k = 3^{2k+1} + 2^{k+2}$ chia hết cho 7.
 Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 3^{2(k+1)+1} + 2^{(k+1)+2}$ chia hết cho 7.
 Thật vậy, ta có

$$u_{k+1} = 3^{2(k+1)+1} + 2^{(k+1)+2} = 3^{2k+3} + 2^{k+3} = 9(3^{2k+1} + 2^{k+2}) - 7 \cdot 2^k.$$

Vì $9(3^{2k+1} + 2^{k+2}) : 7, 7 \cdot 2^k : 7$ nên $u_{k+1} : 7$. Vậy mệnh đề đúng với $n = k + 1$.
 Do đó, ta có điều phải chứng minh.

- ⑤ Với $n = 1$ ta có $u_1 = 11^{1+1} + 12^{2 \cdot 1 - 1} = 133$ chia hết cho 133. Vậy mệnh đề đúng với $n = 1$.
 Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là $u_k = 11^{k+1} + 12^{2k-1}$ chia hết cho 133.
 Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 11^{k+2} - 12^{2(k+1)-1}$ chia hết cho 133.
 Thật vậy, ta có

$$u_{k+1} = 11^{k+2} - 12^{2(k+1)-1} = 11 \cdot 11^{k+1} - 12^2 \cdot 12^{2k-1} = [11(11^{k+1} - 12^{2k-1}) - 133 \cdot 12^{2k-1}] : 133.$$

Vậy mệnh đề đúng với $n = k + 1$.
 Do đó, ta có điều phải chứng minh.

- ⑥ Với $n = 1$ ta có $u_1 = 2^{4 \cdot 1} - 1 = 15$ chia hết cho 15. Vậy mệnh đề đúng với $n = 1$.
 Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là $u_k = 2^{4k} - 1$ chia hết cho 15.
 Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 2^{4(k+1)} - 1$ chia hết cho 15.
 Thật vậy, ta có

$$u_{k+1} = 2^{4(k+1)} - 1 = 2^{4k+4} - 1 = 16 \cdot 2^{4k} - 1 = 16 \cdot 2^{4k} - 16 + 15 = 16(2^{4k} - 1) + 15.$$

Vì $16(2^{4k} - 1) : 15, 15 \cdot 2^k : 15$ nên $u_{k+1} : 15$. Vậy mệnh đề đúng với $n = k + 1$.
 Do đó, ta có điều phải chứng minh.

□

- ① $2^{n+1} > 2n + 3$ với mọi $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. ② $3^{n-1} > n(n+2)$ với mọi $n \geq 4, n \in \mathbb{N}$.
 ③ $(n!)^2 \geq n^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. ④ $2^n > n^2$ với mọi $n \geq 5, n \in \mathbb{N}$.

Lời giải.

- ① Với $n = 2$ ta thấy bất đẳng thức đã cho đúng.

Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k \geq 2, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có $2^{k+1} > 2k + 3$. (1)

Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là $2^{(k+1)+1} > 2(k+1) + 3$ hay $2^{k+2} > 2k + 5$.

Thật vậy, nhân cả hai vế của bất đẳng thức (1) với 2 ta được

$$2 \cdot 2^{k+1} > 2(2k + 3) \Leftrightarrow 2^{k+2} > 2k + 5 + 2k + 1. \quad (2)$$

Vì $k \geq 2$ nên $2k + 1 > 0$. Khi đó từ (2) suy ra

$$2^{k+2} > 2k + 5.$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k + 1$.

Do đó, ta có điều phải chứng minh.

- ② Với $n = 4$ ta thấy bất đẳng thức đã cho đúng.

Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k \geq 4, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có $3^{k-1} > k(k+2)$. (1)

Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là $3^{(k+1)-1} > (k+1)[(k+1) + 2]$ hay $3^k > (k+1)(k+3)$.

Thật vậy, nhân cả hai vế của bất đẳng thức (1) với 3 ta được

$$3 \cdot 3^{k-1} > 3k(k+2) \Leftrightarrow 3^k > k^2 + 4k + 3 + 2k^2 + 2k - 3. \quad (2)$$

Vì $k \geq 4$ và $2k^2 + 2k - 3 = 2k(k-4) + 10(k-4) + 37$ nên $2k^2 + 2k - 3 > 0$. Khi đó từ (2) suy ra

$$3^k > k^2 + 4k + 3 \Leftrightarrow 3^k > (k+1)(k+2).$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k + 1$.

Do đó, ta có điều phải chứng minh.

- ③ Trước hết ta chứng minh $n^n \geq (n+1)^{n-1}$. Thật vậy, với $n = 1$ ta được khẳng định đúng. Giả

sử khẳng định đúng với $n = k \geq 1$, tức là ta có $k^k > (k+1)^{k-1}$ hay $\left(\frac{k}{k+1}\right)^k \geq \frac{1}{k+1}$. Ta cần chứng minh khẳng định cũng đúng khi $n = k + 1$.

Ta có

$$k^2 + 2k + 1 \geq k^2 + 2k \Rightarrow \frac{k+1}{k+2} \geq \frac{k}{k+1} \Rightarrow \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^k \geq \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \geq \frac{1}{k+1} \Rightarrow \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1} \geq \frac{1}{k+2}.$$

Vậy $n^n \geq (n+1)^{n-1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Trở lại bài toán. Ta cũng chứng minh bài toán bằng quy nạp.

Với $n = 1$ ta thấy bất đẳng thức đã cho đúng.

Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có $(k!)^2 \geq k^k$. (1)

Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là $[(k+1)!]^2 \geq (k+1)^{k+1}$.

Thật vậy, ta có

$$[(k+1)!]^2 = [k!(k+1)]^2 = (k!)^2(k+1)^2 \geq k^k(k+1)^2 \geq (k+1)^{k-1}(k+1)^2 = (k+1)^{k+1}.$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k + 1$.

Do đó, ta có điều phải chứng minh.

- ④ Trước hết, bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh trước kết quả $n^2 > 2n + 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$.

Với $n = 5$ ta thấy bất đẳng thức là đúng.

Giả sử bất đẳng thức trên đúng với $n = k \geq 5$, $k \in \mathbb{N}$, tức là ta có $k^2 > 2k + 1$.

Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là $(k + 1)^2 > 2(k + 1) + 1$.

Thật vậy, ta có

$$(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1 > 2k + 1 + 2k + 1 = 4k + 2 > 3k + 3 > 2k + 3.$$

Vậy $n^2 > 2n + 1$ với mọi $n \geq 5$, $n \in \mathbb{N}$.

Trở lại với bài toán.

Với $n = 5$ ta thấy bất đẳng thức đã cho đúng.

Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k \geq 5$, $k \in \mathbb{N}$, tức là ta có $2^k > k^2$. (1)

Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là $2^{k+1} > (k + 1)^2$.

Thật vậy, nhân cả hai vế của bất đẳng thức (1) với 2 ta được

$$2 \cdot 2^k > 2k^2 \Leftrightarrow 2^{k+1} > k^2 + k^2 \Leftrightarrow 2^{k+1} > k^2 + 2k + 1 \Leftrightarrow 2^{k+1} > (k + 1)^2.$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k + 1$.

Do đó, ta có điều phải chứng minh. □

BÀI 2. DÃY SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa 1. Một hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (hay gọi tắt là dãy số).

Mỗi giá trị của hàm số u được gọi là một số hạng của dãy số. Chẳng hạn,

— $u_1 = u(1)$ là số hạng thứ nhất (hay còn gọi là số hạng đầu).

— $u_2 = u(2)$ là số hạng thứ hai.

— $u_n = u(n)$ là số hạng thứ n (hay còn gọi là số hạng tổng quát).

Người ta thường viết dãy số dưới dạng khai triển $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ hoặc viết tắt là (u_n) .

2 CÁCH CHO MỘT DÃY SỐ

— **Cách 1.** Dãy số cho bởi công thức số hạng tổng quát.

— **Cách 2.** Dãy số cho bởi hệ thức truy hồi.

– Cho số hạng thứ nhất u_1 (hoặc một vài số hạng đầu).

– Cho một công thức tính u_n theo u_{n-1} (hoặc một vài số hạng đứng ngay trước nó).

3 DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM

— Dãy số (u_n) là dãy số tăng khi và chỉ khi với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta luôn có $u_n < u_{n+1}$.

— Dãy số (u_n) là dãy số giảm khi và chỉ khi với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta luôn có $u_n > u_{n+1}$.

4 DÃY SỐ BỊ CHẶN

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $u_n \leq M$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn dưới nếu tồn tại số m sao cho $u_n \geq m$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, nghĩa là tồn tại các số M và m sao cho $m \leq u_n \leq M$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 2.1. Tìm số hạng của dãy số cho trước

Phương pháp giải: Từ công thức số hạng tổng quát ta thay giá trị n phù hợp để tìm số hạng cần tìm hoặc dùng hệ thức truy hồi để tìm số hạng đó.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n-1}{3n+1}$. Hãy viết dạng khai triển của dãy số. Tính u_{50} và u_{99} .

Lời giải

Dạng khai triển của dãy số đã cho là $0; \frac{1}{7}; \frac{1}{5}; \dots; \frac{n-1}{3n+1}; \dots$

Ta có $u_{50} = \frac{50-1}{3 \cdot 50 + 1} = \frac{49}{151}$ và $u_{99} = \frac{99-1}{3 \cdot 99 + 1} = \frac{49}{149}$. □

VÍ DỤ 2. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1, (n \geq 2). \end{cases}$$

Hãy viết dạng khai triển của dãy số trên. Tính u_8 .

Lời giải

Dạng khai triển của dãy số đã cho là $1; 3; 7; 15; \dots; 2^n - 1; \dots$

Ta có $u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 7, u_4 = 15, u_5 = 31, u_6 = 63, u_7 = 127, u_8 = 255$. □

VÍ DỤ 3. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, (n \geq 3) \end{cases} \quad (\text{dãy số Phi-bô-na-xi}).$$

Hãy viết dạng khai triển của dãy số trên. Tính u_7 .

 **Lời giải**

Dạng khai triển của dãy số đã cho là $1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; \dots$

Ta có $u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 5, u_6 = 8, u_7 = 13$. □

VÍ DỤ 4. Tìm số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số sau đây

① Dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2, \forall n \geq 1. \end{cases}$ ② Dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n, \forall n \geq 1. \end{cases}$

 **Lời giải**

① Từ công thức $u_{n+1} = u_n + 2$ với mọi $n \geq 1$ suy ra $u_{n+1} - u_n = 2$ với mọi $n \geq 1$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 &= 2 \\ u_3 - u_2 &= 2 \\ u_4 - u_3 &= 2 \\ &\dots\dots\dots \\ u_n - u_{n-1} &= 2. \end{aligned}$$

Cộng theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được

$$u_n - u_1 = (n-1)2 \Leftrightarrow u_n = u_1 + 2n - 2 \Leftrightarrow u_n = 2n + 1.$$

② Từ công thức $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$ suy ra $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$ với mọi $n \geq 1$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned} \frac{u_2}{u_1} &= 2 \\ \frac{u_3}{u_2} &= 2 \\ \frac{u_4}{u_3} &= 2 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{u_n}{u_{n-1}} &= 2 \end{aligned}$$

Nhân theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được

$$\frac{u_n}{u_1} = 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = u_1 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 2 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 2^n.$$

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) và tìm công thức số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số (u_n) sau

$$\textcircled{1} \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n, \forall n \geq 1. \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3, \forall n \geq 1. \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}, \forall n \geq 1. \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3, \forall n \geq 1. \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \begin{cases} u_1 = 11 \\ u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n, \forall n \geq 1. \end{cases}$$

$$\textcircled{6} \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 7, \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Lời giải.

- $\textcircled{1}$ Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là $u_1 = 3, u_2 = 6, u_3 = 12, u_4 = 24, u_5 = 48$.
 Từ công thức $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$ suy ra $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$ với mọi $n \geq 1$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned} \frac{u_2}{u_1} &= 2 \\ \frac{u_3}{u_2} &= 2 \\ \frac{u_4}{u_3} &= 2 \\ &\dots \\ \frac{u_n}{u_{n-1}} &= 2. \end{aligned}$$

Nhân theo về tất cả các đẳng thức trên ta được

$$\frac{u_n}{u_1} = 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = u_1 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

- $\textcircled{2}$ Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là $u_1 = 1, u_2 = 9, u_3 = 36, u_4 = 100, u_5 = 225$.
 Từ công thức $u_{n+1} = u_n + n^3$ với mọi $n \geq 1$ suy ra $u_{n+1} - u_n = n^3$ với mọi $n \geq 1$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 &= 2^3 \\ u_3 - u_2 &= 3^3 \\ u_4 - u_3 &= 4^3 \\ &\dots \\ u_n - u_{n-1} &= n^3. \end{aligned}$$

Cộng theo về tất cả các đẳng thức trên ta được

$$u_n - u_1 = 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 \Leftrightarrow u_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 \Leftrightarrow u_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

- $\textcircled{3}$ Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là $u_1 = 1, u_2 = \frac{1}{2}, u_3 = \frac{1}{3}, u_4 = \frac{1}{4}, u_5 = \frac{1}{5}$.
 Để thấy $u_n \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Từ công thức $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$ với mọi $n \geq 1$ suy ra $\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + 1$ hay $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = 1$ với mọi $n \geq 1$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} &= 1 \\ \frac{1}{u_3} - \frac{1}{u_2} &= 1 \\ \frac{1}{u_4} - \frac{1}{u_3} &= 1 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n-1}} &= 1.\end{aligned}$$

Cộng theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_1} = n - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_1} + n - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} = n \Rightarrow u_n = \frac{1}{n}.$$

- ④ Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là $u_1 = -1, u_2 = 2, u_3 = 5, u_4 = 8, u_5 = 11$.
Từ công thức $u_{n+1} = u_n + 3$ với mọi $n \geq 1$ suy ra $u_{n+1} - u_n = 3$ với mọi $n \geq 1$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned}u_2 - u_1 &= 3 \\ u_3 - u_2 &= 3 \\ u_4 - u_3 &= 3 \\ &\dots\dots\dots \\ u_n - u_{n-1} &= 3.\end{aligned}$$

Cộng theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được

$$u_n - u_1 = (n - 1)3 \Leftrightarrow u_n = u_1 + 3n - 3 \Leftrightarrow u_n = 3n - 4.$$

- ⑤ Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là $u_1 = 11, u_2 = 102, u_3 = 1003, u_4 = 10004, u_5 = 100005$.

Từ công thức $u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n$ với mọi $n \geq 1$ suy ra

$$u_{n+1} - n - 1 = 10u_n - 10n, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow u_{n+1} - (n+1) = 10(u_n - n), \forall n \geq 1 \Rightarrow \frac{u_{n+1} - (n+1)}{u_n - n} = 10, \forall n \geq 1$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned}\frac{u_2 - 2}{u_1 - 1} &= 10 \\ \frac{u_3 - 3}{u_2 - 2} &= 10 \\ \frac{u_4 - 4}{u_3 - 3} &= 10 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{u_n - n}{u_{n-1} - (n-1)} &= 10.\end{aligned}$$

Nhân theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được

$$\frac{u_n - n}{u_1 - 1} = 10^{n-1} \Rightarrow u_n - n = 10^{n-1}(u_1 - 1) \Leftrightarrow u_n = 10^n + n.$$

- ⑥ Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là $u_1 = 1, u_2 = 8, u_3 = 15, u_4 = 22, u_5 = 29$.

Từ công thức $u_{n+1} = u_n + 7$ với mọi $n \geq 1$ suy ra $u_{n+1} - u_n = 7$ với mọi $n \geq 1$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 &= 7 \\ u_3 - u_2 &= 7 \\ u_4 - u_3 &= 7 \\ &\dots\dots\dots \\ u_n - u_{n-1} &= 7. \end{aligned}$$

Cộng theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được

$$u_n - u_1 = (n - 1)7 \Leftrightarrow u_n = u_1 + 7n - 7 \Leftrightarrow u_n = 7n - 6.$$

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 2. Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) và tìm công thức số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số (u_n) sau

① $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}, \forall n \geq 1. \end{cases}$

② $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3, \forall n \geq 1. \end{cases}$

③ $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3n - 2, \forall n \geq 1. \end{cases}$

④ $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1, \forall n \geq 1. \end{cases}$

Lời giải.

- ① Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là $u_1 = 3, u_2 = \sqrt{10}, u_3 = \sqrt{11}, u_4 = \sqrt{12}, u_5 = \sqrt{13}$.

Ta thấy $u_n > 0$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Từ công thức $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$ suy ra

$$u_{n+1}^2 = 1 + u_n^2, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow u_{n+1}^2 - u_n^2 = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} u_2^2 - u_1^2 &= 1 \\ u_3^2 - u_2^2 &= 1 \\ u_4^2 - u_3^2 &= 1 \\ &\dots\dots\dots \\ u_n^2 - u_{n-1}^2 &= 1 \end{aligned}$$

Cộng theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được

$$u_n^2 - u_1^2 = n - 1 \Leftrightarrow u_n^2 = u_1^2 + n - 1 \Leftrightarrow u_n^2 = n + 8 \Leftrightarrow u_n = \sqrt{n + 8}.$$

- ② Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là $u_1 = 1, u_2 = 5, u_3 = 13, u_4 = 29, u_5 = 61$.

Từ công thức $u_{n+1} = 2u_n + 3$ với mọi $n \geq 1$ suy ra

$$u_{n+1} + 3 = 2u_n + 6, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow u_{n+1} + 3 = 2(u_n + 3), \forall n \geq 1 \Rightarrow \frac{u_{n+1} + 3}{u_n + 3} = 2, \forall n \geq 1.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned}\frac{u_2 + 3}{u_1 + 3} &= 2 \\ \frac{u_3 + 3}{u_2 + 3} &= 2 \\ \frac{u_4 + 3}{u_3 + 3} &= 2 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{u_n + 3}{u_{n-1} + 3} &= 2.\end{aligned}$$

Nhân theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được

$$\frac{u_n + 3}{u_1 + 3} = 2^{n-1} \Rightarrow u_n + 3 = 2^{n-1}(u_1 + 3) \Leftrightarrow u_n + 3 = 4 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 2^{n+1} - 3.$$

- ③ Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là $u_1 = 5, u_2 = 6, u_3 = 10, u_4 = 17, u_5 = 27$.
Từ công thức $u_{n+1} = u_n + 3n - 2$ với mọi $n \geq 1$ suy ra $u_{n+1} - u_n = 3n - 2$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned}u_n &= (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \dots + (u_2 - u_1) + u_1 = 3(n-1) - 2 + 3(n-2) - 2 \dots + 3 \cdot 1 - 2 + 5 \\ &= 3[(n-1) + (n-2) + \dots + 1] + (n-1) \cdot (-2) + 5 = 3 \cdot \frac{(1+n-1)(n-1)}{2} - 2n + 2 + 5 \\ &= \frac{3(n^2 - n) - 4n + 14}{2} = \frac{3n^2 - 7n + 14}{2}.\end{aligned}$$

- ④ Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là $u_1 = -1, u_2 = -1, u_3 = -1, u_4 = -1, u_5 = -1$.
Từ công thức $u_{n+1} = 2u_n + 1$ với mọi $n \geq 1$ suy ra

$$u_{n+1} + 1 = 2u_n + 2, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow u_{n+1} + 1 = 2(u_n + 1), \forall n \geq 1 \Rightarrow \frac{u_{n+1} + 1}{u_n + 1} = 2, \forall n \geq 1.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned}\frac{u_2 + 1}{u_1 + 1} &= 2 \\ \frac{u_3 + 1}{u_2 + 1} &= 2 \\ \frac{u_4 + 1}{u_3 + 1} &= 2 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{u_n + 1}{u_{n-1} + 1} &= 2.\end{aligned}$$

Nhân theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được

$$\frac{u_n + 1}{u_1 + 1} = 2^{n-1} \Rightarrow u_n + 1 = 2^{n-1}(u_1 + 1) \Leftrightarrow u_n = -1.$$

□

📁 DẠNG 2.2. Xét tính tăng, giảm của dãy số

— **Phương pháp 1.** Xét dấu của hiệu số $u_{n+1} - u_n$.

- Nếu với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta luôn có $u_{n+1} - u_n > 0$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta luôn có $u_{n+1} - u_n < 0$ thì (u_n) là dãy số giảm.

— **Phương pháp 2.** Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ thì có thể so sánh tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ với số 1.

- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

— **Phương pháp 3.** Nếu dãy số (u_n) được cho bởi hệ thức truy hồi thì thường dùng phương pháp quy nạp để chứng minh $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ (hoặc $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$)

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Xét tính tăng, giảm của các dãy số sau

① Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$.

② Dãy số (v_n) với $v_n = \frac{n+2}{4^n}$.

✍️ Lời giải

① Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $u_n = 2 - \frac{3}{n+1}$. Khi đó

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{(n+1)+1} - \left(-\frac{3}{n+1}\right) = \frac{3}{n+1} - \frac{3}{n+2} = \frac{3n+6-3n-3}{(n+1)(n+2)} = \frac{3}{(n+1)(n+2)} > 0,$$

Vậy dãy số (u_n) đã cho là dãy số tăng.

② Xét tỉ số sau

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)+2}{4^{n+1}}}{\frac{n+2}{4^n}} = \frac{n+3}{4 \cdot 4^n} \cdot \frac{4^n}{n+2} = \frac{n+3}{4(n+2)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4(n+2)}. \quad (*)$$

Vì $n \geq 1$ nên

$$n+2 \geq 3 \Leftrightarrow 4(n+2) \geq 12 \Leftrightarrow \frac{1}{4(n+2)} \leq \frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4(n+2)} \leq \frac{1}{3}.$$

Do đó, từ (*) suy ra $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ với mọi $n \geq 1$.

Vậy dãy số (u_n) đã cho là dãy số giảm.

□

VÍ DỤ 2. Xét tính tăng, giảm của dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}, n \geq 2. \end{cases}$

Lời giải

Ta có $u_1 = \sqrt{2} < 2$ và (u_n) là dãy số dương. Ta chứng minh $u_n < 2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bằng quy nạp. Với $n = 1$ thì khẳng định trên là đúng.

Giả sử khẳng định trên đúng khi $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là ta luôn có $u_k < 2$.

Ta cần chứng minh $u_{k+1} < 2$. Thật vậy,

$$u_{k+1} = \sqrt{2 + u_k} < \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Vậy $u_n < 2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Từ công thức $u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}$ suy ra

$$u_n^2 = 2 + u_{n-1} \Leftrightarrow u_n^2 - u_{n-1}^2 = 2 + u_{n-1} - u_{n-1}^2 \Leftrightarrow u_n^2 - u_{n-1}^2 = (u_{n-1} + 1)(2 - u_{n-1}).$$

Do (u_n) là dãy số dương và $u_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên $(u_{n-1} + 1)(2 - u_{n-1}) > 0$. Suy ra

$$u_n^2 - u_{n-1}^2 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_n > u_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số (u_n) đã cho là dãy số tăng. □

BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Xét tính tăng giảm của các dãy số (u_n) sau, với

① $u_n = n^2 + 4n - 3.$

② $u_n = 2n^3 - 5n + 1.$

③ $u_n = 3^n - n.$

④ $u_n = \frac{1}{n} - 2.$

⑤ $u_n = \frac{n}{n^2 + 1}.$

⑥ $u_n = 2n - \sqrt{4n^2 - 1}.$

Lời giải.

① Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 + 4(n+1) - 3 - (n^2 + 4n - 3) = n^2 + 2n + 1 + 4n + 4 - 3 - n^2 - 4n + 3 \\ &= 2n + 5 > 0, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Vậy dãy số đã cho là dãy số tăng.

② Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2(n+1)^3 - 5(n+1) + 1 - (2n^3 - 5n + 1) = 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 5n - 5 + 1 - 2n^3 + 5n \\ &= 6n^2 + 6n - 3 = 6n^2 + 3n + 3(n-1) > 0, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Vậy dãy số đã cho là dãy số tăng.

③ Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3^{n+1} - (n+1) - (3^n - n) = 3^{n+1} - n - 1 - 3^n + n = 3 \cdot 3^n - 1 - 3^n \\ &= 2 \cdot 3^n - 1 > 0, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Vậy dãy số đã cho là dãy số tăng.

④ Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - 2 - \left(\frac{1}{n} - 2 \right) = \frac{1}{n+1} - 2 - \frac{1}{n} + 2 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - (n+1)}{n(n+1)} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)} < 0, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Vậy dãy số đã cho là dãy số giảm.

⑤ Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{n+1}{(n+1)^2 + 1} - \frac{n}{n^2 + 1} = \frac{n+1}{n^2 + 2n + 2} - \frac{n}{n^2 + 1} = \frac{(n+1)(n^2 + 1) - n(n^2 + 2n + 2)}{(n^2 + 1)(n^2 + 2n + 2)} \\ &= \frac{n^3 + n^2 + n + 1 - n^3 - 2n^2 - 2n}{(n^2 + 1)(n^2 + 2n + 2)} = \frac{-n^2 - n + 1}{(n^2 + 1)(n^2 + 2n + 2)} \\ &= \frac{-n^2 - (n-1)}{(n^2 + 1)(n^2 + 2n + 2)} < 0, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Vậy dãy số đã cho là dãy số giảm.

⑥ Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $u_n = \frac{1}{2n + \sqrt{4n^2 - 1}}$. Khi đó

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n + \sqrt{4n^2 - 1}}{2(n+1) + \sqrt{4(n+1)^2 - 1}} < 1, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số đã cho là dãy số giảm.

□

BÀI 2. Xét tính tăng giảm của các dãy số (u_n) sau, với

① $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}.$

② $u_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}.$

③ $u_n = \frac{2^n}{(n+1)!}.$

④ $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{n}.$

Lời giải.

① Dễ thấy $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Xét tỉ số

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{4n}} = \sqrt{\frac{n+1}{4n}} < \sqrt{\frac{n+1}{n+1}} = 1, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số (u_n) là một dãy số giảm.

② Dễ thấy $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Xét tỉ số

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{3^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^{n+2}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} < 1.$$

Vậy dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

③ Để thấy $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Xét tỉ số

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{2^n} = \frac{2}{n+2} \leq \frac{2}{3} < 1, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số (u_n) là một dãy số giảm.

④ $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \sqrt{n}$. Để thấy $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Xét tỉ số

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \cdot \sqrt{n+1} \cdot \frac{3^n}{2^n \cdot \sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{2}{3} = \sqrt{\frac{4n+4}{9n}}.$$

Ta có

$$\frac{4n+4}{9n} = \frac{4}{9} + \frac{4}{9n} \leq \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{9} < 1, \forall n \geq 1.$$

Suy ra $u_{n+1} < u_n$.

Vậy dãy số (u_n) là một dãy số giảm.

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 3. Xét tính tăng giảm của các dãy số (u_n) sau, với

① $u_n = -n^2 - 2n + 1.$

② $u_n = \frac{n-1}{n+1}.$

③ $u_n = \frac{3n^2 - 2n + 1}{n+1}.$

④ $u_n = \frac{n^2 + n + 1}{2n^2 + 1}.$

⑤ $u_n = n - \sqrt{n^2 - 1}.$

⑥ $\frac{\sqrt{n+1} - 1}{n}.$

Lời giải.

① Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -(n+1)^2 - 2(n+1) + 1 - (-n^2 - 2n + 1) = -n^2 - 2n - 1 - 2n - 2 + 1 + n^2 + 2n - 1 \\ &= -2n - 3 < 0, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Vậy dãy số đã cho là dãy số giảm.

② Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $u_n = 1 - \frac{2}{n+1}$. Khi đó

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{(n+1)+1} - \left(-\frac{2}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} = \frac{2n+4-2n-2}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0,$$

Vậy dãy số (u_n) đã cho là dãy số tăng.

③ Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $u_n = 3n - 5 + \frac{6}{n+1}$. Khi đó

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3(n+1) - 5 + \frac{6}{n+2} - \left(3n - 5 + \frac{6}{n+1}\right) = 3n - 2 + \frac{6}{n+2} - 3n + 5 - \frac{6}{n+1} \\ &= 3 + \frac{6}{n+2} - \frac{6}{n+1}. \end{aligned} \quad (*)$$

Vì $n \geq 1$ nên

$$2 \leq n+1 < n+2 \leq 3 \Rightarrow 2 \leq \frac{6}{n+2} < \frac{6}{n+1} \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{6}{n+2} \geq 2 \\ -\frac{6}{n+1} \geq -3 \end{cases} \Rightarrow \frac{6}{n+2} - \frac{6}{n+1} \geq -1.$$

Do đó, từ (*) suy ra $u_{n+1} - u_n > 0$ với mọi $n \geq 1$.

Vậy dãy số (u_n) đã cho là dãy số tăng.

④ Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $u_n = \frac{1}{2} + \frac{2n+1}{4n^2+2}$. Khi đó

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2(n+1)+1}{4(n+1)^2+2} - \frac{2n+1}{4n^2+2} = \frac{2n+3}{4n^2+8n+6} - \frac{2n+1}{4n^2+2} \\ &= \frac{(2n+3)(4n^2+2) - (2n+1)(4n^2+8n+6)}{(4n^2+8n+6)(4n^2+2)} = \frac{8n^3+12n^2+4n+6-8n^3-20n^2-20n-6}{(4n^2+8n+6)(4n^2+2)} \\ &= \frac{-8n^2-16n}{(4n^2+8n+6)(4n^2+2)} < 0, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Vậy dãy số (u_n) đã cho là dãy số giảm.

⑤ Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $u_n = \frac{1}{n + \sqrt{n^2-1}}$. Khi đó

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n + \sqrt{n^2-1}}{(n+1) + \sqrt{(n+1)^2-1}} < 1, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số (u_n) đã cho là dãy số giảm.

⑥ Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+1}$. Khi đó

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n+2}+1} < 1, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số (u_n) đã cho là dãy số giảm.

□

BÀI 4. Xét tính tăng giảm của các dãy số (u_n) sau, với

① $u_n = \frac{3^n}{n^2}.$

② $u_n = \frac{n+1}{3^n}.$

③ $u_n = \frac{1}{\sqrt{1+n+n^2}}.$

④ $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$

Lời giải.

① $u_n = \frac{3^n}{n^2}$. Dễ thấy $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Xét tỉ số

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{3^n} = \frac{3n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n^2}{n^2+2n+1} > 1, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

② $u_n = \frac{n+1}{3^n}$. Dễ thấy $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Xét tỉ số

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n+1} = \frac{n+2}{3(n+1)} = \frac{n+2}{n+2+2n+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số (u_n) là một dãy số giảm.

③ $u_n = \frac{1}{\sqrt{1+n+n^2}}$. Dễ thấy $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Xét tỉ số

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{1+n+n^2}}{\sqrt{2+n+(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{1+n+n^2}{n^2+3n+3}} = \sqrt{\frac{1+n+n^2}{1+n+n^2+2+2n}} < 1, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số (u_n) là một dãy số giảm.

④ Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli

$$(1+a)^n \geq 1+na, \forall a \geq -1, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Xét tỉ số

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \\ &= \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} > \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \frac{n+1}{n} = 1 \text{ (với } a = -\frac{1}{(n+1)^2} > -1). \end{aligned}$$

Vậy dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

□

BÀI 5. Xét tính tăng giảm của các dãy số (u_n) được cho bởi hệ thức truy hồi sau:

① $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (n+1) \cdot 2^n. \end{cases}$

② $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1. \end{cases}$

③ $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1. \end{cases}$

④ $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3n - 2. \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{3+u_n}. \end{cases}$

⑥ $\begin{cases} u_2 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}. \end{cases}$

Lời giải.

① Ta có

$$u_{n+1} - u_n = (n+1) \cdot 2^n > 0, \forall n \geq 1 \Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

② Ta có $u_1 = 1 > -1$, giả sử $u_k > -1$, khi đó $u_{k+1} = 2u_k + 1 > -1$. Vậy $u_n > -1, \forall n \geq 1$.
Khi đó

$$u_{n+1} - u_n = 2u_n + 1 - u_n = u_n + 1 > 0, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

- ③ Ta có $u_1 = 2 > 1$, giả sử $u_k > 1$, khi đó $u_{k+1} = 2u_k - 1 > 2 - 1 = 1$. Vậy $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Khi đó

$$u_{n+1} - u_n = 2u_n - 1 - u_n = u_n - 1 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

- ④ Ta có

$$u_{n+1} - u_n = 3n - 2 > 0, \forall n \geq 1 \Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

- ⑤ Từ hệ thức truy hồi đã cho, dễ thấy $u_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Ta có } u_2 = \frac{2u_1}{3 + u_1} = \frac{6}{6} = 1 < u_1.$$

Ta dự đoán

$$u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (*)$$

Thật vậy, ta thấy $(*)$ đúng khi $n = 1$.

Giả sử $(*)$ đúng khi $n = k \geq 1, (k \in \mathbb{N})$, tức là ta có $u_k < u_{k-1}$.

Khi đó

$$u_{k+1} = \frac{2u_k}{3 + u_k} = \frac{2u_k + 6 - 6}{3 + u_k} = 2 - \frac{6}{u_k + 3}.$$

$$\text{Vì } u_k < u_{k-1} \text{ nên } \frac{6}{u_k + 3} > \frac{6}{u_{k-1} + 3}, \text{ suy ra } u_{k+1} < 2 - \frac{6}{u_{k-1} + 3} = u_k.$$

Vậy $(*)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó, dãy số (u_n) là dãy số giảm.

- ⑥ Từ hệ thức truy hồi đã cho, dễ thấy $u_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Ta có } u_2 = \sqrt{2u_1 + 3} = \sqrt{7} > u_1.$$

Ta dự đoán

$$u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Thật vậy, $(*)$ đúng với $n = 1$.

Giả sử $(*)$ đúng khi $n = k \geq 1, (k \in \mathbb{N})$, tức là ta có $u_k > u_{k-1}$.

Khi đó

$$u_{k+1} = \sqrt{2u_k + 3} > \sqrt{2u_{k-1} + 3} = u_k \text{ (do } u_k > u_{k-1} \text{)}.$$

Vậy $(*)$ đúng với $n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó, dãy số (u_n) là dãy số tăng.

□

📁 DẠNG 2.3. Tính bị chặn của dãy số

Phương pháp giải: Sử dụng khái niệm dãy số bị chặn.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Xét tính bị chặn của các dãy số sau

① Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n-1}{n+3}$.

② Dãy số (v_n) với $v_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$.

Lời giải

① Ta có $u_n > 0$ bởi mọi $n \geq 1$. Vậy (u_n) bị chặn dưới.

Lại có $u_n = 2 - \frac{7}{n+3} < 2$ với mọi $n \geq 1$. Vậy (u_n) bị chặn trên.

Do đó (u_n) bị chặn.

② Ta có

$$v_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}, \forall n \geq 1.$$

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta luôn có $0 < u_n < 1$.

Vậy (u_n) bị chặn.

□

BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Xét tính bị chặn của các dãy số (u_n) sau, với

① $u_n = \frac{n^2 + 1}{n}.$

② $u_n = \frac{2n + 3}{3n + 2}.$

③ $u_n = \frac{n - 1}{\sqrt{n^2 + 1}}.$

④ $u_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n + 1)}.$

Lời giải.

① Ta có $u_n = \frac{n^2 + 1}{n} = n + \frac{1}{n} \geq 2, \forall n \geq 1$. Vậy dãy số (u_n) bị chặn dưới.

② Ta có $u_n = \frac{2n + 3}{3n + 2} = \frac{2}{3} + \frac{5}{3(3n + 2)}.$

Để thấy $u_n = \frac{2n + 3}{3n + 2} > 0, \forall n \geq 1$ nên dãy số bị chặn dưới.

Lại có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3} + \frac{5}{3(3n + 5)} - \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3(3n + 2)} \right) = \frac{-5}{(3n + 2)(3n + 5)} < 0, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm nên $u_{n+1} \leq u_1 = 1$. Suy ra dãy số (u_n) bị chặn trên.

Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

③ Ta có $u_n = \frac{n - 1}{\sqrt{n^2 + 1}} \geq 0, \forall n \geq 1$ nên dãy số bị chặn dưới.

Lại có

$$\frac{n - 1}{\sqrt{n^2 + 1}} \leq \frac{n - 1}{n} \leq \frac{n}{n} = 1, \forall n \geq 1.$$

Cho nên dãy số (u_n) bị chặn trên.

Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

④ Rõ ràng $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (u_n) bị chặn dưới.

Ta có $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Khi đó $u_n = 1 - \frac{1}{n+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (u_n) bị chặn trên.

Vậy dãy số (u_n) bị chặn.



BÀI 2. Xét tính đơn điệu và bị chặn của các dãy số (u_n) với

① $u_n = 1 + (n - 1) \cdot 2^n.$

② $u_n = \frac{2n - 13}{3n - 2}.$

③ $u_n = \frac{n^2 + 3n + 1}{n + 1}.$

④ $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}. \end{cases}$

Lời giải.

① Ta có $u_{n+1} - u_n = (n + 1) \cdot 2^n > 0, \forall n \geq 1$. Từ đó suy ra dãy số (u_n) là dãy số tăng.
Lại có $u_n = 1 + (n - 1) \cdot 2^n \geq 1, \forall n \geq 1$. Vậy (u_n) là dãy số bị chặn dưới.

② Ta có $u_n = \frac{2n - 13}{3n - 2} = \frac{2}{3} - \frac{35}{3(3n - 2)} \leq \frac{2}{3}, \forall n \geq 1$.

Khi đó

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3} - \frac{35}{3(3n + 1)} - \left(\frac{2}{3} - \frac{35}{3(3n - 2)} \right) = \frac{35}{(3n - 2)(3n + 1)} > 0, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Mặt khác

$$0 < \frac{1}{3n - 2} \leq 1, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow 0 > -\frac{35}{3(3n - 2)} \geq -\frac{35}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3} > \frac{2}{3} - \frac{35}{3(3n - 2)} \geq \frac{2}{3} - \frac{35}{3} \Leftrightarrow -11 \leq u_n < \frac{2}{3}$$

Suy ra (u_n) là một dãy số bị chặn.

③ Ta có $u_n = \frac{n^2 + 3n + 1}{n + 1} = n + 2 - \frac{1}{n + 1}.$

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có

$$u_{n+1} - u_n = n + 3 - \frac{1}{n + 2} - \left(n + 2 - \frac{1}{n + 1} \right) = 1 + \frac{1}{(n + 1)(n + 2)} > 0, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Suy ra $u_n \geq u_1 = \frac{5}{2}$. Do đó, dãy số (u_n) bị chặn dưới.

④ Ta có $u_1 = 2 > 1$, giả sử $u_k > 1$, khi đó $u_{k+1} = \frac{u_k + 1}{2} > \frac{1 + 1}{2} = 1$. Vậy $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lại có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 1}{2} - u_n = \frac{1 - u_n}{2} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm.

Suy ra $u_n \leq u_1 = 2$. Do đó, dãy số (u_n) bị chặn trên. Vì vậy, dãy số (u_n) bị chặn.



3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 3. Xét tính bị chặn của các dãy số (u_n) sau, với

$$\textcircled{1} u_n = \frac{3n-1}{3n+1}.$$

$$\textcircled{2} u_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

$$\textcircled{3} u_n = \frac{2n-1}{\sqrt{n^2+2}}.$$

$$\textcircled{4} u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Lời giải.

$\textcircled{1}$ Ta có $u_n = \frac{3n-1}{3n+1} = 1 - \frac{2}{3n+1} < 1, \forall n \geq 1$. Suy ra dãy số (u_n) bị chặn trên.

Mặt khác, $\frac{3n-1}{3n+1} > 0, \forall n \geq 1$ nên dãy số (u_n) bị chặn dưới.

Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

$\textcircled{2}$ Ta có $u_n = \frac{1}{n(n+1)} > 0, \forall n \geq 1$ nên dãy số bị chặn dưới.

Lại có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{-2}{n(n+1)(n+2)} < 0, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm nên $u_{n+1} \leq u_1 = \frac{1}{2}$. Suy ra dãy số (u_n) bị chặn trên.

Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

$\textcircled{3}$ Ta có $u_n = \frac{2n-1}{\sqrt{n^2+2}} > 0, \forall n \geq 1$ nên dãy số bị chặn dưới.

Lại có $\frac{2n-1}{\sqrt{n^2+2}} \leq \frac{2n-1}{n} \leq \frac{2n}{n} = 2$ nên dãy số bị chặn trên.

Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

$\textcircled{4}$ Rõ ràng $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (u_n) bị chặn dưới.

Ta có $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}, \forall k \geq 2, k \in \mathbb{N}$. Khi đó

$$u_n < 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2 \text{ với mọi số nguyên dương } n.$$

Cho nên (u_n) bị chặn trên.

Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

□

BÀI 4. Xét tính đơn điệu và bị chặn của các dãy số (u_n) với

$$\textcircled{1} u_n = \frac{7n+5}{5n+7}.$$

$$\textcircled{2} u_n = \frac{n^2+1}{2n^2-3}.$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 5. \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 4. \end{cases}$$

Lời giải.

① Ta có $u_n = \frac{7n+5}{5n+7} = \frac{7}{5} - \frac{24}{5(5n+7)} \leq \frac{7}{5}, \forall n \geq 1$.

Khi đó

$$u_{n+1} - u_n = \frac{7}{5} - \frac{24}{5(5n+12)} - \left(\frac{7}{5} - \frac{24}{5(5n+7)} \right) = \frac{24}{(5n+7)(5n+12)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Mặt khác

$$0 < \frac{1}{5n+7} \leq \frac{1}{12}, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow 0 > -\frac{24}{5(5n+7)} \geq -\frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{7}{5} > \frac{7}{5} - \frac{24}{5(5n+7)} \geq \frac{7}{5} - \frac{2}{5} \Leftrightarrow 1 \leq u_n < \frac{7}{5}.$$

Suy ra (u_n) là một dãy số bị chặn.

② Ta có

$$u_n = \frac{n^2+1}{2n^2-3} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2(2n^2-3)}. \quad (1)$$

Dễ thấy, với mọi $n \geq 1$ ta có, $-1 \leq \frac{1}{2n^2-3} \leq \frac{1}{5}$.

Do đó từ (1) suy ra $-2 \leq u_n \leq 1, \forall n \geq 1$.

Từ đó suy ra (u_n) là một dãy số bị chặn.

Lại có $u_1 = -2; u_2 = 1; u_3 = \frac{2}{3}$ nên dãy số không tăng không giảm.

③ Ta có $u_1 = 1 < 15$, giả sử $u_k < 15$, khi đó $u_{k+1} = \frac{2}{3}u_k + 5 < \frac{2}{3} \cdot (15) + 5 = 15$. Vậy $u_n < 15, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lại có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 5 - u_n = \frac{15 - u_n}{3} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Suy ra $u_n \geq u_1 = 1$. Do đó, dãy số (u_n) bị chặn dưới.

④ Ta có $u_1 = 4 < 8$, giả sử $u_k < 8$, khi đó $u_{k+1} = \frac{u_k}{2} + 4 < \frac{8}{2} + 4 = 8$. Vậy $u_n < 8, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lại có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2} + 4 - u_n = \frac{8 - u_n}{2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Suy ra $u_n \geq u_1 = 4$. Do đó, dãy số (u_n) bị chặn dưới. Vì vậy, dãy số (u_n) bị chặn.

□

BÀI 5. Cho dãy số (u_n) định bởi $u_n = \frac{an^4+2}{2n^4+5}$. Định a để dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{a(n+1)^4+2}{2(n+1)^4+5} - \frac{an^4+2}{2n^4+5} = \frac{[a(n+1)^4+2](2n^4+5) - (an^4+2)[2(n+1)^4+5]}{[2(n+1)^4+5](2n^4+5)} \\ &= \frac{(5a-4)[(n+1)^4-n^4]}{[2(n+1)^4+5](2n^4+5)}. \end{aligned}$$

Lại có

$$(n+1)^4 > n^4, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow (n+1)^4 - n^4 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Để dãy số (u_n) là dãy số tăng thì

$$u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow 5a - 4 > 0 \Leftrightarrow a > \frac{4}{5}.$$

Vậy với $a > \frac{4}{5}$ thì dãy số (u_n) là dãy số tăng. $\square$

$\Rightarrow$ EM CỐ BIẾT?

DÃY SỐ PHI-BÔ-NA-XI

Phi-bô-na-xi (Fibonacci) (còn có tên là Leonardo da Pisa) là một nhà Toán học nổi tiếng người Italia. Trong cuốn sách Liber Abacci, năm 1202, ông có viết bài toán sau:

“Một đôi thỏ (gồm một con thỏ đực và một con thỏ cái) cứ mỗi tháng đẻ được một đôi thỏ con (cùng gồm một thỏ đực và thỏ cái); mỗi đôi thỏ con, khi tròn hai tháng tuổi, lại mỗi tháng đẻ ra một đôi thỏ con, và quá trình sinh nở cứ thế tiếp diễn. Hỏi sau một năm sẽ có tất cả bao nhiêu đôi thỏ, nếu đầu năm (tháng giêng) có một đôi thỏ sơ sinh.”

Rõ ràng ở tháng giêng, cũng như ở tháng 2, chỉ có một đôi thỏ. Sang tháng 3, đôi thỏ này sẽ đẻ ra một đôi thỏ con, vì thế ở tháng thứ 3 sẽ có $1 + 1 = 2$ đôi thỏ. Sang tháng tư, vì chỉ có đôi thỏ ban đầu sinh con nên ở tháng này có $1 + 2 = 3$ đôi thỏ. Sang tháng 5, hai đôi thỏ gồm đôi thỏ ban đầu và đôi thỏ được sinh ra ở tháng 3 cùng sinh con nên tháng này có $3 + 2 = 5$ đôi thỏ, ...

Khái quát, nếu kí hiệu F_n là số đôi thỏ có ở tháng thứ n , thì với $n \geq 3$, ta có

$$F_n = F_{n-1} + \text{số đôi thỏ được sinh ra ở tháng thứ } n.$$

Do đó các đôi thỏ được sinh ra ở tháng thứ $(n - 1)$ chưa thể sinh con ở tháng thứ n và mỗi đôi thỏ ở tháng thứ $(n - 2)$ sẽ sinh ra một đôi thỏ con nên số đôi thỏ con được sinh ra ở tháng thứ n chính bằng F_{n-2} (số thỏ có ở tháng thứ $(n - 2)$).

Như vậy

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Việc giải quyết bài toán trên của Fibonacci dẫn đến việc khảo sát dãy số (F_n) được xác định như sau

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, (n \geq 3). \end{cases}$$

Dãy số trên sau này nhà toán học Pháp Edouard Lucas gọi là dãy số Fibonacci.

BÀI 3. CẤP SỐ CỘNG

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nhận xét tính chất chung đặc biệt của các dãy số sau

- Dãy số $2, 4, 6, 8, 10, \dots$
- Dãy số $-5, -2, 1, 4, 7, 10$.
- Dãy số $20, 15, 10, 5, 0, -5, -10, \dots$

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1. Cấp số cộng là một dãy số (vô hạn hay hữu hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số d không

đổi, nghĩa là: (u_n) là cấp số cộng khi và chỉ khi $n \geq 1, u_{n+1} = u_n + d$. Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

Để chứng minh một dãy số (u_n) là một cấp số cộng, ta xét hiệu $u_{n+1} - u_n = d$ (không đổi) với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Tính chất

Tính chất 1. Nếu (u_n) là một cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$.

Hệ quả 1. Ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $a + c = 2b$.

3. Số hạng tổng quát của cấp số cộng

Định lý 1. Nếu một cấp số cộng có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức sau: $u_n = u_1 + (n - 1)d$.

Để tìm n số hạng liên tiếp của cấp số cộng thỏa điều kiện, ta cần nhớ:



- Nếu n lẻ, cần đặt số hạng cần tìm là x , công sai: d .
- Nếu n chẵn, cần đặt số hạng cần tìm là $x - d$, công sai: $2d$.

4. Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng

Định lý 2. Giả sử (u_n) là 1 cấp số cộng có công sai d . Gọi $S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ (S_n là tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng). Ta có: $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$.

B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Chứng minh các dãy số sau là một cấp số cộng. Xác định công sai và số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó?

① Dãy số (u_n) với $u_n = 19n - 5$.

ĐS: $d = 19, u_1 = 14$

② Dãy số (u_n) với $u_n = -3n + 1$.

ĐS: $d = -3, u_1 = -2$

LỜI GIẢI

① Ta có $u_{n+1} - u_n = 19(n+1) - 5 - 19n + 5 = 19n + 19 - 5 - 19n + 5 = 19$.

Do đó dãy số (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 19$, số hạng đầu $u_1 = 14$.

② Ta có $u_{n+1} - u_n = -3(n+1) + 1 + 3n - 1 = -3n - 3 + 1 + 3n - 1 = -3$.

Do đó dãy số (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = -3$, số hạng đầu $u_1 = -2$.

□

VÍ DỤ 2. Ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Tìm ba góc đó. **ĐS:** $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}$

 Lời giải

Gọi ba góc của tam giác lần lượt là A, B, C . Khi đó ta có $A + B + C = \pi$.

Do ba góc A, B, C của tam giác theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên $A + C = 2B$.

Do đó $2B + B = \pi \Rightarrow 3B = \pi \Rightarrow B = \frac{\pi}{3}$.

Do tam giác ABC vuông nên giả sử $C = \frac{\pi}{2}$ khi đó công sai d của cấp số cộng là $d = C - B = \frac{\pi}{6}$.

Vậy góc A của tam giác là $A = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$. □

VÍ DỤ 3. Một tam giác vuông có chu vi bằng 12 cm và ba cạnh lập thành một cấp số cộng.
Tính độ dài ba cạnh của tam giác đó. **ĐS:** 5 cm, 4 cm, 3 cm

 Lời giải

Giả sử ba cạnh của tam giác vuông lần lượt là a, b, c trong đó a là cạnh huyền và $a > b > c$.

Do tam giác vuông có chu vi bằng 12 cm nên $a + b + c = 12$.

Mặt khác a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên $a + c = 2b$.

Khi đó $2b + b = 12 \Leftrightarrow 3b = 12 \Leftrightarrow b = 4$ cm. Giả sử công sai của cấp số cộng là d thì $a = 4 - d$, $c = 4 + d$.

Do tam giác vuông cạnh huyền là a nên $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow (4 - d)^2 = 4^2 + (4 + d)^2 \Leftrightarrow -16d = 16 \Leftrightarrow d = -1$.

Vậy $a = 5$ cm, $c = 3$ cm. □

VÍ DỤ 4. Một cấp số cộng có 10 số hạng, trong đó số hạng đầu bằng 5, số hạng cuối bằng 23. Tìm cấp số cộng đó? **ĐS:** 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23

 Lời giải

Ta có $u_{10} = u_1 + 9d \Leftrightarrow 23 = 5 + 9d \Leftrightarrow d = 2$.

Vậy cấp số cộng cần tìm là 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23. □

VÍ DỤ 5. Tìm ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 27 và tổng các bình phương của chúng là 293. **ĐS:** 4, 9, 14

 Lời giải

Gọi ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x - d, x, x + d$ trong đó d là công sai của cấp số cộng.

Khi đó ta có $x - d + x + x + d = 27 \Leftrightarrow 3x = 27 \Leftrightarrow x = 9$.

Mà $(x - d)^2 + x^2 + (x + d)^2 = 293 \Leftrightarrow (9 - d)^2 + 81 + (9 + d)^2 = 293 \Leftrightarrow 2d^2 - 50 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 5 \\ d = -5 \end{cases}$.

Với $d = 5$ thì ba số hạng của cấp số cộng là 4, 9, 14. Với $d = -5$ thì ba số hạng của cấp số cộng là 14, 9, 4.

Vậy ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 4, 9, 14. □

VÍ DỤ 6. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương của chúng bằng 30. **ĐS:** 1, 2, 3, 4

 Lời giải

Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x - 3d, x - d, x + d, x + 3d$ với $2d$ là công sai của cấp số cộng.

Khi đó ta có $x - 3d + x - d + x + d + x + 3d = 10 \Leftrightarrow 4x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

Mặt khác

$$(x - 3d)^2 + (x - d)^2 + (x + d)^2 + (x + 3d)^2 = 30 \Leftrightarrow 4x^2 + 20d^2 = 30 \Leftrightarrow d^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} d = \frac{1}{2} \\ d = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Với $x = \frac{5}{2}$ thì $d = \frac{1}{2}$, khi đó bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 1, 2, 3, 4.

Với $x = \frac{5}{2}$ thì $d = -\frac{1}{2}$, khi đó bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 4, 3, 2, 1.

Vậy bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 1, 2, 3, 4. □

VÍ DỤ 7. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_3 + u_{28} = 100$. Hãy tính tổng của 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó. **ĐS:** 1500

 Lời giải

$$\text{Ta có } S_{30} = \frac{30(u_1 + u_{30})}{2} = \frac{30(u_1 + 2d + u_{30} - 2d)}{2} = \frac{30(u_3 + u_{28})}{2} = \frac{30 \cdot 100}{2} = 1500. \quad \square$$

VÍ DỤ 8. Cho một cấp số cộng (u_n) có $S_6 = 18$ và $S_{10} = 110$. Tính S_{20} . **ĐS:** $S_{20} = 620$

 Lời giải

Giả sử cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu là u_1 và công sai là d .

$$\text{Ta có } S_6 = 6u_1 + \frac{6 \cdot 5}{2}d \Leftrightarrow 6u_1 + 15d = 18. \quad (1)$$

$$S_{10} = 10u_1 + \frac{10 \cdot 9}{2}d \Leftrightarrow 10u_1 + 45d = 110. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình } \begin{cases} 6u_1 + 15d = 18 \\ 10u_1 + 45d = 110 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -7 \\ d = 4 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } S_{20} = 20u_1 + \frac{20 \cdot 19}{2}d = 20 \cdot (-7) + 190 \cdot 4 = 620. \quad \square$$

VÍ DỤ 9. Tính các tổng sau:

① $S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1).$

ĐS: $S = (n + 1)^2$

② $S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2.$

ĐS: $S = 5050$

 Lời giải

① $S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1).$

Xét cấp số cộng $(u_k), k \in \mathbb{N}^*$ với số hạng đầu là $u_1 = 1$ và công sai là $d = 2$.

Ta có $u_k = u_1 + (k-1)d \Leftrightarrow 2n+1 = 1 + 2(k-1) \Leftrightarrow k = n+1$.

$$\text{Vậy } S = \frac{k(u_1 + u_k)}{2} = \frac{(n+1)(1+2n+1)}{2} = (n+1)^2.$$

$$\textcircled{2} \quad S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2 = 199 + 195 + \dots + 3.$$

Xét cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 199$ và công sai $d = u_2 - u_1 = 195 - 199 = -4$.

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d \Leftrightarrow 3 = 199 - 4(n-1) \Leftrightarrow n = 50$.

$$\text{Khi đó } S = \frac{n(u_1 + u_{50})}{2} = \frac{50(199 + 3)}{2} = 5050.$$

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Tìm số hạng đầu tiên, công sai, số hạng thứ 20 và tổng của 20 số hạng đầu tiên của các cấp số cộng sau, biết rằng

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35. \end{cases} \quad \text{ĐS: } u_1 = 3, d = 4, u_{20} = 79, S_{20} = 820$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26. \end{cases} \quad \text{ĐS: } u_1 = 1, d = 3, u_{20} = 58, S_{20} = 590$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ S_{12} = 129. \end{cases} \quad \text{ĐS: } u_1 = \frac{5}{2}, d = \frac{3}{2}, u_{20} = 31, S_{20} = 335$$

$$\textcircled{4} \quad \begin{cases} u_6 = 8 \\ u_2^2 + u_4^2 = 52. \end{cases} \quad \text{ĐS: } \begin{cases} u_1 = 3, d = 1, u_{20} = 22, S_{20} = 250 \\ u_1 = -11, d = \frac{19}{5}, u_{20} = \frac{306}{5}, S_{20} = 502 \end{cases}$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 19 \\ u_1 + 8d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4. \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 3$, công sai là $d = 4$.

Khi đó số hạng thứ 20 là $u_{20} = u_1 + 19d = 3 + 19 \cdot 4 = 79$.

$$\text{Tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là } S_{20} = \frac{20(u_1 + u_{20})}{2} = \frac{20(3 + 79)}{2} = 820.$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d - u_1 - 2d + u_1 + 4d = 10 \\ u_1 + 3d + u_1 + 5d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 8d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 1$, công sai là $d = 3$.

Khi đó số hạng thứ 20 là $u_{20} = u_1 + 19d = 1 + 19 \cdot 3 = 58$.

$$\text{Tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là } S_{20} = \frac{20(u_1 + u_{20})}{2} = \frac{20(1 + 58)}{2} = 590.$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ S_{12} = 129 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d + u_1 + 4d = 14 \\ 12u_1 + 66d = 129 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 6d = 14 \\ 12u_1 + 66d = 129 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{5}{2} \\ d = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = \frac{5}{2}$, công sai là $d = \frac{3}{2}$.

Khi đó số hạng thứ 20 là $u_{20} = u_1 + 19d = \frac{5}{2} + 19 \cdot \frac{3}{2} = 31$.

$$\text{Tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là } S_{20} = \frac{20(u_1 + u_{20})}{2} = \frac{20\left(\frac{5}{2} + 31\right)}{2} = 335.$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} u_6 = 8 \\ u_2^2 + u_4^2 = 52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 5d = 8 \\ (u_1 + d)^2 + (u_1 + 3d)^2 = 52 \end{cases} \quad (1) \quad (2).$$

Từ (1), ta có $u_1 + 5d = 8 \Leftrightarrow u_1 = 8 - 5d$, thay vào (2)

$$(8 - 4d)^2 + (8 - 2d)^2 = 52 \Leftrightarrow 20d^2 - 96d + 76 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 1 \\ d = \frac{19}{5} \end{cases}.$$

Với $d = 1$ thì $u_1 = 3$. Khi đó số hạng thứ 20 là $u_{20} = u_1 + 19d = 3 + 19 \cdot 1 = 22$.

Tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là $S_{20} = \frac{20(u_1 + u_{20})}{2} = \frac{20(3 + 22)}{2} = 250$.

Với $d = \frac{19}{5}$ thì $u_1 = -11$. Khi đó số hạng thứ 20 là $u_{20} = u_1 + 19d = -11 + 19 \cdot \frac{19}{5} = \frac{306}{5}$.

Tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là $S_{20} = \frac{20(u_1 + u_{20})}{2} = \frac{20\left(-11 + \frac{306}{5}\right)}{2} = 502$.

□

BÀI 2. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết

$$\textcircled{1} \begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59. \end{cases} \quad \text{ĐS: } u_1 = 3, d = 4$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5. \end{cases} \quad \text{ĐS: } u_1 = 3, d = 4$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4. \end{cases} \quad \text{ĐS: } u_1 = -5, d = 2$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75. \end{cases} \quad \text{ĐS: } \begin{cases} u_1 = 2, d = 2 \\ u_1 = -17, d = 2 \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \begin{cases} u_6 + u_7 = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170. \end{cases} \quad \text{ĐS: Không tồn tại}$$

$$\textcircled{6} \begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ S_3 = 21. \end{cases} \quad \text{ĐS: } \begin{cases} u_1 = 9, d = -2 \\ u_1 = 5, d = -2 \end{cases}$$

$$\textcircled{7} \begin{cases} S_3 = 12 \\ S_5 = 35. \end{cases} \quad \text{ĐS: } u_1 = 1, d = 3$$

$$\textcircled{8} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35. \end{cases} \quad \text{ĐS: } \begin{cases} u_1 = 5, d = -2 \\ u_1 = 1, d = 2 \end{cases}$$

$$\textcircled{9} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 16 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 84. \end{cases} \quad \text{ĐS: } \begin{cases} u_1 = 1, d = 2 \\ u_1 = 7, d = -2 \end{cases}$$

$$\textcircled{10} \begin{cases} S_5 = 5 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 \cdot u_5 = 45. \end{cases} \quad \text{ĐS: } \begin{cases} u_1 = -3, d = 2 \\ u_1 = 5, d = -2 \end{cases}$$

$$\textcircled{11} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 20 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 = 170. \end{cases} \quad \text{ĐS: } \begin{cases} u_1 = -2, d = 3 \\ u_1 = 10, d = -3 \end{cases}$$

$$\textcircled{12} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = -12 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 8. \end{cases}$$

$$\text{ĐS: } \begin{cases} u_1 = -4 - 3\sqrt{2}, d = 3\sqrt{2} \\ u_1 = -4 + 3\sqrt{2}, d = -3\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{13} \begin{cases} S_4 = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24}. \end{cases}$$

$$\text{ĐS: } \begin{cases} u_1 = 2, d = 2 \\ u_1 = 8, d = -2 \\ u_1 = 5 + \sqrt{145}, d = -\frac{2\sqrt{145}}{3} \\ u_1 = 5 - \sqrt{145}, d = \frac{2\sqrt{145}}{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{14} \begin{cases} u_1 + u_5 = \frac{5}{3} \\ u_3 \cdot u_4 = \frac{65}{72}. \end{cases}$$

$$\text{ĐS: } u_1 = \frac{1}{3}, d = \frac{1}{4}$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6d = 27 \\ u_1 + 14d = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4. \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 3$, công sai là $d = 4$.

$$\textcircled{2} \begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 8d = 5u_1 + 5d \\ u_1 + 12d = 2u_1 + 10d + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 - 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4. \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 3$, công sai là $d = 4$.

$$\textcircled{3} \begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d + u_1 + 3d - u_1 - 5d = -7 \\ u_1 + 7d - u_1 - 6d = 2u_1 + 6d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - d = -7 \\ 2u_1 + 5d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -5 \\ d = 2. \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = -5$, công sai là $d = 2$.

$$\textcircled{4} \begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d - u_1 - 6d = -8 \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ u_1^2 + 14u_1 - 51 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_1 = -17. \end{cases} \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 3$, công sai là $d = 2$ hoặc $u_1 = -17, d = 2$.

$$\textcircled{5} \begin{cases} u_6 + u_7 = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_6 + d = 60 \\ (u_6 - 2d)^2 + (u_6 + 6d)^2 = 1170. \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Từ (1), suy ra $d = 60 - 2u_6$, thay vào (2), ta có

$$(5u_6 - 120)^2 + (360 - 11u_6)^2 = 1170 \Leftrightarrow 146u_6^2 - 9120u_6 + 142830 = 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

Vậy không tồn tại cấp số cộng thỏa yêu cầu bài toán.

$$\textcircled{6} \begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ S_3 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 155 \\ 3u_1 + 3d = 21. \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Từ (2), ta có $3u_1 + 3d = 21 \Rightarrow d = 7 - u_1$, thay vào (1)

$$u_1^2 + 7^2 + (14 - u_1)^2 = 155 \Leftrightarrow 2u_1^2 - 28u_1 + 90 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 9 \\ u_1 = 5. \end{cases}$$

Với $u_1 = 9$ thì $d = -2$. Với $u_1 = 5$ thì $d = 2$.

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 9$, công sai là $d = -2$ hoặc $u_1 = 5, d = 2$.

$$\textcircled{7} \begin{cases} S_3 = 12 \\ S_5 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 + 3d = 12 \\ 5u_1 + 10d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 1$, công sai là $d = 3$.

$$\textcircled{8} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_2 = 9 \\ (u_2 - d)^2 + u_2^2 + (u_2 + d)^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = 3 \\ (3 - d)^2 + 9 + (3 + d)^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = 3 \\ d^2 = 4. \end{cases}$$

Do $d^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} d = -2 \\ d = 2 \end{cases}$. Với $u_2 = 3$ và $d = 2$ thì $u_1 = u_2 - d = 1$. Với $u_2 = 3$ và $d = -2$ thì $u_1 = u_2 - d = 5$.

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 1$, công sai là $d = 2$ hoặc $u_1 = 5, d = -2$.

$$\textcircled{9} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 16 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 + 6d = 16 \\ u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 + (u_1 + 3d)^2 = 84. \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Từ (2), suy ra $d = \frac{16 - 4u_1}{6}$. Thay vào (2), ta có

$$\begin{aligned} & u_1^2 + \left(u_1 + \frac{16 - 4u_1}{6}\right)^2 + \left(u_1 + \frac{16 - 4u_1}{3}\right)^2 + \left(u_1 + \frac{16 - 4u_1}{2}\right)^2 = 84 \\ \Leftrightarrow & u_1^2 + \left(\frac{2u_1 + 16}{6}\right)^2 + \left(\frac{-u_1 + 16}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2u_1 + 16}{2}\right)^2 = 84 \\ \Leftrightarrow & 36u_1^2 + (2u_1 + 16)^2 + 4(16 - u_1)^2 + 9(16 - 2u_1)^2 = 3024 \\ \Leftrightarrow & 80u_1^2 - 640u_1 + 560 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} u_1 = 1 \Rightarrow d = 2 \\ u_1 = 7 \Rightarrow d = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 1$, công sai là $d = 2$ hoặc $u_1 = 7, d = -2$.

$$\textcircled{10} \begin{cases} S_5 = 5 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 \cdot u_5 = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u_1 + 10d = 5 \\ u_1(u_1 + d)(u_1 + 2d)(u_1 + 3d)(u_1 + 4d) = 45. \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Từ (2), suy ra $u_1 = 1 - 2d$, thay vào (2) ta có

$$(1 - 2d)(1 - d)(1 + d)(1 + 2d) = 45 \Leftrightarrow 4d^4 - 5d^2 - 44 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d^2 = 4 \\ d^2 = -\frac{11}{4} \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm}) \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ d = -2. \end{cases}$$

Với $d = 2$ thì $u_1 = 1 - 2d = -3$. Với $d = -2$ thì $u_1 = 1 - 2d = 5$.

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = -3$, công sai là $d = 2$ hoặc $u_1 = 5, d = -2$.

$$\textcircled{11} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 20 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 = 170 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u_3 = 20 \\ (u_3 - 2d)^2 + (u_3 - d)^2 + u_3^2 + (u_3 + d)^2 + (u_3 + 2d)^2 = 170. \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Từ (1), suy ra $u_3 = 4$. Thay vào (2), ta có

$$(4 - 2d)^2 + (4 - d)^2 + 4^2 + (4 + d)^2 + (4 + 2d)^2 = 170 \Leftrightarrow 9d^2 = 90 \Leftrightarrow \begin{cases} d = -3 \\ d = 3. \end{cases}$$

Với $u_3 = 4, d = -3$ thì $u_1 = u_3 - 2d = 10$. Với $u_3 = 4, d = 3$ thì $u_1 = u_3 - 2d = -2$.

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 10$, công sai là $d = -3$ hoặc $u_1 = -2, d = 3$.

$$\textcircled{12} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = -12 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_2 = -12 \\ (u_2 - d)u_2(u_2 + d) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = -4 \\ (-4 - d) \cdot (-4) \cdot (-4 + d) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = -4 \\ d^2 = 18. \end{cases}$$

Do $d^2 = 18 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 3\sqrt{2} \\ d = -3\sqrt{2} \end{cases}$. Với $u_2 = -4, d = 3\sqrt{2}$ thì $u_1 = -4 - 3\sqrt{2}$. Với $u_2 = -4,$

$d = -3\sqrt{2}$ thì $u_1 = -4 + 3\sqrt{2}$.

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = -4 - 3\sqrt{2}$, công sai là $d = 3\sqrt{2}$ hoặc $u_1 = -4 + 3\sqrt{2}, d = -3\sqrt{2}$.

$$\textcircled{13} \begin{cases} S_4 = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases} \begin{matrix} (1) \\ (2). \end{matrix}$$

Từ (1), suy ra $u_1 + u_4 = u_2 + u_3 = 10$ và $u_1 = 5 - \frac{3}{2}d$.

Từ (2), ta có

$$\begin{aligned} \frac{u_1 + u_4}{u_1 \cdot u_4} + \frac{u_2 + u_3}{u_2 \cdot u_3} &= \frac{25}{24} \Leftrightarrow \frac{10}{u_1(u_1 + 3d)} + \frac{10}{(u_1 + d)(u_1 + 2d)} = \frac{25}{24} \\ \Leftrightarrow \frac{10}{\left(5 - \frac{3}{2}d\right)\left(5 + \frac{3}{2}d\right)} + \frac{10}{\left(5 - \frac{1}{2}d\right)\left(5 + \frac{1}{2}d\right)} &= \frac{25}{24} \Leftrightarrow \frac{10}{25 - \frac{9}{4}d^2} + \frac{10}{25 - \frac{1}{4}d^2} = \frac{25}{24} \\ \Leftrightarrow 10\left(25 - \frac{9}{4}d^2 + 25 - \frac{1}{4}d^2\right) &= \frac{25}{24}\left(25 - \frac{9}{4}d^2\right)\left(25 - \frac{1}{4}d^2\right) \\ \Leftrightarrow \frac{75}{128}d^4 - \frac{1925}{48}d^2 + \frac{3625}{24} &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d^2 = \frac{580}{9} \\ d^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = \pm \frac{2\sqrt{145}}{3} \\ d = \pm 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Với $d = \frac{2\sqrt{145}}{3}$ thì $u_1 = 5 - \sqrt{145}$. Với $d = -\frac{2\sqrt{145}}{3}$ thì $u_1 = 5 + \sqrt{145}$.

Với $d = 2$ thì $u_1 = 2$. Với $d = -2$ thì $u_1 = 8$.

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 5 + \sqrt{145}$, công sai là $d = -\frac{2\sqrt{145}}{3}; u_1 = 5 - \sqrt{145},$

$d = \frac{2\sqrt{145}}{3}; u_1 = 2, d = 2; u_1 = 8, d = -2$.

$$\textcircled{14} \begin{cases} u_1 + u_5 = \frac{5}{3} \\ u_3 \cdot u_4 = \frac{65}{72} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_3 = \frac{5}{3} \\ u_3 \cdot u_4 = \frac{65}{72} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_3 = \frac{5}{6} \\ u_4 = \frac{13}{12}. \end{cases}$$

Khi đó ta có $u_4 = u_3 + d \Leftrightarrow d = u_4 - u_3 = \frac{13}{12} - \frac{5}{6} = \frac{1}{4}$. Mặt khác $u_3 = u_1 + 2d \Leftrightarrow u_1 =$

$$u_3 - 2d = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = \frac{1}{3}$, công sai là $d = \frac{1}{4}$.

□

BÀI 3. Xác định số hạng đầu, công sai và số hạng thứ n của các cấp số cộng sau, biết rằng:

$$\textcircled{1} \begin{cases} S_{12} = 34 \\ S_{18} = 45. \end{cases} \quad \text{ĐS: } u_1 = \frac{31}{9}, d = -\frac{1}{9} \quad \textcircled{2} \begin{cases} u_5 = 10 \\ S_{10} = 5. \end{cases} \quad \text{ĐS: } u_1 = 86, d = -19$$

$$\textcircled{3} \frac{S_{20}}{5} = \frac{S_{10}}{3} = \frac{S_5}{2}. \quad \text{ĐS: } u_1 = 0, d = 0 \quad \textcircled{4} \begin{cases} S_{20} = 2S_{10} \\ S_{15} = 3S_5. \end{cases} \quad \text{ĐS: } u_1 = 0, d = 0$$

Lời giải.

① Áp dụng công thức $S_n = \frac{(u_n + u_1) \cdot n}{2} = \frac{(2u_1 + (n-1)d) \cdot n}{2}$ trong đó u_1 là số hạng đầu, d là công sai.

$$\text{Ta có } \begin{cases} S_{12} = 34 \\ S_{18} = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(2u_1 + 11d) \cdot 12}{2} = 34 \\ \frac{(2u_1 + 17d) \cdot 18}{2} = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 11d = \frac{17}{3} \\ 2u_1 + 17d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{31}{9} \\ d = \frac{-1}{9}. \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu là $u_1 = \frac{31}{9}$ và công sai $d = \frac{-1}{9}$.

$$\textcircled{2} \text{ Ta có } \begin{cases} u_5 = 10 \\ S_{10} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 10 \\ \frac{(2u_1 + 9d) \cdot 10}{2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 10 \\ 2u_1 + 9d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 86 \\ d = -19. \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu là $u_1 = 86$ và công sai $d = -19$.

$$\textcircled{3} \frac{S_{20}}{5} = \frac{S_{10}}{3} = \frac{S_5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3S_{20} = 5S_{10} \\ 2S_{10} = 3S_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30 \cdot (2u_1 + 19d) = 25 \cdot (2u_1 + 9d) \\ 10 \cdot (2u_1 + 9d) = \frac{15 \cdot (2u_1 + 4d)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 69d = 0 \\ 2u_1 + 24d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ d = 0. \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu là $u_1 = 0$ và công sai $d = 0$.

$$\textcircled{4} \begin{cases} S_{20} = 2S_{10} \\ S_{15} = 3S_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(2u_1 + 19d) \cdot 20}{2} = \frac{2 \cdot (2u_1 + 9d) \cdot 10}{2} \\ \frac{(2u_1 + 14d) \cdot 15}{2} = \frac{3 \cdot (2u_1 + 4d) \cdot 5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ d = 0. \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu là $u_1 = 0$ và công sai $d = 0$.

□

BÀI 4. Cho cấp số cộng $u_1, u_2, u_3, \dots$ có công sai d .

$$\textcircled{1} \text{ Biết } u_2 + u_{22} = 40. \text{ Tính } S_{23}. \quad \text{ĐS: } S_{23} = 460$$

$$\textcircled{2} \text{ Biết } u_1 + u_4 + u_7 + u_{10} + u_{13} + u_{16} = 147. \text{ Tính } A = u_6 + u_{11} \text{ và } B = u_1 + u_6 + u_{11} + u_{16}. \quad \text{ĐS: } A = 49, B = 98$$

$$\textcircled{3} \text{ Biết } u_4 + u_8 + u_{12} + u_{16} = 224. \text{ Tính } S_{19}. \quad \text{ĐS: } S_{19} = 1064$$

$$\textcircled{4} \text{ Biết } u_{23} + u_{57} = 29. \text{ Tính } C = u_{10} + u_{70} + u_{157} + 3u_1. \quad \text{ĐS: } C = 87$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \text{ Ta có } u_2 + u_{22} = 40 \Leftrightarrow u_1 + d + u_1 + 21d = 40 \Leftrightarrow 2u_1 + 22d = 40. \\ \text{Khi đó } S_{23} = \frac{(2u_1 + 22d) \cdot 23}{2} = \frac{40 \cdot 23}{2} = 460.$$

② Ta có

$$\begin{aligned} u_1 + u_4 + u_7 + u_{10} + u_{13} + u_{16} &= 147 \Leftrightarrow u_1 + u_1 + 3d + u_1 + 6d + u_1 + 9d + u_1 + 12d + u_1 + 15d = 147 \\ &\Leftrightarrow 6u_1 + 45d = 147 \\ &\Leftrightarrow 2u_1 + 15d = 49 \\ &\Leftrightarrow (u_1 + 5d) + (u_1 + 10d) = 49 \\ &\Leftrightarrow u_6 + u_{11} = 49. \end{aligned}$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} 2u_1 + 15d = 49 &\Leftrightarrow 4u_1 + 30d = 98 \\ &\Leftrightarrow u_1 + (u_1 + 5d) + (u_1 + 10d) + (u_1 + 15d) = 98 \\ &\Leftrightarrow u_1 + u_6 + u_{11} + u_{16} = 98. \end{aligned}$$

③ Ta có

$$\begin{aligned} u_4 + u_8 + u_{12} + u_{16} = 224 &\Leftrightarrow u_1 + 3d + u_1 + 7d + u_1 + 11d + u_1 + 15d = 224 \\ &\Leftrightarrow 4u_1 + 36d = 224 \\ &\Leftrightarrow 2u_1 + 18d = 112 \\ &\Leftrightarrow \frac{(2u_1 + 18d) \cdot 19}{2} = 1064 \\ &\Leftrightarrow S_{19} = 1064. \end{aligned}$$

④ Ta có

$$\begin{aligned} u_{23} + u_{57} = 29 &\Leftrightarrow 2u_1 + 78d = 29 \\ &\Leftrightarrow 6u_1 + 234d = 87 \\ &\Leftrightarrow (u_1 + 9d) + (u_1 + 69d) + (u_1 + 156d) + 3u_1 = 87 \\ &\Leftrightarrow u_{10} + u_{70} + u_{157} + 3u_1 = 87. \end{aligned}$$

□

BÀI 5. Tìm ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết rằng:

- | | |
|--|--------------------|
| ① Tổng của chúng bằng 15 và tích của chúng bằng 105. | ĐS: 3, 5, 7 |
| ② Tổng của chúng bằng 15 và tổng bình phương của chúng bằng 83. | ĐS: 3, 5, 7 |
| ③ Tổng của chúng bằng 21 và tổng bình phương của chúng bằng 155. | ĐS: 5, 7, 9 |

Lời giải.

- ① Gọi ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x - d, x, x + d$ trong đó d là công sai.
Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x - d) + x + (x + d) = 15 \\ (x - d) \cdot x \cdot (x + d) = 105 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 15 \\ x(x^2 - d^2) = 105 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ 5(25 - d^2) = 105 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ d^2 = 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ d = \pm 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Với $d = 2$ thì ba số hạng liên tiếp là 3, 5, 7.

Với $d = -2$ thì ba số hạng liên tiếp là 7, 5, 3.

Vậy ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 3, 5, 7.

- ② Gọi ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x - d, x, x + d$ trong đó d là công sai.
Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x - d) + x + (x + d) = 15 \\ (x - d)^2 + x^2 + (x + d)^2 = 83 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 15 \\ 3x^2 + 2d^2 = 83 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ 3 \cdot 5^2 + 2d^2 = 83 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ d^2 = 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ d = \pm 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Với $d = 2$ thì ba số hạng liên tiếp là 3, 5, 7.

Với $d = -2$ thì ba số hạng liên tiếp là 7, 5, 3.

Vậy ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 3, 5, 7.

- ③ Gọi ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x - d, x, x + d$ trong đó d là công sai.
Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x - d) + x + (x + d) = 21 \\ (x - d)^2 + x^2 + (x + d)^2 = 155 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 21 \\ 3x^2 + 2d^2 = 155 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ 3 \cdot 7^2 + 2d^2 = 155 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ d^2 = 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ d = \pm 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Với $d = 2$ thì ba số hạng liên tiếp là 5, 7, 9.

Với $d = -2$ thì ba số hạng liên tiếp là 9, 7, 5.

Vậy ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 5, 7, 9.

□

BÀI 6. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết rằng:

- ① Tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương bằng 70. **ĐS:** $-2, 1, 4, 7$
- ② Tổng của chúng bằng 22 và tổng bình phương bằng 66. **ĐS:** Không tồn tại
- ③ Tổng của chúng bằng 36 và tổng bình phương bằng 504. **ĐS:** $0, 6, 12, 18$
- ④ Chúng có tổng bằng 20 và tích của chúng bằng 384. **ĐS:**

$$\left[2, 4, 6, 8 \right. \\ \left. 5 - \sqrt{241}, \frac{15 - \sqrt{241}}{3}, \frac{15 + \sqrt{241}}{3}, 5 + \sqrt{241} \right]$$
- ⑤ Tổng của chúng bằng 20, tổng nghịch đảo của chúng bằng $\frac{25}{24}$ và các số này là những số nguyên. **ĐS:** $2, 4, 6, 8$
- ⑥ Nó là số đo của một tứ giác lồi và góc lớn nhất gấp 5 lần góc nhỏ nhất. **ĐS:** $30^\circ, 70^\circ, 110^\circ, 150^\circ$

Lời giải.

- ① Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x - 3d, x - d, x + d, x + 3d$ trong đó $2d$ là công sai.

Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x - 3d) + (x - d) + (x + d) + (x + 3d) = 10 \\ (x - 3d)^2 + (x - d)^2 + (x + d)^2 + (x + 3d)^2 = 70 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 10 \\ 4x^2 + 20d^2 = 70 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 20d^2 = 70 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ d^2 = \frac{9}{4} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ d = \pm \frac{3}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $-2, 1, 4, 7$.

- ② Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x - 3d, x - d, x + d, x + 3d$ trong đó $2d$ là công sai.

Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x - 3d) + (x - d) + (x + d) + (x + 3d) = 22 \\ (x - 3d)^2 + (x - d)^2 + (x + d)^2 + (x + 3d)^2 = 66 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 22 \\ 4x^2 + 20d^2 = 66 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{2} \\ 4 \cdot \left(\frac{11}{2}\right)^2 + 20d^2 = 66 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{2} \\ d^2 = \frac{-11}{4} \text{ (loại)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy không tồn tại bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng thỏa mãn yêu cầu đề bài.

- ③ Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x - 3d, x - d, x + d, x + 3d$ trong đó $2d$ là công sai.

Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x - 3d) + (x - d) + (x + d) + (x + 3d) = 36 \\ (x - 3d)^2 + (x - d)^2 + (x + d)^2 + (x + 3d)^2 = 504 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 36 \\ 4x^2 + 20d^2 = 504 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ 4 \cdot 9^2 + 20d^2 = 504 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ d^2 = 9 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ d = \pm 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 0, 6, 12, 18.

- ④ Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x - 3d, x - d, x + d, x + 3d$ trong đó $2d$ là công sai.

Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x - 3d) + (x - d) + (x + d) + (x + 3d) = 20 \\ (x - 3d)(x - d)(x + d)(x + 3d) = 384 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ (x^2 - d^2)(x^2 - 9d^2) = 384 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ (25 - d^2)(25 - 9d^2) = 384 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ 9d^4 - 250d^2 + 241 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \begin{cases} d^2 = 1 \\ d^2 = \frac{241}{9} \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \begin{cases} d = \pm 1 \\ d = \pm \frac{\sqrt{241}}{3} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 2, 4, 6, 8 hoặc $5 - \sqrt{241}, \frac{15 - \sqrt{241}}{3}, \frac{15 + \sqrt{241}}{3}, 5 + \sqrt{241}$.

- ⑤ Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x - 3d, x - d, x + d, x + 3d$ trong đó $2d$ là công sai trong đó $2d \in \mathbb{Z}$.

Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x - 3d) + (x - d) + (x + d) + (x + 3d) = 20 \\ \frac{1}{x - 3d} + \frac{1}{x - d} + \frac{1}{x + d} + \frac{1}{x + 3d} = \frac{25}{24} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 20 \\ \frac{1}{5 - 3d} + \frac{1}{5 - d} + \frac{1}{5 + d} + \frac{1}{5 + 3d} = \frac{25}{24} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \frac{10}{25 - 9d^2} + \frac{10}{25 - d^2} = \frac{25}{24} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ 9d^4 - 250d^2 + 241 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \begin{cases} d^2 = 1 \\ d^2 = \frac{241}{9} \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \begin{cases} d = \pm 1 \text{ (thỏa mãn)} \\ d = \pm \frac{\sqrt{241}}{3} \text{ (loại vì } 2d \in \mathbb{Z}). \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy bốn số hạng nguyên liên tiếp của cấp số cộng là 2, 4, 6, 8.

- ⑥ Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng xếp theo thứ tự tăng dần là $x - 3d, x - d, x + d, x + 3d$ trong đó $2d > 0$ là công sai.
Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x - 3d) + (x - d) + (x + d) + (x + 3d) = 360^\circ \\ x + 3d = 5(x - 3d) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 360^\circ \\ 4x = 18d \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 90^\circ \\ 4 \cdot 90^\circ = 18d \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 90^\circ \\ d = 20^\circ. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy bốn góc của tứ giác lồi lần lượt là $30^\circ, 70^\circ, 110^\circ, 150^\circ$.

□

BÀI 7. Tìm năm số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 40 và tổng bình phương của chúng bằng 480.

ĐS: 0, 4, 8, 12, 16

Lời giải.

Gọi năm số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x - 2d, x - d, x, x + d, x + 2d$ trong đó d là công sai.
Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x - 2d) + (x - d) + x + (x + d) + (x + 2d) = 40 \\ (x - 2d)^2 + (x - d)^2 + x^2 + (x + d)^2 + (x + 2d)^2 = 480 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 40 \\ 5x^2 + 10d^2 = 480 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ 5 \cdot 8^2 + 10d^2 = 480 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ d^2 = 16 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ d = \pm 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy năm số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 0, 4, 8, 12, 16.

□

BÀI 8. Một cấp số cộng có 7 số hạng với công sai d dương và số hạng thứ tư bằng 11. Hãy tìm các số hạng còn lại của cấp số cộng đó, biết hiệu của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 6. **ĐS:** 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20

Lời giải.

Gọi số hạng đầu của cấp số cộng là u_1 , công sai d . Vì số hạng thứ tư của cấp số cộng bằng 11 nên ta có $u_4 = 11$.

Do d dương nên $u_5 > u_3$.

Vì hiệu của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 6 nên ta có $u_5 - u_3 = 6$.

Ta có

$$\begin{cases} u_4 = 11 \\ u_5 - u_3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 11 \\ (u_1 + 4d) - (u_1 + 2d) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3 \cdot 3 = 11 \\ d = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ d = 3. \end{cases}$$

Vậy các số hạng còn lại của cấp số cộng là $u_1 = 2, u_2 = 5, u_4 = 11, u_6 = 17, u_7 = 20$.

□

BÀI 9. Một cấp số cộng có 7 số hạng mà tổng của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 28, tổng số hạng thứ năm và số hạng cuối bằng 140. Tìm cấp số cộng đó. **ĐS:** $-70, -42, -14, 14, 42, 70, 98$

Lời giải.

Gọi số hạng đầu của cấp số cộng là u_1 , công sai d . Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} u_3 + u_5 = 28 \\ u_5 + u_7 = 140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 6d = 28 \\ 2u_1 + 10d = 140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -70 \\ d = 28. \end{cases}$$

Vậy cấp số cộng đó là $-70, -42, -14, 14, 42, 70, 98$. □

BÀI 10. Viết sáu số xen giữa hai số 3 và 24 để được cấp số cộng có tám số hạng. Tìm cấp số cộng đó.
ĐS: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24

Lời giải.

Gọi số hạng đầu của cấp số cộng là u_1 , công sai d . Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_8 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_1 + 7d = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 3. \end{cases}$$

Vậy cấp số cộng đó là 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24. □

BÀI 11. Giữa các số 7 và 35, hãy đặt thêm sáu số nữa để được một cấp số cộng. **ĐS:** 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35

Lời giải.

Gọi số hạng đầu của cấp số cộng là u_1 , công sai d . Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_8 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 7 \\ u_1 + 7d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 7 \\ d = 4. \end{cases}$$

Vậy cấp số cộng đó là 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35. □

BÀI 12. Giữa các số 4 và 67, hãy đặt thêm 20 số nữa để được một cấp số cộng. **ĐS:** $u_1 = 4, d = 3$

Lời giải.

Gọi số hạng đầu của cấp số cộng là u_1 , công sai d . Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{22} = 67 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \\ u_1 + 21d = 67 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \\ d = 3. \end{cases}$$

Vậy cấp số cộng đó là 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, 55, 58, 61, 64, 67. □

BÀI 13. Một người trồng 3003 cây theo một hình tam giác như sau: “Hàng thứ nhất có một cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây, ...”. Hỏi có bao nhiêu hàng cây được trồng như thế?

ĐS: 77 hàng

Lời giải.

Gọi u_n là số cây trồng ở hàng thứ n .

Theo đề bài ta có $u_1 = 1; u_2 = 2; u_3 = 3, \dots$

Để thấy u_n là cấp số cộng với số hạng đầu là $u_1 = 1$, công sai $d = 1$.

Giả sử với 3003 cây trồng được n_0 hàng. Khi đó ta có

$$\frac{[2u_1 + (n_0 - 1)d] n_0}{2} = 3003 \Leftrightarrow \frac{[2 \cdot 1 + (n_0 - 1)] n_0}{2} = 3003 \Leftrightarrow n_0^2 + n_0 - 6006 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n_0 = 77 \text{ (thỏa mãn)} \\ n_0 = -78 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Vậy có 77 hàng được trồng. □

BÀI 14. Một công viên hình tam giác được trồng cây xanh theo hàng có quy luật của một cấp số cộng như sau: hàng thứ nhất có 9 cây, hàng thứ 10 có 54 cây, hàng cuối cùng có 2014 cây. Hỏi công viên đó có tất cả bao nhiêu cây được trồng? **ĐS:** 406623 cây

Lời giải.

Gọi u_n là số cây trồng ở hàng thứ n ,

Theo đề bài ta có u_n là cấp số cộng với $u_1 = 9, u_{10} = 54, u_n = 2014$.

Ta có $u_{10} = 54 \Leftrightarrow u_1 + 9d = 54 \Leftrightarrow d = 5$.

Mặt khác

$$u_n = 2014 \Leftrightarrow u_1 + (n-1)d = 2014 \Leftrightarrow 9 + (n-1) \cdot 5 = 2014 \Leftrightarrow n = 402.$$

Khi đó tổng số cây của tất cả các hàng là

$$S_{402} = \frac{[2u_1 + (n-1)d]n}{2} = \frac{(2 \cdot 9 + 401 \cdot 5) \cdot 402}{2} = 406623.$$

Vậy công viên đó có tất cả 406623 cây được trồng. □

BÀI 15. Bạn A muốn mua món quà tặng mẹ và chị nhân ngày Quốc tế phụ nữ 8/3. Do đó A quyết định tiết kiệm từ ngày 1/1 của năm đó với ngày đầu là 500 đồng/ngày, ngày sau cao hơn ngày trước 500 đồng. Hỏi đúng đến ngày 8/3 bạn A có đủ tiền để mua quà cho mẹ và chị không? Giả sử rằng món quà A dự định mua khoảng 800 ngàn đồng và từ ngày 1/1 đến ngày 8/3 có số ngày ít nhất là 67 ngày.

Lời giải.

Gọi $u_1, u_2, \dots, u_n$ là số tiền tiết kiệm của ngày 1/1, 2/1, ..., 8/3.

Theo đề bài ta có (u_n) lập thành cấp số cộng với công sai $d = 500$.

Từ ngày 1/1 đến ngày 8/3, bạn A tiết kiệm được ít nhất là $\frac{[2 \cdot 500 + (67-1) \cdot 500] \cdot 67}{2} = 1139000 > 800000$.

Vậy bạn A đủ tiền để mua quà cho mẹ mừng 8/3. □

BÀI 16. Một tòa nhà hình tháp có 30 tầng và tổng cộng có 1890 phòng, càng lên cao thì số phòng càng giảm, biết rằng cứ 2 tầng liên tiếp thì hơn kém nhau 4 phòng. Quy ước rằng tầng trệt là tầng 1, tiếp theo lên là tầng số 2, 3, ... Hỏi tầng số 10 có bao nhiêu phòng? **ĐS:** 85 phòng

Lời giải.

Gọi u_n là số phòng của tầng thứ n . Theo đề bài ta có $u_1 - u_2 = u_2 - u_3 = u_3 - u_4 = \dots = u_{29} - u_{30} = 4$ nên (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = -4$.

Ta có

$$S_{30} = 1890 \Leftrightarrow \frac{(2u_1 - 29 \cdot 4) \cdot 30}{2} = 1890 \Leftrightarrow u_1 = 121$$

Số hạng tổng quát của cấp số cộng là $u_n = u_1 + (n-1)d = 121 - 4(n-1) = -4n + 125$.

Khi đó tầng 10 có số phòng là $u_{10} = -4 \cdot 10 + 125 = 85$. □

BÀI 17. Khi ký hợp đồng dài hạn (10 năm) với các công nhân được tuyển dụng. Công ty liên doanh X đề xuất hai phương án trả lương để người lao động chọn, cụ thể là

Phương án 1: Người lao động sẽ nhận 36 triệu đồng cho năm làm việc đầu tiên và kể từ năm thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm 3 triệu đồng mỗi năm.

Phương án 2: Người lao động sẽ được nhận 7 triệu đồng cho quý đầu tiên và kể từ quý làm việc thứ hai mức lương sẽ tăng thêm 500000 đồng mỗi quý.

Biết rằng mỗi năm có 4 quý. Nếu em là người lao động, em sẽ chọn phương án nào ? **ĐS:** Phương án 2

Lời giải.

Theo đề bài, số tiền công nhân nhận được ở mỗi kỳ theo từng phương án lập thành một cấp số cộng, cụ thể

Phương án 1:

Giá trị ban đầu $u_1 = 36$ (triệu), công sai $d = 3$ (triệu).

Do hợp đồng kéo dài 10 năm nên $n = 10$.

Suy ra $u_{10} = u_1 + (n - 1) \cdot d = 36 + (10 - 1) \cdot 3 = 63$ (triệu).

Vậy tổng số tiền lương nhận được của một công nhân khi hoàn thành hợp đồng (10 năm) là

$$S_{10} = \frac{10}{2}(u_1 + u_{10}) = 5 \cdot (36 + 63) = 495 \quad (\text{triệu}).$$

Phương án 2:

Giá trị ban đầu $u_1 = 7$ (triệu), công sai $d = 0,5$ (triệu).

Do hợp đồng kéo dài 10 năm, mà mỗi năm có 4 quý nên $n = 40$.

Suy ra $u_{40} = u_1 + (n - 1) \cdot d = 7 + (40 - 1) \cdot 0,5 = 26,5$ (triệu).

Vậy tổng số tiền lương nhận được của một công nhân khi hoàn thành hợp đồng (10 năm) là

$$S_{40} = \frac{40}{2}(u_1 + u_{40}) = 20 \cdot (7 + 26,5) = 670 \quad (\text{triệu}).$$

Vậy nếu là người lao động, em sẽ chọn phương án 2. □

BÀI 18. Tìm x để ba số a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng với:

① $a = 10 - 3x, b = 2x^2 + 3, c = 7 - 4x.$

ĐS: $x = -\frac{11}{4}$ hoặc $x = 1$

② $x = a^2 - bc, y = b^2 - ca, z = c^2 - ab.$

ĐS: $x = 2y - z$

Lời giải.

① Để ba số a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì

$$\begin{aligned} a + c &= 2b \\ \Leftrightarrow 10 - 3x + 7 - 4x &= 2(2x^2 + 3) \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 7x - 11 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{11}{4} \\ x = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $x = -\frac{11}{4}$ và $x = 1$ thỏa yêu cầu bài toán.

② Tương tự, để ba số a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì $a + c = 2b \Leftrightarrow a = 2b - c$.
Do đó

$$\begin{aligned} x &= a^2 - bc = (2b - c)^2 - bc = 4b^2 - 5bc + c^2 \\ y &= b^2 - ca = b^2 - c \cdot (2b - c) = b^2 - 2bc + c^2 \\ z &= c^2 - ab = c^2 - b \cdot (2b - c) = -2b^2 + bc + c^2 \end{aligned}$$

Nhận xét $2y - z = 4b^2 - 5bc + c^2 = x$.

Vậy $x = 2y - z$ với $y = b^2 - ca, z = c^2 - ab, a + c = 2b$. □

BÀI 19. Tìm các nghiệm của phương trình: $x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0$, biết rằng các nghiệm này phân biệt và chúng lập thành một cấp số cộng. **ĐS:** 3, 5, 7

Lời giải.

Gọi x_1, x_2, x_3 theo thứ tự là 3 nghiệm của phương trình đã cho.

Do x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên $x_1 + x_3 = 2x_2$ và $d > 0$ với d là công sai của cấp số cộng đã cho.

Mà theo định lý Vi-ét thì $x_1 + x_2 + x_3 = 15 \Leftrightarrow 3x_2 = 15 \Leftrightarrow x_2 = 5$.

Mặt khác

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 105 &\Leftrightarrow x_1 \cdot x_3 = 21 \Leftrightarrow (x_2 - d)(x_2 + d) = 21 \\ &\Leftrightarrow 25 - d^2 = 21 \\ &\Leftrightarrow d = 2. \end{aligned}$$

Vậy $x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 7$. □

BÀI 20. Giải các phương trình sau:

① $1 + 6 + 11 + 16 + 21 + \dots + x = 970$. **ĐS:** $x = 96$

② $2 + 7 + 12 + 17 + 22 + \dots + x = 245$. **ĐS:** $x = 47$

③ $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + \dots + (x + 28) = 155$. **ĐS:** $x = 1$

④ $(2x + 1) + (2x + 6) + (2x + 11) + \dots + (2x + 96) = 1010$. **ĐS:** $x = 1$

Lời giải.

① Ta có $1, 6, 11, \dots, x$ là một cấp số cộng với $u_1 = 1, u_n = x$ và $d = 5$.

Suy ra $u_n = u_1 + (n - 1) \cdot 5 = 5n - 5 \Leftrightarrow x = 5n - 4$.

Mà $1 + 6 + 11 + 16 + 21 + \dots + x = 970 \Leftrightarrow \frac{n}{2}(1 + x) = 970$ (1).

Thay $x = 5n - 4$ vào (1), ta được

$$5n^2 - 3n - 1940 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 20 & (\text{nhận}) \\ n = -\frac{97}{5} & (\text{loại}). \end{cases}$$

Với $n = 20 \Rightarrow x = 96$.

Vậy $x = 96$ là nghiệm của phương trình đã cho.

② Ta có $2, 7, 12, \dots, x$ là một cấp số cộng với $u_1 = 2, u_n = x$ và $d = 5$.

Suy ra $u_n = u_1 + (n - 1) \cdot 5 = 5n - 3 \Leftrightarrow x = 5n - 3$.

Mà $2 + 7 + 12 + 17 + 22 + \dots + x = 245 \Leftrightarrow \frac{n}{2}(2 + x) = 245$ (2).

Thay $x = 5n - 3$ vào (2), ta được

$$5n^2 - n - 490 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 10 & (\text{nhận}) \\ n = -\frac{49}{5} & (\text{loại}). \end{cases}$$

Với $n = 10 \Rightarrow x = 47$.

Vậy $x = 47$ là nghiệm của phương trình đã cho.

③ Ta có $(x + 1), (x + 4), (x + 7), \dots, (x + 28)$ là một cấp số cộng với $u_1 = x + 1, u_n = x + 28$ và $d = 3$.

Suy ra $u_n = u_1 + (n - 1) \cdot 3 \Leftrightarrow x + 28 = x + 1 + (n - 1) \cdot 3 \Leftrightarrow n = 10$.

Mà $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + \dots + (x + 28) = 155 \Leftrightarrow \frac{n}{2}(x + 1 + x + 28) = 155$ (3).

Thay $n = 10$ vào (3), ta được $x = 1$.

Vậy $x = 1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

- ④ Ta có $(2x + 1), (2x + 6), (2x + 11), \dots, (2x + 96)$ là một cấp số cộng với $u_1 = 2x + 1$, $u_n = 2x + 96$ và $d = 5$.
 Suy ra $u_n = u_1 + (n - 1) \cdot 5 \Leftrightarrow 2x + 96 = 2x + 1 + (n - 1) \cdot 5 \Leftrightarrow n = 20$.
 Mà $(2x + 1) + (2x + 6) + (2x + 11) + \dots + (2x + 96) = 1010 \Leftrightarrow \frac{n}{2}(2x + 1 + 2x + 96) = 1010$ (4).
 Thay $n = 20$ vào (4), ta được $x = 1$.
 Vậy $x = 1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

□

BÀI 21. Cho a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng. Chứng minh rằng

- ① $a^2 + 2bc = c^2 + 2ab$.
 ② $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$.
 ③ $2(a + b + c)^3 = 9[a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b)]$.
 ④ ba số: $a^2 - bc, b^2 - ac, c^2 - ab$ cũng là một cấp số cộng.
 ⑤ ba số: $b^2 + bc + c^2, a^2 + ac + c^2, a^2 + ab + b^2$ cũng là một cấp số cộng.
 ⑥ ba số: $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}, (a, b, c > 0)$ cũng là một cấp số cộng.

Lời giải.

- ① Vì a, b, c là ba số liên tiếp của một cấp số cộng nên $a + c = 2b \Rightarrow a = 2b - c$.
 Do đó

$$a^2 + 2bc = (2b - c)^2 + 2bc = 4b^2 - 2bc + c^2 = 2b(2b - c) + c^2 = 2ba + c^2 = c^2 + 2ab.$$

Vậy $a^2 + 2bc = c^2 + 2ab$ (đpcm).

- ② Vì a, b, c là ba số liên tiếp của một cấp số cộng nên $a + c = 2b \Rightarrow a = 2b - c$.
 Do đó

$$a^2 + 8bc = (2b - c)^2 + 8bc = 4b^2 + 4bc + c^2 = (2b + c)^2.$$

Vậy $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$ (đpcm).

- ③ Vì a, b, c là ba số liên tiếp của một cấp số cộng nên $a + c = 2b \Rightarrow a = 2b - c$.
 Do đó

$$\begin{aligned} \text{VT} &= 2(a + b + c)^3 = 2(3b)^3 = 54b^3 \\ \text{VP} &= 9[a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b)] \\ &= 9[(2b - c)^2(b + c) + b^2(2b - c + c) + c^2(2b - c + b)] \\ &= 9[(4b^2 - 4bc + c^2)(b + c) + b^2(2b) + c^2(3b - c)] \\ &= 9[4b^3 - 4b^2c + bc^2 + 4b^2c - 4bc^2 + c^3 + 2b^3 + 3bc^2 - c^3] \\ &= 9 \cdot (6b^3) = 54b^3 = \text{VT}. \end{aligned}$$

Vậy $2(a + b + c)^3 = 9[a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b)]$ (đpcm).

- ④ Vì ba số a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì $a + c = 2b \Rightarrow a = 2b - c$.
Do đó

$$\begin{aligned}a^2 - bc &= (2b - c)^2 - bc = 4b^2 - 5bc + c^2 \\b^2 - ca &= b^2 - c \cdot (2b - c) = b^2 - 2bc + c^2 \\c^2 - ab &= c^2 - b \cdot (2b - c) = -2b^2 + bc + c^2.\end{aligned}$$

Nhận xét

$$(a^2 - bc) + (c^2 - ab) = (4b^2 - 5bc + c^2) + (-2b^2 + bc + c^2) = 2b^2 - 4bc + 2c^2 = 2(b^2 - 2bc + c^2) = 2(b - c)^2$$

Vậy ba số: $a^2 - bc, b^2 - ac, c^2 - ab$ là một cấp số cộng.

- ⑤ Vì ba số a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì $a + c = 2b \Rightarrow a = 2b - c$.
Xét

$$\begin{aligned}2(a^2 + ac + c^2) - (a^2 + ab + b^2) &= a^2 + a(2c - b) + 2c^2 - b^2 \\&= (2b - c)^2 + (2b - c)(2c - b) + 2c^2 - b^2 \\&= b^2 + bc + c^2 \\&\Rightarrow (b^2 + bc + c^2) + (a^2 + ab + b^2) = 2(a^2 + ac + c^2).\end{aligned}$$

Vậy ba số: $b^2 + bc + c^2, a^2 + ac + c^2, a^2 + ab + b^2$ cũng là một cấp số cộng.

- ⑥ Vì ba số a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì $a + c = 2b \Rightarrow a - b = b - c = \frac{1}{2}(a - c)$.
Ta có

$$\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{c}}{b - c} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{a - b} = \frac{2}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}.$$

Vậy ba số: $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}, (a, b, c > 0)$ cũng là một cấp số cộng.

□

BÀI 22. Cho ba số a^2, b^2, c^2 theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng có công sai khác không.
Chứng minh rằng: $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ cũng lập thành cấp số cộng.

Lời giải.

Vì ba số a^2, b^2, c^2 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên $a^2 + c^2 = 2b^2$.

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{b+c} - \frac{1}{c+a} &= \frac{1}{c+a} - \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{a-b}{(b+c)(c+a)} = \frac{b-c}{(c+a)(a+b)} \\&\Leftrightarrow a^2 - b^2 = b^2 - c^2 \\&\Leftrightarrow a^2 + c^2 = 2b^2.\end{aligned}$$

Vậy ba số: $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ cũng lập thành cấp số cộng.

□

BÀI 23. Cho tam giác ABC có $\tan \frac{A}{2}, \tan \frac{B}{2}, \tan \frac{C}{2}$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Chứng minh $\cos A, \cos B, \cos C$ theo thứ tự cũng lập thành cấp số cộng.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{C}{2} &= 2 \tan \frac{B}{2} \Leftrightarrow \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{\sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = 2 \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} \\
 &\Leftrightarrow \frac{\sin \left(\frac{A+C}{2} \right)}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}} = 2 \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} \\
 &\Leftrightarrow \cos^2 \frac{B}{2} = 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} \\
 &\Leftrightarrow \frac{\cos B + 1}{2} = \sin \frac{B}{2} \left[\cos \left(\frac{A+C}{2} \right) + \cos \left(\frac{A-C}{2} \right) \right] \\
 &\Leftrightarrow \cos B + 1 = 2 \sin^2 \frac{B}{2} + 2 \cos \left(\frac{A+C}{2} \right) \cos \left(\frac{A-C}{2} \right) \\
 &\Leftrightarrow \cos B + 1 = 1 - \cos B + \cos A + \cos C \\
 &\Leftrightarrow 2 \cos B = \cos A + \cos C.
 \end{aligned}$$

Vậy $\cos A, \cos B, \cos C$ theo thứ tự cũng lập thành cấp số cộng. $\square$

BÀI 24. Cho tam giác ABC có $\cot \frac{A}{2}, \cot \frac{B}{2}, \cot \frac{C}{2}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh ba cạnh: a, b, c theo thứ tự cũng lập thành cấp số cộng.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{C}{2} &= 2 \cot \frac{B}{2} \Leftrightarrow \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}} = 2 \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}} \\
 &\Leftrightarrow \frac{\sin \left(\frac{A+C}{2} \right)}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}} = 2 \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}} \\
 &\Leftrightarrow \cos \frac{B}{2} \sin \frac{B}{2} = 2 \cos \frac{B}{2} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin B = -\cos \frac{B}{2} \left[\cos \left(\frac{A+C}{2} \right) - \cos \left(\frac{A-C}{2} \right) \right] \\
 &\Leftrightarrow \sin B = -\sin B + 2 \sin \left(\frac{A+C}{2} \right) \cos \left(\frac{A-C}{2} \right) \\
 &\Leftrightarrow 2 \sin B = \sin A + \sin C \\
 &\Leftrightarrow 2b = a + c.
 \end{aligned}$$

Vậy ba cạnh: a, b, c theo thứ tự cũng lập thành cấp số cộng. $\square$

BÀI 25. Tìm tham số m để phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng trong các trường hợp sau:

① $f(x) = x^4 - 2mx^2 + 2m - 1.$

ĐS: $m = 5$ hoặc $m = \frac{5}{9}$

② $f(x) = x^4 + 2(m+1)x^2 + 4.$

ĐS: $m = -\frac{13}{3}$

③ $f(x) = x^4 + (3m + 5)x^2 + (m + 1)^2$.

ĐS: không có m thỏa

④ $f(x) = x^4 - 10mx^2 + 9m$.

ĐS: $m = 1$

Lời giải.

① Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$), phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 2mt + 2m - 1 = 0 \quad (1).$$

Ta phải tìm m sao cho (1) có hai nghiệm t_1, t_2 phân biệt dương phân biệt, tức là $0 < t_1 < t_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 8m + 4 > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > 0 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Đặt $x_1 = -\sqrt{t_2}, x_2 = -\sqrt{t_1}, x_3 = \sqrt{t_1}, x_4 = \sqrt{t_2}$, ta có $\Rightarrow x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.
Để bốn nghiệm lập thành cấp số cộng thì

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2x_2 \\ x_2 + x_4 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = -2\sqrt{t_1} \\ \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = 2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = -2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow 9t_1 = t_2.$$

Vậy ta có

$$\begin{cases} 9t_1 = t_2 \\ t_1 + t_2 = 2m \\ t_1 t_2 = 2m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9t_1 = t_2 \\ 10t_1 = 2m \\ 9t_1^2 = 2m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \text{ (nhận)} \\ m = \frac{5}{9} \text{ (nhận)}. \end{cases}$$

Vậy với $m \in \left\{\frac{5}{9}; 5\right\}$ thì phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

② Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$), phương trình đã cho trở thành

$$t^2 + 2(m + 1)t + 4 = 0 \quad (1)$$

Ta phải tìm m sao cho (1) có hai nghiệm t_1, t_2 phân biệt dương phân biệt, tức là $0 < t_1 < t_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m + 1)^2 - 4 > 0 \\ -2(m + 1) > 0 \\ 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m < -3 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -3.$$

Đặt $x_1 = -\sqrt{t_2}, x_2 = -\sqrt{t_1}, x_3 = \sqrt{t_1}, x_4 = \sqrt{t_2}$, ta có $\Rightarrow x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.
Để bốn nghiệm lập thành cấp số cộng thì

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2x_2 \\ x_2 + x_4 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = -2\sqrt{t_1} \\ \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = 2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = -2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow 9t_1 = t_2.$$

Vậy ta có

$$\begin{cases} 9t_1 = t_2 \\ t_1 + t_2 = -2(m + 1) \\ t_1 t_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9t_1 = t_2 \\ 10t_1 = -2(m + 1) \\ 9t_1^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{2}{3} \\ 10t_1 = -2(m + 1) \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{13}{3} \text{ (nhận)}.$$

Vậy với $m = -\frac{13}{3}$ thì phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

③ Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$), phương trình đã cho trở thành

$$t^2 + (3m + 5)t + (m + 1)^2 = 0 \quad (1)$$

Ta phải tìm m sao cho (1) có hai nghiệm t_1, t_2 phân biệt dương phân biệt, tức là $0 < t_1 < t_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m + 5)^2 - 4(m + 1)^2 > 0 \\ -(3m + 5) > 0 \\ (m + 1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > -\frac{7}{5} \\ m < -\frac{5}{3} \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -3.$$

Đặt $x_1 = -\sqrt{t_2}, x_2 = -\sqrt{t_1}, x_3 = \sqrt{t_1}, x_4 = \sqrt{t_2}$, ta có $\Rightarrow x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.

Để bốn nghiệm lập thành cấp số cộng thì

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2x_2 \\ x_2 + x_4 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = -2\sqrt{t_1} \\ \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = 2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = -2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow 9t_1 = t_2.$$

Vậy ta có

$$\begin{cases} 9t_1 = t_2 \\ t_1 + t_2 = -(3m + 5) \\ t_1 t_2 = (m + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9t_1 = t_2 \\ 10t_1 = -(3m + 5) \\ 9t_1^2 = (m + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -\frac{3m + 5}{10} \\ 9t_1^2 = (m + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \text{ (loại)} \\ m = -\frac{25}{19} \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Vậy không có giá trị m để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

④ Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$), phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 10mt + 9m = 0 \quad (1)$$

Ta phải tìm m sao cho (1) có hai nghiệm t_1, t_2 phân biệt dương phân biệt, tức là $0 < t_1 < t_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25m^2 - 9m > 0 \\ 10m > 0 \\ 9m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{9}{25} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{9}{25}.$$

Đặt $x_1 = -\sqrt{t_2}, x_2 = -\sqrt{t_1}, x_3 = \sqrt{t_1}, x_4 = \sqrt{t_2}$, ta có $\Rightarrow x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.

Để bốn nghiệm lập thành cấp số cộng thì

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2x_2 \\ x_2 + x_4 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = -2\sqrt{t_1} \\ \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = 2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = -2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow 9t_1 = t_2.$$

Vậy ta có

$$\begin{cases} 9t_1 = t_2 \\ t_1 + t_2 = 10m \\ t_1 t_2 = 9m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9t_1 = t_2 \\ 10t_1 = 10m \\ 9t_1^2 = 9m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = m \\ 9t_1^2 = 9m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (loại)} \\ m = 1 \text{ (nhận)}. \end{cases}$$

Vậy để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng thì $m = 1$.

□

BÀI 26. Tìm tham số m để phương trình: $x^3 - (3m + 1)x^2 + 2mx = 0$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng ? **ĐS:** $m = -\frac{1}{3}$

Lời giải.

$$\text{Ta có } x^3 - (3m + 1)x^2 + 2mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - (3m + 1)x + 2m = 0 \end{cases} \quad (1).$$

Để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt khác 0, tức là

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - 2m + 1 > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m^2 + (m - 1)^2 > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0.$$

$$\text{Giả sử } x_1, x_2 \text{ là hai nghiệm của phương trình (1) và } x_3 = 0, \text{ ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 3m + 1 \\ x_1 x_2 = 2m \end{cases} \quad (I).$$

Do vai trò của x_1, x_2 như nhau, ta chỉ cần xét hai trường hợp sau

TH1: x_1, x_2 cùng dương hoặc cùng âm, khi đó $x_1 + x_3 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = 2x_2$. Kết hợp với (I), ta có

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_1 + x_2 = 3m + 1 \\ x_1 x_2 = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_2 = \frac{1}{3}(3m + 1) \\ x_1 x_2 = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_2 = \frac{1}{3}(3m + 1) \\ (3m + 1)^2 = 9m \end{cases} \quad (*).$$

$(*) \Leftrightarrow 9m^2 - 3m + 1 = 0 \Rightarrow$ vô nghiệm, do đó không có m thỏa.

TH2: x_1 và x_2 trái dấu, x_3 nằm giữa, khi đó $x_1 + x_2 = 2x_3 \Rightarrow x_1 = -x_2$. Kết hợp với (I) ta có

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_1 + x_2 = 3m + 1 \\ x_1 x_2 = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ 0 = 3m + 1 \\ -x_1^2 = 2m \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3} \text{ (nhận)}.$$

Với $m = -\frac{1}{3}$ phương trình đã cho có ba nghiệm lập thành một cấp số cộng. □

BÀI 4. CẤP SỐ NHÂN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa 1 (Cấp số nhân). Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số q không đổi, nghĩa là

$$(u_n) \text{ là cấp số nhân } \Leftrightarrow n \geq 2, u_n = u_{n-1} \cdot q.$$

Số q được gọi là công bội của cấp số nhân và $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}, n \geq 1$.

— Khi $q = 1$ thì cấp số nhân là một dãy số không đổi (tất cả các số hạng đều bằng nhau).

!

— Khi $q = 0$ thì cấp số nhân có dạng $u_1, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots$

— Khi $u_1 = 0$ thì với mọi q , cấp số nhân có dạng $0, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots$

Định lí 1 (Số hạng tổng quát của cấp số nhân). Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$, $n \geq 2$.

! Nếu (u_n) là cấp số nhân với các số hạng khác 0 thì

$$u_m = u_k \cdot q^{m-k}, k < m, q^{m-k} = \frac{u_m}{u_k}, k < m$$

Định lí 2 (Tính chất các số hạng của cấp số nhân). Trong cấp số nhân (u_n) , bình phương mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là tích hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là $u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}$, $k \geq 2$.

! Nếu a, b, c là ba số khác 0 thì “ a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân khi và chỉ khi $b^2 = ac$ ”.

! Nếu (u_n) là cấp số nhân thì $u_m^2 = u_{m-k} \cdot u_{m+k}$, $k < m$.

Định lí 3 (Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân). Cho cấp số nhân (u_n) với công bội q . Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

— Nếu $q = 1$ thì $S_n = nu_1$.

— Nếu $q \neq 1$ thì $S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{u_1 - u_{n+1}}{1 - q}$.

B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

1 Ví dụ

VÍ DỤ 1. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số nhân? Xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân.

① Dãy số (u_n) với $u_n = (-3)^{2n+1}$.

ĐS: Là cấp số nhân có $u_1 = -27, q = 9$

② Dãy số (u_n) với $u_n = n \cdot 5^{2n-1}$.

ĐS: Không là cấp số nhân

Lời giải

① Ta có $u_n \neq 0$ và $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-3)^{2(n+1)+1}}{(-3)^{2n+1}} = 9, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó (u_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = -27$, công bội $q = 9$.

② Dãy số (u_n) có $u_1 = 5, u_2 = 250, u_3 = 9375$ và $u_2^2 \neq u_1 \cdot u_3$ nên (u_n) không là cấp số nhân. □

VÍ DỤ 2. Tìm các số dương a và b sao cho $a, a + 2b, 2a + b$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và $(b + 1)^2, ab + 5, (a + 1)^2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. **ĐS:** $a = 3, b = 1$

Lời giải

— Ta có $a, a + 2b, 2a + b$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow a + 2b = \frac{a + 2a + b}{2} \Leftrightarrow a = 3b$ (1).

— Ta có $(b + 1)^2, ab + 5, (a + 1)^2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow (ab + 5)^2 = (b + 1)^2 \cdot (a + 1)^2$ (2).

— Từ (1), (2) suy ra

$$(3b^2 + 5)^2 = [(b + 1)(3b + 1)]^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3b^2 + 5 = 3b^2 + 4b + 1 \\ 3b^2 + 5 = -(3b^2 + 4b + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ 6b^2 + 4b + 6 = 0. \text{ (Vô nghiệm)} \end{cases}$$

— Vậy $b = 1, a = 3$ thỏa mãn.

□

VÍ DỤ 3. Một cấp số nhân có tám số hạng, số hạng đầu là 4374, số hạng cuối là 2. Tìm cấp số nhân đó.
ĐS: 4374; 1458; 486; 162; 54; 18; 6; 2

Lời giải

Giả sử cấp số nhân có số hạng đầu u_1 , công bội q . Ta có

$$\begin{cases} u_1 = 4374 \\ u_8 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4374 \\ u_1 \cdot q^7 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4374 \\ q^7 = \frac{1}{2187} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4374 \\ q = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Cấp số nhân cần tìm là 4374; 1458; 486; 162; 54; 18; 6; 2.

□

VÍ DỤ 4. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân (u_n) biết

$$\textcircled{1} \begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144. \end{cases} \quad \text{ĐS: } u_1 = 12, q = 2$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 351. \end{cases} \quad \text{ĐS: } u_1 = 1, q = 3$$

Lời giải

① Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_4 \cdot q - u_2 \cdot q = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 \cdot q^3 - u_1 \cdot q = 72 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = \frac{72}{q^3 - q} = \frac{72}{6} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 12 \\ q = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

② Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 351 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_1 \cdot q^3 + u_2 \cdot q^3 + u_3 \cdot q^3 = 351 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ q^3 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ q = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{13}{1 + q + q^2} = \frac{13}{13} = 1 \\ q = 3. \end{cases} \end{aligned}$$



VÍ DỤ 5. Tính tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân, biết rằng số hạng đầu bằng 18, số hạng thứ hai bằng 54 và số hạng cuối bằng 39366. **ĐS:** $S = 59040$

Lời giải

— Giả sử cấp số nhân có n số hạng, số hạng đầu u_1 , công bội q .

— Ta có $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{54}{18} = 3$.

— Ta có $u_n = 39366 \Leftrightarrow u_1 \cdot q^{n-1} = 39366 \Leftrightarrow 3^{n-1} = 2187 = 3^7 \Leftrightarrow n = 8$.

— Tổng các số hạng là $S_8 = u_1 \cdot \frac{1-q^8}{1-q} = 18 \cdot \frac{1-3^8}{1-3} = 59040$.

Chú ý: Có thể dùng công thức tính tổng $S = \frac{u_d - u_c}{1-q} + u_c = \frac{18 - 39366}{1-3} + 39366 = 59040$. □

BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân trong các trường hợp sau

① $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102. \end{cases}$ **ĐS:** $u_1 = 3, q = 2$

② $\begin{cases} u_1 + u_6 = 165 \\ u_3 + u_4 = 60. \end{cases}$ **ĐS:** $q = 2, u_1 = 5$ hoặc $q = \frac{1}{2}, u_1 = 160$

③ $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40. \end{cases}$ **ĐS:** $u_1 = \frac{1215}{19}, q = \frac{2}{3}$

④ $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 64. \end{cases}$ **ĐS:** $q = 2, u_1 = 2$ hoặc $q = \frac{1}{2}, u_1 = 8$

⑤ $\begin{cases} u_1 + u_3 = 3 \\ u_1^2 + u_3^2 = 5. \end{cases}$ **ĐS:** $u_1 = 1, \begin{cases} q = \sqrt{2} \\ q = -\sqrt{2} \end{cases}$ hoặc $u_1 = 2, \begin{cases} q = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ q = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

⑥ $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 7 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 21. \end{cases}$ **ĐS:** $q = 2, u_1 = 1$ hoặc $q = \frac{1}{2}, u_1 = 4$

Lời giải.

① Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_1 \cdot q + u_5 \cdot q = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 + u_1 \cdot q^4 = 51 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = \frac{51}{q^4 + 1} = \frac{51}{17} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ q = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

② Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 + u_6 = 165 \\ u_3 + u_4 = 60 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 \cdot q^5 = 165 \\ u_1 \cdot q^2(1 + q) = 60 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q^5) = 165 \\ \frac{q^4 - q^3 + q^2 - q + 1}{q^2} = \frac{11}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q^5) = 165 \\ 4q^4 - 4q^3 - 7q^2 - 4q + 4 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Xét phương trình } 4q^4 - 4q^3 - 7q^2 - 4q + 4 = 0 \Leftrightarrow 4\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 4\left(q + \frac{1}{q}\right) - 7 = 0.$$

$$\text{Đặt } q + \frac{1}{q} = t, \text{ với } |t| \geq 2, \text{ ta có } 4t^2 - 4t - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{5}{2} \\ t = -\frac{3}{2}. (\text{loại}) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } t = \frac{5}{2} \Leftrightarrow q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ q = 2. \end{cases}$$

$$\text{— Với } q = 2 \text{ thì } u_1 = \frac{165}{q^5 + 1} = 5.$$

$$\text{— Với } q = \frac{1}{2} \text{ thì } u_1 = \frac{165}{q^5 + 1} = 160.$$

③ Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_1 \cdot q^3 + u_2 \cdot q^3 + u_3 \cdot q^3 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ q^3 = \frac{8}{27} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ q = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{135}{1 + q + q^2} = \frac{1215}{19} \\ q = \frac{2}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

④ Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 64 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_2 \cdot (u_1 \cdot u_3) = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_2^3 = 64 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u_2}{q} + u_2 + u_2 \cdot q = 14 \\ u_2 = 4 \end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{1}{q} + 1 + q = \frac{7}{2} \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ q = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{— Với } q = 2 \text{ thì } u_1 = 2.$$

$$\text{— Với } q = \frac{1}{2} \text{ thì } u_1 = 8.$$

⑤ Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 + u_3 = 3 \\ u_1^2 + u_3^2 = 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_3 = 3 - u_1 \\ u_1^2 + (3 - u_1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_3 = 3 - u_1 \\ 2u_1^2 - 6u_1 + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_1 = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{— Với } u_1 = 1 \text{ thì } q^2 + 1 = 3, \text{ do đó } \begin{cases} q = \sqrt{2} \\ q = -\sqrt{2}. \end{cases} \\ & \text{— Với } u_1 = 2 \text{ thì } q^2 + 1 = \frac{3}{2}, \text{ do đó } \begin{cases} q = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ q = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\textcircled{6} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 7 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_3 = 7 - u_2 \\ (u_1 + u_3)^2 - 2u_1u_3 = 21 - u_2^2. \end{cases}$$

Suy ra $(7 - u_2)^2 - 2u_2^2 = 21 - u_2^2 \Leftrightarrow u_2 = 2$.
 Khi đó

$$u_1 + u_2 + u_3 = 7 \Leftrightarrow \frac{u_2}{q} + u_2 + u_2 \cdot q = 7 \Leftrightarrow \frac{1}{q} + 1 + q = \frac{7}{2} \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ q = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

— Với $q = 2$ thì $u_1 = 1$.

— Với $q = \frac{1}{2}$ thì $u_1 = 4$.

□

BÀI 2. Tìm a, b biết rằng $1, a, b$ là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng và $1, a^2, b^2$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân.

ĐS: $(1; 1); (-1 + \sqrt{2}; -3 + 2\sqrt{2}); (-1 - \sqrt{2}; -3 - 2\sqrt{2})$

Lời giải.

Do $1, a, b$ là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng nên ta có phương trình

$$1 + b = 2a. \quad (1)$$

Do $1, a^2, b^2$ là ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân nên ta có phương trình

$$b^2 = a^4. \quad (2)$$

Từ (1) $\Rightarrow b = 2a - 1$ (3). Thay vào (2), ta được

$$a^4 = (2a - 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a + 1 = 0 \\ a^2 + 2a - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \pm \sqrt{2}. \end{cases}$$

Thay a vào (3), ta có

— Với $a = 1 \Rightarrow b = 1$.

— Với $a = -1 + \sqrt{2} \Rightarrow b = -3 + 2\sqrt{2}$.

— Với $a = -1 - \sqrt{2} \Rightarrow b = -3 - 2\sqrt{2}$.

Vậy các cặp số $(a; b)$ thỏa mãn là $(1; 1); (-1 + \sqrt{2}; -3 + 2\sqrt{2}); (-1 - \sqrt{2}; -3 - 2\sqrt{2})$.

□

BÀI 3. Giữa các số 160 và 5 hãy chèn 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân. Tìm 4 số đó.

ĐS:

$(80; 40; 20; 10)$

Lời giải.

Theo bài ra, ta có cấp số nhân có $u_1 = 160, u_6 = 5$. Do $u_6 = u_1 \cdot q^5 \Rightarrow q^5 = \frac{u_6}{u_1} = \frac{5}{160} = \frac{1}{32} =$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 \Rightarrow q = \frac{1}{2}.$$

Vậy 4 số cần tìm là $u_2 = u_1 \cdot q = 80, u_3 = u_2 \cdot q = 40, u_4 = u_3 \cdot q = 20, u_5 = u_4 \cdot q = 10$.

□

BÀI 4. Cho 3 số dương có tổng là 65 lập thành một cấp số nhân tăng, nếu bớt một đơn vị ở số hạng thứ nhất và 19 đơn vị ở số hạng thứ ba ta được 1 cấp số cộng. Tìm 3 số đó. **ĐS:** (5; 15; 45)

Lời giải.

Gọi ba số cần tìm là $0 < x < y < z$. Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 65 \\ xz = y^2 \\ (x - 1) + (z - 19) = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 65 & (1) \\ xz = y^2 & (2) \\ x + z - 20 = 2y. & (3) \end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow x + z = 65 - y$, thay vào (3) được

$$65 - y - 20 = 2y \Leftrightarrow 3y = 45 \Leftrightarrow y = 15.$$

Từ (2) và (3) suy ra $\begin{cases} x + z = 50 \\ xz = 225 \end{cases} \Rightarrow x, z$ là nghiệm của phương trình $t^2 - 50t + 225 = 0 \Rightarrow t = 5$, $t = 45$.

Suy ra $x = 5, z = 45$. Vậy 3 số cần tìm là (5; 15; 45). $\square$

BÀI 5. Tính tổng:

$$\textcircled{1} S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n.$$

$$\text{ĐS: } S_n = 2^{n+1} - 2$$

$$\textcircled{2} S_n = \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2.$$

$$\text{ĐS: } S_n = 2n + \frac{4}{3}(4^n - 1) + \frac{4^n - 1}{3 \cdot 4^n}$$

Lời giải.

$\textcircled{1}$ Tổng $S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$ gồm n số hạng lập thành cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 2$, công bội $q = 2$.

$$\text{Do đó } S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = 2 \cdot \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^{n+1} - 2.$$

$\textcircled{2}$ Ta có

$$\begin{aligned} S_n &= \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2 \\ &= \left(4 + 2 + \frac{1}{4}\right) + \left(4^2 + 2 + \frac{1}{4^2}\right) + \dots + \left(4^n + 2 + \frac{1}{4^n}\right) \\ &= 2n + (4 + 4^2 + \dots + 4^n) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n}\right) \\ &= 2n + 4 \cdot \frac{1 - 4^n}{1 - 4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= 2n + \frac{4}{3}(4^n - 1) + \frac{4^n - 1}{3 \cdot 4^n}. \end{aligned}$$

$\square$

BÀI 6. Tìm m để phương trình $x^3 + (5 - m)x^2 + (6 - 5m)x - 6m = 0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân.

$$\text{ĐS: } m = \pm\sqrt{6}, m = -\frac{4}{3}, m = -\frac{9}{2}$$

Lời giải.

Ta có

$$x^3 + (5 - m)x^2 + (6 - 5m)x - 6m = 0 \Leftrightarrow (x - m)(x^2 + 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = -2 \\ x = -3. \end{cases}$$

$$\text{Để 3 nghiệm của phương trình lập thành cấp số nhân} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2) \cdot (-3) = m^2 \\ -3m = (-2)^2 \\ -2m = (-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm\sqrt{6} \\ m = -\frac{4}{3} \\ m = -\frac{9}{2}. \end{cases} \quad \square$$

BÀI 7. Đầu mùa thu hoạch xoài, một bác nông dân đã bán cho người thứ nhất nửa số xoài thu hoạch được và nửa quả, bán cho người thứ hai nửa số còn lại và nửa quả, bán cho người thứ ba nửa số còn lại và nửa quả, Đến người thứ bảy bác cũng bán nửa số xoài còn lại và nửa quả thì không còn quả nào nữa. Hỏi bác nông dân đã thu hoạch được bao nhiêu xoài ở đầu mùa? **ĐS:** 127 quả

Lời giải.

Gọi x là số xoài bác nông dân đã thu hoạch được, (điều kiện $0 < x \in \mathbb{Z}$).

$$\text{— Số xoài bán cho người thứ nhất là } \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2} \Rightarrow \text{số xoài còn lại là } x - \frac{x+1}{2} = \frac{x-1}{2} = \frac{x - (2^1 - 1)}{2}.$$

$$\text{— Số xoài bán cho người thứ hai là } \frac{x-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{4} \Rightarrow \text{số xoài còn lại là } \frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-3}{4} = \frac{x - (2^2 - 1)}{2^2}.$$

$$\text{— Số xoài bán cho người thứ ba là } \frac{x-3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{8} \Rightarrow \text{số xoài còn lại là } \frac{x-3}{4} - \frac{x+1}{8} = \frac{x-7}{8} = \frac{x - (2^3 - 1)}{2^3}.$$

$$\text{— Số xoài bán cho người thứ tư là } \frac{x-7}{16} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{16} \Rightarrow \text{số xoài còn lại là } \frac{x-7}{8} - \frac{x+1}{16} = \frac{x-15}{16} = \frac{x - (2^4 - 1)}{2^4}.$$

$$\text{— Lập luận tương tự. Số xoài bán cho người thứ 7 là } \frac{x+1}{2^7}. \text{ Số xoài còn lại là } \frac{x - (2^7 - 1)}{2^7} = \frac{x - 127}{2^7}.$$

Sau khi bán cho người thứ 7, bác nông dân không còn quả xoài nào nữa nên ta có $x = 127$ (quả).

$\square$

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 8. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân trong các trường hợp sau

$$\textcircled{1} \begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240. \end{cases}$$

$$\text{ĐS: } q = \frac{1}{3}, u_1 = 729 \text{ hoặc } q = -3, u_1 = 1$$

- ② $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325. \end{cases}$ **ĐS:** $q = 2, u_1 = 5$ hoặc $q = -2, u_1 = 5$
- ③ $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = -42 \\ u_3 + u_5 = 20. \end{cases}$ **ĐS:** $q = -2, u_1 = 1$ hoặc $q = -\frac{1}{2}, u_1 = 64$
- ④ $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85. \end{cases}$ **ĐS:** $q = 2, u_1 = 1$ hoặc $q = \frac{1}{2}, u_1 = 8$

Lời giải.

① Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_2 \cdot q + u_2 \cdot q^3 = 90 \\ u_2 - u_2 \cdot q^4 = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 \cdot q (1 + q^2) = 90 \\ u_2 \cdot (1 - q^4) = 240 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = \frac{240}{1 - q^4} \\ \frac{1 - q^2}{q} = \frac{240}{90} = \frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{240}{q(1 - q^4)} \\ 3q^2 + 8q - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{3}, u_1 = 729 \\ q = -3, u_1 = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

② Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1 \cdot q^2 + u_1 \cdot q^4 = 65 \\ u_1 + u_1 \cdot q^6 = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (1 - q^2 + q^4) = 65 \\ u_1 (1 + q^6) = 325 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} q^2 + 1 = 5 \\ u_1 = \frac{325}{1 + q^6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^2 = 4 \\ u_1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 5 \\ q = -2 \\ u_1 = 5. \end{cases} \end{aligned}$$

③ Ta có

$$\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = -42 \\ u_3 + u_5 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 + u_2 \cdot q^2 + u_2 \cdot q^4 = -42 \\ u_2 \cdot q + u_2 \cdot q^3 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 (1 + q^2 + q^4) = -42 \\ u_2 (q + q^3) = 20. \end{cases}$$

Suy ra

$$\frac{1 + q^2 + q^4}{q + q^3} = -\frac{21}{10} \Leftrightarrow 10q^4 + 21q^3 + 10q^2 + 21q + 10 = 0 \Leftrightarrow 10 \left(q^2 + \frac{1}{q^2} \right) + 21 \left(q + \frac{1}{q} \right) + 10 = 0.$$

$$\text{Đặt } q + \frac{1}{q} = t, \text{ với } |t| \geq 2, \text{ ta có } 10t^2 + 21t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{5}{2} \\ t = \frac{2}{5}. (\text{loại}) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } t = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow q + \frac{1}{q} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2 + 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = -\frac{1}{2} \\ q = -2. \end{cases}$$

— Với $q = -2$ thì $u_2 = -2$, do đó $u_1 = 1$.

— Với $q = -\frac{1}{2}$ thì $u_2 = -32$, do đó $u_1 = 64$.

④ Ta có

$$\begin{aligned}
\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 + u_1 \cdot q^3 = 15 \\ u_1^2 + u_1^2 \cdot q^2 + u_1^2 \cdot q^4 + u_1^2 \cdot q^6 = 85 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (1 + q + q^2 + q^3) = 15 \\ u_1^2 (1 + q^2 + q^4 + q^6) = 85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (1 + q) (1 + q^2) = 15 \\ u_1^2 (1 + q^2) (1 + q^4) = 85 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} u_1^2 (1 + q)^2 (1 + q^2)^2 = 225 \\ u_1^2 (1 + q^2) (1 + q^4) = 85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2 (1 + q)^2 (1 + q^2)^2 = 225 \\ \frac{1 + q^4}{(1 + q)^2 (1 + q^2)} = \frac{85}{225} = \frac{17}{45} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1 + q^4}{(1 + q)^2 (1 + q^2)} = \frac{17}{45} &\Leftrightarrow 45 + 45q^4 = (17 + 17q^2) (1 + 2q + q^2) \\
&\Leftrightarrow 45 + 45q^4 = 17 + 34q + 17q^2 + 17q^2 + 34q^3 + 17q^4 \\
&\Leftrightarrow 28q^4 - 34q^3 - 34q^2 - 34q + 28 = 0 \\
&\Leftrightarrow 28 \left(q^2 + \frac{1}{q^2} \right) - 34 \left(q + \frac{1}{q} \right) - 34 = 0.
\end{aligned}$$

$$\text{Đặt } q + \frac{1}{q} = t, \text{ với } |t| \geq 2, \text{ ta có } 28t^2 - 34t - 90 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{5}{2} \\ t = -\frac{9}{7} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } t = \frac{5}{2} \Leftrightarrow q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ q = 2. \end{cases}$$

$$\text{— Với } q = 2 \text{ thì } u_1 = \frac{15}{(1 + q)(1 + q^2)} = 1.$$

$$\text{— Với } q = \frac{1}{2} \text{ thì } u_1 = \frac{15}{(1 + q)(1 + q^2)} = 8.$$

□

BÀI 9. Cho ba số tạo thành một cấp số cộng có tổng 21. Nếu thêm 2, 3, 9 lần lượt vào số thứ nhất, số thứ hai, số thứ ba tạo thành một cấp số nhân. Tìm 3 số đó. **ĐS:** (3; 7; 11) và (18; 7; -4)

Lời giải.

Gọi 3 số cần tìm là x, y, z . Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 21 \\ x + z = 2y \\ (x + 2)(z + 9) = (y + 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \\ x + z = 14 \\ (x + 2)(z + 9) = 100. \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Từ (1) $\Rightarrow z = 14 - x$ (3). Thay vào (2) ta được phương trình

$$(x + 2)(23 - x) = 100 \Leftrightarrow x^2 - 21x + 54 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 18. \end{cases}$$

$$\text{— Với } x = 3 \Rightarrow z = 11.$$

$$\text{— Với } x = 18 \Rightarrow z = -4.$$

Vậy bộ ba số cần tìm là $(3; 7; 11)$ và $(18; 7; -4)$. $\square$

BÀI 10. Giữa các số 243 và 1 hãy đặt thêm 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân. **ĐS:** $(81; 27; 9; 3)$

Lời giải.

Theo bài ra, ta có cấp số nhân có $u_1 = 243, u_6 = 1$. Do $u_6 = u_1 \cdot q^5 \Rightarrow q^5 = \frac{u_6}{u_1} = \frac{1}{243} = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \Rightarrow q = \frac{1}{3}$.

Vậy 4 số cần tìm là $u_2 = u_1 \cdot q = 81, u_3 = u_2 \cdot q = 27, u_4 = u_3 \cdot q = 9, u_5 = u_4 \cdot q = 3$. $\square$

BÀI 11. Ba số khác nhau có tổng bằng 114 có thể coi là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân hoặc coi là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ 25 của 1 cấp số cộng. Tìm các số đó. **ĐS:** $(2; 14; 98)$

Lời giải.

Gọi 3 số cần tìm là x, y, z . Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 114 & (1) \\ xz = y^2. & (2) \end{cases}$$

Lại có cấp số cộng có $u_1 = x, u_4 = y, u_{25} = z$. Gọi d là công sai của cấp số cộng ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u_4 = u_1 + 3d \\ u_{25} = u_1 + 24d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3d & (3) \\ z = x + 24d. & (4) \end{cases}$$

Thay (3), (4) vào (1) và (2) ta có

$$\begin{cases} x + x + 3d + x + 24d = 114 \\ x(x + 24d) = (x + 3d)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 9d = 38 & (5) \\ d(2x - d) = 0. & (6) \end{cases}$$

Từ (6) $\Rightarrow d = 0$ hoặc $d = 2x$. Thay vào (5)

— Với $d = 0 \Rightarrow x = 38 \Rightarrow y = z = 38$, loại do điều kiện ba số khác nhau.

— Với $d = 2x \Rightarrow 19x = 38 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow d = 4 \Rightarrow y = 14, z = 98$.

Vậy các số cần tìm là $(2; 14; 98)$. $\square$

BÀI 12. Chứng minh rằng với mọi m thì phương trình $x^3 - (m^2 + 3)x^2 + (m^2 + 3)x - 1 = 0$ luôn có ba nghiệm và ba nghiệm này lập thành cấp số nhân.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & x^3 - (m^2 + 3)x^2 + (m^2 + 3)x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x^3 - 1) - (m^2 + 3)(x^2 - x) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x - 1) [x^2 - (m^2 + 2)x + 1] = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - (m^2 + 2)x + 1 = 0. \end{cases} \quad (*) \end{aligned}$$

Phương trình (*) có $\Delta = (m^2 + 2)^2 - 4 \cdot 1 = m^2(m^2 + 4) \geq 0 \forall m$. Vậy phương trình (*) luôn có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1 \cdot x_2 = 1$. Suy ra phương trình đã cho luôn có 3 nghiệm thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 = 1$ và $x_3 = 1 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = x_3^2$.

Vậy phương trình đã cho luôn có 3 nghiệm lập thành cấp số nhân. $\square$