

§2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

1. Những khái niệm cơ bản về cực trị:

Điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị: Xét đồ thị hàm số trong hình vẽ bên, ta có điểm A được gọi là **điểm cực đại** của đồ thị, hai điểm B, C là các **điểm cực tiểu** của đồ thị. **Điểm cực đại, cực tiểu** của đồ thị hàm số được gọi chung là **điểm cực trị** của đồ thị hàm số đó.

Điểm cực đại, cực tiểu của hàm số:

Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên D .

— Ta nói x_0 là một **điểm cực đại** của hàm $f(x)$ nếu tồn tại khoảng $(a; b) \subset D$ và $x_0 \in (a; b)$ sao cho $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$.

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số $y = f(x)$;

điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực đại** của đồ thị hàm số

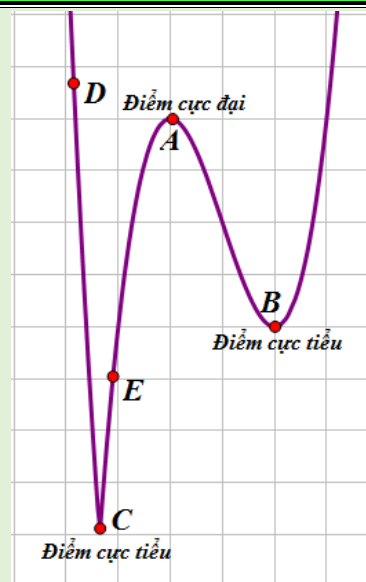
$y = f(x)$.

— Ta nói x_0 là một **điểm cực tiểu** của hàm $f(x)$ nếu tồn tại khoảng $(a; b) \subset D$ và $x_0 \in (a; b)$ sao cho $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số

$y = f(x)$; điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực tiểu** của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Lưu ý:

- Điểm cực đại hay điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**; giá trị cực đại hay giá trị cực tiểu được gọi chung là **cực trị**.
- Nói chung, giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ **không phải là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất)** của hàm số trên tập xác định D , $f(x_0)$ chỉ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) trên một khoảng $(a; b) \subset D$ nào đó chứa x_0 mà thôi. Chẳng hạn, trong hình vẽ trên, ta thấy điểm A là điểm cực đại của đồ thị, nên y_A là giá trị cực đại của hàm số, tuy nhiên $y_A < y_D$ nên giá trị cực đại y_A chưa phải là giá trị lớn nhất của hàm số đó. Tương tự điểm B là điểm cực tiểu của đồ thị nên y_B là giá trị cực tiểu của hàm số, tuy nhiên $y_B > y_E$ nên y_B chưa phải là giá trị nhỏ nhất của hàm số đó.



2. Điều kiện có cực trị của hàm số:

a) **Điều kiện cần:** Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(a; b)$ và đạt cực trị tại $x_0 \in (a; b)$ thì

$$f'(x_0) = 0.$$

b) **Điều kiện đủ:**

★ **Định lý 1:** Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa x_0 , đồng thời có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ hoặc $(a; b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó:

— Nếu $\begin{cases} f'(x) > 0, \forall x \in (a; x_0) \\ f'(x) < 0, \forall x \in (x_0; b) \end{cases}$ thì hàm số $y = f(x)$ **đạt cực đại** tại điểm $x = x_0$.

— Nếu $\begin{cases} f'(x) < 0, \forall x \in (a; x_0) \\ f'(x) > 0, \forall x \in (x_0; b) \end{cases}$ thì hàm số $y = f(x)$ **đạt cực tiểu** tại điểm $x = x_0$.

BBT 1: Hàm số đạt cực đại tại $x = x_0$.

x	a	x_0	b
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		y_{CD}	

Nhận thấy: $f'(x)$ đổi dấu từ **dương sang âm** khi x đi qua x_0 .

BBT 2: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = x_0$.

x	a	x_0	b
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		y_{CT}	

Nhận thấy: $f'(x)$ đổi dấu từ **âm sang dương** khi x đi qua x_0 .

★ **Định lý 2:** Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng $(a; b)$ chứa x_0 . Khi đó:

— Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$ thì hàm số $f(x)$ **đạt cực đại** tại $x = x_0$.

— Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$ thì hàm số $f(x)$ **đạt cực tiểu** tại $x = x_0$.

Dạng toán 1

Xét dấu đạo hàm để tìm cực trị của hàm số

◆ **Bài toán 1: Tính đạo hàm để tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$.**

Phương pháp:

Quy tắc I	Quy tắc II
- Tìm tập xác định. - Tính $y' = f'(x)$. Tìm x khi $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định. - Tính các giới hạn cần thiết. - Lập bảng biến thiên. - Kết luận các điểm cực trị.	- Tìm tập xác định. - Tính $y' = f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ để tìm các nghiệm $x_1, x_2, \dots$ (nếu có) của nó. - Tính $f''(x)$ và suy ra $f''(x_1), f''(x_2), \dots$ - Dựa vào dấu của $f''(x_1), f''(x_2), \dots$ để kết luận.

📌 **Ghi nhớ:** Quy tắc II không dùng được trong trường hợp $f'(x) = 0$ vô nghiệm hoặc

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) = 0 \end{cases}.$$

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = 1 \\ x = \pm 1, y = 0 \end{cases}$.
- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = +\infty$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	0	1	0	$+\infty$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Ta thấy: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$, giá trị cực tiểu là $y_{CT} = 0$; hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, giá trị cực đại là $y_{CD} = 1$. Do đó hàm số có ba cực trị. **Chọn** B

Ví dụ 2. Tìm điểm cực đại x_0 của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.

- A. $x_0 = 2$. B. $x_0 = 1$. C. $x_0 = -1$. D. $x_0 = 3$.

Lời giải:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -1 \\ x = -1 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$.
- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'		0	0	
		$+$	$-$	$+$
y	$-\infty$	3	-1	$+\infty$

- Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x_0 = -1$. **Chọn** C

Ví dụ 3. Hàm số $y = \frac{1-2x}{-x+2}$ có bao nhiêu cực trị?

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Lời giải:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- Ta có: $y' = \frac{-3}{(-x+2)^2} < 0, \forall x \in D$.
- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 2$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = -\infty$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'			
	$-$		$-$
y	2	$+\infty$	2

- Ta thấy hàm số đã cho không có cực trị. **Chọn** B

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Ví dụ 4. Gọi A, B là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x + \frac{1}{x}$. Tính khoảng cách AB .

A. $AB = 3\sqrt{2}$.

B. $AB = 4$.

C. $AB = 2\sqrt{5}$.

D. $AB = 2\sqrt{2}$.

Lời giải:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Đạo hàm: $y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty$
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$	

- Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(-1; -2)$; $B(1; 2)$,
Do đó: $AB = 2\sqrt{5}$. **Chọn $\rightarrow$ C**

⚡Nhắc lại: Khoảng cách hai điểm $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$ là:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} - x^3 - \frac{1}{5}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.** Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$, đạt cực tiểu tại $x = 1$.
- B.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -3$, đạt cực đại tại $x = 0$.
- C.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -3$ và $x = 1$, đạt cực đại tại $x = 0$.
- D.** Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$ và $x = 1$, đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Lời giải:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = x^4 + 2x^3 - 3x^2 = x^2(x^2 + 2x - 3)$.

$$\text{Xét } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{5} \\ x = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \\ x = -3 \Rightarrow y = \frac{187}{10} \end{cases}$$

- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow \frac{187}{10}$	$\searrow -\frac{1}{5}$	$\searrow -\frac{1}{2}$	$\nearrow +\infty$

- Ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = -3$, đạt cực tiểu tại $x = 1$. **Chọn** A

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$. **B.** Hàm số không có cực trị.
C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$. **D.** Hàm số có hai điểm cực trị.

Lời giải:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Ta có: $y' = \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = +\infty$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$\searrow 1$	$\nearrow +\infty$

- Ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$. **Chọn** C

Ví dụ 7. Cho hàm số $y = x + \sqrt{12 - 3x^2}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A.** Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$. **B.** Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.
C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$. **D.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Lời giải:

- Tập xác định $D = [-2; 2]$.
- Ta có $y' = 1 + \frac{(12 - 3x^2)'}{2\sqrt{12 - 3x^2}} = 1 - \frac{3x}{\sqrt{12 - 3x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{12 - 3x^2} = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 12 - 3x^2 = 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
y'			$+$	0	$-$
y		-2	4	2	

- Ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

Chọn **B**

Ví dụ 8. Hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$ có bao nhiêu cực trị?

A. 0.

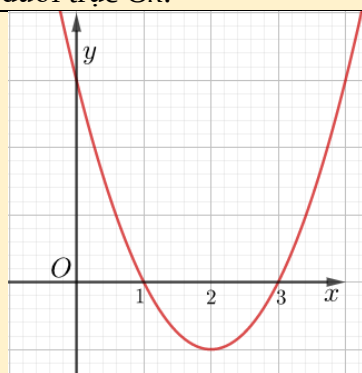
B. 1.

C. 2.

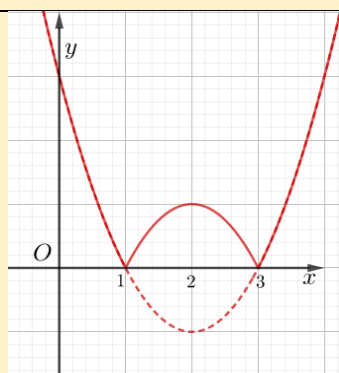
D. 3.

Xây dựng công thức: Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ được hình thành bởi hai bước:

- Bước 1:** Giữ nguyên phần đồ thị $y = f(x)$ nằm trên trục hoành Ox.
- Bước 2:** Lấy đối xứng phần đồ thị $y = f(x)$ nằm dưới Ox qua Ox. Bỏ phần đồ thị $y = f(x)$ nằm dưới trục Ox.



Đồ thị hàm số $y = f(x)$



Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$

Từ các bước trên, ta thấy số cực trị ban đầu của hàm $y = f(x)$ được giữ nguyên, bên cạnh đó là sự phát sinh của các cực trị tại giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ với trục hoành.

Kết luận: Số cực trị hàm số $y = |f(x)|$ bằng số cực trị hàm số $y = f(x)$ cộng với số giao điểm của hai đồ thị $\begin{cases} (C): y = f(x) \\ Ox: y = 0 \end{cases}$.

Lời giải:

☺ Cách 1: Tự luận

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

- Áp dụng công thức $(|u|)' = (\sqrt{u^2})' = \frac{(u^2)'}{2\sqrt{u^2}} = \frac{u \cdot u'}{|u|}$, ta có: $y' = \frac{(x^2 - 4x + 3)(2x - 4)}{|x^2 - 4x + 3|}$;

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 4x + 3)(2x - 4) = 0 \\ |x^2 - 4x + 3| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3 \\ x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$		
y'	-		+	0	-		+
y	$+\infty$			1			$+\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$		
		0		0			

- Ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 2$, đạt cực tiểu tại các điểm: $x = 1, x = 3$.

Chọn D

☺ Cách 2: Trắc nghiệm

- Xét hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 3$, đồ thị của hàm có dạng parabol nên hàm số có đúng 1 cực trị.
- Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm $f(x) = x^2 - 4x + 3$ với trục hoành:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \text{ (ứng với 2 giao điểm).}$$

- Vậy số cực trị của hàm số $y = |f(x)| = |x^2 - 4x + 3|$ là: $1 + 2 = 3$.

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = \cos 2x + x$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A.** Tại $x = \frac{-\pi}{2}$ hàm số không đạt cực đại. **B.** Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \frac{-11\pi}{12}$.
- C.** Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \frac{13\pi}{12}$. **D.** Tại $x = \frac{5\pi}{12}$ hàm số đạt cực tiểu.

🔍 Nhận xét: Đối với hàm số lượng giác, sự biến thiên của nó luôn có tính chu kỳ, vì vậy mà việc lập bảng biến thiên sẽ trở nên không thuận tiện. Cách đơn giản nhất để tìm cực trị của chúng là sử dụng **Quy tắc II** (xem mục **Phương pháp**), tức là ta **xét dấu đạo hàm cấp hai** để suy ra cực trị hàm số.

Lời giải:

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = -2\sin 2x + 1; y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad (x \in \mathbb{Z}).$$

- $y'' = -4\cos 2x$;

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

$$y''\left(\frac{\pi}{12} + k\pi\right) = -4\cos\left(\frac{\pi}{6} + k2\pi\right) = -2\sqrt{3} < 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ là điểm cực đại của hàm số.}$$

$$y''\left(\frac{5\pi}{12} + k\pi\right) = -4\cos\left(\frac{5\pi}{6} + k2\pi\right) = 2\sqrt{3} > 0 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \text{ là điểm cực tiểu của hàm số.}$$

- Điểm cực đại của hàm số là $x = \frac{\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$; với $k = -1 \Rightarrow x = \frac{-11\pi}{12}$. **Chọn** B

Ví dụ 10. Hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

A. Vô số.

B. 1.

C. 0.

D. 2.

Lời giải:

- Ta có $y' = -x^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = -x^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 x) = \sin^2 x - x^2 = (\sin x - x)(\sin x + x)$.

- Xét hàm $f(x) = \sin x - x$ trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có $f'(x) = \cos x - 1 < 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(x) = \sin x - x$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow f(x) < f(0) = 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right). \text{ Vậy } \sin x - x < 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

- Mặt khác: $\sin x + x > 0 \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Do đó $y' = \underbrace{(\sin x - x)}_{-} \underbrace{(\sin x + x)}_{+} < 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Suy ra hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$ Hàm số đã cho không có cực trị trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Chọn C

❖ Bài toán 2: Tìm cực trị của hàm số dựa vào bảng biến thiên hoặc đạo hàm (cho sẵn).

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CẦN LƯU Ý:

Cho hàm số $f(x), g(x)$ cùng có đạo hàm trên tập D . Khi đó:

$[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$ với k là hằng số	$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$
$[f(u)]' = u' \cdot f'(u)$	$y = f(x) \xrightarrow{\text{Thay } x \text{ bởi } u} y = f(u)$

⚙ Phương pháp chung:

- Đặt $g(x)$ là hàm số cần xét, ta tính đạo hàm $g'(x)$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Kết hợp các nguyên tắc xét dấu tích, thương, tổng (hiệu) các biểu thức để có được bảng xét dấu cho $g'(x)$.
- Dựa vào bảng xét dấu dành cho $g'(x)$ để kết luận về cực trị của hàm số.

☞ **Nhắc lại quy tắc về dấu của tích, thương, tổng (hiệu) các biểu thức:**

$f(x)$	+	-	+	-
$g(x)$	+	-	-	+
$f(x) \cdot g(x)$	+	+	-	-
$f(x) : g(x)$	+	+	-	-
$f(x) + g(x)$	+	-	Chưa biết	Chưa biết

Ví dụ 11. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+		-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	0	-1	$+\infty$	

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A.** Hàm số $y = f(x)$ có giá trị cực tiểu bằng 1.
- B.** Hàm số $y = f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng 1.
- C.** Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.
- D.** Hàm số $y = f(x)$ có đúng một cực trị.

Lời giải:

- Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.
- Tại $x = 0$ mặc dù đạo hàm $f'(x)$ không tồn tại nhưng hàm số $f(x)$ vẫn xác định và liên tục nên hàm số đạt cực đại tại $x = 0$. Chọn $\rightarrow$ **C**

Ví dụ 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
y'	+		-		+
y	$-\infty$	5	2	2	3

Khẳng định nào sau đây **sai**?

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- A. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 4)$.
- B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 0$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(4; +\infty)$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

Lời giải:

- Tại $x = 0$ dù đạo hàm không xác định nhưng hàm số $y = f(x)$ vẫn xác định và liên tục nên hàm số đạt cực đại tại $x = 0$. Tại $x = 4$ thì hàm số $y = f(x)$ không xác định, vì vậy hàm số không có cực trị tại $x = 4$.
- Do đó hàm số chỉ có duy nhất một cực trị. Chọn → D

Ví dụ 13. Cho đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ có $y' = (1+x)(x+2)^2(x-3)^3(1-x^2)$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **đúng**:

- A. (C) có một điểm cực trị.
- B. (C) có hai điểm cực trị.
- C. (C) có ba điểm cực trị.
- D. (C) có bốn điểm cực trị.

Lời giải:

- Xét đạo hàm: $y' = (1+x)(x+2)^2(x-3)^3(1-x^2) = (1+x)^2(x+2)^2(x-3)^3(1-x)$.
- $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \vee x = -2 \\ x = 1 \vee x = 3 \end{cases}$.
- Vì $x = -1, x = -2$ là các nghiệm kép của y' nên y' không đổi dấu khi qua hai điểm này; $x = 1, x = 3$ là nghiệm kép của y' nên y' đổi dấu khi qua các điểm $x = 1, x = 3$.
- Do đó hàm số có hai điểm cực trị $x = 1, x = 3$. Chọn → B

Cần nhớ: Cho n là số nguyên dương.

- $\underbrace{(x - x_1)^{2n}}_{\text{mũ chẵn}} = 0 \Leftrightarrow (x - x_1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = x_1$ (ta nói x_1 là **ng nghiệm kép** của phương trình).
- $\underbrace{(x - x_2)^{2n+1}}_{\text{mũ lẻ}} = 0 \Leftrightarrow (x - x_2)^1 = 0 \Leftrightarrow x = x_2$ (ta nói x_2 là **ng nghiệm đơn** của phương trình).

Ví dụ 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 4.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 1.

Lời giải:

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Đặt $g(x) = f(x^2 - 2x)$. Ta có $g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x)$.
- Xét $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (2x - 2)f'(x^2 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 \geq 0 \\ f'(x^2 - 2x) \geq 0 \end{cases} \stackrel{(1)}{\vee} \begin{cases} 2x - 2 \leq 0 \\ f'(x^2 - 2x) \leq 0 \end{cases} \stackrel{(2)}$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2x \geq -2 \\ x^2 - 2x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \in \mathbb{R} \\ -1 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3. \quad (*)$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ f'(x^2 - 2x) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ \begin{cases} x^2 - 2x \leq -2 \\ x^2 - 2x \geq 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ \begin{cases} x \in \emptyset \\ x \leq -1 \\ x \geq 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -1. \quad (**)$$

- Hợp nghiệm của (*), (**) ta có $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$; do đó: $g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$.
- Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

- Vậy hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 2x)$ có đúng 1 điểm cực tiểu là $x = 1$. **Chọn** **D**

Ví dụ 15. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Bảng xét dấu bên dưới là của đạo hàm $f'(x)$. Hàm số

$g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải:

- Ta có $g'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} f'(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ f'(\sqrt{x^2 + 2x + 2}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 2} = -1 \\ \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 1 \\ \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1 + 2\sqrt{2} \\ x = -1 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-1-2\sqrt{2}$	-1	$-1+2\sqrt{2}$	$+\infty$
$x+1$		-	0	+	
$f'(\sqrt{x^2+2x+2})$	+	0	-	0	+
$g'(x)$	-	0	+	0	+

- Từ bảng xét dấu ta suy ra hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2+2x+2})$ có 3 điểm cực trị.

Chọn C

Lưu ý : Để xét dấu $g'(x)$, ta chọn một giá trị x_0 thuộc khoảng đang xét rồi thay vào lần lượt các hàm $x+1$, $f'(\sqrt{x^2+2x+2})$ để xét dấu chúng. Sau cùng sẽ suy ra dấu của $g'(x)$ là tích của hai hàm trên. Chẳng hạn:

- Để xét dấu $g'(x)$ trên khoảng $(-1+2\sqrt{2}; +\infty)$, ta chọn giá trị $x_0 = 2 \in (-1+2\sqrt{2}; +\infty)$, thay số 2 vào $x+1$, ta được dấu dương (+), thay 2 vào $\sqrt{x^2+2x+2}$, ta được $\sqrt{10} > 3$ nên $f'(\sqrt{x^2+2x+2})$ mang dấu dương (+) (xem bảng biến thiên ban đầu). Vì vậy mà dấu của $g'(x)$ cũng là dấu dương (+).
- Để xét dấu $g'(x)$ trên khoảng $(-1; -1+2\sqrt{2})$, ta chọn $x_0 = 1 \in (-1; -1+2\sqrt{2})$, thay số 1 vào $x+1$ ta được dấu dương (+), thay số 1 vào $\sqrt{x^2+2x+2}$ ta được $\sqrt{5} \in (1; 3)$ do đó $f'(\sqrt{x^2+2x+2})$ mang dấu âm (-) (xem bảng biến thiên ban đầu). Vì vậy mà dấu của $g'(x)$ là dấu âm (-). Bằng cách thức này, ta có thể xét dấu $g'(x)$ trên các khoảng còn lại và có được bảng xét dấu như lời giải trên.

Ví dụ 16. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	+

Đặt $g(x) = f(x+2) + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2019$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** Hàm số $y = g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- B.** Hàm số $y = g(x)$ có 1 điểm cực trị.
- C.** Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 4)$.
- D.** Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.

Lời giải:

- Ta có $g'(x) = f'(x+2) + x^2 - 4x + 3$. Xét: $f'(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=1 \\ x+2=3 \\ x+2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \\ x=3 \end{cases}$;

Xét $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$.

- Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$		
$f'(x+2)$	$-$	0	$+$	0	$+$		
x^2-4x+3	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$	Chưa rõ dấu		$+$	0	$-$	0	$+$

- Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.

Chọn **A**

Ví dụ 17. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình sau.

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-1	5	$-\infty$	

Hàm số $g(x) = 2f^3(x) - 6f^2(x) - 1$ có bao nhiêu điểm cực đại?

- A.** 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải:

- $g'(x) = 6f^2(x)f'(x) - 12f(x)f'(x) = 6f(x)f'(x)(f(x) - 2)$;

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \vee x = x_2 \vee x = x_3 \\ x = 0 \vee x = 3 \\ x = x_4 \vee x = x_5 \vee x = x_6 \end{cases}$

(cả 8 nghiệm trên đều là nghiệm đơn phân biệt).

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Từ bảng biến thiên, ta thấy khi $x \rightarrow +\infty$ thì $\begin{cases} f' x < 0 \\ f x - 2 \rightarrow -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g' x < 0.$

- Giả sử thứ tự giá trị của 8 nghiệm phân biệt trên là $a_1, a_2, \dots, a_8$, ta có bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	$+\infty$			
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-

- Ta thấy đạo hàm $g'(x)$ đổi dấu từ dương (+) sang âm (-) bốn lần, do đó hàm $g x$ có bốn điểm cực đại. **Chọn $\rightarrow B$**

Dạng toán 2

Tìm tham số thỏa mãn điều kiện cực trị của hàm số

♦ **Bài toán 1:** Tìm tham số thỏa mãn điều kiện cực trị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (*).

$$\longrightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

Phương pháp:

1. Điều kiện để hàm số có n cực trị hoặc không có cực trị.

Ta xét bảng sau (a và Δ là của đạo hàm y'):

Điều kiện của a	Điều kiện đi kèm	Kết luận
$a = 0$	$b \neq 0$	Hàm số trở thành $y = bx^2 + cx + d$ (parabol) nên có một cực trị.
$a = 0$	$b = 0$	Hàm số trở thành $y = cx + d$ (đường thẳng) nên không có cực trị.
$a \neq 0$	$\Delta > 0$ (hoặc $\Delta' > 0$)	Hàm số có hai cực trị (một cực đại và một cực tiểu).
$a \neq 0$	$\Delta \leq 0$ (hoặc $\Delta' \leq 0$)	Hàm số không có cực trị nào.

Từ bảng trên, ta khẳng định:

- Hàm số (*) có hai cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$. Ta có thể thay $\Delta > 0$ bởi $\Delta' > 0$.
- Hàm số (*) có một cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$.
- Hàm số (*) có cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.
- Hàm số (*) không có cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$.

2. Điều kiện cực trị cơ bản:

- **Hàm số có cực trị tại $x = x_0$:**

Ta có: $y'(x_0) = 0$. Sau khi tìm được m thì thay ngược trở lại để lập bảng biến thiên cho hàm số rồi kết luận nhận hay loại giá trị m này.

- **Hàm số đạt cực đại tại $x = x_0$ (hoặc hàm số đạt cực tiểu tại $x = x_0$):**

Ta có: $y'(x_0) = 0$. Sau khi tìm được m thì thay ngược trở lại để lập bảng biến thiên cho hàm số rồi kết luận nhận hay loại giá trị m này (hoặc có thể thay m tìm được vào đạo hàm cấp hai để xét dấu xem có phù hợp không).

- **Đồ thị hàm số có điểm cực trị là $M(x_0; y_0)$:**

Ta có: $\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Tìm được}} m$. Thay m trở lại đạo hàm để kiểm tra **đạo hàm có đổi dấu** khi x đi qua x_0 ?

- **Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$:**

Ta có: $\begin{cases} y'(x_A) = 0; y'(x_B) = 0 \\ y(x_A) = y_A; y(x_B) = y_B \end{cases} \xrightarrow{\text{Tìm được}} m, n, \dots$

3. Điều kiện cực trị liên quan đến các trục tọa độ:

- Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm **khác phía** trục Oy $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \Delta > 0 \\ x_1 x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{ac < 0}$.
- Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm **cùng phía** trục Oy $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \Delta > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a \neq 0, \Delta > 0 \\ ac > 0 \end{cases}}$.

💡 Để ý: Trong điều kiện trên, ta đã thay điều kiện $x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0$ bởi $ac < 0$. Lý do là hai số **trái dấu** đồng nghĩa với **tích và thương của chúng là một số âm**. Một khi a, c trái dấu rồi thì điều kiện $a \neq 0, \Delta = b^2 - 4ac > 0$ luôn được thỏa mãn, vì vậy

$$\begin{cases} a \neq 0, \Delta > 0 \\ x_1 x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow ac < 0.$$

Ta có biến đổi tương đương sau đây (phù hợp trắc nghiệm):

$$\otimes \frac{A}{B} > 0 \Leftrightarrow AB > 0; \frac{A}{B} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} AB \geq 0 \\ B \neq 0 \end{cases}.$$

$$\otimes \frac{A}{B} < 0 \Leftrightarrow AB < 0; \frac{A}{B} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} AB \leq 0 \\ B \neq 0 \end{cases}.$$

- Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm **khác phía** trục Ox $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \Delta > 0 \\ y_1 y_2 < 0 \end{cases}$.
- Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm **cùng phía** trục Ox $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \Delta > 0 \\ y_1 y_2 > 0 \end{cases}$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

(trong hai điều kiện trên thì y_1, y_2 là hai giá trị cực trị của hàm số bậc ba).

- Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị **cách đều** trục $Ox \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \Delta > 0 \\ \text{Điểm uốn } I \in Ox \end{cases}$.
- Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị **cách đều** trục $Oy \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \Delta > 0 \\ \text{Điểm uốn } I \in Oy \end{cases}$.

Lưu ý: Cách tìm điểm uốn I đồ thị bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ là: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, $y'' = 6ax + 2b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{3a} = x_I$, thay $x_I = \frac{-b}{3a}$ vào hàm số ban đầu để tìm $y_I \Rightarrow I(x_I; y_I)$.

4. Các công thức giải tích liên quan:

a) **Định lý Vi-ét:** Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (*) có hai nghiệm x_1, x_2 . Ta có:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

b) **Công thức nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (*):**

- (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.
- (*) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c < 0$.
- (*) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \Delta > 0 \\ S > 0, P > 0 \end{cases}$.
- (*) có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \Delta > 0 \\ S < 0, P > 0 \end{cases}$.

c) **Công thức hình học giải tích trong mặt phẳng:**

- Nếu ΔABC có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (b_1; b_2) \\ \overrightarrow{AC} = (c_1; c_2) \end{cases}$ thì $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |b_1 c_2 - b_2 c_1|$.
 - $\Delta ABC \perp$ tại $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow b_1 c_1 + b_2 c_2 = 0$.
 - $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
 - Khoảng cách từ điểm $M(x_M; y_M)$ đến $\Delta: ax + by + c = 0$ là $d(M; \Delta) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
- ☞ **Đặc biệt:** $d(M; Ox) = |y_M|, d(M; Oy) = |x_M|$.

Ví dụ 18. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m+6)x - (2m+1)$ có cực đại, cực tiểu.

A. $m \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.

B. $m \in (-\infty; -3) \cup (-2; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

D. $m \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Lời giải:

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm : $y' = x^2 + 2mx + m + 6$.
- Ta thấy $a = 1 \neq 0$. Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y'$ đổi dấu hai lần trên tập xác định

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - (m + 6) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 3 \end{cases} \cdot \xrightarrow{\text{Chọn}} \boxed{C}$$

Ví dụ 19. Tìm tất các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx - 6$ có 2 cực trị ?

- A. $m \in (-3; 1) \setminus \{-2\}$. B. $m \in (-3; 1)$.
C. $m \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$. D. $m \in [-3; 1]$.

Lời giải:

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm : $y' = 3(m+2)x^2 + 6x + m$.

- Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 \neq 0 \\ 3^2 - 3(m+2)m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ -3 < m < 1 \end{cases} \cdot \xrightarrow{\text{Chọn}} \boxed{A}$

Ví dụ 20. Tập hợp tất cả giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}(m-1)x^3 - mx^2 + mx - 5$ có cực trị là:

- A. $\begin{cases} m \neq 1 \\ m > 0 \end{cases}$. B. $m \neq 1$. C. $m > 0$. D. $m \geq 0$.

Lời giải:

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm : $y' = (m-1)x^2 - 2mx + m$.

- Hàm số đã cho có cực trị khi và chỉ khi $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 = 0 \\ -2m \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ m^2 - (m-1)m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1 \vee \begin{cases} m \neq 1 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0. \xrightarrow{\text{Chọn}} \boxed{C}$$

Ví dụ 21. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m+3)x - 1$ không có cực trị ?

- A. $m \geq -\frac{5}{3}$. B. $m > -\frac{5}{3}$. C. $m \geq -\frac{8}{3}$. D. $m \leq -\frac{8}{3}$.

Lời giải:

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm : $y' = 3x^2 - 4x + m + 3$.
- Ta thấy $a = 3 \neq 0$. Vậy hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow \Delta' \leq 0$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

$$\Leftrightarrow (-2)^2 - 3(m+3) \leq 0 \Leftrightarrow -3m - 5 \leq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{3}. \quad \text{Chọn} \rightarrow \boxed{A}$$

Ví dụ 22. Giá trị của m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + m$ đạt cực đại tại $x = 1$ là

- A.** $m = -1$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 0$.

Lời giải:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$.
- Hàm số có cực đại tại $x = 1$ nên $y'(1) = 0 \Rightarrow 3 - 6m + 3(m^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$.
- Xét $m = 0$. Ta có $y' = 3x^2 - 3$; $y'' = 6x$. Khi đó $y''(1) = 6 > 0$ suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ (loại $m = 0$ vì trái giả thiết).
- Xét $m = 2$. Ta có $y' = 3x^2 - 12x + 9$; $y'' = 6x - 12$. Khi đó $y''(1) = -6 < 0$. Do đó hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 1$. Vậy $m = 2$ thỏa mãn đề bài. Chọn $\rightarrow$ **C**

Ví dụ 23. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx^3 + x^2 + (m^2 - 6)x + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

- A.** $\begin{cases} m = 1 \\ m = -4 \end{cases}$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = -4$. **D.** $m > -\frac{1}{3}$.

Lời giải:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 3mx^2 + 2x + m^2 - 6$.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1 \Rightarrow y'(1) = 0 \Rightarrow 3m + 2 + m^2 - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -4 \end{cases}$.
- Xét $m = 1$, ta có $y' = 3x^2 + 2x - 5$, $y'' = 6x + 2$. Khi đó $y''(1) = 8 > 0$, hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 1$. Vì vậy $m = 1$ thỏa mãn.
- Xét $m = -4$, ta có $y' = -12x^2 + 2x + 10$, $y'' = -24x + 2$. Khi đó $y''(1) = -22 < 0$, suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = 1$. Điều này trái với giả thiết nên ta loại $m = -4$. Chọn $\rightarrow$ **B**

Ví dụ 24. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2ax + b$ có điểm cực tiểu là $A(2; -2)$. Tính $a + b$

- A.** -4 . **B.** 2 . **C.** 4 . **D.** 2 .

Lời giải:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6x + 2a$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $A(2; -2) \Rightarrow \begin{cases} y'(2) = 0 \\ y(2) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 - 12 + 2a = 0 \\ 8 - 12 + 4a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}$.
- Khi đó $y' = 3x^2 - 6x$, $y'' = 6x - 6$. Ta thấy $y''(2) = 12 - 6 = 6 > 0$, do đó hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ (thỏa mãn). Vậy $\begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}$, suy ra $a + b = 2$. **Chọn** **D**

Ví dụ 25. Cho hàm số $y = -x^3 + ax^2 + bx + c$. Biết rằng đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0; -1)$ và có điểm cực đại là $M(2; 3)$. Tính $Q = a + 2b + c$.

- A.** $Q = 0$. **B.** $Q = -4$. **C.** $Q = 1$. **D.** $Q = 2$.

Lời giải:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = -3x^2 + 2ax + b$.
- Đồ thị hàm số có điểm cực đại $M(2; 3)$ và đi qua $A(0; -1)$ suy ra

$$\begin{cases} y'(2) = 0 \\ y(2) = 3 \\ y(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12 + 4a + b = 0 \\ -8 + 4a + 2b + c = 3 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$$
- Thay các hệ số trên vào đạo hàm: $y' = -3x^2 + 6x$, $y'' = -6x + 6 \Rightarrow y''(2) = -6 < 0$, do đó hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ (thỏa mãn đề bài). Vậy $a = 3, b = 0, c = -1 \Rightarrow Q = a + 2b + c = 2$.

Chọn **D**

Ví dụ 26. Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị là $A(1; -7)$, $B(2; -8)$. Hãy tính $y(-1)$.

- A.** $y(-1) = 7$. **B.** $y(-1) = 11$. **C.** $y(-1) = -11$. **D.** $y(-1) = -35$.

Lời giải:

- Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.
- Theo đề bài ta có hệ:

$$\begin{cases} y'(1) = 3a + 2b + c = 0 \\ y'(2) = 12a + 4b + c = 0 \\ y(1) = a + b + c + d = -7 \\ y(2) = 8a + 4b + 2c + d = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \\ 7a + 3b + c = -1 \\ d = -7 - (a + b + c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -9 \\ c = 12 \\ d = -12 \end{cases}$$
- Vậy $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 12 \Rightarrow y(-1) = -35$. **Chọn** **D**

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Ví dụ 27. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - 3$ (C_m), với m là tham số. Xác định tất cả giá trị của m để đồ thị hàm số (C_m) có điểm cực đại và cực tiểu nằm cùng một phía đối với trục tung?

- A. $m \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}$. B. $0 < m < 2$. C. $m \neq 1$. D. $-\frac{1}{2} < m < 1$.

Lời giải:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = x^2 - 2mx + 2m - 1$.
- Yêu cầu đề bài $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt và cùng dấu

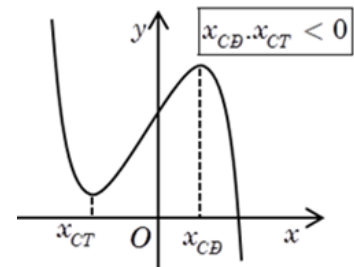
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - (2m-1) > 0 \\ p = 2m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{Chọn}} \boxed{A}$$

Ví dụ 28. Tìm tất cả giá trị m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m^2 - 3m + 2)x + 4$ có 2 điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía trục tung.

- A. $1 < m < 3$. B. $0 < m < 2$. C. $2 < m < 3$. D. $1 < m < 2$.

Lời giải:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 2(2m+1)x + m^2 - 3m + 2$.
- Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục tung
 $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu
 $\Leftrightarrow a.c < 0 \Leftrightarrow 3(m^2 - 3m + 2) < 0 \Leftrightarrow m \in (1; 2)$.



Ví dụ 29. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - m + 1$ có các giá trị cực trị trái dấu?

- A. 2. B. 9. C. 3. D. 7.

Lời giải:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = 6x^2 - 12x = 6x(x-2)$.
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$. Khi đó: $y_1 = y(0) = 1 - m$ và $y_2 = y(2) = -7 - m$
- Hai giá trị cực trị trái dấu: $y_1 \cdot y_2 < 0 \Leftrightarrow (1-m)(-m-7) < 0 \Leftrightarrow -7 < m < 1$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$. **Chọn** **D**

Ví dụ 30. Điều kiện của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$ là:

- A.** $m = 3$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -3$.

Lời giải:

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + m$.
- Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$.
- Ta có : $x_1^2 + x_2^2 = 6 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 6 \Leftrightarrow \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow 2^2 - 2 \cdot \frac{m}{3} - 6 = 0 \Leftrightarrow m = -3 \text{ (thỏa mãn).}$$
Chọn **D**

Ví dụ 31. Tìm tổng tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^3$ có hai điểm cực trị A, B sao cho $S_{\Delta OAB} = 48$, với O là gốc tọa độ .

- A.** 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** $\frac{3}{2}$.

(Trích từ Đề thi TSDH 2012, Khối B)

Lời giải:

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm : $y' = 3x^2 - 6mx = 3x(x - 2m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 3m^3 \\ x = 2m \Rightarrow y = -m^3 \end{cases}$.
- Đồ thị có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$. (1)

Khi đó, tọa độ các điểm cực trị : $A(0; 3m^3)$, $B(2m; -m^3)$.

- Xét ΔOAB với $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = (0; 3m^3) \\ \overrightarrow{OB} = (2m; -m^3) \end{cases}$, diện tích ΔOAB là : $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} |0 - 6m^4| = 3m^4$.
- Theo đề : $S_{\Delta OAB} = 48 \Leftrightarrow 3m^4 = 48 \Leftrightarrow m^4 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 2$ (thỏa mãn (1)).
- Ta có tổng của hai giá trị m tìm được : $2 + (-2) = 0$. **Chọn** **B**

Ví dụ 32. Tìm tất các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+3)x^2 + 4(m+3)x + m^3 - m$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

A. $m \in \left[-\frac{7}{2}; -3\right]$. **B.** $m \in \left(-\frac{7}{2}; 0\right)$. **C.** $m \in \left(-\frac{7}{2}; -3\right)$. **D.** $m \in \left[-\frac{7}{2}; 0\right]$.

Lời giải:

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm : $y' = \underbrace{x^2 + 2(m+3)x + 4(m+3)}_{g(x)}$.
 - Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m+3)^2 - 4(m+3) > 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \end{cases} (*)$.
 - Điều kiện cực trị : $-1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a.g(-1) > 0 \\ \frac{S}{2} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1. \left[(-1)^2 - 2(m+3) + 4(m+3)\right] > 0 \\ \frac{-2(m+3)}{2} > -1 \end{cases}$.
- $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+7 > 0 \\ m+3 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{7}{2} \\ m < -3 \end{cases}$. So sánh điều kiện (*), ta có $m \in \left(-\frac{7}{2}; -3\right)$. **Chọn $\rightarrow$ C**

⚠ Nhắc lại: Xét tam thức bậc hai có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 , ta có quy tắc xét dấu:

x	$-\infty$	β	x_1	α	x_2	γ	$+\infty$
$f(x)$	Cùng dấu a		0	Trái dấu a	0		Cùng dấu a
	$\Rightarrow a.f(\beta) > 0$			$\Rightarrow a.f(\alpha) < 0$			$\Rightarrow a.f(\gamma) > 0$

- Khi $x \in (-\infty; x_1)$ thì $f(x)$ cùng dấu a mà $\beta \in (-\infty; x_1)$ nên $a.f(\beta) > 0$.
- Khi $x \in (x_2; +\infty)$ thì $f(x)$ cùng dấu a mà $\gamma \in (x_2; +\infty)$ nên $a.f(\gamma) > 0$.
- Khi $x \in (x_1; x_2)$ thì $f(x)$ trái dấu a mà $\alpha \in (x_1; x_2)$ nên $a.f(\alpha) < 0$.

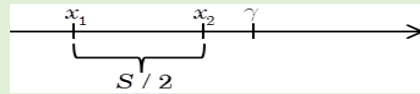
☞ Đặc biệt: Trường hợp $a.f(\alpha) < 0$ chỉ xảy ra khi phương trình bậc II có hai nghiệm x_1, x_2 và α nằm trong khoảng hai nghiệm đó nên khi ta dùng $a.f(\alpha) < 0$ thì đã bao hàm luôn điều kiện để phương trình bậc II có hai nghiệm phân biệt, do đó không cần ghi $\Delta > 0$. Vậy, với phương trình $\underbrace{ax^2 + bx + c}_{f(x)} = 0 (*)$, ta có:

— Phương trình (*) có hai nghiệm thỏa $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow a.f(\alpha) < 0$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

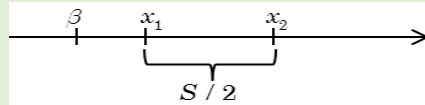
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

— Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt thỏa $x_1 < x_2 < \gamma \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\gamma) > 0 \\ \frac{S}{2} < \gamma \end{cases}$



(Một số nằm bên phải khoảng nghiệm thì trung bình cộng hai nghiệm nhỏ hơn số đó).

— Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt thỏa $\beta < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\beta) > 0 \\ \beta < \frac{S}{2} \end{cases}$



(Một số nằm bên trái khoảng nghiệm thì trung bình cộng hai nghiệm lớn hơn số đó).

Ví dụ 33. Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ (C_m). Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta: x + 8y - 74 = 0$.

A. $m = 0$.

B. $m = 3$.

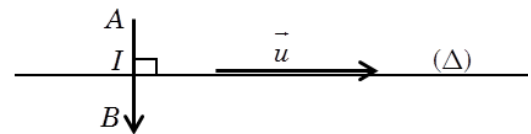
C. $m = 1$.

D. $m = 2$.

Lời giải:

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm : $y' = -3x^2 + 6mx = -3x(x - 2m)$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -3m - 1 \\ x = 2m \Rightarrow y = 4m^3 - 3m - 1 \end{cases}$$



- Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ (*).

Khi đó, tọa độ các điểm cực trị là : $A(0; -3m - 1)$, $B(2m; 4m^3 - 3m - 1)$.

- Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow I\left(\frac{0 + 2m}{2}; \frac{-3m - 1 + 4m^3 - 3m - 1}{2}\right)$ hay $I(m; 2m^3 - 3m - 1)$.

$\overrightarrow{AB} = (2m; 4m^3)$; đường thẳng Δ có vector chỉ phương $\vec{u} = (8; -1)$.

- Hai điểm cực trị đối xứng qua $\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} AB \perp \Delta \\ I \in \Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \\ m + 8(2m^3 - 3m - 1) - 74 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16m - 4m^3 = 0 \\ 16m^3 - 23m - 82 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \vee m = 2 \vee m = -2 \\ m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

- So sánh điều kiện (*), ta thấy $m = 2$ thỏa mãn đề bài. **Chọn $\rightarrow$ D**

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Ví dụ 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số:

$$y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{6} \text{ đạt cực trị tại } x_1, x_2 \text{ thỏa mãn } x_1 + 2x_2 = 1.$$

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải:

▪ Tập xác định : $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm : $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$.

▪ Hàm số đạt cực trị tại hai điểm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - 3m(m-2) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2m^2 + 4m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(\frac{2-\sqrt{6}}{2}; \frac{2+\sqrt{6}}{2} \right) \setminus \{0\} \quad (*)$$

▪ Kết hợp đề bài và định lí Vi-ét, ta có : $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 & (1) \\ x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} & (2) \\ x_1x_2 = \frac{3(m-2)}{m} & (3) \end{cases}$

▪ Lấy (1) trừ (2) theo vế, ta được : $x_2 = 1 - \frac{2m-2}{m} = \frac{2-m}{m} \quad (4)$, từ (2) suy ra

$$x_1 = \frac{2m-2}{m} - x_2 \Leftrightarrow x_1 = \frac{2m-2}{m} - \frac{2-m}{m} = \frac{3m-4}{m} \quad (5).$$

Thay (4) và (5) vào (3) : $\frac{3m-4}{m} \cdot \frac{2-m}{m} = \frac{3(m-2)}{m} \Leftrightarrow -3m^2 + 10m - 8 = 3m^2 - 6m$

$$\Leftrightarrow 6m^2 - 16m + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{2}{3} \end{cases}$$

▪ So sánh điều kiện (*), ta được $m = 2$ hay $m = \frac{2}{3}$. Vì m nguyên nên $m = 2$.

Chọn **D**

♦ Bài toán 2: Bài toán tham số có liên quan đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (*)

1. Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (*) :

Giả sử đồ thị hàm số (*) có hai điểm cực trị, ta thực hiện theo những cách sau để viết **phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị** đó :

☺ Phương pháp Tự luận :

▪ Chia $f(x)$ cho $f'(x)$ như sau :

$$\frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{f(x)} \quad \Bigg| \quad \frac{3ax^2 + 2bx + c}{f'(x)}$$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Dư : $P(x) = \alpha x + \beta$

Thương : $Q(x)$

▪ Khi đó, hàm số được viết lại : $f(x) = f'(x).Q(x) + \alpha x + \beta$.

▪ Tọa độ các điểm cực trị thỏa mãn $\begin{cases} f(x) = f'(x).Q(x) + \alpha x + \beta \\ f'(x) = 0 \end{cases}$ hay $\boxed{f(x) = \alpha x + \beta}$.

☺ Phương pháp Trắc nghiệm:

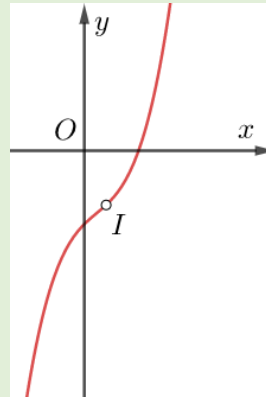
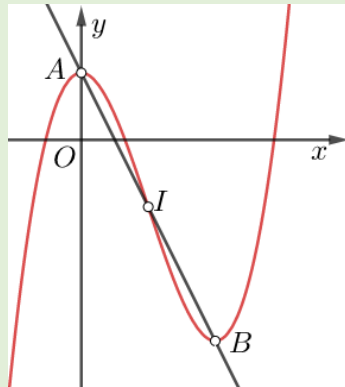
✚ **Cách viết 1 :** $y = \frac{2}{3} \left(c - \frac{b^2}{3a} \right) x + \left(d - \frac{bc}{9a} \right)$.

✚ **Cách viết 2 :** $y = f(x) - \frac{f'(x).f''(x)}{18a}$.

2. Tìm điểm uốn của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (*):

Xét hình dáng đồ thị hàm bậc ba bên dưới (đồ thị có hai điểm cực trị A, B), nhìn vào đồ thị tại lân cận điểm A , ta thấy bề lõm của nó hướng xuống (lồi); nhìn vào đồ thị tại lân cận điểm B , ta thấy bề lõm của nó hướng lên trên (lõm). Vậy sẽ có một ranh giới để đồ thị chuyển từ lồi sang lõm, ranh giới ấy được gọi là **điểm uốn** của đồ thị (trong hình là điểm I).

☞ **Đặc biệt :** Nếu đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là A, B thì I sẽ là trung điểm của đoạn AB .



☺ Cách tìm điểm uốn I :

• **Bước 1 :** Tính $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, $y'' = 6ax + 2b$.

• **Bước 2 :** Cho $y'' = 6ax + 2b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{3a} = x_I$, thay vào hàm số để y_I . Từ đây ta có điểm uốn $I(x_I; y_I)$ của đồ thị hàm bậc ba.

☞ **Tính chất quan trọng :** Điểm uốn I chính là **tâm đối xứng** của đồ thị hàm bậc ba tức là bất kỳ đường thẳng nào qua I nếu cắt đồ thị tại hai điểm còn lại M, N thì I luôn là trung điểm đoạn MN .

Ví dụ 35. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - x + m$ (1). Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1).

A. $y = \frac{2}{3}x - m$. B. $y = -x - m$. C. $y = x + m - \frac{2}{3}$. D. $y = -\frac{2}{3}x + m$.

☞ **Đánh giá :**

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Với bài toán này, xin được hướng dẫn hai cách để bạn đọc lựa chọn phương án tối ưu cho mình. **Cách giải 1 :** Làm theo lý luận truyền thống. **Cách giải 2 :** Dựa vào công thức đã cung cấp.
- Với **cách giải 1**, ta thực hiện phép chia y cho y' trong giấy nháp như sau :

	$\underbrace{x^3 - x + m}_y$	$\underbrace{3x^2 - 1}_{y'}$
—	$x^3 - \frac{1}{3}x$	$\frac{1}{3}x$
	$-\frac{2}{3}x + m$ (bậc I)	Phép chia kết thúc vì bậc I nhỏ hơn bậc II
	Dư : dạng $\alpha x + \beta$	

Lời giải:

☺ Cách giải 1 :

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm : $y' = 3x^2 - 1$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$ nên hàm số luôn có 2 cực trị.
- Hàm số được viết lại $y = y' \cdot \frac{1}{3}x + \left(-\frac{2}{3}x + m\right)$.
- Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số luôn thỏa mãn : $\begin{cases} y = y' \cdot \frac{1}{3}x + \left(-\frac{2}{3}x + m\right) \\ y' = 0 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + m$. Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị là $y = -\frac{2}{3}x + m$.

Chọn → **D**

☺ Cách giải 2 :

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm : $y' = 3x^2 - 1$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$ nên hàm số luôn có 2 cực trị.
- Dựa vào công thức $y = f(x) - \frac{f'(x) \cdot f''(x)}{18a}$, ta viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị như sau : $y = x^3 - x + m - \frac{(3x^2 - 1) \cdot 6x}{18} \Leftrightarrow y = x^3 - x + m - \left(x^3 - \frac{1}{3}x\right) \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + m$.

Ví dụ 36. Cho biết có một tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3(m-3)x^2 + 11 - 3m$ có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị đó và điểm $C(0; -1)$ thẳng hàng. Tìm khẳng định đúng:

- A.** $m \in (3; 6)$. **B.** $m \in (4; 7)$. **C.** $m \in (1; 4)$. **D.** $m \in (-1; 2)$.

Lời giải:

☺ Cách giải 1 : Chia y cho y' như sau :

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

	$\underbrace{2x^3 + 3(m-3)x^2 + 11 - 3m}_y$	$\underbrace{6x^2 + 6(m-3)x}_{y'}$
-	$2x^3 + 2(m-3)x^2$	$\frac{1}{3}x + \frac{m-3}{6}$
	$(m-3)x^2 + 11 - 3m$	Khi phần dư có dạng $\alpha x + \beta$ thì phép chia kết thúc.
-	$(m-3)x^2 + (m-3)^2 x$	
	Dư: $-(m-3)^2 x + 11 - 3m$	

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm : $y' = 6x^2 + 6(m-3)x$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x(x + m - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 - m \end{cases}.$$

- Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow 3 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$.

- Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số luôn thỏa mãn :

$$\begin{cases} y = y' \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{m-3}{6} \right) - (m-3)^2 x + 11 - 3m \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -(m-3)^2 x + 11 - 3m.$$

- Điểm $C(0; -1)$ thuộc đường thẳng qua hai điểm cực trị nên $-1 = 11 - 3m \Leftrightarrow m = 4$ (thỏa mãn).

Chọn A

😊 Cách giải 2 :

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm : $y' = 6x^2 + 6(m-3)x$; $y'' = 12x + 6(m-3)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x(x + m - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 - m \end{cases}.$$

- Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow 3 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$.
- Áp dụng công thức, ta viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị :

$$y = 2x^3 + 3(m-3)x^2 + 11 - 3m - \frac{[6x^2 + 6(m-3)x][12x + 6(m-3)]}{18.2}$$

$$\Leftrightarrow y = 2x^3 + 3(m-3)x^2 + 11 - 3m - [x^2 + (m-3)x](2x + m - 3)$$

$$\Leftrightarrow y = 2x^3 + 3(m-3)x^2 + 11 - 3m - [2x^3 + 3(m-3)x^2 + (m-3)^2 x]$$

$$\Leftrightarrow y = -(m-3)^2 x + 11 - 3m.$$

- Điểm $C(0; -1)$ thuộc đường thẳng qua hai điểm cực trị nên $-1 = 11 - 3m \Leftrightarrow m = 4$ (thỏa mãn).

Ví dụ 37. Tìm giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có các điểm cực đại và cực tiểu cách đều đường thẳng $y = x - 1$.

A. $-\frac{9}{2}$.

B. -3 .

C. $\frac{9}{4}$.

D. 0 .

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

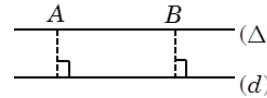
Đánh giá : Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - m = 0$ không thể cho ra nghiệm đẹp như ta muốn nên những bài toán liên quan **tọa độ điểm cực trị** đều cần đến **phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị**.

Lời giải:

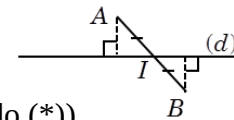
- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm : $y' = 3x^2 - 6x - m$.
- Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 + 3m > 0 \Leftrightarrow m > -3$ (*)
- Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị là $\Delta : y = -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)x + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$.
- Các điểm cực trị cách đều đường thẳng $d : y = x - 1$

$$\Leftrightarrow \Delta \parallel d \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow I \in d \text{ với } I \text{ là trung điểm của hai điểm cực trị} \quad (2)$$



Trường hợp 1



Trường hợp 2

- Trường hợp 1 :** $\Delta \parallel d \Leftrightarrow \begin{cases} -\left(\frac{2m}{3} + 2\right) = 1 \\ 2 - \frac{m}{3} \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{9}{2}$ (loại do (*)).

- Trường hợp 2 :** Gọi hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$$A\left(x_1; -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)x_1 + \left(2 - \frac{m}{3}\right)\right), B\left(x_2; -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)x_2 + \left(2 - \frac{m}{3}\right)\right), \text{ điểm } I \text{ là trung điểm của}$$

$$AB \text{ nên : } x_I = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a} = 1; y_I = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1}{2} \left[-\left(\frac{2m}{3} + 2\right)(x_1 + x_2) + 2\left(2 - \frac{m}{3}\right) \right] = -m.$$

$$I \in d : y = x - 1 \Leftrightarrow -m = 1 - 1 \Leftrightarrow m = 0 \text{ (thỏa mãn do (*)).}$$

Chọn D

♦ Bài toán 3: Bài toán tìm tham số thỏa mãn điều kiện cực trị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$

1. Số cực trị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$.

- Đạo hàm : $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0 \end{cases} (*)$.
- Nhìn vào phương trình $y' = 0$, ta thấy luôn có một nghiệm $x = 0$. Do đó việc biện luận tiếp theo sẽ phụ thuộc vào phương trình (*). Từ (*) ta thấy :

Trường hợp	Nghiệm của (*)	Số nghiệm của y'	Số cực trị
$\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$	Vô nghiệm	1	1
$\begin{cases} a \neq 0 \\ b = 0 \end{cases}$	Một nghiệm : $x = 0$	1	1

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

$a.b > 0$ (a, b cùng dấu)	Vô nghiệm	1	1
$a.b < 0$ (a, b trái dấu)	Hai nghiệm khác 0 : $x = \pm \sqrt{\frac{-b}{2a}}$	3	3

☞ **Từ đây, ta có thể khẳng định :**

- Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow a = b = 0$.
- Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow a^2 + b^2 > 0$
- Hàm số có một cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} a.b \geq 0 \\ a^2 + b^2 > 0 \end{cases}$.
- Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow a.b < 0$.

📌 **Lưu ý :** Việc sử dụng $a^2 + b^2 > 0$ là thể hiện a, b **không đồng thời bằng 0**, tuy nhiên BPT $a^2 + b^2 > 0$ mang tính phức tạp do bậc của m có thể ≥ 4 . Để khắc phục điều này, ta dùng phương pháp phủ định như sau :

$$\checkmark \text{ Xét } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Giải tìm}} \begin{cases} m = m_1 \\ m = m_2 \\ \dots\dots\dots \end{cases} .$$

✓ Quay lại giải $a^2 + b^2 > 0$ tức là lấy **phủ định kết quả** của bước một. Ta có $\begin{cases} m \neq m_1 \\ m \neq m_2 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$.

2. Tìm điều kiện để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ thỏa mãn điều kiện K:

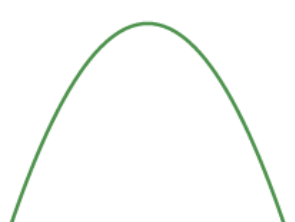
- **Bước 1 :** Tập xác định : $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm : $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0 \end{cases} .$$

- **Bước 2 :** Điều kiện hàm số có một cực trị (hoặc có ba cực trị) – **Xem mục 1 (lý thuyết)**.
- **Bước 3 :** Dựa vào điều kiện K để tìm tham số m rồi so sánh điều kiện có cực trị (**bước 2**) trước khi kết luận.

Xử lý điều kiện K (Công thức trắc nghiệm) :

- Hàm số có cực trị và thỏa mãn :

Hàm số có cực đại mà không có cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 0 \\ b < 0 \end{cases}$	Hàm số có cực tiểu mà không có cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \end{cases}$
	

- Ba cực trị tạo thành tam giác $\begin{cases} \circ \text{ vuông} \\ \circ \text{ đều} \end{cases}$, ta dùng công thức nhanh $\cos BAC = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$.

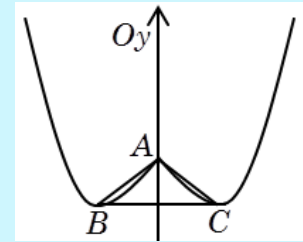
— Ba cực trị tạo thành tam giác vuông $\Leftrightarrow \cos BAC = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} = 0 = \cos 90^\circ$.

— Ba cực trị tạo thành tam giác đều

$$\Leftrightarrow \cos BAC = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ.$$

- Ba cực trị tạo thành tam giác có diện tích S.

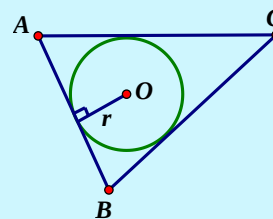
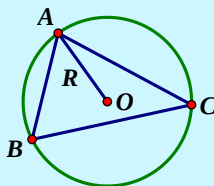
Ta dùng công thức nhanh bình phương diện tích : $S^2 = -\frac{b^5}{32a^3}$.



- Tọa độ ba điểm cực trị của đồ thị là $A(0; c)$, $B\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$, $C\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$ với $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Tam giác ABC có $\begin{cases} \overline{AB} = (b_1; b_2) \\ \overline{AC} = (c_1; c_2) \end{cases} \xrightarrow{\text{Diện tích}} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |b_1 c_2 - b_2 c_1|$.

- Công thức diện tích khác : $S = \frac{abc}{4R}$; $S = pr$ với R, r theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ; a, b, c là độ dài ba cạnh ; $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác.



PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Ví dụ 38. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m trên miền $-10;10$ để hàm số $y = x^4 - 2(2m+1)x^2 + 7$ có ba điểm cực trị?

- A. 20. B. 10. C. Vô số. D. 11.

Lời giải:

☺ Cách 1: Tự luận

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Ta có $y' = 4x^3 - 4(2m+1)x$; $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4(2m+1)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2m+1 \end{cases} (*)$.
- Hàm số đã cho có ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow 2m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$.
- Vì m nguyên thuộc $[-10;10]$ nên $m \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$. **Chọn** D

☺ Cách 2: Trắc nghiệm

- Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $ab < 0 \Leftrightarrow 1[-2(2m+1)] < 0 \Leftrightarrow 2(2m+1) > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$.

Ví dụ 39. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$ có 3 cực trị

- A. $m \in (0; 3)$. B. $m \in (3; +\infty)$.
 C. $m \in (-\infty; -3) \cup (0; 3)$. D. $m \in (-3; 0) \cup (3; +\infty)$.

Lời giải:

☺ Cách 1: Tự luận

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Ta có: $y' = 4mx^3 + 2(m^2 - 9)x = 2x(2mx^2 + m^2 - 9)$;
 $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2mx^2 + m^2 - 9 = 0 \end{cases} (1)$.
 $a=2m, b=0, c=m^2-9$
- Hàm số đã cho có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2m \neq 0 \\ \Delta = -8m(m^2 - 9) > 0 \\ 2m \cdot 0 + m^2 - 9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < -3 \\ 0 < m < 3 \\ m \neq \pm 3 \end{cases} \text{ Suy ra } m \in (-\infty; -3) \cup (0; 3). \text{ **Chọn** } \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">C$$

☺ Cách 2: Trắc nghiệm

- Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $ab < 0 \Leftrightarrow m(m^2 - 9) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ 0 < m < 3 \end{cases}$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Ví dụ 40. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^4 + m - 1x^2 + 1 - 2m$ chỉ có một cực trị.

- A.** $m \geq 1$. **B.** $m \leq 0$. **C.** $0 \leq m \leq 1$. **D.** $m \leq 0$ hoặc $m \geq 1$.

Lời giải:

- Hàm số có một cực trị khi và chỉ khi $\begin{cases} ab \geq 0 \\ a^2 + b^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m-1) \geq 0 \\ m^2 + (m-1)^2 > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \vee m \geq 1 \\ 2m^2 - 2m + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0 \vee m \geq 1.$$

- Vậy $m \leq 0$ hoặc $m \geq 1$ thỏa mãn đề bài. **Chọn** **D**

Ví dụ 41. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{3}{2}x^4 - 2mx^2 + \frac{7}{3}$ có cực tiểu mà không có cực đại.

- A.** $m \geq 0$. **B.** $m \leq 0$. **C.** $m \geq 1$. **D.** $m = -1$.

⇒ Nhận xét : Có hai trường hợp để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có cực tiểu mà không có cực đại:

- **Một là :** Hàm bậc bốn có đúng một cực trị và là cực tiểu, khi đó : $\begin{cases} a > 0 \\ ab \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$.
- **Hai là :** Hàm số trở thành hàm bậc hai (đồ thị parabol có bề lõm hướng lên), ta có : $\begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \end{cases}$.

Lời giải :

- Ta thấy $a = \frac{3}{2} > 0$, vì vậy điều kiện bài toán tương đương với $b \geq 0 \Leftrightarrow -2m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$.
- Vậy $m \leq 0$ thỏa mãn đề bài. **Chọn** **B**

Ví dụ 42. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = (m^2 - 1)x^4 + mx^2 + m - 2$ chỉ có một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.

- A.** $-1,5 < m \leq 0$. **B.** $m \leq -1$. **C.** $-1 \leq m \leq 0$. **D.** $-1 < m < 0,5$.

Lời giải:

- Hàm số có một điểm cực đại mà không có cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases} (1) \vee \begin{cases} a = 0 \\ b < 0 \end{cases} (2)$

- Giải (1): $\begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 0. (*)$

- Giải (2): $\begin{cases} a = 0 \\ b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1. (**)$

- Từ (*) và (**) suy ra $-1 \leq m \leq 0$. **Chọn** **C**

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Ví dụ 43. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị lập thành một tam giác vuông.

- A. $m = -1$. B. $m = 0$. C. $m = 1$. D. $m = 2$.

Lời giải:

☺ Cách 1: Tự luận

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- $y' = 4x^3 - 4(m-1)x = 4x(x^2 - m + 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m - 1 \end{cases}$.
- Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$. (*)
Khi đó các điểm cực trị của đồ thị là: $A(0; 1)$, $B(\sqrt{m-1}; 2m - m^2)$, $C(-\sqrt{m-1}; 2m - m^2)$;
 $\overline{AB} = (\sqrt{m-1}; 2m - m^2 - 1)$, $\overline{AC} = (-\sqrt{m-1}; 2m - m^2 - 1)$.
- Hàm số đã cho là hàm số chẵn nên đồ thị hàm số nhận Oy làm trục đối xứng $\Rightarrow \triangle ABC$ cân tại A
Theo đề: $\triangle ABC$ vuông, do đó nó phải vuông tại A, ta có: $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$.
 $\Leftrightarrow -(m-1) + (2m - m^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (m-1)^4 - (m-1) = 0 \Leftrightarrow (m-1)[(m-1)^3 - 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$.
- Kết hợp với điều kiện (*) ta có: $m = 2$. **Chọn** **D**

☺ Cách 2: Trắc nghiệm

- Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow ab < 0 \Leftrightarrow 1, [-2(m-1)] < 0 \Leftrightarrow m > 1$.
- Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số với A là đỉnh của tam giác cân ABC, ta có:
 $\cos BAC = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} \Leftrightarrow \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} = \cos 90^\circ = 0 \Leftrightarrow b^3 + 8a = 0$
 $\Leftrightarrow (-2m + 2)^3 + 8 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow (-2m + 2)^3 = -8 \Leftrightarrow -2m + 2 = -2 \Leftrightarrow m = 2$ (thỏa điều kiện).

Ví dụ 44. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m - 3$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác cân.

- A. $m \geq 0$. B. $m > 0$. C. $m \neq 0$. D. $m < 0$.

Lời giải:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$.
- Hàm số đã cho có ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x^2 = m$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow m > 0$.
- Vì hàm số đã cho là hàm số chẵn nên đồ thị của chúng đối xứng nhau qua Oy, do đó tam giác tạo bởi ba điểm cực trị của đồ thị luôn luôn là tam giác cân (tại đỉnh thuộc trục tung).
- Vậy $m > 0$ thỏa mãn đề bài. **Chọn** **B**

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Ví dụ 45. Tìm m để $(C_m): y = \frac{1}{4}x^4 - (3m+1)x^2 + 2(m+1)$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có trọng tâm là gốc tọa độ O .

A. $m = -\frac{2}{3}$.

B. $m = \frac{1}{3}$.

C. $m = 1$.

D. $m = 0$.

Lời giải:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y' = x^3 - 2(3m+1)x = x[x^2 - 2(3m+1)]$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2(3m+1) \end{cases}$.
- Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2(3m+1) > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{3}$.
- Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị, ta có: $A(0; 2m+2) \in Oy$,
 $B(-\sqrt{2(3m+1)}; -9m^2 - 4m + 1)$, $C(\sqrt{2(3m+1)}; -9m^2 - 4m + 1)$.
- Vì O là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $\begin{cases} \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{0}{3} = 0 \\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{-18m^2 - 6m + 4}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{3} \text{ (nhận)} \\ m = -\frac{2}{3} \text{ (loại)} \end{cases}$
- Vậy $m = \frac{1}{3}$ thỏa mãn đề bài. **Chọn $\rightarrow$ B**

Ví dụ 46. Biết rằng với tham số $m = m_0$ thì đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác ngoại tiếp đường tròn có bán kính bằng 1. Chọn mệnh đề đúng sau đây:

A. $m_0 \in (-3; -1)$.

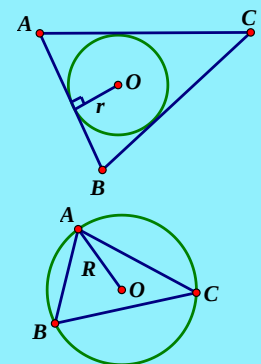
B. $m_0 \in (0; 2)$.

C. $m_0 \in (1; 3)$.

D. $m_0 \in (4; 7)$.

Lưu ý:

- Tam giác ngoại tiếp (tiếp xúc ngoài) đường tròn cũng có nghĩa là đường tròn nội tiếp (tiếp xúc trong) tam giác.
- Tam giác nội tiếp (tiếp xúc trong) đường tròn cũng có nghĩa là đường tròn ngoại tiếp (tiếp xúc ngoài) tam giác.



Lời giải:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$.
- Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$ (*).

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Tọa độ các điểm cực trị là $A(0; 2)$, $B(-\sqrt{m}; 2 - m^2)$, $C(\sqrt{m}; 2 - m^2)$.
 $\overline{AB} = (-\sqrt{m}; -m^2)$, $\overline{AC} = (\sqrt{m}; -m^2)$, $\overline{BC} = (2\sqrt{m}; 0)$ suy ra $AB = \sqrt{m + m^4} = AC$; $BC = 2\sqrt{m}$.
 Diện tích tam giác ABC : $S = \frac{1}{2} |m^2 \sqrt{m} + m^2 \sqrt{m}| = m^2 \sqrt{m}$.
 Nửa chu vi tam giác: $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = \frac{2\sqrt{m + m^4} + 2\sqrt{m}}{2} = \sqrt{m + m^4} + \sqrt{m}$.
 Ta có $S = p.r \Leftrightarrow m^2 \sqrt{m} = \sqrt{m + m^4} + \sqrt{m} \Leftrightarrow m^2 = \sqrt{1 + m^3} + 1$ (rút gọn cho $\sqrt{m} > 0$)
 $\Leftrightarrow \sqrt{m^3 + 1} = m^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 \geq 0 \\ m^3 + 1 = m^4 - 2m^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \vee m \geq 1 \\ m^2(m^2 - m - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (loại)} \\ m = -1 \text{ (loại)} \\ m = 2 \end{cases}$
 Vậy $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. **Chọn** C

Ví dụ 47. Có bao nhiêu tham số m nguyên âm để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$ có ba điểm cực trị A, B, C , sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính bằng 1?
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$.
- Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$.
- Tọa độ ba điểm cực trị của đồ thị: $A(0; m)$, $B(-\sqrt{m}; m - m^2)$, $C(\sqrt{m}; m - m^2)$.
 $\overline{AB} = (-\sqrt{m}; -m^2)$, $\overline{AC} = (\sqrt{m}; -m^2)$, $\overline{BC} = (2\sqrt{m}; 0)$; $AB = \sqrt{m + m^4} = AC$; $BC = 2\sqrt{m}$.
 Diện tích tam giác ABC : $S = \frac{1}{2} |m^2 \sqrt{m} + m^2 \sqrt{m}| = m^2 \sqrt{m}$.
 $S = \frac{abc}{4R} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R} \Leftrightarrow m^2 \sqrt{m} = \frac{(m + m^4) 2\sqrt{m}}{4 \cdot 1} \Leftrightarrow \begin{cases} m\sqrt{m} = 0 \\ 2m = 1 + m^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (loại)} \\ m = 1 \\ m = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (loại)} \\ m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$
 Vậy $m = 1 \vee m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn. Ta thấy không có giá trị m nguyên âm nào thỏa mãn.

Chọn A

♦ Bài toán 4: Tìm tham số thỏa mãn điều kiện cực trị của những hàm số khác

1. Hàm số phân thức bậc hai trên bậc một: $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ $d \neq 0$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{e}{d} \right\}$. Đạo hàm : $y' = \frac{Ax^2 + 2Bx + C}{(dx + e)^2} = \frac{g(x)}{(dx + e)^2}$ với

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = a.d - 0.b, B = \begin{vmatrix} a & c \\ 0 & e \end{vmatrix} = a.e - 0.c, C = \begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix} = b.e - c.d.$$

- Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y'$ đổi dấu hai lần trên tập xác định $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{e}{d}$.
- Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị có phương trình :

$$y = \frac{(ax^2 + bx + c)'}{(dx + e)'} = \frac{2ax + b}{d} \Leftrightarrow y = \frac{2a}{d}x + \frac{b}{d}.$$

2. Hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối :

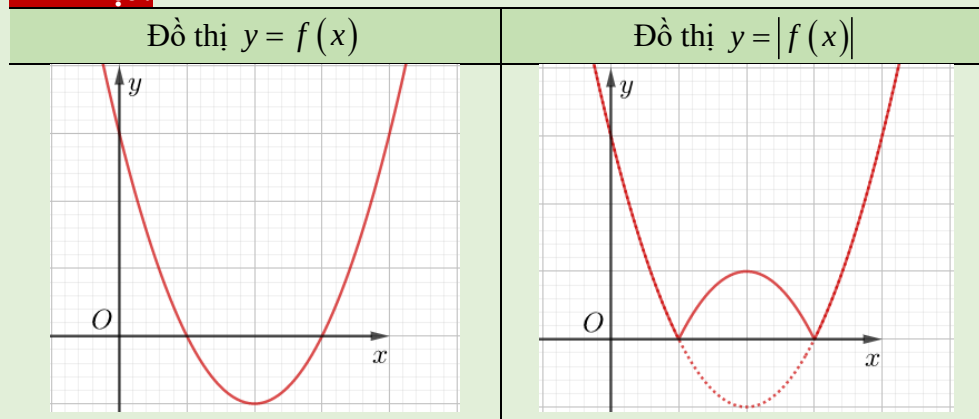
- a) Hàm số $y = |f(x)|$: Đạo hàm: $y' = \frac{f(x) \cdot f'(x)}{|f(x)|}$.

Cho trước đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên D . Ta xác định đồ thị hàm $y = |f(x)|$:

- **Bước 1: Giữ nguyên** phần đồ thị $y = f(x)$ nằm **phía trên trục hoành**.
- **Bước 2: Lấy đối xứng** phần đồ thị $y = f(x)$ **nằm dưới trục hoành qua trục hoành**.

Hợp của hai phần trên (bỏ phần dưới trục hoành), ta được đồ thị hàm $y = |f(x)|$.

Mình họa:



🔗 Dúc kết :

- $\boxed{\text{Số cực trị hàm } y = |f(x)|} = \boxed{\text{Số cực trị hàm } y = f(x)} + \underbrace{\text{Số giao điểm}}_{\text{Không tính tiếp xúc}} \begin{cases} (C) : y = f(x) \\ Ox : y = 0 \end{cases}.$

- b) Hàm số $y = f(|x|)$:

Cho trước đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên D . Ta xác định đồ thị hàm $y = f(|x|)$:

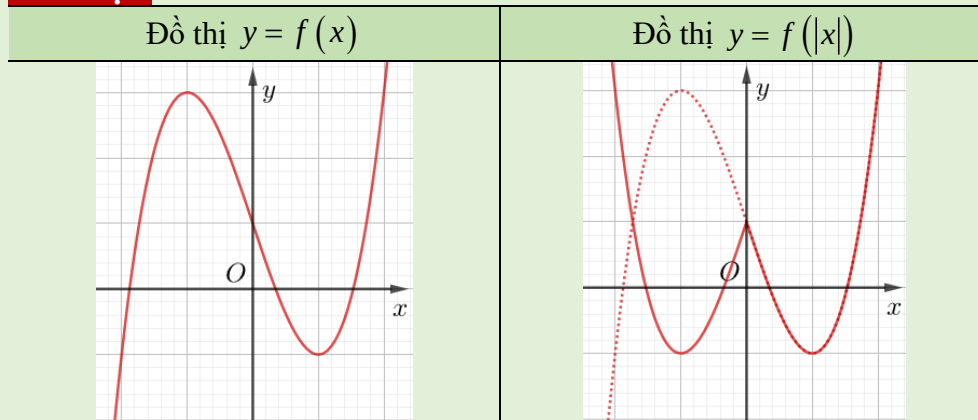
- **Bước 1: Giữ nguyên** phần đồ thị $y = f(x)$ nằm **bên phải trục tung** (ứng với $x \geq 0$); **bỏ đi** phần đồ thị $y = f(x)$ nằm **bên trái trục tung** (ứng với $x < 0$).

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- **Bước 2: Lấy đối xứng** phần đồ thị $y = f(x)$ **nằm bên phải trục tung qua trục tung**.
Hợp của hai phần trên, ta được đồ thị hàm $y = f(|x|)$.

Minh họa:



Đúc kết:

- Xét hàm đa thức $f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ (chắc chắn đồ thị hàm này sẽ cắt Oy tại một điểm), ta có:

$$\text{Số cực trị hàm } y = f(|x|) = 2 \times \underbrace{\text{Số cực trị nằm bên phải Oy của hàm } y = f(x)}_{x > 0} + 1.$$

Để cho dễ nhớ, ta gọi n là **số cực trị dương** của hàm số $y = f(x)$, khi ấy số cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ bằng $\boxed{2n+1}$.

Ví dụ 48. Tìm tất cả giá trị tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x^2 + (m+1)x - m + 1}{x - m}$ có cực đại, cực tiểu.

A. $m \in \mathbb{R}$.

B. $m = 0$.

C. $m = 1$.

D. $m = -1$.

Lời giải:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$. Đạo hàm: $y' = \frac{x^2 - 2mx - m^2 - 1}{(x - m)^2} = \frac{g(x)}{(x - m)^2}$.
- Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y'$ đổi dấu hai lần trên tập xác định $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có hai nghiệm

$$\text{phân biệt khác } m \Leftrightarrow \begin{cases} a_g = 1 \neq 0 \\ \Delta'_g = (-m)^2 + m^2 + 1 > 0 \\ g(m) = m^2 - 2m^2 - m^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 + 1 > 0 \\ -2m^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}.$$

Chọn **A**

Ví dụ 49. Tìm tất cả giá trị của tham số m để điểm $A(1; -3)$ cùng với hai điểm cực trị của đồ thị

hàm số $y = \frac{x^2 + 2mx + m}{x + 1}$ tạo thành ba điểm không thẳng hàng.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

A. $m \neq -\frac{5}{2}$.

B. $m \neq 1$.

C. $\begin{cases} m < 1 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$

D. $\begin{cases} m \leq 1 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$

Lời giải:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Đạo hàm: $y' = \frac{x^2 + 2x + m}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$.
- Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow y'$ đổi dấu hai lần trên tập xác định $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} a_g = 1 \neq 0 \\ \Delta'_g = 1 - m > 0 \\ g(-1) = 1 - 2 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1$.
- Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị là $d: y = \frac{(x^2 + 2mx + m)'}{(x+1)'} = 2x + 2m$.
 Điểm $A(1; -3) \notin d \Leftrightarrow -3 \neq 2 \cdot 1 + 2m \Leftrightarrow m \neq -\frac{5}{2}$.
- Vậy $m < 1$ và $m \neq -\frac{5}{2}$ thỏa mãn đề bài. **Chọn $\rightarrow$ C**

Ví dụ 50. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có giá trị cực đại là 7.

A. $m = 7$.

B. $m = 5$.

C. $m = -9$.

D. $m = -5$.

Lời giải:

- Điều kiện $x \neq -m$. Đạo hàm: $y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x+m)^2} = \frac{(x+m)^2 - 1}{(x+m)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - m \\ x = -1 - m \end{cases}$.
 Vì $1 - m \neq -1 - m, \forall m \in \mathbb{R}$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị $\forall m \in \mathbb{R}$.
 Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị là $y = 2x + m$.
 Suy ra $y(1 - m) = 2 - m$, $y(-1 - m) = -2 - m$.
 - Ta có bảng biến thiên:
- | | | | | | | |
|------|-----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| x | $-\infty$ | $-1 - m$ | $-m$ | $1 - m$ | $+\infty$ | |
| y' | + | 0 | - | - | 0 | + |
| y | $-\infty$ | $-2 - m$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $2 - m$ | $+\infty$ |
- Ta có $y_{CD} = -2 - m = 7 \Leftrightarrow m = -9$. **Chọn $\rightarrow$ C**

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Ví dụ 51. Tìm các số thực a, b sao cho điểm $A(0;1)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số

$$y = ax^2 + a^2 + \frac{b}{x+1}.$$

- A.** $a = \pm 1; b = 0$. **B.** $a = b = -1$. **C.** $a = b = 1$. **D.** $a = -1; b = 0$.

Lời giải:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Đạo hàm: $y' = 2ax - \frac{b}{(x+1)^2}$.
- $A(0;1)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số $\Rightarrow \begin{cases} y'(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \pm 1 \end{cases}$.
- Với $a = 1, b = 0$, ta có $y' = 2x$ đổi dấu từ **âm sang dương** (tính từ trái sang phải) khi qua $x = 0$ nên $x = 0$ là **điểm cực tiểu** của hàm số (không thỏa mãn).
- Với $a = -1, b = 0$, ta có $y' = -2x$ đổi dấu từ **dương sang âm** (tính từ trái sang phải) khi qua $x = 0$ nên $x = 0$ là **điểm cực đại** của hàm số (thỏa mãn đề bài).
- Vậy $a = -1, b = 0$. **Chọn** **D**

Ví dụ 52. Gọi S là tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} \right|$

có 5 điểm cực trị. Vậy S sẽ nhận giá trị nào sau đây?

- A.** 2016. **B.** 1952. **C.** -2016. **D.** -496.

🔍 Nhận xét : Để giải quyết dạng toán này, các bạn học sinh cần :

- Xem lại lý thuyết **tìm số cực trị hàm** $y = |f(x)|$ được tóm tắt ở phần trên.
- Ngoài ra, các em cần phải nắm công thức **tìm tổng cấp số cộng**: Cho cấp số cộng với số hạng đầu u_1 , công sai d , khi đó **tổng của n số hạng đầu** là: $S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}$ với $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Lời giải :

😊 Cách 1: Tự luận

- Xét: $y = \left| f(x) + \frac{m}{2} \right|$ với $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5, \forall x \in \mathbb{R}$. Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.
- Áp dụng công thức: $(|u|)' = \frac{u \cdot u'}{|u|}$, ta có: $y' = f'(x) \cdot \frac{f(x) + \frac{m}{2}}{\left| f(x) + \frac{m}{2} \right|}$.
- Xét $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = -\frac{m}{2} \end{cases} ; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$ (hai nghiệm phân biệt).

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Vậy hàm số $y = \left| f(x) + \frac{m}{2} \right| = \left| x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} \right|$ có năm điểm cực trị khi $f(x) = -\frac{m}{2}$ có ba nghiệm phân biệt khác $-1, 3$ (*).
- Bản biến thiên hàm $f(x)$:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	-32	$+\infty$	

- Ta thấy với (*) $\Leftrightarrow -32 < -\frac{m}{2} < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 64$. Vì m nguyên nên $m \in \{1, 2, \dots, 63\}$
- Tổng các giá trị của m là $S = \frac{63}{2}(1+63) = 2016$. Chọn $\rightarrow$ **A**

😊 Cách 2: Trắc nghiệm

- Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}$ có $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = \frac{m}{2} \\ x = 3 \Rightarrow y = -32 + \frac{m}{2} \end{cases}$.
 - Ta biết: $\boxed{\text{Số cực trị hàm } y = |f(x)|} = \boxed{\text{Số cực trị hàm } y = f(x)} + \underbrace{\boxed{\text{Số giao điểm}}}_{\text{Không tính tiếp xúc}} \begin{cases} (C) : y = f(x) \\ Ox : y = 0 \end{cases}$
- mà: Số cực trị của hàm $y = f(x)$ bằng 2. Do đó yêu cầu đề bài tương đương với $\begin{cases} (C) : y = f(x) \\ Ox : y = 0 \end{cases}$
- có ba giao điểm (không tính tiếp xúc) $\Leftrightarrow y = f(x)$ có hai cực trị trái dấu $\Leftrightarrow \frac{m}{2} \cdot \left(-32 + \frac{m}{2}\right) < 0$
- $\Leftrightarrow m(m-64) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 64$. Vì m nguyên nên $m \in \{1, 2, \dots, 63\}$.

Ví dụ 53. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	11	4	$+\infty$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $g(x) = |f(x) - 3m|$ có 5 điểm cực trị:

- A.** 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải :

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) - m|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - m$ và số nghiệm đơn của phương trình $f(x) - m = 0$.
- Dựa vào bảng biến thiên, ta có số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - 3m$ là 2. Do đó để hàm số $g(x) = |f(x) - 3m|$ có 5 điểm cực trị thì phương trình $f(x) - 3m = 0$ phải có 3 nghiệm đơn.
- Từ bảng biến thiên, ta thấy: $f(x) = 3m$ có 3 nghiệm đơn khi và chỉ khi $4 < 3m < 11 \Leftrightarrow \frac{4}{3} < m < \frac{11}{3}$; vì m nguyên nên $m \in \{2; 3\}$. Chọn $\rightarrow$ **A**

Ví dụ 54. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^4 - 8x^3 + 18x^2 + m|$ có 3 điểm cực trị?

- A.** 1. **B.** Vô số. **C.** 2. **D.** Không có.

Lời giải:

- Áp dụng công thức: $(|u|)' = \frac{u \cdot u'}{|u|}$, ta có: $y' = \frac{(x^4 - 8x^3 + 18x^2 + m)(4x^3 - 24x^2 + 36x)}{|x^4 - 8x^3 + 18x^2 + m|}$.

$$y' = \frac{(x^4 - 8x^3 + 18x^2 + m)4x(x-3)^2}{|x^4 - 8x^3 + 18x^2 + m|}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (nghiệm đơn)} \\ x = 3 \text{ (nghiệm kép)} \\ \underbrace{x^4 - 8x^3 + 18x^2}_{g(x)} = -m \text{ (*)} \end{cases}$$

- Xét hàm số $g(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2$; $g'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0
$g(x)$	$+\infty$	0	27	$+\infty$

- Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình $\underbrace{x^4 - 8x^3 + 18x^2}_{g(x)} = -m \text{ (*)}$ có **tối đa hai nghiệm**.

Ngoài ra, $x = 0$ là **nghiệm đơn**, $x = 3$ là **nghiệm kép** của phương trình $y' = 0$. Vì vậy hàm số đã cho có ba cực trị tương đương phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$\Leftrightarrow -m > 0 \Leftrightarrow m < 0$. Khi đó có vô số giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài. Chọn $\rightarrow$ **B**

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Ví dụ 55. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2 + m)$ có 8 điểm cực trị là:

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 2

Lời giải:

- Ta có: $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x) = (x-1)^2 x(x-2)$;
 $g'(x) = (3x^2 - 6x) \cdot f'(x^3 - 3x^2 + m) = (3x^2 - 6x)(x^3 - 3x^2 + m - 1)^2 (x^3 - 3x^2 + m)(x^3 - 3x^2 + m - 2)$.
- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = 2 \\ x^3 - 3x^2 = -m + 1 & (1) \\ x^3 - 3x^2 = -m & (2) \\ x^3 - 3x^2 = -m + 2 & (3) \end{cases}$
- Ta thấy những nghiệm (nếu có) từ phương trình (1) luôn là nghiệm kép ($g'(x)$ không đổi dấu khi đi qua nghiệm kép). Vì vậy, yêu cầu đề bài tương đương **hai phương trình (2) và (3) có tất cả sáu nghiệm phân biệt khác 0 và 2 (*)**.

- Xét hàm số $h(x) = x^3 - 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Đạo hàm: $h'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

- Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$	$\nearrow 0$		$\searrow -4$		$\nearrow +\infty$

- Từ bảng biến thiên, ta thấy: (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} -4 < -m < 0 \\ -4 < -m + 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 4 \\ 2 < m < 6 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m < 4$. **Chọn $\boxed{A}$**

Ví dụ 56. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m+3)x + m - 4$. Tìm tất cả giá trị m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

- A. $-3 < m < -1$. B. $m > 1$. C. $m > 4$. D. $m > 0$.

Nhận xét: Để giải quyết dạng toán này, các em học sinh cần xem lại **cách xây dựng công thức tìm số cực trị của hàm $y = f(|x|)$** trong phần lý thuyết. Từ đó ta rút ra công thức:

Số cực trị hàm $y = f(|x|) = 2n + 1$ với n là **số cực trị dương** ($x > 0$) của hàm số $y = f(x)$.

Lời giải:

- Hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ có 2 cực trị dương.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Xét hàm $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m+3)x + m - 4$ với $f'(x) = x^2 - 2(m+1)x + m + 3$.
- Hàm $f(x)$ có hai cực trị dương khi và chỉ khi $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $0 < x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - (m+3) > 0 \\ S = 2(m+1) > 0 \\ P = m+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \vee m > 1 \\ m > -1 \\ m > -3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1. \xrightarrow{\text{Chọn}} \boxed{B}$$

Ví dụ 57. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = (x-1)^3 [x^2 + (4m-5)x + m^2 - 7m + 6]$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

- A. 4. B. 2. C. 5. D. 3.**

Lời giải:

- Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (4m-5)x + m^2 - 7m + 6 = 0 \quad (*) \\ x = 1 \end{cases}$.
 - Hàm $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị $x > 0$
 $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*) : h(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $\begin{cases} x_1 < 0 < x_2 \neq 1 & (1) \\ x_1 = 0 < x_2 \neq 1 & (2) \end{cases}$
- $$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} h(0) = m^2 - 7m + 6 < 0 \\ h(1) = 1^2 + (4m-5) \cdot 1 + m^2 - 7m + 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m < 6 \\ m \neq 1, m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (1; 2) \cup (2; 6).$$
- $$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} h(0) = m^2 - 7m + 6 = 0 \\ x_1 = 0 \\ 0 < \underbrace{5-4m}_{x_2 = 5-x_1} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \vee m = 6 \\ m < \frac{5}{4}, m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$
- Do đó tập các giá trị nguyên m thỏa yêu cầu bài toán là $\{3; 4; 5\}$. $\xrightarrow{\text{Chọn}} \boxed{D}$

Ví dụ 58. Cho hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2 + 1)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$				18				$+\infty$
				2			2		

Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.**

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

🔍 Nhận xét: Đây là loại toán *Tìm cực trị bằng truy ngược hàm ẩn*. Tôi xin giới thiệu hai cách xử lý phổ biến cho dạng bài tập này.

Lời giải:

▪ Ta có: $g'(x) = (3x^2 - 6x)f'(x^3 - 3x^2 + 1) = 3x(x-2)f'(x^3 - 3x^2 + 1)$ (1)

▪ Không mất tính tổng quát, ta chọn $g'(x) = x(x-2)(x-3)$ (2)

Đồng nhất (1) và (2), ta có: $f'(x^3 - 3x^2 + 1) = \frac{x-3}{3}$.

▪ Với $x=3$ thì $f'(1)=0$. Với $x=1$ thì $f'(-1)=-\frac{2}{3}<0$. Ta có bảng xét dấu $f'(t)$ như sau:

t	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(t)$		-	0	+	

▪ Từ đây, ta thấy hàm số $y = f(t)$ (hay $y = f(x)$) có một điểm cực trị (cực tiểu).

Chọn → B

Ví dụ 59. Cho hàm số $g(x) = f(x^2 - 4x)$ có bảng xét dấu $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Hỏi hàm số $y = f(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải:

▪ Ta có: $g'(x) = (2x-4)f'(x^2-4x) = 2(x-2)f'(x^2-4x)$ (1)

▪ Không mất tính tổng quát, chọn $g'(x) = (x+1)(x-2)(x-5)$ (2)

▪ Đồng nhất (1) và (2), ta được: $f'(x^2-4x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-5)$.

☺ Cách giải 1:

▪ Với $x=-1$ thì $f'(5)=0$, với $x=5$ thì $f'(5)=0$.

▪ Chuẩn bị cho bảng xét dấu, ta có: với $x=0$ thì $f'(0)=-\frac{5}{2}<0$, với $x=6$ thì $f'(12)=\frac{7}{2}>0$.

t	$-\infty$		5		$+\infty$
$f'(t)$		-	0	+	

▪ Từ bảng trên, ta thấy hàm số $y = f(t)$ (hay $y = f(x)$) có đúng một điểm cực trị dương (nằm bên phải trục Oy). Do đó số cực trị của hàm $y = f(|x|)$ là: $2.1+1=3$.

Chọn → D

☺ Cách giải 2:

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- $f'(x^2 - 4x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-5) \Leftrightarrow f'[(x+1)(x-5)+5] = \frac{1}{2}(x+1)(x-5)$. Đặt $t = (x+1)(x-5)+5 \Rightarrow t-5 = (x+1)(x-5)$.
- Ta có: $f'(t) = \frac{1}{2}(t-5) = 0 \Leftrightarrow t = 5$ (nghiệm đơn). Do đó hàm số $y = f(t)$ (hay $y = f(x)$) có đúng một điểm cực trị dương (nằm bên phải trục Oy). Số cực trị của hàm $y = f(|x|)$ là: $2.1+1=3$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-2	-3	$+\infty$	

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là:

- A. $x = 3$. B. $x = 0$. C. $x = -1$. D. $x = -2$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây **sai**?

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

- A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$. B. Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$.
 C. $x = 1$ là điểm cực trị của hàm số. D. Hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	1		2		3		4		$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\parallel$		$+$	$\parallel$		$-$	0	$+$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Kết luận nào sau đây đúng

- A. Hàm số có 4 điểm cực trị. B. Hàm số có 2 điểm cực đại.
C. Hàm số có 2 điểm cực trị. D. Hàm số có 2 điểm cực tiểu.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-4	-3	-4	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm:

- A. $x = 0$. B. $(0; -3)$. C. $y = -3$. D. $x = -3$.

Câu 5. Hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'	$+$	$ $	0	$-$	0
y	$-\infty$	0	1	-1	0

- A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.
B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng -1 .
C. Hàm số có đúng hai cực trị.
D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $x = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	$+$	$ $	$-$	0
y	$-\infty$	0	-1	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- A. Hàm số $y = f(x)$ có giá trị cực tiểu bằng 1.
 B. Hàm số $y = f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng 1.
 C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.
 D. Hàm số $y = f(x)$ có đúng một cực trị.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
y'		+	-	+
y	$-\infty$	5	2	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 4)$.
 B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 0$.
 C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(4; +\infty)$.
 D. Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

Câu 8. Hàm số nào sau đây có ba điểm cực trị

- A. $y = -x^4 - 2x^2 + 1$
 B. $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 7x + 2$
 C. $y = \sqrt{x^4 - 2x^2}$
 D. $y = -x^4 + 2x^2$

Câu 9. Tìm điểm cực đại của hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$.

- A. $x = -1$. B. $x = -3$. C. $x = 3$. D. $x = 1$.

Câu 10. Tìm điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \frac{x^4}{2} - x^2 + 3$.

- A. $y = \frac{5}{2}$. B. $\left(-1; \frac{2}{5}\right), \left(1; \frac{2}{5}\right)$. C. $\left(-1; \frac{5}{2}\right), \left(1; \frac{5}{2}\right)$. D. $x = \pm 1$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Câu 11. Hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2, x_3 . Tính $S = x_1 + x_2 + x_3$.

- A. 0. B. 2. C. -1. D. -2.

Câu 12. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 4$. Tích các giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số bằng

- A. 0. B. 20. C. 12. D. -12.

Câu 13. Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 3$ có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu lần lượt là y_1, y_2 . Khi đó

- A. $y_1 + y_2 = 12$. B. $y_1 + 3y_2 = 15$. C. $2y_1 - y_2 = 5$. D. $y_2 - y_1 = 2\sqrt{3}$.

Câu 14. Số điểm cực trị của hàm số $y = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x + 1$ là

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 15. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có bảng biến thiên dưới đây:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	0	-
y	$-\infty$	2	1	2	$-\infty$

Tính $P = a - 2b + 3c$.

- A. $P = 3$. B. $P = 6$. C. $P = -2$. D. $P = 2$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x+3)$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ biết $f'(x) = x^2(x-1)(x^2+x-2)^3(x-5)^4$. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số là

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 18. Cho đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ có $y' = (1+x)(x+2)^2(x-3)^3(1-x^2)$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng:

- A. (C) có một điểm cực trị. B. (C) có hai điểm cực trị.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

C. (C) có ba điểm cực trị.

D. (C) có bốn điểm cực trị.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^{2019}(x-1)^2(x+1)^3$. Số điểm cực đại của hàm số $f(x)$ là

A.1.

B.-1.

C.0.

D.3.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \frac{(x+2)^2(2-x)}{x^2}, \forall x \neq 0$.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số có ba điểm cực trị.

B. Hàm số có hai điểm cực trị.

C. Hàm số có một điểm cực đại.

D. Hàm số có một điểm cực tiểu.

Câu 21. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ có hai cực trị là A, B . Điểm nào sau đây thuộc đường thẳng AB ?

A. $E\left(\frac{1}{8}; 0\right)$.

B. $M(0; -1)$.

C. $P(-1; -7)$.

D. $N(1; 9)$.

Câu 22. Cho điểm $I(-2; 2)$ và A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$. Tính diện tích S của tam giác IAB .

A. $S = 20$.

B. $S = \sqrt{10}$.

C. $S = 10$.

D. $S = \sqrt{20}$.

Câu 23. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$. Tính diện tích S của tam giác có ba đỉnh là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

A. $S = 1$.

B. $S = 2$.

C. $S = 3$.

D. $S = \frac{1}{2}$.

Câu 24. Hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 8}{x - 2}$ có số điểm cực trị là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Câu 25. Giá trị cực đại của hàm số $y = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$

A. $y_{CD} = -1$

B. $y_{CD} = 3$

C. $y_{CD} = -5$

D. $y_{CD} = 1$

Câu 26. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$. B. Hàm số không có cực trị.
C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$. D. Hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 27. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$. B. Hàm số không có cực trị.
C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$. D. Hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 28. Hàm số $y = |x^4 - 2x^2 - 3|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 6. B. 5. C. 3. D. 4.

Câu 29. Các điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = f(x) = \sin 2x$ ($x \in \mathbb{R}$) là

- A. $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
C. $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$). D. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Câu 30. Hàm số $y = |(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)\dots(x+2018)(x-2019)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2019. B. 2018. C. 4037. D. 4038.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 2x - 4)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2018	-2018	$+\infty$	

Đồ thị hàm số $y = |f(x - 2017) + 2018|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 5.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	6	2	$+\infty$	

Hàm số $y = f(|x-3|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5

B. 6

C. 3

D. 1

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hỏi hàm số $g(x) = f(x) + x^3 + 3x^2 - 9x - 5$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $g(x) = f(x) - x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x + 2020$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có bảng xét dấu sau

x	$-\infty$	-3	2	5	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

Số điểm cực tiểu của hàm số $y = g(x) = f(6 - x^2)$ là:

A. 5.

B. 7.

C. 3.

D. 4.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)^4(x^2+4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ là

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 38. Số điểm cực trị của hàm số $y = g(x) = f\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ là

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$						$-\infty$

Số cực trị của hàm số $g(x) = f^2(2x^2 + x)$ là:

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-2	-1	-2	$+\infty$		

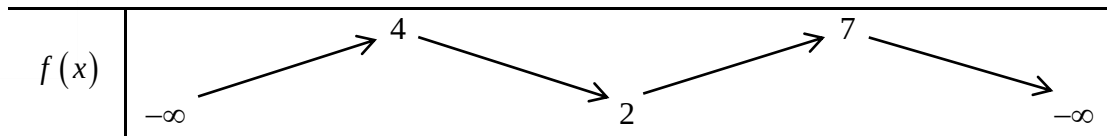
Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f^3(x^3 + 3x)$ là:

- A. 5. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ



Hỏi hàm số $y = [f(2-x)]^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 4. B. 3. C. 5. D. 7.

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0		1	2		$+\infty$	
y'	+		0	-	+		0	-
y	$-\infty$	3		-1	2		$-\infty$	

Hàm số $g(x) = \left(f\left(\frac{x-1}{x+2} \right) \right)^{2018}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 7 B. 3 C. 5 D. 6

Câu 43. Cho $y = f(x)$ là hàm số xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết bảng xác dấu của $y = f'(3-2x)$ như sau:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	3	4	$+\infty$	
$f'(3-2x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 44. Cho $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết bảng xét dấu của $y = f'(\sqrt[3]{x})$ như sau

x	$-\infty$	-1	8	27	$+\infty$
$f'(\sqrt[3]{x})$	$-$	0	$+$	0	$+$

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Câu 45.** Giá trị của m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + m$ đạt cực đại tại $x = 1$ là
- A. $m = -1$. B. $m = -2$. C. $m = 2$. D. $m = 0$.
- Câu 46.** Hàm số $y = 2x^3 - (4 - 2m)x^2 + (m - 5)x - 4$ đạt cực đại tại $x = 0$ thì giá trị của m là
- A. -5 . B. 5 . C. -2 . D. 13 .
- Câu 47.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 - 4x^3 + mx^2 - 4x + 3$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.
- A. $m = 2$. B. $m = 4$. C. $m = 6$. D. $m = 1$.
- Câu 48.** Để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực tiểu tại $x = 2$ thì tham số thực m thuộc khoảng nào sau đây?
- A. $m \in (3; 5)$. B. $m \in (-3; -1)$. C. $m \in (1; 3)$. D. $m \in (-1; 1)$.
- Câu 49.** Biết đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 - 1$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có một điểm cực trị là $A(1; -2)$, giá trị của $3a + 4b$ là
- A. 6 . B. -6 . C. -18 . D. -1 .
- Câu 50.** Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + ax + b$ có điểm cực tiểu là $A(2; -2)$. Tính tổng $S = a + b$.
- A. $S = 34$. B. $S = -14$. C. $S = 14$. D. $S = -20$.
- Câu 51.** Ta xác định được các số a, b, c để đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $(0; 1)$ và có điểm cực trị $(-2; 0)$. Tính giá trị của biểu thức $T = 4a + b + c$.
- A. 20 . B. 23 . C. 24 . D. 22 .
- Câu 52.** Biết rằng hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$, giá trị cực tiểu bằng -3 và đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ 2 . Tìm giá trị của hàm số tại $x = 2$.
- A. $f(2) = 8$. B. $f(2) = 0$. C. $f(2) = 0$. D. $f(2) = 4$.
- Câu 53.** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (4m - 1)x - 3$. Mệnh đề nào sau đây sai?
- A. Hàm số đạt cực đại, cực tiểu khi $m \neq \frac{1}{2}$. B. Hàm số đạt cực đại, cực tiểu khi $m > 1$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

C. Hàm số đạt cực đại, cực tiểu khi $m < \frac{1}{2}$. D. Với mọi m , hàm số luôn có cực trị.

Câu 54. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ có hai điểm cực trị.

A. $m \leq 3$. B. $m > 3$. C. $m > -3$. D. $m < 3$.

Câu 55. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 1$ không có cực trị là

A. $m < 1$. B. $m > 1$. C. $m \leq 1$ D. $m \geq 1$.

Câu 56. Tìm các số thực m để hàm số $y = (m-2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$ có cực trị.

A. $\begin{cases} m \neq 2 \\ -3 < m < 1 \end{cases}$. B. $-3 < m < 1$. C. $\begin{cases} m < -3 \\ 1 < m \end{cases}$. D. $-2 < m < 1$.

Câu 57. Biết rằng hàm số $y = (x+a)^3 + (x+b)^3 - x^3$ có hai điểm cực trị. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

A. $ab \leq 0$. B. $ab < 0$. C. $ab > 0$. D. $ab \geq 0$.

Câu 58. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x + m$ có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu.

A. $-2 < m < 2$. B. $m \in \{-2; 2\}$. C. $m < -2$ hoặc $m > 2$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Câu 59. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2; 3)$.

A. $m \in (-1; 3) \cup (3; 4)$. B. $m \in (1; 3)$.

C. $m \in (3; 4)$. D. $m \in (-1; 4)$.

Câu 60. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$. Biết đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(1; -1), B(-1; 3)$. Tính $f(4)$.

A. $f(4) = -53$. B. $f(4) = 17$. C. $f(4) = -17$. D. $f(4) = 53$.

Câu 61. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị nhận hai điểm $A(0; 3)$ và $B(2; -1)$ làm hai điểm cực trị. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = |ax^2|x + bx^2 + c|x| + d$ là:

A. 7. B. 5. C. 9. D. 11

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- Câu 62.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m trên miền $[-10;10]$ để hàm số $y = x^4 - 2(2m+1)x^2 + 7$ có ba điểm cực trị?
- A. 20. B. 10. C. Vô số. D. 11.
- Câu 63.** Xác định các hệ số a, b, c của đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ biết $A(1;4), B(0;3)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số?
- A. $a=1; b=0; c=3$. B. $a=-\frac{1}{4}; b=3; c=-3$.
 C. $a=1; b=3; c=-3$. D. $a=-1; b=2; c=3$.
- Câu 64.** Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^4 + 2x^2 - 10$ có ba điểm cực trị.
- A. $m=0$. B. $m \neq 0$. C. $m > 0$. D. $m < 0$.
- Câu 65.** Có bao nhiêu số nguyên m để đồ thị hàm số $y = (m-1)x^4 + (6-m)x^2 + m$ có đúng 1 cực trị?
- A. 5. B. 1. C. 6. D. 0.
- Câu 66.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-3;3]$ để hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 4)x^2 + 8$ có đúng một điểm cực trị.
- A. 5. B. 3. C. 6. D. 4.
- Câu 67.** Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = (m^2 - 1)x^4 + mx^2 + m - 2$ chỉ có một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.
- A. $-1,5 < m \leq 0$. B. $m \leq -1$. C. $-1 \leq m \leq 0$. D. $-1 < m < 0,5$.
- Câu 68.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{3}{2}x^4 - 2mx^2 + \frac{7}{3}$ có cực tiểu mà không có cực đại.
- A. $m \geq 0$. B. $m \leq 0$. C. $m \geq 1$. D. $m = -1$.
- Câu 69.** Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^2 - 2$. Tìm m để hàm số có 3 điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số là ba đỉnh của một tam giác vuông?
- A. $m = -1$. B. $m = -2$. C. $m = 1$. D. $m = 2$.
- Câu 70.** Xác định các hệ số a, b, c để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có hai điểm cực trị là $A(1;4), B(0;3)$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

A. $a=1, b=0, c=3$.

B. $a=-\frac{1}{4}, b=3, c=-3$.

C. $a=1, b=3, c=-3$.

D. $a=-1, b=2, c=3$.

Câu 71. Với giá trị thực nào của tham số m thì đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác đều?

A. $m=0$.

B. $m=\sqrt[3]{3}$.

C. $m=-\sqrt[3]{3}$.

D. $m=1$.

Câu 72. Tìm điều kiện của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 1)x^2 + 1 - 2m$ có một cực tiểu và hai cực đại.

A. $m \in (1; +\infty)$.

B. $m \in (-\infty; -1)$.

C. $m \in (0; 1)$.

D. $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Câu 73. Cho hàm số $y = x^4 - 2(1 - m^2)x^2 + m + 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị lập thành một tam giác có diện tích lớn nhất.

A. $m = \frac{1}{2}$

B. $m = 0$

C. $m = 1$

D. $m = -\frac{1}{2}$

Câu 74. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(x) = (x-1)^2(x+2)$.

Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(2 - x^2)$.

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 4.

Câu 75. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $\begin{cases} a > 0, d > 2019 \\ a + b + c + d - 2019 < 0 \end{cases}$. Số điểm cực trị của hàm số $y = |g(x)|$ với $g(x) = f(x) - 2019$ là

A. 2.

B. 5.

C. 3.

D. 1.

Câu 76. Tính tổng S tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị, đồng thời đường tròn đi qua ba điểm đó có bán kính bằng 1.

A. $S = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

B. $S = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

C. $S = 0$.

D. $S = 1$.

Câu 77. Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 3$ có ba điểm cực trị đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ O tạo thành tứ giác nội tiếp.

A. $S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}; 1; -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$.

B. $S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}; 1; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

C. $S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\}.$

D. $S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$

Câu 78. Đồ thị của hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 3m^2$ có 3 điểm cực trị lập thành tam giác nhận $G(0; 2)$ làm trọng tâm khi và chỉ khi

A. $m = 1.$

B. $m = -\sqrt{\frac{2}{7}}.$

C. $m = -1.$

D. $m = -\sqrt{\frac{6}{7}}.$

Câu 79. Cho hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là 0, 1, 2 và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y = f(4x - 4x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 80. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-3x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2 - 10x + m^2)$ có 5 điểm cực trị

A. 8.

B. 9.

C. 10.

D. 11.

Câu 81. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x^2 - 8x + m)$ có 5 điểm cực trị.

A. 18.

B. 15.

C. 16.

D. 17.

Câu 82. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^2 - 2$ có đồ thị (C) và điểm $C(1; 4)$. Tính tổng các giá trị nguyên dương của m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 4.

A. 6.

B. 5.

C. 3.

D. 4.

Câu 83. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}|x|^3 - (m-1)x^2 + (m-3)|x| + m^2 - 4m + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có 5 điểm cực trị.

A. $m > 3.$

B. $m > 1.$

C. $m > 4.$

D. $-3 < m < -1.$

Câu 84. Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12|$ có bảy điểm cực trị.

A. 1.

B. 4.

C. 0.

D. 2.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Câu 85. Tham số m thuộc khoảng nào dưới đây để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có cực đại, cực tiểu mà các điểm cực trị này tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

- A. $m \in (0; 2)$. B. $m \in (1; 3)$. C. $m \in (2; 4)$. D. $m \in (-2; 0)$.

Câu 86. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2|$ có đúng năm điểm cực trị?

- A. 5. B. 7. C. 6. D. 4.

Câu 87. Số giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2018]$ sao cho đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + mx + 2$ có điểm cực tiểu nằm bên phải trục tung.

- A. 2019. B. 0. C. 2017. D. 2018.

Câu 88. Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x - m|$ có 7 điểm cực trị bằng

- A. 63. B. 42. C. 55. D. 30.

Câu 89. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x^2 + 2mx + 5)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị?

- A. 7. B. 0. C. 6. D. 5.

Câu 90. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x^2 + 2mx + 5)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m > -10$ để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

- A. 6. B. 7. C. 8. D. 9.

Câu 91. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^4(x-m)^5(x+3)^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-5; 5]$ để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 92. Cho hàm số $f'(x) = (x-2)^2(x^2 - 4x + 3)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x^2 - 10x + m + 9)$ có 5 điểm cực trị?

- A. 17. B. 18. C. 15. D. 16.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Câu 93. Cho hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (3-m)x + 2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

- A. $m \geq 3$. B. $m > 3$. C. $-\frac{1}{2} < m < 3$. D. $-\frac{1}{2} < m \leq 3$.

Câu 94. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để điểm $M(2m^3; m)$ tạo với hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ một tam giác có diện tích nhỏ nhất.

- A. $m = 2$. B. $m = 0$. C. $m = -1$. D. $m = 1$.

Câu 95. Cho hàm số $f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x - 3$. Hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị khi $m \in \left(\frac{a}{b}; c\right)$ (với a, b, c là các số nguyên và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $P = a + b + c$.

- A. $P = 9$. B. $P = 7$. C. $P = 11$. D. $P = 6$.

Câu 96. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |x|^3 - (2m-1)x^2 + (m-1)x - 2$ có đúng 3 điểm cực trị

- A. $m \leq 1$ B. $m \geq -2$ C. $-2 \leq m \leq 1$ D. $m > 1$.

Câu 97. Cho hàm số $f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

- A. $\frac{5}{4} < m < 2$. B. $-\frac{5}{4} < m < 2$. C. $-2 < m < \frac{5}{4}$. D. $\frac{5}{4} \leq m \leq 2$.

Câu 98. Cho hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + m - 1|$ với m là tham số thực. Số giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2; 2]$ để hàm số đã cho có 3 điểm cực trị là

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

Câu 99. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10; 10]$ để $g(x) = f(x^2 - 2x - m)$ có 5 điểm cực trị?

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

A. 10.

B. 15.

C. 20.

D. 21.

Câu 100. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = 3f(-x^4 + 4x^2 - 6) + 2x^6 - 3x^4 - 12x^2$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

ĐÁP ÁN BÀI TẬP

1B	2B	3D	4A	5C	6C	7D	8D	9C	10C
11A	12B	13C	14B	15C	16D	17D	18B	19A	20C
21B	22C	23A	24B	25C	26B	27C	28B	29B	30C
31B	32B	33C	34A	35B	36D	37D	38D	39C	40B
41C	42D	43C	44D	45C	46B	47C	48D	49B	50C

51B	52D	53D	54D	55D	56A	57C	58A	59A	60D
61A	62D	63D	64D	65C	66D	67C	68B	69C	70D
71B	72B	73B	74B	75B	76B	77C	78D	79C	80B
81D	82C	83A	84C	85A	86D	87D	88B	89C	90B
91C	92D	93A	94B	95C	96A	97A	98C	99A	100D