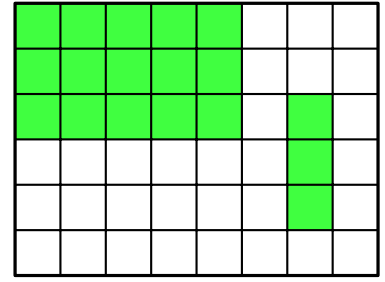


Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a$; cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Gọi α là số đo của góc nhị diện $[S, BD, C]$. Hỏi $\cos \alpha$ bằng bao nhiêu?

Câu 8. Tổng của tất cả các nghiệm của phương trình $2 \log_2(x + 5) + \log_2 x^2 = 2 \log_2 6$ bằng bao nhiêu?

Câu 9. Một Bảng chữ nhật kích thước 6×8 gồm 48 hình vuông có độ dài cạnh bằng 1. Gọi S là tập hợp các hình chữ nhật, có diện tích là một số nguyên lẻ, được tạo thành từ các hình vuông cạnh 1 của Bảng chữ nhật (tham khảo hình vẽ). Hỏi tập hợp S có bao nhiêu phần tử?

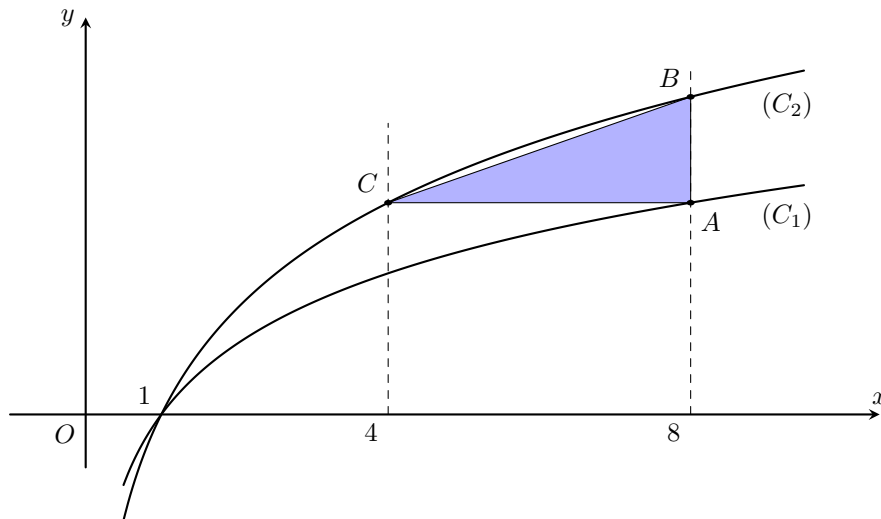


Câu 10. Cho dãy số (u_n) với $n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = 3n^2 - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Giá trị của biểu thức $u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{19}$ bằng bao nhiêu?

Câu 11. Kí hiệu a, b, c tương ứng là độ dài các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC .

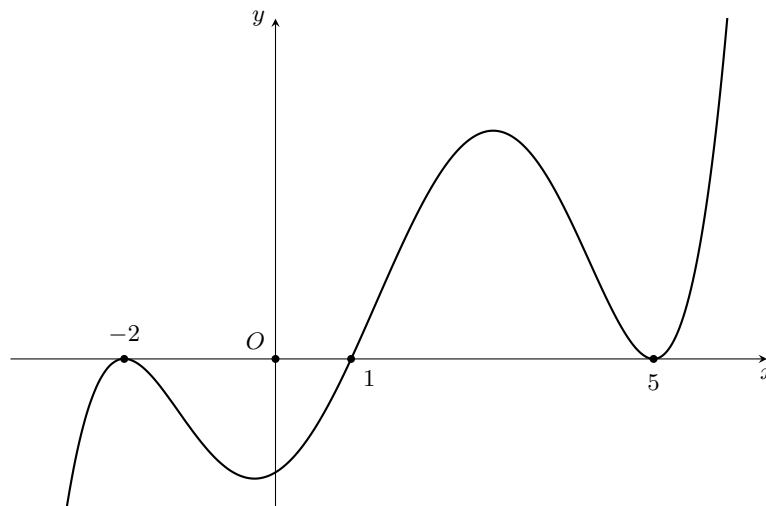
Biết rằng $a(\cos B + \cos C) = b + c$ và $\cos(A - B) = \frac{1}{2}$. Số đo của góc B bằng bao nhiêu độ?

Câu 12. Cho hai đường cong $(C_1) : y = \log_a x$ và $(C_2) : y = \log_b x$. Đường thẳng $d_1 : x = 8$ cắt các đường cong $(C_1), (C_2)$ lần lượt tại A và B ; đường thẳng $d_2 : x = 4$ cắt đường cong (C_2) tại C (tham khảo hình vẽ). Biết rằng tam giác ABC là tam giác vuông tại A và $AB = 2$. Hỏi $\log_2(ab)$ bằng bao nhiêu?



Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh 1, $\widehat{BAD} = 60^\circ$; cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 1$. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) bằng bao nhiêu?

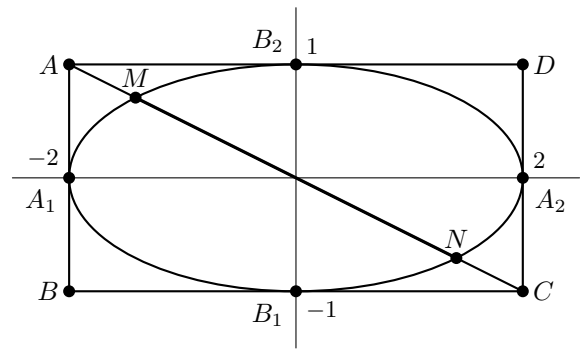
Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc sáu, có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x) = f(x^2)$, hỏi bất phương trình $g'(x) \geq 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-2026; 2027]$?

Câu 15. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2$ cm, $BC = 4$ cm. Gọi A_1, A_2, B_1, B_2 lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, BC, DA . Một elip nhận bốn điểm A_1, A_2, B_1, B_2 là các đỉnh và cắt đường chéo AC tại hai điểm M, N (tham khảo hình vẽ).

Một chất điểm di chuyển trên đường thẳng AC theo hướng từ A đến C với vận tốc là 1 cm/s. Thời gian để chất điểm di chuyển từ M đến N là bao nhiêu giây?



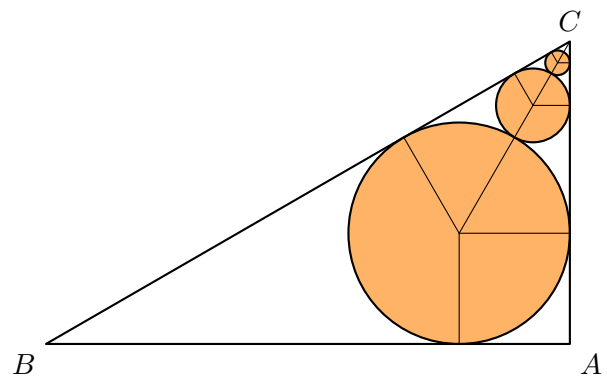
PHẦN II - Tự luận (8,0 điểm).

Thí sinh trả lời từ câu 16 đến câu 20. Với mỗi câu hỏi, thí sinh trình bày lời giải vào giấy thi.

Câu 16. (1,5 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SD = a$ và các cạnh còn lại có độ dài bằng 1. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ theo a .

Câu 17. (1,5 điểm) Một hộp đựng 20 chiếc thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 20, hai thẻ khác nhau được ghi hai số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên hai thẻ trong hộp nói trên. Tính xác suất của biến cố "Hiệu của bình phương hai số được ghi trên hai thẻ là một số chia hết cho 5".

Câu 18. (1,5 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 10\sqrt{3}$ và $AC = 10$. Xác định ba đường tròn $(I_1), (I_2), (I_3)$ lần lượt như sau: đường tròn (I_1) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC ; đường tròn (I_2) tiếp xúc ngoài với đường tròn (I_1) và tiếp xúc với hai cạnh CA, CB của tam giác; đường tròn (I_3) tiếp xúc ngoài với đường tròn (I_2) và tiếp xúc với hai cạnh CA, CB của tam giác (như hình vẽ). Tính tổng chu vi của ba đường tròn $(I_1), (I_2)$ và (I_3) .



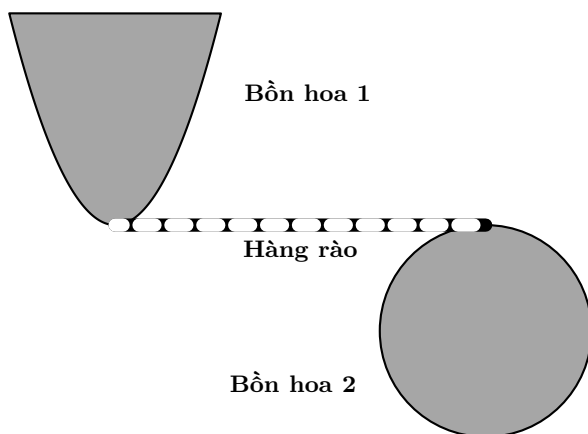
Câu 19. (1,5 điểm) Trong tiết hoạt động thực hành và trải nghiệm môn Toán tại sân trường, cô giáo giao nhiệm vụ cho học sinh lớp 12A thực hành bài toán sau:

Hai khu vực bồn hoa được các cựu học sinh xây dựng tặng nhà trường có dạng như Hình 1, gồm có:

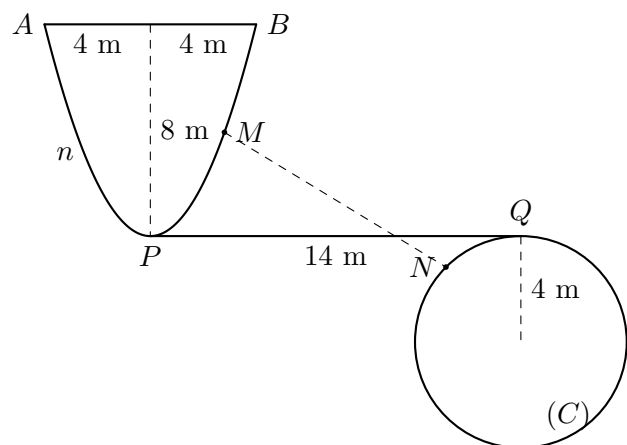
- Bồn hoa 1: Viên ngoài bồn hoa có dạng cung parabol;
- Bồn hoa 2: Có dạng hình tròn;
- Một hàng rào nhỏ được trang trí nối giữa hai bồn hoa.

Hãy đo khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm bất kì lần lượt thuộc hai bồn hoa.

Sau khi thực nghiệm đo nhiều lần khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm bất kì lần lượt thuộc hai bồn hoa, các bạn lớp 12A đã đo đạc và mô tả kích thước trong thực tế như Hình 2.



Hình 1



Hình 2

Với kích thước trong thực tế như Hình 2, em hãy giải bài toán sau để kiểm chứng kết quả thực nghiệm: **Bài toán.** Xét điểm M trên cung parabol $\widehat{AnB}$ và điểm N trên đường tròn (C) sao cho độ dài đoạn thẳng MN nhỏ nhất. Tìm độ dài nhỏ nhất của đoạn thẳng MN .

Câu 20. (2,0 điểm) Xét hàm số $y = x^3 + 6ax + b$, với a, b là các số thực, có đồ thị (C) . Xét M, N là hai điểm phân biệt thuộc (C) sao cho các tiếp tuyến với (C) tại M và N đều có hệ số góc bằng 3. Biết khoảng cách từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng MN bằng 1, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 2a^2 + b^2 + \frac{4}{17a^2 + 8a + 2}$$

HẾT

Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh:

Số báo danh:

Họ tên và chữ kí của giám thị 1:

Họ tên và chữ kí của giám thị 2:

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HSG THÀNH PHỐ VÀ CHỌN ĐỘI TUYỂN HSG
HÀ NỘI DỰ THI QUỐC GIA CÁC MÔN VĂN HOÁ
LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2026 - 2027

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 04 trang)

Môn thi: TOÁN (BẢNG A)

Ngày thi: 14 tháng 9 năm 2026

Thời gian làm bài: 180 phút

PHẦN I - Trả lời ngắn (12,0 điểm).

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 15. Với mỗi câu hỏi, thí sinh viết kết quả vào giấy thi.

Câu 1. Xét A và B là hai biến cố của một phép thử. Biết rằng xác suất của các biến cố $\bar{A}, B, A \cap B$ lần lượt là $P(\bar{A}) = 0,7$; $P(B) = 0,6$ và $P(A \cap B) = 0,1$. Hỏi xác suất của biến cố $A \cup B$ bằng bao nhiêu?

Câu 2. Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 20t$ (đơn vị: mét), với $t \geq 0$ (đơn vị: giây). Sau 8 giây tính từ khi chất điểm bắt đầu chuyển động, vận tốc tức thời của chất điểm bằng bao nhiêu mét/giây?

Câu 3. Ban chấp hành Đoàn thanh niên lớp 10A tổ chức cho các bạn trong lớp đăng kí tham gia các câu lạc bộ (CLB) của trường.

Kết quả thu được như sau:

- Tham gia CLB bóng đá: có 10 học sinh;
- Tham gia CLB bóng chuyền: có 7 học sinh;
- Tham gia CLB bóng rổ: có 6 học sinh.

Trong danh sách đăng kí ở trên:

- Có 4 học sinh đăng kí tham gia cả CLB bóng đá và CLB bóng chuyền;
- Có 3 học sinh đăng kí tham gia cả CLB bóng đá và CLB bóng rổ;
- Có 2 học sinh đăng kí tham gia cả CLB bóng chuyền và CLB bóng rổ;
- Có 1 học sinh đăng kí tham gia cả ba câu lạc bộ.

Hỏi có bao nhiêu học sinh lớp 10A đăng kí tham gia ít nhất một trong ba câu lạc bộ?

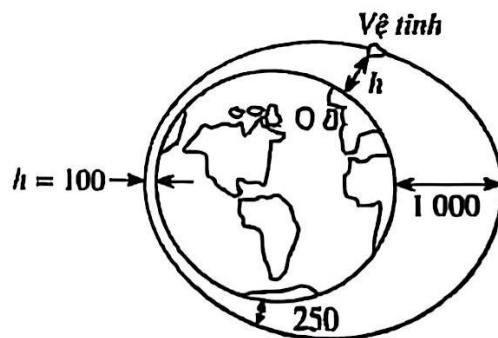
Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(0; 2)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 4$. Giá trị của

giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{f(x) + 2}}{x^2 - 3x + 2}$ bằng bao nhiêu?

Câu 5. Một vệ tinh nhân tạo bay quanh Trái Đất theo quỹ đạo là một đường elip (tham khảo hình vẽ). Giả sử độ cao h (km) của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất được mô hình hóa bởi công thức

$h = 550 - 450 \cos\left(\frac{\pi}{50}t\right)$, trong đó t (phút) là thời gian tính từ lúc vệ tinh bắt đầu bay vào quỹ đạo.

Trong khoảng thời gian 200 phút tính từ lúc vệ tinh bắt đầu bay vào quỹ đạo, có bao nhiêu lần độ cao của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất là 325 km?



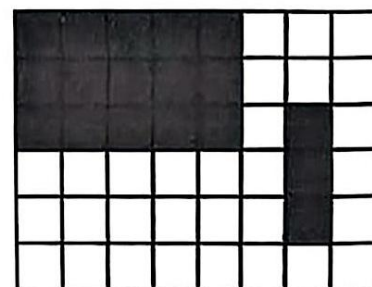
Câu 6. Kết quả đo khối lượng (đơn vị: gam) của 30 củ cà rốt ở một nông trại được cho bởi bảng dưới đây:

Khối lượng (gam)	[70;80)	[80;90)	[90;100)	[100;110)	[110;120)
Số củ cà rốt	3	5	12	6	4

Tìm một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a$; cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Gọi α là số đo của góc nhị diện $[S, BD, C]$. Hỏi $\cos \alpha$ bằng bao nhiêu?

Câu 8. Tổng của tất cả các nghiệm của phương trình $2 \log_2 (x+5) + \log_2 x^2 = 2 \log_2 6$ bằng bao nhiêu?

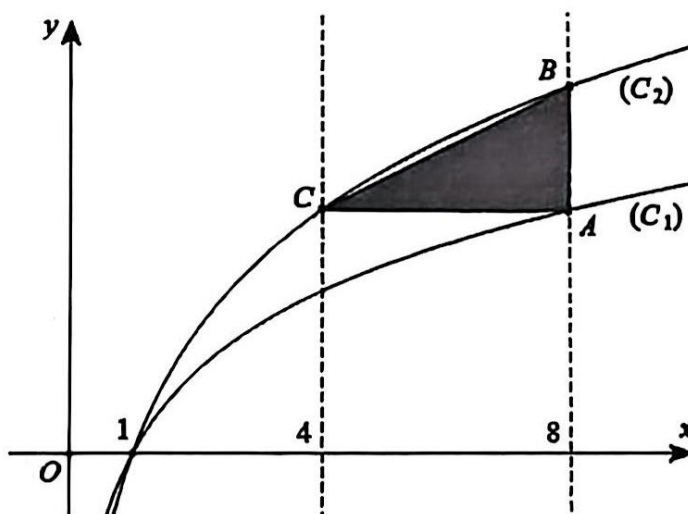


Câu 9. Một Bảng chữ nhật kích thước 6×8 gồm 48 hình vuông có độ dài cạnh bằng 1. Gọi S là tập hợp các hình chữ nhật, có diện tích là một số nguyên lẻ, được tạo thành từ các hình vuông cạnh 1 của Bảng chữ nhật (tham khảo hình vẽ). Hỏi tập hợp S có bao nhiêu phần tử?

Câu 10. Cho dãy số (u_n) với $n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = 3n^2 - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Giá trị của biểu thức $u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{19}$ bằng bao nhiêu?

Câu 11. Kí hiệu a, b, c tương ứng là độ dài các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC . Biết rằng $a(\cos B + \cos C) = b + c$ và $\cos(A - B) = \frac{1}{2}$. Số đo của góc B bằng bao nhiêu độ?

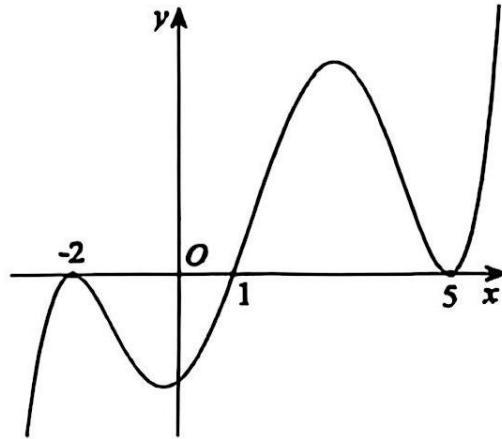
Câu 12. Cho hai đường cong $(C_1): y = \log_a x$ và $(C_2): y = \log_b x$. Đường thẳng $d_1: x = 8$ cắt các đường cong $(C_1), (C_2)$ lần lượt tại A và B ; đường thẳng $d_2: x = 4$ cắt đường cong (C_2) tại C (tham khảo hình vẽ).



Biết rằng tam giác ABC là tam giác vuông tại A và $AB = 2$. Hỏi $\log_2(ab)$ bằng bao nhiêu?

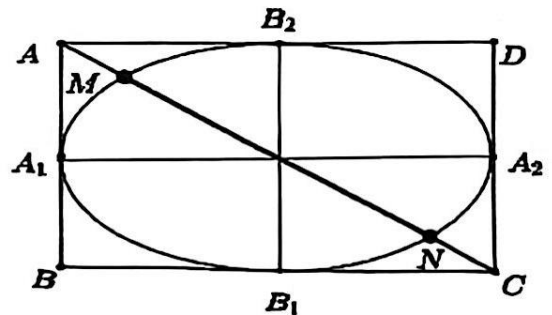
Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh 1, $\widehat{BAD} = 60^\circ$; cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 1$. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) bằng bao nhiêu?

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc sáu, có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ:



Xét hàm số $g(x) = f(x^2)$, hỏi bất phương trình $g'(x) \geq 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-2026; 2027]$?

Câu 15. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2$ cm, $BC = 4$ cm. Gọi A_1, A_2, B_1, B_2 lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, BC, DA . Một elip nhận bốn điểm A_1, A_2, B_1, B_2 là các đỉnh và cắt đường chéo AC tại hai điểm M, N (tham khảo hình vẽ).



Một chất điểm di chuyển trên đường thẳng AC theo hướng từ A đến C với vận tốc là 1 cm/s. Thời gian để chất điểm di chuyển từ M đến N là bao nhiêu giây?

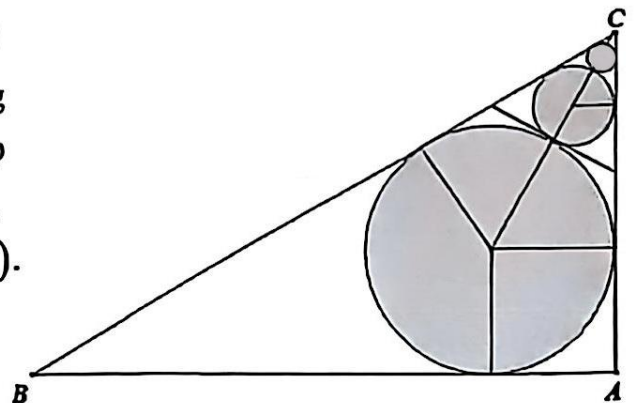
PHẦN II - Tự luận (8,0 điểm).

Thí sinh trả lời từ câu 16 đến câu 20. Với mỗi câu hỏi, thí sinh trình bày lời giải vào giấy thi.

Câu 16. (1,5 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SD = a$ và các cạnh còn lại có độ dài bằng 1. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ theo a .

Câu 17. (1,5 điểm) Một hộp đựng 20 chiếc thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 20, hai thẻ khác nhau được ghi hai số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên hai thẻ trong hộp nói trên. Tính xác suất của biến cố “Hiệu của bình phương hai số được ghi trên hai thẻ là một số chia hết cho 5”.

Câu 18. (1,5 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 10\sqrt{3}$ và $AC = 10$. Xác định ba đường tròn $(I_1), (I_2), (I_3)$ lần lượt như sau: đường tròn (I_1) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC ; đường tròn (I_2) tiếp xúc ngoài với đường tròn (I_1) và tiếp xúc với hai cạnh CA, CB của tam giác; đường tròn (I_3) tiếp xúc ngoài với đường tròn (I_2) và tiếp xúc với hai cạnh CA, CB của tam giác (như hình vẽ). Tính tổng chu vi của ba đường tròn $(I_1), (I_2)$ và (I_3) .



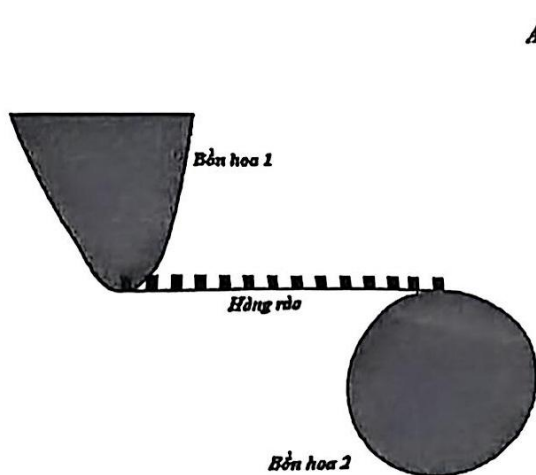
Câu 19. (1,5 điểm) Trong tiết hoạt động thực hành và trải nghiệm môn Toán tại sân trường, cô giáo giao nhiệm vụ cho học sinh lớp 12A thực hành bài toán sau:

Hai khu vực bồn hoa được các cựu học sinh xây dựng tặng nhà trường có dạng như Hình 1, gồm có:

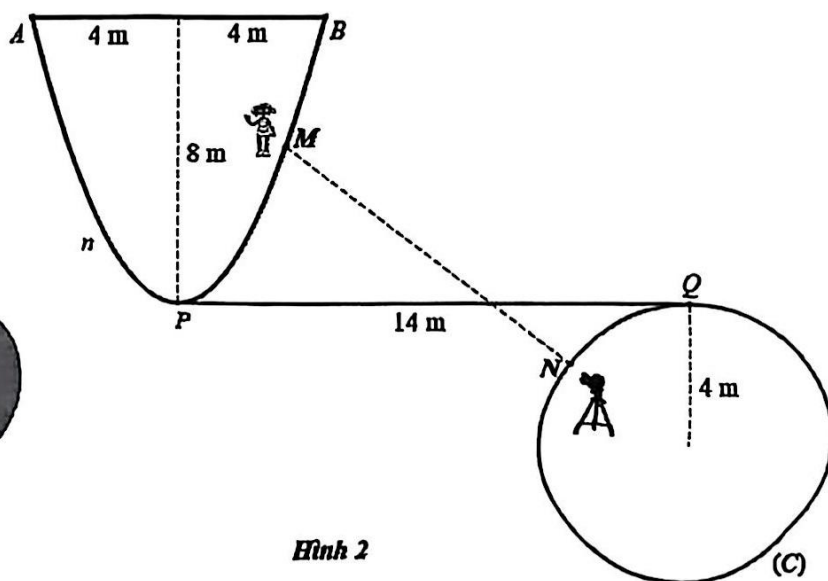
- Bồn hoa 1: Viền ngoài bồn hoa có dạng cung parabol;
- Bồn hoa 2: Có dạng hình tròn;
- Một hàng rào nhỏ được trang trí nối giữa hai bồn hoa.

Hãy đo khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm bất kì lần lượt thuộc hai bồn hoa.

Sau khi thực nghiệm đo nhiều lần khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm bất kì lần lượt thuộc hai bồn hoa, các bạn lớp 12A đã đo đạc và mô tả kích thước trong thực tế như Hình 2.



Hình 1



Hình 2

Với kích thước trong thực tế như Hình 2, em hãy giải bài toán sau để kiểm chứng kết quả thực nghiệm:

Bài toán. Xét điểm M trên cung parabol $\widehat{AnB}$ và điểm N trên đường tròn (C) sao cho độ dài đoạn thẳng MN nhỏ nhất. Tìm độ dài nhỏ nhất của đoạn thẳng MN .

Câu 20. (2,0 điểm) Xét hàm số $y = x^3 + 6ax + b$, với a, b là các số thực, có đồ thị (C) . Xét M, N là hai điểm phân biệt thuộc (C) sao cho các tiếp tuyến với (C) tại M và N đều có hệ số góc bằng 3. Biết khoảng cách từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng MN bằng 1, tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức $P = 2a^2 + b^2 + \frac{4}{17a^2 + 8a + 2}$.

----- HẾT -----

Giám thị không giải thích gì thêm.

KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ HÀ NỘI — NĂM HỌC 2026 – 2027

LỜI GIẢI CHI TIẾT
MÔN TOÁN — LỚP 12 — BẢNG A

Mai Thành Luân (Semiconductor Engineer)

SĐT / ZALO

0854070701

TIKTOK

Bao Đậu Bách Khoa (IC Design)

PHẦN I. TRẢ LỜI NGẮN (12,0 điểm)

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 15. Với mỗi câu hỏi, thí sinh viết kết quả vào giấy thi.

Câu 1. Xét A và B là hai biến cố của một phép thử. Biết rằng xác suất của các biến cố $\bar{A}$, B , $A \cap B$ lần lượt là $P(\bar{A}) = 0,7$; $P(B) = 0,6$ và $P(A \cap B) = 0,1$. Hỏi xác suất của biến cố $A \cup B$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

- **Xác suất của biến cố A .** Vì A và $\bar{A}$ là hai biến cố đối nhau nên

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,7 = 0,3.$$

- **Áp dụng công thức cộng xác suất.**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,6 - 0,1 = 0,8.$$

Đáp số. $P(A \cup B) = 0,8$.

Câu 2. Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 20t$ (đơn vị: mét), với $t \geq 0$ (đơn vị: giây). Sau 8 giây tính từ khi chất điểm bắt đầu chuyển động, vận tốc tức thời của chất điểm bằng bao nhiêu mét/giây?

Lời giải

- **Vận tốc tức thời.** Vận tốc tức thời tại thời điểm t là đạo hàm của quãng đường theo thời gian:

$$v(t) = s'(t) = -t + 20.$$

- **Thay giá trị đã cho.** Với $t = 8$ ta được $v(8) = -8 + 20 = 12$.

Đáp số. Vận tốc tức thời bằng 12 m/s.

Câu 3. Ban chấp hành Đoàn thanh niên lớp 10A tổ chức cho các bạn trong lớp đăng kí tham gia các câu lạc bộ (CLB) của trường. Kết quả thu được như sau:

- Tham gia CLB bóng đá: có 10 học sinh;
- Tham gia CLB bóng chuyền: có 7 học sinh;
- Tham gia CLB bóng rổ: có 6 học sinh.

Trong danh sách đăng kí ở trên:

- Có 4 học sinh đăng kí tham gia cả CLB bóng đá và CLB bóng chuyền;
- Có 3 học sinh đăng kí tham gia cả CLB bóng đá và CLB bóng rổ;
- Có 2 học sinh đăng kí tham gia cả CLB bóng chuyền và CLB bóng rổ;
- Có 1 học sinh đăng kí tham gia cả ba câu lạc bộ.

Hỏi có bao nhiêu học sinh lớp 10A đăng kí tham gia ít nhất một trong ba câu lạc bộ?

Lời giải

• **Kí hiệu.** Gọi A, B, C lần lượt là tập hợp các học sinh đăng kí CLB bóng đá, CLB bóng chuyền, CLB bóng rổ. Theo giả thiết

$$n(A) = 10, \quad n(B) = 7, \quad n(C) = 6,$$

$$n(A \cap B) = 4, \quad n(A \cap C) = 3, \quad n(B \cap C) = 2, \quad n(A \cap B \cap C) = 1.$$

• **Công thức bao hàm -- loại trừ cho ba tập hợp.**

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Thay số: $n(A \cup B \cup C) = 10 + 7 + 6 - 4 - 3 - 2 + 1 = 15$.

Đáp số. Có 15 học sinh đăng kí tham gia ít nhất một câu lạc bộ.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(0; 2)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 4$. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{f(x) + 2}}{x^2 - 3x + 2}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

• **Khai thác giả thiết.** Vì $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 4$ là một số hữu hạn và $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$ nên

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - 2) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} \cdot (x - 1) = 4 \cdot 0 = 0, \quad \text{do đó} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2.$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{f(x) + 2} = 2$, nên biểu thức dưới dấu giới hạn có dạng vô định $\frac{0}{0}$.

• **Nhân với biểu thức liên hợp.** Với x đủ gần 1 và $x \neq 1$,

$$\frac{2x - \sqrt{f(x) + 2}}{x^2 - 3x + 2} = \frac{4x^2 - f(x) - 2}{(x - 1)(x - 2)(2x + \sqrt{f(x) + 2})} = \frac{4(x^2 - 1) - (f(x) - 2)}{(x - 1)(x - 2)(2x + \sqrt{f(x) + 2})}.$$

- **Rút gọn nhân tử $x - 1$.** Chia cả tử và mẫu cho $x - 1$:

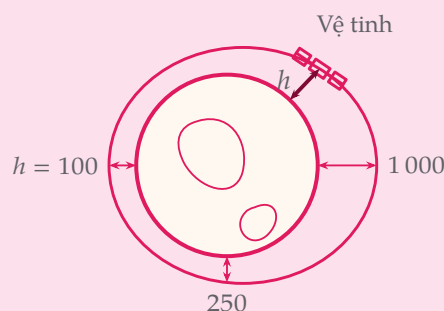
$$\frac{2x - \sqrt{f(x) + 2}}{x^2 - 3x + 2} = \frac{4(x + 1) - \frac{f(x) - 2}{x - 1}}{(x - 2)(2x + \sqrt{f(x) + 2})}.$$

- **Chuyển qua giới hạn.**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{f(x) + 2}}{x^2 - 3x + 2} = \frac{4 \cdot 2 - 4}{(1 - 2)(2 + 2)} = \frac{4}{-4} = -1.$$

Đáp số. Giới hạn cần tìm bằng -1 .

Câu 5. Một vệ tinh nhân tạo bay quanh Trái Đất theo quỹ đạo là một đường elip (tham khảo hình vẽ). Giả sử độ cao h (km) của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất được mô phỏng bởi công thức $h = 550 - 450 \cos\left(\frac{\pi}{50}t\right)$, trong đó t (phút) là thời gian tính từ lúc vệ tinh bắt đầu bay vào quỹ đạo. Trong khoảng thời gian 200 phút tính từ lúc vệ tinh bắt đầu bay vào quỹ đạo, có bao nhiêu lần độ cao của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất là 325 km?



Lời giải

- **Đưa về phương trình lượng giác cơ bản.** Yêu cầu bài toán tương đương với việc đếm số nghiệm $t \in [0; 200]$ của phương trình

$$550 - 450 \cos\left(\frac{\pi}{50}t\right) = 325 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{50}t\right) = \frac{1}{2}.$$

- **Giải phương trình.**

$$\frac{\pi}{50}t = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow t = \pm \frac{50}{3} + 100k \ (k \in \mathbb{Z}).$$

- **Chọn nghiệm thuộc đoạn $[0; 200]$.** Với $t = \frac{50}{3} + 100k$ ta được $t = \frac{50}{3}$ (ứng với $k = 0$) và $t = \frac{350}{3}$ (ứng với $k = 1$). Với $t = -\frac{50}{3} + 100k$ ta được $t = \frac{250}{3}$ (ứng với $k = 1$) và $t = \frac{550}{3}$ (ứng với $k = 2$). Các giá trị khác của k đều cho nghiệm nằm ngoài đoạn $[0; 200]$.

Đáp số. Có 4 lần độ cao của vệ tinh bằng 325 km.

Câu 6. Kết quả đo khối lượng (đơn vị: gam) của 30 củ cà rốt ở một nông trại được cho bởi bảng dưới đây:

Khối lượng (gam)	[70; 80)	[80; 90)	[90; 100)	[100; 110)	[110; 120)
Số củ cà rốt	3	5	12	6	4

Tìm một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Lời giải

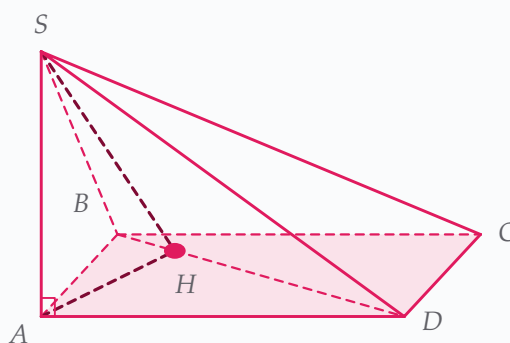
- **Xác định nhóm chứa mốt.** Nhóm có tần số lớn nhất là $[90; 100)$ với tần số 12. Vậy nhóm chứa mốt là $[90; 100)$, do đó $u_m = 90$, $u_{m+1} = 100$, $n_m = 12$, $n_{m-1} = 5$, $n_{m+1} = 6$.
- **Áp dụng công thức tính mốt của mẫu số liệu ghép nhóm.**

$$M_o = u_m + \frac{n_m - n_{m-1}}{(n_m - n_{m-1}) + (n_m - n_{m+1})} \cdot (u_{m+1} - u_m) = 90 + \frac{12 - 5}{(12 - 5) + (12 - 6)} \cdot 10 = 90 + \frac{70}{13} = \frac{1240}{13}.$$

Đáp số. $M_o = \frac{1240}{13} \approx 95,38$ (gam).

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Gọi α là số đo của góc nhị diện $[S, BD, C]$. Hỏi $\cos \alpha$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



- **Dựng góc phẳng nhị diện.** Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BD . Khi đó $BD \perp AH$; mặt khác $SA \perp (ABCD)$ nên $BD \perp SA$. Suy ra $BD \perp (SAH)$, do đó $BD \perp SH$. Vậy $\widehat{SHA}$ là góc phẳng của góc nhị diện $[S, BD, A]$.
- **Liên hệ hai góc nhị diện.** Trong mặt phẳng $(ABCD)$, hai điểm A và C nằm khác phía đối với đường thẳng BD ; tia vuông góc với BD tại H hướng về phía chứa C là tia đối của tia HA . Do đó hai góc nhị diện $[S, BD, A]$ và $[S, BD, C]$ bù nhau:

$$\alpha = 180^\circ - \widehat{SHA}.$$

- **Tính các độ dài.** Trong tam giác vuông ABD :

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}, \quad AH = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{a \cdot 2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

- **Tính $\cos \alpha$.** Tam giác SAH vuông tại A nên

$$\tan \widehat{SHA} = \frac{SA}{AH} = \frac{2a}{\frac{2a\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{5} \Rightarrow \cos \widehat{SHA} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \widehat{SHA}}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

$$\text{Vậy } \cos \alpha = -\cos \widehat{SHA} = -\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$$\text{Đáp số. } \cos \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{6} \approx -0,41.$$

Câu 8. Tổng của tất cả các nghiệm của phương trình $2\log_2(x+5) + \log_2 x^2 = 2\log_2 6$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

- **Điều kiện xác định.** $x+5 > 0$ và $x^2 > 0$, tức là $x > -5$ và $x \neq 0$.
- **Biến đổi về cùng một lôgarit.** Với điều kiện trên,

$$2\log_2(x+5) + \log_2 x^2 = \log_2(x+5)^2 + \log_2 x^2 = \log_2[(x+5)^2 x^2], \quad 2\log_2 6 = \log_2 36.$$

Do đó phương trình tương đương với

$$(x+5)^2 x^2 = 36 \Leftrightarrow [x(x+5)]^2 = 36 \Leftrightarrow |x^2 + 5x| = 6.$$

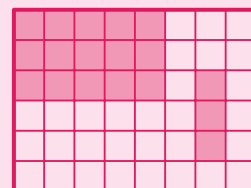
- **Giải hai trường hợp.**

- $x^2 + 5x = 6 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -6$. Đối chiếu điều kiện, nhận $x = 1$ và loại $x = -6$.
- $x^2 + 5x = -6 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = -3$. Cả hai giá trị này đều thỏa mãn điều kiện.

- **Kết luận.** Tập nghiệm là $\{-3; -2; 1\}$, tổng các nghiệm bằng $-3 + (-2) + 1 = -4$.

Đáp số. Tổng các nghiệm bằng -4 .

Câu 9. Một Bảng chữ nhật kích thước 6×8 gồm 48 hình vuông có độ dài cạnh bằng 1. Gọi S là tập hợp các hình chữ nhật, có diện tích là một số nguyên lẻ, được tạo thành từ các hình vuông cạnh 1 của Bảng chữ nhật (tham khảo hình vẽ). Hỏi tập hợp S có bao nhiêu phần tử?



Lời giải

• **Điều kiện để diện tích là số lẻ.** Mỗi hình chữ nhật được tạo thành có kích thước $p \times q$ với p, q nguyên dương, diện tích bằng pq . Tích pq là số lẻ khi và chỉ khi cả p và q đều lẻ.

• **Đếm theo từng kích thước.** Bảng gồm 8 ô theo một chiều và 6 ô theo chiều còn lại. Một hình chữ nhật kích thước $p \times q$ (với p ô theo chiều có 8 ô, q ô theo chiều có 6 ô) có đúng $(9-p)(7-q)$ vị trí đặt trong Bảng. Do đó

$$n(S) = \sum_{p \leq 8, p \text{ lẻ}} (9-p) \cdot \sum_{q \leq 6, q \text{ lẻ}} (7-q).$$

• **Tính hai tổng.**

$$\sum_{p \in \{1;3;5;7\}} (9-p) = 8 + 6 + 4 + 2 = 20, \quad \sum_{q \in \{1;3;5\}} (7-q) = 6 + 4 + 2 = 12.$$

Vậy $n(S) = 20 \cdot 12 = 240$.

Đáp số. Tập hợp S có 240 phần tử.

Nhận xét. Kết quả không phụ thuộc vào quy ước gọi chiều nào là chiều dài của Bảng: nếu đổi vai trò hai chiều thì $n(S) = (8 + 6 + 4 + 2) \cdot (6 + 4 + 2)$ vẫn bằng 240.

Câu 10. Cho dãy số (u_n) với $n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = 3n^2 - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Giá trị của biểu thức $u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{19}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

• **Xác định số hạng tổng quát.** Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 3n^2 - 1$. Khi đó $u_1 = S_1 = 2$ và với mọi $n \geq 2$,

$$u_n = S_n - S_{n-1} = (3n^2 - 1) - (3(n-1)^2 - 1) = 6n - 3.$$

• **Tách riêng số hạng đầu.** Tổng cần tính gồm u_1 và các số hạng u_n với $n = 3; 5; \dots; 19$, tức là $n = 2k - 1$ với $k = 2; 3; \dots; 10$. Với các chỉ số này, $u_{2k-1} = 6(2k-1) - 3 = 12k - 9$.

• **Tính tổng.**

$$u_1 + u_3 + \dots + u_{19} = 2 + \sum_{k=2}^{10} (12k - 9) = 2 + 12 \sum_{k=2}^{10} k - 9 \cdot 9 = 2 + 12 \cdot 54 - 81 = 569.$$

Đáp số. $u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{19} = 569$.

Câu 11. Kí hiệu a, b, c tương ứng là độ dài các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC . Biết rằng $a(\cos B + \cos C) = b + c$ và $\cos(A - B) = \frac{1}{2}$. Số đo của góc B bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

• **Chuyển giả thiết về quan hệ giữa các góc.** Theo định lí sin, $a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C$ với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Giả thiết trở thành

$$\sin A \cos B + \sin A \cos C = \sin B + \sin C.$$

• **Biến đổi về phải.** Vì $A + B + C = 180^\circ$ nên $B = 180^\circ - (A + C)$ và $C = 180^\circ - (A + B)$, do đó

$$\sin B = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C, \quad \sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B.$$

Thay vào đẳng thức trên và rút gọn:

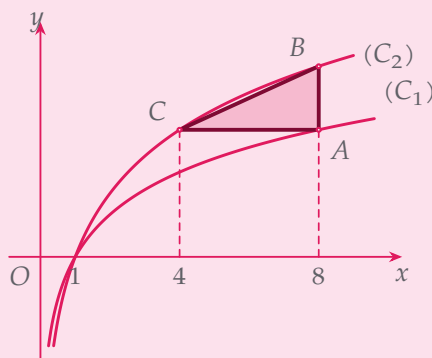
$$\cos A (\sin B + \sin C) = 0.$$

• **Xác định góc A .** Vì B, C là các góc của một tam giác nên $\sin B > 0, \sin C > 0$, suy ra $\sin B + \sin C > 0$. Do đó $\cos A = 0$, tức là $A = 90^\circ$.

• **Xác định góc B .** Khi đó $\cos(A - B) = \cos(90^\circ - B) = \sin B = \frac{1}{2}$. Vì $A = 90^\circ$ nên $0^\circ < B < 90^\circ$, suy ra $B = 30^\circ$.

Đáp số. $B = 30^\circ$.

Câu 12. Cho hai đường cong $(C_1) : y = \log_a x$ và $(C_2) : y = \log_b x$. Đường thẳng $d_1 : x = 8$ cắt các đường cong $(C_1), (C_2)$ lần lượt tại A và B ; đường thẳng $d_2 : x = 4$ cắt đường cong (C_2) tại C (tham khảo hình vẽ). Biết rằng tam giác ABC là tam giác vuông tại A và $AB = 2$. Hỏi $\log_2(ab)$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

• **Toạ độ ba đỉnh.** Theo giả thiết

$$A(8; \log_a 8), \quad B(8; \log_b 8), \quad C(4; \log_b 4).$$

• **Khai thác điều kiện vuông tại A .** Hai điểm A, B có cùng hoành độ nên AB là đoạn thẳng đứng. Tam giác ABC vuông tại A nên $AC \perp AB$, do đó AC nằm ngang, tức là A và C có cùng tung độ:

$$\log_a 8 = \log_b 4.$$

• **Khai thác điều kiện $AB = 2$.** Từ hình vẽ, B nằm phía trên A , do đó

$$\log_b 8 - \log_a 8 = 2.$$

• **Đặt ẩn phụ và giải.** Đặt $p = \log_2 a, q = \log_2 b$ (với $p \neq 0, q \neq 0$). Khi đó

$$\log_a 8 = \frac{3}{p}, \quad \log_b 8 = \frac{3}{q}, \quad \log_b 4 = \frac{2}{q}.$$

Hệ điều kiện trở thành

$$\frac{3}{p} = \frac{2}{q} \quad \text{và} \quad \frac{3}{q} - \frac{3}{p} = 2.$$

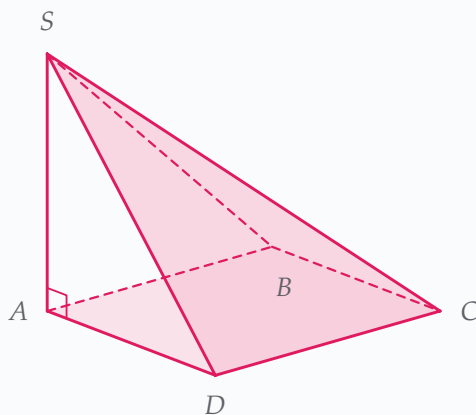
Thay $\frac{3}{p} = \frac{2}{q}$ vào đẳng thức thứ hai: $\frac{3}{q} - \frac{2}{q} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{q} = 2 \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}$, từ đó $p = \frac{3q}{2} = \frac{3}{4}$.

• **Kết luận.** $\log_2(ab) = \log_2 a + \log_2 b = p + q = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$.

Đáp số. $\log_2(ab) = \frac{5}{4}$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh 1, $\widehat{BAD} = 60^\circ$; cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 1$. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) bằng bao nhiêu?

Lời giải



• **Chuyển khoảng cách về đỉnh A .** Vì $ABCD$ là hình thoi nên $AB \parallel CD$; mà $CD \subset (SCD)$ và $AB \not\subset (SCD)$ nên $AB \parallel (SCD)$. Do đó

$$d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)).$$

• **Tính thể tích khối chóp $S.ACD$.** Trong hình thoi, $\widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{BAD} = 120^\circ$ và $AD = DC = 1$, nên

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC \cdot \sin \widehat{ADC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cos 120^\circ = 3.$$

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên

$$V_{S.ACD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ACD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

• **Tính diện tích tam giác SCD .** Do $SA \perp (ABCD)$ nên các tam giác SAD và SAC vuông tại A , suy ra

$$SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{2}, \quad SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2, \quad CD = 1.$$

Trong tam giác SCD , theo định lý côsin:

$$\cos \widehat{SDC} = \frac{SD^2 + DC^2 - SC^2}{2 \cdot SD \cdot DC} = \frac{2 + 1 - 4}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin \widehat{SDC} = \sqrt{1 - \frac{2}{16}} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

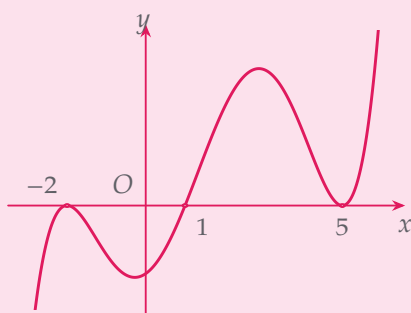
$$\text{Do đó } S_{SCD} = \frac{1}{2} \cdot SD \cdot DC \cdot \sin \widehat{SDC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{14}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

• **Kết luận.**

$$d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)) = \frac{3V_{S.ACD}}{S_{SCD}} = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{12}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Đáp số. $d(B, (SCD)) = \frac{\sqrt{21}}{7} \approx 0,65.$

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc sáu, có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x^2)$, hỏi bất phương trình $g'(x) \geq 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-2026; 2027]$?



Lời giải

• **Xác định dạng của f' .** Vì f là hàm số đa thức bậc sáu nên f' là hàm số đa thức bậc năm. Từ đồ thị, f' có ba nghiệm $x = -2, x = 1, x = 5$; tại $x = -2$ và $x = 5$ đồ thị tiếp xúc với trục hoành nên đó là các nghiệm bội chẵn, còn tại $x = 1$ đồ thị cắt trục hoành và f' đổi dấu từ âm sang dương nên đó là nghiệm bội lẻ. Do tổng các bội bằng 5, ta được

$$f'(x) = k(x+2)^2(x-1)(x-5)^2, \quad k > 0.$$

• **Tính đạo hàm của hàm hợp.** Với $g(x) = f(x^2)$ ta có

$$g'(x) = 2xf'(x^2) = 2kx(x^2+2)^2(x^2-1)(x^2-5)^2.$$

• **Xét dấu.** Vì $k > 0$ và $(x^2+2)^2 > 0$ với mọi x , còn $(x^2-5)^2 \geq 0$ nên

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x(x^2-1)(x^2-5)^2 \geq 0 \Leftrightarrow [x = \pm\sqrt{5} \text{ hoặc } x(x-1)(x+1) \geq 0].$$

Lập bảng xét dấu của $x(x-1)(x+1)$ ta được $x(x-1)(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 0] \cup [1; +\infty)$.

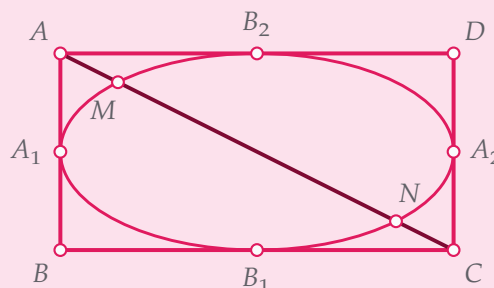
• **Đếm nghiệm nguyên.** Hai giá trị $x = \pm\sqrt{5}$ không nguyên. Các nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-2026; 2027]$ gồm:

- $x \in [-1; 0]$: có 2 số nguyên là -1 và 0 ;
- $x \in [1; 2027]$: có 2027 số nguyên là $1; 2; \dots; 2027$.

Tổng cộng có $2 + 2027 = 2029$ nghiệm nguyên.

Đáp số. Bất phương trình có 2029 nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-2026; 2027]$.

Câu 15. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2$ cm, $BC = 4$ cm. Gọi A_1, A_2, B_1, B_2 lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, BC, DA . Một elip nhận bốn điểm A_1, A_2, B_1, B_2 là các đỉnh và cắt đường chéo AC tại hai điểm M, N (tham khảo hình vẽ). Một chất điểm di chuyển trên đường thẳng AC theo hướng từ A đến C với vận tốc là 1 cm/s. Thời gian để chất điểm di chuyển từ M đến N là bao nhiêu giây?



Lời giải

- **Chọn hệ trục tọa độ.** Chọn hệ trục Bxy với gốc B , tia Bx chứa BC , tia By chứa BA . Khi đó

$$B(0;0), \quad C(4;0), \quad D(4;2), \quad A(0;2),$$

$$A_1(0;1), \quad A_2(4;1), \quad B_1(2;0), \quad B_2(2;2).$$

- **Lập phương trình elip.** Bốn điểm A_1, A_2, B_1, B_2 là các đỉnh của elip nên elip có tâm là trung điểm $I(2;1)$ của A_1A_2 , một trục nằm ngang độ dài $A_1A_2 = 4$ và một trục thẳng đứng độ dài $B_1B_2 = 2$. Do đó elip có phương trình

$$\frac{(x-2)^2}{4} + (y-1)^2 = 1.$$

- **Tìm hai giao điểm với đường chéo AC .** Đường thẳng AC đi qua $A(0;2)$ và $C(4;0)$ nên có phương trình $y = 2 - \frac{x}{2}$. Thay vào phương trình elip:

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(x-2)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 2 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Vậy hai giao điểm là

$$M\left(2 - \sqrt{2}; 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad N\left(2 + \sqrt{2}; 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

- **Tính thời gian.** Ta có $MN = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{10}$ (cm). Vì chất điểm chuyển động với vận tốc 1 cm/s nên thời gian cần tìm bằng $\frac{MN}{1} = \sqrt{10}$ (giây).

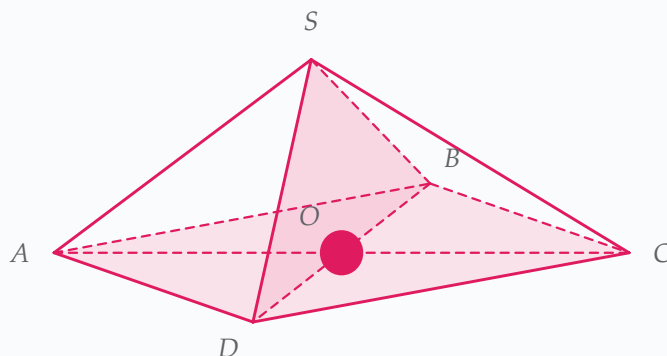
Đáp số. Thời gian cần tìm bằng $\sqrt{10} \approx 3,16$ giây.

PHẦN II. TỰ LUẬN (8,0 điểm)

Thí sinh trả lời từ câu 16 đến câu 20. Với mỗi câu hỏi, thí sinh trình bày lời giải vào giấy thi.

Câu 16. (1,5 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SD = a$ và các cạnh còn lại đều có độ dài bằng 1. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ theo a .

Lời giải



• **Nhận xét về đáy.** Tứ giác $ABCD$ có $AB = BC = CD = DA = 1$ nên $ABCD$ là hình thoi. Gọi O là giao điểm hai đường chéo; khi đó O là trung điểm của AC và của BD , đồng thời $AC \perp BD$. Đặt $OA = OC = m > 0$ và $OB = OD = n > 0$.

• **Chứng minh $AC \perp (SBD)$.** Từ giả thiết, $SA = SC = 1$, $BA = BC = 1$, $DA = DC = 1$ nên ba điểm S, B, D đều cách đều hai điểm A và C . Vì $S \notin (ABCD)$ nên S, B, D không thẳng hàng, do đó (SBD) chính là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AC . Suy ra $AC \perp (SBD)$, kéo theo $AC \perp SO$ và $AC \perp BO$.

• **Chứng minh tam giác SBD vuông tại S .** Tam giác SOA vuông tại O và tam giác BOA vuông tại O nên

$$SO^2 = SA^2 - OA^2 = 1 - m^2, \quad n^2 = OB^2 = AB^2 - OA^2 = 1 - m^2.$$

Do đó $SO = n = OB = OD$, nghĩa là trong tam giác SBD , trung tuyến SO ứng với cạnh BD bằng nửa cạnh BD . Vậy tam giác SBD vuông tại S .

• **Tính các kích thước của đáy.** Từ tam giác SBD vuông tại S :

$$BD^2 = SB^2 + SD^2 = 1 + a^2 \Rightarrow 2n = \sqrt{1 + a^2}, \quad n = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{2}.$$

Kết hợp $m^2 = 1 - n^2$ ta được $m^2 = \frac{3 - a^2}{4}$, tức $m = \frac{\sqrt{3 - a^2}}{2}$; điều kiện để hình chóp tồn tại là $0 < a < \sqrt{3}$. Khi đó

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot 2n = 2mn = \frac{\sqrt{(3 - a^2)(1 + a^2)}}{2}.$$

• **Tính chiều cao.** Vì $AC \perp (SBD)$ và $AC \subset (ABCD)$ nên $(SBD) \perp (ABCD)$, với giao tuyến là BD . Gọi SH là đường cao của tam giác SBD hạ từ S ($H \in BD$); khi đó $SH \perp BD$ nên $SH \perp (ABCD)$, tức SH là chiều cao của khối chóp. Trong tam giác vuông SBD :

$$SH = \frac{SB \cdot SD}{BD} = \frac{1 \cdot a}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

• **Kết luận.**

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{(3-a^2)(1+a^2)}}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{a\sqrt{3-a^2}}{6}.$$

Đáp số. $V_{S.ABCD} = \frac{a\sqrt{3-a^2}}{6}$ với $0 < a < \sqrt{3}$.

Câu 17. (1,5 điểm) Một hộp đựng 20 chiếc thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 20, hai thẻ khác nhau được ghi hai số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên hai thẻ trong hộp nói trên. Tính xác suất của biến cố “Hiệu của bình phương hai số được ghi trên hai thẻ là một số chia hết cho 5”.

Lời giải

- **Không gian mẫu.** Số cách lấy ngẫu nhiên hai thẻ từ 20 thẻ là

$$n(\Omega) = C_{20}^2 = 190.$$

- **Điều kiện của biến cố.** Gọi E là biến cố đã cho và m, n là hai số ghi trên hai thẻ được lấy. Điều kiện $m^2 - n^2 \vdots 5$ tương đương với việc m^2 và n^2 có cùng số dư khi chia cho 5.

- **Phân loại theo số dư của bình phương.** Xét số nguyên dương k và số dư của k khi chia cho 5:

- k chia hết cho 5 thì k^2 chia 5 dư 0;
- k chia 5 dư 1 hoặc dư 4 thì k^2 chia 5 dư 1;
- k chia 5 dư 2 hoặc dư 3 thì k^2 chia 5 dư 4.

Trong 20 số từ 1 đến 20, mỗi lớp số dư khi chia cho 5 có đúng 4 số. Do đó tập hợp 20 số được chia thành ba nhóm theo số dư của bình phương: nhóm dư 0 có 4 số, nhóm dư 1 có 8 số, nhóm dư 4 có 8 số.

- **Đếm số kết quả thuận lợi.** Biến cố E xảy ra khi và chỉ khi hai thẻ được lấy thuộc cùng một nhóm, nên

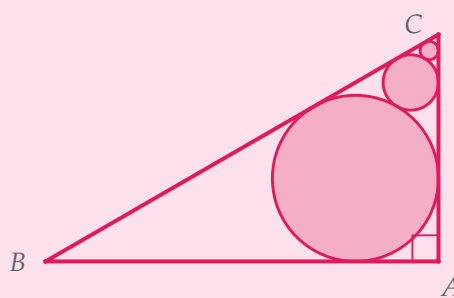
$$n(E) = C_4^2 + C_8^2 + C_8^2 = 6 + 28 + 28 = 62.$$

• **Kết luận.**

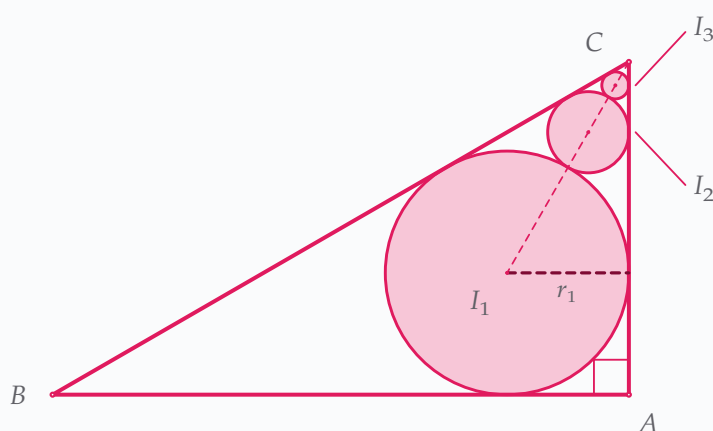
$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{62}{190} = \frac{31}{95}.$$

Đáp số. $P(E) = \frac{31}{95} \approx 0,33$.

Câu 18. (1,5 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 10\sqrt{3}$ và $AC = 10$. Xác định ba đường tròn (I_1) , (I_2) , (I_3) lần lượt như sau: đường tròn (I_1) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC ; đường tròn (I_2) tiếp xúc ngoài với đường tròn (I_1) và tiếp xúc với hai cạnh CA, CB của tam giác; đường tròn (I_3) tiếp xúc ngoài với đường tròn (I_2) và tiếp xúc với hai cạnh CA, CB của tam giác (như hình vẽ). Tính tổng chu vi của ba đường tròn (I_1) , (I_2) và (I_3) .



Lời giải



- **Các yếu tố của tam giác.** Tam giác ABC vuông tại A nên

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{300 + 100} = 20, \quad \tan \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{ACB} = 60^\circ.$$

- **Bán kính đường tròn nội tiếp.** Với tam giác vuông tại A ,

$$r_1 = \frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{10\sqrt{3} + 10 - 20}{2} = 5(\sqrt{3} - 1).$$

- **Vị trí tâm ba đường tròn.** Cả ba đường tròn đều tiếp xúc với hai cạnh CA và CB nên ba tâm I_1, I_2, I_3 cùng nằm trên tia phân giác của góc $\widehat{ACB}$. Nếu một đường tròn tâm I bán kính r tiếp xúc với hai cạnh của góc $\widehat{ACB}$ thì

$$CI = \frac{r}{\sin \frac{\widehat{ACB}}{2}} = \frac{r}{\sin 30^\circ} = 2r.$$

- **Thiết lập tỉ số bán kính.** Đường tròn (I_2) nằm giữa C và (I_1) , hai đường tròn này tiếp xúc ngoài nên $CI_1 - CI_2 = r_1 + r_2$, tức là

$$2r_1 - 2r_2 = r_1 + r_2 \Rightarrow r_2 = \frac{r_1}{3}.$$

Lập luận tương tự với cặp $(I_2), (I_3)$ cho $r_3 = \frac{r_2}{3} = \frac{r_1}{9}$.

• **Tính tổng chu vi.**

$$C = 2\pi(r_1 + r_2 + r_3) = 2\pi r_1 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) = 2\pi \cdot 5(\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{13}{9} = \frac{130(\sqrt{3} - 1)\pi}{9}.$$

Đáp số. Tổng chu vi ba đường tròn bằng $\frac{130(\sqrt{3} - 1)\pi}{9} \approx 33,22$.

Câu 19. (1,5 điểm) Trong tiết hoạt động thực hành và trải nghiệm môn Toán tại sân trường, cô giáo giao nhiệm vụ cho học sinh lớp 12A thực hành bài toán sau:

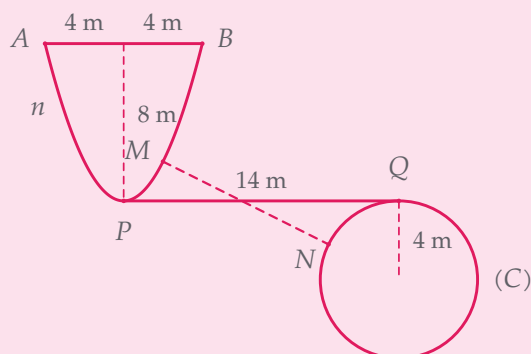
Hai khu vực bồn hoa được các cựu học sinh xây dựng tặng nhà trường gồm có:

- Bồn hoa 1: Viền ngoài bồn hoa có dạng cung parabol;
- Bồn hoa 2: Có dạng hình tròn;
- Một hàng rào nhỏ được trang trí nối giữa hai bồn hoa.

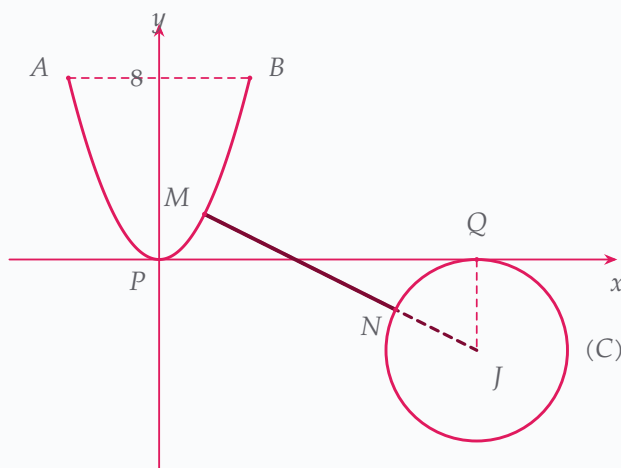
Hãy đo khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm bất kì lần lượt thuộc hai bồn hoa.

Sau khi thực nghiệm đo nhiều lần khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm bất kì lần lượt thuộc hai bồn hoa, các bạn lớp 12A đã đo đạc và mô tả kích thước trong thực tế như hình vẽ dưới đây. Với kích thước đó, em hãy giải bài toán sau để kiểm chứng kết quả thực nghiệm:

Bài toán. Xét điểm M trên cung parabol AnB và điểm N trên đường tròn (C) sao cho độ dài đoạn thẳng MN nhỏ nhất. Tìm độ dài nhỏ nhất của đoạn thẳng MN .



Lời giải



• **Chọn hệ trục tọa độ.** Chọn hệ trục Oxy có gốc trùng với đỉnh P của cung parabol, trục Oy là trục đối xứng của cung parabol và hướng lên trên, trục Ox chứa đoạn thẳng PQ . Đơn vị trên hai trục là mét.

• **Phương trình cung parabol.** Vì parabol có đỉnh là gốc tọa độ và nhận Oy làm trục đối xứng nên nó có phương trình $y = kx^2$. Theo kích thước đã cho, điểm $B(4; 8)$ thuộc cung parabol, do đó $8 = 16k$, suy ra $k = \frac{1}{2}$. Vậy

$$(AnB) : y = \frac{x^2}{2}, \quad x \in [-4; 4].$$

• **Phương trình đường tròn.** Điểm $Q(14; 0)$ là điểm cao nhất của đường tròn (C) và (C) có bán kính 4, nên tâm của (C) là $J(14; -4)$ và

$$(C) : (x - 14)^2 + (y + 4)^2 = 16.$$

• **Đưa về bài toán một biến.** Với M thuộc cung parabol và N thuộc (C) , theo bất đẳng thức tam giác,

$$MN \geq MJ - JN = MJ - 4,$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi N là giao điểm của đoạn thẳng MJ với (C) . Do đó chỉ cần tìm giá trị nhỏ nhất của MJ .

• **Khảo sát khoảng cách MJ .** Với $M\left(x; \frac{x^2}{2}\right), x \in [-4; 4]$, đặt

$$f(x) = MJ^2 = (x - 14)^2 + \left(\frac{x^2}{2} + 4\right)^2.$$

Ta có

$$f'(x) = 2(x - 14) + 2\left(\frac{x^2}{2} + 4\right)x = x^3 + 10x - 28 = (x - 2)(x^2 + 2x + 14).$$

Vì $x^2 + 2x + 14 = (x + 1)^2 + 13 > 0$ với mọi x nên $f'(x)$ cùng dấu với $x - 2$. Suy ra f nghịch biến trên $[-4; 2]$ và đồng biến trên $[2; 4]$, do đó f đạt giá trị nhỏ nhất trên $[-4; 4]$ tại $x = 2$:

$$\min_{[-4; 4]} f = f(2) = (2 - 14)^2 + (2 + 4)^2 = 144 + 36 = 180.$$

Vậy $MJ_{\min} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$, đạt được khi $M(2; 2)$.

• **Kết luận.**

$$MN_{\min} = 6\sqrt{5} - 4 \approx 9,42 \text{ (m)},$$

đạt được khi $M(2; 2)$ và N là giao điểm của đoạn thẳng MJ với đường tròn (C) .

Đáp số. Độ dài nhỏ nhất của đoạn thẳng MN bằng $6\sqrt{5} - 4$ (mét).

Câu 20. (2,0 điểm) Xét hàm số $y = x^3 + 6ax + b$, với a, b là các số thực, có đồ thị (C) . Xét M, N là hai điểm phân biệt thuộc (C) sao cho các tiếp tuyến với (C) tại M và N đều có hệ số góc bằng 3. Biết khoảng cách từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng MN bằng 1, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2a^2 + b^2 + \frac{4}{17a^2 + 8a + 2}$.

Lời giải

• **Điều kiện tồn tại hai điểm M, N .** Ta có $y' = 3x^2 + 6a$. Tiếp tuyến tại điểm thuộc (C) có hoành độ x_0 có hệ số góc bằng 3 khi và chỉ khi

$$3x_0^2 + 6a = 3 \Leftrightarrow x_0^2 = 1 - 2a.$$

Để có hai điểm phân biệt M, N thì phương trình trên phải có hai nghiệm phân biệt, tức là $1 - 2a > 0$, hay $a < \frac{1}{2}$. Đặt $t = \sqrt{1 - 2a} > 0$, khi đó $M(-t; -t^3 - 6at + b)$ và $N(t; t^3 + 6at + b)$.

• **Phương trình đường thẳng MN .** Hệ số góc của MN bằng

$$\frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{2t^3 + 12at}{2t} = t^2 + 6a = (1 - 2a) + 6a = 1 + 4a.$$

Vì $x_M + x_N = 0$ và $y_M + y_N = 2b$ nên điểm $(0; b)$ là trung điểm của MN , do đó

$$MN : y = (1 + 4a)x + b \quad \text{hay} \quad (1 + 4a)x - y + b = 0.$$

• **Khai thác giả thiết về khoảng cách.**

$$d(O, MN) = \frac{|b|}{\sqrt{(1 + 4a)^2 + 1}} = 1 \Rightarrow b^2 = (1 + 4a)^2 + 1 = 16a^2 + 8a + 2.$$

Từ đó

$$a^2 + b^2 = 17a^2 + 8a + 2.$$

• **Viết lại biểu thức P .** Đặt $u = a^2 + b^2 > 0$. Theo đẳng thức vừa thu được, $17a^2 + 8a + 2 = u$, đồng thời $2a^2 + b^2 = a^2 + (a^2 + b^2) = a^2 + u$. Do đó

$$P = a^2 + u + \frac{4}{u}.$$

• **Đánh giá.** Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân,

$$u + \frac{4}{u} \geq 2\sqrt{u \cdot \frac{4}{u}} = 4, \quad \text{dấu bằng khi } u = 2.$$

Mặt khác $a^2 \geq 0$, dấu bằng khi $a = 0$. Vậy $P \geq 4$.

• **Điều kiện xảy ra dấu bằng.** Với $a = 0$ ta có $b^2 = 16 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 2 = 2$, suy ra $u = a^2 + b^2 = 2$. Như vậy hai dấu bằng xảy ra đồng thời. Khi đó $a = 0 < \frac{1}{2}$ nên hai điểm M, N tồn tại và phân biệt, ứng với $b = \pm\sqrt{2}$.

Đáp số. $\min P = 4$, đạt được khi $a = 0$ và $b = \pm\sqrt{2}$.