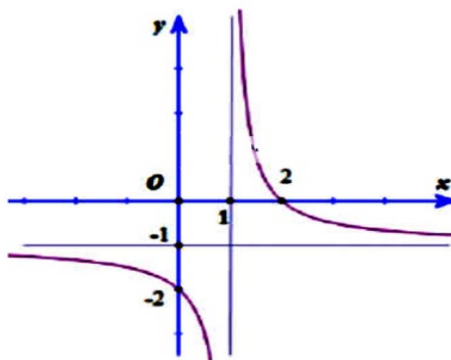


Thời gian làm bài: 90 phút (không kể thời gian phát đề)
Ngày thi: 16/10/2025

Họ và tên học sinh: Số báo danh:

PHẦN I. Câu trả lời trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ, các hệ số a, b, c là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $T = a + 3b + 2c$ bằng:



- A. 2. B. 3. C. -9. D. -4.

Câu 2: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; -3; 3), B(2; -4; 5), C(a; -2; b)$ nhận điểm $G(1; c; 3)$ làm trọng tâm của tam giác đó. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a + 2b + c = -5$. B. $a - b + c = -3$. C. $2a + b + c = 2$. D. $a + b + c = -2$.

Câu 3: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ với G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Khi đó $\overrightarrow{AG}$ bằng

- A. $\vec{a} + \frac{1}{6}(\vec{b} + \vec{c})$. B. $\vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c})$. C. $\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$. D. $\vec{a} + \frac{1}{4}(\vec{b} + \vec{c})$

Câu 4: Phòng văn một số học sinh khối 11 về thời gian (giờ) ngủ của một buổi tối, thu được bảng số liệu sau:

Thời gian (giờ)	[4; 5)	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)
Số lượng	6	12	13	10	3

Hãy cho biết 75% học sinh khối 11 ngủ nhiều nhất bao nhiêu giờ?

- A. 7, 2. B. 6, 3. C. 7, 4. D. 6, 25

Câu 5: Bánh xe của người đi xe đạp quay được 30 vòng trong 8 giây. Biết đường kính của bánh xe là $680mm$, hỏi trong 1 giây người đó đã đi được quãng đường bao nhiêu?

- A. 2550π . B. 2500π . C. 2250π . D. 2200π

Câu 6: Cho hàm số $y = \log_2\left(\frac{4x+3}{x-1}\right)$.

Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 7: Hàm số $v(t) = \begin{cases} -t^2 + 4t + 12 & \text{khi } 0 \leq t \leq 5 \\ at - 3 & \text{khi } 5 < t \leq 10 \end{cases}$ mô tả vận tốc (m/s) của một vật tại thời điểm t (giây)

trong khoảng thời gian 10 giây đầu tiên kể từ khi vật bắt đầu chuyển động. Biết rằng $v(t)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0; 10]$ và trong 10 giây đầu tiên đó, có hai lần vật đạt vận tốc $10 m/s$ là vào các thời điểm t_1 giây và t_2 giây. Khi đó tổng $t_1 + t_2$ bằng:

- A. $\frac{17}{2} + \sqrt{6}$. B. $\frac{17}{2} - \sqrt{6}$. C. $5 + \sqrt{3}$. D. $5 - \sqrt{3}$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2; 0; 2)$, $B(0; 2; 0)$, $C(1; 0; 3)$. Gọi M là điểm thỏa mãn $MA^2 + MC^2 = MB^2$. Tính MP với $P(3; -2; 5)$.

- A. $3\sqrt{5}$. B. $2\sqrt{10}$. C. $2\sqrt{6}$. D. $4\sqrt{3}$.

Câu 9: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Hai điểm M, N theo thứ tự thay đổi trên các đoạn AB và CD sao cho $BM = DN$. Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của MN . Giá trị của $m^2 + n^2$ bằng:

- A. a^2 . B. $\frac{5a^2}{2}$. C. $\frac{a^2}{2}$. D. $\frac{3a^2}{2}$.

Câu 10: Cho ba số $a + \log_2 3$, $a + \log_4 3$, $a + \log_8 3$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Công bội của cấp số nhân đó bằng:

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{3}$. D. 1.

Câu 11: Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị: km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau:

Quãng đường (km)	$[2, 7; 3, 0)$	$[3, 0; 3, 3)$	$[3, 3; 3, 6)$	$[3, 6; 3, 9)$	$[3, 9; 4, 2)$
Số ngày	3	6	5	4	2

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- A. 3,41. B. 11,62. C. 0,017. D. 0,36.

Câu 12: Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x$

- A. $-\frac{35}{36}\pi$. B. $-\frac{11}{36}\pi$. C. $-\frac{11\pi}{12}$. D. $-\frac{\pi}{12}$.

Câu 13: Cho các số thực $a, b > 1$. Biết phương trình $\log_a(ax) \log_b(bx) = 2025$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x_1 x_2 (4a^2 + 9b^2)$.

- A. 12. B. 0. C. 1. D. 13.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $y' = f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$				
y'		+		-	0	+	0	-	0	+

Biết rằng $S = (a; b)$ là tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số

$g(x) = f(-|3x^2 - 12x + 9| + m - 3)$ có nhiều điểm cực trị nhất. Tính $T = 4a - 7b$.

A. -25.

B. 25.

C. -14.

D. 73.

Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng 1 và $\widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = \widehat{A'AB} = 60^\circ$. Cho hai M, N thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{C'B} = \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{DD'}$. Độ dài đoạn thẳng MN là

A. $\sqrt{3}$.

B. $\sqrt{13}$.

C. $\sqrt{19}$.

D. $\sqrt{15}$.

Câu 16: Một người vay ngân hàng 40 triệu đồng, với lãi suất 0,85%/tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, người đó bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và bằng 500 nghìn đồng. Sau một năm mức lãi suất của ngân hàng được điều chỉnh lên là 1,15%/tháng và người vay muốn nhanh chóng hết nợ nên đã thỏa thuận với ngân hàng sẽ trả 1 triệu 500 nghìn đồng cho mỗi tháng. Phải mất thêm ít nhất bao nhiêu tháng kể từ lúc tăng lãi suất người đó mới trả hết nợ?

A. 43

B. 30

C. 31

D. 42

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 4; 2), B(1; -1; 2)$. Điểm M thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho các đường thẳng MA, MB luôn tạo với mặt phẳng (Oyz) các góc bằng nhau. Biết rằng điểm M luôn cách đều một điểm I cố định thuộc mặt phẳng (Oyz) . Tìm tổng các thành phần tọa độ của điểm I .

A. $-\frac{2}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. -2.

D. 2.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh $SA = BC = x, SB = AC = y, SC = AB = z$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 12$. Giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

B. $V = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $V = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

D. $V = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 19: Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau, chia hết cho 4, nhỏ hơn 4567 và có chữ số hàng chục là chữ số lẻ.

A. 171.

B. 172.

C. 173.

D. 170.

Câu 20: Xét hàm $f(x) = \frac{|x^3 - 3x + 2| + 2026}{|x^3 - 3x + 2| + 2025}$ số và gọi S là tập hợp các số nguyên có giá trị tuyệt đối không

vượt quá 29. Chọn ngẫu nhiên hai số $a, b \in S$ với $a < b$. Tính xác suất để hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$.

A. $\frac{381}{1711}$.

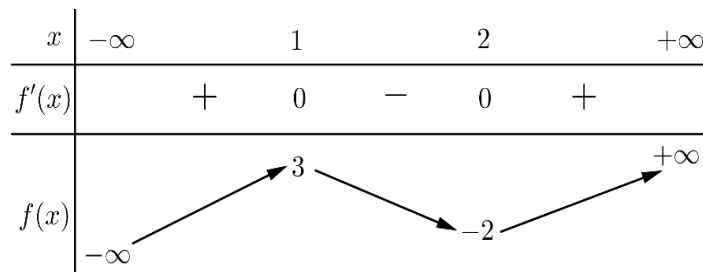
B. $\frac{124}{1572}$.

C. $\frac{117}{532}$.

D. $\frac{544}{2051}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ là hàm số bậc ba có bảng biến thiên như sau:



Xét tính đúng - sai của các mệnh đề sau.

- a) Khoảng cách hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng $\sqrt{26}$
- b) Hàm số $g(x) = f(1-2x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\frac{1}{2}; 0)$.
- c) Đồ thị hàm số $h(x) = \frac{x-2}{f^2(x)-4}$ có tổng số đường tiệm cận bằng 5.
- d) Có 1888 giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2025; 2025]$ sao cho bất phương trình $g(x) \geq x^2 + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 1]$.

Câu 2.: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 0; 1)$ và hai điểm $A(-3; 8; 4)$, $B(5; 5; 6)$. Hai điểm M, N thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng $\vec{a}$ và $MN = 5\sqrt{5}$.

- a) Điểm $E(6; 8; 9)$ thỏa mãn $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{MN}$
- b) Điểm $I(\frac{9}{4}; \frac{31}{4}; \frac{13}{2})$ thỏa mãn $\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$
- c) Xét điểm K thay đổi trên mặt phẳng (Oxz) , giá trị nhỏ nhất của $|\overrightarrow{OK} + 2\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB}|$ bằng $\frac{31}{4}$
- d) Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng $\sqrt{22}$

Câu 3: Ta có các bảng thống kê sau:

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[6,22 ; 6,46)	6,34	3
[6,46 ; 6,70)	6,58	7
[6,70 ; 6,94)	6,82	5
[6,94 ; 7,18)	7,06	20
[7,18 ; 7,42)	7,30	5
		$n = 40$

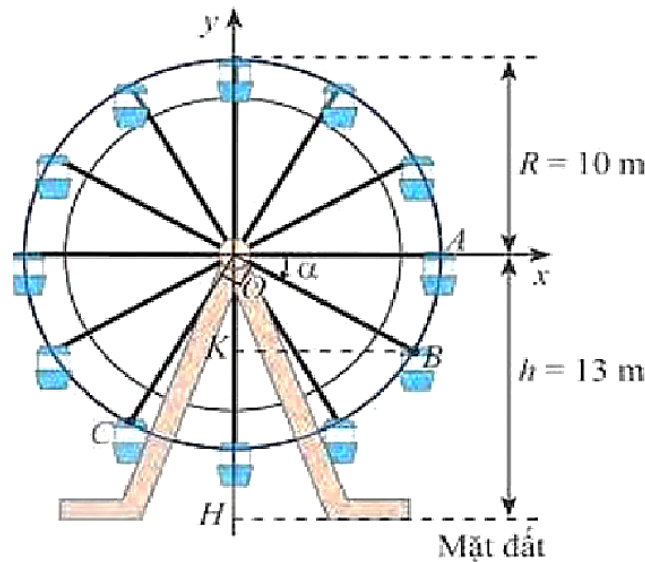
Bảng 15

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[6,22 ; 6,46)	6,34	2
[6,46 ; 6,70)	6,58	5
[6,70 ; 6,94)	6,82	8
[6,94 ; 7,18)	7,06	19
[7,18 ; 7,42)	7,30	6
		$n = 40$

Bảng 16

- a) Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Dũng cho bởi Bảng 15 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là $6,92(m)$.
- b) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Dũng cho bởi Bảng 15 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là $0,27(m)$.
- c) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Huy cho bởi Bảng 16 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là $0,16$.
- d) Kết quả nhảy xa của vận động viên Dũng đồng đều hơn kết quả nhảy xa của vận động viên Huy.

Câu 4: Trong hình bên dưới, vị trí cabin mà Bình và Cường ngồi trên vòng quay được đánh dấu với điểm B và C .



Khi vòng quay đang hoạt động, gọi α là số đo của một góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .

- a) Chiều cao từ điểm B đến mặt đất được tính bởi công thức $(13 + 10\sin \alpha)$ mét.
- b) Độ cao của điểm B so với mặt đất khi $\alpha = -30^\circ$ là $8m$.
- c) Chiều cao từ điểm B đến mặt đất bằng $23m$ khi và chỉ khi $\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.
- d) Khi điểm B cách mặt đất $4m$ thì điểm C cách mặt đất là $14m$.

Câu 5: . Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a) Góc giữa cạnh bên và mặt đáy của hình chóp bằng góc $\widehat{OSA}$.
- b) Cho biết khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4\sqrt{2}}{3}a^3$ (đvtt).
- c) Gọi I là điểm cách đều 4 đỉnh O, S, C, D . Khi $AB = 2a$ thì độ dài $OI = a$ (đvdd).
- d) Gọi α là góc hợp bởi đường cao SO và mặt bên của hình chóp $S.ABCD$ để thể tích khối chóp $S.ABCD$ đạt lớn nhất. Giá trị lớn nhất của thể tích đó bằng $\frac{32\sqrt{3}}{27}a^3$ (đvtt).

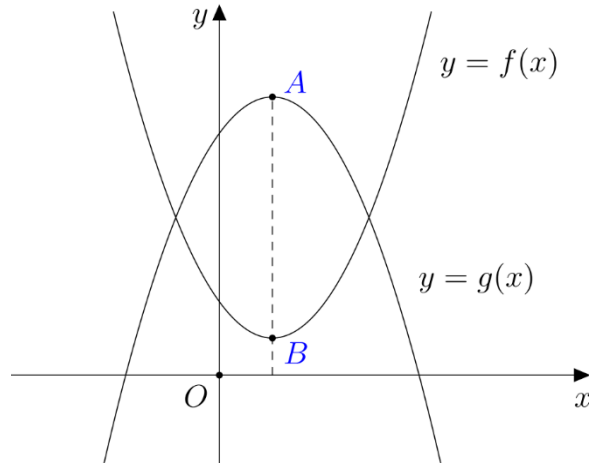
Câu 6: Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Gọi X là tập các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được lập từ A . Chọn một số từ X .

- a) Số phần tử của tập X là 2106 .
- b) Xác suất để chọn được một số thuộc tập X chia hết cho 3 là $\frac{13}{45}$.
- c) Xác suất để chọn được một số thuộc tập X sao cho số đó lớn hơn 65412 là $\frac{7}{2160}$.

d) Xác suất sao cho số được chọn có đúng 3 chữ số chẵn là $\frac{17}{30}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6, đáp số là số nguyên hoặc số thập phân có không quá 4 kí tự kể cả dấu “-” và dấu “,”.*

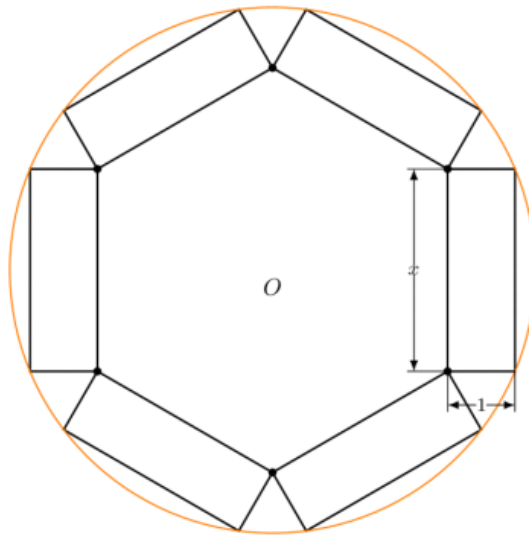
Câu 1: Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $c < 0$) có đồ thị là (C) . Gọi A là giao điểm của (C) với trục tung, biết (C) có đúng hai điểm chung với trục hoành là M và N . Đồng thời tiếp tuyến của (C) tại M đi qua A và tam giác AMN có diện tích bằng 16. Tính $f(1)$.



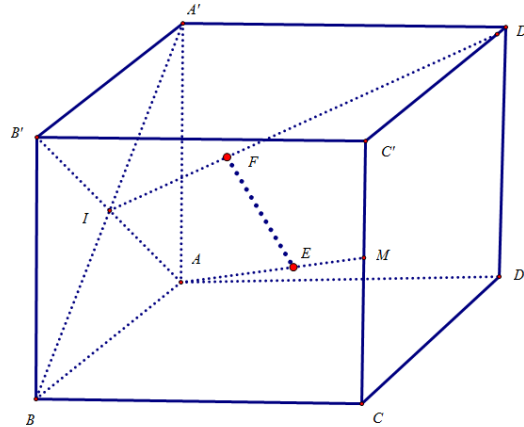
Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(1;3;2)$, $C(3;1;2)$. Gọi M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của OM^2 (làm tròn đến hàng phần trăm)

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = 2024(e^{2x} - e^{-2x}) + 2025 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + 2026x^3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|3x^2 + m|) + f(x^3 - 12) = 0$ có đúng một nghiệm thuộc đoạn $[-2; 1]$

Câu 4: Ông An định làm một cái hộp quà lưu niệm (không nắp) bằng cách cắt từ một tấm bìa hình tròn bán kính $4dm$ để tạo thành một khối lăng trụ lục giác đều, biết 6 hình chữ nhật đều có các kích thước là $1dm$ và $x dm$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó thể tích của hộp quà lưu niệm bằng bao nhiêu dm^3 (làm tròn đến hàng đơn vị).



Câu 5: Trong phòng hình hộp chữ nhật, sàn nhà là hình vuông chiều cao của phòng là $3,2m$ có hai con nhện đang chằng tơ trong căn phòng, hai con nhện luôn di chuyển trên hai đường thẳng khác nhau. Giả sử căn phòng được mô hình hóa là hình hộp chữ nhật $ABCD A'B'C'D'$ với $ABCD$ là nền phòng. Con nhện thứ nhất được coi như là điểm E di chuyển trên đường dây tơ nối từ đỉnh A đến trung điểm M của CC' . Con nhện thứ hai được coi như là điểm F di chuyển trên đường dây tơ nối từ đỉnh D' đến tâm I của mặt $ABB'A'$ (tham khảo hình vẽ).



Khoảng cách giữa hai con nhện khi đường thẳng đi qua hai con nhện vuông góc với trần nhà bằng bao nhiêu mét?

Câu 6: Chọn ngẫu nhiên 3 số $a; b; c$ trong tập hợp $S = \{1; 2; 3; \dots; 26\}$. Biết xác suất để 3 số chọn ra thỏa mãn

$a^2 + b^2 + c^2$ chia hết cho 5 bằng $\frac{m}{n}$ với $m; n \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị biểu thức:

$$T = mn + m + n.$$

.....**HẾT**.....

ĐÁP ÁN ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG ĐTHSG TỈNH CỤM HOÀNG HÓA LẦN 2
NĂM HỌC 2025 – 2026

Môn thi: TOÁN

Ngày thi: 16/10/2025

ĐÁP ÁN

PHẦN I. Gồm 20 câu TNKQ 4 lựa chọn, mỗi câu được 0,4 điểm. Tổng điểm: 8,0 điểm.

1. B 2. D 3. B 4. A 5. A 6. D 7. A 8. C 9. D 10. C
11. D 12. B 13. A 14. A 15. D 16. C 17. A 18. A 19. B 20. A

PHẦN II. Gồm 6 câu dạng đúng sai, mỗi câu có 4 ý, điểm tối đa là 1,2 điểm/ câu.

Tổng điểm: 7,2 điểm

Đúng 1 ý được 0,12 điểm

Đúng 2 ý được 0,3 điểm

Đúng 3 ý được 0,6 điểm

Đúng 4 ý được 1,2 điểm

CÂU 1	CÂU 2	CÂU 3	CÂU 4	CÂU 5	CÂU 6
a) Đúng	a) Sai	b) Đúng	a) Đúng	a) Sai	a) Sai
b) Sai	b) Đúng	c) Đúng	b) Đúng	b) Sai	b) Đúng
c) Sai	c) Sai	c) Sai	c) Đúng	c) Sai	c) Đúng
d) Đúng	d) Đúng	d) Sai	d) Sai	d) Đúng	d) Đúng

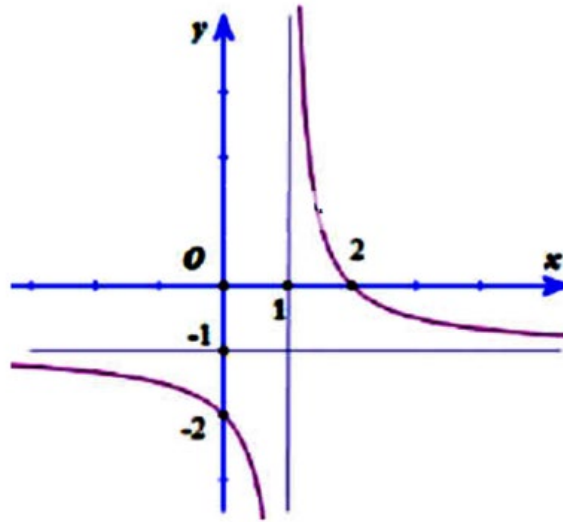
PHẦN III. Gồm 6 câu hỏi trả lời ngắn, mỗi câu 0,8 điểm. Tổng điểm: 4,8 điểm.

Câu	CÂU 1	CÂU 2	CÂU 3	CÂU 4	CÂU 5	CÂU 6
Đáp án	-3	5,71	20	25	1,6	989

LỜI GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trả lời trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ, các hệ số a, b, c là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $T = a + 3b + 2c$ bằng:



A. 2.

B. 3.

C. -9.

D. -4.

Lời giải

Đồ thị hàm số trên hình vẽ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -1$ mà $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = a$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = a$ nên đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = a$ suy ra $a = -1$

Suy ra $y = \frac{-x+b}{x+c}$

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(0; -2), B(2; 0)$ suy ra $\begin{cases} \frac{b}{c} = -2 \\ 0 = \frac{-2+b}{2+c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$

$T = a + 3b + 2c = -1 + 6 - 2 = 3$.

Câu 2: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxyz, tam giác ABC với $A(1; -3; 3), B(2; -4; 5), C(a; -2; b)$ nhận điểm $G(1; c; 3)$ làm trọng tâm của tam giác đó. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a + 2b + c = -5$.

B. $a - b + c = -3$.

C. $2a + b + c = 2$.

D. $a + b + c = -2$.

Lời giải

Ta có $G(1; c; 3)$ làm trọng tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases} x_G = \frac{1+2+a}{3} = 1 \\ y_G = \frac{-3+(-4)+(-2)}{3} = c \\ z_G = \frac{3+5+b}{3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = -3 \end{cases}$$

Vậy $a + b + c = -2$.

Câu 3: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ với G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Khi đó $\overrightarrow{AG}$ bằng

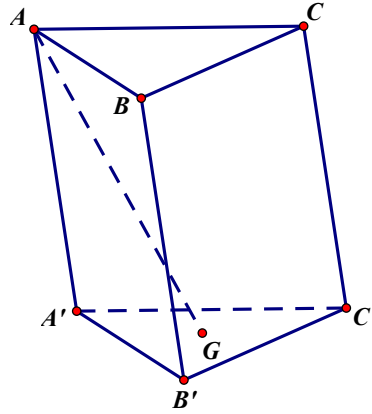
A. $\vec{a} + \frac{1}{6}(\vec{b} + \vec{c})$.

B. $\vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c})$.

C. $\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$.

D. $\vec{a} + \frac{1}{4}(\vec{b} + \vec{c})$

Lời giải



Do G là trọng tâm tam giác $A'B'C'$ nên $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'})$.

Áp dụng quy tắc hình bình hành trong các hình bình hành $ABB'A'$, $ACC'A'$ có:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'}) = \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}.$$

Câu 4: Phỏng vấn một số học sinh khối 11 về thời gian (giờ) ngủ của một buổi tối, thu được bảng số liệu sau:

Thời gian (giờ)	[4; 5)	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)
Số lượng	6	12	13	10	3

Hãy cho biết 75% học sinh khối 11 ngủ nhiều nhất bao nhiêu giờ?

A. 7,2 .

B. 6,3 .

C. 7,4 .

D. 6,25 .

Lời giải

Cỡ mẫu là $n = 6 + 12 + 13 + 10 + 3 = 44$.

Tứ phân vị thứ hai Q_2 là giá trị của $\frac{x_{22} + x_{23}}{2}$ thuộc nhóm [6; 7).

Tứ phân vị thứ nhất Q_1 là giá trị của $\frac{x_{11} + x_{12}}{2}$ thuộc nhóm [5; 6).

Tứ phân vị thứ ba Q_3 là giá trị của $\frac{x_{33} + x_{34}}{2}$ thuộc nhóm [7; 8).

Do $x_{33}; x_{34}$ thuộc nhóm [7; 8) nên nhóm này chứa Q_3 .

Do đó, $p = 4; a_4 = 7; m_4 = 10; m_1 + m_2 + m_3 = 6 + 12 + 13 = 31; a_5 - a_4 = 1$ và ta có

$$Q_3 = a_4 + \frac{\frac{132}{4} - (m_1 + m_2 + m_3)}{m_4} \cdot (a_5 - a_4) = 7 + \frac{33 - 31}{10} \cdot 1 = 7,2.$$

Vậy tứ phân vị thứ ba $Q_3 = 7,2$ nên 75% học sinh khối 11 ngủ nhiều nhất là 7,2 giờ.

Câu 5: Bánh xe của người đi xe đạp quay được 30 vòng trong 8 giây. Biết đường kính của bánh xe là 680mm, hỏi trong 1 giây người đó đã đi được quãng đường bao nhiêu?

A. 2550π .

B. 2500π .

C. 2250π .

D. 2200π

Lời giải

Trong 1 giây bánh xe quay được số vòng là $\frac{30}{8}$ nên bánh xe quay được một góc là

$$\frac{30}{8} \cdot 2\pi = \frac{15\pi}{2}.$$

Suy ra quãng đường người đó đi được là $\frac{15\pi}{2} \cdot 340 = 2550\pi$ mm.

Câu 6: Cho hàm số $y = \log_2\left(\frac{4x+3}{x-1}\right)$.

Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

$$\text{TCN: } y=2, \text{ TCD: } x = \frac{-3}{4}, x=1$$

Câu 7: Hàm số $v(t) = \begin{cases} -t^2 + 4t + 12 & \text{khi } 0 \leq t \leq 5 \\ at - 3 & \text{khi } 5 < t \leq 10 \end{cases}$ mô tả vận tốc (m/s) của một vật tại thời điểm t

(giây) trong khoảng thời gian 10 giây đầu tiên kể từ khi vật bắt đầu chuyển động. Biết rằng $v(t)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0;10]$ và trong 10 giây đầu tiên đó, có hai lần vật đạt vận tốc $10 m/s$ là vào các thời điểm t_1 giây và t_2 giây. Khi đó tổng $t_1 + t_2$ bằng

- A.** $\frac{17}{2} + \sqrt{6}$. **B.** $\frac{17}{2} - \sqrt{6}$. **C.** $5 + \sqrt{3}$. **D.** $5 - \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $v(t)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ nên hàm số liên tục tại $t = 5$.

$$\text{Suy ra } \lim_{x \rightarrow 5^+} v(t) = \lim_{x \rightarrow 5^-} v(t) = v(5) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 5^+} (at - 3) = \lim_{x \rightarrow 5^-} (-t^2 + 4t + 12) = 7$$

$$\Leftrightarrow 5a - 3 = -5^2 + 4 \cdot 5 + 12 \Leftrightarrow a = 2.$$

$$\text{Khi đó } v(t) = \begin{cases} -t^2 + 4t + 12 & \text{khi } 0 \leq t \leq 5 \\ 2t - 3 & \text{khi } 5 < t \leq 10 \end{cases}.$$

$$\text{Vật đạt vận tốc } 10 \text{ m/s} \text{ nên ta có } v(t) = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} -t^2 + 4t + 12 = 10 & (0 \leq t \leq 5) \\ 2t - 3 = 10 & (5 < t < 10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 + \sqrt{6} \\ t = \frac{13}{2} \end{cases}.$$

$$\text{N như vậy ta có } t_1 = 2 + \sqrt{6} \text{ và } t_2 = \frac{13}{2}. \text{ suy ra } t_1 + t_2 = \frac{17}{2} + \sqrt{6}.$$

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;2)$, $B(0;2;0)$, $C(1;0;3)$. Gọi M là điểm thỏa mãn $MA^2 + MC^2 = MB^2$. Tính MP với $P(3;-2;5)$.

- A.** $3\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** $4\sqrt{3}$.

Lời giải

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $\overline{IA} + \overline{IC} = \overline{IB}$ (*).

$$\text{Ta có } \overline{IA} = (2-x; -y; 2-z); \overline{IB} = (-x; 2-y; -z); \overline{IC} = (1-x; -y; 3-z).$$

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x+1-x=-x \\ -y-y=2-y \\ 2-z+3-z=-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \\ z=5 \end{cases} \Rightarrow I(3;-2;5) \equiv P.$$

$$\text{Suy ra } \overline{IA} = (-1; 2; -3) \Rightarrow IA^2 = 14; \overline{IB} = (-3; 4; -5) \Rightarrow IB^2 = 50; \overline{IC} = (-2; 2; -2) \Rightarrow IC^2 = 12.$$

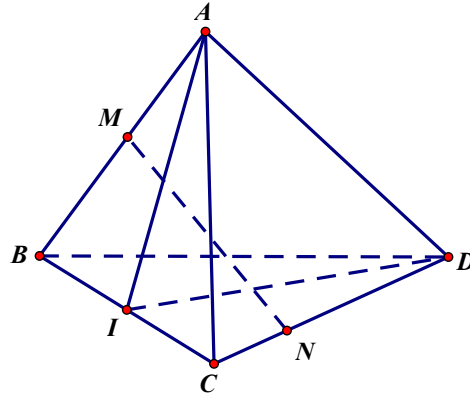
$$\text{Ta có } MA^2 + MC^2 = MB^2 \Leftrightarrow MA^2 + MC^2 - MB^2 = 0.$$

$$\begin{aligned}
\text{Khi đó } MA^2 + MC^2 - MB^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\
&= MI^2 + IA^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + MI^2 + IC^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IC} - MI^2 - IB^2 - 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} \\
&= MI^2 + (IA^2 + IC^2 - IB^2) + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IB}) = 0 \text{ hay} \\
&\Leftrightarrow MP^2 + (14 + 12 - 50) = 0 \Leftrightarrow MP^2 = 24 \Rightarrow MP = 2\sqrt{6}.
\end{aligned}$$

Câu 9: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Hai điểm M, N theo thứ tự thay đổi trên các đoạn AB và CD sao cho $BM = DN$. Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của MN . Khi đó giá trị của $m^2 + n^2$ bằng

- A. a^2 . B. $\frac{5a^2}{2}$. C. $\frac{a^2}{2}$. D. $\frac{3a^2}{2}$

Lời giải



Đặt $\frac{BM}{BA} = x$, với $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \frac{DN}{DC} = x$. Khi đó ta có: $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{DN} = x\overrightarrow{DC}$

Ta có: $\overrightarrow{DN} = x\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BD} = x(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}) \Leftrightarrow \overrightarrow{BN} = x\overrightarrow{BC} + (1-x)\overrightarrow{BD}$

Do đó: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BC} + (1-x)\overrightarrow{BD} - x\overrightarrow{BA}$

$$\begin{aligned}
MN^2 &= x^2a^2 + (1-x)^2a^2 + x^2a^2 + 2x(1-x)\frac{a^2}{2} - 2x^2 \cdot \frac{a^2}{2} - 2x(1-x)\frac{a^2}{2} \\
&= [x^2 + (1-x)^2 + x^2 + x(1-x) - x^2 - x(1-x)] \cdot a^2 \\
&= [2x^2 - 2x + 1] \cdot a^2
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ trên đoạn $[0;1]$ ta có:

$$\max f(x) = f(0) = f(1) = 1, \min f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

MN đạt giá trị nhỏ nhất bằng $n = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ khi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD .

MN đạt giá trị lớn nhất bằng $m = a$ khi $M \equiv B, N \equiv D$ hoặc $M \equiv A, N \equiv C$.

$$\text{Vậy } m^2 + n^2 = \frac{3a^2}{2}$$

Câu 10: Cho ba số $a + \log_2 3$, $a + \log_4 3$, $a + \log_8 3$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Công bội của cấp số nhân đó bằng

A. 1.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Theo giả thiết ta có $(a + \log_4 3)^2 = (a + \log_2 3)(a + \log_8 3)$.

Suy ra $a^2 + 2a \log_4 3 + (\log_4 3)^2 = a^2 + a(\log_2 3 + \log_8 3) + \log_2 3 \cdot \log_8 3$.

$$\Leftrightarrow a \log_2 3 + \frac{1}{4}(\log_2 3)^2 = a \frac{4}{3} \log_2 3 + \frac{1}{3}(\log_2 3)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}a = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) \log_2 3.$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{4} \log_2 3.$$

Vậy $a + \log_2 3 = \frac{3}{4} \log_2 3$; $a + \log_4 3 = \frac{1}{4} \log_2 3$. Suy ra công bội của cấp số nhân bằng $\frac{1}{3}$.

Câu 11: Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị: km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau:

Quãng đường (km)	[2, 7; 3, 0)	[3, 0; 3, 3)	[3, 3; 3, 6)	[3, 6; 3, 9)	[3, 9; 4, 2)
Số ngày	3	6	5	4	2

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

A. 3,41.

B. 11,62.

C. 0,017.

D. 0,36.

Lời giải

Giá trị đại diện	2,85	3,15	3,45	3,75	4,05
Số ngày	3	6	5	4	2

Số trung bình:

$$\bar{x} = \frac{3 \cdot 2,85 + 6 \cdot 3,15 + 5 \cdot 3,45 + 4 \cdot 3,75 + 2 \cdot 4,05}{20} = 3,39$$

Phương sai:

$$S^2 = \frac{3 \cdot 2,85^2 + 6 \cdot 3,15^2 + 5 \cdot 3,45^2 + 4 \cdot 3,75^2 + 2 \cdot 4,05^2}{20} - 3,39^2 = 0,1314$$

Độ lệch chuẩn:

$$\sigma = \sqrt{0,1314} \approx 0,36$$

Câu 12: Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x$

A. $-\frac{35}{36}\pi$.

B. $-\frac{11}{36}\pi$.

C. $-\frac{11\pi}{12}$.

D. $-\frac{\pi}{12}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{\pi}{6} = 2x + k2\pi \\ 4x - \frac{\pi}{6} = -2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Ta có mỗi họ nghiệm lần lượt có các nghiệm âm lớn nhất là:

$$x_1 = \frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{11\pi}{12}; x_2 = \frac{\pi}{36} - \frac{\pi}{3} = -\frac{11\pi}{36}$$

Vậy nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $x = -\frac{11}{36}\pi$.

Câu 13: Cho các số thực $a, b > 1$. Biết phương trình $\log_a(ax) \log_b(bx) = 2025$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x_1 x_2 (4a^2 + 9b^2)$.

A. 12.

B. 0.

C. 1.

D. 13.

Lời giải

Vì $a, b > 1$ nên phương trình $\log_a(ax) \log_b(bx) = 2025$ có điều kiện xác định là $x > 0$.

Ta có: $\log_a(ax) \log_b(bx) = 2025$

$$\Leftrightarrow (\log_a x + 1)(\log_b a \log_a x + 1) = 2025$$

$$\Leftrightarrow \log_b a \log_a^2 x + (1 + \log_b a) \log_a x - 2024 = 0.$$

Đặt $t = \log_a x$ ta được phương trình: $(\log_b a)t^2 + (1 + \log_b a)t - 2024 = 0(*)$.

Vì $a, b > 1$ nên $-2024 \log_b a < 0$.

Suy ra phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 .

$$\text{Theo Vi-et: } t_1 + t_2 = -\frac{1 + \log_b a}{\log_b a}$$

$$\Leftrightarrow \log_a x_1 + \log_a x_2 = -\frac{\log_b(ab)}{\log_b a}$$

$$\Leftrightarrow \log_a(x_1 x_2) = -\log_a(ab)$$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 = \frac{1}{ab}.$$

$$\text{Từ đó: } P = x_1 x_2 (4a^2 + 9b^2) = \frac{1}{ab} (4a^2 + 9b^2) \geq \frac{1}{ab} \cdot 2 \cdot 6ab = 12.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $2a = 3b$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $y' = f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$
y'		+		-	0	+
		+		-	0	+

Biết rằng $S = (a; b)$ là tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số

$g(x) = f(-|3x^2 - 12x + 9| + m - 3)$ có nhiều điểm cực trị nhất. Tính $T = 4a - 7b$.

A. -25.

B. 25.

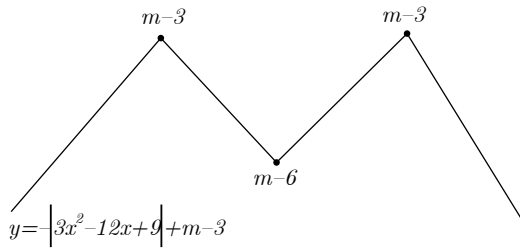
C. -14.

D. 73.

Lời giải

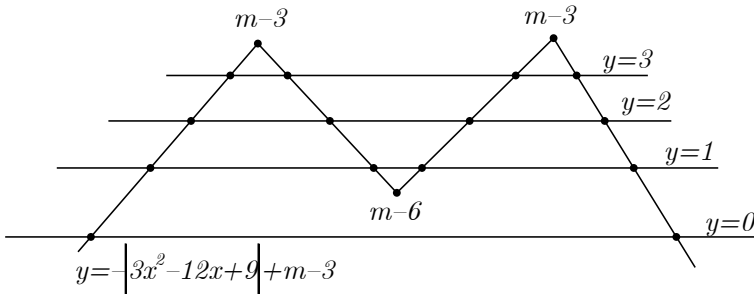
Chọn A

Xét hàm số $y = -|3x^2 - 12x + 9| + m - 3$ có đồ thị có dạng “ $\wedge$ ” như sau:



Hàm số $y = f(x)$ có 4 điểm cực trị là $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ và $x = 3$.

Để hàm số $g(x) = f(-|3x^2 - 12x + 9| + m - 3)$ có số cực trị nhiều nhất thì mỗi đường thẳng $y = 1$, $y = 2$ và $y = 3$ phải cắt đồ thị hàm số $y = -|3x^2 - 12x + 9| + m - 3$ tại 4 điểm phân biệt và đường thẳng $y = 0$ phải cắt đồ thị hàm số $y = -|3x^2 - 12x + 9| + m - 3$ tại 2 điểm phân biệt.

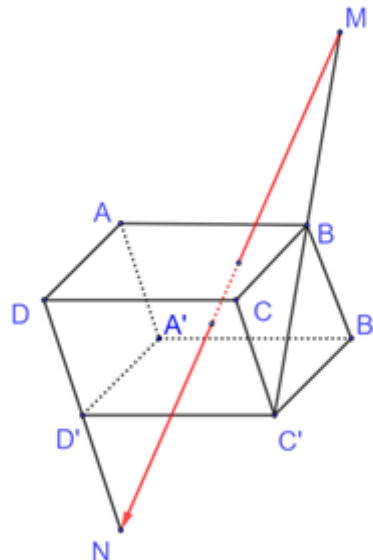


Dựa vào đồ thị trên, ta có
$$\begin{cases} m - 6 \geq 0 \\ m - 6 < 1 \\ m - 3 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 6 \\ m < 7 \\ m > 6 \end{cases} \Leftrightarrow 6 < m < 7 \Rightarrow S = (6; 7)$$

Vậy $T = 4a - 7b = -25$.

- Câu 15:** . Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng 1 và $\widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = \widehat{A'AB} = 60^\circ$. Cho hai M, N thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{C'B} = \overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{DD'}$. Độ dài đoạn thẳng MN là
- A. $\sqrt{3}$. B. $\sqrt{13}$. C. $\sqrt{19}$. D. $\sqrt{15}$.

Lời giải



Ta có $\widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = \widehat{A'AB} = 60^\circ$.

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ABA' = \triangle ADA'$ là các tam giác đều và có cạnh $AB = AD = AA' = 1$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA'} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'N} = 2\overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{DD'}$$

$$= 2(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}) + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{DD'} = 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{DD'}$$

$$= 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB}$$

$$\cdot \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow MN^2 = (2\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB})^2$$

$$\Leftrightarrow MN^2 = 4\overrightarrow{AD}^2 + 9\overrightarrow{AA'}^2 + \overrightarrow{AB}^2 + 12\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA'} - 4\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - 6\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'}.$$

$$\Leftrightarrow MN^2 = 9 + 4 + 1 + 6 - 3 - 2 = 15.$$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{15}.$$

Câu 16: Một người vay ngân hàng 40 triệu đồng, với lãi suất 0,85%/tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, người đó bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và bằng 500 nghìn đồng. Sau một năm mức lãi suất của ngân hàng được điều chỉnh lên là 1,15%/tháng và người vay muốn nhanh chóng hết nợ nên đã thỏa thuận với ngân hàng sẽ trả 1 triệu 500 nghìn đồng cho mỗi tháng. Phải mất thêm ít nhất bao nhiêu tháng kể từ lúc tăng lãi suất người đó mới trả hết nợ?

A. 43

B. 30

C. 31

D. 42

Lời giải

Sau 1 năm số tiền còn nợ ngân hàng là:

$$T = M(1+r)^n - \frac{m}{r}[(1+r)^n - 1] \text{ với } \begin{cases} M = 40.000.000 \\ m = 500.000 \\ r = 0,85\% \\ n = 12 \end{cases} \text{ ta được } T = 37.987.647 \text{ đồng.}$$

Để trả hết số nợ còn lại ta cần có

$$M_1(1+r_1)^{n_1} - \frac{m_1}{r_1}[(1+r_1)^{n_1} - 1] = 0 \text{ với } \begin{cases} M_1 = T = 37.987.647 \\ m_1 = 1.500.000 \\ r_1 = 1,15\% \end{cases} \text{ ta được } n_1 \approx 30,1 \text{ tháng.}$$

Vậy cần thêm ít nhất 31 tháng để trả hết nợ.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;2)$, $B(1;-1;2)$. Điểm M thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho các đường thẳng MA , MB luôn tạo với mặt phẳng (Oyz) các góc bằng nhau. Biết rằng điểm M luôn cách đều một điểm I cố định thuộc mặt phẳng (Oyz) . Tìm tổng các thành phần tọa độ của điểm I .

A. $-\frac{2}{3}$.

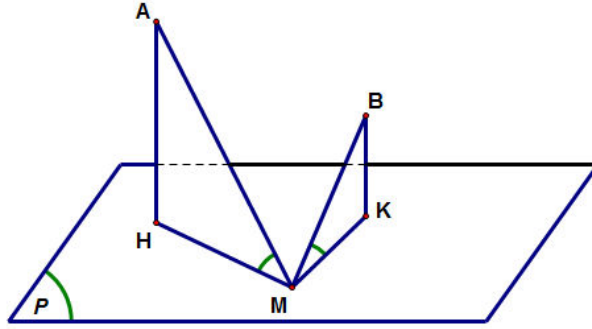
B. $\frac{2}{3}$.

C. -2 .

D. 2 .

Lời giải

Chọn A



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên (Oyz) .

Vì MA, MB luôn tạo với mặt phẳng (Oyz) các góc bằng nhau. Nên $\widehat{AMH} = \widehat{BMK}$. Suy ra $\triangle AMH \sim \triangle BMK$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{AH}{BK} = \frac{d(A, (Oyz))}{d(B, (Oyz))} = 2 \Rightarrow MA = 2MB.$$

(Vì $H(0; 4; 2), K(0; -1; 2)$, suy ra $d(A, (Oyz)) = AH = 2; d(B, (Oyz)) = BK = 1$)

Gọi $M(0; y; z)$. Khi đó ta có:

$$MA = 2MB \Leftrightarrow \sqrt{(0-2)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2} = 2\sqrt{(0-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow y^2 + z^2 + \frac{16}{3}y - 4z = 0. \Leftrightarrow \left(y + \frac{8}{3}\right)^2 + (z-2)^2 = \frac{100}{9}. \text{ Suy ra điểm } M \text{ luôn cách điểm}$$

$I\left(0; -\frac{8}{3}; 2\right)$ trên mặt (Oyz) một khoảng không đổi bằng $\frac{10}{3}$. Vậy tổng các thành phần tọa độ

điểm I bằng $-\frac{2}{3}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh $SA = BC = x, SB = AC = y, SC = AB = z$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 12$. Giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABC$ là

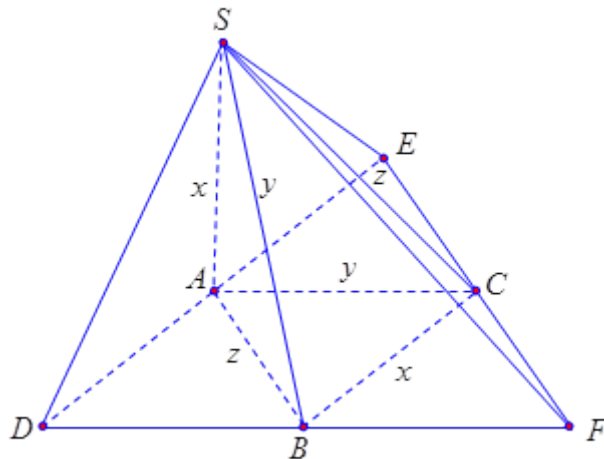
A. $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

B. $V = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $V = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

D. $V = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Trong mặt phẳng (ABC) dựng D, E, F sao cho A, B, C lần lượt là trung điểm của DE, DF, EF . Khi đó ta có $DE = 2SA = 2x; DF = 2SB = 2y; EF = 2SC = 2z$. Suy ra SD, SE, SF đôi một vuông góc.

$$\text{Ta có } V_{S.ABC} = \frac{1}{4} V_{S.DEF} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot SD \cdot SE \cdot SF.$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} SD^2 + SE^2 = 4x^2 \\ SD^2 + SF^2 = 4y^2 \\ SE^2 + SF^2 = 4z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SD^2 = 2(x^2 + y^2 - z^2) \\ SE^2 = 2(x^2 + z^2 - y^2) \\ SF^2 = 2(y^2 + z^2 - x^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SD = 2\sqrt{6 - z^2} \\ SE = 2\sqrt{6 - y^2} \\ SF = 2\sqrt{6 - x^2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } V_{S.ABCD} = \frac{1}{24} \cdot 8 \cdot \sqrt{(6 - x^2)(6 - y^2)(6 - z^2)} \leq \frac{1}{3} \sqrt{\left(\frac{6 - x^2 + 6 - y^2 + 6 - z^2}{3}\right)^3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} \text{ đạt giá trị lớn nhất là } \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 19: Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau, chia hết cho 4, nhỏ hơn 4567 và có chữ số hàng chục là chữ số lẻ.

A. 171.

B. 172.

C. 173.

D. 170.

Lời giải

Chọn B

Gọi $\overline{abcd}$ là số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau, chia hết cho 4, nhỏ hơn 4567 và có chữ số hàng chục là chữ số lẻ.

Ta có: $\overline{abcd} : 4 \Leftrightarrow 1000a + 100b + 10c + d : 4 \Leftrightarrow 2c + d : 4 \quad (1)$

Mặt khác do c lẻ nên $2c$ chia cho 4 dư 2, nên để thỏa mãn (1), thì d phải chia cho 4 dư 2.

TH1: $a \in \{1; 3\}$. Khi đó do c lẻ suy ra $c \in \{1; 3; 5; 7; 9\} \setminus \{a\}$ suy ra c có 4 cách chọn.

Ta có d chia cho 4 dư 2, hay $d \in \{2; 6\}$.

Sau khi chọn a, c, d thì b có 7 cách chọn.

Vì vậy trong trường hợp này có $2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7 = 112$ số thỏa mãn.

TH2: $a = 2$. Khi đó do c lẻ suy ra $c \in \{1; 3; 5; 7; 9\}$ suy ra c có 5 cách chọn.

Ta có d chia cho 4 dư 2, hay $d = 6$.

Sau khi chọn a, c, d thì b có 7 cách chọn.

Vì vậy trong trường hợp này có $1 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 7 = 35$ số thỏa mãn.

TH3: $a = 4, b \in \{1; 3\}$. Khi đó do c lẻ suy ra $c \in \{1; 3; 5; 7; 9\} \setminus \{b\}$ suy ra c có 4 cách chọn.

Ta có d chia cho 4 dư 2, hay $d \in \{2; 6\}$.

Vì vậy trong trường hợp này có $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$ số thỏa mãn.

TH4: $a = 4, b = 2$. Khi đó do c lẻ suy ra $c \in \{1; 3; 5; 7; 9\}$ suy ra c có 5 cách chọn.

Ta có d chia cho 4 dư 2, hay $d = 6$.

Vì vậy trong trường hợp này có $1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1 = 5$ số thỏa mãn.

TH5: $a = 4, b = 5$. Khi đó $c \in \{1; 3\}$. Ta có d chia cho 4 dư 2, hay $d \in \{2; 6\}$.

Vậy trong trường hợp này có $2 \cdot 2 = 4$ số thỏa mãn.

Do đó có 172 số thỏa mãn đề bài.

Câu 20: Xét hàm số $f(x) = \frac{|x^3 - 3x + 2| + 2026}{|x^3 - 3x + 2| + 2025}$ và gọi S là tập hợp các số nguyên có giá trị tuyệt đối không vượt quá 29. Chọn ngẫu nhiên hai số $a, b \in S$ với $a < b$. Tính xác suất để hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$.

A. $\frac{381}{1711}$.

B. $\frac{124}{1572}$.

C. $\frac{117}{532}$.

D. $\frac{544}{2051}$.

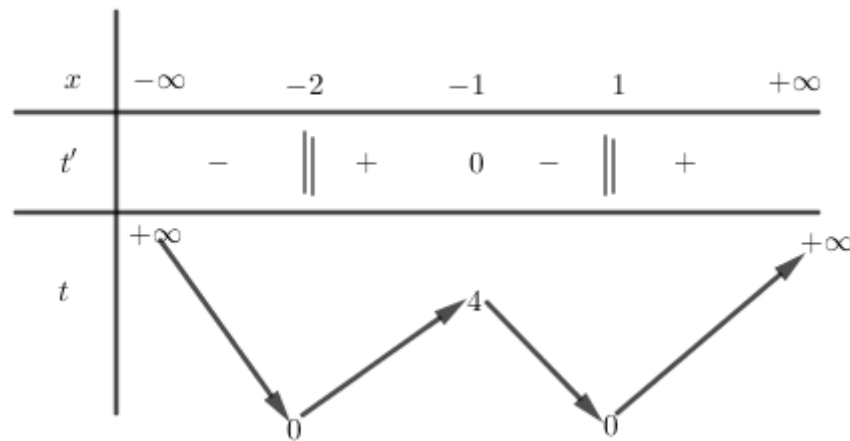
Lời giải

Đặt $t = |x^3 - 3x + 2|$;

$$t' = \frac{(x^3 - 3x + 2)(3x^2 - 3)}{|x^3 - 3x + 2|};$$

$t' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ và t' không xác định tại $x = -2; x = 1$;

Bảng biến thiên:



Hàm số có dạng $f(t) = \frac{t + 2026}{t + 2025}; t \geq 0; f'(t) = \frac{-1}{(t + 2025)^2} < 0, \forall t \geq 0$.

Đề hàm $f(x)$ đồng biến thì t phải nghịch biến $\Rightarrow x \in (-\infty; -2)$ hoặc $(-1; 1)$.

Gọi A là biến cố “Chọn ngẫu nhiên hai số $a, b \in S$ với $a < b$ để hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$ ”

TH1. Chọn a, b thỏa mãn $-29 \leq a < b \leq -2$ có C_{28}^2 cách

TH2. Chọn a, b thỏa mãn $-1 \leq a < b \leq 1$ có C_3^2 cách

$$\Rightarrow n(A) = C_{28}^2 + C_3^2, n(\Omega) = C_{59}^2.$$

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{C_{28}^2 + C_3^2}{C_{59}^2} = \frac{381}{1711}.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 27 đến câu 32. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ là hàm số bậc ba có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$						$+\infty$

Xét tính đúng - sai của các mệnh đề sau.

a) Khoảng cách hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng $\sqrt{26}$

b) Hàm số $g(x) = f(1-2x)$ nghịch biến trên khoảng $(\frac{-1}{2}; 0)$.

c) Đồ thị hàm số $h(x) = \frac{x-2}{f^2(x)-4}$ có tổng số đường tiệm cận bằng 5.

d) Có 1888 giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2025; 2025]$ sao cho bất phương trình $g(x) \geq x^2 + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 1]$.

Lời giải

a) Hai điểm cực trị $A(1; 3), B(2; -2) \Rightarrow AB = \sqrt{26}$. Vậy a) **Đúng**.

b) Ta có $g'(x) = -2 \cdot f'(1-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x=1 \\ 1-2x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$	
$g'(x)$	-	0	+	0	-

Vậy b) **Sai**.

c) Ta có: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{f^2(x)-4} = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang.

♦ Xét phương trình $f^2(x) - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 \\ f(x) = -2 \end{cases}$

Dựa vào đồ thị ta có $f(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a < 1 \\ x = b \ (1 < b < 2) \\ x = c > 2 \end{cases}$, nên đồ thị $h(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng

$f(x) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = d < 1 \\ x = 2 \end{cases}$, do $x = 2$ là nghiệm bội hai nên đồ thị $h(x)$ có hai đường tiệm cận đứng

Vậy đồ thị hàm số $h(x)$ có tổng số đường tiệm cận là 6. (ta có thể tìm hàm số $y = f(x)$ và từ đó suy ra số các đường tiệm cận). Vậy c) **Sai**.

d) BPT $g(x) \geq x^2 + m \Leftrightarrow g(x) - x^2 \geq m$

Đặt $k(x) = g(x) - x^2 \Rightarrow k'(x) = g'(x) - 2x$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$-2x$	+		+	0	-
$k'(x)$			+	0	-

$$k(x) \geq m \quad \forall x \in [0;1] \Leftrightarrow m \leq \min k(x) \Leftrightarrow m \leq k(1) \Leftrightarrow m \leq f(-1) - 1$$

Theo bài ra, ta tìm được $f(x) = 10x^3 - 45x^2 + 60x - 22$, suy ra $m \leq f(-1) - 1 \Leftrightarrow m \leq -138$. Mà $m \in [-2025; 2025]$ nên có 1888 giá trị nguyên của m thỏa mãn. Vậy d) **đúng**.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 0; 1)$ và hai điểm $A(-3; 8; 4)$, $B(5; 5; 6)$. Hai điểm M, N thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng $\vec{a}$ và $MN = 5\sqrt{5}$.

a) Điểm $E(6; 8; 9)$ thỏa mãn $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{MN}$

b) Điểm $I\left(\frac{9}{4}; \frac{31}{4}; \frac{13}{2}\right)$ thỏa mãn $\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

c) Xét điểm K thay đổi trên mặt phẳng (Oxz) , giá trị nhỏ nhất của $|\overrightarrow{OK} + 2\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB}|$ bằng $\frac{31}{4}$

d) Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng $\sqrt{22}$

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{a} = (2; 0; 1) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = k\vec{a}, (k > 0)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (2k; 0; k) \quad (k > 0) \Rightarrow MN^2 = 5k^2 = (5\sqrt{5})^2 = 125 \Leftrightarrow k = 5 \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (10; 0; 5)$$

$$\text{Gọi } E \text{ thỏa } \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{MN} = (10; 0; 5) \Rightarrow E(7; 8; 9).$$

Vậy a) **sai**

b) Chọn $I(a; b; c)$ thỏa $\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \quad (1)$

$$\overrightarrow{OI} = (a; b; c); \overrightarrow{IA} = (-3 - a; 8 - b; 4 - c); \overrightarrow{IB} = (5 - a; 5 - b; 6 - c)$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \begin{cases} -4a + 9 = 0 \\ -4b + 31 = 0 \\ -4c + 26 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{9}{4} \\ b = \frac{31}{4} \\ c = \frac{13}{2} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } I\left(\frac{9}{4}; \frac{31}{4}; \frac{13}{2}\right)$$

Vậy b) **đúng**

c) Chọn $I(a; b; c)$ thỏa $\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$, khi đó $I\left(\frac{9}{4}; \frac{31}{4}; \frac{13}{2}\right)$

$$\text{Ta có: } |\overrightarrow{OK} + 2\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB}| = |\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{KI}| = 4|\overrightarrow{KI}|.$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{OK} + 2\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB}| \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow 4|\overrightarrow{KI}| \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow KI \perp (Oxz). \text{ Lúc đó } K \text{ là hình chiếu của}$$

$$I \text{ lên } (Oxz). \text{ Giá trị nhỏ nhất của } 4|\overrightarrow{KI}| = 4 \cdot \frac{31}{4} = 31. \text{ Khi đó } K\left(\frac{9}{4}; 0; \frac{13}{2}\right).$$

Vậy c) **sai**

d) Xét điểm $E(7;8;9)$ thỏa mãn $\overline{AE} = \overline{MN}$. Ta thấy các điểm E, B đều nằm cùng phía so với mặt phẳng (Oxy) (vì z_E, z_B cùng dương).

Mặt khác do $z_E \neq z_B$ nên đường thẳng EB luôn cắt mặt phẳng (Oxy) .

Từ $\overline{AE} = \overline{MN}$ suy ra $AM = EN$, do đó $|AM - BN| = |EN - BN| \leq EB$.

Dấu "=" xảy ra khi N là giao điểm của đường thẳng EB với mặt phẳng (Oxy) .

Do đó, giá trị lớn nhất của $|AM - BN| = EB = \sqrt{22}$

Vậy **d) đúng**

Câu 3: Ta có các bảng thống kê sau:

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[6,22 ; 6,46)	6,34	3
[6,46 ; 6,70)	6,58	7
[6,70 ; 6,94)	6,82	5
[6,94 ; 7,18)	7,06	20
[7,18 ; 7,42)	7,30	5
		$n = 40$

Bảng 15

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[6,22 ; 6,46)	6,34	2
[6,46 ; 6,70)	6,58	5
[6,70 ; 6,94)	6,82	8
[6,94 ; 7,18)	7,06	19
[7,18 ; 7,42)	7,30	6
		$n = 40$

Bảng 16

a) Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Dũng cho bởi Bảng 15 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là $6,92(m)$.

b) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Dũng cho bởi Bảng 15 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là $0,27(m)$.

c) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Huy cho bởi Bảng 16 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là $0,16$.

d) Kết quả nhảy xa của vận động viên Dũng đồng đều hơn kết quả nhảy xa của vận động viên Huy.

Lời giải

a) Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Dũng cho bởi Bảng 15 là:

$$\bar{x}_D = \frac{3 \cdot 6,34 + 7 \cdot 6,58 + 5 \cdot 6,82 + 20 \cdot 7,06 + 5 \cdot 7,30}{40} = \frac{276,88}{40} \approx 6,92(m). \text{ nên a) đúng}$$

b) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Dũng cho bởi Bảng 15 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là:

$$s_D^2 = \frac{1}{40} [3 \cdot (6,34 - 6,9222)^2 + 7 \cdot (6,58 - 6,9222)^2 + 5 \cdot (6,82 - 6,9222)^2 + 20 \cdot (7,06 - 6,9222)^2 + 5 \cdot (7,30 - 6,9222)^2]$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên là: $s_D \approx \sqrt{0,073} \approx 0,27(m)$ nên **b đúng**

c) Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Huy cho bởi Bảng 16 là:

$$\bar{x}_H = \frac{2 \cdot 6,34 + 5 \cdot 6,58 + 8 \cdot 6,82 + 19 \cdot 7,06 + 6 \cdot 7,30}{40} = \frac{278,08}{40} \approx 6,95(m).$$

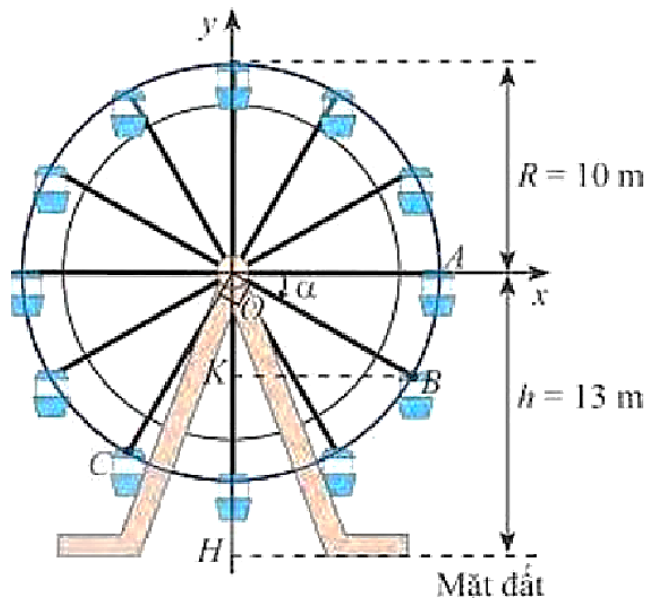
Vậy phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Huy cho bởi Bảng 16 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là:

$$\begin{aligned} s_H^2 &= \frac{1}{40} \left[2 \cdot (6,34 - 6,95)^2 + 5 \cdot (6,58 - 6,95)^2 \right. \\ &\quad + 8 \cdot (6,82 - 6,95)^2 + 19 \cdot (7,06 - 6,95)^2 \\ &\quad \left. + 6 \cdot (7,30 - 6,95)^2 \right] \end{aligned}$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên là: $s_H \approx \sqrt{0,063} \approx 0,25(m)$ nên **c sai**

d) Do $s_H \approx 0,25 < s_D \approx 0,27$ nên kết quả nhảy xa của vận động viên Huy đồng đều hơn kết quả nhảy xa của vận động viên Dũng nên **d sai**.

Câu 4: Trong hình bên dưới, vị trí cabin mà Bình và Cường ngồi trên vòng quay được đánh dấu với điểm B và C .



Khi vòng quay đang hoạt động, gọi α là số đo của một góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .

a) Chiều cao từ điểm B đến mặt đất được tính bởi công thức $(13 + 10 \sin \alpha)$ mét.

b) Độ cao của điểm B so với mặt đất khi $\alpha = -30^\circ$ là $8m$.

c) Chiều cao từ điểm B đến mặt đất bằng $23m$ khi và chỉ khi $\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

d) Khi điểm B cách mặt đất $4m$ thì điểm C cách mặt đất là $14m$.

Lời giải

a) Chiều cao từ điểm B đến mặt đất bằng KH

- Nếu điểm B nằm ở nửa đường tròn trên thì $\sin \alpha > 0$ và $OK = 10 \sin \alpha$

Ta có: $KH = OH + OK = 13 + 10 \sin \alpha$

- Nếu điểm B nằm ở nửa đường tròn dưới thì $\sin \alpha < 0$ và $OK = 10 \cdot (-\sin \alpha)$.

Ta có: $KH = OH - OK = 13 - 10 \cdot (-\sin \alpha) = 13 + 10 \sin \alpha$

Vậy a) **đúng**

b) Khi $\alpha = -30^\circ$, $KH = 13 + 10 \cdot \frac{-1}{2} = 8$

Vậy b) **đúng**

c) Ta có $13 + 10 \sin \alpha = 23 \Leftrightarrow \sin \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$

Vậy c) **đúng**

d) Gọi $(OA, OC) = \beta$. Ta có: $\beta = \alpha - 90^\circ \Rightarrow \sin \beta = \sin(\alpha - 90^\circ) = -\cos \alpha$

Khi $KH = 4 \Leftrightarrow \sin \alpha = -\frac{9}{10} \Rightarrow \sin \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{9}{10}\right)^2} = \frac{-\sqrt{19}}{10}$

Điểm C cách mặt đất là: $13 + 10 \sin \beta \approx 8,64$

Vậy d) **sai**

Câu 5: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

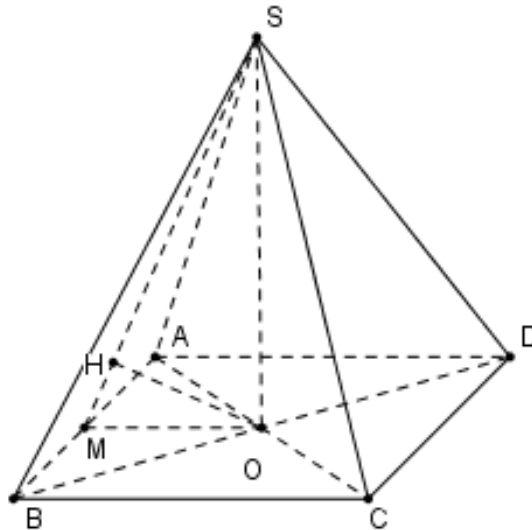
- a) Góc giữa cạnh bên và mặt đáy của hình chóp bằng góc $\widehat{OSA}$.
- b) Cho biết khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4\sqrt{2}}{3}a^3$ (đvtt)
- c) Gọi I là điểm cách đều 4 đỉnh O, S, C, D . Khi $AB = 2a$ thì độ dài $OI = a$ (đvdd).
- d) Gọi α là góc hợp bởi đường cao SO và mặt bên của hình chóp $S.ABCD$ để thể tích khối chóp $S.ABCD$ đạt lớn nhất. Giá trị lớn nhất của thể tích bằng $\frac{32\sqrt{3}}{27}a^3$ (đvtt)

Lời giải

- a) Góc giữa cạnh bên và đáy của hình chóp bằng góc $\widehat{SOA}$.

Khẳng định Sai.

- b) Gọi M là trung điểm của AB . Kẻ $OH \perp SM$ ($H \in SM$).



Ta có $AB \perp OM; AB \perp SO \Rightarrow AB \perp (SOM) \Rightarrow AB \perp OH$.

Mà $OH \perp SM$ nên suy ra $OH \perp (SAB) \Rightarrow d(O, (SAB)) = OH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{4}{AB^2} + \frac{1}{SA^2 - \frac{AB^2}{2}} \Rightarrow \begin{cases} AB = 2a \\ AB = \frac{4\sqrt{3}}{3}a \end{cases}$

+ Với $AB = 2a \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = a\sqrt{2}$.

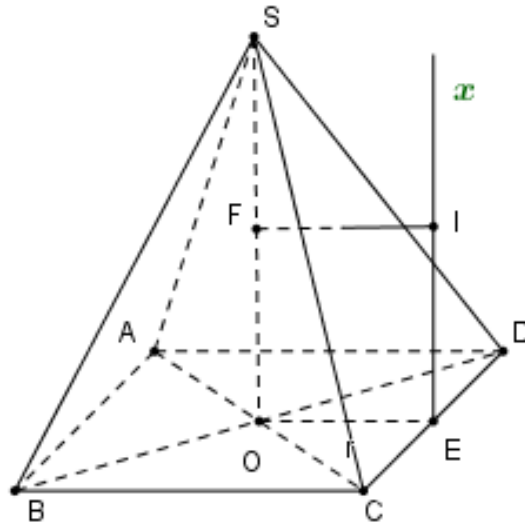
$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{4\sqrt{2}}{3} a^3.$$

+ Với $AB = \frac{4\sqrt{3}}{3}a \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$.

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{32\sqrt{3}}{27} a^3.$$

Khẳng định Sai

c) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của CD, SO .



Tam giác OCD vuông cân tại O nên E là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔOCD . Kẻ $Ex \parallel SO$. Khi đó Ex là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔOCD .

Mặt phẳng trung trực của SO cắt Ex tại I . Khi đó $IS = IO = IC = ID$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.OCD$.

Ta có: $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = a\sqrt{2}$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.OCD$ là $R = IO = \sqrt{\frac{SO^2}{4} + OE^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Khẳng định Sai

d) Theo câu 2, ta có SH là hình chiếu của SO lên mặt bên (SAB) nên suy ra góc giữa SO và mặt bên là $\widehat{OSH} = \widehat{OSM} = \alpha$.

Ta có: $AM = OM = SM \cdot \sin \alpha$

$$SA^2 = SM^2 + AM^2 \Leftrightarrow 4a^2 = SM^2 + SM^2 \cdot \sin^2 \alpha = SM^2 (1 + \sin^2 \alpha)$$

$$\text{Suy ra } SM = \frac{2a}{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha}} \Rightarrow OM = \frac{2a \cdot \sin \alpha}{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha}}; SO = SM \cdot \cos \alpha = \frac{2a \cdot \cos \alpha}{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha}}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{32a^3}{3} \cdot \frac{\cot \alpha}{\sqrt{(2 + \cot^2 \alpha)^3}}.$$

$$V_{S.ABCD} \text{ lớn nhất khi } \frac{\cot \alpha}{\sqrt{(2 + \cot^2 \alpha)^3}} \max \Leftrightarrow \frac{\cot^2 \alpha}{(2 + \cot^2 \alpha)^3} \max \text{ (với } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{)}.$$

Ta có:

$$\frac{\cot^2 \alpha}{(2 + \cot^2 \alpha)^3} = \frac{\cot^2 \alpha}{2 + \cot^2 \alpha} \cdot \frac{1}{2 + \cot^2 \alpha} \cdot \frac{1}{2 + \cot^2 \alpha} \leq \frac{1}{27} \left(\frac{\cot^2 \alpha}{2 + \cot^2 \alpha} + \frac{1}{2 + \cot^2 \alpha} + \frac{1}{2 + \cot^2 \alpha} \right)^3 = \frac{1}{27}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{\cot^2 \alpha}{2 + \cot^2 \alpha} = \frac{1}{2 + \cot^2 \alpha} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó, $\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{32a^3}{9\sqrt{3}} = \frac{32\sqrt{3}a^3}{27}$ Khẳng định đúng

Câu 6: Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Gọi X là tập các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được lập từ A . Chọn một số từ X .

- Số phần tử của tập X là 2106.
- Xác suất để chọn được một số thuộc tập X chia hết cho 3 là $\frac{13}{45}$.
- Xác suất để chọn được một số thuộc tập X sao cho số đó lớn hơn 65412 là $\frac{7}{2160}$.
- Xác suất sao cho số được chọn có đúng 3 chữ số chẵn là $\frac{17}{30}$.

Lời giải

a) Có $6 \cdot A_6^4 = 2160$ số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau lập từ A , $\Rightarrow n(X) = 2160$. Vậy a) sai

b) Chọn một số từ X , số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 2160$

M là biến cố chọn được số chia hết cho 3.

Bộ 5 chữ số lấy từ A có tổng chia hết cho 3 là:
 $\{0; 1; 2; 3; 6\}, \{0; 3; 4; 5; 6\}, \{0; 2; 3; 4; 6\}, \{0; 1; 2; 4; 5\}, \{1; 2; 3; 4; 5\}, \{1; 2; 4; 5; 6\}$

Suy ra: $n(M) = 4 \cdot 4 \cdot 4! + 2 \cdot 5! = 624 \Rightarrow P(M) = \frac{624}{2160} = \frac{13}{45}$. Vậy b) đúng

c) N là biến cố chọn được một số thuộc tập X sao cho số đó lớn hơn 65412

Số thuộc N có dạng $\overline{654cd}$.

Nếu chọn $c=1$ thì $d=3$

Nếu chọn $c \in \{2, 3\}$: có 2 cách chọn, Chọn d có 3 cách

Suy ra $n(N) = 1 + 2 \cdot 3 = 7 \Rightarrow P(N) = \frac{7}{2160}$. Vậy c) đúng

d) Gọi B là biến cố “chọn được số có đúng 3 chữ số chẵn”

Xét: $\overline{abcde}$ là số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau trong đó có đúng 3 chữ số chẵn

TH1: Xét bộ có 5 số trong đó có 3 chữ số chẵn có mặt số 0 và 2 số lẻ. Có tất cả $C_3^2 \cdot C_3^2$ bộ.

Ứng với mỗi bộ có $4 \cdot 4!$ số

Suy ra có: $C_3^2 \cdot C_3^2 \cdot 4 \cdot 4! = 864$ số

TH2: Xét bộ có 5 số trong đó có 3 chữ số chẵn không có số 0 và 2 chữ số lẻ. Có tất cả C_3^2 bộ.

Ứng với mỗi bộ trên có $5!$ số

Suy ra có: $C_3^2 \cdot 5! = 360$ số

- Vậy số phần tử của biến cố B là $n(B) = 1224$

Xác suất $P(A) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{17}{30}$. Vậy d) đúng

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 32 đến câu 37, đáp số là số nguyên hoặc số thập phân có không quá 4 kí tự kể cả dấu “-” và dấu “,”.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $c < 0$) có đồ thị là (C) . Gọi A là giao điểm của (C) với trục tung, biết (C) có đúng hai điểm chung với trục hoành là M và N . Đồng thời tiếp tuyến của (C) tại M đi qua A và tam giác AMN có diện tích bằng 16. Tính $f(1)$.

Lời giải

Đáp số: -3

Vì (C) có hai giao điểm với trục hoành nên $f(x) = (x-m)(x-n)^2$. Trong đó $M(m;0)$ và $N(n;0)$. Ta có thể viết lại $f(x) = x^3 + (-m-2n)x^2 + (n^2 + 2mn)x - mn^2$

$$f'(x) = 3x^2 + 2(-m-2n)x + n^2 + 2mn. \quad f'(m) = (m-n)^2$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M là $y = (m-n)^2(x-m)$

Giao điểm của (C) với trục tung là $A(0; -mn^2)$.

$$\text{Vi tiếp tuyến tại } M \text{ đi qua } A \text{ nên ta có } -mn^2 = (m-n)^2(0-m) \Leftrightarrow m^2 - 2mn = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2n \end{cases}$$

Vì $c = -mn^2 < 0$ nên ta loại trường hợp $m = 0$. Từ đó ta có $m = 2n$.

Diện tích tam giác AMN bằng 16 nên

$$\frac{1}{2}MN \cdot AO = 16 \Leftrightarrow \frac{1}{2}|m-n| \cdot |-mn^2| = 16 \Leftrightarrow |2n-n| \cdot |-2n^3| = 32 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2 \\ n = -2 \end{cases}$$

Vì $c = -mn^2 < 0$ nên ta loại trường hợp $n = -2$.

Với $n = 2$ ta có $m = 4$ và $f(x) = (x-4)(x-2)^2 \Rightarrow f(1) = -3$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(1;3;2)$, $C(3;1;2)$. Gọi điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn OM^2 .

Lời giải

Đáp án: 5,71

Ta có

$$\begin{aligned} 16 &= AB^2 + BC^2 + CA^2 = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})^2 + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})^2 + (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA})^2 \\ &= 2(MA^2 + MB^2 + MC^2) - 2(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}) = 2(MA^2 + MB^2 + MC^2) - 2 \\ &\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = 9 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } MA^2 + MB^2 + MC^2 = 9 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 = 9$$

(với $G(\frac{5}{3}; 2; \frac{7}{3})$ là trọng tâm tam giác ABC)

$$\Leftrightarrow 3MG^2 + (GA^2 + GB^2 + GC^2) + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 9$$

$$\text{Ta có } OG = \frac{\sqrt{110}}{3}, \quad OM \geq OG - GM = \frac{\sqrt{110} - \sqrt{11}}{3},$$

dấu “=” có khi M thuộc đoạn OG và $MG = \frac{\sqrt{11}}{3}$. Vậy $OM_{\min}^2 = \left(\frac{\sqrt{110} - \sqrt{11}}{3} \right)^2 \approx 5,71$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = 2024(e^{2x} - e^{-2x}) + 2025 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + 2026x^3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|3x^2 + m|) + f(x^3 - 12) = 0$ có đúng một nghiệm thuộc đoạn $[-2; 1]$

Lời giải

Đáp số: 20

Ta có $f(-x) = 2024(e^{-2x} - e^{2x}) + 2025 \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) + 2026(-x)^3$

$$= -2024(e^{2x} - e^{-2x}) - 2025 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - 2026x^3 = -f(x)$$

Suy ra $f(x)$ là hàm lẻ, lúc đó $f(x^3 - 12) = -f(12 - x^3)$

$$f'(x) = 2024(2e^{2x} + 2e^{-2x}) + 2025 \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} + 6078x^2$$

$$= 2024(2e^{2x} + 2e^{-2x}) + \frac{2025}{\sqrt{x^2 + 1}} + 6078x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Suy ra $f(x)$ hàm đồng biến và liên tục trên $[-2; 1]$. Khi đó:

$$f(|3x^2 + m|) + f(x^3 - 12) = 0 \Leftrightarrow f(|3x^2 + m|) = f(12 - x^3) \Leftrightarrow |3x^2 + m| = 12 - x^3 \Leftrightarrow |3x^2 + m| = |12 - x^3|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + m = 12 - x^3 \\ 3x^2 + m = x^3 - 12 \end{cases} \left(\text{do } 12 - x^3 > 0, \forall x \in [-2; 1] \right) \Leftrightarrow \begin{cases} m = -x^3 - 3x^2 + 12 & (1) \\ m = x^3 - 3x^2 - 12 & (2) \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 12, g(x) = x^3 - 3x^2 - 12$ với $\forall x \in [-2; 1]$

$$\text{Ta có } f'(x) = -3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}; g'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

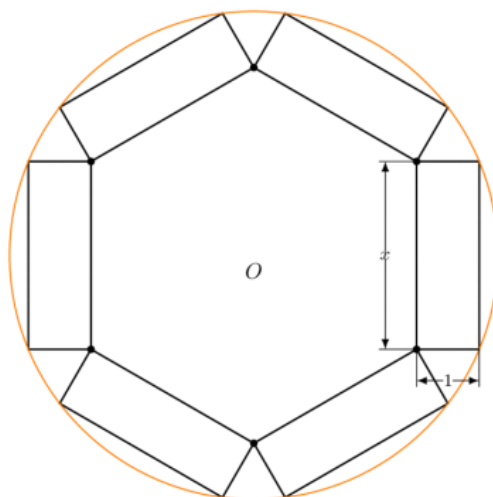
x	-2	0	1	
$f'(x)$	0	+	0	-
$f(x)$	8	12	8	

x	-2	0	1	
$g'(x)$	0	+	0	-
$g(x)$	-32	-12	-14	

Từ BBT suy ra pt đã cho có đúng một nghiệm thuộc đoạn $[-2; 1] \Leftrightarrow m \in [-32; -14] \cup \{12\}$

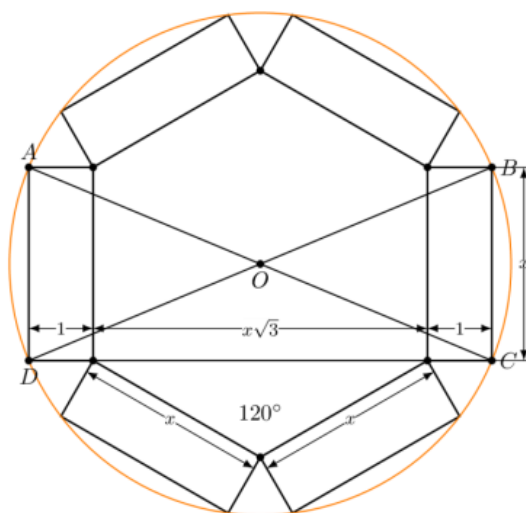
Mà m nguyên nên có 20 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4: Ông An định làm một cái hộp quà lưu niệm (không nắp) bằng cách cắt từ một tấm bìa hình tròn bán kính $4dm$ để tạo thành một khối lăng trụ lục giác đều, biết 6 hình chữ nhật có các kích thước là $1dm$ và $x dm$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó thể tích của hộp quà lưu niệm bằng bao nhiêu dm^3 (làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Đáp án: 25



Xét hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp (O) , do đó, AC là đường kính của (O) . Ta có $AC = 8 \text{ dm}$.

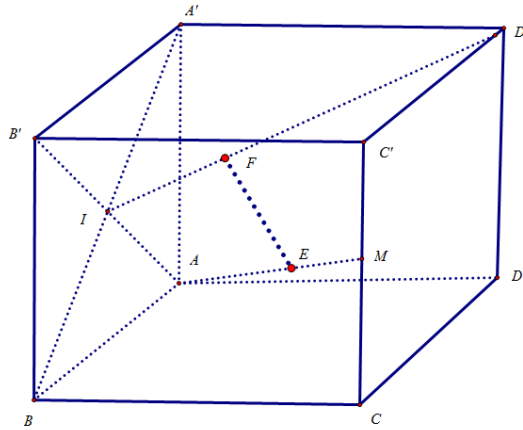
Tính được $DC = 1 + x\sqrt{3} + 1 = x\sqrt{3} + 2$

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác ADC ta có

$$x^2 + (2 + x\sqrt{3})^2 = 8^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x\sqrt{3} - 60 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}$$

$$V = h \cdot S_d = 1.6 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}x^2\sqrt{3} = \frac{-27\sqrt{7} + 99\sqrt{3}}{4} \approx 25,0094 \text{ dm}^3$$

Câu 5: Trong phòng hình hộp chữ nhật, sàn nhà là hình vuông chiều cao của phòng là $3,2 \text{ m}$ có hai con nhện đang chằng tơ trong căn phòng, hai con nhện luôn di chuyển trên hai đường thẳng khác nhau. Giả sử căn phòng được mô hình hóa là hình hộp chữ nhật $ABCD A' B' C' D'$ với $ABCD$ là nền phòng. Con nhện thứ nhất được coi như là điểm E di chuyển trên đường dây tơ nối từ đỉnh A đến trung điểm M của CC' . Con nhện thứ hai được coi như là điểm F di chuyển trên đường dây tơ nối từ đỉnh D' đến tâm I của mặt $ABB' A'$ (tham khảo hình vẽ).



Khoảng cách giữa hai con nhện khi đường thẳng đi qua hai con nhện vuông góc với trần nhà bằng bao nhiêu mét ?

Lời giải

Đáp án: 1,6

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AM} = x(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}) = x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{2}x\overrightarrow{CC'} = x\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}x\overrightarrow{AA'}$$

$$\text{Do } \overrightarrow{D'F} = y\overrightarrow{D'I} \Rightarrow \overrightarrow{IF} = \frac{y-1}{y}\overrightarrow{D'F} = \frac{y-1}{y}(\overrightarrow{D'B'} + \overrightarrow{B'I}) = (y-1)(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) + \frac{y-1}{2}\overrightarrow{B'E}$$

$$\overrightarrow{D'F} = \overrightarrow{D'B'} + \overrightarrow{B'I} + \overrightarrow{IF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{IF} \Rightarrow \overrightarrow{IF} = \frac{y-1}{2}\overrightarrow{AB} + (1-y)\overrightarrow{AD} + \frac{1-y}{2}\overrightarrow{AA'}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IF} = -\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IF} = \left(\frac{y}{2} - x\right)\overrightarrow{AB} + (1-y-x)\overrightarrow{AD} + \left(1 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x\right)\overrightarrow{AA'}$$

Ta có $EF \perp (ABCD) \Rightarrow EF \perp AB, EF \perp AD$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + \frac{y}{2} = 0 \\ 1 - x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} \Rightarrow EF = \frac{1}{2}AA' = 1,6m$$

Câu 6: Chọn ngẫu nhiên 3 số $a; b; c$ trong tập hợp $S = \{1; 2; 3; \dots; 26\}$. Biết xác suất để 3 số chọn ra thỏa

mãn $a^2 + b^2 + c^2$ chia hết cho 5 bằng $\frac{m}{n}$ với $m; n \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị

biểu thức: $T = mn + m + n$.

Lời giải

Đáp án: 989

Số cách chọn ngẫu nhiên 3 số $a; b; c$ trong tập hợp $S = \{1; 2; 3; \dots; 25; 26\}$ là: $C_{26}^3 = 2600$ cách.

Đặt: $S_1 = \{5; 10; 15; 20; 25\}$;

$S_2 = \{1; 4; 6; 9; 11; 14; 16; 19; 21; 24; 26\}$;

$S_3 = \{2; 3; 7; 8; 12; 13; 17; 18; 22; 23\}$.

Nhận xét:

- Nếu $x \in S_1$ thì x^2 chia hết cho 5.
- Nếu $x \in S_2$ thì x^2 chia 5 dư 1.
- Nếu $x \in S_3$ thì x^2 chia 5 dư 4.

Để $a, b, c \in S$ và $a^2 + b^2 + c^2$ chia hết cho 5 ta có hai trường hợp sau:

TH1: Cả ba số $a; b; c$ đều thuộc S_1 .

Khi đó số cách chọn $a; b; c$ là: $C_5^3 = 10$ cách.

TH2: Trong 3 số $a; b; c$ có một số thuộc S_1 , một số thuộc S_2 , một số thuộc S_3 .

Khi đó số cách chọn $a; b; c$ là: $5 \cdot 11 \cdot 10 = 550$ cách.

Tổng số cách chọn $a, b, c \in S$ và $a^2 + b^2 + c^2$ chia hết cho 5 là: $10 + 550 = 560$ cách.

Xác suất để chọn được 3 số $a, b, c \in S$ và $a^2 + b^2 + c^2$ chia hết cho 5 là: $\frac{560}{2600} = \frac{14}{65}$.

Vậy $m = 14; n = 65$ và ta có $T = mn + m + n = 14 \cdot 65 + 14 + 65 = 989$.

.....**HẾT**.....

Xem thêm: ĐỀ THI HSG TOÁN 12
<https://toanmath.com/de-thi-hsg-toan-12>