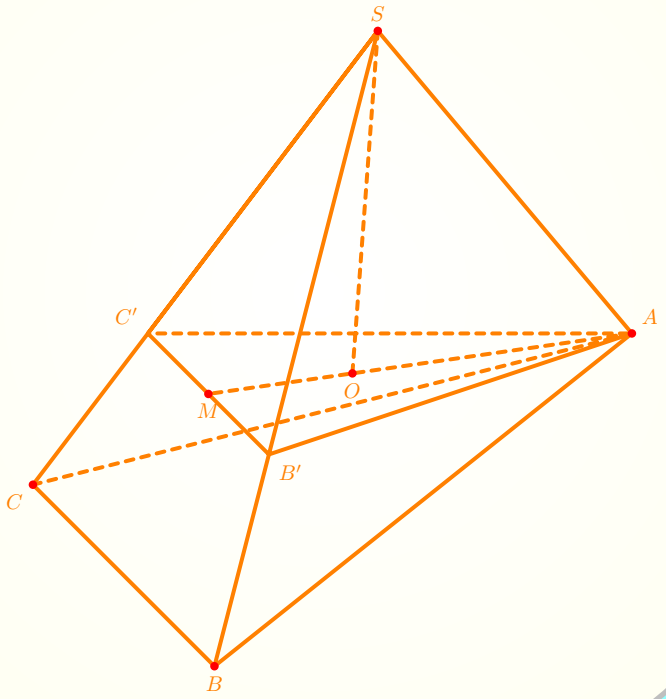
TRƯỜNG THPT NGUYỄN TẤT THÀNH – GV: LÊ QUANG XE – ĐT: 0967.003.131

TOÁN 12

Chuyên đề

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN



TL

LƯU HÀNH NỘI BỘ

CHƯƠNG 0
MỤC LỤC

CHƯƠNG 1. ĐA DIỆN 1

§1 – THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN 1

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết 1

Ⓑ Ví dụ minh họa 4

Ⓒ Bài tập rèn luyện 12

Dạng 1.Mở đầu khối đa diện 12

Dạng 2.Thể tích khối lăng trụ đứng 22

Dạng 3.Thể tích khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy 55

Dạng 4.Thể tích khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy 89

Dạng 5.Thể tích khối chóp đều 121

Dạng 6.Thể tích khối tứ diện đặc biệt 151

Dạng 7.Tỉ số thể tích 197

Dạng 8.Các bài toán thể tích chọn lọc 244

Dạng 9.Bài toán góc - khoảng cách 284

Dạng 10.Cực trị khối đa diện 325

CHƯƠNG 2. KHỐI TRÒN XOAY 344

§1 – MẶT NÓN, MẶT TRỤ & MẶT CẦU 344

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết 344

Ⓑ Ví dụ 346

Ⓒ Bài tập rèn luyện 348

Dạng 1.Các yếu tố liên quan đến khối nón, Khối trụ 348

Dạng 2.Khối tròn xoay nội, ngoại tiếp đa diện 370

Dạng 3.Cực trị và toán thực tế về khối tròn xoay 381

CHƯƠNG 1
ĐA DIỆN

§ 1. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Một số định nghĩa cần nhớ

Định nghĩa 1.1.

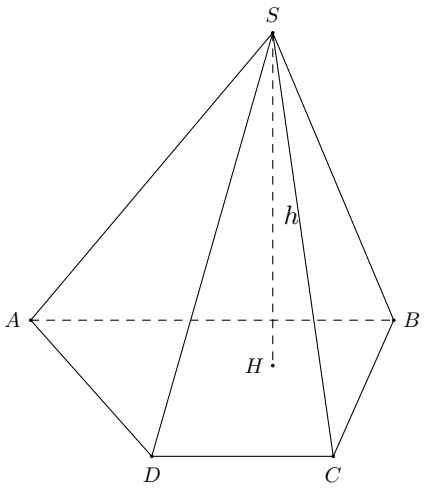
- Hình lăng trụ là hình có hai đáy là hai đa giác bằng nhau nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau và các mặt bên đều là các hình bình hành.
- Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
  Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là các hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.
- Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.
  Các mặt bên của hình lăng trụ đều là các hình chữ nhật bằng nhau và vuông góc với mặt đáy.
- Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.
- Hình hộp đứng là hình hộp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
  Hình hộp đứng có 2 đáy là hình bình hành, 4 mặt xung quanh là 4 hình chữ nhật.
- Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.
  Hình hộp chữ nhật có 6 mặt là 6 hình chữ nhật.
- Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có 2 đáy và 4 mặt bên đều là hình vuông.
  Hình lập phương có 6 mặt đều là hình vuông.
- Hình chóp là hình có đáy là một đa giác và các mặt bên là các tam giác có chung một đỉnh.

2. Thể tích khối đa diện

a) Công thức thể tích khối chóp

$$\boxed{V = \frac{1}{3}Sh}$$

Trong đó: S là diện tích đáy, h là chiều cao khối chóp.



Nếu khối chóp cần tính thể tích chưa biết chiều cao thì ta phải xác định được vị trí chân đường cao trên đáy.

- *Chóp có cạnh bên vuông góc với đáy, chiều cao chính là cạnh bên.*
- *Chóp có hai mặt bên vuông góc đáy, đường cao là giao tuyến của hai mặt bên vuông góc đáy.*
- *Chóp có mặt bên vuông góc đáy thì chiều cao của mặt bên vuông góc với đáy.*
- *Chóp đều có chiều cao hạ từ đỉnh đến tâm đa giác đáy.*
- *Chóp có hình chiếu vuông góc của một đỉnh xuống mặt đáy thuộc cạnh của mặt đáy, đường cao là từ đỉnh tới hình chiếu.*

b) Công thức tính thể tích khối lăng trụ

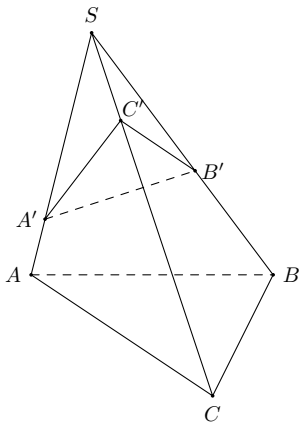
$$\boxed{V = Bh}$$

Trong đó: B là diện tích đáy, h là chiều cao khối lăng trụ.

- **Thể tích khối hình chữ nhật:** $V = a.b.c$
  Trong đó a, b, c là ba kích thước của khối hộp chữ nhật.
- **Thể tích khối lập phương:** $V = a^3$
  Trong đó a là độ dài cạnh của hình lập phương.

3. Tỉ số thể tích

Cho khối chóp $S.ABC$ và A', B', C' là các điểm tùy ý lần lượt thuộc SA, SB, SC, ta có:



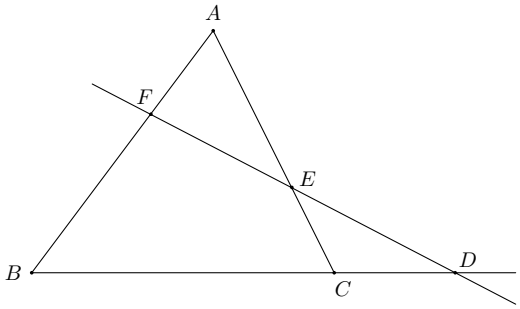
Công thức tỉ số thể tích: $\boxed{\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA'}{SA} \cdot \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SC'}{SC}}$ *(hay gọi là công thức Simson)*

Phương pháp này được áp dụng khi khối chóp không xác định được chiều cao một cách dễ dàng hoặc khối chóp cần tính là một phần nhỏ của khối chóp lớn và cần chú ý đến một số điều kiện sau:

- Hai khối chóp phải cùng chung đỉnh.
- Đáy hai khối chóp phải là tam giác.
- Các điểm tương ứng nằm trên các cạnh tương ứng.

Định lý Menelaus: Cho tam giác ABC, các điểm D, E, F lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó D, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\boxed{\frac{FA}{FB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1}$$



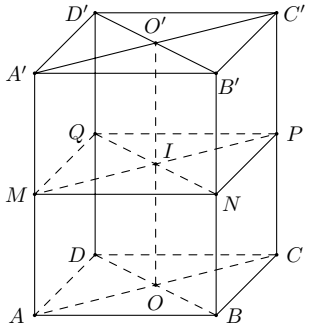
4. Một số công thức tính nhanh thể tích và tỷ số thể tích khối chóp và khối lăng trụ

- **Công thức 1:** Thể tích tứ diện đều cạnh a là $V_{S.ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.
- **Công thức 2:** Với tứ diện $ABCD$ có $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$ đôi một vuông góc thì thể tích của nó là $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}abc$.
- **Công thức 3:** Với tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $AC = BD = c$ thì thể tích của nó là $V_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}$.

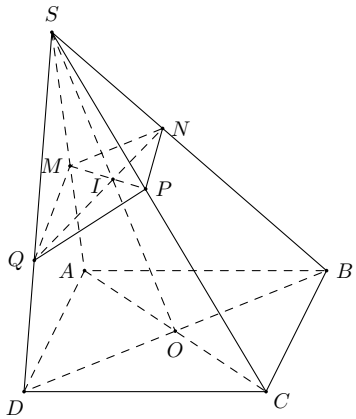
Công thức 4: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$, $\widehat{BSC} = \alpha$, $\widehat{CSA} = \beta$, $\widehat{ASB} = \gamma$ thì thể tích của nó là $V_{S.ABC} = \dfrac{abc}{6}\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma}$.

Công thức 5: Mặt phẳng cắt các cạnh của khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ lần lượt tại M, N, P sao cho $\dfrac{AM}{AA'} = x$, $\dfrac{BN}{BB'} = y$, $\dfrac{CP}{CC'} = z$ thì ta có $V_{ABC.MNP} = \dfrac{x+y+z}{3}V_{ABC.A'B'C'}$.

Công thức 6: Mặt phẳng cắt các cạnh của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ lần lượt tại M, N, P, Q sao cho $\dfrac{AM}{AA'} = x$, $\dfrac{BN}{BB'} = y$, $\dfrac{CP}{CC'} = z$, $\dfrac{DQ}{DD'} = t$ thì ta có $V_{ABCD.MNPQ} = \dfrac{x+y+z+t}{4}V_{ABCD.A'B'C'D'}$ và $x + z = y + t$.



Công thức 7: Mặt phẳng cắt các cạnh của khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành lần lượt tại M, N, P, Q sao cho $\dfrac{SM}{SA} = x$, $\dfrac{SN}{SB} = y$, $\dfrac{SP}{SC} = z$, $\dfrac{SQ}{SD} = t$ thì ta có công thức sau đây $V_{S.MNPQ} = \dfrac{xyzt}{4}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{t}\right)V_{S.ABCD}$ và $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{t}$.

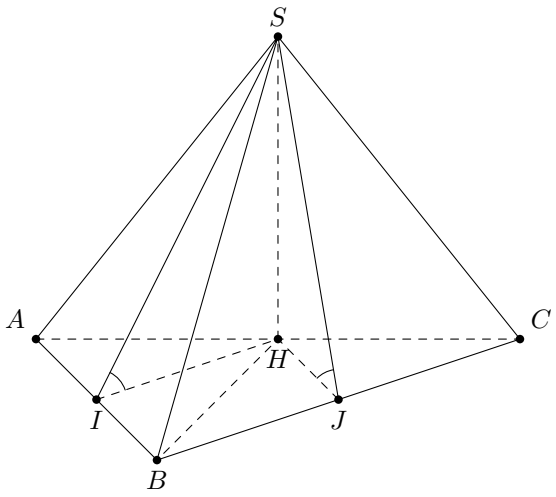


B VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, có $BC = a$. Mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt đáy, các mặt bên còn lại đều tạo với mặt đáy một góc $45°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

(A) $\dfrac{a^3}{12}$. (B) $\dfrac{a^3}{4}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Kẻ $SH \perp BC$ vì $(SAC) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$.

Gọi I, J là hình chiếu của H trên AB và BC. Suy ra $SJ \perp AB$, $SJ \perp BC$.

Theo giả thiết $\widehat{SIH} = \widehat{SJH} = 45^\circ$.

Ta có $\Delta SHI = \Delta SHJ \Rightarrow HI = HJ$ nên BH là đường phân giác của ΔABC từ đó suy ra H là trung điểm của AC.

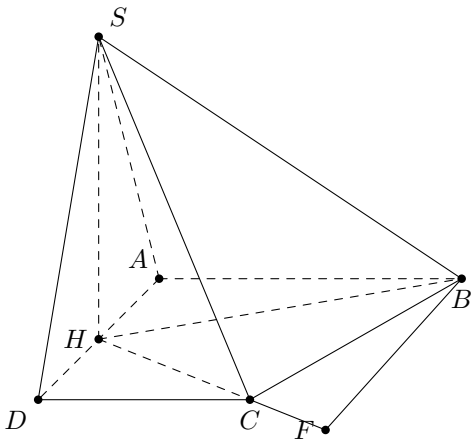
$HI = HJ = SH = \dfrac{a}{2} \Rightarrow V_{SABC} = \dfrac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = \dfrac{a^3}{12}$.

Chọn đáp án (A) □

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, đáy nhỏ của hình thang là CD, cạnh bên $SC = a\sqrt{15}$. Tam giác SAD là tam giác đều cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy hình chóp. Gọi H là trung điểm cạnh AD, khoảng cách từ B tới mặt phẳng (SHC) bằng $2\sqrt{6}a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$?

(A) $V = 24\sqrt{6}a^3$. (B) $V = 8\sqrt{6}a^3$. (C) $V = 12\sqrt{6}a^3$. (D) $V = 4\sqrt{6}a^3$.

Lời giải.



$$\begin{cases} (SAD) \cap (ABCD) = AD \\ SH \perp AD, SH \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

Ta có

$$SH = \sqrt{SD^2 - DH^2} = a\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} HC &= \sqrt{SC^2 - SH^2} = 2\sqrt{3}a \\ CD &= \sqrt{HC^2 - HD^2} = a\sqrt{11}. \end{aligned}$$

Ta có $\begin{cases} BF \perp BC \\ BF \perp SH \end{cases} \Rightarrow BF \perp (SHC)$ nên $\mathrm{d}\,(B,(SHC)) = BF = 2\sqrt{6}a$.

$S_{HBC} = \dfrac{1}{2}BF \cdot HC = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}a \cdot 2\sqrt{6}a = 6\sqrt{2}a^2$.

Đặt $AB = x$ nên

$$\begin{aligned} S_{AHB} &= \frac{1}{2}AH \cdot AB = \frac{a}{2} \cdot x \\ S_{CDH} &= \frac{1}{2}DH \cdot DC = \frac{a^2\sqrt{11}}{2} \\ S_{ABCD} &= \frac{1}{2}(CD + AB)\,AD = \left(a\sqrt{11} + x\right)a. \end{aligned}$$

$$S_{AHB} = S_{ABCD} - S_{CDH} - S_{BHC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}DH \cdot DC = \frac{a^2\sqrt{11}}{2} \Leftrightarrow x = \left(12\sqrt{2} - \sqrt{11}\right)a.$$

$S_{ABCD} = \left(a\sqrt{11} + \left(12\sqrt{2} - \sqrt{11}\right)a\right)a = 12\sqrt{2}a^2$.

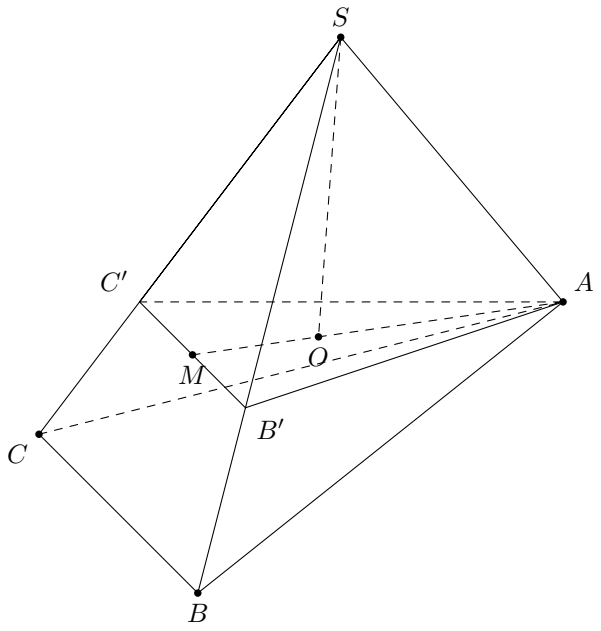
Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot 12\sqrt{2}a^2 = 4\sqrt{6}a^3$.

Chọn đáp án (D) □

Ví dụ 3. Cho khối chóp $S.ABC$ có góc $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60^\circ$ và $SA = 2$, $SB = 3$, $SC = 4$. Thể tích khối chóp $S.ABC$.

(A) $4\sqrt{3}$. (B) $3\sqrt{2}$. (C) $2\sqrt{2}$. (D) $2\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi B' trên SB sao cho $SB' = \dfrac{2}{3}SB$ và C' trên SC sao cho $SC' = \dfrac{1}{2}SC$.

Khi đó $SA = SB' = SC' = 2 \Rightarrow S.AB'C'$ là khối tứ diện đều.

Ta có: $AM = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow AO = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Nên $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ và $S_{AB'C'} = \sqrt{3}$.

Khi đó $V_{S.AB'C'} = \dfrac{1}{3}S_{AB'C'} \cdot SO = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ mà $\dfrac{V_{S.ABC}}{V_{S.AB'C'}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SB}{SB'} \cdot \dfrac{SC}{SC'} = 3 \Rightarrow V_{S.ABC} = 3V_{S.AB'C'} = 2\sqrt{2}$.

Cách khác: Áp dụng công thức 4.

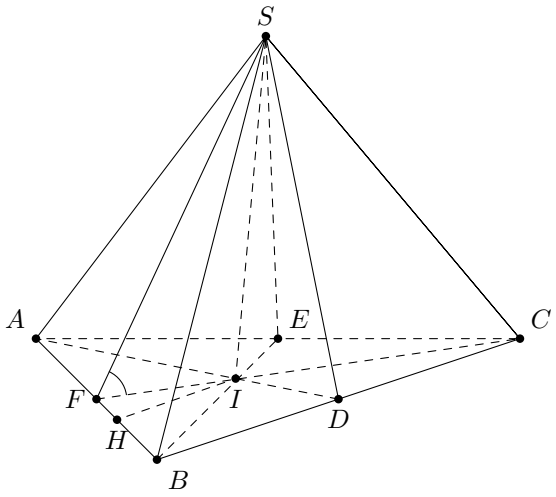
$V_{S.ABC} = \dfrac{SA \cdot SB \cdot SC}{6} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{ASB} - \cos^2 \widehat{BSC} - \cos^2 \widehat{CSB} + 2\cos \widehat{ASB} \cos \widehat{BSC} \cos \widehat{CSB}} = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = 5cm$, $BC = 6cm$, $CA = 7cm$. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABC) nằm bên trong tam giác ABC. Các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCA) đều tạo với đáy một góc $60°$. Gọi AD, BE, CF là các đường phân giác của tam giác ABC với $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$. Thể tích $S.DEF$ gần với số nào sau đây?

(A) $3,7cm^3$. (B) $3,4cm^3$. (C) $2,9cm^3$. (D) $4,1cm^3$.

Lời giải.



Vì các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCA) đều tạo với đáy một góc $60°$ và hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABC) nằm bên trong tam giác ABC nên ta có hình chiếu của S chính là tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC thì $p = \dfrac{AB + BC + CA}{2} = 9$.

Ta có $S_{ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - AC)} = 6\sqrt{6}$ và $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Suy ra chiều cao của hình chóp là $h = r \cdot \tan 60° = 2\sqrt{2}$.

Vì BE là phân giác của góc B nên ta có $\dfrac{EA}{EC} = \dfrac{BA}{BC}$.

Tương tự $\dfrac{FA}{FB} = \dfrac{CA}{CB}$, $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$.

Khi đó $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \dfrac{AE}{AC} \cdot \dfrac{AF}{AB} = \dfrac{AB}{AB + BC} \cdot \dfrac{AC}{AC + BC}$.

Tương tự: $\dfrac{S_{CED}}{S_{ABC}}=\dfrac{CA}{CA+AB}\cdot\dfrac{CB}{CB+AB}$, $\dfrac{S_{BFD}}{S_{ABC}}=\dfrac{BC}{BC+CA}\cdot\dfrac{BA}{BA+CA}$.
Với $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$,

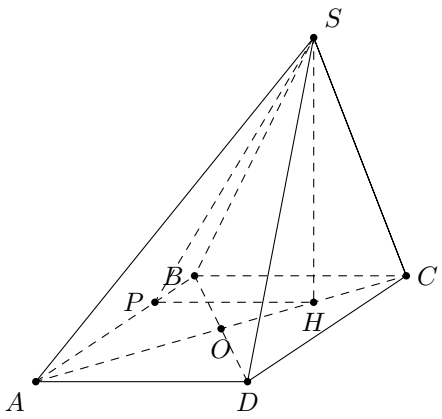
$$\begin{aligned}S_{DEF} &= S_{ABC}\cdot\left[1-\frac{ab}{(a+c)(b+c)}-\frac{bc}{(b+a)(c+a)}-\frac{ac}{(a+b)(c+b)}\right]\\ &= \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\cdot S_{ABC}=\frac{210\sqrt{6}}{143}.\end{aligned}$$

Vậy $V_{S.DEF}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{210\sqrt{6}}{143}\cdot 2\sqrt{2}=\dfrac{280\sqrt{3}}{143}\,(cm^3)\approx 3,4\,(cm^3)$.
Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh bằng a. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của cạnh OC. Góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°. Tính theo a thể tích V của hình chóp $S.ABCD$.

(A) $V=\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. (B) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. (C) $V=\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. (D) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của cạnh $OC\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.
Kẻ $HP\perp AB\,(P\in AB)$.
Ta có $\begin{cases}AB\perp HP\\ AB\perp SH\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SHP)\Rightarrow AB\perp SP$.
Do đó $((\widehat{SAB});(\widehat{ABCD}))=\widehat{SPH}=60^\circ$. Suy ra

$$\tan 60^\circ=\frac{SH}{HP}=\sqrt{3}\Rightarrow SH=HP\sqrt{3}.$$

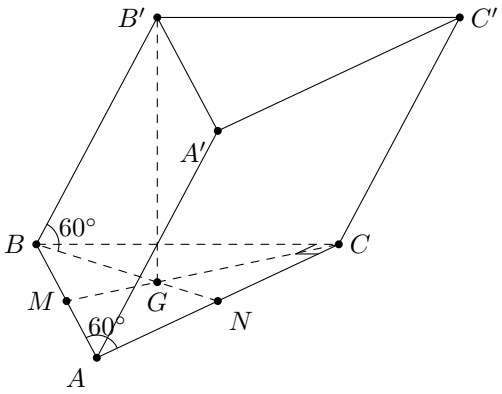
Trên $(ABCD)$, $\begin{cases}HP\perp AB\\ BC\perp AB\end{cases}\Rightarrow HP\parallel BC\Rightarrow\dfrac{HP}{BC}=\dfrac{AH}{AC}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow HP=\dfrac{3}{4}BC=\dfrac{3a}{4}\Rightarrow SH=\dfrac{3a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V=\dfrac{1}{3}SH\cdot S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3a\sqrt{3}}{4}\cdot a^2=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.
Chọn đáp án (D) □

Ví dụ 6. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, góc giữa đường thẳng BB' và (ABC) bằng $60°$, tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60°$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của $\triangle ABC$. Thể tích khối tứ diện $A'.ABC$ theo a bằng

(A) $\dfrac{7a^3}{106}$. (B) $\dfrac{15a^3}{108}$. (C) $\dfrac{9a^3}{208}$. (D) $\dfrac{13a^3}{108}$.

Lời giải.



Gọi M, N là trung điểm của AB, AC và G là trọng tâm của $\triangle ABC$.

$B'G \perp (ABC) \Rightarrow \left(\widehat{BB', (ABC)}\right) = \widehat{B'BG} = 60°$.

$V_{A'.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot B'G = \dfrac{1}{6} \cdot AC \cdot BC \cdot B'G$.

Xét $\triangle B'BG$ vuông tại G, có $\widehat{B'BG} = 60°$ suy ra $B'G = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Đặt $AB = 2x$. Trong $\triangle ABC$ vuông tại C có $\widehat{BAC} = 60°$ suy ra $AC = \dfrac{AB}{2} = x$, $BC = x\sqrt{3}$.

Do G là trọng tâm $\triangle ABC$ suy ra $BN = \dfrac{3}{2}BG = \dfrac{3a}{4}$.

Trong $\triangle BNC$ vuông tại C ta có $BN^2 = NC^2 + BC^2$

$$\Leftrightarrow \frac{9a^2}{16} = \frac{x^2}{4} + 3x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9a^2}{52} \Rightarrow x = \frac{3a}{2\sqrt{13}} \Rightarrow \begin{cases} AC = \dfrac{3a}{2\sqrt{13}} \\ BC = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}. \end{cases}$$

Vậy $V_{A'ABC} = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{3a}{2\sqrt{13}} \cdot \dfrac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{9a^3}{208}$.

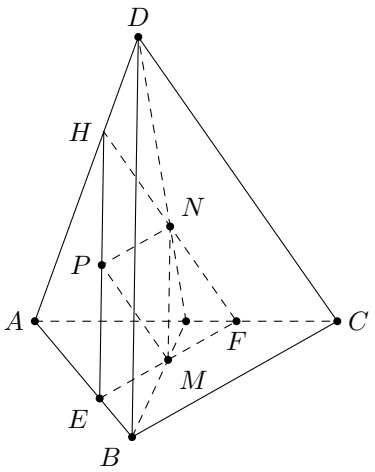
Chọn đáp án (C) □

Ví dụ 7. Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có thể tích V. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACD, ADB và V' là thể tích khối tứ diện $AMNP$. Tỉ số $\dfrac{V'}{V}$ bằng

(A) $\dfrac{8}{81}$. (B) $\dfrac{6}{81}$. (C) $\dfrac{4}{27}$. (D) $\dfrac{4}{9}$.

Lời giải.

Hai khối đa diện đồng dạng với tỷ số k thì ta có $\dfrac{V_1}{V_2}=k^3$.



Áp dụng vào bài toán

Ta có mặt phẳng (MNP) cắt các mặt của tứ diện theo các đoạn giao tuyến EF, FH và HE do vậy thiết diện là tam giác EFH.

Ta có $(MNP)\ /\!/\ (BCD)$ và $\mathrm{d}\,(A,(MNP))=\dfrac{2}{3}\mathrm{d}\,(A,(BCD))$.

$S_{MNP}=\dfrac{1}{4}S_{EFH}=\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\cdot S_{BCD}=\dfrac{1}{9}S_{BCD}$.

Do đó $V_{AMNP}=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}\,(A,(MNP))\cdot S_{MNP}=\dfrac{2}{81}\mathrm{d}\,(A,(BCD))\cdot S_{BCD}$

$=\dfrac{6}{81}\cdot V_{ABCD}$.

Vậy $\dfrac{V'}{V}=\dfrac{6}{81}$.

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 8. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 2020. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA'; BB' và điểm P nằm trên cạnh CC' sao cho $PC=3PC'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B, C, M, N, P bằng

(A) $\dfrac{2020}{3}$. (B) $\dfrac{5353}{3}$. (C) $\dfrac{2525}{3}$. (D) $\dfrac{3535}{3}$.

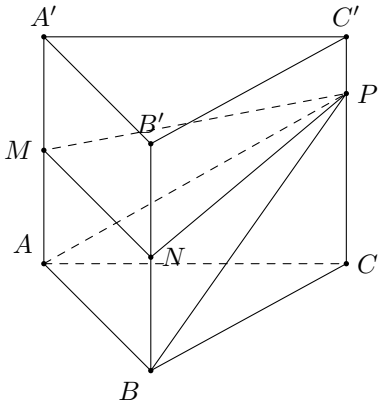
Lời giải.

Giả sử $V=V_{ABC.A'B'C'}=2020$.

Ta có $V_{C'ABC}=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}\,(C',(ABC))\cdot S_{ABC}=\dfrac{V}{3}\Rightarrow V_{C'ABB'A'}=\dfrac{2}{3}V$.

Ta lại có

$$\begin{aligned}\frac{V_{P.ABC}}{V_{C'.ABC}}&=\frac{\frac{1}{3}\cdot\mathrm{d}\,(P,(ABC))\cdot S_{ABC}}{\frac{1}{3}\cdot\mathrm{d}\,(C',(ABC))\cdot S_{ABC}}=\frac{\mathrm{d}(P,(ABC))}{\mathrm{d}\,(C',(ABC))}\\&=\frac{PC}{CC'}=\frac{3}{4}\Rightarrow V_{P.ABC}=\frac{1}{4}V.\end{aligned}$$



Mặt khác $\dfrac{V_{P.ABNM}}{V_{C'.ABB'A'}}=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\mathrm{d}\,(P;(ABB'A'))\cdot S_{ABNM}}{\frac{1}{3}\cdot\mathrm{d}\,(C;(ABB'A'))\cdot S_{ABB'A'}}$.

Mà $\mathrm{d}\,(P,(ABB'A'))=\mathrm{d}\,(C,(ABB'A'))$ và $S_{ABNM}=\dfrac{1}{2}S_{ABB'A'}$.

Suy ra $\dfrac{V_{P.ABNM}}{V_{C'ABB'A'}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow V_{P.ABNM}=\dfrac{1}{3}V$.

Vậy $V_{ABC.MNP}=V_{P.ABNM}+V_{P.ABC}=\dfrac{7}{12}V=\dfrac{3535}{3}$.

Dùng công thức giải nhanh

Ta có $\dfrac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'BC'}}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{AM}{AA'}+\dfrac{BN}{BB'}+\dfrac{CP}{CC'}\right)\Rightarrow V_{ABC.MNP}=\dfrac{2020}{3}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{3535}{3}$.

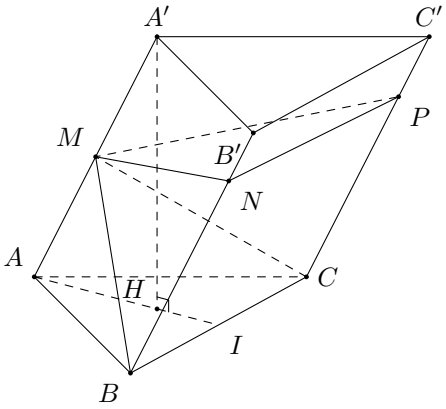
Chọn đáp án (D) □

Ví dụ 9. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên với mặt phẳng đáy bằng 60° và A' cách đều 3 điểm A, B, C. Gọi M là trung điểm của AA'; $N \in BB'$ thỏa mãn $NB = 4NB'$ và $P \in CC'$ sao cho $PC = 3PC'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (B) $\dfrac{41a^3\sqrt{3}}{240}$. (C) $\dfrac{23a^3\sqrt{3}}{144}$. (D) $\dfrac{19a^3\sqrt{3}}{240}$.

Lời giải.

Gọi V là thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P.



Gọi V_1 là thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Gọi H là trọng tâm của tam giác ABC.

Vì điểm A' cách đều các điểm A, B, C nên $A'H \perp (ABC)$.

Hơn nữa $AA' \cap (ABC) = A$ nên $(AA', (ABC)) = \widehat{A'AH} = 60^\circ$.

Suy ra $A'H = AH \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \tan 60^\circ = a$.

Do đó $V_1 = S_{ABC} \cdot A'H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$ (đvtt).

Mà $V_{A'.ABC} = \dfrac{1}{3} S_{ABC} \cdot A'H = \dfrac{V_1}{3} \Rightarrow V_{A'.BCC'B'} = \dfrac{2V_1}{3}$.

Từ $\begin{cases} NB = 4NB' \\ PC = 3PC' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NB = \dfrac{4}{5}BB' \\ PC = \dfrac{3}{4}CC' = \dfrac{3}{4}BB'. \end{cases}$

Suy ra

$$\begin{aligned} S_{BCPN} = \frac{1}{2}(NB + PC) \cdot \mathrm{d}(BB', CC') &= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}BB' + \frac{3}{4}BB'\right)\mathrm{d}(BB', CC') \\ &= \frac{31}{40}BB' \cdot \mathrm{d}(BB', CC') = \frac{31}{40} \cdot S_{BCC'B'} \\ &\Rightarrow V_{M.BCPN} = \frac{31}{40}V_{M.BCCB'} = \frac{31}{40}V_{A'.BCCB'} = \frac{31}{60}V_1. \end{aligned}$$

Và $V_{M.ABC} = \dfrac{1}{3} S_{ABC} \cdot \dfrac{1}{2} A'H = \dfrac{1}{2} V_{A'.ABC} = \dfrac{1}{6} V_1$ (vì M là trung điểm của AA').

Vậy thể tích cần tìm là $V = V_{M.ABC} + V_{M.BCPN} = \dfrac{41}{60}V_1 = \dfrac{41a^3\sqrt{3}}{240}$ (đvtt).

Dùng công thức giải nhanh

Ta có $\dfrac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{AM}{AA'} + \dfrac{BN}{BB'} + \dfrac{CP}{CC'}\right)$.

Suy ra $V_{ABC.MNP} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{41a^3\sqrt{3}}{240}$.

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 10. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ diện tích đáy bằng 3 và chiều cao bằng 5. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AA', BB', CC' và G, G' lần lượt là trọng tâm của hai đáy ABC, $A'B'C'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm G, G', M, N, P bằng

(A) 10. (B) 3. (C) 5. (D) 6.

Lời giải.

Ta có $V_{ABC.A'B'C'} = 3 \cdot 5 = 15$ (đvtt).

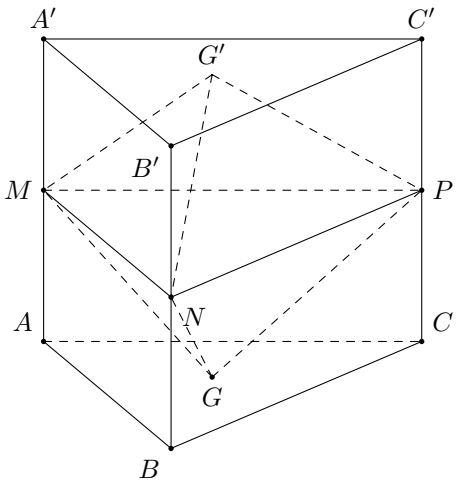
Ta có $V_{GG'MNP} = V_{G.MNP} + V_{G'.MNP}$.

Do M, N, P lần lượt là trung điểm của AA', BB', CC' nên mặt phẳng (MNP) chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai khối lăng trụ bằng nhau $ABC.MNP$ và$MNP.A'B'C'$.

Lại có $G \in (ABC)$ nên $V_{G.MNP} = \dfrac{1}{3}V_{ABC.MNP}$.

Do đó

$$\begin{aligned} V_{GG'MNP} &= V_{G.MNP} + V_{G'.MNP} \\ &= \frac{1}{3}V_{ABC.MNP} + \frac{1}{3}V_{MNP.A'B'C'} \\ &= \frac{1}{3}\left(V_{ABC.MNP} + V_{MNP.A'BC'C}\right) \\ &= \frac{1}{3}V_{ABC\cdot A'BC'C} = \frac{1}{3}\cdot 15 = 5. \end{aligned}$$



Chọn đáp án (C) □

C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Dạng 1. Mở đầu khối đa diện

Câu 1. Khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V, $AB = a$, $CD = b$, góc giữa hai đường thẳng AB và CD là α khoảng cách giữa chúng bằng c. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $V = \dfrac{abc\sin\alpha}{6}$. (B) $V = \dfrac{abc\sin\alpha}{2}$. (C) $V = \dfrac{abc\sin\alpha}{3}$. (D) $V = abc\sin\alpha$.

Lời giải.

Dựng điểm E sao cho tứ giác $BDCE$ là hình bình hành. Khi đó

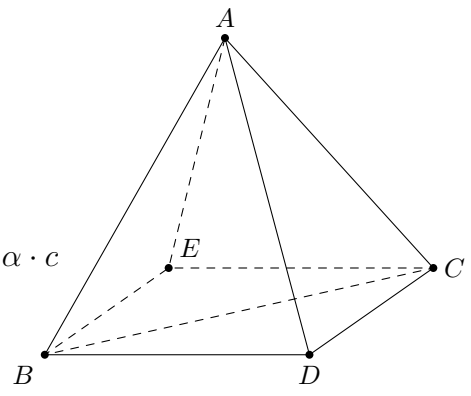
$CD \parallel BE \Rightarrow CD \parallel (ABE) \Rightarrow \mathrm{d}(AB, CD) = \mathrm{d}(C, (ABE)) = c$;

$\left(\widehat{AB, CD}\right) = \left(\widehat{AB, BE}\right) = \alpha$.

$S_{\triangle ABE} = \dfrac{1}{2}\cdot AB \cdot BE \cdot \sin\left(\widehat{AB, BE}\right) = \dfrac{1}{2}\cdot a \cdot b\sin\alpha$.

Vậy $V_{ABCD} = V_{C.ABE} = \dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABE}\cdot \mathrm{d}(C, (ABE)) = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot b\sin\alpha\cdot c$

$= \dfrac{abc\sin\alpha}{6}$.



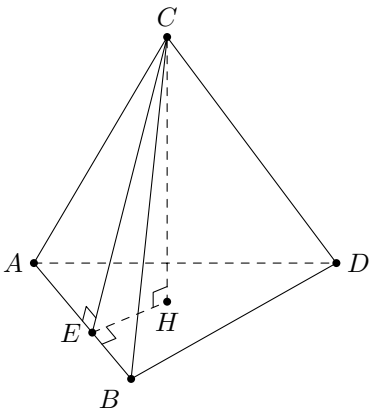
Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V, $AB = a$ góc giữa hai mặt phẳng (CAB) và (DAB) bằng α. Các tam giác CAB, DAB có diện tích lần lượt là S_1 và S_2. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $V = \dfrac{2S_1S_2\sin\alpha}{a}$. (B) $V = \dfrac{4S_1S_2\sin\alpha}{3a}$. (C) $V = \dfrac{4S_1S_2\sin\alpha}{a}$. (D) $V = \dfrac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên (ABD) và E là hình chiếu vuông góc của H trên AB. Khi đó $\left(\widehat{(CAB),(DAB)}\right) = \left(\widehat{HE,CE}\right) = \widehat{CEH} = \alpha$. $\begin{cases} CH \perp AB \\ HE \perp AB \end{cases} \Rightarrow CE \perp AB$.



Do đó $S_{\triangle ABC} = \dfrac{CE \cdot AB}{2} \Rightarrow CE = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{AB} = \dfrac{2S_1}{a}$.

$\triangle CEH$ vuông tại H có $\dfrac{CH}{CE} = \sin\widehat{CEH} = \sin\alpha$

$\Rightarrow CH = CE \cdot \sin\alpha = \dfrac{2S_1\sin\alpha}{a}$.

Vậy $V_{ABCD} = V_{C.ABD} = \dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle DAB}\cdot CH = \dfrac{1}{3}\cdot S_2 \cdot \dfrac{2S_1\sin\alpha}{a} = \dfrac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}$.

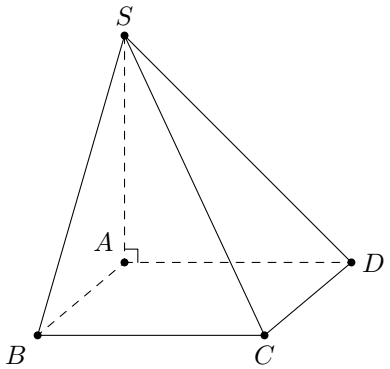
Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, còn cạnh bên SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc $30°$. Thể tích của hình chóp đó bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} CB \perp AB \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB)$.



Suy ra góc giữa SC với mặt phẳng (SAB) là $\widehat{CSB} = 30°$.

Do đó, $SB = CB \cdot \cot 30° = a\sqrt{3}$.

Suy ra $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}\cdot SA \cdot S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình vuông cạnh a. Các mặt phẳng (SAB) và (SAD)cùng vuông góc với mặt phẳng đáy, còn cạnh bên SC tạo với mặt phẳng đáy một góc $30°$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{9}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

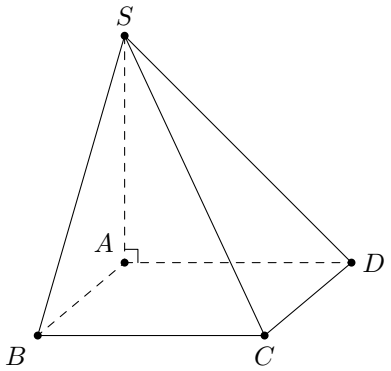
Lời giải.

Do $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAD)\perp(ABCD)\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABCD)$.

Suy ra góc giữa SC với mặt phẳng đáy là $\widehat{SCA}=30^\circ$.

Suy ra $SA=AC\cdot\tan 30^\circ=a\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Do đó $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot SA\cdot S_{ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{9}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Cho một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và diện tích xung quanh gấp đôi diện tích đáy. Khi đó thể tích của hình chóp bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.

Giả sử hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a tâm O. Đặt $SO=h$.

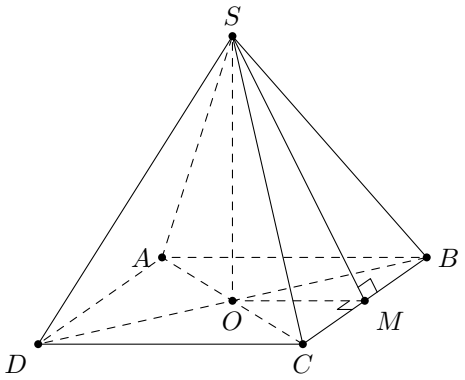
Gọi M là trung điểm BC.

Ta có $SM=\sqrt{SO^2+OM^2}=\sqrt{h^2+\dfrac{a^2}{4}}$.

$S_{\text{xq}}=4S_{\triangle SBC}=4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot SM\cdot BC=2\cdot\sqrt{h^2+\dfrac{a^2}{4}}\cdot a$.

Có $S_{\text{xq}}=2S_{\text{đáy}}\Leftrightarrow 2\sqrt{h^2+\dfrac{a^2}{4}}\cdot a=2a^2\Leftrightarrow h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot SO\cdot S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot a^2=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Nếu một hình chóp đều có chiều cao và cạnh đáy cùng tăng lên n lần thì thể tích của nó tăng lên

(A) n^2 lần. (B) $2n^2$ lần. (C) n^3 lần. (D) $2n^3$ lần.

Lời giải.

Ta chỉ xét hai hình chóp đều tam giác, tứ giác.

Trường hợp 1: Hình chóp đều tam giác có cạnh đáy bằng a và chiều cao h.

Thể tích khối chóp tam giác đều ban đầu $V_1=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot h$.

Thể tích khối chóp sau khi tăng chiều cao và cạnh đáy cùng tăng lên n lần $V_2=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{(na)^2\sqrt{3}}{4}\cdot n\cdot h=n^3\cdot V_1$.

Kết luận: một hình chóp tam giác đều có chiều cao và cạnh đáy cùng tăng lên n lần thì thể tích của

nó tăng lên n^3 lần.

Trường hợp 2: Hình chóp đều tứ giác có cạnh đáy bằng a và chiều cao h.

Thể tích khối chóp tứ giác đều ban đầu $V_1 = \dfrac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$.

Thể tích khối chóp tứ giác đều sau khi tăng chiều cao và cạnh đáy cùng tăng lên n lần $V_2 = \dfrac{1}{3} \cdot (na)^2 \cdot n \cdot h = n^3 \cdot V_1$.

Kết luận: một hình chóp tứ giác đều có chiều cao và cạnh đáy cùng tăng lên n lần thì thể tích của nó tăng lên n^3 lần.

Kết luận: Nếu một hình chóp đều có chiều cao và cạnh đáy cùng tăng lên n lần thì thể tích của nó tăng lên n^3 lần.

Nhận xét: Ta có thể dùng một kết quả quen thuộc

- Nếu ta tăng các kích thước của đa giác lên k lần thì diện tích đa giác sẽ tăng lên k^2 lần.
- Nếu tăng diện tích đáy của khối chóp lên k^2 lần và chiều cao k lần thì thể tích khối chóp sẽ tăng lên k^3 lần.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' = 2$, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB', CC', lần lượt bằng1 và 2; khoảng cách C đến đường thẳng BB' bằng $\sqrt{5}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

(A) 2. (B) $\dfrac{2}{3}$. (C) 4. (D) $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

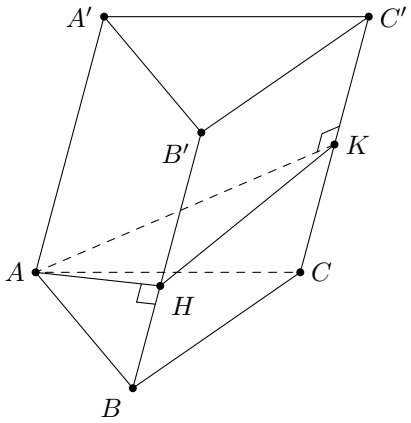
Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BB', CC' ta có

$AH = \mathrm{d}(A, BB') = 1$, $AK = \mathrm{d}(A, CC') = 2$

và $AH^2 + AK^2 = HK^2 = 5 \Rightarrow \triangle AHK$ vuông tại A

$\Rightarrow S_{AHK} = \dfrac{1}{2} \cdot AH \cdot AK = 1$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{AHK} \cdot AA' = 2$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Cho khối tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc thỏa mãn $OA^2 + OB^2 + OC^2 = 12$. Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $O.ABC$ bằng

(A) 8. (B) $\dfrac{4}{3}$. (C) 4. (D) $\dfrac{8}{3}$.

Lời giải.

Ta có $V_{O.ABC}=\dfrac{1}{6}OA\cdot OB\cdot OC$.
Sử dụng bất đẳng thức AM – GM có

$$12=OA^2+OB^2+OC^2\geq 3\sqrt[3]{OA^2\cdot OB^2\cdot OC^2}\Rightarrow OA\cdot OB\cdot OC\leq 8\Rightarrow V_{O.ABC}\leq\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$$

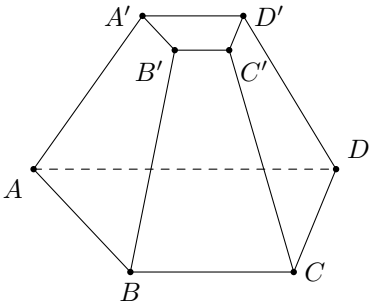
Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Thể tích của khối chóp cụt có diện tích hai đáy lần lượt là S_1, S_2 có chiều cao bằng h là

(A) $h\left(S_1+S_2-\sqrt{S_1S_2}\right)$.
(B) $\dfrac{h\left(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}\right)}{3}$.
(C) $\dfrac{h\left(S_1+S_2-\sqrt{S_1S_2}\right)}{3}$.
(D) $h\left(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}\right)$.

Lời giải.

Thể tích khối chóp cụt là $V=\dfrac{h\left(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}\right)}{3}$.



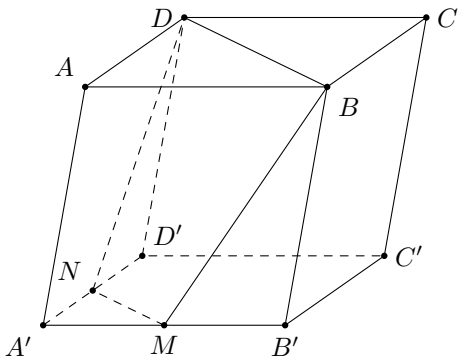
Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD}=60^\circ$ và có chiều cao bằng $2a\sqrt{3}$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B'$, $A'D'$. Tính thể tích khối đa diện $ABD.A'MN$.

(A) $\dfrac{7a^3}{8}$.
(B) $\dfrac{3a^3}{4}$.
(C) $\dfrac{5a^3}{8}$.
(D) $\dfrac{2a^3}{8}$.

Lời giải.

Chú ý: $ABD.A'MN$ là một hình chóp cụt có hai tam giác đáy $\triangle ABD$, $\triangle A'MN$.



Ta có $h=2a\sqrt{3}$.
$S_1=S_{ABD}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
$S_2=S_{A'MN}=\dfrac{1}{4}S_{A'B'D'}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}$.

Vậy

$$\begin{aligned}V_{ABD.A'MN}&=\frac{h\left(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}\right)}{3}\\&=\frac{2a\sqrt{3}}{3}\cdot\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{a^2\sqrt{3}}{16}+\sqrt{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{16}}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{7a^2}{8}.$$

Chọn đáp án (A) □

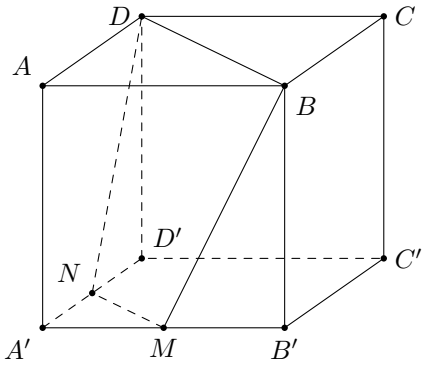
Câu 11. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = a$, $AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và góc $\widehat{BAD} = 60°$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh $A'D'$ và $A'B'$. Thể tích khối chóp $A.BDMN$ là

(A) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{16}$. (B) $\dfrac{3a^3}{16}$. (C) $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{16}$. (D) $\dfrac{a^3}{16}$.

Lời giải.

Ta có

$$V_{A.A'MN} = \frac{1}{3}S_{AMN} \cdot AA' = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sin 60^0\right) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{32}.$$



Khối chóp cụt $ABD.A'MN$ có $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$S_1 = S_{ABD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$S_2 = S_{AMN} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}$.

Do đó $V_{ABD.A'MN} = \dfrac{h}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}\left(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{16} + \sqrt{\dfrac{3a^4}{64}}\right) = \dfrac{7a^3}{32}$.

Vậy $V_{A.BDMN} = V_{ABD.A'MN} - V_{A.A'MN} = \dfrac{7a^3}{32} - \dfrac{a^3}{32} = \dfrac{3a^3}{16}$.

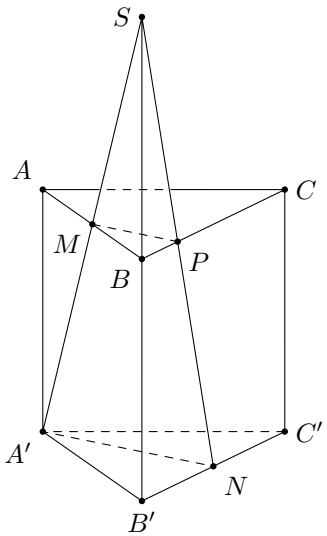
Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và $B'C'$. Mặt phẳng $(A'MN)$ cắt cạnh BC tại P. Thể tích khối đa diện $MBP.A'B'N$ bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{24}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. (C) $\dfrac{7\sqrt{3}a^3}{96}$. (D) $\dfrac{7\sqrt{3}a^3}{32}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{MP}{A'N} = \dfrac{BP}{B'N} = \dfrac{BM}{A'B'} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \triangle MBP \sim \triangle A'B'N$ theo tỉ số $\dfrac{1}{2}$ Khối đa diện $MBP.A'B'N$ là khối chóp cụt có chiều cao $h = BB' = a$. Diện tích hai đáy lần lượt là



$$S_1 = S_{A'BN} = \frac{1}{2}S_{A'B'C} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}, S_2 = S_{MBP} = \frac{1}{4}S_{A'BN} = \frac{a^2\sqrt{3}}{32}.$$

$$\begin{aligned} V_{MBP.A'B'N} &= \frac{h}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right) \\ &= \frac{a}{3}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{8} + \frac{a^2\sqrt{3}}{32} + \sqrt{\frac{a^2\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{32}}\right) \\ &= \frac{7\sqrt{3}a^3}{96}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Cho khối tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và thỏa mãn $OA + OB + OC = 6$. Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $OABC$ bằng

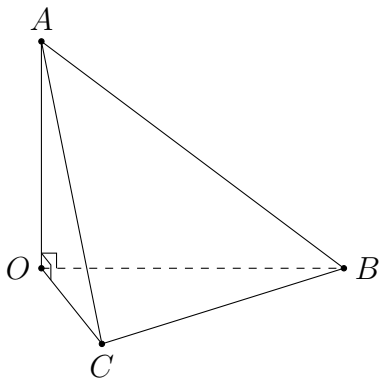
(A) $\frac{4}{3}$. (B) $\frac{8}{3}$. (C) 4. (D) 8.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số không âm, ta có

$$6 = OA + OB + OC \geq 3\sqrt[3]{OA \cdot OB \cdot OC} \Leftrightarrow OA \cdot OB \cdot OC \leq 8.$$

Ta có $V_{OABC} = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC \leq \frac{1}{6} \cdot 8 = \frac{4}{3}$.
Dấu "=" xảy ra khi $OA = OB = OC = 2$.
Vậy V_{OABC} lớn nhất bằng $\frac{4}{3}$.



Chọn đáp án (A) □

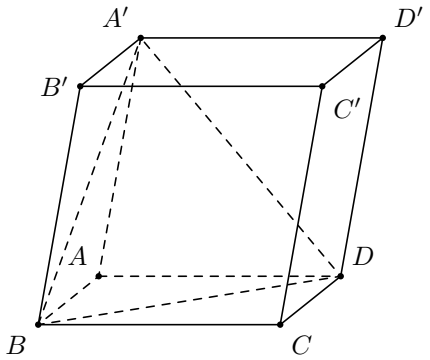
Câu 14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có diện tích đáy bằng S, chiều cao bằng h. Thể tích khối tứ diện $A'ABD$ bằng

(A) $\frac{Sh}{6}$. (B) $\frac{Sh}{2}$. (C) $\frac{Sh}{4}$. (D) $\frac{Sh}{3}$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABD} = \frac{1}{2} S.ABCD$, do đó

$$V_{A'ABD} = \frac{1}{2} V_{A'.ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot \mathrm{d}\left(A'; (ABCD)\right) = \frac{Sh}{6}.$$



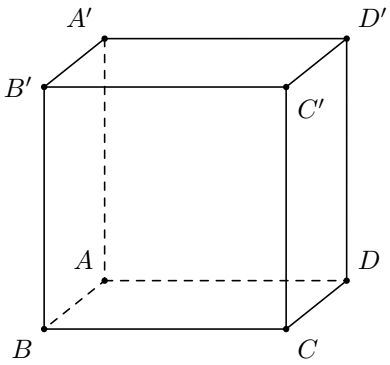
Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Cho hình lăng trụ đều có độ dài cạnh đáy bằng a. Chiều cao của hình lăng trụ bằng h, diện tích một mặt đáy là S. Tổng khoảng cách từ một điểm trong hình lăng trụ tới tất cả các mặt của hình lăng trụ bằng

(A) $h + \frac{2S}{a}$. (B) $h + \frac{3S}{a}$. (C) $\frac{2S}{a}$. (D) $\frac{3S}{a}$.

Lời giải.

Xét hình lăng trụ đều (H) đã cho có đáy là đa giác đều n đỉnh.
Xét điểm I bất kỳ trong hình lăng trụ đều (H) đã cho.
Khi đó nối I với các đỉnh của (H) ta được $n+2$ khối chóp có đỉnh là I, trong đó có hai khối chóp có đáy là hai mặt đáy của (H), và n khối chóp có đáy là các mặt bên của (H). Diện tích của mỗi mặt đáy của (H) là S, diện tích của mỗi mặt bên của (H) bằng ah.



Gọi $h_1, h_2, \cdots, h_n, h_{n+1}, h_{n+2}$ lần lượt là khoảng cách từ I đến các mặt bên và các mặt đáy của (H).
Vậy theo công thức tính thể tích của khối lăng trụ và khối chóp ta có

$$\begin{aligned}
&V_{(H)} = V_1 + V_2 + \cdots + V_n + V_{n+1} + V_{n+2}\\
&\Leftrightarrow Sh = \frac{1}{3}h_1 \cdot ah + \cdots + \frac{1}{3}h_n \cdot ah + \frac{1}{3}h_{n+1} \cdot S + \frac{1}{3}h_{n+2} \cdot S\\
&\Leftrightarrow S = \frac{1}{3}\left(h_1 + h_2 + \cdots + h_n\right)a + \frac{1}{3}\underbrace{\left(h_{n+1} + h_{n+2}\right)}_{h}\frac{S}{h}\\
&\Leftrightarrow S = \frac{1}{3}\left(h_1 + h_2 + \cdots + h_n\right)a + \frac{S}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(h_1 + h_2 + \cdots + h_n\right)a = S - \frac{S}{3}\\
&\Leftrightarrow h_1 + h_2 + \cdots + h_n = \frac{2S}{a} \Leftrightarrow h_1 + h_2 + \cdots + h_n + h_{n+1} + h_{n+2} = \frac{2S}{a} + h.
\end{aligned}$$

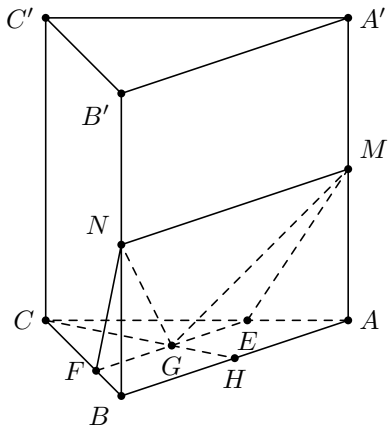
Vậy tổng khoảng cách từ một điểm trong hình lăng trụ tới tất cả các mặt bằng $h + \dfrac{2S}{a}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều $a, AA' = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', BB' và G là trọng tâm của tam giác ABC. Mặt phẳng (MNG) cắt CA, CB lần lượt tại E, F. Thể tích khối đa diện có 6 đỉnh là A, B, M, N, E, F bằng

(A) $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{27}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{9}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{27}$.

Lời giải.

Ta có $V_1 = V_{C.ABNM} = \dfrac{1}{3}CH \cdot S_{ABNM} = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$.



Do $\begin{cases} MN \subset (GMN) \\ AB \subset (ABC) \\ AB \parallel MN \end{cases}$ suy ra $(GMN) \cap (ABC) = EF$, với $EF \parallel AB$.

Khi đó $\dfrac{CF}{CB} = \dfrac{CG}{CH} = \dfrac{CE}{CA} = \dfrac{2}{3}$

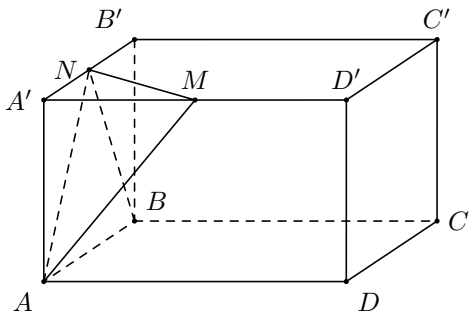
nên $\dfrac{V_{C.EFNM}}{V_1} = \dfrac{\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 1 + 1}{4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot 1} = \dfrac{5}{9}$.

Do đó $V_{BFN.AEM} = V_1 - V_{C.EFNM} = \dfrac{4}{9}V_1 = \dfrac{4}{9}\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6} = \dfrac{2\sqrt{3}a^3}{27}$.

Chọn đáp án (A) □

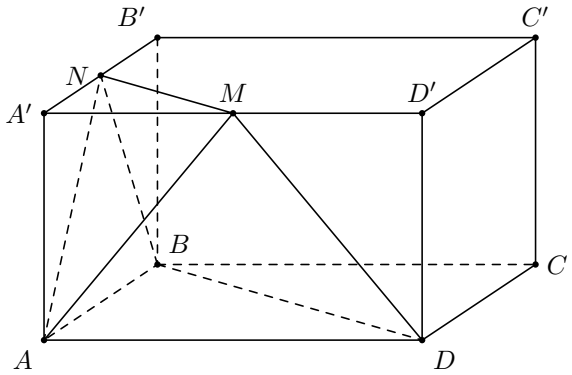
Câu 17.

Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = a$, $\mathrm{AA}' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh $A'D'$ và $A'B'$. Tính thể tích khối chóp $A.BDMN$.



(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$. (B) $\dfrac{3a^3}{16}$. (C) $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{16}$. (D) $\dfrac{a^3}{16}$.

Lời giải.



Ta có $A'MN.ADB$ là hình chóp cụt và hai đáy là hai tam giác đồng dạng theo tỉ số là $\dfrac{1}{2}$.

Ta có $S_{\triangle ADB} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{\triangle A'MN} = \dfrac{1}{4} \cdot S_{\triangle ADB} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{16} \Rightarrow V_{AA'MN} = \dfrac{1}{3}AA' \cdot S_{\triangle A'MN} = \dfrac{a^3}{32}$.

Khi đó, $V_{A'MN.ADB} = \dfrac{1}{3} \cdot AA' \cdot \left(S_{\triangle A'MN} + S_{\triangle ADB} + \sqrt{S_{\triangle A'MN} \cdot S_{\triangle ADB}}\right) = \dfrac{7a^3}{32}$.

Vậy $V_{A.BDMN} = V_{A'MN\cdot ADB} - V_{AA'MN} = \dfrac{3a^3}{16}$.

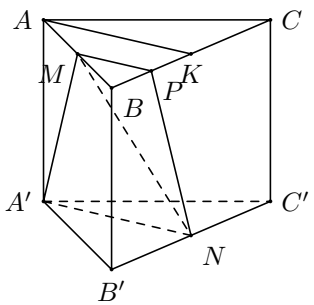
Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và $B'C'$. Mặt phẳng $(A'MN)$ cắt cạnh BC tại P. Thể tích khối đa diện $MBP.A'B'N$ bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (C) $\dfrac{7a^3\sqrt{3}}{96}$. (D) $\dfrac{7a^3\sqrt{3}}{32}$.

Lời giải.

Ta có $A'N \parallel (ABC)$. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng BC. Suy ra $AK \parallel A'N$.



Mặt khác, $(A'MN) \cap BC = P$ nên P là trung điểm của đoạn thẳng BK.

Dễ thấy, $MBP.A'B'N$ là hình chóp cụt và hai đáy là hai tam giác đồng dạng theo tỉ số là $\dfrac{1}{2}$.

Ta có $S_{\triangle A'B'N} = \dfrac{1}{2}A'B' \cdot A'N \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$

$\Rightarrow S_{\triangle MBP} = \dfrac{1}{4}S_{\triangle A'BN} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{32}$.

Vậy

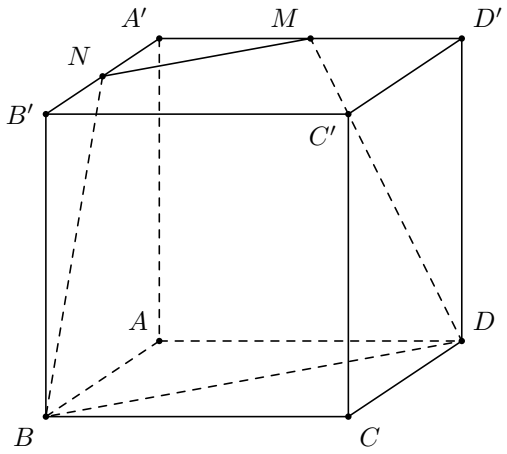
$V_{MBP\cdot A'BN} = \dfrac{1}{3}\mathrm{AA}'\left(S_{\triangle MBP} + S_{\triangle A'B'N} + \sqrt{S_{\triangle MBP}\cdot S_{\triangle A'B'N}}\right) = \dfrac{7a^3\sqrt{3}}{96}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = a; \mathrm{AA}' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và góc $\widehat{BAD} = 60°$. Gọi M; N lần lượt là trung điểm của A′D′; $A'B'$. Tính thể tích khối đa diện $BCD.MNB'C'D'$.

(A) $\dfrac{3a^3}{16}$. (B) $\dfrac{7a^3}{32}$. (C) $\dfrac{9a^3}{16}$. (D) $\dfrac{17a^3}{32}$.

Lời giải.



Đặt V_1 là thể tích của khối hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$; V_2 là thể tích của khối chóp $BCD.MNB'C'D'$; V là thể tích của đa diện $BCD.MNB'C'D'$.

Ta có $V_1 = B\cdot h = a\cdot a\cdot \sin 60°\cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a^3}{4}$.

$S_{\triangle A'MN} = \dfrac{1}{4}S_{\triangle A'B'D'} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$; $S_{\triangle ABD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Suy ra

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{h}{3}\left(S_{\triangle A'MN} + S_{\triangle ABD} + \sqrt{S_{\triangle A'MN}\cdot S_{\triangle ABD}}\right) \\ &= \frac{a\sqrt{3}}{6}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{16} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{a^2\sqrt{3}}{16}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}\right) \\ &= \frac{7a^3}{32}. \end{aligned}$$

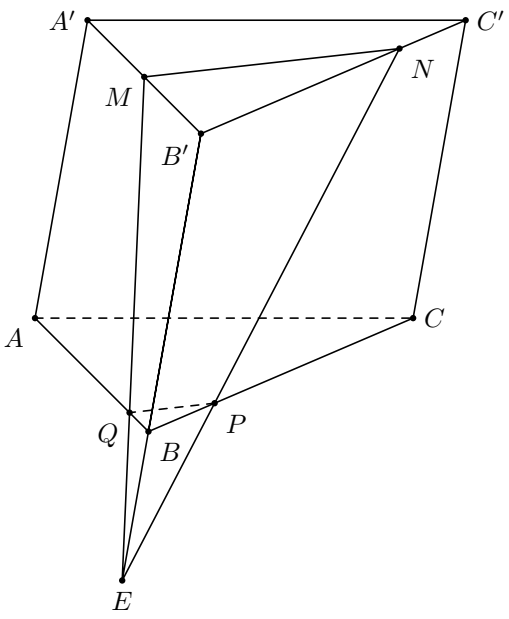
Do đó, $V = V_1 - V_2 = \dfrac{3a^3}{4} - \dfrac{7a^3}{32} = \dfrac{17a^3}{32}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 72. Gọi M là trung điểm của cạnh $A'B'$; các điểm N, P thỏa mãn $\overrightarrow{B'N} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{B'C'}$; $\overrightarrow{BP} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}$. Đường thẳng NP cắt BB' tại E, đường thẳng ME cắt AB tại Q. Tính thể tích khối đa diện $AQPC.C'A'MN$.

(A) 55. (B) 59. (C) 52. (D) 56.

Lời giải.



Đặt V là thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ khi đó $V = 72$;

V_1 là thể tích khối đa diện $AQPC.C'A'MN$;

V_2 là thể tích khối chóp cụt $BQP.B'MN$.

Ta có $\dfrac{BP}{B'N} = \dfrac{BQ}{B'M} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{BQ}{BA} = \dfrac{1}{6}$.

Khi đó, $\dfrac{S_{\triangle BQP}}{S_{\triangle BAC}} = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{24}$

$\Rightarrow S_{\triangle BQP} = \dfrac{1}{24} S_{\triangle BAC} \Rightarrow \dfrac{S_{\triangle B'MN}}{S_{\triangle B'ACC}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{8} \Rightarrow S_{\triangle B'MN} = \dfrac{3}{8} S_{\triangle BAC}$.

Suy ra

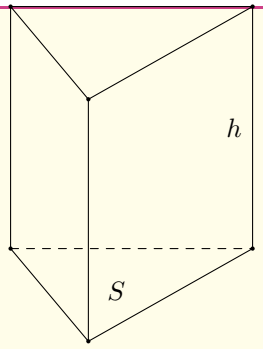
$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{h}{3} \cdot \left(S_{\triangle BQP} + S_{\triangle BMN} + \sqrt{S_{\triangle BQP} \cdot S_{\triangle BMN}} \right) \\ &= \frac{h}{3} \cdot \left(\frac{1}{24} S_{\triangle BAC} + \frac{3}{8} S_{\triangle BAC} + \sqrt{\frac{1}{24} S_{\triangle BAC} \cdot \frac{3}{8} S_{\triangle BAC}} \right) \\ &= \frac{h \cdot S_{\triangle BAC}}{3} \cdot \left(\frac{1}{24} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \right) \\ &= \frac{13V}{72} = 13. \end{aligned}$$

Vậy $V_1 = V - V_2 = 72 - 13 = 59$.

Chọn đáp án (B) □

Dạng 2. Thể tích khối lăng trụ đứng

1) Thể tích của khối lăng trụ đứng có diện tích đáy S, chiều cao (độ dài cạnh bên) h là $V = S \cdot h$.

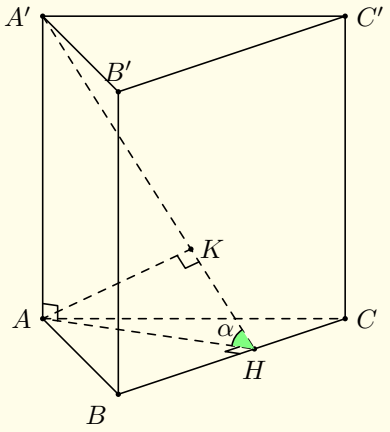


a) Khối lăng trụ đứng là khối lăng trụ có cạnh bên vuông góc với đáy.

b) Chiều cao của khối lăng trụ đứng bằng độ dài cạnh bên của khối lăng trụ.

c) Khối lăng trụ đa giác đều là khối lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều (khối lăng trụ tam giác đều, khối lăng trụ lục giác đều...)

2) Khai thác các giả thiết góc và khoảng cách cho khối lăng trụ đứng tam giác.

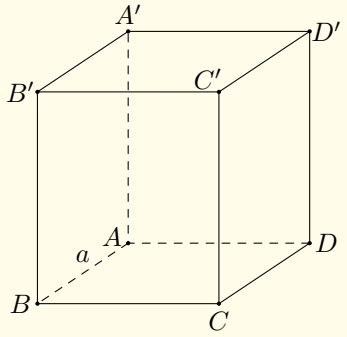


a) Kẻ $AH \perp BC\,(H \in BC)$, $AK \perp A'H\ (K \in A'H)$ ta có $\widehat{A'HA} = \alpha = ((A'BC), (ABC))$ và $h = AH \cdot \tan\alpha$.

b) $\begin{cases} AK \perp A'H \\ AK \perp BC \end{cases} \Rightarrow AK \perp (A'BC)$ và

$AK = \mathrm{d}_A = \mathrm{d}(A, (A'BC))$ và $\dfrac{1}{\mathrm{d}_A^2} = \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{1}{AH^2}$.

3) Thể tích của một khối lập phương cạnh a là $V = a^3$. Với hình lập phương cạnh a ta chú ý



a) Diện tích mỗi mặt của hình lập phương là $S = a^2$.

b) Diện tích toàn phần (tổng diện tích các mặt) của hình lập phương là $S_{TP} = 6a^2$.

c) Độ dài đường chéo của hình lập phương là $\mathrm{d} = a\sqrt{3}$.

d) Độ dài đường chéo mỗi mặt của hình lập phương là $a\sqrt{2}$.

e) $\mathrm{d}(A, (A'BD)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $\mathrm{d}(A, (CB'D')) = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

f) $\mathrm{d}(AC', CD) = \mathrm{d}(AC', A'B') = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

4) Thể tích của một khối hộp chữ nhật kích thước a, b, c là $V = abc$.

a) Diện tích toàn phần (tổng diện tích các mặt) của hình hộp chữ nhật là $S_{TP} = 2(ab + bc + ca)$.

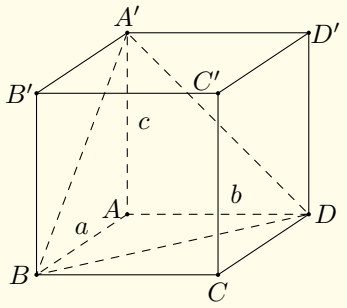
b) Độ dài đường chéo của hình hộp chữ nhật là $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ hay $AC' = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2}$.

c) Kẻ $DH \perp AD'\,(H \in AD')$, ta có

$$\widehat{DHC} = \alpha = ((ACD'), (ADD'A')).$$

d) Vì $AB \perp (BCC'B')$ nên $AC'B = (AC', (BCC'B'))$.

e) $\dfrac{1}{\mathrm{d}^2(A, (A'BD))} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2} + \dfrac{1}{AA'^2}$.



Câu 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và $C'D'$ bằng a. Tính thể tích V của khối lập phương đã cho.

(A) $V = 8a^3$. (B) $V = 2\sqrt{2}a^3$. (C) $V = 3\sqrt{3}a^3$. (D) $V = 27a^3$.

Lời giải.

Đặt cạnh hình lập phương là x.

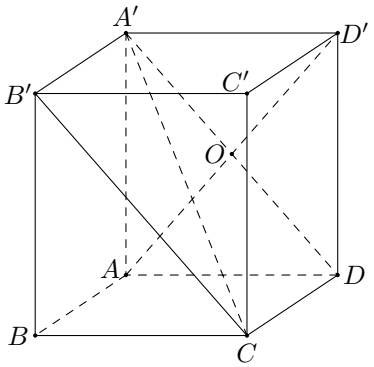
Gọi $O = AD' \cap A'D$, ta có $D'O \perp (DCB'A')$.

Ta có $A'C \subset (DCB'A') \,/\!/\, C'D'$ nên

$$\mathrm{d}(C'D', A'C) = \mathrm{d}\,(C'D', (DCB'A')) = \frac{x\sqrt{2}}{2} = a.$$

Do đó $x = a\sqrt{2}$.

Thể tích khối lập phương là $V = x^3 = 2\sqrt{2}a^3$.



Chọn đáp án (B) □

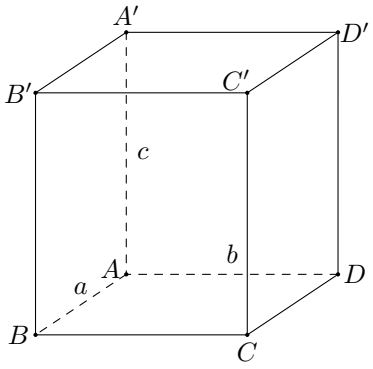
Câu 2. Một khối hộp chữ nhật có diện tích các mặt xuất phát từ cùng một đỉnh lần lượt là 10 cm^2, 20 cm^2, 80 cm^2. Thể tích V của khối hộp chữ nhật đó là

(A) $V = 40$ cm^3. (B) $V = 80$ cm^3. (C) $V = 80\sqrt{10}$ cm^3. (D) $V = 40\sqrt{10}$ cm^3.

Lời giải.

Đặt độ dài các cạnh của hình hộp chữ nhật là a, b, c, ta có

$$\begin{cases} ab = 10 \\ bc = 20 \\ ca = 80 \end{cases} \Rightarrow abc = 40\sqrt{10}.$$



Thể tích của khối hộp chữ nhật là $V = abc = 40\sqrt{10}$ cm^3.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Khi tăng độ dài mỗi cạnh của một khối hộp chữ nhật lên 2 lần thì thể tích của nó tăng lên bao nhiêu lần?

(A) 7 lần. (B) 2 lần. (C) 4 lần. (D) 8 lần.

Lời giải.

Giả sử độ dài mỗi cạnh của khối hộp là a, b, c, thể tích khối hộp là $V_1 = abc$.

Khi tăng độ dài mỗi cạnh lên 2 lần thì độ dài mỗi cạnh là $2a$, $2b$, $2c$ và có thể tích là

$$V_2 = 2a \cdot 2b \cdot 2c = 8abc = 8V_1.$$

Do đó thể tích khối hộp chữ nhật tăng lên 8 lần.

Chọn đáp án (D) □

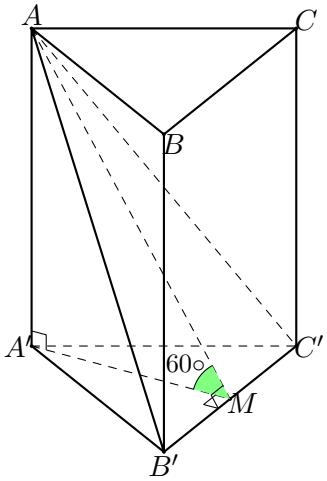
Câu 4. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120°$, mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

(A) $V = \dfrac{3a^3}{8}$. (B) $V = \dfrac{9a^3}{8}$. (C) $V = \dfrac{a^3}{4}$. (D) $V = \dfrac{3a^3}{4}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm $B'C'$.

Ta có $\begin{cases} AM \perp B'C' \\ A'M \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow ((AB'C'), (A'B'C')) = \widehat{A'MA} = 60°$.



$\triangle A'MB'$ vuông tại M, có $\widehat{B'A'M} = 60°$ nên $A'M = a \cdot \cos 60° = \dfrac{a}{2}$;

$AA' = A'M \cdot \tan \widehat{AMA'} = \dfrac{a}{2} \cdot \tan 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 60° = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích V của khối lăng trụ đã cho là

$$V = AA' \cdot S_{ABC} = \frac{3a^3}{8}.$$

Chọn đáp án (A) □

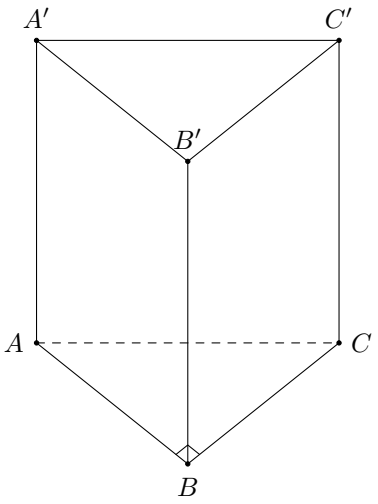
Câu 5. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho

(A) $V = \dfrac{a^3}{2}$. (B) $V = a^3$. (C) $V = \dfrac{a^3}{6}$. (D) $V = \dfrac{a^2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $AB = BC = a$.

Thể tích lăng trụ đa cho là $V = S_{\triangle ABC} \cdot BB' = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot a = \dfrac{a^3}{2}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng $(A'D'CB)$ tạo với đáy một góc $60°$. Thể tích V của khối hộp chữ nhật là

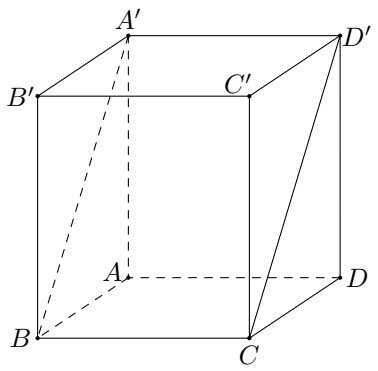
(A) $V = a^3$. (B) $V = 3a^3$. (C) $V = \sqrt{3}a^3$. (D) $V = 9a^3$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AB \perp BC \\ A'B \perp BC \end{cases} \Rightarrow ((A'D'BC), (ABCD)) = \widehat{A'BA} = 60°$.

Suy ra $AA' = AB \cdot \tan 60° = a\sqrt{3}$.

Vậy thể tích của khối hộp chữ nhật là $V = AB \cdot AD \cdot AA' = 3a^3$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = a$ và $A'C$ tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ một góc $30°$. Thể tích V của khối hộp chữ nhật là

(A) $V = 3a^3\sqrt{2}$. (B) $V = 2a^3$. (C) $V = a^3\sqrt{2}$. (D) $V = a^3\sqrt{6}$.

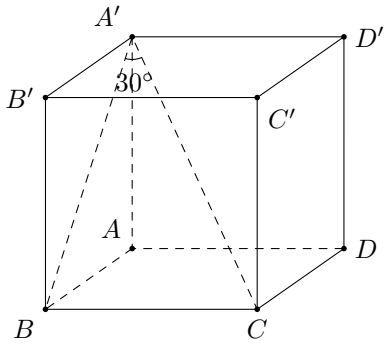
Lời giải.

Ta có $(A'C,(ABB'A')) = \widehat{CA'B} = 30^\circ$.

$BC = A'B \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{\sqrt{a^2+A'A^2}}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow a = \dfrac{\sqrt{a^2+A'A^2}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a\sqrt{3} = \sqrt{a^2+A'A^2} \Rightarrow A'A = a\sqrt{2}$.

$V = AB \cdot AD \cdot AA' = a^3\sqrt{2}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $AC = 2a$ và góc giữa CB' và (ABC) bằng 60°. Mặt phẳng (P) qua trọng tâm tứ diện $CA'B'C'$, song song với mặt đáy lăng trụ và cắt các cạnh AA', BB', CC' lần lượt tại E, F, Q. Tỉ số thể tích của khối tứ diện $CEFQ$ và khối lăng trụ đã cho gần số nào sau đây nhất?

(A) $0,06$. (B) $0,25$. (C) $0,09$. (D) $0,07$.

Lời giải.

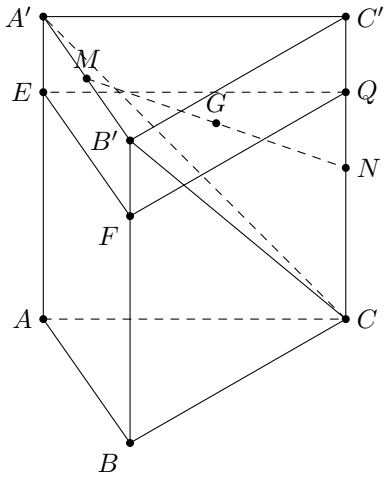
Gọi M, N lần lượt là trung điểm $A'B'$, CC'; G là trung điểm MN. Suy ra G là trọng tâm tứ diện $CA'B'C'$.

(P) qua G và cắt các cạnh AA', BB', CC' lần lượt tại E, F, Q thì $AE = BF = CQ = \dfrac{3}{4}AA'$.

Thể tích khối lăng trụ là $V = AA' \cdot S_{ABC}$.

Thể tích tứ diện $CEFQ$ là $V_{CEFQ} = \dfrac{1}{3}CQ \cdot S_{EFQ} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot AA' \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{4}V$.

Vậy $\dfrac{V_{CEFQ}}{V} = \dfrac{1}{4} = 0,25$.



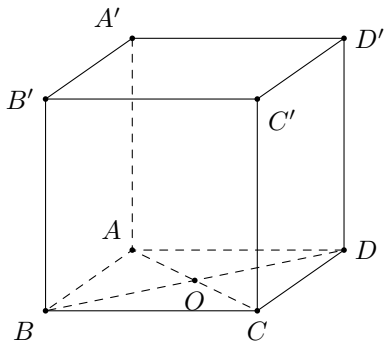
Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là một hình thoi. Biết diện tích của hai mặt chéo $ACC'A'$, $BDD'B'$ lần lượt là S_1, S_2 và góc $\widehat{BA'D} = 90^\circ$. Tính thể tích V của khối hộp đã cho.

(A) $V = \dfrac{S_1S_2}{\sqrt[4]{4\left(S_2^2-S_1^2\right)}}$. (B) $V = \dfrac{S_1S_2}{\sqrt[4]{2\left(S_1^2-S_2^2\right)}}$. (C) $V = \dfrac{S_1S_2}{\sqrt[4]{2\left(S_2^2-S_1^2\right)}}$. (D) $V = \dfrac{S_1S_2}{\sqrt[4]{4\left(S_1^2-S_2^2\right)}}$.

Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$. Vì $S_1 = AC \cdot AA'$; $S_2 = BD \cdot AA'$ và $\widehat{BA'D} = 90^\circ \Rightarrow OA' = \dfrac{BD}{2}$.



Tam giác $A'AO$ vuông tại A có

$OA'^2 = AA'^2 + OA^2 = AA'^2 + \dfrac{AC^2}{4} \Rightarrow \dfrac{BD^2}{4} = AA'^2 + \dfrac{AC^2}{4}$

hay $\dfrac{S_2^2}{4AA'^2} = AA'^2 + \dfrac{S_1^2}{4AA'^2} \Rightarrow AA' = \dfrac{\sqrt[4]{S_2^2 - S_1^2}}{4}$.

Do đó $V = S_{ABCD} \cdot AA' = \dfrac{1}{2} AC \cdot BD \cdot AA' = \dfrac{S_1 S_2}{2AA'} = \dfrac{S_1 S_2}{\sqrt[4]{4 \cdot (S_2^2 - S_1^2)}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, các tam giác SAB và SAD là những tam giác vuông tại A. Mặt phẳng (P) qua A vuông góc với cạnh bên SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại các điểm M, N, P. Biết $SC = 8a$, $\widehat{ASC} = 60^\circ$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp đa diện $ABCDMNP$?

(A) $V = 6\pi a^3$. (B) $V = 24\pi a^3$. (C) $V = 32\pi a^3\sqrt{3}$. (D) $V = 18\pi a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(AMNP) \perp SC \Rightarrow \widehat{ANC} = 90^\circ$ (1),

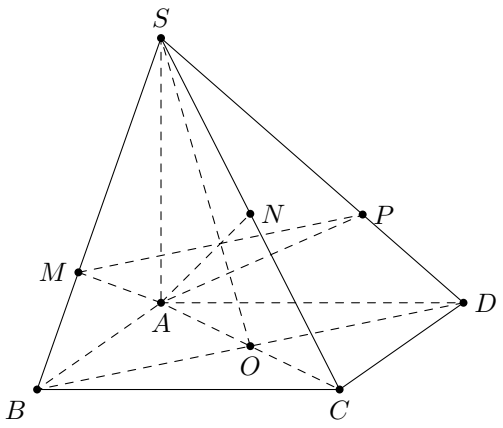
$SC \perp AM$.

Do $(SAB) \perp BC \Rightarrow BC \perp AM \Rightarrow AM \perp (SBC)$

$\Rightarrow AM \perp MC \Rightarrow \widehat{AMC} = 90^\circ$. (2)

Tương tự ta có $\widehat{APC} = 90^\circ$. (3)

Do $ABCD$ là hình vuông nên từ (1), (2), (3) suy ra AC là đường kính mặt cầu ngoại tiếp đa diện $ABCDMNP$.



Xét tam giác SAC có $\sin 60^\circ = \dfrac{AC}{SC} \Rightarrow AC = 4a\sqrt{3}$.

Suy ra $R = 2a\sqrt{3} \Rightarrow V = \dfrac{4}{3}\pi \left(2\sqrt{3}a\right)^3 = 32\pi a^3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. Thể tích khối lăng trụ bằng

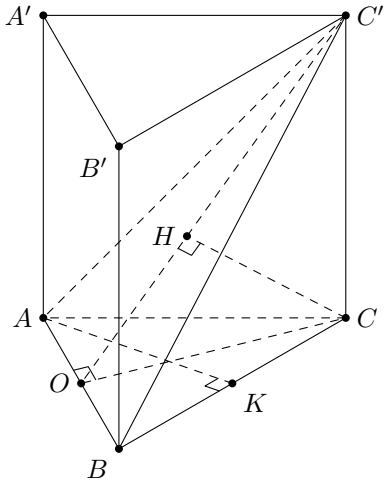
(A) $\dfrac{9a^3\sqrt{15}}{20}$. (B) $\dfrac{3a^3\sqrt{15}}{20}$. (C) $\dfrac{3a^3\sqrt{15}}{10}$. (D) $\dfrac{9a^3\sqrt{15}}{10}$.

Lời giải.

Gọi $2x$ là cạnh của tam giác đều.

Gọi O, K lần lượt là trung điểm của AB, BC.

Kẻ $CK \perp C'O$.



Ta có $CH \perp C'O$ và $CH \perp AB$ nên $CH \perp (ABC')$ và $\mathrm{d}(C,(ABC')) = CH = a$.

Suy ra $\dfrac{1}{CH^2} = \dfrac{1}{CC'^2} + \dfrac{1}{CO^2}$ hay $\dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{CC'^2} + \dfrac{1}{3x^2}$. (1)

Ta có hình chiếu vuông góc của tam giác ABC' lên mặt phẳng $(BCC'B')$ là tam giác KBC'.

Do đó $\dfrac{S_{\triangle KBC'}}{S_{\triangle ABC'}} = \cos\alpha = \dfrac{1}{3}$.

Ta có $S_{\triangle KBC'} = \dfrac{1}{2} \cdot x \cdot CC'$.

và $S_{\triangle ABC'} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot C'O = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot \sqrt{CC'^2 + CO^2} = x \cdot \sqrt{CC'^2 + 3x^2}$.

Do đó $\dfrac{1}{2} \cdot x \cdot CC' = \dfrac{1}{3} x \cdot \sqrt{CC'^2 + 3x^2} \Leftrightarrow 3CC' = 2\sqrt{CC'^2 + 3x^2} \Leftrightarrow 5CC'^2 = 12x^2$. (2)

Từ (1), (2) ta có $\dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{CC'^2} + \dfrac{4}{5CC'^2} \Leftrightarrow 5CC'^2 = 9a^2 \Leftrightarrow CC' = \dfrac{3a}{\sqrt{5}}$. Suy ra $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V = S_{ABC} \cdot CC' = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{3a}{\sqrt{5}} = \dfrac{9a^3\sqrt{15}}{20}$.

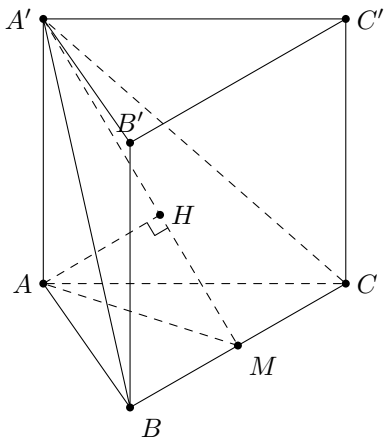
Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A với $BC = 2a\sqrt{2}$. Biết khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\dfrac{4a}{3}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

(A) $V = 4a^3$. (B) $V = \dfrac{8a^3}{3}$. (C) $V = 8a^3$. (D) $V = \dfrac{4a^3}{3}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm cạnh BC, H là hình chiếu vuông góc của A lên $A'M$.



Ta có $\mathrm{d}(C',(A'BC)) = \mathrm{d}(A,(A'BC)) = AH$.

Mà $AH = \dfrac{AA' \cdot AM}{\sqrt{A'A^2 + AM^2}} = \dfrac{4a}{3} \Leftrightarrow \dfrac{AA' \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{A'A^2 + 2a^2}} = \dfrac{4a}{3}$

$\Leftrightarrow AA' = 4a$.

Vậy $V = AA' \cdot \dfrac{1}{2} AB \cdot AC = 4a \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a = 8a^3$.

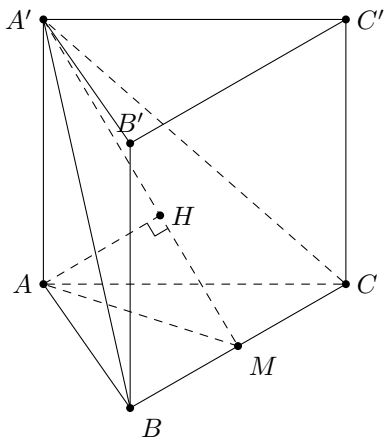
Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng 3. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC). Tìm $\cos\alpha$ khi thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ nhỏ nhất.

(A) $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$. (B) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (C) $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. (D) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC, kẻ $AH \perp A'M \Rightarrow AH \perp (A'BC) \Rightarrow AH = \mathrm{d}\,(A,(A'BC)) = a$ và góc giữa $(A'BC)$ với (ABC) là $\widehat{A'MA} = \alpha$.



Ta có $AM = \dfrac{AH}{\sin\alpha} = \dfrac{3}{\sin\alpha}, BC = 2AM = \dfrac{6}{\sin\alpha}$,
$AA' = AM\tan\alpha = \dfrac{3}{\cos\alpha}$.

Khi đó $V = S\cdot h = \dfrac{1}{2}\cdot AM\cdot BC\cdot AA'$

$$= \frac{27}{\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{27}{(1-\cos^2\alpha)\cdot\cos\alpha}$$
$$= \frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{2\cos^2\alpha\,(1-\cos^2\alpha)\,(1-\cos^2\alpha)}}$$
$$\geq \frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{2\cos^2\alpha+1-\cos^2\alpha+1-\cos^2\alpha}{3}\right)^3}}$$
$$= \frac{81\sqrt{3}}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B)$ bằng α với $\cos\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. (B) $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. (C) $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. (D) $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải.

Gọi K, J lần lượt là trung điểm của AB, BC.

Gọi x là độ dài cạnh AB.

$AJ = CK = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $CH \perp (ABC') \Rightarrow \mathrm{d}\,(C, (ABC')) = CH = a$.

Mặt khác $AJ \perp (BCC'B)$.

Nên $((ABC'), (BCC'B)) = \left(\widehat{CH, AJ}\right) = \alpha = \left(\widehat{CH, AG}\right) = \left(\widehat{MG, AG}\right)$,

$(\cos\alpha = \sin\varphi)$.

Ta có $\sin\varphi = \dfrac{MG}{AG} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow MG = \dfrac{AG}{2\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{AJ}{\sqrt{3}\cdot 2} = \dfrac{x\sqrt{3}}{2\cdot 3\sqrt{3}} = \dfrac{x}{6} \cdot \dfrac{HC}{3} = \dfrac{x}{6}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a}{3} = \dfrac{x}{6} \Leftrightarrow x = 2a$.

Mà $\mathrm{d}\,(C, (ABC')) = CH = a$

$\Rightarrow CC' = \dfrac{CH \cdot CK}{\sqrt{CK^2 - CH^2}} = \dfrac{a \cdot \dfrac{2a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 - a^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $V = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot CC' = \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{6}$, $AD = \sqrt{3}$, $A'C = 3$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$ vuông góc với mặt đáy. Biết hai mặt phẳng $(AA'C'C)$, $(AA'B'B)$ tạo với nhau góc α thỏa mãn $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$. Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng?

(A) $V = 6$. (B) $V = 8$. (C) $V = 12$. (D) $V = 10$.

Lời giải.

Từ B kẻ $BI \perp AC \Rightarrow BI \perp (AA'C'C)$.

Từ I kẻ $IH \perp AA'$ suy ra

$$((AA'C'C), (AA'B'B)) = \widehat{BHI}.$$

Theo giải thiết ta có

$$AC = 3 \Rightarrow BI = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \sqrt{2}.$$

Xét tam giác vuông BIH có

$$\tan\widehat{BHI} = \frac{BI}{IH} \Leftrightarrow IH = \frac{BI}{\tan\widehat{BHI}} \Leftrightarrow IH = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Xét tam giác vuông ABC có $AI \cdot AC = AB^2$

$\Rightarrow AI = \dfrac{AB^2}{AC} = 2$.

Gọi M là trung điểm cả AA', do tam giác $AA'C$ cân tại C nên $CM \perp AA' \Rightarrow CM \parallel IH$.
Do $\dfrac{AI}{AC} = \dfrac{AH}{AM} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{AH}{AM} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{AH}{AA'} = \dfrac{1}{3}$.
Trong tam giác vuông AHI kẻ đường cao HK ta có $HK = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$ suy ra chiều cao của lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là $h = 3HK = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.
Vậy thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB \cdot AD \cdot h = \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3} = 8.$$

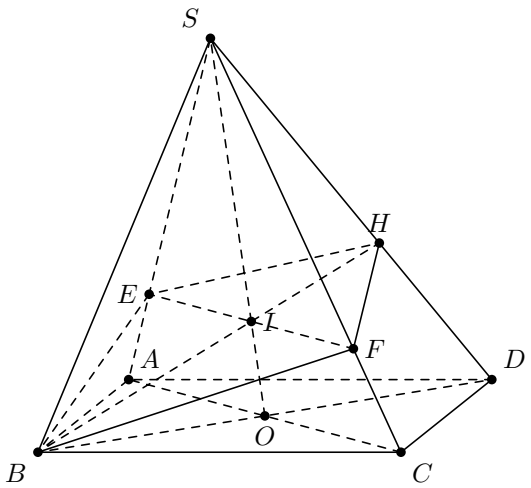
Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi H là điểm trên cạnh SD sao cho $5SH = 3SD$, mặt phẳng (α) qua B, H và song song với đường thẳng AC cắt hai cạnh SA, SC lần lượt tại E, F. Tính tỉ số thể tích $\dfrac{V_{C.BEHF}}{V_{S.ABCD}}$.

(A) $\dfrac{3}{20}$. (B) $\dfrac{1}{7}$. (C) $\dfrac{6}{35}$. (D) $\dfrac{1}{6}$.

Lời giải.

Đặt $V_{S.ABCD} = V$.
Trong tam giác SOD ta có $\dfrac{IS}{IO} \cdot \dfrac{BO}{BD} \cdot \dfrac{HD}{HS} = 1$
$\Rightarrow \dfrac{IS}{IO} = 3 \Rightarrow \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{SE}{SA} = \dfrac{SF}{SC} = \dfrac{3}{4}$.
Ta có
$\dfrac{V_{S.HBC}}{V_{S.DBC}} = \dfrac{SH}{SD} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow V_{S.HBC} = \dfrac{3V}{10}$.
Mặt khác
$\dfrac{V_{C.FHB}}{V_{C.SHB}} = \dfrac{CF}{CS} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow V_{C.FHB} = \dfrac{3V}{40}$.
Mà $V_{C.BEHF} = 2V_{C.FHB} = \dfrac{6V}{40} \Rightarrow \dfrac{V_{C.BEHF}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{3}{20}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Độ dài cạnh bên bằng $4a$. Mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với đáy và $\widehat{B'BC} = 30°$. Thể tích khối chóp $A \cdot CC'B'$ bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của B' trên BC. Từ giả thiết suy ra
$B'H \perp (ABC)$ và $S_{\triangle BB'C} = \dfrac{1}{2}BB' \cdot BC \cdot \sin \widehat{B'BC} = \dfrac{1}{2} \cdot 4a \cdot a \cdot \sin 30° = a^2$.

Mặt khác $S_{\triangle BB'C} = \dfrac{1}{2}B'H \cdot BC$,

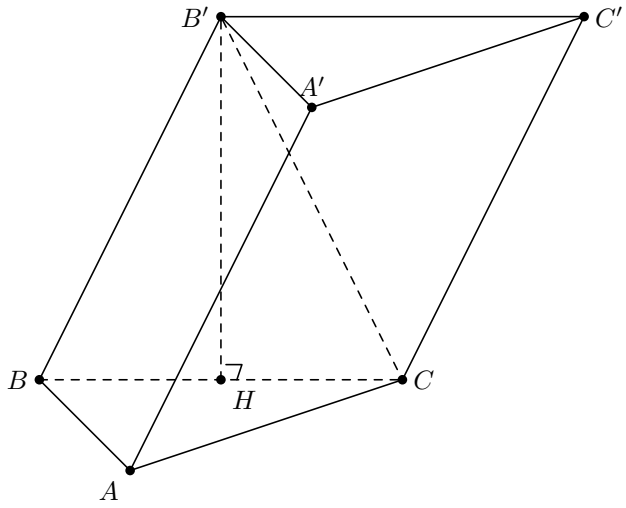
suy ra $B'H = \dfrac{2S_{\triangle BB'C}}{BC} = \dfrac{2a^2}{a} = 2a$.

Ta có

$V_{ABC.A'B'C'} = B'H \cdot S_{\triangle ABC} = 2a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó $V_{A\cdot CC'B'} = \dfrac{1}{2}V_{A.CC'B'B} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}$

$= \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có dáy ABC là tam giác vuông tại A. cạnh $BC = 2a$ và $ABC = 60°$. Biết tứ giác $BCC'B'$ là hình thoi có $\widehat{B'BC}$ nhọn. Biết $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC) và $(ABB'A')$ tạo với (ABC) góc $45°$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

(A) $\dfrac{a^3}{3\sqrt{7}}$. (B) $\dfrac{a^3}{\sqrt{7}}$. (C) $\dfrac{3a^3}{\sqrt{7}}$. (D) $\dfrac{6a^3}{\sqrt{7}}$.

Lời giải.

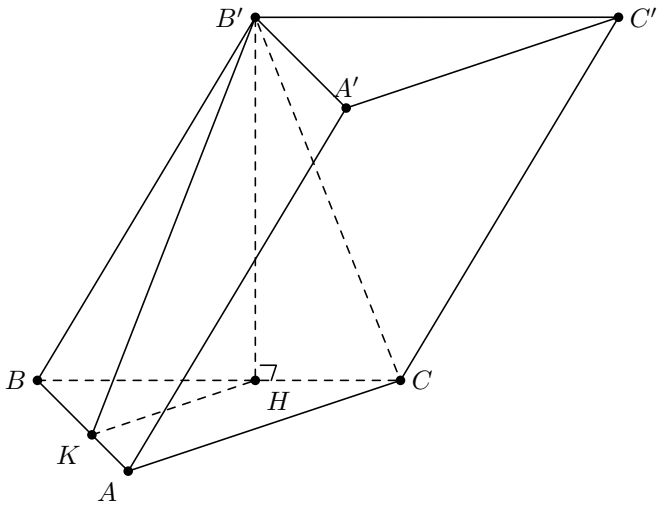
Do ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $BC = 2a$ và $\widehat{ABC} = 60°$ nên $AB = a, AC = a\sqrt{3}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B' lên $BC \Rightarrow H$ thuộc đoạn BC (do $\widehat{B'BC}$ nhọn) $\Rightarrow B'H \perp (ABC)$ (do $(BCC'B')$ vuông góc với với (ABC)).

Kẻ HK song song AC với $K \in AB$, suy ra $HK \perp AB$ (do ABC là tam giác vuông tại A).

Khi đó $((ABB'A'), (ABC)) = \widehat{B'KH} = 45°$

nên $B'H = KH$. (1)



Ta có $\Delta BB'H$ vuông tại $H \Rightarrow BH = \sqrt{4a^2 - B'H^2}$. (2)

Mặt khác HK song song $AC \Rightarrow \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{HK}{AC} \Rightarrow BH = \dfrac{HK \cdot 2a}{a\sqrt{3}}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\sqrt{4a^2 - B'H^2} = \dfrac{B'H \cdot 2a}{a\sqrt{3}} \Rightarrow B'H = a\sqrt{\dfrac{12}{7}}$.

Vậy $V_{ABC,A'BC'} = S_{ABC} \cdot B'H = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC \cdot B'H = \dfrac{3a^3}{\sqrt{7}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $A, \widehat{ABC} = 30°$. Điểm M là trung điểm cạnh AB, tam giác $MA'C$ đều cạnh $2a\sqrt{3}$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

(A) $\dfrac{72\sqrt{2}a^3}{7}$. (B) $\dfrac{24\sqrt{3}a^3}{7}$. (C) $\dfrac{72\sqrt{3}a^3}{7}$. (D) $\dfrac{24\sqrt{2}a^3}{7}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của MC. Ta có $\begin{cases} A'H \perp MC \\ (A'MC) \perp (ABC) \\ (A'MC) \cap (ABC) = MC \end{cases} \Rightarrow A'H \perp (ABC)$.

Do tam giác $MA'C$ đều cạnh $2a\sqrt{3}$ nên $MC = 2a\sqrt{3}$ và $A'H = 3a$.

Đặt $AC = x > 0$, tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 30^\circ \Rightarrow BC = 2x; AB = x\sqrt{3}$.

Áp dụng công thức tính độ dài trung tuyến ta có

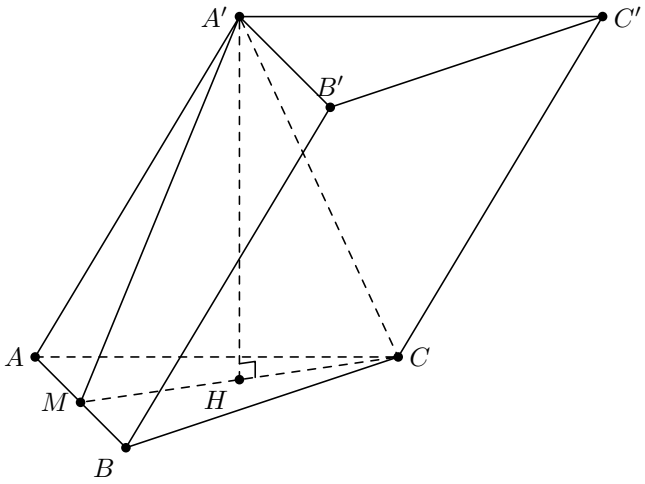
$$CM^2 = \frac{CA^2 + CB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 12a^2 = \frac{x^2 + 4x^2}{2} - \frac{3x^2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{4a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

Suy ra

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{12a}{\sqrt{7}} \cdot \frac{4a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{24a^2\sqrt{3}}{7}.$$

Do đó $V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{ABC} = \dfrac{72a^3\sqrt{3}}{7}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a\sqrt{3}$. Gọi I là giao điểm của AB' và $A'B$. Biết khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

(A) $V = 3a^3$. (B) $V = a^3$. (C) $V = \dfrac{3a^3}{4}$. (D) $V = \dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải.

Do $ABC.A'B'C'$ là khối lăng trụ đều nên $\triangle ABC$ là tam giác đều và $AA' = a\sqrt{3}$ là chiều cao của khối này.

Ta có $\dfrac{\mathrm{d}(A;(BCC'B'))}{\mathrm{d}(I;(BCC'B'))} = \dfrac{AB'}{IB'} = 2$,

suy ra $\mathrm{d}(A;(BCC'B')) = 2\mathrm{d}(I;(BCC'B')) = 2\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

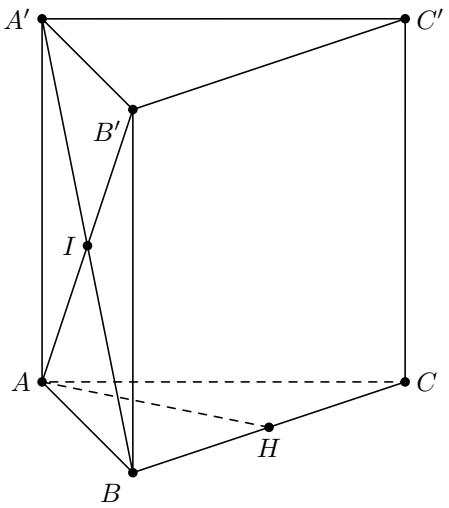
Gọi H là hình chiếu của A trên BC thì do tam giác ABC đều và $(ABC) \perp (BCC'B')$ nên H cũng là hình chiếu của A trên $(BCC'B')$ và H là trung điểm của BC.

Ta có $AH = \mathrm{d}(A;(BCC'B')) = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow BC = \dfrac{2AH}{\sqrt{3}} = 2a \Rightarrow S_{ABC} = a^2\sqrt{3}$.

Vậy thể tích của khối lăng trụ đều đã cho là

$$V = S_{ABC} \cdot AA' = a^2\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} = 3a^3.$$



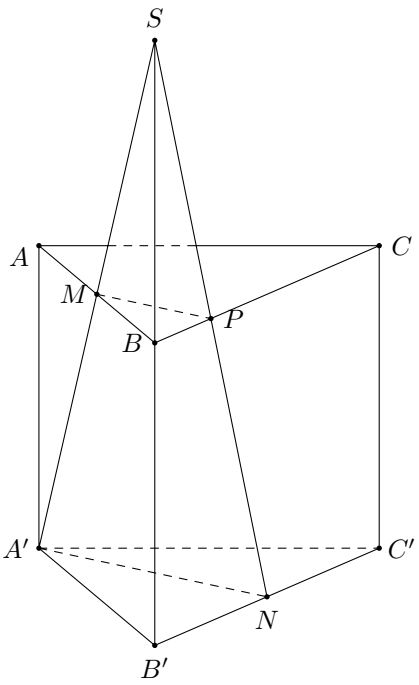
Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và $B'C'$. Mặt phẳng $(A'MN)$ cắt cạnh BC tại P. Tính thể tích của khối đa diện $MBP.A'B'N$

(A) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{24}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. (C) $\dfrac{7\sqrt{3}a^3}{96}$. (D) $\dfrac{7\sqrt{3}a^3}{32}$.

Lời giải.

Gọi S là giao điểm của $A'M$ và BB', khi đó P là giao điểm SN và BC.



Ta có $\dfrac{V_{SMBP}}{V_{SA'B'N}} = \dfrac{SM}{SA'} \cdot \dfrac{SB}{SB'} \cdot \dfrac{SP}{SN} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow V_{MBP.A'B'N} = \dfrac{7}{8} V_{SA'B'N} = \dfrac{7}{8}$.

$$\begin{aligned} V_{SA'B'N} &= \frac{1}{3} SB' \cdot S_{\Delta A'B'N} = \frac{1}{3} SB' \cdot \frac{1}{2} A'B' \cdot B'N \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{6} \cdot 2a \cdot a \cdot \frac{a}{2} \sin 60^\circ = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_{MBP.A'B'N} = \frac{7}{8} V_{SA'B'N} = \frac{7a^3\sqrt{3}}{96}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và $B'C'$. Mặt phẳng $(A'MN)$ cắt cạnh BC tại P Thể tích khối đa diện $MBP.A'B'N$ bằng.

(A) $\dfrac{7\sqrt{3}a^3}{68}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{32}$. (C) $\dfrac{7\sqrt{3}a^3}{96}$. (D) $\dfrac{7\sqrt{3}a^3}{32}$.

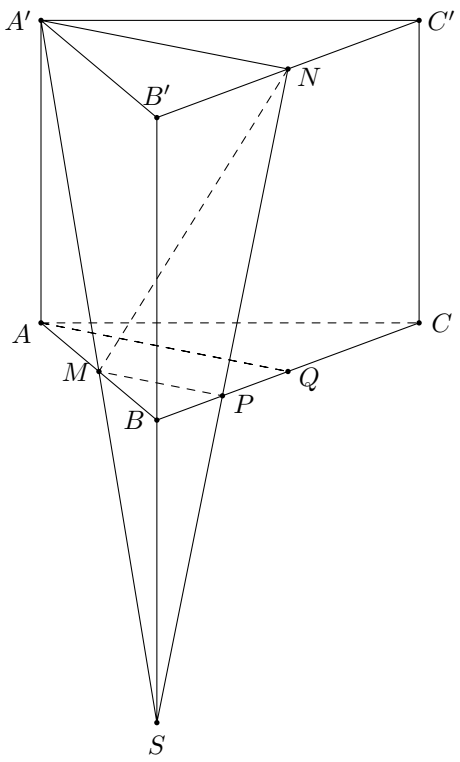
Lời giải.

Gọi Q là trung điểm của BC. Suy ra $AQ \parallel A'N \Rightarrow MP \parallel AQ \Rightarrow P$ là trung điểm của BQ.

Ta có BB', $A'M$, NP đồng quy tại S và B là trung điểm của $B'S \Rightarrow SB' = 2a$.

$S_{A'B'N} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8} \Rightarrow V_{S.A'B'N} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

$V_{SMNP} = \dfrac{1}{8}V_{SA'B'N} \Rightarrow V_{MBPA'B'N} = \dfrac{7}{8}V_{SA'B'N} = \dfrac{7\sqrt{3}a^3}{96}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a Các cạnh bên tạo với đáy một góc $60°$. Đỉnh A' cách đều các đỉnh A, B, C, D. Trong các số dưới đây, số nào ghi giá trị thể tích của hình lăng trụ nói trên?

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{9}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.Từ giả thiết A' cách đều các đỉnh A, B, C, D ta suy ra hình chiếu của A' trên mặt phẳng $ABCD$ là O hay $A'O$ là đường cao của khối lăng trụ.

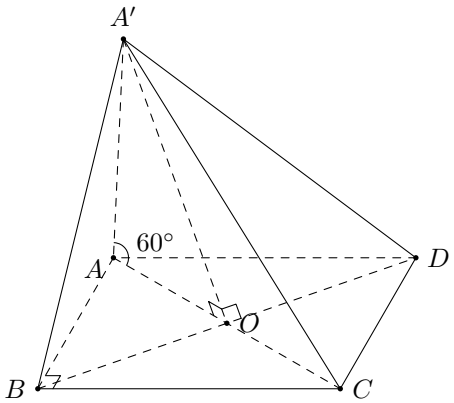
Trong tam giác $A'OA$ vuông tại A và $\widehat{A'OA} = 60°$, ta có:

$A'O = OA \cdot \tan 60° = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích đáy $ABCD$là $S_{ABCD} = a^2$.

Thể tích của khối lăng trụ là $V = B \cdot h = S_{ABCD} \cdot A'O = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm cạnh BC. Góc giữa BB' và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. (B) $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{8}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (D) $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm cạnh BC. Theo đề ra: $A'H \perp (ABC)$.

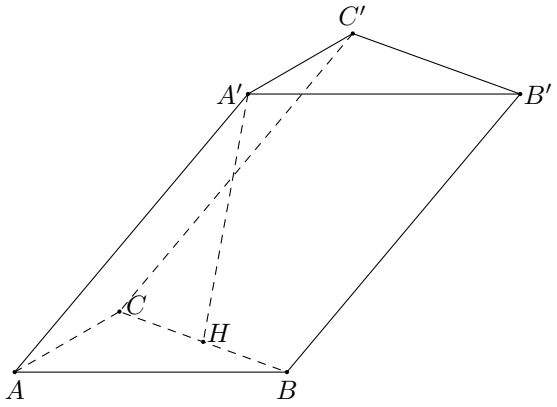
$AH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $S_{\triangle ABC} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Ta có: $\begin{cases} \widehat{(AA', (ABC))} = \widehat{A'AH} \\ \widehat{(AA', (ABC))} = \widehat{(BB', (ABC))} = 60^\circ \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{A'AH} = 60^\circ$.

Xét $\Delta A'AH$ vuông tạiH: $A'H = AH \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{3}{2}a$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh BC. Biết góc giữa hai mặt phẳng (ABA') và (ABC) bằng 45°. Tính thể tích V của khối chóp $A.BCC'B'$

(A) $\dfrac{3}{2}a^3$. (B) a^3. (C) $a^3\sqrt{3}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $V_{ABC.A'B'C'} = V_{A.A'B'C'} + V_{A.BCC'B'} = V_{A'.ABC} + V_{A'.BCC'B'}$.

Mà $V_{A'.BCC'B'} = V_{A.BCC'B'} \Rightarrow V_{A.A'B'C'} = V_{A'.ABC}$.

Gọi M là trung điểm của BC, I là trung điểm của AB và K là trung điểm của IB. Khi đó: $A'M \perp (ABC)$.

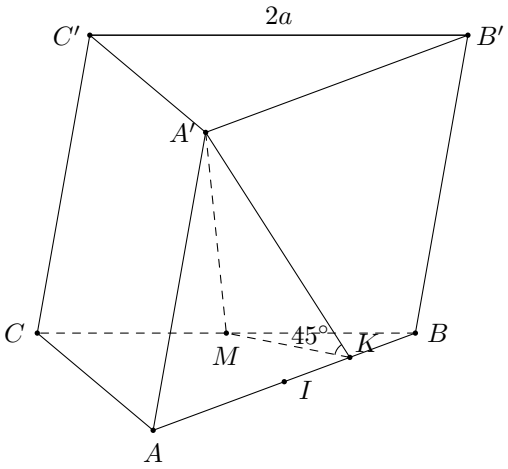
Mặt khác: $\left.\begin{matrix} MK \parallel CI \\ CI \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow MK \perp AB$.

$MK \perp AB$, $A'M \perp AB \Rightarrow A'K \perp AB$.

Góc giữa hai mặt phẳng (ABA') và (ABC) chính là góc giữa $A'K$ và KM và bằng $\widehat{A'KM} = 45^\circ$ nên tam giác $A'KM$ vuông cân tại M.

Trong tam giác ABC có $MK = \dfrac{1}{2}CI = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông cân $A'KM$ có $A'M = MK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $V_{A'.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot V_{ABC.A'B'C'}$.



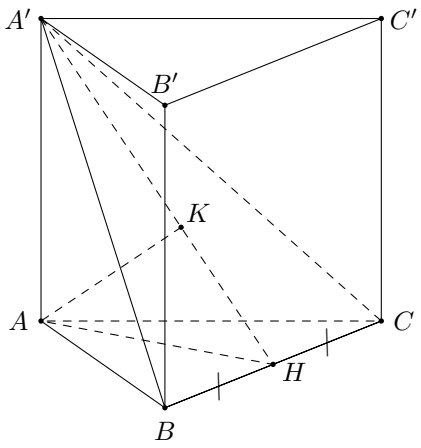
$\Rightarrow V_{A'.BCC'B'} = V_{ABC.A'B'C'} - \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{2}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot A'M = \dfrac{2}{3} \cdot a^2\sqrt{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a^3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng 3 và góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $60°$. Tính thể tích V khối lăng trụ đã cho?

(A) $V = 24\sqrt{3}$. (B) $V = 8\sqrt{3}$. (C) $V = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. (D) $V = \dfrac{8\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải.



Do lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đều nên lăng trụ đã cho là lăng trụ đứng.

Gọi H là trung điểm của BC, K là hình chiếu của H lên $A'H$.

Ta có $\left.\begin{array}{l} BC \perp AH \\ BC \perp AA' \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow (ABC) \perp (AA'H)$.

Mà $AK \perp A'H \Rightarrow AK \perp (A'BC) \Rightarrow d(A,(A'BC)) = AK = 3$.

Ta có góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là góc giữa AH và $A'H$.

Suy ra $\widehat{A'HA} = 60°$.

Ta có $AH = \dfrac{AK}{\sin 60^0} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} A'A = AH.\tan 60^0 = 6 \\ AB = \dfrac{2.2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4. \end{cases}$

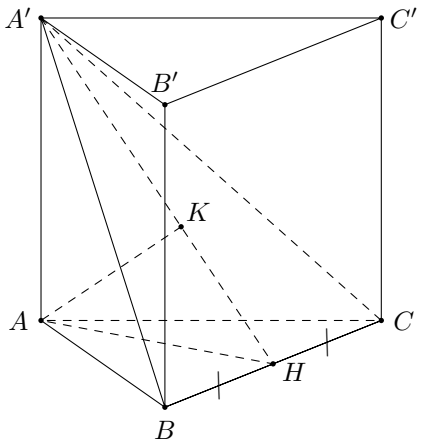
Thể tích khối lăng trụ là $V = S_{ABC} \cdot AA' = 4\sqrt{3} \cdot 6 = 24\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng 3 và góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $60°$. Tính thể tích V khối lăng trụ đã cho?

(A) $V = 24\sqrt{3}$. (B) $V = 8\sqrt{3}$. (C) $V = 72$. (D) $V = 24$.

Lời giải.



Gọi H hình chiếu của A lên BC, K là hình chiếu của H lên $A'H$.

Ta có $\left.\begin{array}{l} BC \perp AH \\ BC \perp AA' \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow (ABC) \perp (AA'H)$.

Mà $AK \perp A'H \Rightarrow AK \perp (A'BC) \Rightarrow d(A,(A'BC)) = AK = 3$.

Ta có góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là góc giữa AH và $A'H$.

Suy ra $\widehat{A'HA} = 60°$.

Ta có $AH = \dfrac{AK}{\sin 60°} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} A'A = AH.\tan 60° = 6 \\ BC = 2AH = 4\sqrt{3};\ AB = 2\sqrt{6} \end{cases}$.

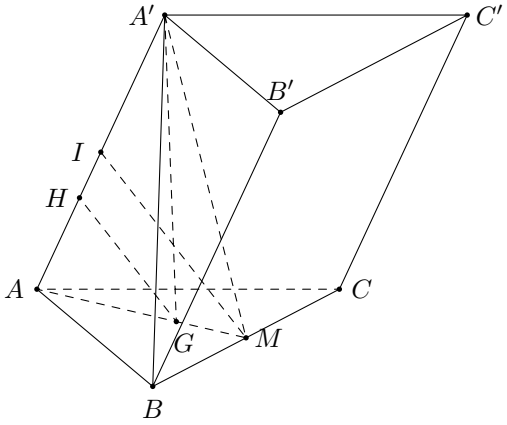
Thể tích khối lăng trụ là $V = S_{ABC} \cdot AA' = \dfrac{1}{2} \cdot \left(2\sqrt{6}\right)^2 \cdot 6 = 72$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

(A) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (B) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. (D) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.



Ta có $A'G\perp(ABC)$ nên $A'G\perp BC$; $BC\perp AM\Rightarrow BC\perp(MAA')$.

Kẻ $MI\perp AA'$; $BC\perp IM$ nên $d(AA';BC)=IM=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Kẻ $GH\perp AA'$. Ta có $\dfrac{AG}{AM}=\dfrac{GH}{IM}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow GH=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

$\dfrac{1}{HG^2}=\dfrac{1}{A'G^2}+\dfrac{1}{AG^2}\Leftrightarrow A'G=\dfrac{AG\cdot HG}{\sqrt{AG^2-HG^2}}=\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{\frac{a^2}{3}-\frac{a^2}{12}}}=\dfrac{a}{3}$.

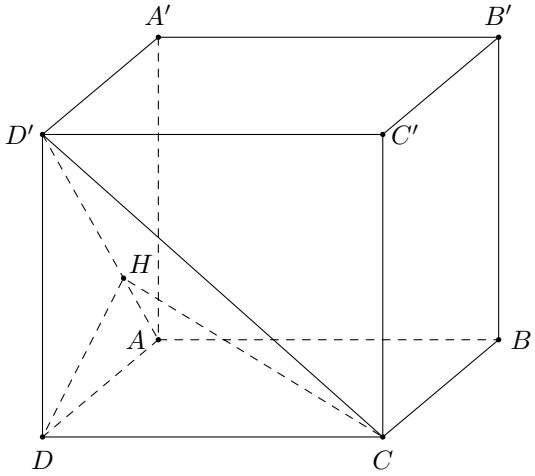
$V_{ABC.A'B'C'}=A'G\cdot S_{\triangle ABC}=\dfrac{a}{3}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$; $AD=a\sqrt{3}$, góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và mặt phẳng (ACD') bằng 60°. Tính thể tích khối hộp chữ nhật đã cho.

(A) $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. (B) $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. (C) $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. (D) $V=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu của D lên AD'.

Ta có $AD'\perp(DHC)\Rightarrow((ADD'A'),(ACD'))=\widehat{DHC}=60^\circ$.

Có $DH=CD\cdot\cot 60^\circ=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $\dfrac{1}{DH^2}=\dfrac{1}{DD'^2}+\dfrac{1}{DA^2}\Rightarrow DD'=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Thể tích khối hộp là $V=S_{ABCD}\cdot DD'=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$.

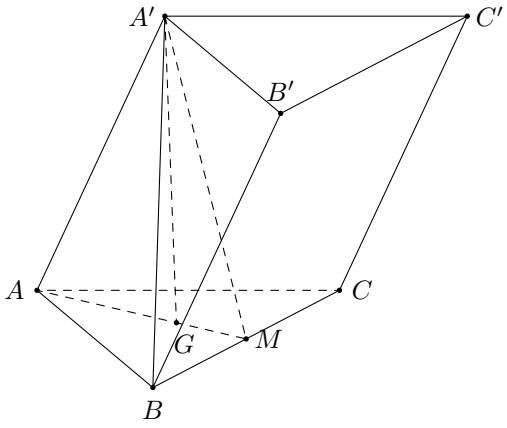
Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác đều cạnh x. Hình chiếu của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm $\triangle ABC$, cạnh $AA'=2x$. Khi đó thể tích khối lăng trụ là

(A) $\dfrac{x^3\sqrt{11}}{12}$. (B) $\dfrac{x^3\sqrt{39}}{8}$. (C) $\dfrac{x^3\sqrt{3}}{2}$. (D) $\dfrac{x^3\sqrt{11}}{4}$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC vì $A'G \perp (ABC)$ và $\triangle ABC$ là tam giác đều nên $A'ABC$ là hình chóp đều.



Ta có $AM = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$, $AG = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác $AA'G$ vuông tại G ta có

$$A'G = \sqrt{AA'^2 - AG^2} = \sqrt{(2x)^2 - \left(\frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{x\sqrt{33}}{3}.$$

Diện tích tam giác ABC bằng $S_{\triangle ABC} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích của khối lăng trụ là

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot A'G = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{x\sqrt{33}}{3} = \frac{x^3\sqrt{11}}{4}.$$

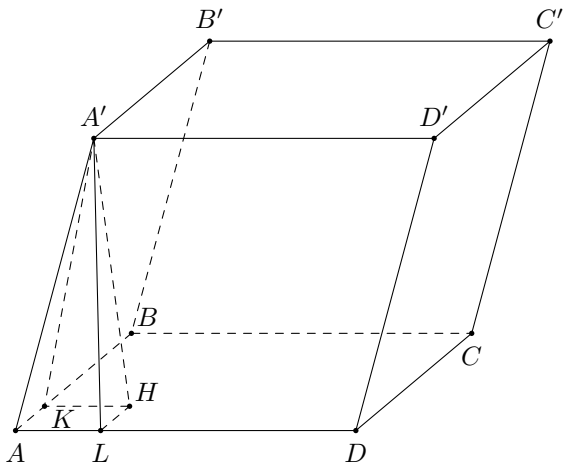
Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{3}$, $AD = \sqrt{7}$ và cạnh bên bằng 1. Hai mặt phẳng $(ABB'A)$ và $(ADD'A')$ lần lượt tạo với đáy các góc $45°$ và $60°$. Thể tích khối hộp bằng

(A) $3\sqrt{3}$. (B) $7\sqrt{7}$. (C) 7. (D) 3.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của A' trên $(ABCD)$ và K, L là hình chiếu của H trên AB, AD.



Ta có các góc $\widehat{A'KH} = 45°$ và $\widehat{A'LH} = 60°$.

Đặt $A'H = x$ suy ra $HK = x; HL = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$.

Do đó $AA'^2 = AH^2 + A'H^2 = x^2 + \dfrac{x^2}{3} + x^2$

$\Rightarrow \dfrac{7x^2}{3} = 1 \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

Thể tích khối hộp bằng

$$V = B \cdot h = AB \cdot AD \cdot A'H = \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{\frac{3}{7}} = 3.$$

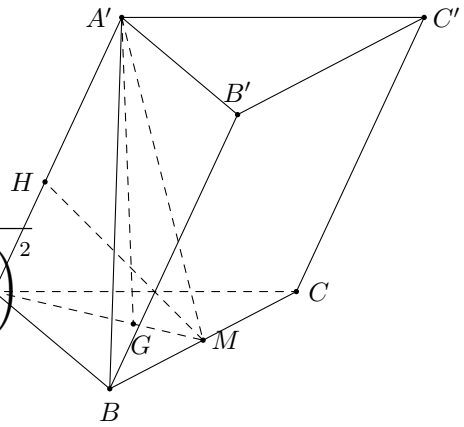
Chọn đáp án (D) □

Câu 32. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC thì $BC \perp (AA'M)$.
Gọi MH là đường cao của tam giác $A'AM$ thì $MH \perp A'A$ và $HM \perp BC$ nên HM là khoảng cách AA' và BC.
Ta có $\triangle A'GA$ đồng dạng với $\triangle MHA$ nên suy ra



$$\begin{aligned} A'A \cdot HM = A'G \cdot AM &\Leftrightarrow \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot A'A = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{A'A^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} \\ &\Leftrightarrow A'A^2 = 4\left(A'A^2 - \frac{a^2}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow 3A'A^2 = \frac{4a^2}{3} \\ &\Leftrightarrow A'A^2 = \frac{4a^2}{9} \\ &\Leftrightarrow A'A = \frac{2a}{3}. \end{aligned}$$

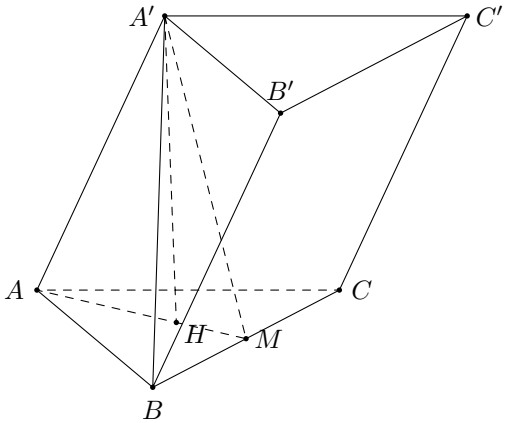
Đường cao của lăng trụ là $A'G = \sqrt{\dfrac{4a^2}{9} - \dfrac{3a^2}{9}} = \dfrac{a}{3}$.
Thể tích $V = \dfrac{a}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $3a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Cạnh AA' hợp với đáy một góc $45°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ tính theo a bằng

(A) $\dfrac{9a^3}{4}$. (B) $\dfrac{27a^3}{4}$. (C) $\dfrac{3a^3}{4}$. (D) $\dfrac{27a^3}{6}$.

Lời giải.

Gọi AI là đường cao, H là tâm của tam giác ABC suy ra $A'H \perp (ABC)$.



Vì $\begin{cases} AA' \cap (ABC) = A \\ A'H \perp (ABC) \end{cases}$ nên góc giữa AA' và (ABC) là $\widehat{A'AH}$ và $\widehat{A'AH} = 45°$.
Ta có $AI = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$, $AH = \dfrac{2}{3}AI = a\sqrt{3}$, $S_{ABC} = \dfrac{(3a)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{9a^2\sqrt{3}}{4}$.
Lại có $A'H = AH \cdot \tan 45° = AH = a\sqrt{3}$.
Thể tích của lăng trụ là $V = A'H \cdot S_{ABC} = a\sqrt{3} \cdot \dfrac{9a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{27a^3}{4}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\dfrac{AM}{AA'}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{BN}{BB'}=\dfrac{2}{3}$ và mặt phẳng (MNP) chia lăng trụ thành hai phần có thể tích bằng nhau. Khi đó tỉ số $\dfrac{CP}{CC'}$ là

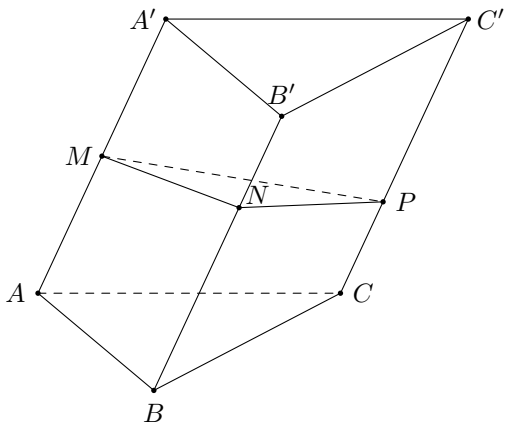
(A) $\dfrac{1}{4}$. (B) $\dfrac{5}{12}$. (C) $\dfrac{1}{3}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\dfrac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{AM}{AA'}+\dfrac{BN}{BB'}+\dfrac{CP}{CC'}\right)$.

Ta có $V_{ABC.MNP}=V_{ABC.A'B'C'}$ nên

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}\left(\frac{AM}{AA'}+\frac{BN}{BB'}+\frac{CP}{CC'}\right)=\frac{1}{2}\\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{3}\left(\frac{\frac{1}{2}AA'}{AA'}+\frac{\frac{2}{3}BB'}{BB'}+\frac{CP}{CC'}\right)=\frac{1}{2}\\ \Leftrightarrow\ &\frac{CP}{CC'}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$



Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$, góc giữa mặt phẳng (A_1BC) và đáy bằng 30°, diện tích tam giác A_1BC bằng 8. Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho.

(A) $V=27\sqrt{3}$. (B) $V=24\sqrt{3}$. (C) $V=9\sqrt{3}$. (D) $V=8\sqrt{3}$.

Lời giải.

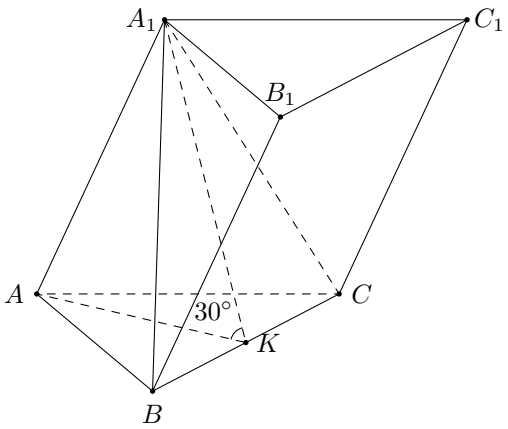
Đặt $BC=x$ và gọi K là trung điểm của BC, ta có $\widehat{A_1KA}=30^\circ$.

Ta có $A_1K=\dfrac{AK}{\cos 30^\circ}=\dfrac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=x$.

$\Rightarrow S_{A_1BC}=\dfrac{1}{2}A_1K\cdot BC=\dfrac{x^2}{2}=8\Leftrightarrow x=4$.

Do đó $h=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\cdot\tan 30^\circ=2\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=2$.

$\Rightarrow V=Sh=\dfrac{4^2\sqrt{3}}{4}\cdot 2=8\sqrt{3}$.



□

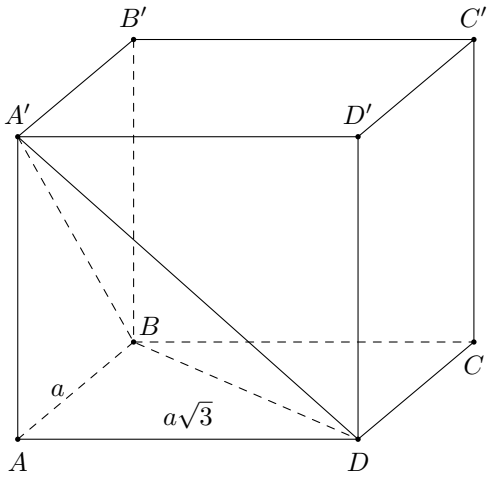
Câu 36. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$, khoảng cách từ A đến $(A'BD)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. Tính thể tích V của khối hộp chữ nhật đã cho.

(A) $V=\dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$. (B) $V=3a^3$. (C) $V=2\sqrt{3}a^3$. (D) $V=a^3$.

Lời giải.

Ta có khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$ là

$$\begin{aligned} & \frac{1}{d_A^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AA'^2} \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{15}}{5}\right)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} + \frac{1}{AA'^2} \\ \Rightarrow \quad & AA' = \sqrt{3}a. \end{aligned}$$



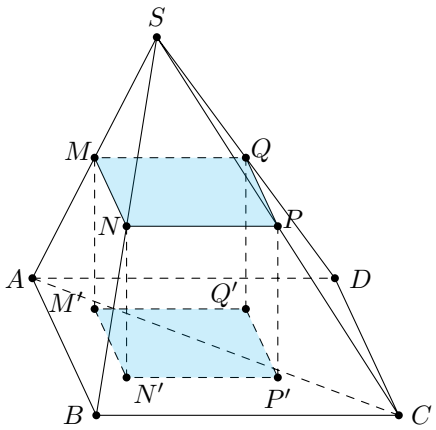
Vậy $V = a \cdot \sqrt{3}a \cdot \sqrt{3}a = 3a^3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích V, đáy là hình chữ nhật, mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q. Gọi M', N', P', Q' lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N, P, Q lên mặt đáy. Thể tích khối hộp chữ nhật $MNPQ.M'N'P'Q'$ có giá trị lớn nhất là

(A) $\dfrac{4}{27}V$. (B) $\dfrac{2}{9}V$. (C) $\dfrac{4}{9}V$. (D) $\dfrac{2}{27}V$.

Lời giải.



Gọi h là chiều cao của khối chóp và $h' = MM'$ là chiều cao khối hộp chữ nhật.

Theo Thales, ta có $x = \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{SP}{SC} = \dfrac{SQ}{SD} = \dfrac{MN}{AB} = \dfrac{NP}{BC} \Rightarrow \dfrac{h'}{h} = \dfrac{AM}{AS} = 1 - \dfrac{SM}{SA} = 1 - x$.

Do đó $V = \dfrac{1}{3}AB \cdot BC \cdot h$ và $V' = MN \cdot NP \cdot h' = x^2 \cdot AB \cdot BC \cdot (1-x)h = 3x^2(1-x)V$.

Xét hàm số $f(x) = 3x^2(1-x) = 3x^2 - 3x^3$ với $x \in (0;1)$.

Ta có $f'(x) = 6x - 9x^2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$. Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{2}{3}$		1
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	$\dfrac{4}{9}$	$\searrow$	

Vậy $\max\limits_{x\in(0;1)} f(x) = \dfrac{4}{9}V'_{\max} = \dfrac{4}{9}V$.

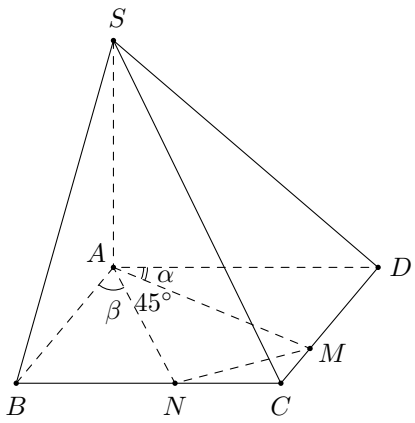
Chọn đáp án (C) □

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB = 1$, cạnh bên $SA = 1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Kí hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\widehat{MAN} = 45^\circ$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là

(A) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{9}$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}$. (C) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{6}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{9}$.

Lời giải.

Thể tích khối chóp $S.AMN$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ Diện tích tam giác AMN nhỏ nhất.



Gọi $DM = x$, $BN = y$ $(0 < x, y < 1)$.

Khi đó ta có $\begin{cases} \tan\alpha = \tan\widehat{DAM} = x \\ \tan\beta = \tan\widehat{BAN} = y. \end{cases}$

Suy ra

$$\tan(\alpha+\beta) = \tan 45^\circ = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = \frac{x+y}{1-xy} \Rightarrow x + y = 1 - xy \geq 2\sqrt{xy}. \qquad (1)$$

Đặt $t = \sqrt{xy}$ $(0 < t < 1)$, ta có

$$(1) \Rightarrow t^2 + 2t - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} - 1 \leq t \leq \sqrt{2} - 1.$$

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow 0 \leq t \leq \sqrt{2} - 1 \Rightarrow 0 \leq xy \leq 3 - 2\sqrt{2}$.

Do đó

$$\begin{aligned} S_{AMN} &= S_{ABCD} - (S_{ADM} + S_{ABN} + S_{CMN}) \\ &= 1 - \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}(1-x)(1-y)\right] \\ &= \frac{1}{2}(1-xy) \geq \sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

Vậy $V_{S.AMN} = \dfrac{1}{3}S_{AMN}\cdot SA = \dfrac{1}{3}\cdot S_{AMN} \geq \dfrac{\sqrt{2}-1}{3} \Rightarrow \min V = \dfrac{\sqrt{2}-1}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB=1$, cạnh bên $SA=1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Ký hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\widehat{MAN}=30^\circ$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là

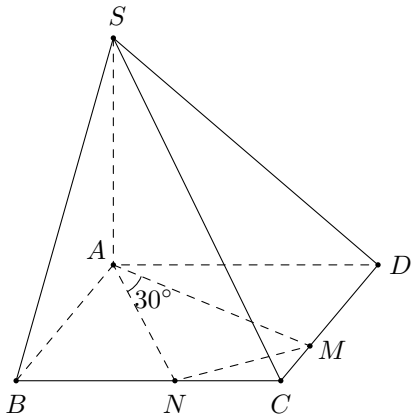
(A) $\dfrac{1}{9}$. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) $\dfrac{2}{27}$. (D) $\dfrac{4}{27}$.

Lời giải.

Đặt $DM=x$, $BN=y$ với $0<x,y<1$.

Khi đó $AM=\sqrt{x^2+1}$, $AN=\sqrt{y^2+1}$.

Ta có $V_{S.AMN}=\dfrac{1}{3}\cdot SA\cdot S_{\triangle AMN}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot AM\cdot AN\cdot\sin 30^\circ=\dfrac{1}{12}\cdot AM\cdot AN$.



Ta có

$$\tan 60^\circ=\tan\left(\widehat{DAM}+\widehat{BAN}\right)=\frac{\tan\widehat{DAM}+\tan\widehat{BAN}}{1-\tan\widehat{DAM}\cdot\tan\widehat{BAN}}=\frac{x+y}{1-xy}.$$

Suy ra

$$\sqrt{3}(1-xy)=x+y\Leftrightarrow y\left(1+\sqrt{3}x\right)=\sqrt{3}-x\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{3}-x}{1+\sqrt{3}x}.$$

Do đó

$$AN=\sqrt{y^2+1}=\sqrt{\frac{3-2\sqrt{3}x+x^2+1+2\sqrt{3}x+3x^2}{\left(1+\sqrt{3}x\right)^2}}=\frac{2\sqrt{x^2+1}}{1+\sqrt{3}x}.$$

Suy ra $V_{S.AMN}=\dfrac{1}{12}\cdot AM\cdot AN=\dfrac{x^2+1}{6\left(1+\sqrt{3}x\right)}=f(x)$.

$$f'(x)=\frac{1}{6}\cdot\frac{2x\cdot\left(1+\sqrt{3}x\right)-\sqrt{3}\left(x^2+1\right)}{\left(1+\sqrt{3}x\right)^2}=\frac{\sqrt{3}x^2+2x-\sqrt{3}}{6\left(1+\sqrt{3}x\right)^2}=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\text{ (thỏa mãn)}\\ x=-\sqrt{3}\text{ (loại).}\end{array}\right.$$

Suy ra $\min\limits_{(0;1)}f(x)=f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{1}{9}$.

Chọn đáp án (A) □

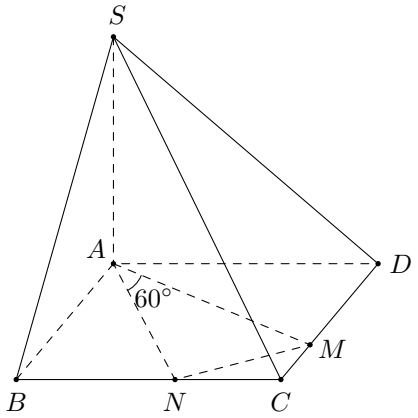
Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB=1$, cạnh bên $SA=1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Ký hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\widehat{MAN}=60^\circ$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là

(A) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{3}$. (B) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{9}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{9}$.

Lời giải.

Đặt $DM = x$, $BN = y$ với $0 < x, y < 1$.

Khi đó $AM = \sqrt{x^2+1}$, $AN = \sqrt{y^2+1}$.



Ta có

$$\begin{aligned} V_{S.AMN} &= \frac{1}{3}\cdot SA\cdot S_{\triangle AMN} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot AM\cdot AN\cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12}\cdot AM\cdot AN. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \tan 30^\circ &= \tan\left(\widehat{DAM}+\widehat{BAN}\right) \\ &= \frac{\tan\widehat{DAM}+\tan\widehat{BAN}}{1-\tan\widehat{DAM}\cdot\tan\widehat{BAN}} \\ &= \frac{x+y}{1-xy}. \end{aligned}$$

Suy ra $1-xy = \sqrt{3}(x+y) \Leftrightarrow y = \dfrac{1-\sqrt{3}x}{x+\sqrt{3}}$.

Do đó $AN = \sqrt{y^2+1} = \dfrac{2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{3}+x}$.

Suy ra $V_{S.AMN} = \dfrac{\sqrt{3}}{12}\cdot AM\cdot AN = \dfrac{\sqrt{3}(x^2+1)}{6\left(\sqrt{3}+x\right)} = f(x)$.

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{2x\cdot\left(\sqrt{3}+x\right)-(x^2+1)}{\left(\sqrt{3}+x\right)^2} = \frac{x^2+2\sqrt{3}x-1}{6\left(1+\sqrt{3}x\right)^2} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{3}+2 \ \text{(thỏa mãn)} \\ x = -\sqrt{3}-2 \ \text{(loại)}. \end{array}\right.$$

Suy ra $\min\limits_{(0;1)} f(x) = f\left(-\sqrt{3}+2\right) = \dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}$.

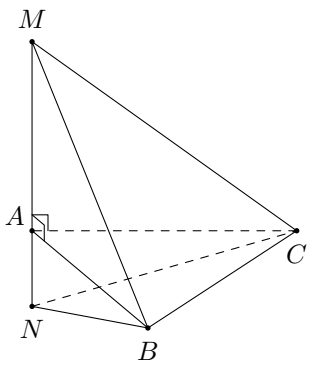
Chọn đáp án (C) □

Câu 41. Cho tam giác ABC vuông cân tại B, $AC = 2$. Trên đường thẳng đi qua A vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy các điểm M, N khác phía với mặt phẳng (ABC) sao cho $AM\cdot AN = 1$. Tìm thể tích nhỏ nhất của khối tứ diện $MNBC$.

(A) $\dfrac{1}{3}$. (B) $\dfrac{1}{6}$. (C) $\dfrac{1}{12}$. (D) $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có tam giác ABC vuông cân tại B, $AC = 2$ nên $AB = BC = \sqrt{2}$.



$$\begin{aligned} V_{MNBC} &= V_{M.ABC}+V_{N.ABC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(AM\cdot AB\cdot BC+AN\cdot AB\cdot BC) \\ &= \frac{1}{3}(AM+AN) \geq \frac{2}{3}\sqrt{AM\cdot AN} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Dấu bằng khi $AM = AN = 1$.

Chọn đáp án (D) □

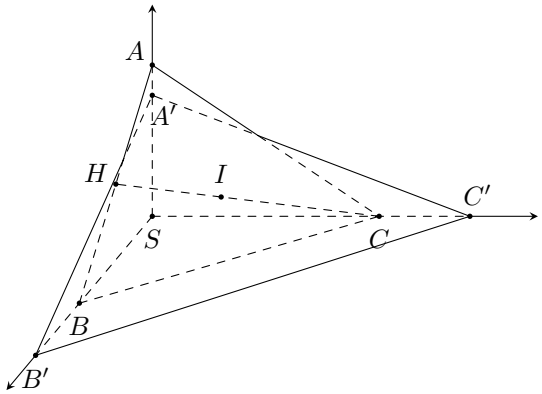
Câu 42. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Mặt phẳng (P) thay đổi qua I cắt các tia SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C'. Biết $SA = SB = \sqrt{2}$, $SC = \sqrt{7}$. Hỏi thể tích của khối chóp $S.A'B'C'$ có giá trị nhỏ nhất là

(A) $\dfrac{243\sqrt{7}}{256}$. (B) $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$. (C) $\dfrac{81\sqrt{7}}{256}$. (D) $\dfrac{27\sqrt{7}}{256}$.

Lời giải.

Gọi $SA' = a$, $SB' = b$, $SC' = c$. Ta thấy

$$V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{6}abc.$$



Xét tứ diện $SABC$ như hình vẽ. Gọi H là trung điểm của AB. Ta thấy $CA = CB = 3$, $AB = 2$ và

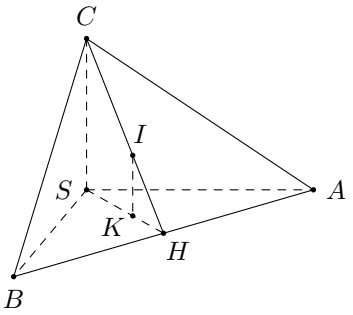
$$CH = \sqrt{CB^2 - BH^2} = \sqrt{3^2 - 1} = 2\sqrt{2}.$$

Vậy tam giác ABC là tam giác cân tại C, suy ra điểm I thuộc vào đường cao CH của tam giác CAB, đồng thời

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}CH \cdot AB = 2\sqrt{2}.$$

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC ($r = IH$). Ta có

$$IH = r = \frac{S_{ABC}}{p_{ABC}} = \frac{2\sqrt{2}}{\dfrac{(3+3+2)}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Từ đây $\dfrac{IK}{SC} = \dfrac{IH}{CH} \Rightarrow IK = \dfrac{SC \cdot IH}{CH} = \dfrac{\sqrt{7} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ I đến các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SAC). Dễ thấy $y = z$, $x = IK = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$. Đồng thời

$$\begin{aligned}
& V_{S.ABC} = V_{I.SAB} + V_{I.SAC} + V_{I.SBC} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{6}\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{7} = \frac{1}{3}x \cdot S_{SAB} + \frac{1}{3}y \cdot S_{SBC} + \frac{1}{3}z \cdot S_{SCA} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot y \cdot \frac{\sqrt{14}}{2} + \frac{1}{3} \cdot z \cdot \frac{\sqrt{14}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & y = z = \frac{3\sqrt{2}}{8}.
\end{aligned}$$

Xét tứ diện $S.A'B'C'$, ta thấy

$$\begin{aligned}
& V_{S.A'B'C'} = V_{I.SA'B'} + V_{I.SA'C'} + V_{I.SB'C'} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{6}abc = \frac{1}{3}x \cdot \frac{1}{2}ab + \frac{1}{3}y \cdot \frac{1}{2}bc + \frac{1}{3}z \cdot \frac{1}{2}ca
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Theo bất đẳng thức Cô-si cho 3 số, ta có

$$1=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{xyz}{abc}}\Rightarrow abc\geq 27xyz=\frac{243\sqrt{7}}{128}.$$

Từ đó $V_{S.A'B'C'}=\dfrac{1}{6}abc\geq\dfrac{81\sqrt{7}}{256}$.
Chọn đáp án (C) □

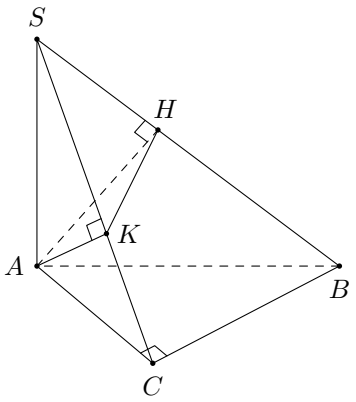
Câu 43. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, $SA=AB=2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC. Tìm thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp $S.AHK$.

(A) $V_{\max}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. (B) $V_{\max}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (C) $V_{\max}=\dfrac{a^3}{\sqrt{3}}3$. (D) $V_{\max}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Ta chứng minh được $BC\perp(SAC)$, từ đó

$$\begin{cases}AK\perp SC\\ AK\perp BC\end{cases}\Rightarrow AK\perp(SBC)\Rightarrow AK\perp KH.$$



Đồng thời $\begin{cases}AH\perp SB\\ AK\perp SB\ (\text{do } AK\perp(SBC))\end{cases}\Rightarrow SB\perp(AHK)$.
Vậy ta nhận thấy hình chóp $S.AHK$ có $SH\perp(AHK)$ và tam giác AHK vuông tại K.
Gọi độ dài đoạn $AC=x$ (với $0<x<2a$ vì tam giác ABC vuông tại C với $AB=2a$). Xét tam giác vuông cân SAB ta có đường cao $AH=SH=a\sqrt{2}$.
Trong tam giác vuông SAC ta có

$$\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2+4a^2}{4a^2x^2}.$$

Khi đó $AK=\dfrac{2ax}{\sqrt{4a^2+x^2}}$. Suy ra

$$HK=\sqrt{AH^2-AK^2}=\sqrt{2a^2-\frac{4a^2x^2}{4a^2+x^2}}=a\sqrt{\frac{2\left(4a^2-x^2\right)}{4a^2+x^2}}.$$

Vậy thể tích

$$\begin{aligned}V_{S.AHK}&=\frac{1}{3}SH\cdot S_{AHK}=\frac{1}{3}SH\cdot\frac{1}{2}AK\cdot KH\\&=\frac{1}{6}a\sqrt{2}\cdot\frac{2ax}{\sqrt{4a^2+x^2}}\cdot a\sqrt{\frac{2\left(4a^2-x^2\right)}{4a^2+x^2}}\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a^3 \frac{\left(\sqrt{2}x\right)\sqrt{4a^2-x^2}}{4a^2+x^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho $\sqrt{2}x$ và $\sqrt{4a^2-x^2}$ ta có

$$\left(\sqrt{2}x\right)\sqrt{4a^2-x^2} \le \frac{\left(\sqrt{2}x\right)^2+\left(\sqrt{4a^2-x^2}\right)^2}{2} = \frac{4a^2+x^2}{2}.$$

Từ đó suy ra $V_{S.AHK} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a^3 \frac{\left(\sqrt{2}x\right)\sqrt{4a^2-x^2}}{4a^2+x^2} \le \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a^3 \frac{4a^2+x^2}{2\left(4a^2+x^2\right)} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = 2a$, SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm cạnh AB, mặt phẳng (P) qua SM song song với BC cắt AC tại N. Tính thể tích V của khối chóp $S.BCMN$ biết góc giữa (SBC) và đáy bằng $60°$.

(A) $V = \frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$. (B) $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. (C) $V = \sqrt{3}a^3$. (D) $V = \frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải.

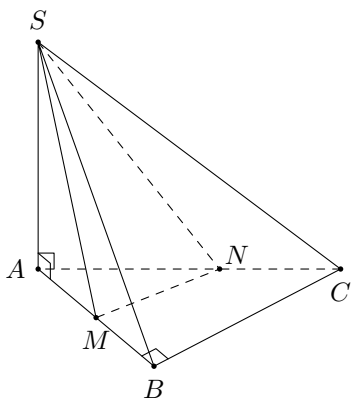
Ta có tam giác ABC vuông tại B nên $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a = 2a^2$.

Mặt khác theo giả thiết ta có $((SBC),(ABC)) = (SB,AB) = \widehat{SBA} = 60°$.

Do đó $SA = AB \cdot \tan 60° = 2a\sqrt{3}$.

Nên $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} = \frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Ta có $V_{S.BCMN} = \frac{3}{4}V_{S.ABC} = \sqrt{3}a^3$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 45. Trong mặt phẳng (P) cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ và điểm C thuộc nửa đường tròn sao cho $\widehat{ABC} = 30°$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại A lấy điểm S sao cho góc giữa hai mặt phẳng (SAB), (SBC) bằng $60°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

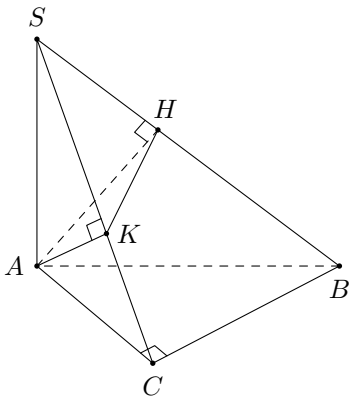
(A) $V = \frac{\sqrt{6}R^3}{12}$. (B) $V = \frac{\sqrt{2}R^3}{6}$. (C) $V = \frac{\sqrt{6}R^3}{4}$. (D) $V = \frac{\sqrt{2}R^3}{2}$.

Lời giải.

Kẻ $AH \perp SB$ $(H \in SB)$; $AK \perp SC$ $(K \in SC) \Rightarrow SB \perp (AHK) \Rightarrow \widehat{AHK} = 60°$.

Ta có $AC = AB\sin\alpha = 2R\sin\alpha$, $BC = AB\cos\alpha = 2R\cos\alpha \Rightarrow S_{ABC} = 2R^2\sin\alpha\cos\alpha$.

Ta lại có



$$\begin{aligned}
&\frac{AK}{AH} = \sin\widehat{AHK} = \frac{\sqrt{3}}{2}\\
\Rightarrow\ & 2AK = \sqrt{3}AH \Rightarrow \frac{3}{AK^2} = \frac{4}{AH^2}\\
\Rightarrow\ & 3\left(\frac{1}{SA^2} + \frac{1}{4R^2\sin^2\alpha}\right) = 4\left(\frac{1}{SA^2} + \frac{1}{4R^2}\right)\\
\Rightarrow\ & SA = \frac{2R\sin\alpha}{\sqrt{3-4\sin^2\alpha}}.
\end{aligned}$$

Do đó $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SA\cdot S_{ABC} = \dfrac{4R^3\sin^2\alpha\cos\alpha}{3\sqrt{3-4\sin^2\alpha}} = \dfrac{R^3\sqrt{6}}{12}$.

Chọn đáp án (A) □

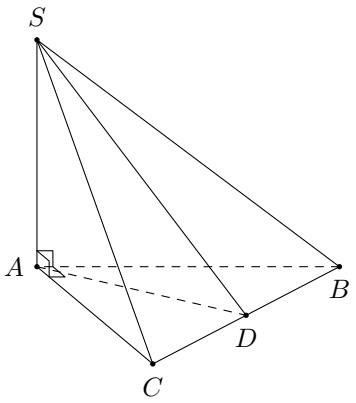
Câu 46. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, SA vuông góc với đáy, độ dài đường trung tuyến $AD = a$, cạnh bên SB tạo với đáy một góc α và tạo với mặt phẳng (SAD) góc (β). Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

(A) $V = \dfrac{a^3\sin\alpha\sin\beta}{3\left(\cos^2\alpha - \sin^2\beta\right)}$.
(B) $V = \dfrac{a^3\sin\alpha\sin\beta}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$.
(C) $V = \dfrac{a^3\sin\alpha\sin\beta}{3\left(\cos^2\beta - \sin^2\alpha\right)}$.
(D) $V = \dfrac{a^3\sin\alpha\sin\beta}{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}$.

Lời giải.

Ta có $(SB,(ABC)) = \widehat{SBA} = \alpha$.

Mặt khác ta có $\begin{cases} BD \perp AD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAD) \Rightarrow (SB,(SAD)) = \widehat{BSD} = \beta$.



Giả sử $BD = x\,(x>0)$ Khi đó ta có $\sin\beta = \dfrac{x}{SB} \Rightarrow SB = \dfrac{x}{\sin\beta}$.

Mặt khác ta có $\cos\alpha = \dfrac{AB}{SB} \Rightarrow AB = \dfrac{x\cos\alpha}{\sin\beta}$, $SA = \dfrac{x\sin\alpha}{\sin\beta}$.

Ta lại có

$$AB = \sqrt{x^2+a^2} \Leftrightarrow x^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta} - 1\right) = a^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}.$$

Do đó

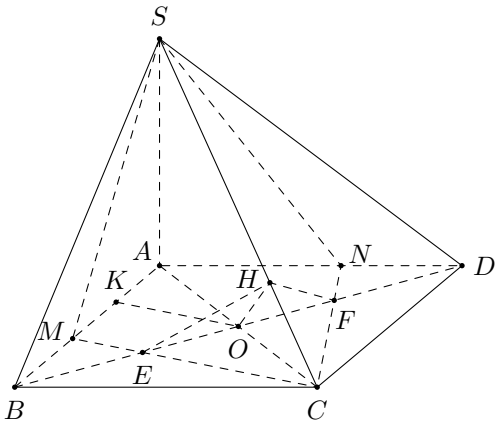
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA\cdot AD\cdot BD = \frac{1}{3}\frac{x\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot a\cdot\frac{a\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}} = \frac{a^3\sin\alpha\sin\beta}{3\left(\cos^2\alpha-\sin^2\beta\right)}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 2, $SA = 2$ vuông góc với đáy. Gọi M, N là hai điểm lần lượt trên AB, AD sao cho (SMC), (SNC) vuông góc với nhau. Tính tổng $T = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AN^2}$ khi khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất.

(A) $\dfrac{5}{4}$.
(B) 2.
(C) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$.
(D) $\dfrac{13}{9}$.

Lời giải.



Đặt $AM = x$, $AN = y$. Gọi $O = AC \cap DB$; $E = BD \cap CM$; $F = BD \cap CN$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên SC, khi đó $\triangle CHO \backsim \triangle CAS$. Suy ra $\dfrac{HO}{SA} = \dfrac{CO}{SC} \Rightarrow HO = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Lại có $\begin{cases} SC \perp OH \\ SC \perp BD \end{cases} \Rightarrow SC \perp (HBD) \Rightarrow \begin{cases} SC \perp HE \\ SC \perp HF \end{cases}$.

Do đó góc giữa (SCM) và (SCN) bằng góc giữa HE và HF.

Suy ra $HE \perp HF$.

Mặt khác

$$S_{AMCN} = S_{\triangle ACN} + S_{\triangle ACM} = \frac{1}{2}CB \cdot AM + \frac{1}{2}CD \cdot AN = x + y$$

$$\Rightarrow \quad V_{S.AMCN} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{AMCN} = \frac{2}{3}(x + y)$$

Ta có $x > 0$, $y > 0$ và nếu $x \neq 2$, $y \neq 2$ thì gọi K là trung điểm của AM, khi đó $KO \parallel MC$ nên

$$\frac{OE}{EB} = \frac{KM}{MB} = \frac{x}{4 - 2x} \Rightarrow \frac{OE}{x} = \frac{EB}{4 - 2x} = \frac{OB}{4 - x} \Rightarrow OE = \frac{x\sqrt{2}}{4 - x}.$$

Tương tự $OF = \dfrac{y\sqrt{2}}{4 - y}$.

Mà $OE \cdot OF = OH^2 \Rightarrow \dfrac{2xy}{(4 - x)(4 - y)} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow (x + 2)(y + 2) = 12$.

Nếu $x = 2$ hoặc $y = 2$ thì ta cũng có $OE \cdot OF = OH^2 \Leftrightarrow (x + 2)(y + 2) = 12$.

Tóm lại $(x + 2)(y + 2) = 12 \Leftrightarrow y = \dfrac{8 - 2x}{x + 2}$, do $y \leq 2$ nên $\dfrac{8 - 2x}{x + 2} \leq 2 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Do đó

$$V_{S.AMCD} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{AMCN} = \frac{2}{3}(x + y) = \frac{2}{3}\left(x + \frac{8 - 2x}{x + 2}\right) = \frac{2}{3}\frac{x^2 + 8}{x + 2}.$$

Xét $f(x) = \dfrac{2}{3}\dfrac{x^2 + 8}{x + 2}$ với $x \in [1; 2]$.

$f'(x) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x^2 + 4x - 8}{(x + 2)^2}\right)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2 + 2\sqrt{3}$; $x = -2 - 2\sqrt{3}$ (loại).

Lập bảng biến thiên ta suy ra $\max\limits_{[0;2]} f(x) = f(1) = f(2) = 2$.

Vậy $\max V_{S.AMCN} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$

Suy ra $T = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AN^2} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{5}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Trong mặt phẳng (P) cho $\triangle XYZ$ cố định. Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) tại điểm X và về 2 phía của (P) ta lấy 2 điểm A, B thay đổi sao cho hai mặt phẳng (AYZ) và (BYZ) luôn vuông góc với nhau. Hỏi vị trí của A, B thỏa mãn điều kiện nào sau đây thì thể tích $ABYZ$ là nhỏ nhất

(A) $XB = 2XA$. (B) $XA = 2XB$. (C) $XA \cdot XB = YZ^2$. (D) $XA = XB$.

Lời giải.

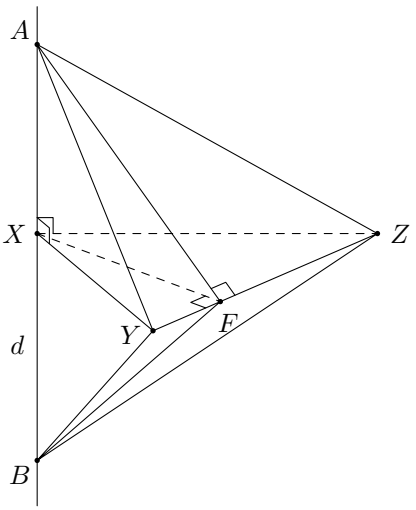
Thể tích khối tứ diện $ABYZ$ là $V = \dfrac{1}{3}AB \cdot S_{\triangle XYZ}$.

Do diện tích tam giác XYZ không đổi nên thể tích tứ diện $ABYZ$ là nhỏ nhất khi AB ngắn nhất. Dựng $XF \perp YZ$, do $YZ \perp AB$ nên $YZ \perp (ABF)$, suy ra $\left(\widehat{(AYZ),(BYZ)}\right) = \widehat{(FA,FB)} = \widehat{AFB} = 90^\circ$.

Xét tam giác vuông ABF có FX là đường cao không đổi (Do XF là đường cao của $\triangle XYZ$ cố định) nên $XF^2 = XA \cdot XB$ không đổi.

Có $AB = XA + XB \geq 2\sqrt{XA \cdot XB} = 2XF$ không đổi. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $XA = XB$.

Vậy thể tích khối tứ diện $ABYZ$ nhỏ nhất khi X là trung điểm AB hay $XA = XB$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB = 2$, $AC = 3$, $AD = BC = 4$, $BD = 2\sqrt{5}$, $CD = 5$. Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

(A) $V = \sqrt{15}$. (B) $V = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$. (C) $V = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$. (D) $V = \dfrac{9\sqrt{5}}{2}$.

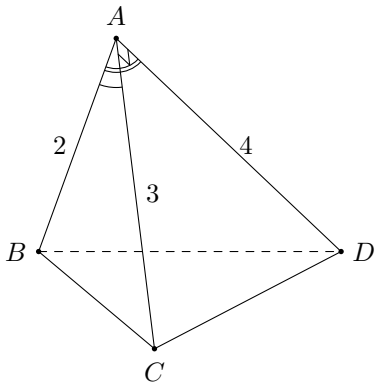
Lời giải.

Do $AB^2 + AD^2 = BD^2 \Rightarrow \triangle ABD$ vuông tại A; $AC^2 + AD^2 = CD^2 \Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại A.

Lại có $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \dfrac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = -\dfrac{1}{4}$.

Sử dụng công thức giải nhanh: Cho chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ và $\widehat{ASB} = \alpha$, $\widehat{BSC} = \beta$, $\widehat{ASC} = \gamma$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$$V_{S.ABC} = \frac{abc}{6}\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma}.$$



Áp dụng: Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là

$$V_{ABCD} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{6}\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \cos^2 90^\circ - \cos^2 90^\circ + 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \cos 90^\circ \cdot \cos 90^\circ} = \sqrt{15}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Trên đường thẳng Δ qua A vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy hai điểm M, N nằm khác phía với mặt phẳng (ABC) sao cho hai mặt phẳng (MBC) và (NBC) vuông góc với nhau. Thể tích khối tứ diện $MNBC$ có giá trị nhỏ nhất bằng

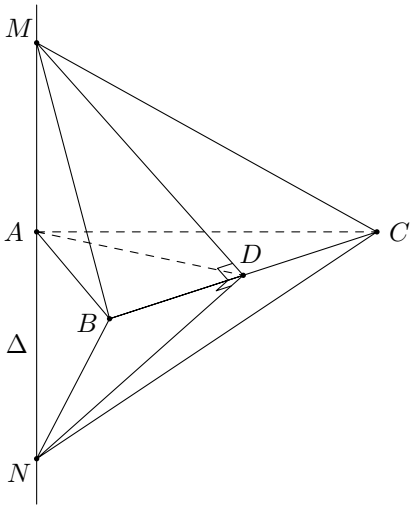
(A) $\dfrac{a^3}{4}$. (B) $\dfrac{3a^3}{8}$. (C) $\dfrac{3a^3}{4}$. (D) $\dfrac{a^3}{8}$.

Lời giải.

Ta có $V_{MNBC} = \dfrac{1}{3} \cdot MN \cdot S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{12} \cdot MN$.

Gọi D là trung điểm cạnh BC ta có

$$\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp MN \end{cases} \Rightarrow BC \perp (MDN) \Rightarrow \begin{cases} BC \perp DM \\ BC \perp DN. \end{cases}$$



Do đó

$$\begin{aligned} &((MBC),(NBC)) = (DM, DN) = 90^\circ \\ \Leftrightarrow\ &DM \perp DN \Leftrightarrow AM \cdot AN = AD^2 = \frac{3a^2}{4}. \end{aligned}$$

Khi đó theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$MN = AM + AN \geq 2\sqrt{AM \cdot AN} = \sqrt{3}a.$$

Vì vậy $V_{MNBC} \geq \dfrac{\sqrt{3}a^2}{12} \cdot MN = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{12} \cdot \sqrt{3}a = \dfrac{a^2}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 51. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$, $AD = b$. Trên hai đường thẳng Ax, Cy cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho hai mặt phẳng (BDM) và (BDN) vuông góc với nhau. Thể tích khối tứ diện $BDMN$ có giá trị nhỏ nhất bằng

(A) $\dfrac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. (B) $\dfrac{4a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. (C) $\dfrac{4a^2b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$. (D) $\dfrac{a^2b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$.

Lời giải.

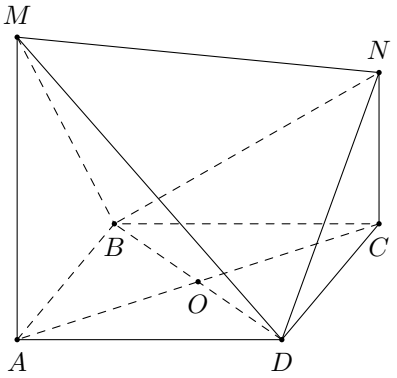
Ta có : $V_{BDMN} = \dfrac{2S_{MBD} \times S_{NBD} \times \sin((MBD),(NBD))}{3BD} = \dfrac{2S_{MBD} \times S_{NBD}}{3\sqrt{a^2+b^2}}$.

Trong đó $BD = \sqrt{a^2+b^2}$ và $\sin((MBD),(NBD)) = \sin 90^\circ = 1$.

Đặt $AM = x$, $CN = y$.

Ta có $((MBD),(ABCD)) + ((NBD),(ABCD)) + ((MBD),(NBD)) = 180^\circ$.

Do đó



$$\begin{aligned}
&((MBD),(ABCD))+((NBD),(ABCD))=90^\circ\\
\Leftrightarrow\ &\sin((MBD),(ABCD))=cos((NBD),(ABCD))\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{a-\left(\frac{S_{ABD}}{S_{MBD}}\right)^2}=\frac{S_{ABD}}{S_{NBD}}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{S_{MBD}^2}+\frac{1}{S_{NBD}^2}=\frac{1}{S_{ABD}^2}=\frac{4}{a^2b^2}.
\end{aligned}$$

Theo định lý diện tích hình chiếu ta có $\cos((MBD),(ABCD))=\dfrac{S_{ABD}}{S_{MBD}}$ và $\cos((NBD),(ABCD))=\dfrac{S_{ABD}}{S_{NBD}}$.
Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{4}{a^2b^2}=\frac{1}{S_{MBD}^2}+\frac{1}{S_{NBD}^2}\geq 2\sqrt{\frac{1}{S_{MBD}^2}\cdot\frac{1}{S_{NBD}^2}}=\frac{2}{S_{MBD}\cdot S_{NBD}}\\
\Rightarrow\ &S_{MBD}\cdot S_{NBD}\geq\frac{1}{2}a^2b^2
\end{aligned}$$

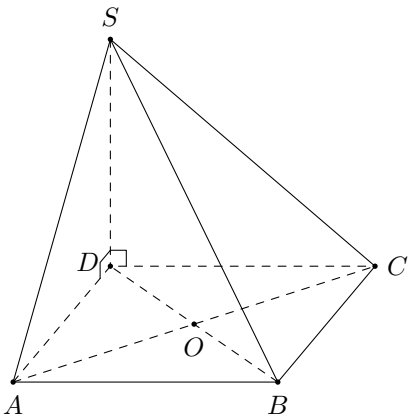
Vậy $V_{BDMN}\geq\dfrac{a^2b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 52. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $AB=2a$, $BC=a$, $\widehat{ABC}=120^\circ$ và SD vuông góc với đáy. Sin góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAB) bằng $\dfrac{1}{4}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

(A) a^3. (B) $\dfrac{a^3}{2}$. (C) $3a^3$. (D) $\dfrac{3a^3}{2}$.

Lời giải.

Đặt $SD=h$, ta có $BD=\sqrt{AD^2+AB^2-2AB\cdot AD\cdot\cos 60^\circ}=\sqrt{3}a$.
Suy ra $SB=\sqrt{SD^2+BD^2}=\sqrt{h^2+3a^2}$.
Ta có $\mathrm{d}(B;(SAC))=\mathrm{d}(D;(SAC))$ và



$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathrm{d}^2(D;(SAC))}&=\frac{1}{SD^2}+\frac{1}{\mathrm{d}^2(D;AC)}\\
&=\frac{1}{h^2}+\frac{AC^2}{4S_{DAC}^2}\\
&=\frac{1}{h^2}+\frac{7}{3a^2}
\end{aligned}$$

Do $AC^2=7a^2$; $S_{DAC}=\dfrac{1}{2}a\cdot 2a\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$ nên suy ra $\mathrm{d}(D;(SAC))=\dfrac{\sqrt{3}ah}{\sqrt{3a^2+7h^2}}$.

Do đó $\sin(SB;(SAC))=\dfrac{\mathrm{d}(B;(SAC))}{SB}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}ah}{\sqrt{3a^2+7h^2}}}{\sqrt{h^2+3a^2}}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow h=a\sqrt{3}$.
Vậy $V_{S.ABCD}=a^3$.
Chọn đáp án (A) □

Dạng 3. Thể tích khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

Câu 1. Thể tích V của khối tứ diện đều có cạnh bằng a là

(A) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (B) $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. (C) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (D) $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

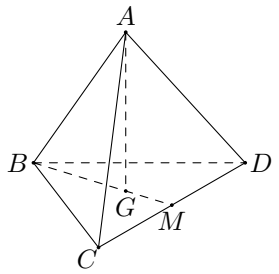
Lời giải.

Cách tự luận.

Gọi G là trọng tâm của $\triangle BCD$

$$BG=\frac{2}{3}BM=\frac{a\sqrt{3}}{3},AG=\sqrt{AB^2-BG^2}=\frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}AG\cdot S_{BCD}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$



.

Cách trắc nghiệm. Ta nhớ trực tiếp kết quả "Tứ diện đều có $V=(\text{cạnh})^3\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{12}$ ".

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a, mặt phẳng chứa BC và vuông góc với SA cắt khối chóp theo một thiết diện có diện tích bằng $\dfrac{a^2}{4}$. Thể tích V của khối chóp đã cho bằng

(A) $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{24}$. (B) $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. (C) $V=\dfrac{a^3}{36}$. (D) $V=\dfrac{a^3}{72}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC. Gọi O là trọng tâm của $\triangle ABC$.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của M lên SA. Ta có $MI\perp SA$ và $BC\perp SA$.

Suy ra $SA\perp(IBC)$. Mặt khác

$$S_{IBC}=\frac{a^2}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{2}MI\cdot BC=\frac{a^2}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{2}MI\cdot a=\frac{a^2}{4}\Leftrightarrow MI=\frac{a}{2}.$$

Ta có $AI=\sqrt{AM^2-MI^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $\tan\widehat{MAI}=\dfrac{MI}{AI}=\dfrac{SO}{AO}\Leftrightarrow SO=\dfrac{MI\cdot AO}{AI}=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Vậy thể tích của khối chóp đã cho là

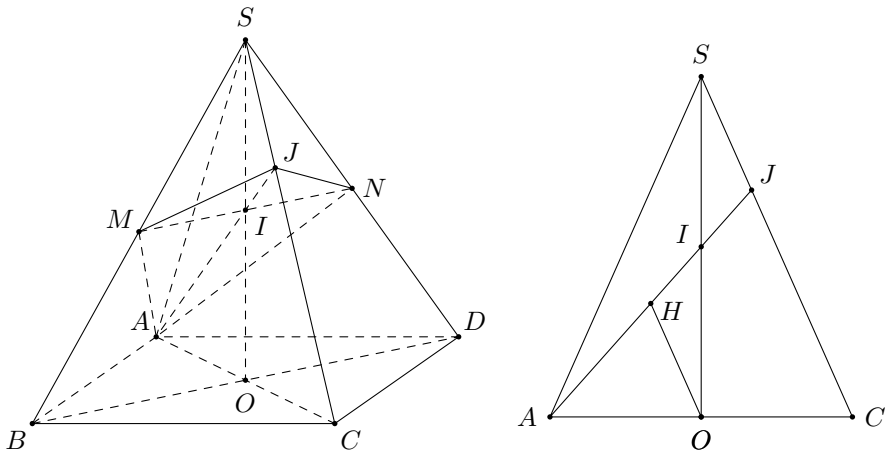
$$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{6}=\frac{a^2\sqrt{2}}{24}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SB,SD. Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại J. Diện tích tứ giác $AMJN$ bằng $\dfrac{a^2\sqrt{5}}{6}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

(A) $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. (B) $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. (C) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải.



Giả sử độ dài cạnh bên là x.

Ta có I là trung điểm của SO.

Xét $\triangle SOC$ có các điểm A, I, J lần lượt nằm trên các đường thẳng OC, SO, SC. Áp dụng Định lý **Menelaus** ta có

$$A, I, J \text{ thẳng hàng } \Leftrightarrow \frac{AC}{AO}\cdot\frac{IO}{IS}\cdot\frac{JS}{JC}=1 \Leftrightarrow 2\cdot 1\cdot\frac{SJ}{JC}=1 \Leftrightarrow \frac{SJ}{JC}=\frac{1}{2}.$$

Từ $\dfrac{SJ}{JC}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{SJ}{SC}=\dfrac{1}{3}$. Dựng $OH \parallel SC$.

Ta có

$$\begin{cases}\dfrac{AO}{AC}=\dfrac{OH}{JC}\\ \dfrac{IS}{IO}=\dfrac{SJ}{OH}\end{cases} \Rightarrow \frac{AO}{AC}\cdot\frac{IS}{IO}=\frac{OH}{JC}\cdot\frac{SJ}{OH}=\frac{SJ}{JC} \Rightarrow \frac{SJ}{JC}=\frac{1}{2} \Rightarrow JC=\frac{2x}{3}.$$

Xét $\triangle AIC$ có

$$AJ^2=AC^2+CJ^2-2AI\cdot JC\cdot\cos C=2a^2+\frac{4x^2}{9}-2a\sqrt{2}\cdot\frac{2x}{3}\cdot\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{x}=\frac{2a^2}{3}+\frac{4x^2}{9} \quad (1).$$

$$S_{AMJN}=\frac{1}{2}AJ\cdot MN=\frac{a^2\sqrt{5}}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{2}AJ\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a^2\sqrt{5}}{6} \Leftrightarrow AJ=\frac{a\sqrt{10}}{3} \quad (2).$$

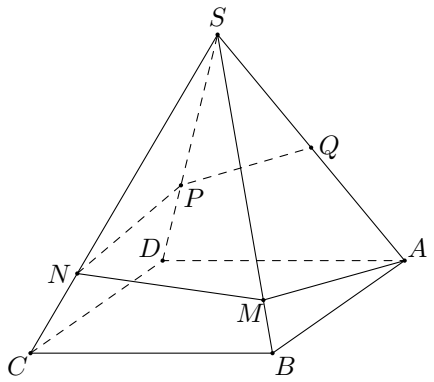
Từ (1), (2) suy ra $x=a\cdot SO=\sqrt{x^2-\dfrac{a^2}{2}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ nên

$$V=\frac{1}{3}SO\cdot S_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot a^2=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 4.

Bên cạnh con đường nước đi vào thành phố, người ta xây một ngọn tháp hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = 600$ m, $\widehat{ASB} = 15^\circ$. Do sự cố đường dây điện tại điểm Q (trung điểm của SA) bị hỏng nên người ta tạo ra một con đường từ A đến Q gồm bốn đoạn AM, MN, NP, PQ (như hình vẽ). Để tiết kiệm chi phí, kỹ sư đã nghiên cứu và có được chiều dài con đường từ A đến Q nhỏ nhất. Tính tỉ số $k = \dfrac{AM + MN}{NP + PQ}$



A $k = 2$. **B** $k = \dfrac{5}{3}$. **C** $k = \dfrac{3}{2}$. **D** $k = \dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

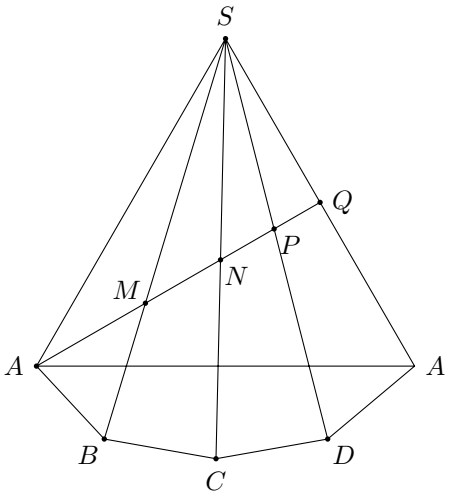
Cắt ngọn tháp và trải đều trên mặt phẳng như hình vẽ.

Do $\widehat{ASB} = 15^\circ$ nên khi trải ra ta thu được tam giác đều SAA.

Để $AM + MN + NP + PQ$ ngắn nhất thì A, M, N, P, Q thẳng hàng.

Khi đó $N = SC \cap AQ$ là giao của hai đường trung tuyến nên N là trọng tâm của $\triangle SAA$. Do đó

$$k = \frac{AM + MN}{NP + PQ} = \frac{AN}{NQ} = 2.$$



Chọn đáp án A □

Câu 5. Trong tất cả các khối chóp tam giác đều có diện tích toàn phần cho trước. Gọi a, b lần lượt là độ dài cạnh đáy và độ dài cạnh bên của khối chóp. Tính tỉ số $\dfrac{b}{a}$ khi thể tích của khối chóp đạt giá trị lớn nhất.

A $\dfrac{b}{a} = 1$. **B** $\dfrac{b}{a} = \sqrt{2}$. **C** $\dfrac{b}{a} = \sqrt{3}$. **D** $\dfrac{b}{a} = 2$.

Lời giải.

Đường cao mặt bên $h = \sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{4}}$. Diện tích toàn phần

$$S_{tp} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} a \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a^2\sqrt{3} + 3a\sqrt{4b^2 - a^2}}{4} \Rightarrow b^2 = \frac{\left(\dfrac{4S - a^2\sqrt{3}}{3a}\right)^2 + a^2}{4}.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a^2}{12} \cdot \sqrt{3 \cdot \frac{\left(\dfrac{4S - a^2\sqrt{3}}{3a}\right)^2 + a^2}{4} - a^2} = \frac{a\sqrt{S\left(2S - a^2\sqrt{3}\right)}}{6\sqrt{6}}.$$

$$V^2 = \frac{a^2 S\left(2S - a^2\sqrt{3}\right)}{216} = \frac{\sqrt{3}a^2\left(2S - a^2\sqrt{3}S\right)}{216\sqrt{3}} \le \frac{S}{216\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}a^2 + 2S - \sqrt{3}a^2}{2}\right)^2 = \frac{S^2}{216\sqrt{3}}.$$

Dấu "="xảy ra khi $\sqrt{3}a^2 = 2S - \sqrt{3}a^2 \Leftrightarrow S = a^2\sqrt{3} \Rightarrow b = a \Rightarrow \dfrac{b}{a} = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = 1$, tất cả các cạnh còn lại bằng $\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (B) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

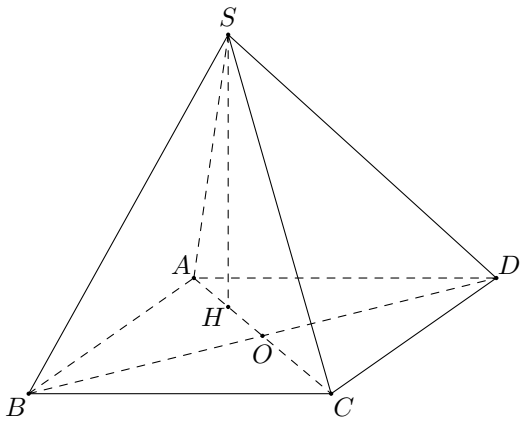
Ta có $\triangle SBD = \triangle CBD$ nên $SO = CO$.

Trong $\triangle SAC$ có $SO = CO = \dfrac{1}{2}AC$ nên $\triangle SAC$ vuông tại S. Suy ra $AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = 2$.

Diện tích đáy $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2 \cdot \dfrac{1}{2}BO \cdot AC = 2\sqrt{2}$.

Do $SB = SC = SD = \sqrt{3}$ nên hình chiếu vuông góc H của S trên $(ABCD)$ thuộc cạnh AC.

Vì SH là đường cao của $\triangle SAC$ nên



$$SH = \frac{SA \cdot SC}{\sqrt{SA^2 + SC^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

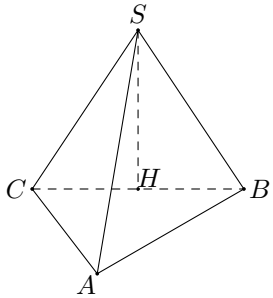
Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = 1, AC = 2$ và $SA = SB = SC = \sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{7}}{6}$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. (C) $\dfrac{\sqrt{17}}{6}$. (D) $\dfrac{1}{6}$.

Lời giải.

Trong $\triangle ABC$ có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{5}$.

Do $SA = SB = SC = \sqrt{3}$ nên hình chiếu vuông góc H của S trên (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Khi đó H là trung điểm của BC.



Trong $\triangle SHB$ có $SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{3 - \dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = \dfrac{\sqrt{7}}{6}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BAC} = 135°$, $AB = AC = 1$ và $SA = SB = SC = 2$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{6-2\sqrt{2}}}{4}$. (B) $\dfrac{\sqrt{6-2\sqrt{2}}}{6}$. (C) $\dfrac{\sqrt{6-2\sqrt{2}}}{12}$. (D) $\dfrac{\sqrt{6-2\sqrt{2}}}{2}$.

Lời giải.

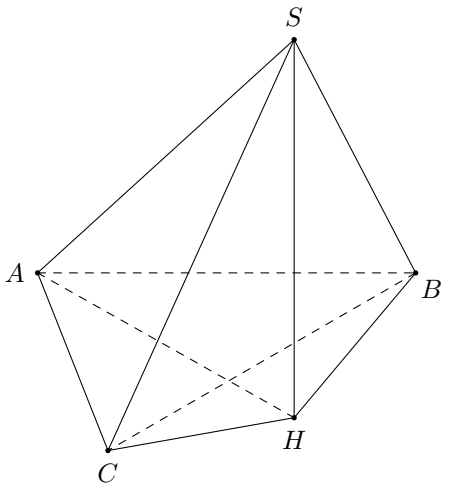
Diện tích đáy $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\widehat{BAC}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Trong $\triangle ABC$ có

$$BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{BAC}}=\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Khi đó

$$R=\frac{BC}{2\sin A}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\sqrt{2}+1}.$$



Do $SA=SB=SC=\sqrt{3}$ nên hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp H của $\triangle ABC$.

Trong $\triangle SBH$ có $SH=\sqrt{SB^2-HB^2}=\sqrt{4-\left(\sqrt{2}+1\right)}=\sqrt{3-\sqrt{2}}$.

Vậy $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SH\cdot S_{ABC}=\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{3-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6-2\sqrt{2}}}{6}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA=SB=AB=AC=a, SC=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{14}}{36}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{14}}{12}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{21}}{36}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{21}}{12}$.

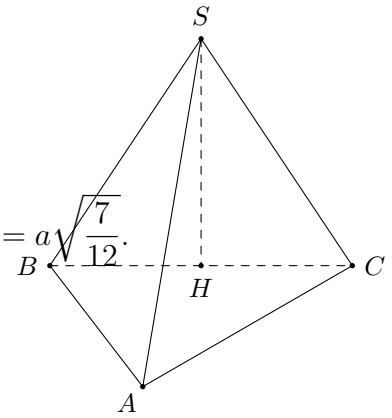
Lời giải.

Gọi H là trung điểm của BC. Ta có $AH\perp BC\Rightarrow AH\perp(SBC)$.

Do $AS=AB=AC=a$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle SBC$.

Do đó $\triangle SBC$ vuông tại S và

$$BC=\sqrt{SB^2+SC^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{a\sqrt{15}}{3}\Rightarrow AH=\sqrt{a^2-\frac{5a^2}{12}}=a\sqrt{\frac{7}{12}}.$$



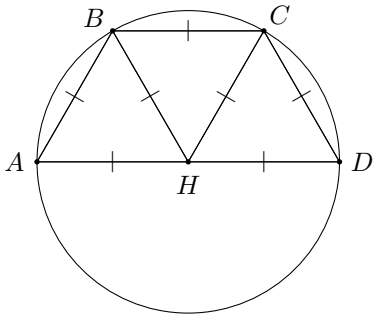
Vậy $V=\dfrac{1}{6}\cdot a\cdot\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\cdot a\sqrt{\dfrac{7}{12}}=\dfrac{a^3\sqrt{14}}{36}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $SA=SB=SC=AD=2a, AB=BC=CD=a$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ đã cho bằng

(A) $\dfrac{9a^3}{4}$. (B) $\dfrac{a^3}{4}$. (C) $\dfrac{3a^3}{4}$. (D) $\dfrac{a^3}{12}$.

Lời giải.



Với giả thiết $ABCD$ là hình thang và $AB = BC = CD = a, AD = 2a$ thì tứ giác $ABCD$ là hình thang cân và nội tiếp đường tròn tâm H có đường kính $AD = 2a$.

Do $SA = SB = SC = 2a$ suy ra H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Do đó chiều cao của khối chóp $h = \sqrt{SA^2 - HA^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Diện tích đáy $S_{ABCD} = 3S_{ABH} = 3 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{4}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Trong các khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng b thoả mãn $4a + b = 6\sqrt{2}$. Khối chóp có thể tích lớn nhất bằng

(A) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. (B) $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABCD} = a^2, h = b = 6\sqrt{2} - 4a \Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S \cdot h = \dfrac{a^2\left(6\sqrt{2} - 4a\right)}{3}$.

Theo bất đẳng thức cô-si ta có

$$V = \frac{2}{3} \cdot a \cdot a \cdot \left(3\sqrt{2} - 2a\right) \le \frac{2}{3}\left(\frac{a + a + 3\sqrt{2} - 2a}{3}\right)^3 = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = 3\sqrt{2} - 2a \Leftrightarrow a = \sqrt{2} \Rightarrow b = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Cho khối chóp $S.ABCD$ có $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{3}$ và $AB = BC = CD = a, AD = 2a$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. (B) $\dfrac{3a^3\sqrt{6}}{4}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. (D) $\dfrac{3a^3\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

Do $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{3}$ nên tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) bán kính R.

Do $AB = BC = CD = a, AD = 2a$ nên $ABCD$ là nửa lục giác đều. Suy ra $R = a$.

Ta có $h^2 = SA^2 - R^2 = 2a^2 \Rightarrow h = a\sqrt{2}$ và $S_{ABCD} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}h \cdot S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

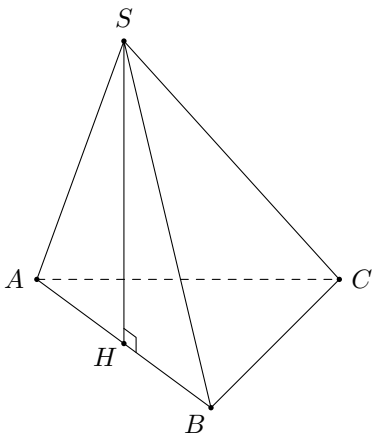
Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông, $SA = SB = SC = 1$ và cùng tạo với đáy một góc α. Tính $\cos\alpha$ khi thể tích của khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất?

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Giả sử đáy là tam giác vuông tại C. Do $SA = SB = SC = 1$ nên hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) là trung điểm của AB.



$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{ABC} \le \frac{1}{3}SH \cdot HA^2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2SH^2 \cdot HA^2 \cdot HA^2}.$$

Ta có $2SH^2 + HA^2 + HA^2 = 2SH^2 + 2HA^2 = 2SA^2 = 2$.

$2SH^2 \cdot HA^2 \cdot HA^2$ đạt giá trị lớn nhất khi $2SH^2 = HA^2 = HA^2 = \dfrac{2}{3}$.

Vậy $V_{S.ABC}$ đạt giá trị lớn nhất khi tam giác ABC vuông cân và

$$HA^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \cos\widehat{SAH} = \frac{AH}{SA} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Chọn đáp án (B) □

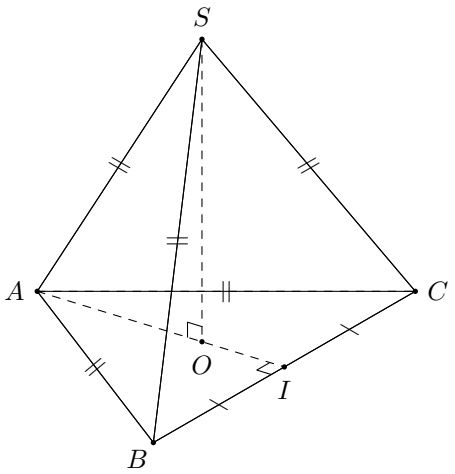
Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a\sqrt{3}, AB = AC = 2a, BC = 3a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{4}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{35}}{2}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{35}}{6}$. (D) $\dfrac{2a^3\sqrt{5}}{7}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp mặt đáy (ABC).

Do $SA = SB = SC$ nên $SO \perp (ABC)$.



Ta có

$$AI = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

$$AO = R = \frac{AC^2}{2AI} = \frac{4a^2}{a\sqrt{7}} = \frac{4}{\sqrt{7}}a.$$

Suy ra $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{3a^2 - \dfrac{16}{7}a^2} = \dfrac{\sqrt{35}}{7}a.$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AI \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} \cdot 3a = \frac{3a^2\sqrt{7}}{4}.$$

Vậy thể tích khối chóp cần tìm là

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SO \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{35}}{7}a \cdot \frac{3a^2\sqrt{7}}{4} = \frac{a^3\sqrt{5}}{4}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC) và góc giữa SB và mặt đáy bằng 30°. Thể tích V của khối chóp đã cho bằng

(A) $V=\dfrac{a^3}{4}$. (B) $V=\dfrac{a^3}{12}$. (C) $V=\dfrac{3a^3}{4}$. (D) $V=\dfrac{9a^3}{4}$.

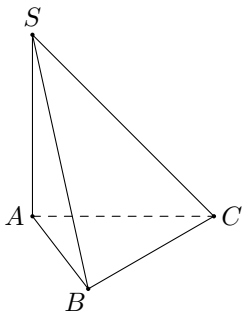
Lời giải.

Ta có $(SB,(ABC))=(SB,AB)=\widehat{SBA}=30^\circ$.

Suy ra $SA=AB\cdot\tan 30^\circ=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3}{12}.$$



Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Cho khối chóp $S.ABCD$ có chiều cao SA bằng a. Mặt đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{ABC}$ bằng 60°. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ theo a?

(A) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (B) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (C) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. (D) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

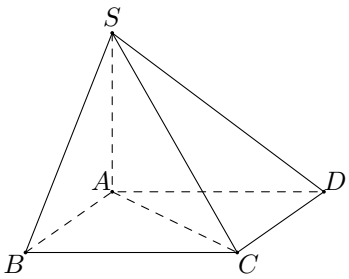
Lời giải.

Vì đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a có $\widehat{ABC}=60^\circ$

Suy ra $S_{ABCD}=2\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA\cdot S_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot a\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$



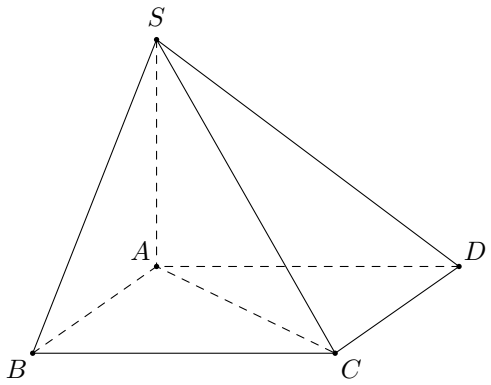
Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với $AC=\dfrac{\sqrt{a\sqrt{2}}}{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, cạnh bên SB hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60°. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

(A) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. (B) $V=\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{24}$. (C) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. (D) $V=\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình vuông với $AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AB = \dfrac{a}{2} \Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{a^2}{4}$.



$$(SB, (ABCD)) = (SB, AB) = \widehat{SBA} = 60^\circ.$$

Suy ra $SA = AB \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}.$$

Chọn đáp án (A) □

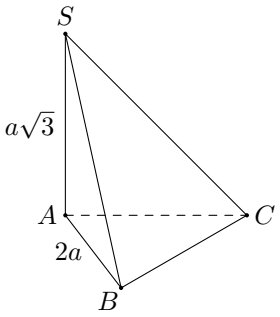
Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $AB = 2a, \widehat{BAC} = 60^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a\sqrt{3}$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$

(A) $V = 2a^3$. (B) $V = 3a^3$. (C) $V = a^3$. (D) $V = 4a^3$.

Lời giải.

$\triangle ABC$ vuông tại B có $BC = AB \cdot \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$.
Suy ra

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = 2a^2\sqrt{3}.$$



Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot 2a^2\sqrt{3} = 2a^3.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $SA = a$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$, $\widehat{SCA} = 45^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là V. Tỉ số $\dfrac{V}{a^3}$ gần giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

(A) 0,01. (B) 0,05. (C) 0,08. (D) 1.

Lời giải.

ΔSAC vuông cân tại A: $AC = SA = a$

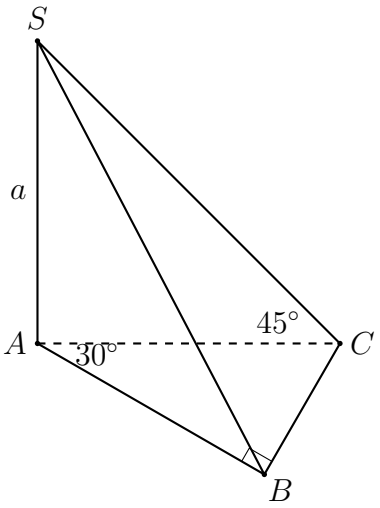
ΔABC vuông tại B và $\widehat{BAC} = 30^\circ$.

$$\Rightarrow \begin{cases} BC = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a}{2} \\ AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}.$$

Suy ra $V = V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SA \cdot S_{ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Vậy $\dfrac{V}{a^3} = \dfrac{\sqrt{3}}{24} \approx 0{,}072$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 2a$, $AD = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy và góc giữa hai mặt phẳng $\widehat{(SAB),(SBD)}$ là 45°. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là V. Tỉ số $\dfrac{V}{a^3}$ gần giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

(A) 0,25. (B) 0,5. (C) 0,75. (D) 1,5.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} (SAB) \cap (SAD) = SA \\ (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD)$.

Gọi H là hình chiếu của A trên $SB \Rightarrow AH \perp SB$.

Dễ thấy $AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SB$.

Do đó $SB \perp (AHD) \Rightarrow SB \perp HD$.

Khi đó ta có $\begin{cases} (SAB) \cap (SBD) = SB \\ AH \perp SB;\ HD \perp SB \\ AH \subset (SAB);\ HD \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{(SAB),(SBD)} = \widehat{AHD} = 45^\circ$.

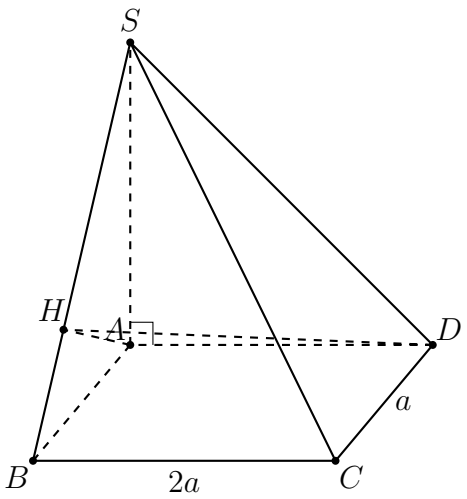
Hay ΔAHD vuông cân tại $A \Rightarrow AH = AD = a$.

ΔSAB vuông tại A: $\dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{1}{AH^2} - \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{3}{4a^2}$.

$\Rightarrow SA = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Suy ra $V = V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SA \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2a}{\sqrt{3}} \cdot 2a^2 = \dfrac{4a^3}{3\sqrt{3}}$.

Vậy $\dfrac{V}{a^3} = \dfrac{4}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}77$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với đáy và $AB = a$, $AC = 2a$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60°. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

(A) $V=\dfrac{a^3\sqrt{21}}{14}$. (B) $V=\dfrac{a^3\sqrt{21}}{13}$. (C) $V=\dfrac{2a^3\sqrt{21}}{14}$. (D) $V=\dfrac{2a^3\sqrt{21}}{13}$.

Lời giải.

Tính cạnh $BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos A}=a\sqrt{7}$.

Kẻ AH vuông góc BC tại H,

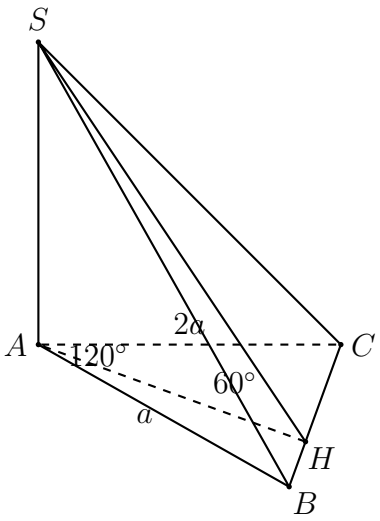
Diện tích tam giác $\dfrac{AH.BC}{2}=\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin A$.

$\Rightarrow AH=\dfrac{AB.AC.\sin A}{BC}=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Góc tạo bởi $mp\,(MBC)$ và $mp\,(ABC)$ là góc $\widehat{SHA}=60^\circ$.

Suy ra $SA=AH\cdot\tan(60^\circ)=\dfrac{3a\sqrt{7}}{7}$.

Vậy thể tích $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SA\cdot S_{ABC}=\dfrac{a^3\sqrt{21}}{14}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có $AB=3a$; $AD=4a$, $SA\perp(ABCD)$, SC tạo với đáy góc 45°. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$

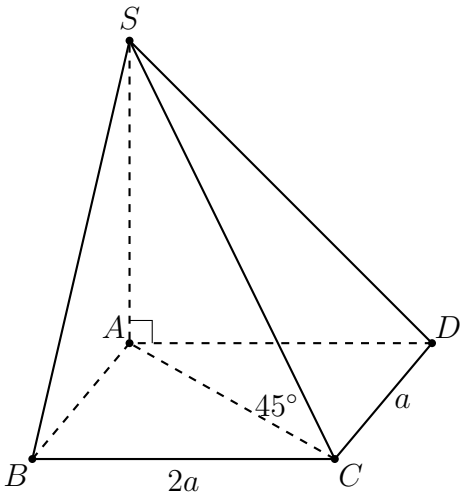
(A) $V=20a^3$. (B) $V=20\sqrt{2}a^3$. (C) $V=30a^3$. (D) $V=30\sqrt{2}a^3$.

Lời giải.

Tính $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5a$.

Vì tam giác SAC vuông cân tại A suy ra $SA=5a$.

Tính thể tích $V=\dfrac{1}{3}SA\cdot S_{ABCD}=20a^3$.



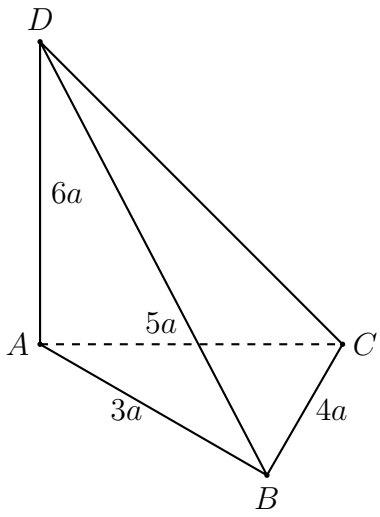
Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD\perp(ABC)$ và $AB=3a$; $BC=4a$; $AC=5a$; $AD=6a$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là

(A) $V=6a^3$. (B) $V=12a^3$. (C) $V=18a^3$. (D) $V=36a^3$.

Lời giải.

Ta có ΔABC vuông tại B.
$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot BC = 6a^2$.
$\Rightarrow V_{SABC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot AD = \dfrac{1}{3} \cdot 6a^2 \cdot 6a = 12a^3$.



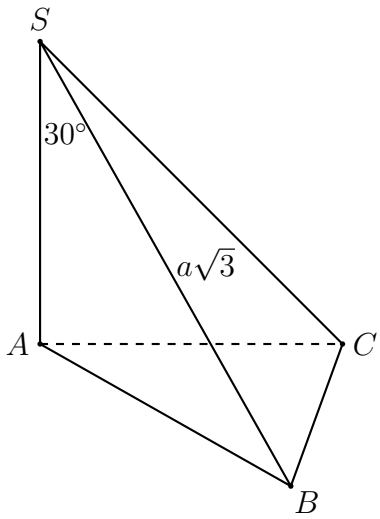
Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Cho khối tứ diện $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau; $SB = a\sqrt{3}$, $\widehat{BSC} = 45^0$, $\widehat{ASB} = 30°$. Thể tích khối tứ diện $S.ABC$ là V. Tính tỉ số $\dfrac{a^3}{V}$.

(A) $\dfrac{8}{3}$. (B) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Ta có ΔSBC vuông tại B; ΔABC vuông tại B.
$\Rightarrow SA = SB \cdot \cos\widehat{ASB} = \dfrac{3a}{2}$.
Ta có $AB = SB \cdot \sin 30° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Ta lại có $BC = SB = a\sqrt{3}$.
$\Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}AB \cdot BC \cdot SA$.
$\Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot \dfrac{3a}{2} = \dfrac{3a^3}{8}$.
$\Rightarrow \dfrac{a^3}{V} = \dfrac{8}{3}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $SD \perp (ABCD)$, $AB = AD = a$, $CD = 3a$, $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

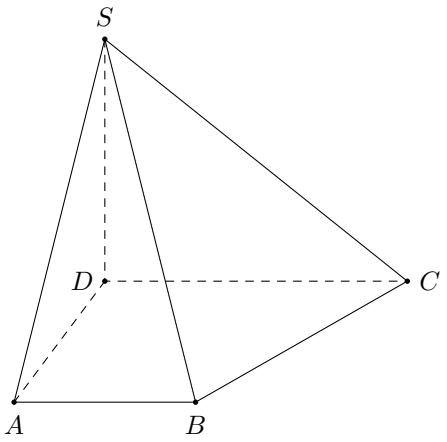
(A) $V = \dfrac{2}{3}a^3$. (B) $V = \dfrac{4}{3}a^3$. (C) $V = \dfrac{\sqrt{2}}{3}a^3$. (D) $V = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}a^3$.

Lời giải.

Trong tam giác SAD ta có $SD = \sqrt{SA^2 - AD^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$\begin{aligned} V_{S.ABCD} &= \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SD \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{(AB + CD) \cdot AD}{2} \cdot SD \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{(a + 3a) \cdot a}{2} \cdot a\sqrt{2} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} a^3. \end{aligned}$$



Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{2\sqrt{2}}{3} a^3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là 30°. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là V, tỉ số $\frac{3V}{a^3}$ là

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. (B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

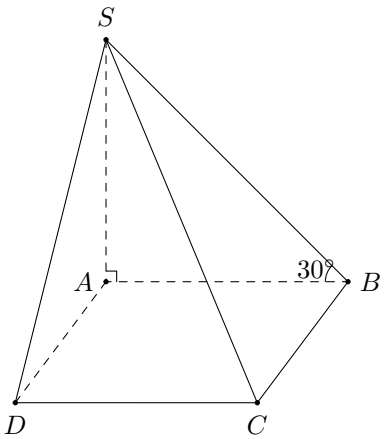
Ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD)$.

Lại có $((SBC), (ABCD)) = \widehat{SBA}$. Suy ra, $\widehat{SBA} = 30^\circ$.

Trong tam giác SAB ta có $SA = AB \cdot \tan \widehat{SBA} = a \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} a$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} a = \frac{\sqrt{3}}{9} a^3.$$



Vậy $\frac{3V}{a^3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

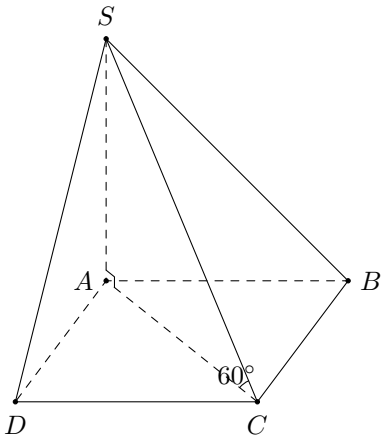
Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy, cạnh SC hợp với đáy một góc 60°. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

(A) $V = a^3$. (B) $V = 2a^3$. (C) $V = a^3\sqrt{3}$. (D) $V = 2a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAD)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(SAD)=SA\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABCD)$.



Lại có $(SC,(ABCD))=\widehat{SCA}$. Suy ra, $\widehat{SCA}=60^\circ$.

Trong tam giác ABC ta có $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{a^2+3a^2}=2a$.

Trong tam giác SAC ta có $SA=AC\cdot\tan\widehat{SCA}=2a\cdot\tan 60^\circ=2\sqrt{3}a$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$\begin{aligned}V_{S.ABCD}&=\frac{1}{3}\cdot S_{ABCD}\cdot SA\\&=\frac{1}{3}\cdot AB\cdot BC\cdot SA\\&=\frac{1}{3}\cdot a\cdot a\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}a\\&=2a^3.\end{aligned}$$

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V=2a^3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a$, $ACB=60^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SB tạo với đáy một góc bằng 45°. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

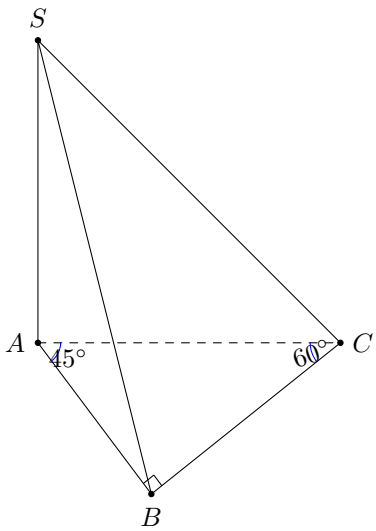
(A) $V=\dfrac{\sqrt{3}}{6}a^3$. (B) $V=\dfrac{\sqrt{3}}{18}a^3$. (C) $V=\dfrac{\sqrt{3}}{9}a^3$. (D) $V=\dfrac{\sqrt{3}}{12}a^3$.

Lời giải.

Ta có $(SB,(ABC))=\widehat{SBA}$. Suy ra, $\widehat{SBA}=45^\circ$.

Mặt khác SAB vuông tại A nên $SA=AB=a$.

Trong tam giác ABC ta có $BC=AB\cdot\cot\widehat{ACB}=a\cdot\cot 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$.



Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$$\begin{aligned}V_{S.ABC}&=\frac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot SA\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot SA\\&=\frac{1}{6}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}a\cdot a\\&=\frac{\sqrt{3}}{18}a^3.\end{aligned}$$

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V=\dfrac{\sqrt{3}}{18}a^3$.

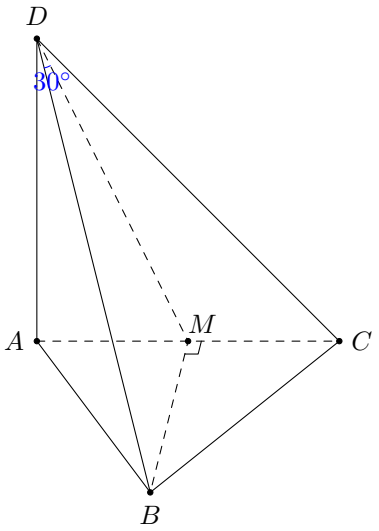
Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC), góc giữa BD và (DAC) là 30°. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là V. Tỉ số $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{V}$ là

(A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) 12.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm AC. Suy ra, $BM \perp AC$ và $BM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.



Ta có $\begin{cases} BM \perp AC \\ BM \perp AD \end{cases} \Rightarrow BM \perp (DAC)$ tại M.

Suy ra, hình chiếu của B lên (DAC) là M.

Do đó, $(BD, (DAC)) = \widehat{BDM}$. Suy ra, $\widehat{BDM} = 30^\circ$.

Trong tam giác BDM ta có $BD = \dfrac{BM}{\sin \widehat{BDM}} = \dfrac{\sqrt{3}a}{2\sin 30^\circ} = \sqrt{3}a$.

Trong tam giác ABD ta có $AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = \sqrt{2}a$.

Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{6}}{12}a^3.$$

Vậy $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{V} = 12$.

Chọn đáp án (D) □

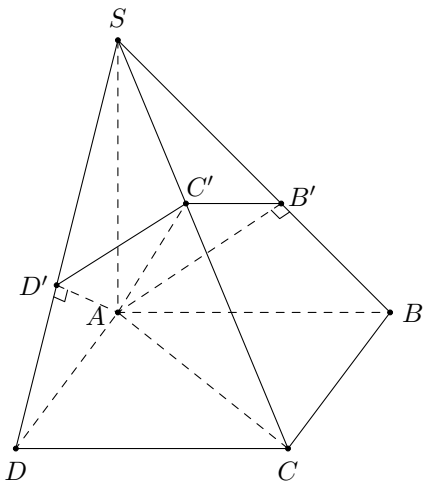
Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh 20 cm. SA vuông góc với đáy và $SA = 30$ cm. Gọi B', D' là hình chiếu của A lên SB, SD. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C'. Thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ là

(A) 1466 cm^3. (B) 1500 cm^3. (C) 1400 cm^3. (D) 1540 cm^3.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} SC \perp AB' \\ SC \perp AD' \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AB'D')$.

Mặt khác $(AB'D')$ cắt SC tại C' nên $SC \perp AC'$ tại C'. Do đó, C' là hình chiếu của A lên SC.



Vì AC là đường chéo hình vuông nên $AC = 20\sqrt{2}$ cm.

Trong tam giác SAC ta có $SC^2 = SA^2 + AC^2 = 30^2 + (20\sqrt{2})^2 = 1700$.

Trong tam giác SAB ta có $SB^2 = SA^2 + AB^2 = 30^2 + 20^2 = 1300$.

Ta có $\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{SA^2}{SC^2} = \dfrac{30^2}{1700} = \dfrac{9}{17}$.

Lại có $\dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{SA^2}{SB^2} = \dfrac{30^2}{1300} = \dfrac{9}{13}$.

Mặt khác

$$\frac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{2V_{S.AB'C'}}{2V_{S.ABC}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{9}{13} \cdot \frac{9}{17} = \frac{81}{221}.$$

Suy ra

$$V_{S.AB'C'D'} = \frac{81}{221} \cdot V_{S.ABCD} = \frac{81}{221} \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SA = \frac{81}{221} \cdot \frac{1}{3} \cdot 20^2 \cdot 30 = \frac{324000}{221} \approx 1466 \text{ cm}^3.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mặt bên (SBC) tạo với mặt phẳng đáy một góc $45°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là V. Tính tỉ số $\dfrac{6V}{a^3}$?

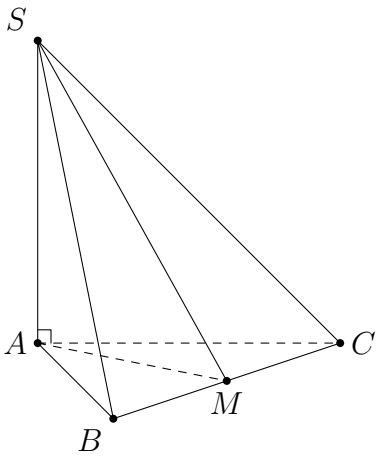
(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (D) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AM = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AM \cdot BC = \dfrac{1}{4} \cdot BC^2 = \dfrac{a^2}{2}$.

Ta có $\begin{cases} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ AM \perp BC \\ SA \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow ((SBC);(ABCD)) = \widehat{SMA} = 45°$.



Xét tam giác SAM có $SA = AM \cdot \tan \widehat{SMA} = AM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích của khối chóp là $V_{SABC} = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Tỷ số $\dfrac{6V}{a^3} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

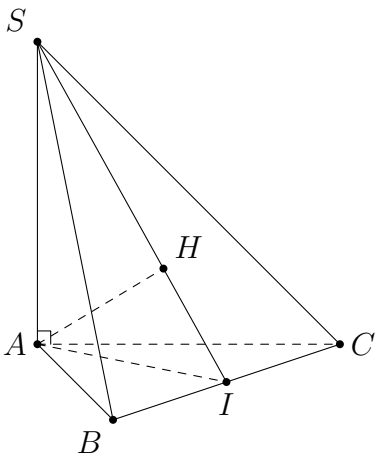
Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đề. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3, góc giữa (SBC) và mặt phẳng đáy bằng

α. Tính $\cos\alpha$ khi khối chóp có thể tích nhỏ nhất

(A) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (B) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (C) $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. (D) $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm BC. Vì chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy nên $(SAI) \perp (SBC)$ theo giao tuyến SI.

Kẻ $AH \perp SI \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = AH = 3$.

Giả sử $AB = 2x \Rightarrow AI = x\sqrt{3}$.

Trong tam giác vuông ΔSAI có

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AI^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{3x^2} \Rightarrow SA = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2-3}}$ (Điều kiện $x \in (\sqrt{3};+\infty)$) $\Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA \cdot S_{ABC} = \dfrac{x^3\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-3}}$.

Xét hàm $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-3}}$ trên $(0;3)$ có

$$f'(x) = \frac{3x^2\sqrt{x^2-3} - \dfrac{x^4}{\sqrt{x^2-3}}}{x^2-3} = \frac{x^2(2x^2-9)}{\left(\sqrt{x^2-3}\right)^3}.$$

Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ x = -\dfrac{3}{\sqrt{2}}. \end{array}\right.$

Từ bảng biến thiên ta suy ra GTNN của hàm số đạt tại $x = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

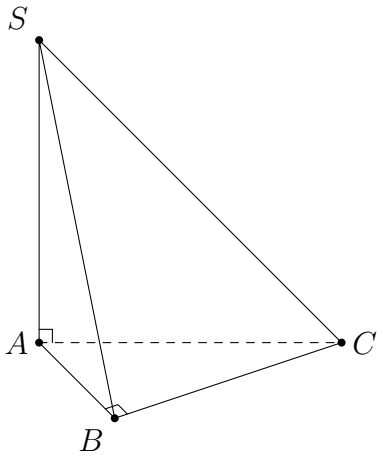
Khi đó $\cos\alpha = \dfrac{IH}{IA} = \dfrac{\sqrt{AI^2 - AH^2}}{AI} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 8$, $BC = 6$. Biết $SA = 6$ và vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Một điểm trong M của khối chóp cách đều tất cả các mặt của khối chóp một đoạn bằng h. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $h = \dfrac{4}{3}$. (B) $h = \dfrac{4}{9}$. (C) $h = \dfrac{2}{3}$. (D) $h = \dfrac{2}{9}$.

Lời giải.



Vì M điểm trong của khối chóp cách đều tất cả các mặt của khối chóp một đoạn bằng h nên M là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp, bán kính mặt cầu là $r = h$.

Mặt khác mặt cầu bán kính r nội tiếp hình chóp thì thể tích khối chóp là

$V = \dfrac{1}{3} \cdot S \cdot r$ trong đó S là tổng diện tích tất cà các mặt của hình chóp.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$;

$SB = \sqrt{AB^2 + SB^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$

Vì $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$

$S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle SAB} + S_{\triangle SBC} + S_{\triangle SAC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot BC + \dfrac{1}{2} \cdot SA \cdot AB + \dfrac{1}{2} \cdot SB \cdot BC + \dfrac{1}{2} \cdot SA \cdot AC = 108$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot S \cdot r = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot 6 \cdot 24 = 48 \Rightarrow r = h = \dfrac{3V}{S} = \dfrac{3 \cdot 48}{108} = \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 8$, $BC = 6$. Biết $SA = 6$ và vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Một điểm M thuộc phần không gian bên trong của hình chóp và cách đều tất cả các mặt của hình chóp. Tính thể tích khối tứ diện $M.ABC$

(A) $V = 24$. (B) $V = \dfrac{64}{3}$. (C) $V = \dfrac{32}{3}$. (D) $V = 12$.

Lời giải.

Vì điểm M thuộc phần không gian bên trong của hình chóp và cách đều tất cả các mặt của khối chóp nên M là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp, bán kính mặt cầu là r. Theo câu 31 ta có $r = h = \dfrac{4}{3}$.

$$\Rightarrow V_{M.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \frac{4}{3} = \frac{32}{3}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Cho khối chóp $S.ABC$ là tam giác vuông cân tại A, $AB = 2a$, SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{4a}{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

(A) $V = \dfrac{8a^3}{3}$. (B) $V = \dfrac{9a^3}{8}$. (C) $V = 8a^3$. (D) $V = \dfrac{27a^3}{8}$.

Lời giải.

Vì $\triangle ABC$ là tam giác vuông cân tại A, $AB = 2a$, nên $BC = 2\sqrt{2}a$.
Gọi I là trung điểm BC suy ra $AI = \dfrac{1}{2}BC = a\sqrt{2}$.

Khi đó $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI)$.

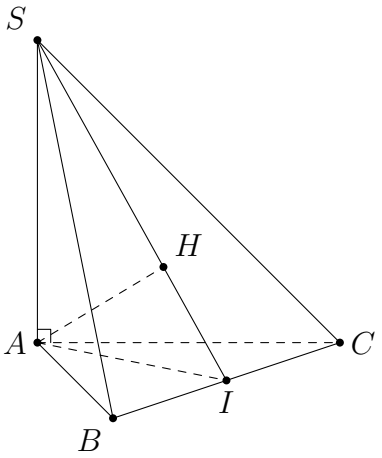
Gọi H là hình chiếu của A lên SI suy ra AH là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Suy ra $AH = \dfrac{4a}{3}$.

Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AI^2} + \dfrac{1}{SA^2} \Rightarrow SA = \sqrt{\dfrac{AI^2 \cdot AH^2}{AI^2 - AH^2}} = 4a$.

Mặt khác $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = \dfrac{1}{2}2a \cdot 2a = 2a^2$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot 2a^2 \cdot 4a = \dfrac{8a^3}{3}$.



□

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, $AB = 2a$, $\widehat{BAC} = 45^\circ$, SA vuông góc với đáy, khoảng cách giữa hai đường thẳng SB , AC bằng $\dfrac{4a}{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

(A) $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. (B) $V = \sqrt{2}a^3$. (C) $V = 4\sqrt{2}a^3$. (D) $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải.

Kẻ $Bx \parallel AC \Rightarrow \mathrm{d}(AC, SB) = \mathrm{d}(AC, (SBx)) = \mathrm{d}(A, (SBx))$.

Dựng $AI \perp Bx$ tại I, $AJ \perp SI$ tại J.

$\Rightarrow \mathrm{d}(AC, SB) = \mathrm{d}(A, (SBx)) = AJ = \dfrac{4a}{3}$.

Tam giác AIB vuông cân tại I

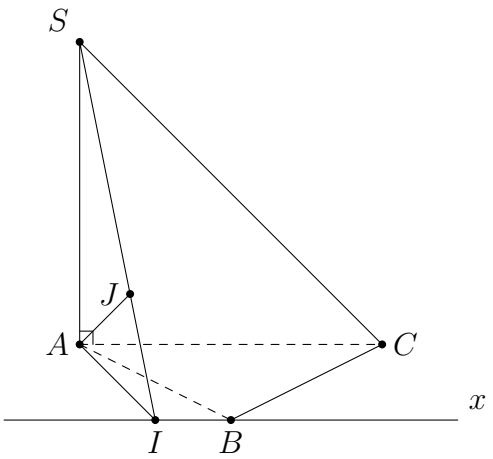
$\Rightarrow AI = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$.

Tam giác SAI vuông tại A

$\Rightarrow \dfrac{1}{AJ^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AI^2} \Rightarrow SA = \dfrac{AI \cdot AJ}{\sqrt{AI^2 - AJ^2}} = 4a$.

Diện tích tam giác ABC là $S = \dfrac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \sin 45^\circ = a^2\sqrt{2}$.

Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3} \cdot a^2\sqrt{2} \cdot 4a = \dfrac{4a^3\sqrt{2}}{3}$.



Chọn đáp án (D)

□

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, $\widehat{BAC} = \alpha$ $(30^\circ < \alpha < 90^\circ)$, $AB = 6$, SA vuông góc với đáy, khoảng cách giữa hai đường thẳng SB, AC bằng 3. Tính $\cos\alpha$ khi khối chóp $S.ABC$ có thể tích nhỏ nhất

(A) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$. (C) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (D) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Kẻ $Bx \parallel AC \Rightarrow \mathrm{d}(AC, SB) = \mathrm{d}(AC, (SBx)) = \mathrm{d}(A, (SBx))$.

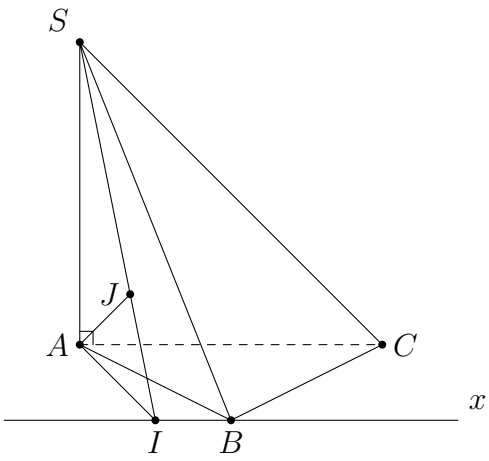
Dựng $AH \perp Bx$ tại H, $AI \perp SH$ tại $I \Rightarrow \mathrm{d}(AC, SB) = \mathrm{d}(A, (SBx)) = AI = 3$.

Tam giác AHB vuông tại $H \Rightarrow AH = AB \cdot \sin\alpha = 6 \cdot \sin\alpha$.

Tam giác SAH vuông tại A.

$\Rightarrow \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{1}{AI^2} - \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{36\sin^2\alpha} = \dfrac{4\sin^2\alpha - 1}{36\sin^2\alpha}$.

$\Rightarrow SA = \dfrac{6\sin\alpha}{\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}$.



Thể tích khối chóp $V = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{6\sin\alpha}{\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 6.6 \cdot \sin\alpha = \dfrac{36\sin^2\alpha}{\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}$.

Ta có $V = \dfrac{36\sin^2\alpha}{\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}} = \dfrac{9\left(4\sin^2\alpha - 1\right) + 9}{\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}} = 9\left[\sqrt{4\sin^2\alpha - 1} + \dfrac{1}{\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}\right] \geq 18.$

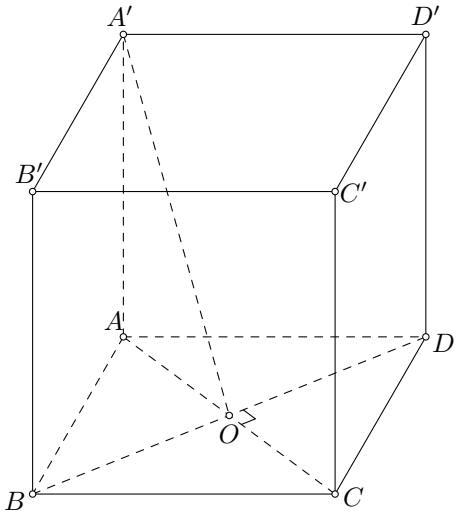
$\Rightarrow$ min $V = 18$ xảy ra khi $4\sin^2\alpha - 1 = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là một hình thoi. Biết diện tích của hai mặt chéo $ACC'A'$, $BDD'B'$ lần lượt là 1 và $\sqrt{5}$ và $\widehat{BA'D} = 90°$. Tính thể tích V của khối hộp đã cho

(A) $V = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. (B) $V = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$. (C) $V = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. (D) $V = \dfrac{2\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải.



Ta có $\dfrac{S_{ACC'A'}}{S_{BDD'B'}} = \dfrac{AC \cdot CC'}{BD \cdot DD'} = \dfrac{AC}{BD}$ $(CC' = DD') \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{AC}{BD} \Rightarrow BD = AC\sqrt{5}$.

Ta có $AA' = \sqrt{OA'^2 - OA^2} = \sqrt{\dfrac{BD^2}{4} - \dfrac{AC^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{5 \cdot AC^2}{4} - \dfrac{AC^2}{4}} = AC$

$\Rightarrow S_{ACC'A'} = AC \cdot AA' = AC^2 = 1 \Rightarrow AC = 1$ và $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \dfrac{\sqrt{5}}{2} AC^2 = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

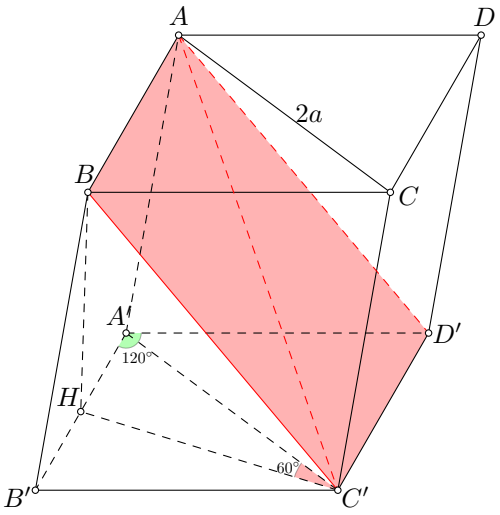
Vậy thể tích khối hộp đứng là $V = \sqrt{\dfrac{S_{ABCD} \cdot S_{ACC'A'} \cdot S_{BDD'B'}}{2}} = \sqrt{\dfrac{\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ với đáy $ABCD$ là hình thoi, $AC = 2a$, $\widehat{BAD} = 120^0$. Hình chiếu vuông góc của điểm B trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ là trung điểm cạnh $A'B'$, góc giữa mặt phẳng $(AC'D')$ và mặt đáy lăng trụ bằng $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

(A) $V = \sqrt{3}a^3$. (B) $V = 6\sqrt{3}a^3$. (C) $V = 2\sqrt{3}a^3$. (D) $V = 3\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm $A'B'$, suy ra $BH \perp (A'B'C'D')$.

Vì $A'B'C'D'$ là hình thoi và $\widehat{B'A'D'} = 120° \Rightarrow \triangle A'B'C'$ là tam giác đều cạnh $2a$.

Ta có $\begin{cases} (AC'D') \cap (A'B'C'D') = C'D' \\ HC' \perp C'D' \\ BC' \perp C'D' \end{cases} \Rightarrow ((AC'D'), (A'B'C'D')) = \widehat{BC'H} = 60°.$

Có $\triangle A'B'C'$ đều cạnh $2a$ nên $C'H = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2a = \sqrt{3}a$.

Xét tam giác BHC' vuông tại H có $\tan 60° = \dfrac{BH}{C'H} \Rightarrow BH = C'H \tan 60° = 3a$.

$S_{A'B'C'D'} = 2S_{A'B'C'} = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2a)^2 = 2\sqrt{3}a^2$.

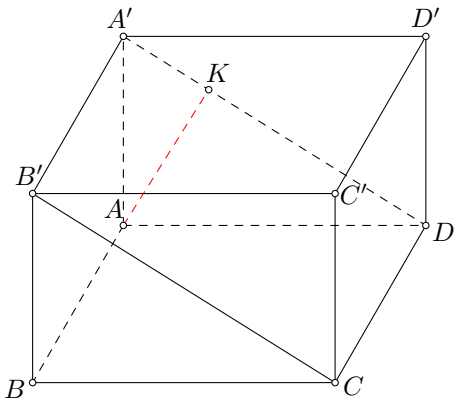
Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = BH \cdot S_{A'B'C'} = 3a \cdot 2\sqrt{3}a^2 = 6\sqrt{3}a^3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Cho khối lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, $A'D$ bằng 2 và độ dài đường chéo của mặt bên bằng 5. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho, biết độ dài cạnh đáy nhỏ hơn độ dài cạnh bên.

(A) $V = \dfrac{10\sqrt{5}}{3}$. (B) $V = 20\sqrt{5}$. (C) $V = \dfrac{20\sqrt{5}}{3}$. (D) $V = 10\sqrt{5}$.

Lời giải.



Dựng $AK \perp A'D$ $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp DD' \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ADD'A') \Rightarrow CD \perp AK.$

Vậy $AK \perp (CDA'B')$.

Ta có $A'D = 5$ và $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (A'B'CD) \Rightarrow d(AB, A'D) = d(A, (A'B'CD)) = AK = 2.$

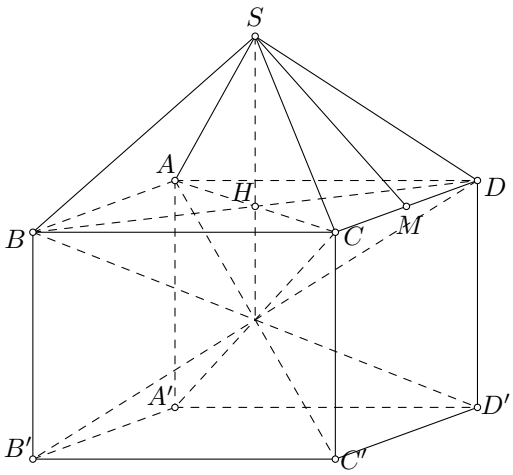
Do đó với $AD = a$, $AA' = b$ $(b > a)$, ta có $\begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ ab = 2 \cdot 5 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2\sqrt{5} \\ a = \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow V = a^2 b = 10\sqrt{5}.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Cho khối lập phương H có cạnh bằng 1. Qua mỗi cạnh của H dựng một mặt phẳng không chứa các điểm trong của H và tạo với hai mặt của H đi qua cạnh đó những góc bằng nhau. Các mặt phẳng như thế giới hạn một đa diện (H'). Tính thể tích của (H').

(A) 4. (B) 2. (C) 8. (D) 6.

Lời giải.



Giả sử khối lập phương là $ABCD.A'B'C'D'$.

Ta có $V_{(H')} = V_H + 6V_{S.ABCD}$. Với $S.ABCD$ là khối chóp tứ giác đều như hình vẽ.

Ta có $SH = HM \cdot \tan 45° = HM = \dfrac{1}{2} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1^2 \cdot \dfrac{1}{2}}{3} = \dfrac{1}{6}.$

Do đó $V_{(H')} = 1 + 6 \cdot \dfrac{1}{6} = 2.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Một khối hộp chữ nhật có các kích thước thỏa mãn a,b,$c \in [1;4]$ và $a+b+c=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích toàn phần của khối hộp chữ nhật đó.

(A) 18. (B) 24. (C) 9. (D) 12.

Lời giải.

Theo giả thiết có $a,b,c \in [1;4]$ và $a+b+c=6$; $S_{tp}=2(ab+bc+ca)$.

Ta có

$$a,b,c \in [1;4] \Rightarrow \begin{cases} (a-1)(b-1)(c-1) \geq 0 \\ (a-4)(b-4)(c-4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} abc+(a+b+c)-(ab+bc+ca)-1 \geq 0 \\ 64-16(a+b+c)+4(ab+bc+ca)-abc \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 63-15(a+b+c)+3(ab+bc+ca) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad 63-15+3(ab+bc+ca) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad ab+bc+ca \geq \frac{90-63}{3}=9.$$

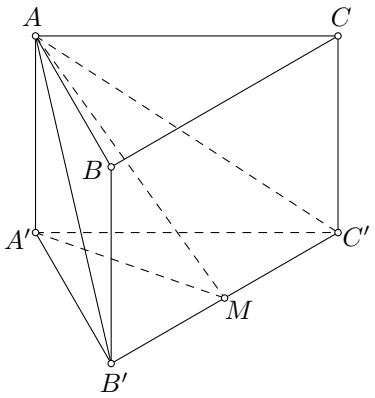
$\Rightarrow S_{tp} \geq 18$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân ABC với $AB=AC=a$, góc $\widehat{BAC}=120^\circ$, mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc 30°. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

(A) $V=\dfrac{9a^3}{8}$. (B) $V=\dfrac{a^3}{6}$. (C) $V=\dfrac{a^3}{8}$. (D) $V=\dfrac{3a^3}{8}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của $B'C'$.

Khi đó $A'M \perp B'C'$ và $AM \perp B'C'$ Nên góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và đáy là $\widehat{AMA'}=30^\circ$.

Trong tam giác vuông $A'MB'$ ta có $A'M=A'B' \cdot \cos\widehat{B'A'M}=\dfrac{a}{2}$.

Trong tam giác vuông $AA'M$ có $h=AA'=A'M\tan 30^\circ=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Diện tích tam giác $A'B'C'$ là $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

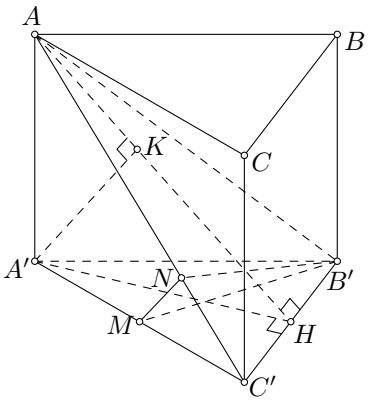
Vậy thể tích của khối lăng trụ là $V=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3}{8}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 44. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng 1 và cosin góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(ACC'A')$ bằng $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

(A) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (C) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. (D) $\frac{3\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải.



Đặt độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h.

Ta có $V = \frac{a^2h\sqrt{3}}{4}$.

Gọi H là trung điểm $B'C'$ và kẻ $A'H \perp AH$ suy ra $A'H \perp (AB'C')$.

Vậy theo giả thiết ta có $\frac{1}{1^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{h^2} + \frac{4}{3a^2} = 1$. (1)

Gọi M là trung điểm $A'C'$ và kẻ $MN \perp AC'$ có $MN \perp AC'$ và $B'M \perp AC'$.

$\Rightarrow ((AB'C'), (ACC'A')) = \widehat{MNB}$.

Có $\cos\widehat{MNB} = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \tan\widehat{MNB} = \sqrt{11}$.

Do đó $\frac{B'M}{MN} = \sqrt{11} \Leftrightarrow \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{ah}{2\sqrt{a^2+h^2}}} = \sqrt{11} \Leftrightarrow \sqrt{3a^2+3h^2} = h\sqrt{11}$ (2),

trong đó $MN = \frac{1}{2}d(A', AC') = \frac{ah}{2\sqrt{a^2+h^2}}$.

Giải (1) và (2) ta được $a = 2, h = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow V = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Cách 2:

Chú ý $\triangle AMC'$ là hình chiếu vuông góc của $\triangle AB'C'$ lên mặt phẳng $(ACC'A')$.

Do đó $\cos((AB'C'), (ACC'A')) = \frac{S_{AMC'}}{S_{AB'C'}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\frac{ah}{4}}{\frac{a\sqrt{h^2+\frac{3a^2}{4}}}{2}} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{4h^2+3a^2}$. (3)

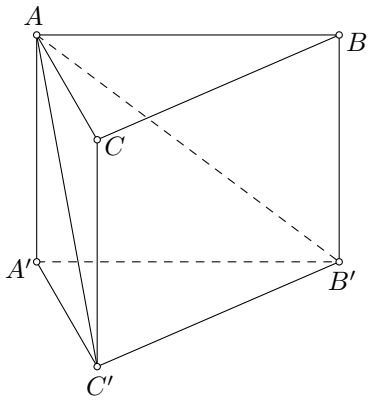
Giải (1) và (3) ta được $a = 2, h = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow V = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A. Khoảng cách từ A' đến các đường thẳng AB', AC' và mặt phẳng $(AB'C')$ lần lượt bằng 1; $\sqrt{2}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

(A) $\dfrac{6\sqrt{15}}{5}$. (B) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$. (D) $\dfrac{3\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải.



Đặt $A'B'=a$, $A'C'=b$, $AA'=c$ thì $S_{\triangle A'B'C'}=\dfrac{1}{2}ab \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{1}{2}abc$.

Ta có $\begin{cases} \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{1}{d^2\,(A',AB')}=1 \\ \dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{1}{d^2\,(A',AC')}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{1}{d^2\,(A',(AB'C'))}=\dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}=\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{c^2}=\dfrac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{a^2b^2c^2}=\dfrac{5}{108} \Rightarrow abc=\dfrac{6\sqrt{15}}{5}$.

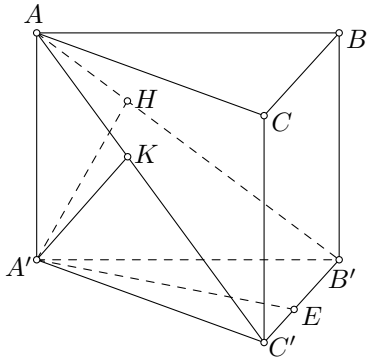
Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{3\sqrt{15}}{5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 46. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A. Khoảng cách từ A' đến các đường thẳng $AB', AC', B'C'$ lần lượt bằng 1; $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

(A) $\dfrac{6\sqrt{210}}{35}$. (B) $\dfrac{\sqrt{210}}{35}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{210}}{35}$. (D) $\dfrac{3\sqrt{210}}{35}$.

Lời giải.



Trong $(ACA'C')$ kẻ $A'K \perp AC' \Rightarrow A'K = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Trong $(ABA'B')$ kẻ $A'H \perp AB' \Rightarrow A'H = 1$.

Trong $(A'B'C')$ kẻ $A'E \perp B'C' \Rightarrow A'E = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Đặt $A'B' = a; A'C' = b; AA' = c$.

Ta có $\begin{cases} \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{1}{A'H^2} = 1 \\ \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{1}{A'K^2} = \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{A'E^2} = 2 \end{cases}$, cộng theo vế ta có $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{13}{6} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{7}{6} \\ \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{\dfrac{6}{5}} \\ b = \sqrt{\dfrac{6}{7}} \\ c = \sqrt{6}. \end{cases}$

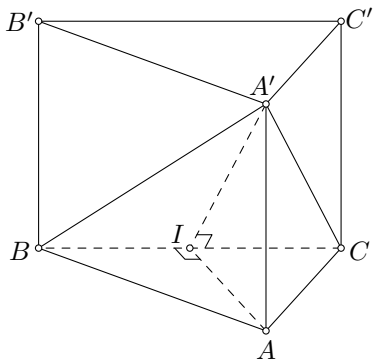
Vậy thể tích của khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \dfrac{3\sqrt{210}}{35}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Trong các khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có diện tích tam giác $A'BC$ là 3. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC), (ABC)$. Tính $\tan\alpha$ khi thể tích khối lăng trụ đạt lớn nhất.

(A) $\tan\alpha = 2$. (B) $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (C) $\tan\alpha = \sqrt{2}$. (D) $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm $BC \Rightarrow ((A'BC),(ABC)) = \widehat{A'IA} = \alpha$.

Gọi $BC = x\,(x > 0) \Rightarrow A'I = \dfrac{2S_{A'BC}}{BC} = \dfrac{6}{x}$.

$Al = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AA' = \sqrt{\dfrac{36}{x^2} - \dfrac{3x^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{144 - 3x^4}{2x^2}} = \dfrac{\sqrt{144 - 3x^4}}{2x}$.

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{144 - 3x^4}}{2x} \cdot \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{8} x\sqrt{144 - 3x^4}$.

Đặt $f(x) = x\sqrt{144 - 3x^4} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{144 - 3x^4} - \dfrac{12x^4}{2\sqrt{144 - 3x^4}} = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

$\Rightarrow f(x)$ đạt giá trị lớn nhất thì thể tích khối lăng trụ lớn nhất khi $x = 2$.

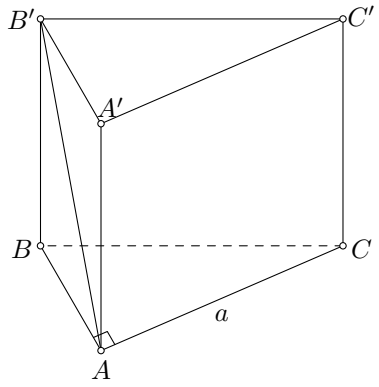
$\Rightarrow AA' = \sqrt{6}, AI = \sqrt{3} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{AA'}{AI} = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 48. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân đỉnh A, mặt bên là hình vuông $BCC'B'$, khoảng cách giữa AB' và CC' bằng a. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

(A) $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. (B) $V = \sqrt{2}a^3$. (C) $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{2}$. (D) $V = a^3$.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases} CC' \parallel AA' \\ AA' \subset (AA'B'B) \end{cases} \Rightarrow CC' \parallel (AA'B'B)$ nên khoảng cách giữa AB' và CC' là khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(AA'B'B)$.

Mặt khác $\begin{cases} CA \perp AB \\ CA \perp AA' \end{cases} \Rightarrow CA \perp (AA'B'B)$ suy ra khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(AA'B'B)$ là $CA = a$

$$\Rightarrow AB = AC = a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AB = \frac{a^2}{2}.$$

Lại có tứ giác $BCC'B'$ là hình vuông nên $CC' = BC = a\sqrt{2}$.

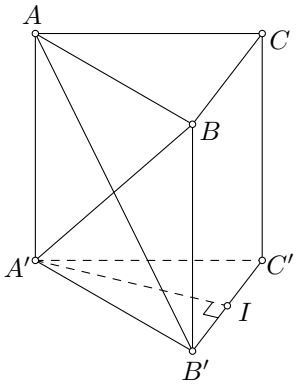
Vậy thể tích khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'} = CC' \cdot S_{\Delta ABC} = a\sqrt{2} \cdot \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 49. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a\sqrt{3}$. Gọi I là giao điểm của AB' và $A'B$. Cho biết khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a.

(A) $V = 3a^3$. (B) $V = a^3$. (C) $V = \dfrac{3a^3}{4}$. (D) $V = \dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải.



Đặt cạnh của đáy là x.

Gọi I là trung điểm $B'C'$, ta có $\mathrm{d}(A', (BCC'B')) = A'I = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

$\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \mathrm{d}\,(I,(BCC'B')) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\,(A',(BCC'B')) = \dfrac{x\sqrt{3}}{4} \Rightarrow x = 2a.$

$S_{\triangle A'B'C'} = \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}.$

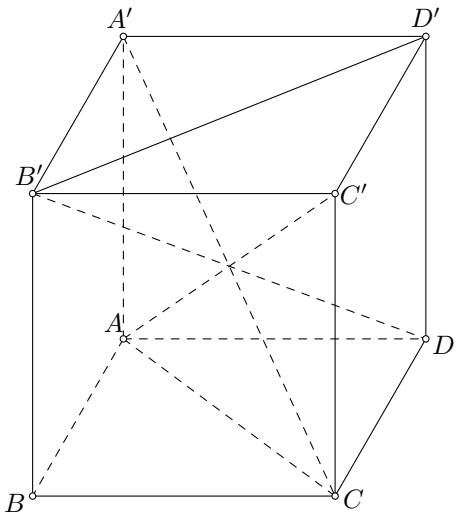
Thể tích khối lăng trụ $V = a^2\sqrt{3}\cdot a\sqrt{3} = 3a^3.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình bình hành. Các đường chéo DB' và AC' lần lượt tạo với đáy góc $45°$ và $30°$. Biết $\widehat{BAD} = 60°$, chiều cao hình lăng trụ bằng a. Tính thể tích V khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

(A) $V = a^3\sqrt{3}.$ (B) $V = \dfrac{a^3}{2}.$ (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}.$ (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}.$

Lời giải.



Theo giả thiết ta có được đáy $ABCD$ là hình bình hành, độ dài các đường chéo $BD = a, AC = a\sqrt{3}, \widehat{BAD} = 60°$.

Đặt $AB = x, BC = y$, áp dụng định lý hàm số cosin cho hai tam giác ABD và ABC ta được

$$\begin{cases} 3a^2 = x^2 + y^2 + xy \\ a^2 = x^2 + y^2 - xy \end{cases} \Rightarrow xy = a^2.$$

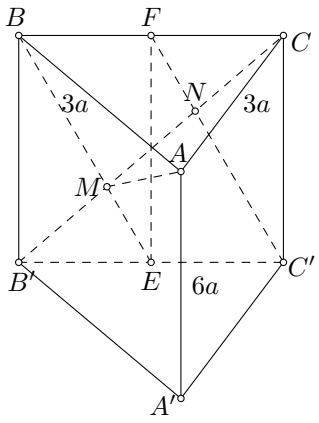
Khi đó $V = a\cdot xy\cdot \sin 60° = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 51. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, E là trung điểm của $B'C'$, CB' cắt BE tại M. Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCM$, biết $AB = 3a$ và $AA' = 6a$.

(A) $V = 8a^3.$ (B) $V = 6\sqrt{2}a^3.$ (C) $V = 6a^3.$ (D) $V = 7a^3.$

Lời giải.



Gọi F là trung điểm của BC, $FC' \cap CB' = N \Rightarrow N$ là trung điểm của $MC \Rightarrow B'M = \dfrac{1}{3}B'C$.

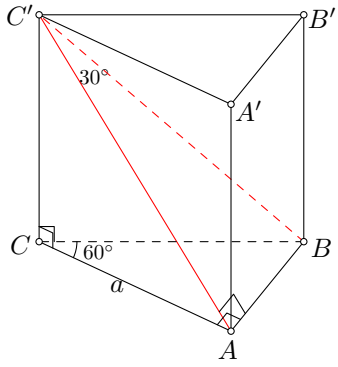
Khi đó ta có $V_{ABCM} = \dfrac{1}{3}d\left(M,(ABC)\right)\cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}d\left(B',(ABC)\right)\cdot S_{ABC} = \dfrac{2\cdot 6a}{9}\cdot\dfrac{9a^2}{2} = 6a^3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 52. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông ABC vuông tại A, $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng $(A'C'CA)$ góc 30°. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

(A) $a^3\sqrt{6}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $2\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.



Ta có $AB = a\sqrt{3}$, dễ thấy góc giữa đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng $(A'C'CA)$ là góc $\widehat{BC'A} = 30^\circ$.

Suy ra $\tan 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{AC'} \Rightarrow AC' = 3a \Rightarrow C'C = 2\sqrt{2}a$.

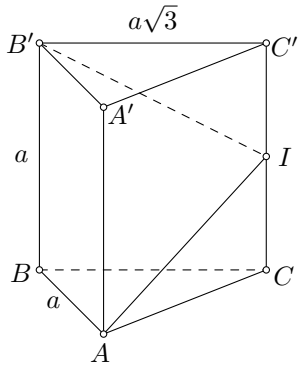
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = 2\sqrt{2}a\cdot\dfrac{1}{2}a\cdot a\sqrt{3} = a^3\sqrt{6}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 53. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân, với $AB = AC = a$ và góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$, cạnh bên $AA' = a$. Gọi I là trung điểm của CC'. Cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{33}}{11}$. (B) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. (C) $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$. (D) $\dfrac{\sqrt{11}}{11}$.

Lời giải.



Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\widehat{BAC} = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác vuông $B'AB$ có $AB' = \sqrt{BB'^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông IAC có $IA = \sqrt{IC^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét tam giác vuông $IB'C'$ có $B'I = \sqrt{B'C'^2 + C'I^2} = \sqrt{3a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

Xét tam giác $IB'A$ có $B'A^2 + IA^2 = 2a^2 + \dfrac{5a^2}{4} = \dfrac{13a^2}{4} = B'I^2 \Rightarrow \Delta IB'A$ vuông tại A.

Suy ra $S_{IB'A} = \dfrac{1}{2}AB' \cdot Al = \dfrac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{5}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{4}$.

Lại có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\widehat{BAC} = \dfrac{1}{2}a \cdot a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Gọi góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ là α.

Ta có $\triangle ABC$ là hình chiếu vuông góc của $\triangle AB'I$ trên mặt phẳng (ABC).

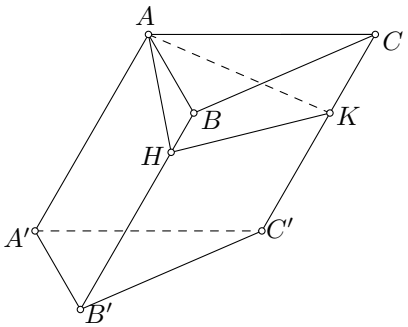
Do đó $S_{ABC} = S_{IB'A} \cdot \cos\alpha \Rightarrow \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{4} \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 54. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' = 2$, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB',CC' lần lượt bằng 1 và 2; khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng $\sqrt{5}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

(A) 2. (B) $\dfrac{2}{3}$.. (C) 4. (D) $\dfrac{4}{3}$..

Lời giải.



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BB', CC' ta có

$AH = d(A, BB') = 1; AK = d(A, CC') = 2$ và $AA' \parallel BB' \parallel CC'$; $AH \perp BB', AK \perp CC'$.

$\Rightarrow (AHK) \perp AA'$ và $HK = d(C, BB') = \sqrt{5}$.

Tam giác AHK có $AH^2 + AK^2 = HK^2 = 5 \Rightarrow \Delta AHK$ vuông tại A $\Rightarrow S_{AHK} = \dfrac{1}{2} AH \cdot AK = 1$.

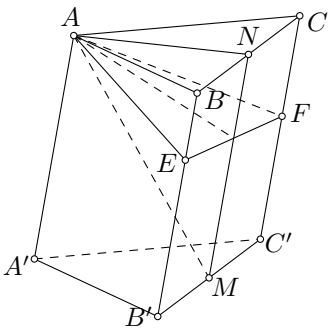
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{AHK} \cdot AA' = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 55. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và 2, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \sqrt{5}$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. (B) $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$. (C) $\sqrt{5}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải.



a) **Cách 1:**

Gọi N là trung điểm của BC, $H = EF \cap MN \Rightarrow AH \perp MN (MN \parallel AA')$.

Ta có H là trung điểm của EF và $AE^2 + AF^2 = EF^2 = 5$ nên $AH = \dfrac{EF}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Tam giác vuông AMN có $AN = A'M = \sqrt{5}$ và

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{5} \Leftrightarrow AM = \frac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow AA' = \sqrt{5 + \frac{15}{9}} = \frac{2\sqrt{15}}{3}.$$

Mặt khác do $\begin{cases} (A'B'C') \perp AM \\ (AEF) \perp AA' \end{cases} \Rightarrow ((A'B'C'), (AEF)) = (AM, AA') = \widehat{MAA'}$.

Tam giác AEF vuông tại A là hình chiếu vuông góc của tam giác $A'B'C'$ trên mặt phẳng (AEF).

Vì vậy theo định lý hình chiếu có $S_{A'B'C'} = \dfrac{S_{AEF}}{\cos \widehat{MAA'}} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2}{\frac{\frac{\sqrt{15}}{3}}{\frac{2\sqrt{15}}{3}}} = 2$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{A'B'C'} \cdot AM = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{15}}{3} = \dfrac{2\sqrt{15}}{3}$.

b) **Cách 2:** Ta có thể tính thông qua công thức nhanh thể tích tứ diện như sau.

Có $V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{A.A'B'C'} = \dfrac{2S_{AA'B'} \cdot S_{AA'C'} \cdot \sin((AA'B'), (AA'C'))}{3AA'} = AA' = \dfrac{2\sqrt{15}}{3}$.

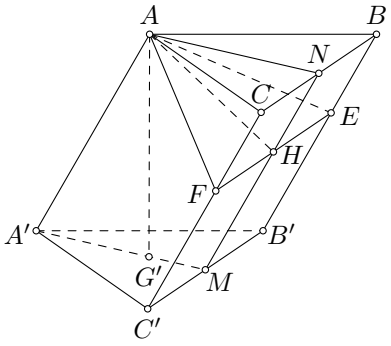
$$\begin{cases} S_{AA'B'} = \dfrac{1}{2} AA' \cdot \mathrm{d}(B', AA') = \dfrac{1}{2} AA' \cdot \mathrm{d}(A, BB') = \dfrac{1}{2} AA' \\ S_{AA'C'} = \dfrac{1}{2} AA' \cdot \mathrm{d}(C', AA') = \dfrac{1}{2} AA' \cdot \mathrm{d}(A, CC') = AA' \\ ((AA'B'), (AA'C')) = 90^\circ. \end{cases}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 56. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB', CC' lần lượt là 1 và $\sqrt{3}$, khoảng cách từ C đến BB' bằng 2. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trọng tâm G' của tam giác $A'B'C'$ và $A'G' = \dfrac{4}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

(A) 2. (B) $\dfrac{2}{3}$. (C) 4. (D) $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.



Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên BB', CC'.

Suy ra $\begin{cases} AA' \perp AE \\ AA' \perp AF \end{cases} \Rightarrow AA' \perp (AEF)$.

Suy ra hình chiếu vuông góc của $\triangle A'B'C'$ lên mặt phẳng (AEF) là $\triangle AEF$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'C')$ và (AEF).

Ta có $S_{\triangle AEF} = S_{\triangle A'B'C'} \cdot \cos\varphi \Rightarrow S_{\triangle A'B'C'} = \dfrac{S_{\triangle AEF}}{\cos\varphi}$. (1)

Mặt khác, ta có $\begin{cases} AA' \perp (AEF) \\ AG' \perp (A'B'C') \end{cases} \Rightarrow \varphi = (AA', AG') = \widehat{A'AG'}$.

Suy ra $\cos\varphi = \dfrac{AG'}{AA'} \Rightarrow AG' = \cos\varphi \cdot AA'$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $V_{A'B'C'.ABC} = AG' \cdot S_{\triangle A'B'C'} = AA' \cdot S_{\triangle AEF}$.

Ta có $AE = 1, AF = \sqrt{3}$, $\mathrm{d}(C, BB') = \mathrm{d}(E, BB') = EF \Rightarrow EF = 2$.

Do đó $\triangle AEF$ vuông tại A.

Suy ra $S_{\triangle AEF} = \dfrac{1}{2}AE \cdot AF = \dfrac{1}{2}.\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Gọi M, N lần lượt trung điểm của $BC, B'C'$.

Giả sử MN cắt EF tại H. Suy ra $MN \perp EF$ và H là trung điểm của EF nên $AH = \dfrac{EF}{2} = 1$.

$A'G' = \dfrac{4}{3} \Rightarrow A'M = \dfrac{3}{2}A'G' = 2$.

Xét hình bình hành $AA'MN$ có

$$S_{AA'MN} = AG' \cdot A'M = AH \cdot MN \Leftrightarrow \sqrt{AA'^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2} \cdot 2 = 1 \cdot AA' \Leftrightarrow AA' = \frac{8\sqrt{3}}{9}.$$

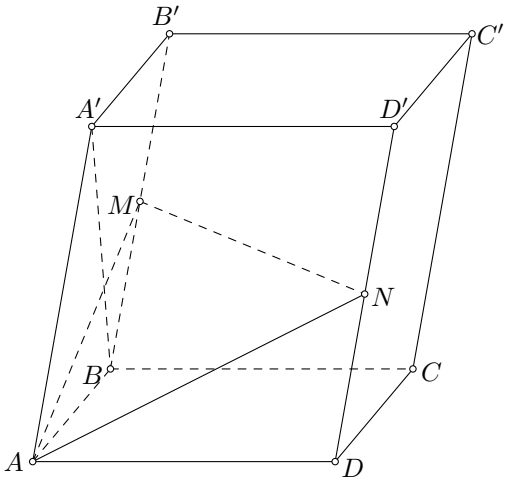
Thể tích khối lăng trụ là $V_{A'B'C'.ABC} = AA' \cdot S_{\triangle AEF} = \dfrac{8\sqrt{3}}{9} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 57. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'B$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$; góc giữa AA' với $(ABCD)$ bằng 45°. Khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB', DD' cùng bằng 1. Góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ và mặt phẳng $(C'CDD')$ bằng 60°. Thể tích của khối hộp đã cho bằng

(A) $2\sqrt{3}$. (B) 2. (C) $\sqrt{3}$. (D) $3\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các cạnh BB', DD'.

Ta có $\begin{cases} AM \perp BB' \\ AN \perp DD' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM \perp AA' \\ AN \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AA' \perp (AMN) \Rightarrow \begin{cases} BB' \perp (AMN) \\ DD' \perp (AMN). \end{cases}$

Suy ra hình chiếu vuông góc của $\triangle A'B'D'$ lên mặt phẳng (AMN) là $\triangle AMN$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'D')$ và (AMN).

Ta có $S_{\triangle AMN} = S_{\triangle A'B'D'}.\cos\varphi \Rightarrow S_{\triangle A'B'D'} = \dfrac{S_{\triangle AMN}}{\cos\varphi}$. (1)

Mặt khác, ta có $\begin{cases} AA' \perp (AMN) \\ A'B \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow \varphi = (AA', A'B) = \widehat{AA'B}$.

Suy ra $\cos\varphi = \dfrac{A'B}{AA'} \Rightarrow A'B = \cos\varphi.AA'$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $V_{A'B'D'.ABD} = A'B \cdot S_{\triangle A'B'D'} = AA' \cdot S_{\triangle AMN}$.

Vậy thể tích khối hộp là $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2V_{ABD.A'B'D'} = 2AA'.S_{\triangle AMN}$.

Ta có $\begin{cases} (BB'C'C) \parallel (ADD'A') \\ (C'CDD') \parallel (ABB'A') \end{cases} \Rightarrow ((ADD'A'), (ABB'A')) = (AM, AN)$.

Suy ra $\widehat{MAN} = 60^\circ$ hoặc $\widehat{MAN} = 120^\circ$.

Do đó $S_{\triangle AMN} = \dfrac{1}{2}AM \cdot AN \cdot \sin\widehat{MAN} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Ta có $(AA', (ABCD)) = (AA', AB) = \widehat{A'AB} \Rightarrow \widehat{A'AB} = 45^\circ$.

Suy ra $\triangle A'AB$ vuông cân tại B.

Khi đó $S_{ABB'A'} = AM \cdot BB' = A'B \cdot AB$.

Suy ra $AM \cdot AA' = \dfrac{AA'}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{AA'}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow AA' = 2AM = 2 \cdot 1 = 2$.

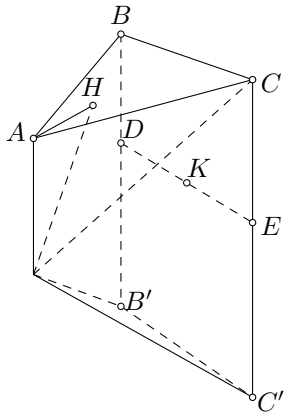
Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2 \cdot 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 58. Cho khối đa diện $ABC.A'B'C'$ có $AA' \parallel BB' \parallel CC'$.Biết khoảng cách từ A đến BB' bằng 1, khoảng cách từ A đến CC' bằng $\sqrt{3}$; Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB', CC' bằng 2 và $AA' = 1, BB' = 2, CC' = 3$. Thể tích khối đa diện $ABC.A'B'C'$ bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $\sqrt{3}$.

Lời giải.



Ta hạ $AD \perp BB'; AE \perp CC' \Rightarrow (ADE) \perp AA' \parallel BB' \parallel CC'$ và $AD = 1; AE = \sqrt{3}, DE = 2$.

Ta hạ $A'H \perp (ABC)$ (Do $AA' \perp (ADE)$) $\Rightarrow ((ABC), (ADE)) = (A'H, AA') = \widehat{AA'H}$.

Tam giác ADE là hình chiếu của tam giác ABC lên mp(ADE), do đó

$$S_{ADE} = S_{ABC}.\cos\widehat{AA'H} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{S_{ADE}}{\cos\widehat{AA'H}} = \frac{S_{ADE}\cdot AA'}{A'H}.$$

Suy ra $V_{A'.ABC} = \dfrac{1}{3}\cdot A'H \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3}\cdot S_{ADE}\cdot AA' = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}\,(A', (BCC'B'))\cdot S_{BCC'B'}$.

Ta có $BB' \perp (ADE)\,; BB' \perp DE$.

Ta kẻ $AK \perp DE \Rightarrow AK \perp BB' \Rightarrow AK \perp (BCC'B')$.

$\mathrm{d}\,(A', (BCC'B')) = \mathrm{d}\,(A, (BCC'B')) = AK$.

Khi đó $V_{A'.BCC'B'} = \dfrac{1}{3}\cdot AK \cdot \dfrac{1}{2}DE\,(BB' + CC') = \dfrac{1}{3}\cdot S_{ADE}\cdot (BB' + CC')$

Vậy

$$\begin{aligned} V_{ABC.A'B'C'} &= V_{A'.ABC} + V_{A'.BCC'B'} \\ &= \frac{1}{3}\cdot S_{ADE}\cdot AA' + \frac{1}{3}\cdot S_{ADE}\cdot (BB' + CC') \\ &= \frac{1}{3}\cdot S_{ADE}\cdot (AA' + BB' + CC')\,. \end{aligned}$$

Tam giác ADE vuông tại A và $S_{ADE} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

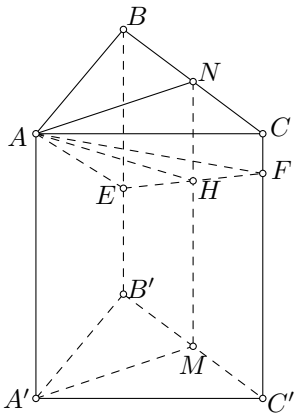
Suy ra $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ADE}\cdot \dfrac{AA' + BB' + CC'}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot \dfrac{1+2+3}{3} = \sqrt{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 59. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ A đến BB' bằng 1, khoảng cách từ A đến CC' bằng $\sqrt{3}$; góc giữa hai mặt bên của lăng trụ chung cạnh AA' bằng $90°$. Hình chiếu của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của cạnh $B'C'$ và $A'M = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.Thể tích khối đa diện $ABC.A'B'C'$ bằng

(A) 2. (B) 1. (C) $\sqrt{3}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Gọi $E,\ F$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên $BB',\ CC'$.

Ta có $AE = 1, AF = 2; AA' \parallel BB' \parallel CC'$.

Vậy $AF \perp AA'; AE \perp AA' \Rightarrow (AEF) \perp AA'$.

Suy ra $\widehat{EAF} = ((ABB'A'), (ACC'A')) = 90° \Rightarrow S_{AEF} = \dfrac{1}{2}AE \cdot AF = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Gọi N là trung điểm BC, H là giao của EF và MN nên $AH \perp MN\,(MN \parallel AA')$.

Ta có H là trung điểm EF và $AH = \dfrac{EF}{2} = \dfrac{\sqrt{AE^2 + AF^2}}{2} = 1$.

Tam giác vuông AMN có $AN = A'M = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ và $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AN^2} \Rightarrow AM = 2 \Rightarrow AA' = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{AEF}.AA' = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{4\sqrt{3}}{3} = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Dạng 4. Thể tích khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy

Với các khối chóp có giả thiết mặt phẳng vuông góc với đáy ta sử dụng các định lý về giao tuyến dưới đây:

- Hai mặt phẳng cùng vuông góc với đáy thì đoạn giao tuyến của chúng vuông góc với đáy. Tính chất này dựa trên định lí về giao tuyến của hai mặt phẳng củng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

  Kí hiệu $\begin{cases} (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \\ (P) \cap (Q) = a \end{cases} \Rightarrow a \perp (R)$.

- Mặt bên nào vuông góc với đáy thì đường cao của mặt bên đó vuông góc với đáy. Tính chất

này dựa trên định lý sau $\begin{cases}(P)\perp(Q)\\(P)\cap(Q)=a\\d\subset(P),d\perp a\end{cases}\Rightarrow d\perp(Q).$

1. Bài tập vận dụng

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAD) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

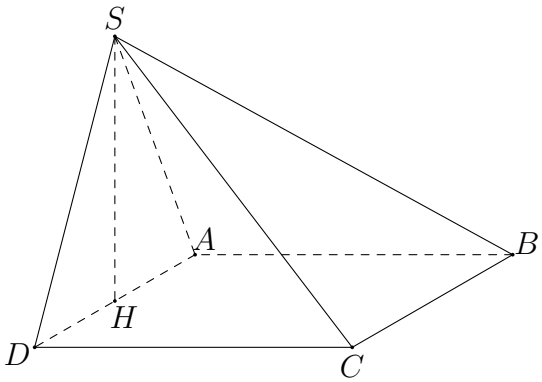
(A) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (B) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (C) $V=\dfrac{a^3}{12}$. (D) $V=\dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AD, do tam giác SAD đều cạnh $AD=a\Rightarrow SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\begin{cases}(SAD)\perp(ABCD)\\(SAD)\cap(ABCD)=AD\Rightarrow SH\perp(ABCD).\\SH\perp AD\end{cases}$

Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{ABCD}\cdot SH=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAD) là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

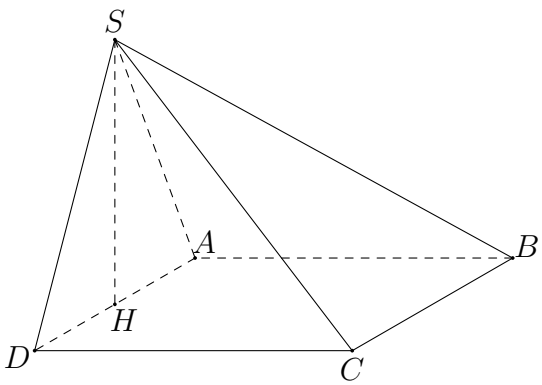
(A) $V=\dfrac{a^3}{6}$. (B) $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. (C) $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. (D) $V=\dfrac{a^3}{2}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AD, do tam giác SAD vuông cân tại S có $AD=a\Rightarrow SH=\dfrac{a}{2}$.

Ta có $\begin{cases}(SAD)\perp(ABCD)\\(SAD)\cap(ABCD)=AD\Rightarrow SH\perp(ABCD).\\SH\perp AD\end{cases}$

Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{ABCD}\cdot SH=\dfrac{a^3}{6}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, mặt bên (SAD) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

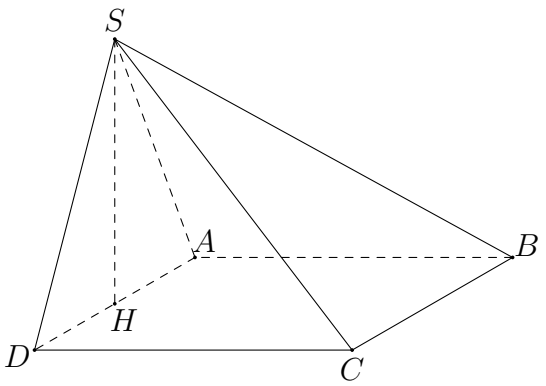
(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (C) $V = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AD, do tam giác SAD đều có $AD = a\sqrt{3} \Rightarrow SH = \dfrac{3a}{2}$.

Ta có $\begin{cases} (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAD) \cap (ABCD) = AD \Rightarrow SH \perp (ABCD). \\ SH \perp AD \end{cases}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \dfrac{1}{3} \cdot a \cdot a\sqrt{3} \cdot \dfrac{3a}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Mặt bên (SAD) là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

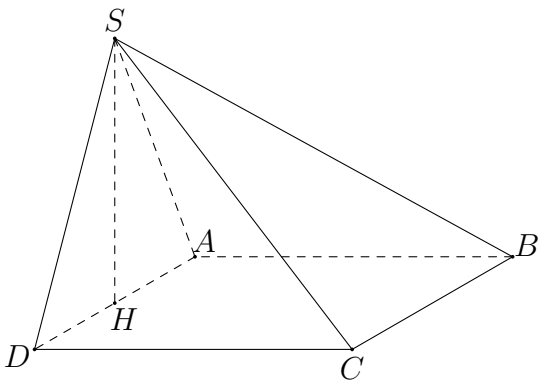
(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (C) $V = \dfrac{3a^3}{2}$. (D) $V = \dfrac{a^3}{2}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AD, do tam giác SAD là tam giác vuông cân tại S có $AD = a\sqrt{3} \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\begin{cases} (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAD) \cap (ABCD) = AD \Rightarrow SH \perp (ABCD). \\ SH \perp AD \end{cases}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \dfrac{1}{3} \cdot a \cdot a\sqrt{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3}{2}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD).

(A) $h = \dfrac{2}{3}a$. (B) $h = \dfrac{4}{3}a$. (C) $h = \dfrac{8}{3}a$. (D) $h = \dfrac{3}{4}a$.

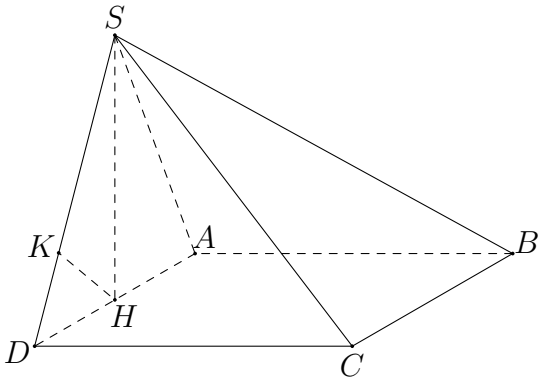
Lời giải.

Gọi H là trung điểm AD.

Ta có $\begin{cases}(SAD)\perp(ABCD)\\(SAD)\cap(ABCD)=AD\Rightarrow SH\perp(ABCD).\\SH\perp AD\end{cases}$

Lại có

$$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABCD}\cdot SH\Rightarrow SH=\frac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}}=2a.$$



Kẻ $HK\perp SD$ tại K, khi đó ta chứng minh được $HK\perp(SCD)$ nên $HK=\mathrm{d}(H;(SCD))$.

Ta có $\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{HD^2}+\dfrac{1}{HS^2}\Rightarrow HK=\dfrac{2a}{3}$.

Ta có $AB\parallel(SCD)$ nên $\mathrm{d}(B;(SCD))=\mathrm{d}(A;(SCD))$.

Do $AH\cap(SCD)=D$ nên $\dfrac{\mathrm{d}(A;(SCD))}{\mathrm{d}(H;(SCD))}=\dfrac{AD}{HD}=2$.

Vậy $\mathrm{d}(B;(SCD))=2\mathrm{d}(H;(SCD))=\dfrac{4a}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh đáy là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với đáy. Biết khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng $\dfrac{4a}{3}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

(A) $V=\dfrac{2a^3}{3}$. (B) $V=\dfrac{a^3}{3}$. (C) $V=\dfrac{8a^3}{3}$. (D) $V=\dfrac{4a^3}{3}$.

Lời giải.

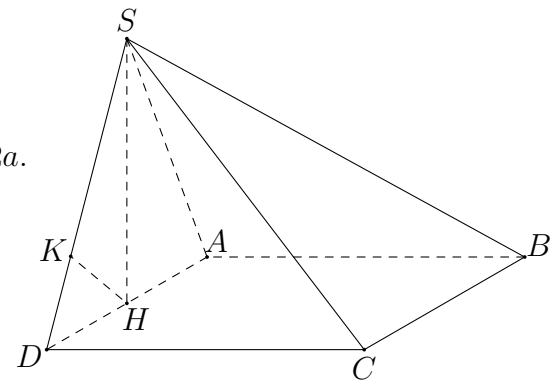
Gọi H là trung điểm của $AD\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

Ta có

$$\mathrm{d}_A=\mathrm{d}_B=2\mathrm{d}_H=2HK=\frac{2SH\cdot HD}{\sqrt{SH^2+HD^2}}=\frac{4\mathrm{a}}{3}\Rightarrow SH=2a.$$

Vậy, thể tích của khối chóp

$$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH\cdot S_{ABCD}=\frac{4a^3}{3}.$$



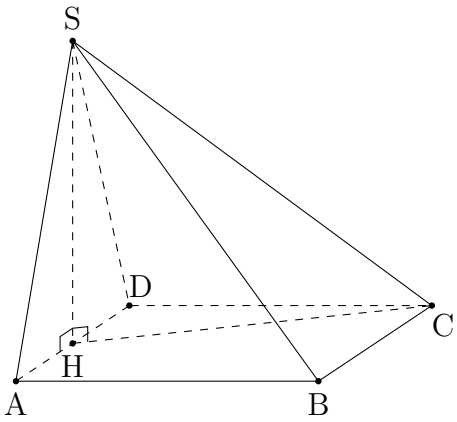
Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a. Tam giác SAD cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, biết $SC=\dfrac{3a}{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

(A) $\dfrac{a^3}{3}$. (B) $\dfrac{a^3}{9}$. (C) $\dfrac{4a^3}{9}$. (D) $\dfrac{2a^3}{9}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của $AD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
Diện tích đáy $S_{ABCD} = a^2$ và $SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = a$.
Vậy thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \dfrac{a^3}{3}$.



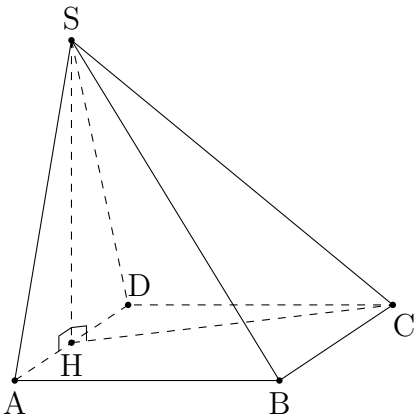
Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Tam giác SAD cân tại S, nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy và $SC = 2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (B) $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. (C) $\dfrac{9a^3\sqrt{3}}{2}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của $AD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
Diện tích đáy $S_{ABCD} = a^2\sqrt{3}$ và $SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \dfrac{3a}{2}$.
Vậy thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $AC = a$, $BD = a\sqrt{3}$. Tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

(A) $\dfrac{3a^3}{4}$. (B) $\dfrac{a^3}{2}$. (C) $\dfrac{a^3}{4}$. (D) $\dfrac{3a^3}{2}$.

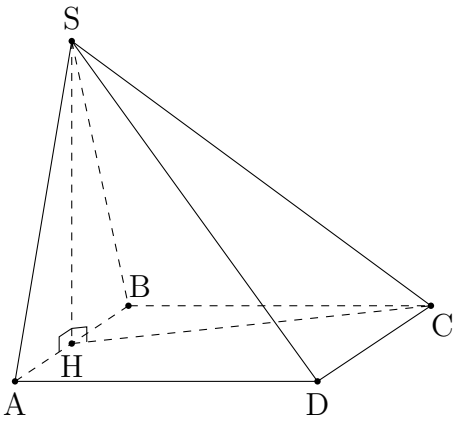
Lời giải.

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Ta có $AB = \sqrt{\left(\dfrac{AC}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{BD}{2}\right)^2} = a$ và $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích đáy $S_{ABCD} = \dfrac{AC \cdot BD}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \dfrac{a^3}{4}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $AC = a$, $BD = a\sqrt{3}$. Tam giác SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

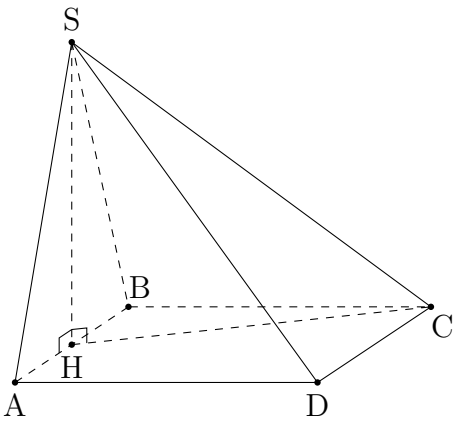
Lời giải.

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Ta có $AB = \sqrt{\left(\dfrac{AC}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{BD}{2}\right)^2} = a$ và $SH = \dfrac{a}{2}$.

Diện tích đáy $S_{ABCD} = \dfrac{AC \cdot BD}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Trong các khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông. Tam giác SAD cân tại S, nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy và $SC = 2\sqrt{3}$. Khối chóp có thể tích lớn nhất là

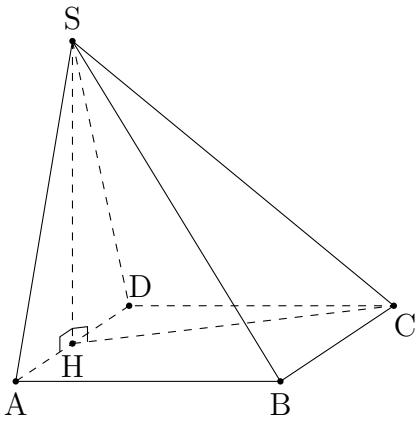
(A) $\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$. (B) $\dfrac{64}{15}$. (C) $\dfrac{4\sqrt{10}}{15}$. (D) $\dfrac{64}{5}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của $AD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$. Đặt $AB = x$.
Diện tích đáy $S_{ABCD} = x^2$. Ta có

$$SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{SC^2 - HD^2 - CD^2} = \sqrt{12 - \frac{5x^2}{4}}.$$

Do đó thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3}x^2\sqrt{12 - \frac{5x^2}{4}}$.
Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^2\sqrt{12 - \frac{5x^2}{4}} \le f\left(\frac{4\sqrt{10}}{5}\right) = \frac{64}{15}$.
Vậy $V_{\max} = \frac{64}{15}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Tam giác SAB là tam giác vuông cân tại S, tam giác SCD là tam giác đều. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

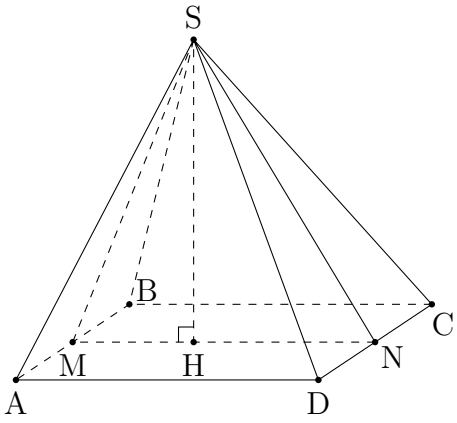
(A) $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. (B) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (C) $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. (D) $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.
Dựng $SH \perp MN \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
Mặt khác $SM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SN = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $MN = a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow MN^2 = SM^2 + SN^2 \Rightarrow SM \perp SN.$$

Do đó $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SM^2} + \frac{1}{SN^2} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.
Diện tích đáy $S_{ABCD} = \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 2a^2$.
Vậy thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.



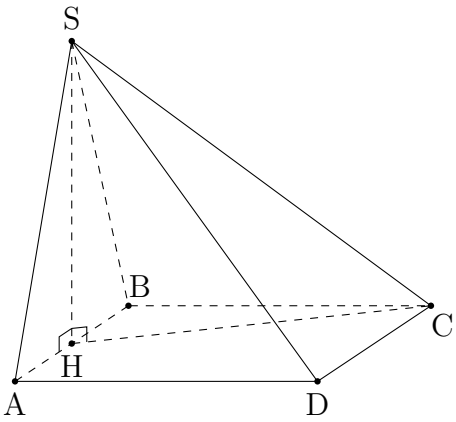
Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Tam giác SAB là tam giác vuông cân tại S, nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy và $SC = \frac{a\sqrt{26}}{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

(A) $\frac{2a^3}{3}$. (B) $4a^3$. (C) $\frac{4a^3}{3}$. (D) $2a^3$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
Diện tích đáy $S_{ABCD} = \left(a\sqrt{2}\right)^2$.
Ta có $SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{SC^2 - HB^2 - BC^2} = 2a$.
Vậy thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \dfrac{4a^3}{3}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 4$, $SC = 6$. Tam giác SAD là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ bằng

(A) $\dfrac{40}{3}$. (B) 40. (C) 80. (D) $\dfrac{80}{3}$.

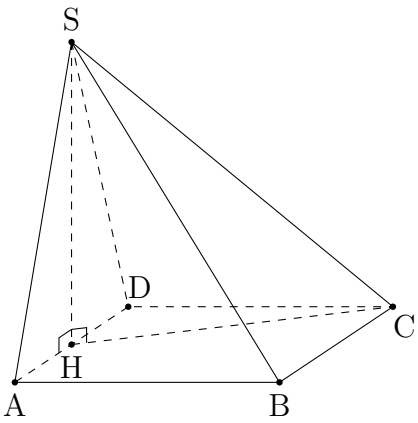
Lời giải.

Đặt $AD = x$. Gọi H là trung điểm của $AD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
Ta có $HC^2 = HD^2 + CD^2 = \dfrac{x^2}{4} + 16$

$$\Rightarrow SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{20 - \frac{x^2}{4}}.$$

Diện tích đáy $S_{ABCD} = 4x$.
Do đó

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot 4x \cdot \sqrt{20 - \frac{x^2}{4}} \\ &= \frac{2 \cdot \sqrt{x^2 (80 - x^2)}}{3} \le \frac{x^2 + 80 - x^2}{3} = \frac{80}{3}. \end{aligned}$$



Dấu "=" xảy ra khi $x^2 = 80 - x^2 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{10}$.
Vậy $V_{\max} = \dfrac{80}{3}$.

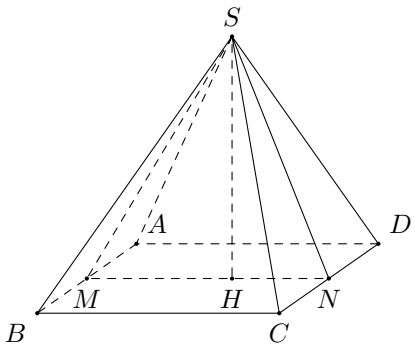
Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Trong các khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2\sqrt{3}$, tam giác SAB vuông cân tại S, tam giác SCD đều. Khối chóp $S.ABCD$ có thể tích lớn nhất bằng

(A) 6. (B) $6\sqrt{3}$. (C) $2\sqrt{3}$. (D) $6\sqrt{2}$.

Lời giải.

Đặt $AD = x$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.



Ta có $\begin{cases} SM \perp AB \\ SN \perp CD \\ AB \parallel CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SMN) \Rightarrow (ABCD) \perp (SMN)$.

Gọi H là chân đường cao hạ từ S xuống MN ta có $SH \perp (ABCD)$.

Trong tam giác SMN ta có

$SM = \dfrac{1}{2}AB = \sqrt{3}$, $SN = \dfrac{CD\sqrt{3}}{2} = 3$, $MN = AD = x$.

Do đó $h = SH = \dfrac{2S_{SMN}}{MN} = \dfrac{\sqrt{-x^4 + 24x^2 - 36}}{2x}$.

Ta có $V = \dfrac{1}{3} \cdot S \cdot h = \dfrac{2x\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{-x^4 + 24x^2 - 36}}{2x} = \dfrac{\sqrt{3\left(-x^4 + 24x^2 - 36\right)}}{3} \le 6$.

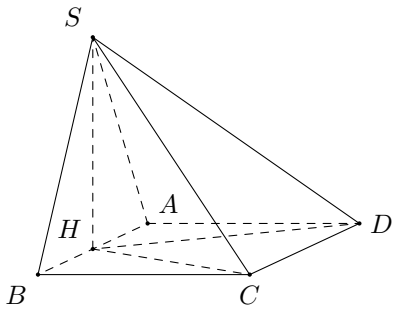
Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Gọi H là trung điểm của cạnh AB, các mặt phẳng (SHC), (SHD) cùng vuông góc với đáy và SD tạo với đáy góc $60°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{13}}{2}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{13}}{3}$. (C) $V = \dfrac{3a^3\sqrt{13}}{2}$. (D) $V = \dfrac{5a^3\sqrt{13}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABCD} = AB \cdot AD = a^2\sqrt{3}$.



Do các mặt phẳng (SHC), (SHD) cùng vuông góc với đáy nên $SH \perp (ABCD)$, suy ra góc giữa SD và $(ABCD)$ là $\widehat{SDH} = 60°$.

Ta có $HD = \sqrt{AH^2 + AD^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$,

$SH = HD \cdot \tan 60° = \dfrac{a\sqrt{39}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{39}}{2} \cdot a^2\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{13}}{2}$.

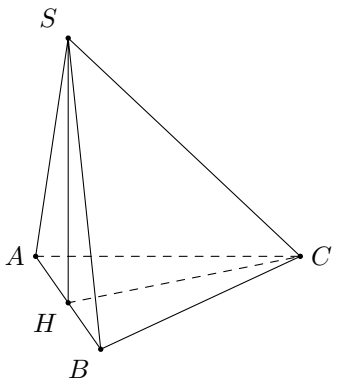
Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, tam giác SAB cân tại S, mặt bên (SAB) vuông góc với đáy và SC tạo với đáy góc $60°$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

(A) $V = a^3$. (B) $V = a^3\sqrt{3}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $V = \dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải.

Do tam giác ABC đều cạnh $2a$ nên $S_{ABC} = (2a)^2\dfrac{\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.
Gọi H là trung điểm của AB, do tam giác SAB cân tại S nên $SH \perp AB$.
Mặt khác, vì $(SAB) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$, suy ra góc giữa SC và (ABC) là $\widehat{SCH} = 60^\circ$.
Vì tam giác ABC đều cạnh $2a$ nên $CH = a\sqrt{3}$.
Suy ra $SH = CH \cdot \tan 60^\circ = 3a$.
Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot 3a \cdot a^2\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}$.



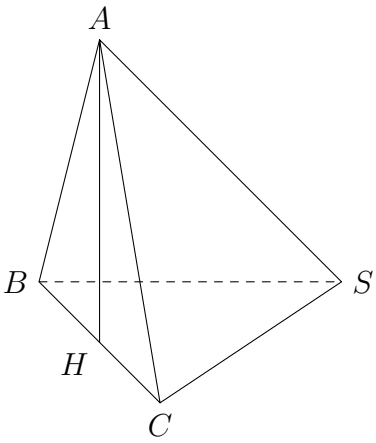
Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = SB = AB = AC = a$, $SC = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ và mặt phẳng (SBC) vuông góc với (ABC). Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{14}}{36}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{14}}{12}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{21}}{36}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{21}}{12}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm cạnh $BC \Rightarrow AH \perp BC$.
Mà $(ABC) \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp (SBC)$.
Mặt khác, $AS = AB = AC \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle SBC$.
$\Rightarrow \triangle SBC$ vuông tại S.



Khi đó, $\begin{cases} S_{SBC} = \dfrac{1}{2}SB \cdot SC = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{6} \\ BC = \sqrt{SB^2 + SC^2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{3} \\ AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = a\sqrt{\dfrac{7}{12}}. \end{cases}$
Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$$V = \frac{1}{3}AH \cdot S_{SBC} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{\frac{7}{12}} \cdot \frac{a^2\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3\sqrt{14}}{36}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = SB = AB = AC = a$, $SC = x$ và mặt phẳng (SBC) vuông góc với (ABC). Tìm x để thể tích V của khối chóp đã cho lớn nhất.

(A) $x = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. (B) $x = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. (C) $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. (D) $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

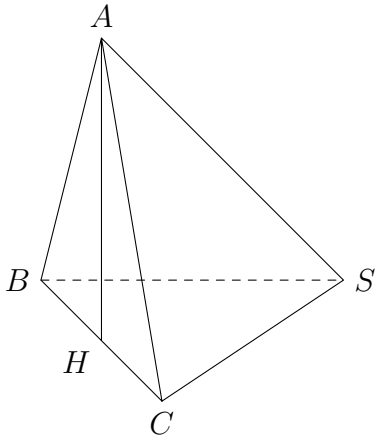
Lời giải.

Gọi H là trung điểm cạnh $BC \Rightarrow AH \perp BC$.

Mà $(ABC) \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Mặt khác, $AS = AB = AC \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle SBC$.

$\Rightarrow \triangle SBC$ vuông tại S.



Khi đó, $\begin{cases} S_{SBC} = \dfrac{1}{2}SB \cdot SC = \dfrac{ax}{2} \\ BC = \sqrt{SB^2 + SC^2} = \sqrt{a^2 + x^2} \\ AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2 + x^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2}. \end{cases}$

Suy ra thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$$V = \frac{1}{3}AH \cdot S_{SBC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{ax}{2} \cdot \frac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2} = \frac{ax\sqrt{3a^2 - x^2}}{12}.$$

Ta có $x\sqrt{3a^2 - x^2} = \sqrt{x^2(3a^2 - x^2)} \le \dfrac{x^2 + 3a^2 - x^2}{2} = \dfrac{3a^2}{2} \Rightarrow V \le \dfrac{a^3}{8}$.

Dấu "="xảy ra khi $x^2 = 3a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một tứ giác lồi và góc tạo bởi các mặt bên (SAB), (SBC), (SCD), (SDA) và mặt đáy tương ứng là $90°$, $60°$, $60°$, $60°$. Biết tam giác SAB vuông cân tại S có $AB = a$, chu vi tứ giác $ABCD$ bằng $9a$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

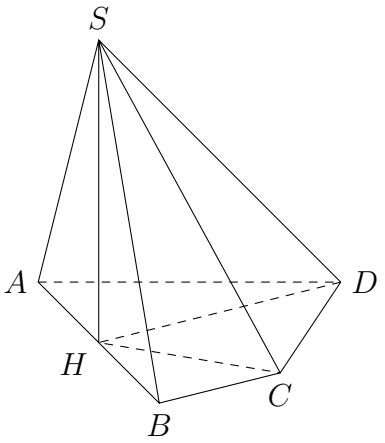
(A) $a^3\sqrt{3}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. (D) $\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm cạnh $AB \Rightarrow SH \perp AB$.

Mà $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$ và $h = SH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Với K, T, I lần lượt là hình chiếu của H trên các đường thẳng BC, CD, DA, ta có



$$\begin{aligned} S &= S_{HBC} + S_{HCD} + S_{HDA} \\ &= \frac{1}{2}(BC \cdot HK + CD \cdot HT + DA \cdot HI) \\ &= \frac{1}{2}(BC + CD + DA) \cdot h \cdot \cot 60° \\ &= \frac{1}{2}(9a - a) \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2a^2\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Vậy $V = \dfrac{1}{3}S \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2a^2\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Cho khối tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC đều, tam giác DBC là tam giác vuông cân tại D. $AD = 2a$. Biết (ABC) vuông góc với mặt phẳng (DBC). Thể tích V của khối tứ diện $ABCD$ bằng

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (B) $V = a^3\sqrt{3}$. (C) $V = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

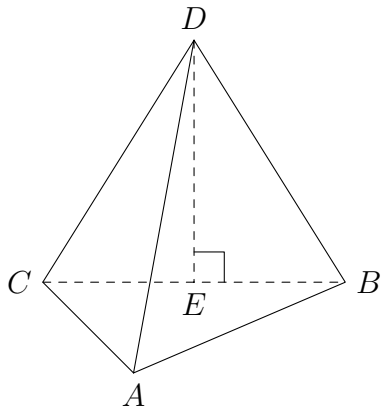
Lời giải.

Gọi E là trung điểm của BC. Ta có $DE \perp BC \Rightarrow DE \perp (ABC)$.

Đặt $\begin{cases} BC = x \Rightarrow DE = \dfrac{1}{2}CB = \dfrac{x}{2} \\ AE = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

Ta có $AE^2 + DE^2 = AD^2 \Rightarrow x = 2a$.

$V = \dfrac{1}{3}S_{ABC} \cdot DE = \dfrac{1}{3}\dfrac{(2a)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Trong các khối tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC đều, tam giác DBC là tam giác cân tại D. $AD = 2a$. Biết (ABC) vuông góc với mặt phẳng (DBC). Khối tứ diện có thể tích lớn nhất là

(A) $V = \dfrac{4a^3\sqrt{2}}{9}$. (B) $V = \dfrac{16a^3}{9}$. (C) $V = \dfrac{16a^3}{27}$. (D) $V = \dfrac{4a^3\sqrt{2}}{3}$.

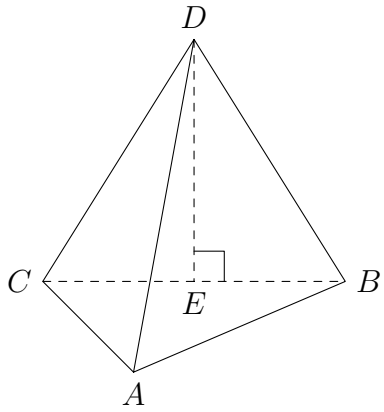
Lời giải.

Gọi E là trung điểm của BC. Ta có $DE \perp BC \Rightarrow DE \perp (ABC)$.

Đặt $BC = x \Rightarrow AE = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$, $DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{3x^2}{4}}$.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot DE \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{4a^2 - \frac{3x^2}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{\dfrac{3x^2}{2} \cdot \dfrac{3x^2}{2}(16a^2 - 3x^2)}}{36} \le \frac{16a^3}{27}. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = \dfrac{4a\sqrt{2}}{3}$.



Chọn đáp án (C) □

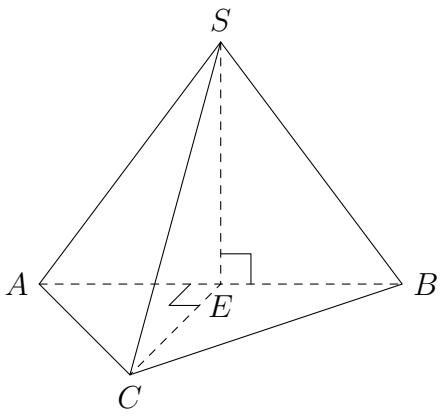
Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Ⓐ $V=\dfrac{3a^3}{8}$. Ⓑ $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. Ⓒ $V=\dfrac{a^3}{8}$. Ⓓ $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Gọi E là trung điểm của AB. Ta có $SE\perp AB\Rightarrow SE\perp(ABC)$.

$\Rightarrow V_{SABC}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{SBC}\cdot SE=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^3}{8}$.



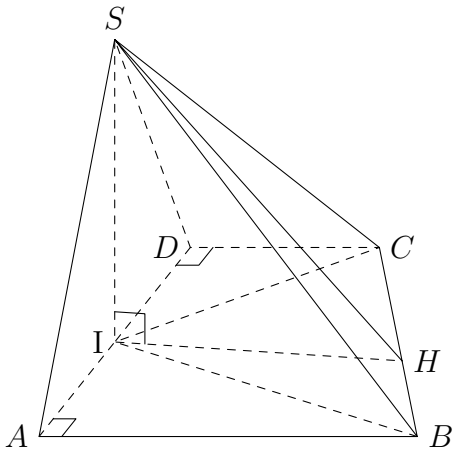
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D. Gọi I là trung điểm cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SIB), (SIC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60°. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{3\sqrt{15}}{40}$ và $AB=AD=1$, $CD=x$. Giá trị của x là

Ⓐ $x=2$. Ⓑ $x=\dfrac{1}{4}$. Ⓒ $x=4$. Ⓓ $x=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}(SIB)\perp(ABCD)\\(SIC)\perp(ABCD)\\(SIB)\cap(SIC)=SI\end{cases}\Rightarrow SI\perp(ABCD)$.



Gọi H là hình chiếu I lên $BC\Rightarrow IH\perp BC$.

Ta có

- $BC\perp(SIH)\Rightarrow BC\perp SH$
  $\Rightarrow((SBC),(ABCD))=(IH,SH)=\widehat{SHI}=60^\circ$
- $BC=\sqrt{(x-1)^2+1}=\sqrt{x^2-2x+2}$.

$S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}(AB+CD)\cdot AD=\dfrac{x+1}{2}$; $S_{IAB}=\dfrac{1}{4}$; $S_{ICD}=\dfrac{x}{4}$.

$S_{IBC}=S_{ABCD}-S_{IAB}-S_{ICD}=\dfrac{x+1}{4}$.

$\Rightarrow IH=\dfrac{2S_{IBC}}{BC}=\dfrac{x+1}{2\sqrt{x^2-2x+2}}$.

Ta có $SI=IH\cdot\tan 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}(x+1)}{2\sqrt{x^2-2x+2}}$.

Vậy $V=\dfrac{1}{3}\cdot SI\cdot S_{ABCD}=\dfrac{\sqrt{3}(x+1)^2}{12\sqrt{x^2-2x+2}}=\dfrac{3\sqrt{15}}{40}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

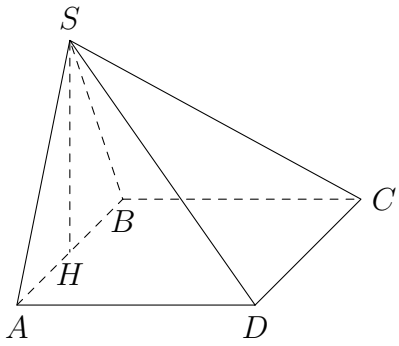
Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $AC = a\sqrt{7}$. Mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, góc giữa SC và mặt đáy $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính tỉ số $\dfrac{V}{a^3}$.

(A) $\dfrac{V}{a^3} = 4$. (B) $\dfrac{V}{a^3} = 2\sqrt{2}$. (C) $\dfrac{V}{a^3} = 6$. (D) $\dfrac{V}{a^3} = 12$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp AB$.



Ta có $\begin{cases} (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ (SAB) \perp (ABCD) \\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Ta có $(SC, (ABCD)) = (SC, HC) = \widehat{SCH} = 60°$.

Ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$, $HC = \sqrt{BC^2 - HB^2} = a\sqrt{2}$.

Ta có $SH = HC \cdot \tan 60° = a\sqrt{6}$; $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 2a \cdot a\sqrt{3} = 2\sqrt{3}a^2$.

$V = V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot a\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{3}a^2 = 2\sqrt{2}a^3 \Rightarrow \dfrac{V}{a^3} = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

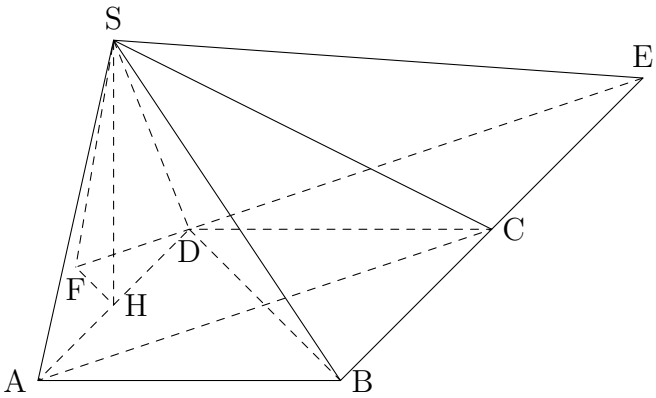
Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAD là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SD, AC bằng $\dfrac{4a\sqrt{33}}{33}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

(A) $V = \dfrac{a^3}{3}$. (B) $V = \dfrac{4a^3}{3}$. (C) $V = a^3$. (D) $V = \dfrac{2a^3}{3}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AD ta có $SH \perp (ABCD)$.

Dựng hình bình hành $ACDE$ ta có



$$\begin{aligned} \mathrm{d}(AC, SD) &= \mathrm{d}(AC, (SDE)) = \mathrm{d}(A, (SDE)) \\ &= 2\mathrm{d}(H, (SDE)) = 2HK. \end{aligned}$$

Và $2HK = 2 \cdot \dfrac{HF \cdot SH}{\sqrt{HF^2 + SH^2}} = \dfrac{4a\sqrt{33}}{33}$ vì $HF \parallel DO$ và $HF = \dfrac{1}{2} DO = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Do đó $SH = 2a$.

Vì vậy $V = \dfrac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot 2a \cdot a^2 = \dfrac{2a^3}{3}$.

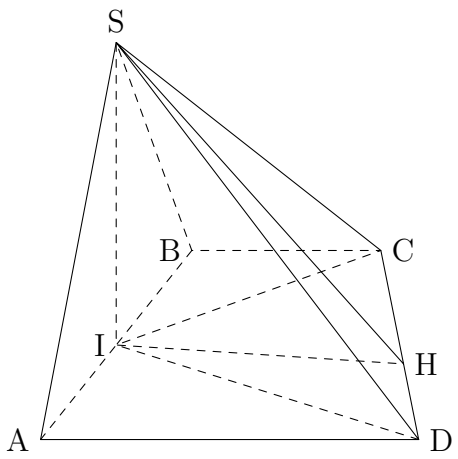
Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B, $AB = AD = 2a$, $BC = a$. Gọi I là trung điểm cạnh AB, hai mặt phẳng (SIC), (SID) cùng vuông góc với đáy, góc giữa (SCD) và đáy bằng 60°. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

(A) $V = \dfrac{3a^3\sqrt{15}}{5}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{5}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{15}$. (D) $V = \dfrac{9a^3\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải.

Ta có $S = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot AB = 3a^2$ và $SI \perp (ABCD)$.
Kẻ $IH \perp CD$ $(H \in CD) \Rightarrow \widehat{SHI} = 60^\circ$ và $h = IH \cdot \tan 60^\circ = IH\sqrt{3}$.
Tam giác ICD có $IH = \dfrac{2S_{ICD}}{CD} = \dfrac{2\left(S - S_{IBC} - S_{IAD}\right)}{CD} = \dfrac{3a}{\sqrt{5}}$.
Suy ra $h = \dfrac{3a\sqrt{15}}{5}$. Vậy $V = \dfrac{S \cdot h}{3} = \dfrac{3a^3\sqrt{15}}{5}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC. Hai mặt phẳng (SDM), (SAN) cùng vuông góc với đáy và (SCD) tạo với đáy một góc 60°. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

(A) $V = \dfrac{7a^3\sqrt{3}}{10}$. (B) $V = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{15}$. (C) $V = \dfrac{7a^3\sqrt{3}}{30}$. (D) $V = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải.

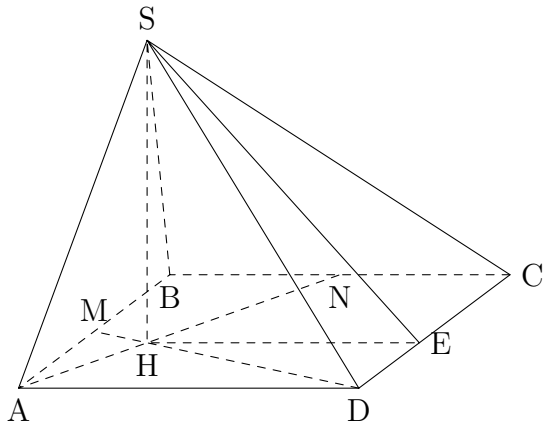
Ta có $S_{ABCD} = a^2$.

Gọi $H = DM \cap AN \Rightarrow SH = (SDM) \cap (SAN)$.

Suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Kẻ $HE \perp CD$ $(E \in CD) \Rightarrow \widehat{SEH} = 60^\circ$. Ta cũng có $AN \perp DM$.

Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$.



Mặt khác, $AN = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \dfrac{AH}{AN} = \dfrac{2}{5}$.

Ngoài ra, $\dfrac{DE}{DC} = \dfrac{AH}{AN} \Rightarrow DE = \dfrac{2}{5}DC = \dfrac{2a}{5}$.

Ta có $DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{5}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Suy ra $HE = \sqrt{DH^2 - DE^2} = \sqrt{\dfrac{4a^2}{5} - \dfrac{4a^2}{25}} = \dfrac{4a}{5}$.

Vì vậy $h = SH = HE \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{4a\sqrt{3}}{5}$.

Vậy $V = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}a^2 \cdot \dfrac{4a\sqrt{3}}{5} = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{15}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B, $AB = AD = 2a$, $BC = a$. Gọi I là trung điểm cạnh AB, hai mặt phẳng (SIC), (SID) cùng vuông góc với đáy, khoảng cách từ I đến (SCD) bằng $\dfrac{4a}{3}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

(A) $V = 36a^3$. (B) $V = 18a^3$. (C) $12a^3$. (D) $6a^3$.

Lời giải.

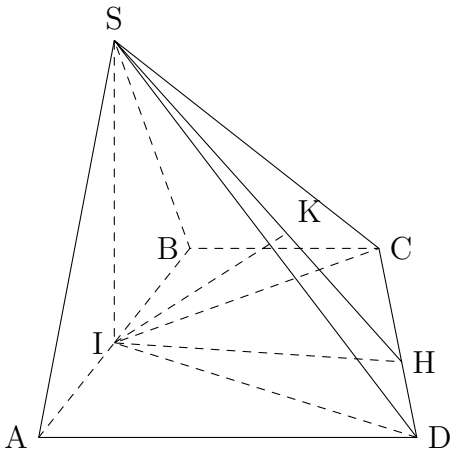
Ta có $S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot AB = 3a^2$.

Kẻ $IH \perp CD$ $(H \in CD)$, $IK \perp SH$ $(K \in HS)$.

Suy ra $IK \perp (SCD)$, $IK = d_1 = \dfrac{4a}{3}$.

$IH = \dfrac{2S_{ICD}}{CD} = \dfrac{2(S - S_{IAB} - S_{IAD})}{CD} = \dfrac{2\left(3a^2 - \frac{a^2}{2} - a^2\right)}{a\sqrt{5}} = \dfrac{3a}{\sqrt{5}}$.

Do đó $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{d_1^2} - \dfrac{1}{IH^2} = \dfrac{1}{\left(\frac{4a}{3}\right)^2} - \dfrac{1}{\left(\frac{3a}{\sqrt{5}}\right)^2} = \dfrac{1}{144a^2} \Rightarrow h = 12a$.



Do đó $V = \dfrac{1}{3}h \cdot S_{ABCD} = 12a^3$.

Chọn đáp án (C) □

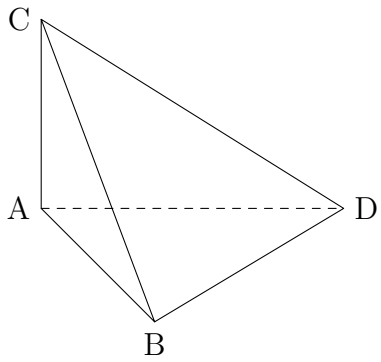
Câu 30. Cho hai mặt phẳng (P), (Q) vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng Δ. Trên Δ lấy hai điểm A, B với $AB = a$. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C, trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và $AC = BD = AB$. Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$

(A) $V = \dfrac{a^3}{6}$. (B) $V = \dfrac{a^3}{2}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải.

Theo giả thuyết ta có $\triangle ABD$ vuông tại B. Có $CA \perp AB \Rightarrow CA \perp (ABD)$.

Do đó $V = \dfrac{S_{ABD} \cdot CA}{3} = \dfrac{\frac{1}{2}a \cdot a \cdot a}{3} = \dfrac{a^3}{6}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC đều , tam giác ABD cân tại D, mặt phẳng (ABD) vuông góc với mặt phẳng (ABC), $CD = 2a\sqrt{3}$. Tính độ dài AB khi khối tứ diện $ABCD$ có thể tích lớn nhất.

(A) $AB = 2a$. (B) $AB = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$. (C) $AB = \dfrac{4a\sqrt{6}}{3}$. (D) $AB = 2a\sqrt{3}$.

Lời giải.

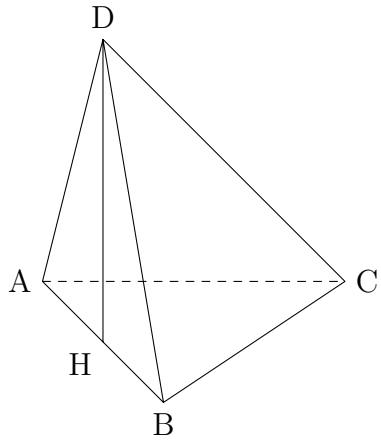
Đặt $AB = x$, gọi H là trung điểm của AB.

Ta có $DH \perp (ABC)$ và $h = \sqrt{CD^2 - CH^2} = \sqrt{12a^2 - \dfrac{3}{4}x^2}$.

Vậy $V = \dfrac{Sh}{3} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{12a^2 - \dfrac{3x^2}{4}} = f(x)$.

Ta có $f(x) = \dfrac{x^2\sqrt{16a^2 - x^2}}{8} \le f\left(\dfrac{4a\sqrt{6}}{3}\right)$.

Dấu bằng đạt tại $x = \dfrac{4a\sqrt{6}}{3}$.



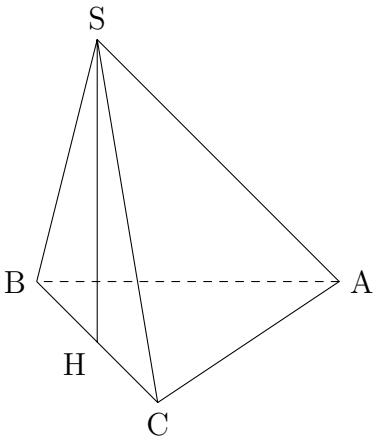
Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA = 3a$, $BC = 4a$. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

(A) $V = a^3\sqrt{3}$. (B) $V = a^3$. (C) $V = 3a^3\sqrt{3}$. (D) $V = 2a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Kẻ SH vuông góc với BC suy ra $SH \perp (ABC)$.
Có $SH = SB \cdot \sin \widehat{SBC} = a\sqrt{3}$ và $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BA \cdot BC = 6a^2$.
Suy ra $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC} \cdot SH = 2a^3\sqrt{3}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 4, tam giác SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SD, CD, BC. Thể tích khối chóp $S.ABPN$ là x, thể tích khối tứ diện $CMNP$ là y. Giá trị x, y thỏa mãn bất đẳng thức nào dưới đây?

(A) $x^2 + 2xy - y^2 > 160$.
(B) $x^2 - 2xy + 2y^2 < 109$.
(C) $x^2 + xy - y^4 < 145$.
(D) $x^2 - xy + y^4 > 125$.

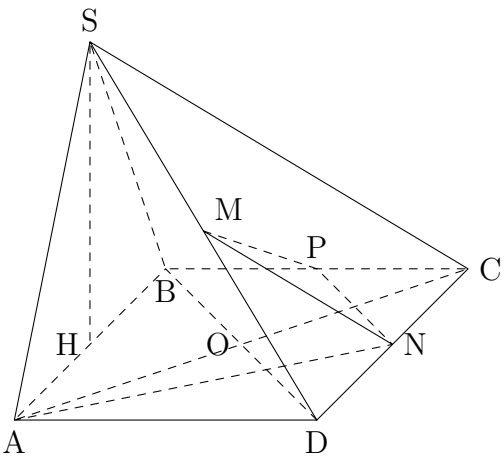
Lời giải.

Gọi H là trung điểm của cạnh AB.
Do $\triangle SAB$ đều và $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
Ta có $\triangle SAB$ đều và cạnh bằng $4 \Rightarrow SH = 2\sqrt{3}$.
$S_{ABPN} = S_{ABCD} - S_{AND} - S_{CPN}$

$$= AB^2 - \frac{AD \cdot DN}{2} - \frac{CN \cdot CP}{2} = 10.$$

Thể tích khối chóp $S.ABPN$ là

$$V_{ABPN} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{ABPN} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{20\sqrt{3}}{3}.$$



Ta có M là trung điểm của SD.
Suy ra $\mathrm{d}(M, (ABCD)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(S, (ABCD)) = \dfrac{1}{2}SH = \sqrt{3}$.
Thể tích khối tứ diện $MCPN$ là

$$V_{MCPN} = \frac{1}{3}\mathrm{d}(M, (ABCD)) \cdot S_{CPN} = \frac{1}{3}\mathrm{d}(M, (ABCD)) \cdot \frac{CN \cdot CP}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, tam giác SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

(A) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (B) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (C) $V=\dfrac{a^3}{6}$. (D) $V=a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của cạnh AB.

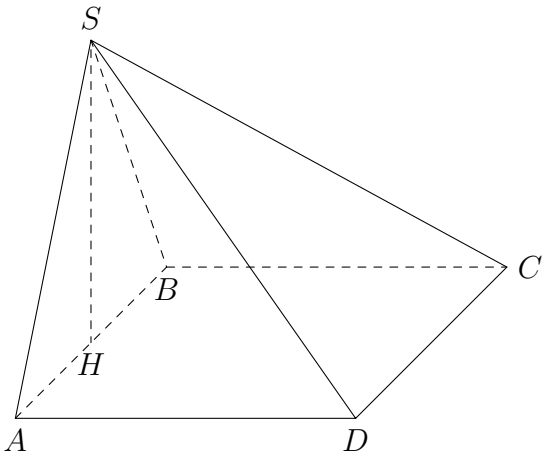
Do $\triangle SAB$ đều và $(SAB)\perp(ABCD)\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

Ta có $\triangle SAB$ đều và cạnh bằng $a\Rightarrow SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Có $S_{ABCD}=AB^2=a^2$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}SH\cdot S_{ABCD}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$



Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác đều, BCD là tam giác vuông cân tại D, $(ABC)\perp(BCD)$ và AD hợp với (BCD) một góc 60°, $AD=a$. Tính thể tích V của tứ diện $ABCD$.

(A) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. (B) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. (D) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của cạnh BC. Do $\triangle ABC$ đều và $(ABC)\perp(BCD)$

$\Rightarrow AH\perp(BCD)$.

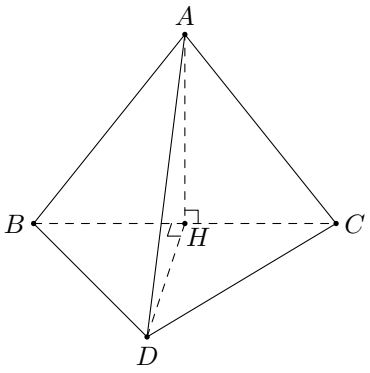
Ta có HD là hình chiếu của AD lên (BCD)

$\Rightarrow (AD,(BCD))=(AD,HD)=\widehat{ADH}=60^\circ$.

Có $AH=AD\cdot\sin\widehat{ADH}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $HD=AD\cdot\cos\widehat{ADH}=\dfrac{a}{2}$.

Mà $\triangle BCD$ vuông cân tại D nên $BC=2DH=a$.

Thể tích $V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}AH\cdot S_{BCD}=\dfrac{1}{3}AH\cdot\dfrac{BC\cdot DH}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, có $BC=a$, mặt bên SAC vuông góc với đáy, các mặt bên còn lại đều tạo với đáy một góc 45°. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

(A) $V=\dfrac{a^3}{12}$. (B) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. (C) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (D) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Kẻ $SH \perp AC$ vì $(SAC) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Gọi I, J lần lượt là hình chiếu của H trên AB và BC.

Suy ra $SI \perp AB$, $SJ \perp BC$.

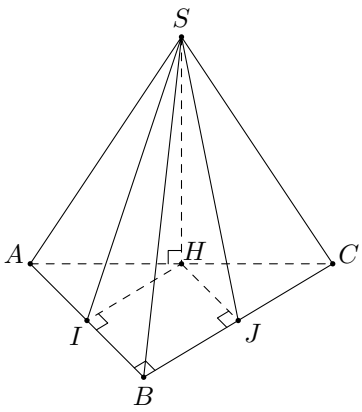
Theo giả thiết $\widehat{SIH} = \widehat{SJH} = 45^\circ$.

Ta có $HI = HS \cdot \cot \widehat{SIH} = HS \cdot \cot \widehat{SJH} = HJ$.

Tứ giác $HIBJ$ là hình vuông nên BH là đường phân giác của $\triangle ABC$ suy ra H là trung điểm AC.

Do đó $HI = HJ = SH = \dfrac{a}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SH = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}a^2 \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3}{12}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC đều cạnh a, tam giác SBC vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

(A) $V = \dfrac{a^3}{9}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. (D) $V = \dfrac{a^3}{16}$.

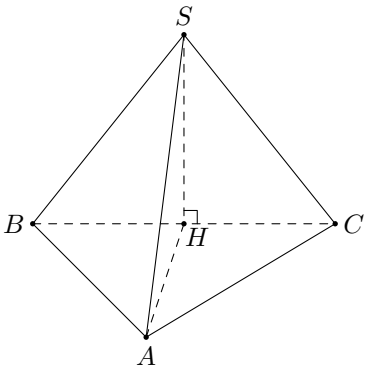
Lời giải.

Gọi H là trung điểm $BC \Rightarrow SH \perp BC$.

Ta có $(SBC) \perp (ABC)$ và $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Tam giác SBC vuông cân tại S nên $SH = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SH = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 38. Tứ diện $ABCD$ có hai tam giác ABC và BCD là hai tam giác đều lần lượt nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau, biết $AD = a$. Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{9}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{36}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm $BC \Rightarrow AH \perp BC$.

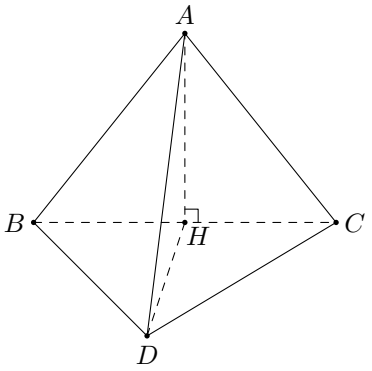
Ta có $(ABC) \perp (BCD)$, $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (BCD)$.

Và $\triangle ABC = \triangle BCD \Rightarrow AH = DH$.

Do đó AHD vuông cân tại $H \Rightarrow AH = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Mà $AH = \dfrac{BC\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = \dfrac{2AH}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a}{\sqrt{2}} \cdot \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{36}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BAC} = 90°$, $\widehat{ABC} = 30°$, SBC là tam giác đều cạnh a và $(SBC) \perp (ABC)$. Tính thể V của khối chóp $S.ABC$.

(A) $V = \dfrac{a^3}{6}$. (B) $V = \dfrac{a^3}{16}$. (C) $V = \dfrac{a^3}{3}$. (D) $V = \dfrac{a^3}{9}$.

Lời giải.

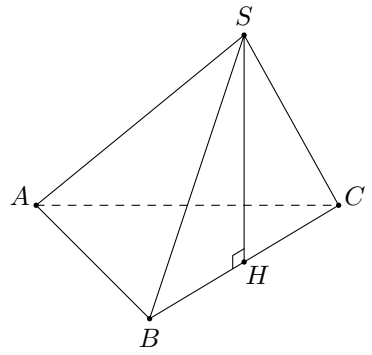
Gọi H là trung điểm của BC. Vì SBC là tam giác đều cạnh a nên $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Theo giả thiết ta có $(SBC) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$.

Ta có $BC = a$ nên $AB = BC \cdot \cos 30° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AC = BC \cdot \sin 30° = \dfrac{a}{2}$.

Suy ra $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8} = \dfrac{a^3}{16}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, gọi M là trung điểm của AB. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$, biết $SD = 2a\sqrt{5}$, SC tạo với đáy $(ABCD)$ một góc $60°$. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

(A) $V = \dfrac{4a^3\sqrt{15}}{3}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$. (C) $V = \dfrac{4a^3}{3}$. (D) $V = \dfrac{a^3}{3}$.

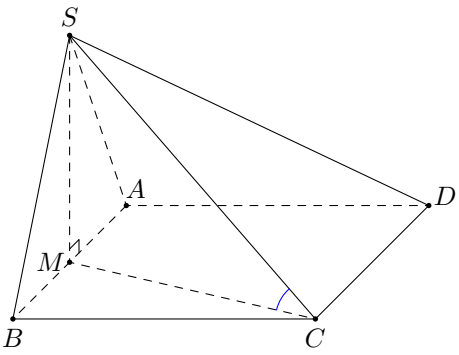
Lời giải.

Theo giả thiết ta có $SM \perp (ABCD)$.

Do đó $(SC;(ABCD)) = (SC;MC) = \widehat{SCM} = 60°$.

Trong tam giác vuông SMC và SMD ta có

$$SM = \sqrt{SD^2 - MD^2} = MC \cdot \tan 60°.$$



Mà $ABCD$ là hình vuông nên $MC = MD$.

Suy ra $SD^2 - MC^2 = 3MC^2 \Rightarrow MC = a\sqrt{5} \Rightarrow SM = a\sqrt{15}$.

Lại có $MC^2 = BC^2 + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 = \dfrac{5BC^2}{4} \Rightarrow BC = 2a$

$\Rightarrow S_{ABCD} = 4a^2$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SM \cdot S_{ABCD} = \dfrac{4a^3\sqrt{15}}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

(A) $\dfrac{2\sqrt{6}a^3}{3}$. (B) $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{4}$. (C) $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{6}$. (D) $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{12}$.

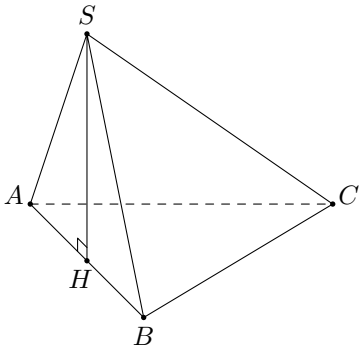
Lời giải.

Do tam giác SAB đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy nên chiều cao của hình chóp là $h = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

Tam giác ABC vuông tại A có $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{2}a$.

Suy ra $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = \dfrac{\sqrt{2}a^2}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}h \cdot S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{12}$.



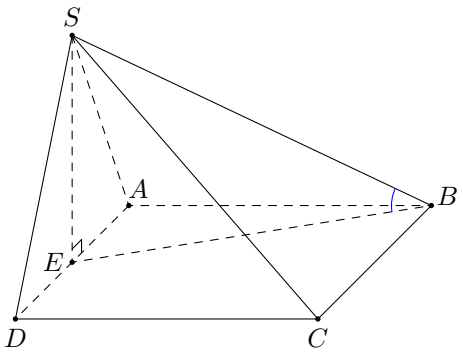
Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $AB = 2a$, $AD = a$. Tam giác SAD cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, SB hợp với đáy một góc 45°. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{17}}{3}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{17}}{6}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{17}}{9}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{17}}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Gọi E trung điểm của AD. Khi đó $SE \perp (ABCD)$
$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SE$.
Mà $S_{ABCD} = 2a^2$.
Mặt khác EB là hình chiếu của SB lên mặt phẳng $(ABCD)$
$\Rightarrow (SB, (ABCD)) = \widehat{SBE} = 45^\circ$.
Suy ra $SE = BE = \sqrt{AE^2 + AB^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + 4a^2} = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}$.
Vậy $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{17}}{2} \cdot 2a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{17}}{3}$.



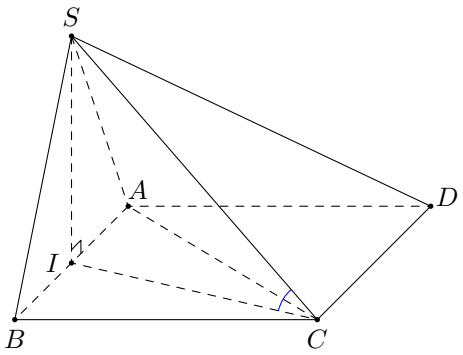
Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, góc giữa cạnh SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°, cạnh $AC = a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của đoạn AB.
Suy ra $SI \perp AB$ mà $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.
Do đó $(SC; (ABCD)) = \widehat{SCI} = 60^\circ$.
Tam giác ABC có $AC = AB = BC = a$ và CI là trung tuyến nên $CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Suy ra $SI = CI \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{3a}{2}$.
Mặt khác $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{3a}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



Chọn đáp án (A) □

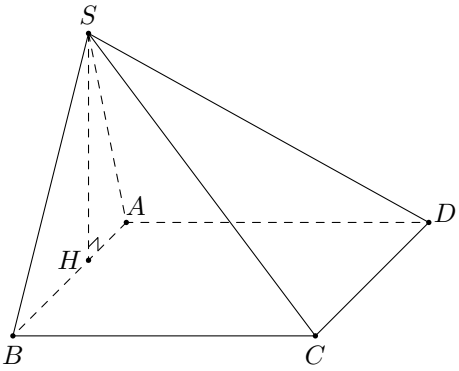
Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Hình chiếu vuông góc của S trên đường thẳng AB là điểm H thuộc đoạn AB sao cho $BH = 2AH$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

(A) $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. (B) $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{9}$. (D) $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{9}$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABCD} = a^2$.

Theo giả thiết $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp (ABCD). \\ SH \perp AB \end{cases}$



Xét tam giác SAB vuông tại S có SH là đường cao.

Do đó $SH^2 = BH \cdot AH = 2AH^2 = 2 \cdot \dfrac{1}{9}a^2 \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Vậy $V = \dfrac{1}{3}SA \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{3} \cdot a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, $\triangle SAB$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết $AC = 2a$, $BD = 4a$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{15}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$. (C) $\dfrac{2a^3\sqrt{15}}{3}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABCD} = \dfrac{AC \cdot BD}{2} = 4a^2$.

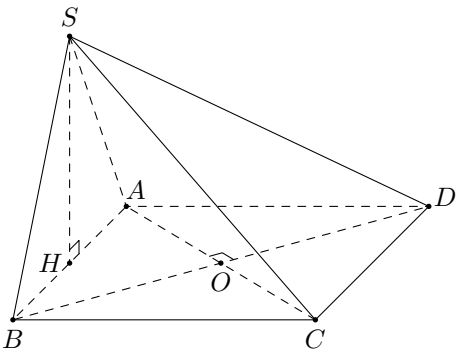
Gọi H là trung điểm AB. Ta có $\triangle SAB$ đều $\Rightarrow SH \perp AB$.

Do $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$;

$AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = a\sqrt{5}$.

Do đó $SH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot 4a^2 \cdot \dfrac{a\sqrt{15}}{2} = \dfrac{2a^3\sqrt{15}}{3}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA = 3a$, $BC = 4a$. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

(A) $V = a^3$. (B) $V = a^3\sqrt{3}$. (C) $V = 2a^3\sqrt{3}$. (D) $V = 2a^3$.

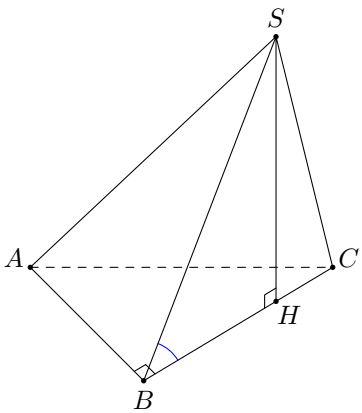
Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của S trên BC.

Vì $(SBC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến $BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Ta có $SH = SB \cdot \sin 60° = a\sqrt{3}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 3a \cdot 4a = 2a^3\sqrt{3}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = 2a$. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với đáy, hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng tạo với mặt phẳng đáy góc 60°. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$ theo a.

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (B) $V = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. (D) $V = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải.

Kẻ $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

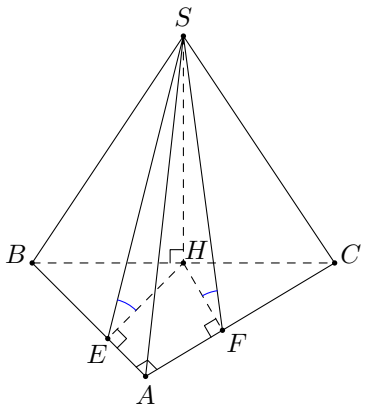
Kẻ $HE \perp AB$ $(E \in AB)$,$HF \perp AC$ $(F \in AC)$.

Ta có $\widehat{SEH} = \widehat{SFH} = 60^\circ$ và $HE = HF = SH \cdot \cot 60^\circ$.

Diện tích đáy bằng $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = a^2$.

Mặt khác

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{HAB} + S_{HAC} = \frac{1}{2}(AB \cdot HE + AC \cdot HF) \\ &= \frac{1}{2}(a \cdot SH \cdot \cot 60^\circ + 2a \cdot SH \cdot \cot 60^\circ) \\ \Rightarrow SH &= \frac{2S_{ABC}}{\dfrac{a}{\sqrt{3}} + \dfrac{2a}{\sqrt{3}}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$



Vậy $V = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SH = \dfrac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \dfrac{2a}{\sqrt{3}} = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9}$.

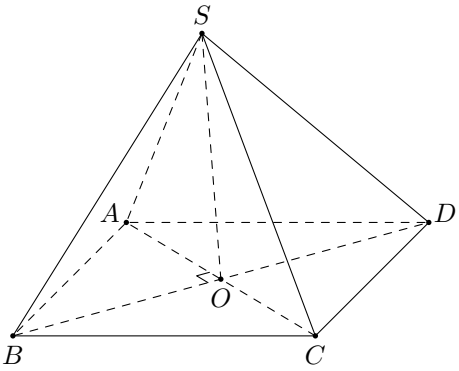
Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a, $SD = a\sqrt{2}$, $SA = SB = a$ và mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm hình thoi $ABCD$.



Ta có $\begin{cases} AO \perp BD \\ (SBD) \perp (ABCD) \\ (SBD) \cap (ABCD) = BD \end{cases} \Rightarrow AO \perp (SBD)$.

Mặt khác $AS = AB = AD \Rightarrow SO = BO = DO$ hay $\triangle SBD$ vuông tại S.

Do đó $BD = \sqrt{SD^2 + SB^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$;

$AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a}{2}$.

Mà $V_{ASBD} = \dfrac{1}{3}AO \cdot S_{SBD} = \dfrac{1}{3}AO \cdot \dfrac{1}{2} \cdot SB \cdot SD = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = 2V_{ASBD} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

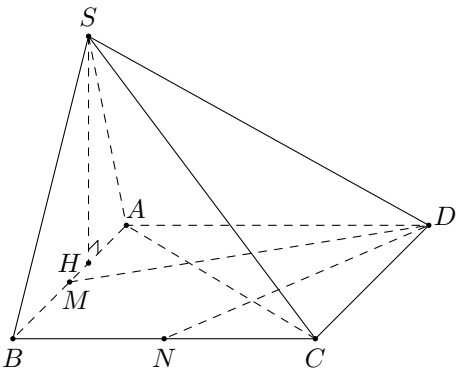
Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SBA) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC. Tính theo a thể tích khối chóp $S.BMDN$

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (B) $V = \dfrac{a^3}{3}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Kẻ $SH \perp AB$ $(H \in AB)$.



Mà $(SAB) \perp (ABCD)$, nên $SH \perp (ABCD)$.

Vì $AB^2 = SA^2 + SB^2$ nên $\triangle SAB$ vuông tại H.

Do đó $SH = \dfrac{SA \cdot SB}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Mà $S_{BMDN} = S_{ABCD} - S_{AMD} - S_{NCD} = 4a^2 - 2 \cdot \dfrac{1}{2}a \cdot 2a = 2a^2$.

Vậy $V_{S.BMDN} = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{BMDN} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 2a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

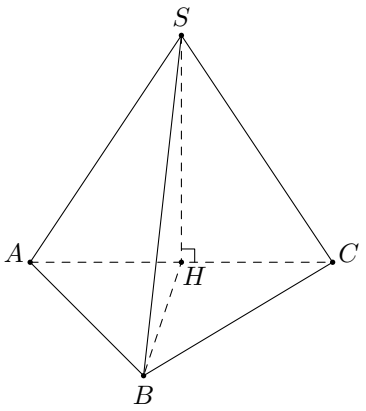
Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $\triangle SAC$ cân tại S, $\widehat{SBC} = 60°$. Mặt phẳng (SAC) vuông góc (ABC). Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

(A) $V = \dfrac{a^3}{8}$. (B) $V = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AC.



Ta có $\begin{cases} SH \perp AC \\ (SAC) \perp (ABC) \\ (SAC) \cap (ABC) = AC \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Giả sử $SH = x$ $(x > 0)$.

Ta có $SC^2 = SH^2 + HC^2 = x^2 + \dfrac{a^2}{4}$; $SB^2 = SH^2 + HB^2 = x^2 + \dfrac{3a^2}{4}$.

Áp dụng định lý cosin trong tam giác SBC, ta có

$$\begin{aligned} & SC^2 = SB^2 + BC^2 - 2 \cdot SB \cdot BC \cdot \cos \widehat{SBC} \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + \frac{a^2}{4} = x^2 + \frac{3a^2}{4} - a\sqrt{x^2 + \frac{3a^2}{4}} + a^2 \\ \Rightarrow \quad & x = \frac{a\sqrt{6}}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

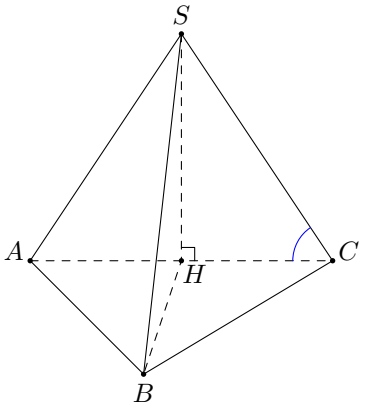
Chọn đáp án (D) □

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABC$ có $(SAC) \perp (ABC)$, SAB là tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$, $BC = a\sqrt{3}$, đường thẳng SC tạo với đáy góc $60°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (B) $2a^3\sqrt{6}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải.

Ta có $BA = BS = BC = \sqrt{3}a$ nên hình chiếu vuông góc H của B lên (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ASC.



Mặt khác $\begin{cases} BA = BC \\ (BAC) \perp (SAC) \end{cases} \Rightarrow H$ là trung điểm cạnh AC.

Do đó tam giác ASC vuông tại S và $\widehat{SCA} = 60° = (SC, (ABC))$.

Ta có $SC = AS \cot 60° = \sqrt{3}a \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = a$, $AC = 2a$.

Khi đó $\begin{cases} S_{SAC} = \dfrac{1}{2} SA \cdot SC = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{2} \\ BH = \sqrt{BA^2 - \left(\dfrac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}. \end{cases}$

Vậy $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}a^2}{2} \cdot \sqrt{2}a = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{6}$.

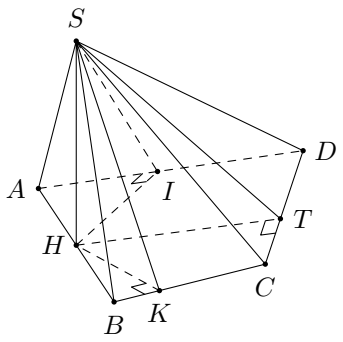
Chọn đáp án (D) □

Câu 52. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là một tứ giác lồi, $BC = 1$, $CD = \sqrt{13}$, $DA = \sqrt{17}$. Tam giác SAB đều cạnh bằng 1 và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách từ S đến đường thẳng BC, CD, DA lần lượt bằng 1, 2, $\sqrt{5}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

(A) $\dfrac{31\sqrt{3}}{12}$. (B) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{31\sqrt{3}}{24}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AB. Khi đó $SH \perp (ABCD)$ và $h = SH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Gọi I, K, T lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AD, BC, CD.
Ta có $SK \perp BC$, $ST \perp CD$, $SI \perp DA$ và theo giả thiết thì $SK = 1$, $ST = 2$, $SI = \sqrt{5}$.
Áp dụng định lý Pytagore cho các tam giác vuông SHK, SHI, SHT ta có



- $HK = \sqrt{SK^2 - SH^2} = \sqrt{1 - \dfrac{3}{4}} = \dfrac{1}{2}$,
- $HI = \sqrt{SI^2 - SH^2} = \sqrt{5 - \dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$,
- $HT = \sqrt{ST^2 - SH^2} = \sqrt{4 - \dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

Do đó, diện tích tứ giác $ABCD$ là

$$\begin{aligned} S &= S_{HBC} + S_{HCD} + S_{HDA} = \frac{1}{2}(HK \cdot BC + HT \cdot CD + HI \cdot DA) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{\sqrt{13}}{2} \cdot \sqrt{13} + \frac{\sqrt{17}}{2} \cdot \sqrt{17}\right) = \frac{31}{4}. \end{aligned}$$

Vậy thể thích khối chóp là $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{31}{4} = \dfrac{31\sqrt{3}}{24}$.
Chọn đáp án (C) □

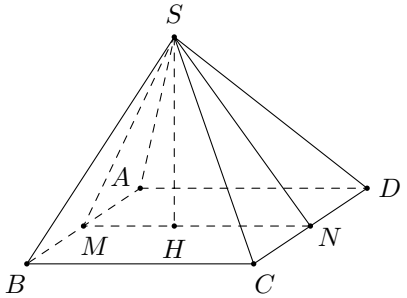
Câu 53. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 1, tam giác SAB, SCD là các tam giác cân đỉnh S. Khoảng cách từ S đến các đường thẳng AB, CD lần lượt bằng 1, $\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (B) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD ta có

$$\begin{cases} SM \perp AB \\ SN \perp CD \Rightarrow CD \perp (SMN) \Rightarrow (SMN) \perp (ABCD). \\ CD \parallel AB \end{cases}$$



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên MN thì $SH \perp (ABCD)$.
Tam giác SMN có $SM = \mathrm{d}(S, AB) = 1$, $SN = \mathrm{d}(S, CD) = \sqrt{3}$, $MN = 1$.

Do đó $SH = \dfrac{2S_{SMN}}{MN} = \dfrac{2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \sqrt{3}$.

Vậy $V = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

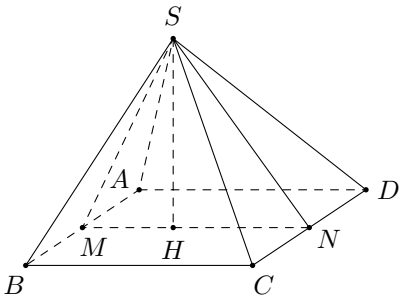
Câu 54. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = SB$, $SC = SD$. Biết $(SAB) \perp (SCD)$ và tổng diện tích của hai tam giác SAB, SCD bằng $\dfrac{7a^2}{10}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

(A) $\dfrac{4a^3}{75}$. (B) $\dfrac{4a^3}{15}$. (C) $\dfrac{4a^3}{25}$. (D) $\dfrac{12a^3}{25}$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD ta có

$$\begin{cases} SM \perp AB \\ SN \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SMN) \Rightarrow (SMN) \perp (ABCD).$$
$$CD \parallel AB$$



Gọi H là hìn chiếu vuông góc của S trên MN thì $SH \perp (ABCD)$.

Vì $(SAB) \perp (SCD)$ nên tam giác SMN vuông tại S.

Diện tích tam giác SAB là $S_{SAB} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot SM$.

Diện tích tam giác SCD là $S_{SCD} = \dfrac{1}{2} \cdot CD \cdot SN$.

Theo đề ta có $\dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot SM + \dfrac{1}{2} \cdot CD \cdot SN = \dfrac{7a^2}{10} \Leftrightarrow SM + SN = \dfrac{7a}{5} \Rightarrow (SM + SN)^2 = \dfrac{49a^2}{25}$.

Mặt khác, tam giác SMN vuông tại S nên

$$SM^2 + SN^2 = MN^2 \Leftrightarrow SM^2 + SN^2 = a^2 \Leftrightarrow (SM + SN)^2 - 2SM \cdot SN = a^2 \Leftrightarrow SM \cdot SN = \frac{12a^2}{25}.$$

Kẻ $SH \perp MN (H \in MN)$ ta có $SH \perp (ABC)$, do đó $SH = \dfrac{SM \cdot SN}{MN} = \dfrac{12a}{25}$.

Suy ra thể tích $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{12a}{25} \cdot a^2 = \dfrac{4a^3}{25}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 55. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác SAB, SCD là các tam giác cân đỉnh S. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB), (SCD) là 60° và tổng diện tích của hai tam giác SAB, SCD bằng $\dfrac{3a^2}{4}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

(A) $\dfrac{5a^3}{72}$. (B) $\dfrac{5\sqrt{3}a^3}{24}$. (C) $\dfrac{5\sqrt{3}a^3}{72}$. (D) $\dfrac{5a^3}{24}$.

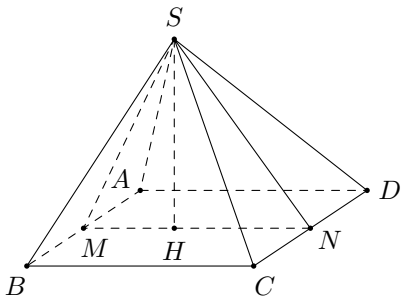
Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD.

Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là góc giữa SM và SN. Suy ra $(SM, SN) = 60^\circ$.

Kẻ $SH \perp MN$ $(H \in MN)$. Ta có $SH \perp (ABC)$, do đó

$$SH = \frac{SM \cdot SN \cdot \sin 60^\circ}{MN}. \quad (*)$$



Diện tích tam giác SAB là $S_{SAB} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot SM$.

Diện tích tam giác SCD là $S_{SCD} = \dfrac{1}{2} \cdot CD \cdot SN$.

Theo đề ta có $\dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot SM + \dfrac{1}{2} \cdot CD \cdot SN = \dfrac{3a^2}{4} \Leftrightarrow SM + SN = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow (SM + SN)^2 = \dfrac{9a^2}{4}$.

Theo định lý cosin trong tam giác SMN, ta có

$$MN^2 = SM^2 + SN^2 - 2SM \cdot SN \cdot \cos\widehat{MSN} = (SM + SN)^2 - 2SM \cdot SN \left(1 + \cos\widehat{MSN}\right)$$

$$\Rightarrow \quad SM \cdot SN = \frac{(SM + SN)^2 - MN^2}{2\left(1 + \cos\widehat{MSN}\right)}.$$

Xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1. $\widehat{MSN} = 60^\circ$, khi đó $SM \cdot SN = \dfrac{5a^2}{8\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{5a^2}{12}$.

Thay vào $(*)$ ta có $SH = \dfrac{SM \cdot SN \cdot \sin 120^\circ}{MN} = \dfrac{5\sqrt{3}a}{24}$.

Suy ra thể tích $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{5\sqrt{3}a}{24} \cdot a^2 = \dfrac{5\sqrt{3}a^3}{72}$.

Trường hợp 2. $\widehat{MSN} = 120^\circ$.

Khi đó $SM \cdot SN = \dfrac{5a^2}{8\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{5a^2}{4}$ (vô lý vì $\dfrac{3a}{2} = SM + SN \geq 2\sqrt{SM \cdot SN} = \sqrt{5}a$).

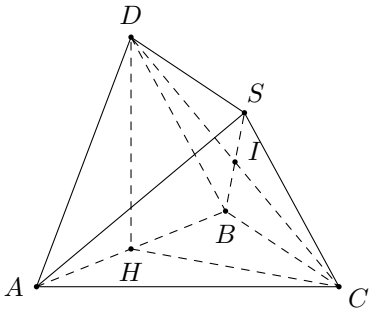
Chọn đáp án (C) □

Câu 56. Cho hai tam giác đều ABC và ABD có độ dài cạnh bằng 1 và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc. Gọi S là điểm đối xứng của B qua đường thẳng DC. Tính thể tích của khối đa diện $ABDSC$.

(A) $V = \dfrac{3}{4}$. (B) $V = \dfrac{3}{8}$. (C) $V = \dfrac{1}{2}$. (D) $V = \dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Gọi I, H lần lượt là trung điểm của CD, AB.



Ta có $V_{ABDSC} = V_{S.ABD} + V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\mathrm{d}(S,(ABD)) + \mathrm{d}(S,(ABC)))$.

Trong đó $\mathrm{d}(S,(ABD)) = 2\mathrm{d}(I,(ABD)) = \mathrm{d}(C,(ABD)) = CH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và

$$\mathrm{d}(S,(ABC)) = 2\mathrm{d}(I,(ABC)) = \mathrm{d}(D,(ABC)) = DH = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $V_{ABDSC} = V_{S.ABD} + V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$.

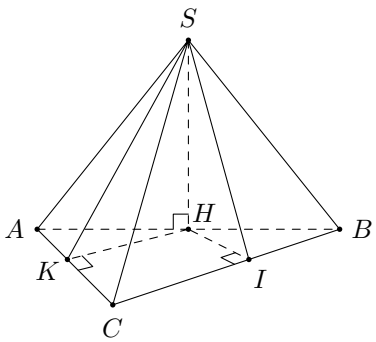
Chọn đáp án (D) □

Câu 57. Cho khối chóp $S.ABC$ có các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCA) lần lượt tạo với đáy các góc $90°$, $60°$, $60°$. Biết tam giác SAB vuông cân tại S, $AB = 2a$, chu vi tam giác ABC bằng $10a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

(A) $\dfrac{5\sqrt{3}a^3}{9}$. (B) $\dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$. (C) $\dfrac{5\sqrt{3}a^3}{3}$. (D) $\dfrac{4\sqrt{3}a^3}{9}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm cạnh AB. Suy ra $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABC)$ và $SH = \dfrac{AB}{2} = a$.



Gọi I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên BC và CA. Khi đó $HI \perp BC$, $HK \perp CA \Rightarrow \widehat{SIH} = \widehat{SKH} = 60°$.

Suy ra

$$HI = HK = SH \cot 60° = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Diện tích tam giác ABC là

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{HAC} + S_{HBC} = \frac{1}{2} \cdot (HI \cdot BC + HK \cdot CA) \\ &= \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot (BC + CA) = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot (10a - 2a) = \frac{4a\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Vậy $V = \dfrac{S_{ABC} \cdot SH}{3} = \dfrac{4\sqrt{3}a^3}{9}$.

Chọn đáp án (D) □

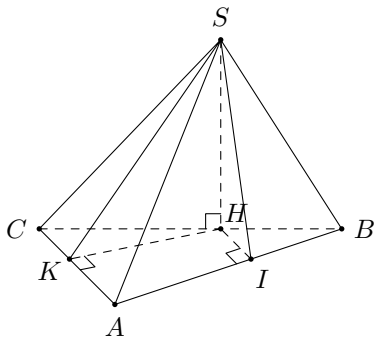
Câu 58. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, các mặt bên (SBC), (SCA), (SAB) lần lượt tạo với đáy các góc $90°$, α, β sao cho $\alpha + \beta = 90°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ có giá trị lớn nhất bằng

(A) $\dfrac{3a^3}{16}$. (B) $\dfrac{a^3}{8}$. (C) $\dfrac{3a^3}{8}$. (D) $\dfrac{a^3}{16}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên BC. Suy ra

$$SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC).$$



Gọi I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC. Khi đó $HI \perp AB$, $HK \perp AC \Rightarrow \widehat{SIH} = \beta$ và $\widehat{SKH} = \alpha$.

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}a^2}{4} &= S_{ABC} = S_{HAB} + S_{HCA}\\ &= \frac{1}{2}(AB \cdot HI + AC \cdot HK)\\ &= \frac{a}{2}(SH\cot\beta + SH\cot\alpha).\end{aligned}$$

Do đó $SH = \dfrac{\sqrt{3}}{2(\cot\alpha + \cot\beta)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2(\cot\alpha + \tan\alpha)} \le \dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{\cot\alpha \cdot \tan\alpha}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (vì $\alpha + \beta = 90^\circ$ nên $\tan\alpha = \cot\beta$).

Đẳng thức xảy ra khi $\alpha = \beta = 45^\circ$.

Vậy $\max V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{16}$.

Chọn đáp án (D) □

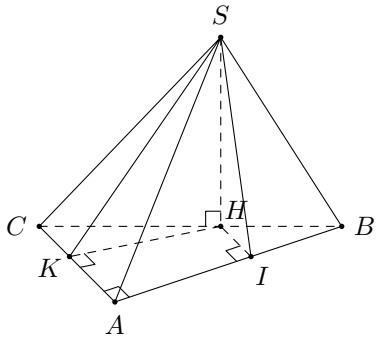
Câu 59. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = 1$, $AC = 2$. Các mặt bên (SBC), (SCA), (SAB) lần lượt tạo với đáy các góc 90°, α, β saocho $\alpha + \beta = 90^\circ$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ có giá trị lớn nhất bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên BC. Suy ra

$$SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC).$$



Gọi I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC. Khi đó $HI \perp AB$, $HK \perp AC \Rightarrow \widehat{SIH} = \beta$ và $\widehat{SKH} = \alpha$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = 1$.

Ta có

$$\begin{aligned}S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle AHB} + S_{\triangle AHC}\\ &= \frac{1}{2} \cdot HI \cdot AB + \frac{1}{2} \cdot HK \cdot AC\\ &= \frac{1}{2} \cdot (SH \cdot \cot\beta + 2 \cdot SH \cdot \cot\alpha).\end{aligned}$$

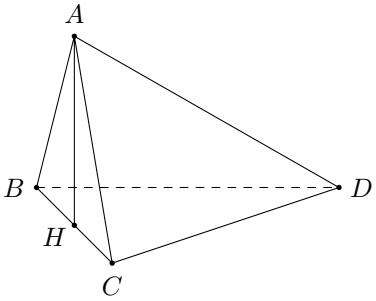
Vì $\alpha + \beta = 90^\circ$ nên $\tan\alpha = \cot\beta$.

Do đó $SH = \dfrac{2}{\cot\beta + 2\cdot\cot\alpha} = \dfrac{2}{2\cdot\cot\alpha + \tan\alpha} \le \dfrac{2}{2\sqrt{2\cdot\cot\alpha\cdot\tan\alpha}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Đẳng thức xảy ra khi $2\cot\alpha = \tan\alpha \Leftrightarrow \tan^2\alpha = 2 \Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{2} \Rightarrow \alpha = \arctan\sqrt{2}$.
Vậy $\max V = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1 = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 60. Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD = BD = 1$, $CD = \sqrt{2}$. Hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) vuông góc với nhau. Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.
(A) $V = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. (B) $V = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$. (C) $V = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$. (D) $V = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm cạnh BC.
Tam giác ABC cân tại A nên $AH \perp BC$.
Mà $(ABC) \perp (BCD) \Rightarrow AH \perp (BCD)$.
Vì $AB = AC = AD$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$.
Suy ra $\triangle BCD$ vuông tại D. Khi đó $BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = \sqrt{3}$.
Tam giác AHC vuông tại H nên



$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{AC^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

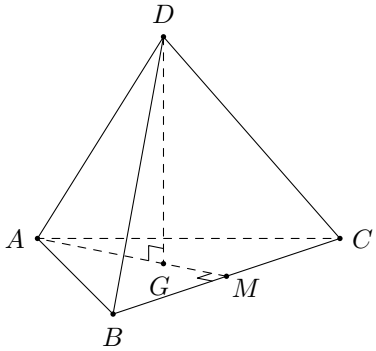
Vậy $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\cdot AH\cdot S_{BCD} = \dfrac{1}{3}\cdot AH\cdot\dfrac{1}{2}\cdot DB\cdot DC = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$.
Chọn đáp án (C) □

Dạng 5. Thể tích khối chóp đều

Câu 1. Thể tích V của khối tứ diện đều có cạnh bằng a là
(A) $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. (B) $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{12}$. (C) $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. (D) $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{4}$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm của tam giác đều ABC. Khi đó $DG \perp (ABC)$.
Ta tính được $AG = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $DG = \sqrt{DA^2 - AG^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.
Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
Vậy thể tích của khối tứ diện $ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot DG = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{12}$.

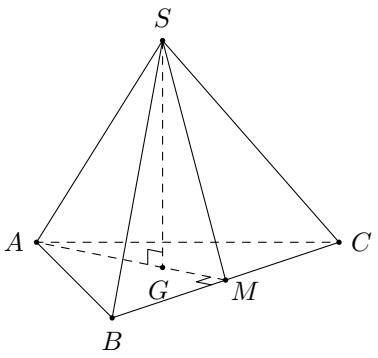


Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60°. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

(A) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$. (B) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. (C) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. (D) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BC, G là trọng tâm của tam giác đều ABC.

Khi đó $SG\perp(ABC)$.

Ta cũng có $AM\perp BC$ và $(SBC)\cap(ABC)=BC$ nên góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABC) là $\widehat{SMG}=60^\circ$.

Ta tính được $GM=\dfrac{1}{3}AM=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ và $SG=GM\cdot\tan\widehat{SMG}=\dfrac{a}{2}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

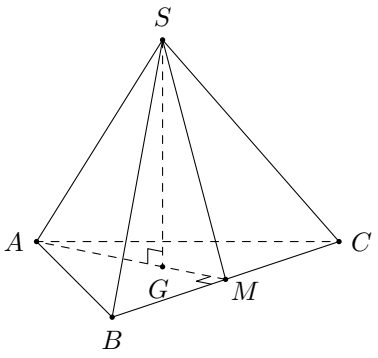
Vậy thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V=\dfrac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot SG=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{a}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Trong tất cả các hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$, khối chóp có thể tích lớn nhất là

(A) $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (B) $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. (C) $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. (D) $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Xét hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng x và cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$.

Gọi M là trung điểm của BC, G là trọng tâm của tam giác đều ABC.

Khi đó $SG\perp(ABC)$.

Ta tính được $AG=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{x\sqrt{3}}{2}=\dfrac{x\sqrt{3}}{3}$ và

$$SG=\sqrt{SA^2-AG^2}=\sqrt{\frac{9a^2-x^2}{3}}\ \text{(điều kiện } 0<x<3a).$$

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC}=\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

Do đó thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V=\dfrac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot SG=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{\dfrac{9a^2-x^2}{3}}=\dfrac{1}{12}\cdot\sqrt{x^4\left(9a^2-x^2\right)}$.

Ta có $x^4\left(9a^2-x^2\right)=4\cdot\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{x^2}{2}\cdot\left(9a^2-x^2\right)\le 4\cdot\left(\dfrac{\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^2}{2}+9a^2-x^2}{3}\right)^3=108a^6$.

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{x^2}{2} = 9a^2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 6a^2 \Leftrightarrow x = a\sqrt{6}$.

Vậy $\max V = \dfrac{1}{12} \cdot \sqrt{108a^6} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$ khi $x = a\sqrt{6}$.

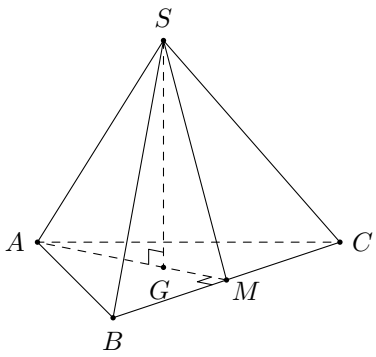
Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Thể tích V của khối chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên gấp đôi cạnh đáy là

(A) $V = \dfrac{\sqrt{11}a^3}{12}$. (B) $V = \dfrac{\sqrt{13}a^3}{12}$. (C) $V = \dfrac{\sqrt{11}a^3}{4}$. (D) $V = \dfrac{\sqrt{13}a^3}{4}$.

Lời giải.

Xét hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên gấp đôi cạnh đáy.



Gọi M là trung điểm của BC, G là trọng tâm của tam giác đều ABC.

Khi đó $SG \perp (ABC)$.

Ta tính được $AG = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \dfrac{a\sqrt{33}}{3}$. Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SG = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{33}}{3} = \frac{a^3\sqrt{11}}{12}.$$

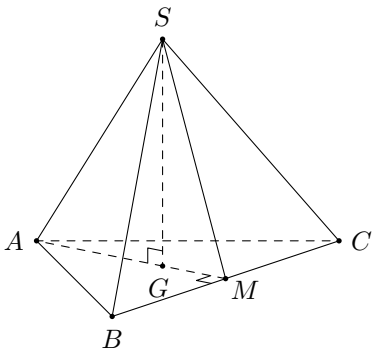
Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° Thể tích V khối chóp đã cho bằng

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC, G là trọng tâm của tam giác đều ABC. Khi đó $SG \perp (ABC)$ và góc giữa cạnh bên SA với mặt đáy là $\widehat{SAG} = 60^\circ$.



Ta tính được $AG = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và

$$SG = AG \cdot \tan \widehat{SAG} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a.$$

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SG = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

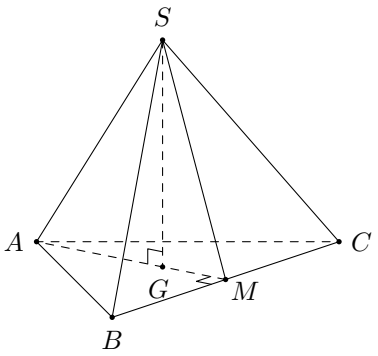
Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Khối chóp tam giác đều có cạnh bên bằng $2\sqrt{3}a$ và thể tích bằng $4\sqrt{3}a^3$. Chiều cao h của khối chóp đã cho là

(A) $h = \sqrt{3}a$. (B) $h = \dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$. (C) $h = 2a$. (D) $h = \dfrac{4a\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải.

Xét hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng $2\sqrt{3}a$ và thể tích bằng $4\sqrt{3}a^3$. Giả sử cạnh đáy bằng x, $x > 0$.



Gọi M là trung điểm của BC, G là trọng tâm của tam giác đều ABC. Khi đó $SG \perp (ABC)$.

Ta tính được $AG = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{x\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$ và

$$h^2 = SG^2 = SA^2 - AG^2 = 12a^2 - \frac{x^2}{3} \Rightarrow x^2 = 3\left(12a^2 - h^2\right).$$

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SG \Rightarrow h = SG = \dfrac{3V}{S_{ABC}} = \dfrac{48a^3}{x^2} \Rightarrow hx^2 = 48a^3$.

Do đó ta có phương trình $3h\left(12a^2 - h^2\right) = 48a^3 \Leftrightarrow 16a^3 - 12a^2h + h^3 = 0 \Rightarrow h = 2a$.

Vậy chiều cao của khối chóp đã cho là $h = 2a$.

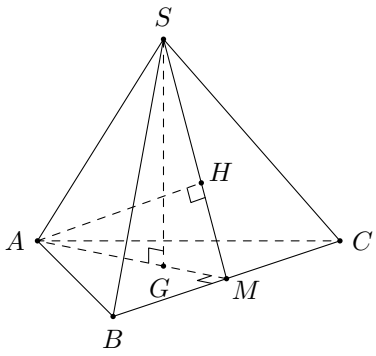
Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Trong tất cả các khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{3}$, khối chóp có thể tích nhỏ nhất là

(A) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (C) $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{2}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC, G là trọng tâm của tam giác đều ABC, H là hình chiếu vuông góc của A trên SM. Khi đó $SG \perp (ABC)$ và $\mathrm{d}\,(A,(SBC)) = AH$.



Giả sử cạnh của tam giác đều ABC bằng x.

Ta tính được $AM = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$, $GM = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{x\sqrt{3}}{6}$ và

$$MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2 - 3a^2}.$$

Ta có $\tan\widehat{SMA} = \dfrac{SG}{GM} = \dfrac{AH}{MH}$ suy ra

$$SG = \frac{AH \cdot GM}{MH} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \dfrac{x\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{\dfrac{3}{4}x^2 - 3a^2}} = \frac{ax}{\sqrt{3x^2 - 12a^2}}.$$

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SG = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{ax}{\sqrt{3x^2 - 12a^2}} = \dfrac{1}{12} \cdot \dfrac{ax^3}{\sqrt{x^2 - 4a^2}}$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2 - 4a^2}}$ với $x > 2a$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{3x^2 \cdot \sqrt{x^2 - 4a^2} - x^3 \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4a^2}}}{x^2 - 4a^2} = \dfrac{2x^4 - 12a^2x^2}{(x^2 - 4a^2)\sqrt{x^2 - 4a^2}}$.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^4 - 12a^2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2(x^2 - 6a^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = a\sqrt{6} \\ x = -a\sqrt{6}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của $f(x)$ với $x > 2a$ như sau

x	$2a$		$a\sqrt{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$a^26\sqrt{3}$	↗	

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất bằng $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$ khi cạnh của tam giác đều ABC bằng $a\sqrt{6}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Khối chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng $2\sqrt{3}a$ và thể tích bằng $4a^3$. Tính chiều cao h của khối chóp đã cho.

(A) $h = 4\sqrt{3}a$. (B) $h = \dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$. (C) $h = 4a$. (D) $h = \dfrac{2a\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải.

Diện tích của tam giác đều là $B = \dfrac{\left(2\sqrt{3}a\right)^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}a^2$.

Chiều cao của khối chóp là $h = \dfrac{3V}{B} = \dfrac{3\cdot 4a^3}{3\sqrt{3}a^2} = \dfrac{4\sqrt{3}a}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC. Biết mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC), diện tích tam giác AMN bằng $\sqrt{10}a^2$. Thể tích V của khối chóp đã cho bằng

(A) $\dfrac{8\sqrt{5}a^3}{3}$. (B) $\dfrac{8a^3\sqrt{5}}{9}$. (C) $8\sqrt{5}a^3$. (D) $\dfrac{8\sqrt{5}a^3}{27}$.

Lời giải.

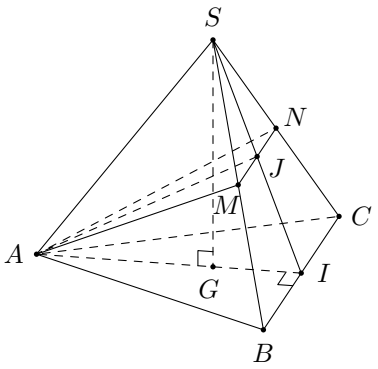
Giả sử cạnh của tam giác đều ABC bằng x.

Gọi I là trung điểm của BC, G là trọng tâm của tam giác đều ABC.

Gọi $J = SI \cap MN$, ta có J là trung điểm của SI và MN.

Vì tam giác AMN cân tại A nên $AJ \perp MN$.

Mặt khác $(AMN) \perp (SBC)$ và $(AMN) \cap (SBC) = MN$ nên $AJ \perp (SBC)$.



Suy ra tam giác SAI cân tại I và $SA = AI = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác SBI vuông tại I nên

$$SI = \sqrt{SB^2 - BI^2} = \sqrt{\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

Ta có $MN = \dfrac{x}{2}$; $AJ = \sqrt{AI^2 - \left(\dfrac{SI}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \dfrac{x^2}{8}} = \dfrac{x\sqrt{10}}{4}$.

Diện tích tam giác AMN là $S_{AMN} = \dfrac{1}{2}\cdot JA\cdot MN = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x\sqrt{10}}{4}\cdot\dfrac{x}{2} = a^2\sqrt{10} \Rightarrow x = 4a$.

Tam giác SAG vuông tại G nên $SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{\left(2a\sqrt{3}\right)^2 - \left(\dfrac{4a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \dfrac{2a\sqrt{15}}{3}$.

Vậy thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3}\cdot SG\cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2a\sqrt{15}}{3}\cdot\dfrac{(4a)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{8a^3\sqrt{5}}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Thể tích V của khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a.

(A) $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. (B) $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$. (C) $\sqrt{2}a^3$. (D) $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{2}$.

Lời giải.

Giả sử $S.ABCD$ là khối chóp tứ giác đều, O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Khi đó $S_{ABCD} = a^2$,

$h = SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}h = \dfrac{1}{3}a^2\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Tính thể tích V của khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên có độ dài gấp đôi cạnh đáy.

(A) $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{2}$. (B) $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$. (C) $V = \dfrac{\sqrt{14}a^3}{2}$. (D) $V = \dfrac{\sqrt{14}a^3}{6}$.

Lời giải.

Giả sử $S.ABCD$ là khối chóp tứ giác đều, O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Khi đó $S_{ABCD} = a^2$, $h = SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}h = \dfrac{1}{3}a^2\dfrac{a\sqrt{14}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{14}}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SB, SC. Biết mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{24}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{24}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{8}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{8}$.

Lời giải.

Gọi H là tâm của tam giác $ABC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

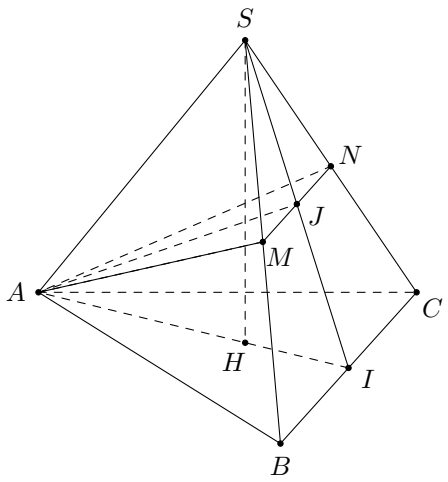
Gọi $J = MN \cap SI$.

Theo giả thiết $AJ \perp SI$ và J là trung điểm của SI nên tam giác SAI cân tại A.

Khi đó $SA = IA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác SAH vuông tại H

$\Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{6}$.



$$V = \frac{1}{3}\cdot SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{15}}{6}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{5}}{24}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Thể tích V của khối bát diện đều có cạnh bằng a.

(A) $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. (C) $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{2}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{4}$.

Lời giải.

Giả sử $SABCDE$ là khối bát diện đều có cạnh bằng a và O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Khi đó $S_{ABCD}=a^2, SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{(a)^2-\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$\Rightarrow V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}\cdot SO=\dfrac{1}{3}\cdot a^2\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

$\Rightarrow V_{SABCDE}=2\cdot V_{S.ABCD}=2\cdot\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Tính thể tích V của khối tứ diện đều $ABCD$, biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) bằng 6.

(A) $V=5\sqrt{3}$. (B) $V=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. (C) $V=\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$. (D) $V=27\sqrt{3}$.

Lời giải.

Giả sử $ABCD$ là khối tứ diện đều cạnh a và có khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) bằng $6, O$ là tâm của tam giác BCD.

Ta có $h=AO=\sqrt{AB^2-BO^2}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}=6\Rightarrow a=3\sqrt{6}$

$$\Rightarrow V=\frac{1}{3}S_{BCD}\cdot AO=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot AO=\frac{1}{3}\cdot\frac{(3\sqrt{6})^2\sqrt{3}}{4}\cdot 6=27\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Một viên đá hình dạng khối tứ diện đều cạnh bằng a. Người ta cắt viên đá bởi mặt phẳng song song với một mặt của khối tứ diện để chia viên đá thành 2 phần có thể tích bằng nhau. Tính độ dài cạnh x của phần cắt ra có hình dạng khối tứ diện đều.

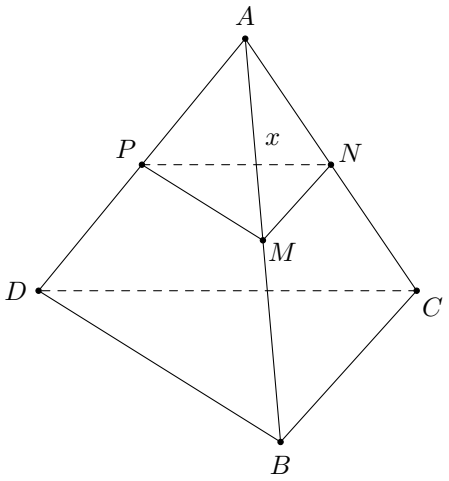
(A) $x=\dfrac{a}{\sqrt[3]{2}}$. (B) $x=\dfrac{a}{\sqrt[3]{2}}$. (C) $x=\dfrac{a}{\sqrt[3]{2}}$. (D) $x=\dfrac{a}{\sqrt[3]{2}}$.

Lời giải.

Thể tích viên đá ban đầu là $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{12}$.

Phần cắt ra có hình dạng khối tứ diện đều cạnh bằng x có thể tích $V'=\dfrac{\sqrt{2}x^3}{12}$.

Theo giả thiết, ta có $V'=\dfrac{V}{2}\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{2}x^3}{12}=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{24}\Leftrightarrow x=\dfrac{a}{\sqrt[3]{2}}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Một viên đá hình dạng khối tứ diện đều cạnh bằng a. Người ta cắt viên đá bởi mặt phẳng song song với một mặt của khối tứ diện để chia viên đá thành 2 phần có thể tích bằng nhau. Tính diện tích thiết diện S của mặt cắt.

(A) $S=\dfrac{\sqrt{3}a^2}{16}$. (B) $S=\dfrac{\sqrt{3}a^2}{8}$. (C) $S=\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4\sqrt[3]{4}}$. (D) $S=\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4\sqrt[3]{2}}$.

Lời giải.

Thể tích viên đá ban đầu là $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{12}$.

Phần cắt ra có hình dạng khối tứ diện đều cạnh bằng x có $V'=\dfrac{\sqrt{2}x^3}{12}$.

Theo giả thiết, ta có $V'=\dfrac{V}{2}\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{2}x^3}{12}=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{24}\Leftrightarrow x=\dfrac{a}{\sqrt[3]{2}}$.

Do đó diện tích mặt cắt là $S=\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{a}{\sqrt[3]{2}}\right)^2=\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4\sqrt[3]{4}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Một viên đá hình dạng khối tứ diện đều cạnh bằng a. Người ta cắt viên đá bởi các mặt phẳng song song với mặt của khối tứ diện để chia viên đá thành 5 phần, trong đó có 4 phần là các khối tứ diện bằng nhau, tổng thể tích của 4 khối tứ diện này bằng một nửa thể tích của viên đá ban đầu. Tính độ dài cạnh của 4 khối tứ diện đó.

(A) $x=\dfrac{a}{2}$. (B) $x=\dfrac{a}{\sqrt[3]{2}}$. (C) $x=\dfrac{a}{4}$. (D) $x=\dfrac{a}{\sqrt[3]{4}}$.

Lời giải.

Gọi độ dài cạnh của 4 khối tứ diện nhỏ là x, thể tích của mỗi khối nhỏ này là $\dfrac{\sqrt{2}x^3}{12}$.

Theo giả thiết ta có $4\left(\dfrac{\sqrt{2}x^3}{12}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}a^3}{12}\right)\Leftrightarrow x=\dfrac{a}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trọng tâm các mặt của khối tứ diện đã cho. Tính thể tích V của khối tứ diện $MNPQ$.

(A) $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{12}$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{108}$. (C) $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{324}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{81}$.

Lời giải.

Ta có $MN=\dfrac{2}{3}EF=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}CB=\dfrac{a}{3}$.

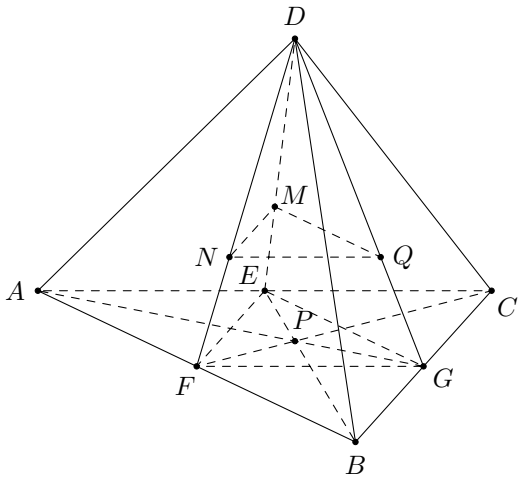
Tương tự $MQ=QN=NP=MP=QP=\dfrac{a}{6}$.

Xét tứ diện $ABCD$:

$S_{BCD}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}, h=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{2}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow V=\dfrac{1}{3}\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{a\sqrt{6}}{3}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

$\Rightarrow V_{\text{MNPQ}}=\dfrac{\left(\dfrac{a}{3}\right)^3\sqrt{2}}{12}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{324}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có chiều cao h. Từ ba đỉnh A, B, D của tứ diện người ta cắt ba khối tứ diện đều có cùng chiều cao h'. Biết rằng thể tích của khối đa diện còn lại bằng một nửa thể tích của khối đa diện ban đầu. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $h' = \dfrac{h}{3}$. (B) $h' = \dfrac{h}{\sqrt[3]{6}}$. (C) $h' = \dfrac{h}{2\sqrt{2}}$. (D) $h' = \dfrac{h}{\sqrt[3]{3}}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của $\triangle BCD \Rightarrow AO \perp (BCD)$.

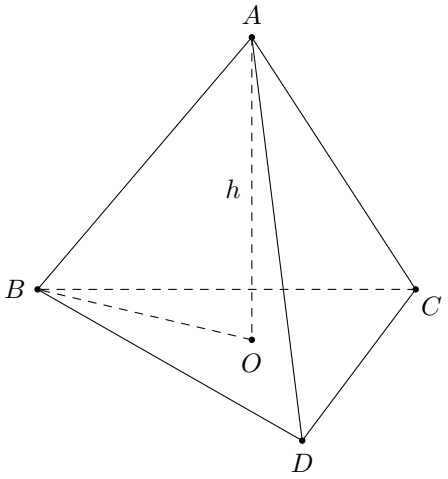
Giả sử $AB = x$.

Xét $\triangle ABO$ có $\Rightarrow h^2 = x^2 - \left(\dfrac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \dfrac{2x^2}{3} \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}h$.

Ta có $V_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{2}x^3}{12} = \dfrac{\sqrt{3}h^3}{8}$.

Tương tự, thể tích 3 khối tứ diện đều chiều cao h' và $V' = 3\left(\dfrac{\sqrt{3}h'^3}{8}\right)$.

Theo giả thiết, ta có $V' = \dfrac{V}{2} \Leftrightarrow h'^3 = \dfrac{h^3}{6} \Leftrightarrow h' = \dfrac{h}{\sqrt[3]{6}}$.



Chọn đáp án (B) □

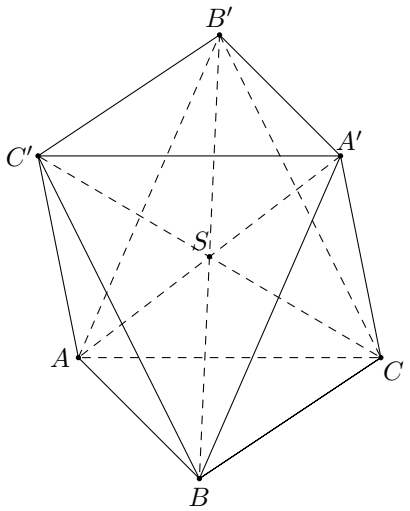
Câu 20. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° Gọi $A'; B'; C'$ lần lượt là các điểm đối xứng với $A; B; C$ qua S. Tính thể tích của khối bát diện có các mặt là $ABC; A'B'C'; ABC; A'BC; AB'C; AB'C'; BA'C'; CA'B'$;

(A) $V = \dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. (B) $V = 2\sqrt{3}a^3$. (C) $V = \dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Thể tích V của khối bát diện là

$V = 8V_{SABC} = 8\left(\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}\right) = \dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Tính thể tích V của khối chóp lục giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên gấp đôi cạnh đáy.

(A) $V=\dfrac{a^3}{2}$. (B) $V=\dfrac{a^3}{4}$. (C) $V=\dfrac{9a^3}{2}$. (D) $V=\dfrac{3a^3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $S=6\left(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{2}$.

Độ dài chiều cao của khối chóp $h=\sqrt{(2a)^2-a^2}=a\sqrt{3}$.

Khi đó, thể tích V của khối chóp lục giác đều là $V=\dfrac{1}{3}S\cdot h=\dfrac{1}{3}\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{2}\cdot a\sqrt{3}=\dfrac{3a^3}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Kim tự tháp Ai Cập được xây dựng vào khoảng 2500 năm trước Công Nguyên. Kim tự tháp này là một khối chóp tứ giác đều có chiều cao 147 m, cạnh đáy dài 230 m. Thể tích của khối chóp đó là

(A) 2592100 m ^{3}. (B) 7776300 m ^{3}. (C) 2592300 m ^{3}. (D) 3888150 m ^{3}.

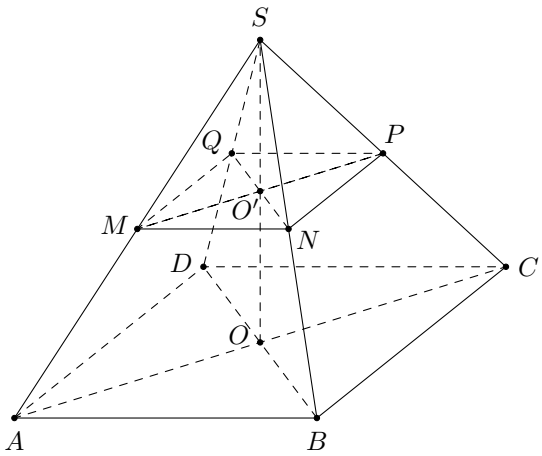
Lời giải.

Đáy là hình vuông cạnh dài 230 m nên diện tích đáy là

$$S=230^2=52900\ \left(\text{m}^2\right).$$

Thể tích khối chóp là

$V=\dfrac{1}{3}\cdot S\cdot h=\dfrac{1}{3}\cdot 52900\cdot 147=2592100\ \ (\text{m}^3)$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Một viên đá hình dạng khối chóp tứ giác đều tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a. Người ta khối đá bởi mặt phẳng song song với đáy khối chóp để chia khối đá thành 2 phần có thể tích bằng nhau. Tính diện tích S của mặt cắt.

(A) $S=\dfrac{2a^2}{\sqrt{3}}$. (B) $S=\dfrac{a^2}{\sqrt[3]{2}}$. (C) $S=\dfrac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$. (D) $S=\dfrac{a^2}{4}$.

Lời giải.

Ta có $SO\perp(ABCD)$.

Xét ΔSOD có $SO^2=SD^2-OD^2=a^2-\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{a^2}{2}\Rightarrow SO=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$V=V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}\cdot SO\cdot S_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a^3=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3.$$

Phần cắt ra có hình dạng khối chóp tứ giác đều $S.MNPQ$ có tất cả các cạnh bằng x có thể tích $V' = \dfrac{\sqrt{2}x^3}{6}$.

Ta có $V' = \dfrac{V}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{6}x^3 = \dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3 \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{\sqrt[3]{2}}$.

Diện tích S của mặt cắt là $S = \dfrac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Tính thể tích V của khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với mặt đáy góc $60°$

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải.

Xét khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$, gọi O là tâm giao điểm AC và BD, M là trung điểm của AB.

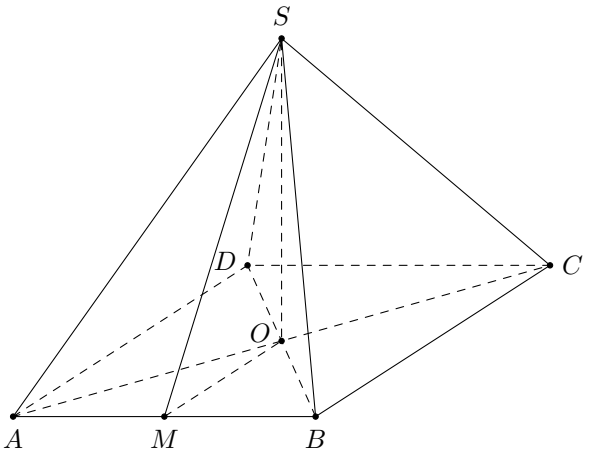
Ta có $SO \perp (ABCD)$.

Góc tạo bởi mặt bên (SAB) và mặt đáy là $SMO = 60°$.

Ta có $SO = MO \cdot \tan SAC = \dfrac{a}{2} \cdot \tan 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$



Ghi chú: Gọi α là góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy, ta có $V = \dfrac{a^3}{6}\tan\alpha$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Thể tích V của khối chóp tứ giác đều có các cạnh đều bằng a.

(A) $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{2}$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$. (C) $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{2}$. (D) $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{6}$.

Lời giải.

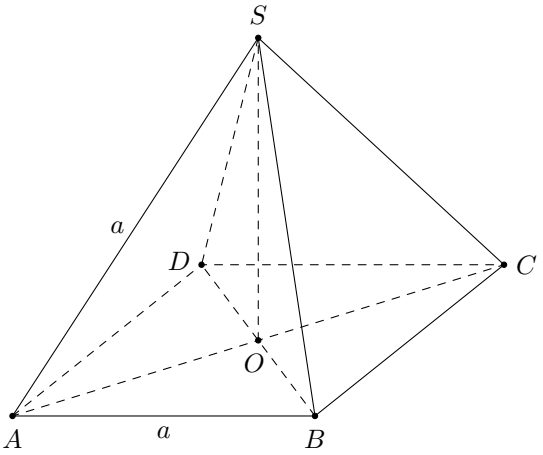
Xét khối chóp tứ giác đều S.ABCD có $AB = a, SA = a$.

Gọi $O = AC \cap BD$, ta có $SO \perp (ABCD)$.

$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$



Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Tính thể tích V của khối chóp lục giác đều $S.ABCDEF$ có $AB = 3, SA = 5$.

(A) $V = 45\sqrt{3}$. (B) $V = 18\sqrt{3}$. (C) $V = 54\sqrt{3}$. (D) $V = 15\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm lục giác $ABCDEF$.

Ta có $SA = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{SA^2 - AB^2} = 4$.

Thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot V_{ABCDEF} = \dfrac{1}{3} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3^2 = 18\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Tính thể tích V của khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên tạo với mặt đáy một góc $60°$.

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. (C) $V = \dfrac{a^3}{3}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải.

Xét khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$.

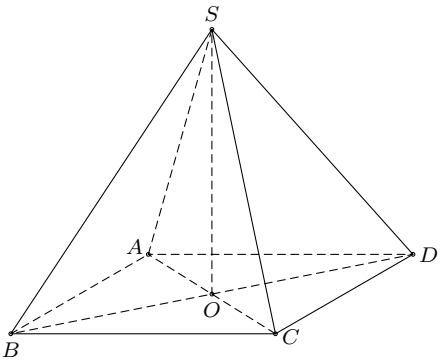
Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có $SO \perp (ABCD)$.

Góc tạo bởi cạnh bên SC và đáy là góc $\widehat{SCO} = 60°$.

Ta có $SA = AO \cdot \tan 60° = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$



Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Khối tứ diện đều $ABCD$ có thể tích V. Khối bát diện đều có các đỉnh là trung điểm các cạnh của khối tứ diện đều có thể tích V'. Tính tỉ số $\dfrac{V'}{V}$.

(A) $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{2}$. (B) $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{8}$. (C) $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{5}{8}$. (D) $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{4}$.

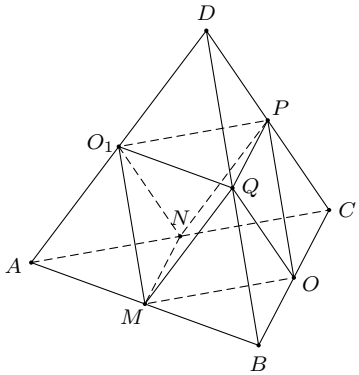
Lời giải.

Gọi độ dài của tứ diện đều là a, suy ra thể tích khối tứ diện là $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Ta có $MQ = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{a}{2}$ là độ dài của khối bát diện đều.

Suy ra $V' = \dfrac{\left(\dfrac{a}{2}\right)^3\sqrt{2}}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

Vậy $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{1}{2}$.



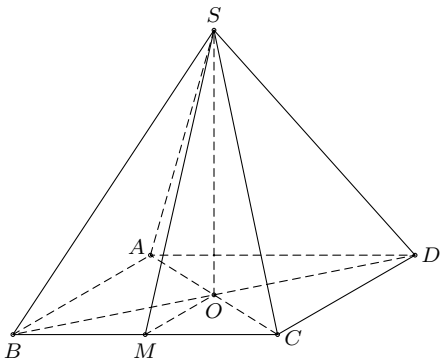
Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Tính thể tích V của khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau và đường cao mặt bên bằng $a\sqrt{3}$.

(A) $V = a^3\sqrt{2}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. (C) $V = \dfrac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có ΔSBC đều và $SM = a\sqrt{3} \Rightarrow BC = 2a$.
Mặt khác $OM = \dfrac{CD}{2} = a$ nên từ tam giác vuông SOM.
Ta có $SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = a\sqrt{2}$.
Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3}\cdot(2a)^2\cdot a\sqrt{2} = \dfrac{4a^3\sqrt{2}}{3}$.



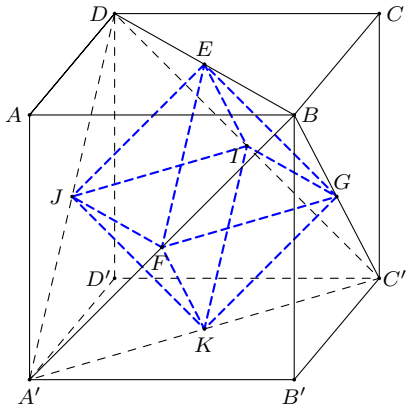
Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Người ta gọt một khối lập phương có thể tích V để được một khối bát diện đều (tức là khối có các đỉnh là tâm các mặt của khối lập phương đó) có thể tích V'. Tính tỷ số $\dfrac{V'}{V}$.

(A) $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{4}$. (B) $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{6}$. (C) $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{8}$. (D) $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{12}$.

Lời giải.

Gọi cạnh hình lập phương là a. Suy ra thể tích khối lập phương la a^3.
Ta có $EJ = \dfrac{A'B}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ là cạnh của bát diện đều.
Suy ra thể tích $V' = \dfrac{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3\sqrt{2}}{3} = \dfrac{a^3}{6}$ nên ta có $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{6}$.



Chọn đáp án (B) □

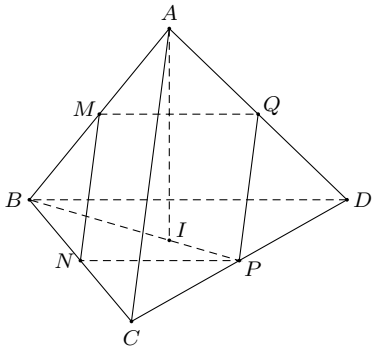
Câu 31. Cho khối tứ diện đều $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Biết tứ giác $MNPQ$ có diện tích bằng 1. Tính thể tích V của khối tứ diện đều đã cho.

(A) $V = \dfrac{\sqrt{11}}{24}$. (B) $V = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. (C) $V = \dfrac{\sqrt{2}}{24}$. (D) $V = \dfrac{\sqrt{11}}{6}$.

Lời giải.

Do $ABCD$ là tứ diện đều nên $MNPQ$ là hình vuông.

Do diện tích $MNPQ$ bằng 1 nên $MN = 1$. Suy ra tứ diện đều có độ dài các cạnh bằng 2.



Gọi I là tâm dường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Ta có $V = \dfrac{1}{3} \cdot AI \cdot S_{\Delta BCD}$.

Mặt khác, $\begin{cases} S_{\Delta BCD} = \dfrac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \\ AI = \sqrt{AB^2 - BI^2} = \sqrt{2^2 - \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}. \end{cases}$

Vậy thể tích khối tứ diện là $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2\sqrt{6}}{3} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

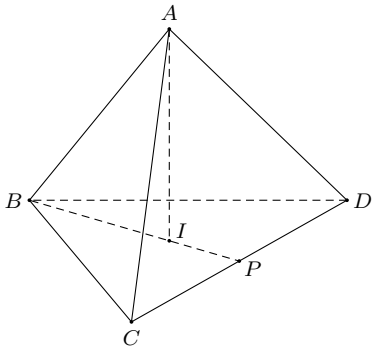
Câu 32. Một khối chóp tam giác đều có cạnh bên bằng b, chiều cao h. Tính thể tích V của khối chóp tam giác đều đã cho.

(A) $V = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(b^2 - h^2)h$.
(B) $V = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(b^2 - h^2)b$.
(C) $V = \dfrac{\sqrt{3}}{8}(b^2 - h^2)h$.
(D) $V = \dfrac{\sqrt{3}}{8}(b^2 - h^2)b$.

Lời giải.

Giả sử hình chóp đều là $A.BCD$.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.



Ta có $V = \dfrac{1}{3} \cdot AI \cdot S_{\Delta BCD}$.

Ta có $BI = \sqrt{b^2 - h^2}$, mà $BI = \dfrac{BC\sqrt{3}}{3} \Rightarrow BC = \sqrt{3b^2 - 3h^2}$.

Và $S_{\Delta BCD} = \dfrac{BC^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3(b^2 - h^2)}{4}\sqrt{3} \Rightarrow V = \dfrac{\sqrt{3}(b^2 - h^2)h}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Trong tất cả các khối chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng $2a\sqrt{3}$, khối chóp có thể tích lớn nhất là?

(A) $\dfrac{32a^3}{3}$.
(B) $2\sqrt{2}a^3$.
(C) $6\sqrt{2}a^3$.
(D) $32a^3$.

Lời giải.

Gọi độ dài cạnh đáy là x nên $S = x^2$. Chiều cao $h = \sqrt{(2a\sqrt{3})^2 - \left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{24a^2 - x^2}}{\sqrt{2}}$.

Do đó $V = \dfrac{hS}{3} = \dfrac{x^2\sqrt{24a^2 - x^2}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{x^2 \cdot x^2(48a^2 - 22x^2)}}{6} \le \dfrac{\sqrt[3]{\left(\dfrac{x^2 + x^2 + 48a^2 - 2x^2}{3}\right)^3}}{6} = \dfrac{32a^3}{3}$.

Dấu bằng đạt tại $x^2 = 48a^2 - 2x^2 \Leftrightarrow x = 4a$.

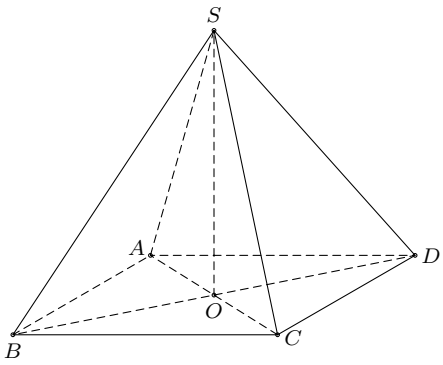
Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng $2\sqrt{3}$, tính độ dài cạnh đáy khi khối chóp có thể tích lớn nhất.

(A) $\sqrt{3}$. (B) $2\sqrt{3}$. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.

Gọi cạnh đáy là x $(x > 0)$. Khi đó chiều cao của hình chóp $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{12 - \dfrac{x^2}{2}}$.



Thể tích của khối chóp

$$\begin{aligned} V_{S.ABCD} &= \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{12 - \frac{x^2}{2}} \cdot x^2 \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \sqrt{24x^2 - x^4} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \sqrt{144 - (x^2 - 12)^2} \\ &\le 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Vậy $V_{\max} = 2\sqrt{2}$ khi $x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (B) □

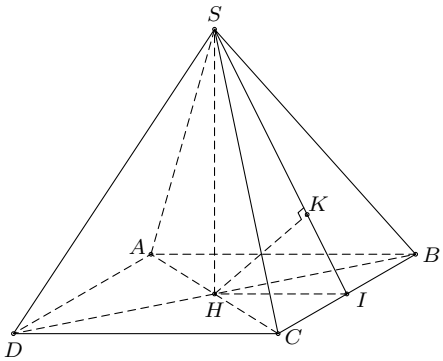
Câu 35. Trong tất cả các khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $2\sqrt{3}$. Khối chóp có thể tích nhỏ nhất là?

(A) 18. (B) 54. (C) 9. (D) 27.

Lời giải.

Gọi H là tâm mặt đáy và a là độ dài cạnh đáy.

Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SBC) là $d_H = \dfrac{d_A}{2} = \sqrt{3}$.



Mặt khác

$$\frac{1}{d_H^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{4}{a^2} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{h^2} + \frac{4}{a^2} \Rightarrow a^2 = \frac{12h^2}{h^2 - 3}.$$

Do $V = \dfrac{h \cdot S}{3} = \dfrac{a^2 \cdot h}{3} = \dfrac{4h^3}{h^2 - 3} = f(h)$.

Có $f'(h) = \dfrac{4h^4 - 36h^2}{(h^2 - 3)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \\ x = -3 \end{array}\right. \Rightarrow x = 3.$

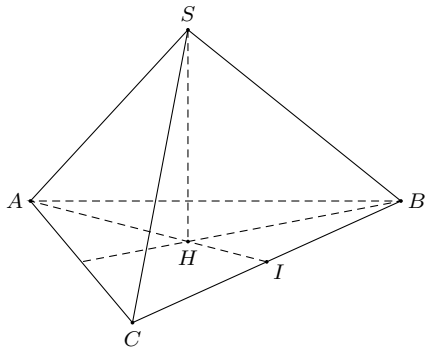
Lập bảng biến thiên, ta suy ra thể tích nhỏ nhất là $f(3) = 18$.

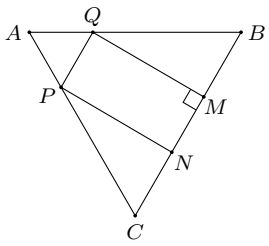
Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh bằng 16. Xét hình chữ nhật $MNPQ$ nội tiếp đáy ABC với M, $N \in BC$, $P \in AC$, $Q \in AB$. Thể tích khối chóp $S.MNPQ$ có giá trị lớn nhất là?

(A) $\dfrac{512\sqrt{2}}{3}$. (B) $\dfrac{512\sqrt{6}}{3}$. (C) $\dfrac{512\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{512\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.





Ta có $h = \sqrt{16^2 - \left(\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{16\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{16\sqrt{6}}{3}$.

Đặt $MB = NC = x \Rightarrow MQ = NP = x \tan 60^\circ = x\sqrt{3}$, và $MN = BC - MB - BC = 16 - 2x$.

Do đó $S = MN \cdot MQ = x\sqrt{3}(16 - 2x)$.

Suy ra

$$V = \frac{h \cdot S}{3} = \frac{x\sqrt{3}(16 - 2x) \cdot \dfrac{16\sqrt{6}}{3}}{3} = \frac{32x(8 - x)\sqrt{2}}{3} \leq \frac{512\sqrt{2}}{3}.$$

Dấu bằng đạt tại $x = 4$.

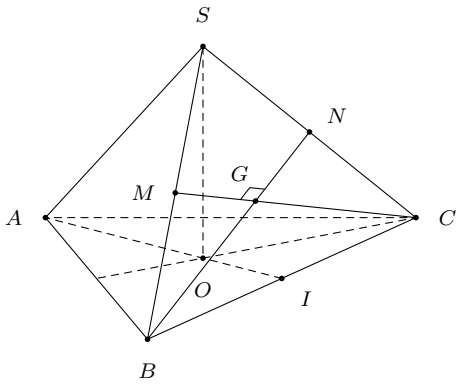
Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng 2. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Tính thể tích V của khối chóp biết $CM \perp BN$.

(A) $\dfrac{\sqrt{26}}{3}$. (B) $\sqrt{26}$. (C) $\dfrac{\sqrt{26}}{6}$. (D) $\dfrac{\sqrt{26}}{2}$.

Lời giải.

Gọi O, G lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC, SBC và I là trung điểm của BC.



Đặt $SA = SB = SC = x$.

Ta có $CG^2 = BG^2 = \dfrac{4}{9} \cdot BN^2 = \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{x^2+4}{2} - \dfrac{x^2}{4}\right) = \dfrac{x^2+8}{9}$.

Tam giác BGC vuông tại G nên

$$GB^2 + GC^2 = BC^2 \Leftrightarrow \frac{2(x^2+8)}{9} = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{10}.$$

Suy ra $\begin{cases} AO = \dfrac{2}{3} \cdot AI = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{10 - \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{78}}{3}. \end{cases}$

Khi đó $S_{ABC} = \sqrt{3}$ và $V = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{78}}{3} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{26}}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 38. Cho khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau là a và có thể tích $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. Tính chiều cao h của khối chóp tứ giác đều đã cho.

(A) $h = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. (B) $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (C) $h = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. (D) $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $V = \dfrac{1}{3}a^2 \cdot h \Leftrightarrow h = \dfrac{3V}{a^2} = \dfrac{3 \cdot \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}}{a^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

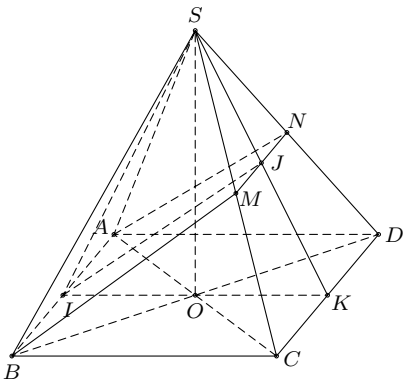
Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SC và SD. Biết mặt phẳng $(ABMN)$ vuông góc với mặt phẳng (SCD). Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, MN, CD và O là tâm của hình vuông $ABCD$.



Ta có J là trung điểm của MN và IK là hình chiếu của IJ trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Mà $IK \perp CD \Rightarrow IJ \perp CD \Rightarrow IJ \perp MN$.

Xét tam giác SIK có IJ, SO là các đường trung tuyến đồng thời là các đường cao.

Suy ra tam giác SIK đều cạnh $IK = a \Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $V = \dfrac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

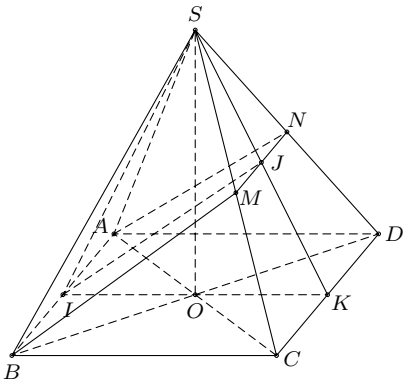
Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm các cạnh SC và SD. Biết mặt phẳng $(ABMN)$ vuông góc với mặt phẳng (SCD), diện tích tứ giác $ABMN$ bằng $2\sqrt{3}a^2$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

(A) $V = \dfrac{32a^3}{9}$. (B) $V = \dfrac{32a^3}{3}$. (C) $V = \dfrac{16a^3\sqrt{3}}{9}$. (D) $V = \dfrac{32a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, MN, CD và O là tâm của hình vuông $ABCD$.



Ta có J là trung điểm của MN và IK là hình chiếu của IJ trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Mà $IK \perp CD \Rightarrow IJ \perp CD \Rightarrow IJ \perp MN$.

Xét tam giác SIK có IJ, SO là các đường trung tuyến đồng thời là các đường cao.

Suy ra tam giác SIK đều có cạnh $IK = x \Rightarrow SO = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} = IJ$.

Ta có

$$S_{ABMN} = \frac{(AB + MN) \cdot IJ}{2} \Leftrightarrow 2a^2\sqrt{3} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4a\sqrt{3}}{3}.$$

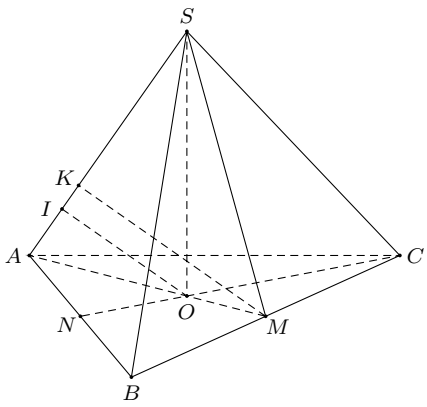
Suy ra $V = \dfrac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{4a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \dfrac{\dfrac{4a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \dfrac{32a^3}{9}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Trong các hình chóp tam giác đều có khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là d. Khối chóp có thể tích nhỏ nhất là?

(A) d^3. (B) $\dfrac{2d^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{d^3}{3}$. (D) $\dfrac{2d^3\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải.



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có $SO \perp (ABC)$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AB.

Ta có $BC \perp (SAM)$ tại M.

Dựng $MK \perp SA$ tại K, ta có KM là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng SA và BC và $d(SA, BC) = MK = d$.

Đặt $AB = x$ $(x > 0)$.

Dựng $OI \perp SA$ tại I, suy ra $OI = \dfrac{2}{3}MK = \dfrac{2d}{3}$.

Ta có $OA = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác SOA vuông tại O có đường cao OI. Suy ra

$$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OS^2} \Leftrightarrow OS = \frac{OI \cdot OA}{\sqrt{OA^2 - OI^2}} = \frac{2d \cdot x\sqrt{3}}{3\sqrt{3x^2 - 4d^2}} \left(x > \frac{2d}{3}\right).$$

Ta có $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{2d \cdot x\sqrt{3}}{3\sqrt{3x^2 - 4d^2}} = \dfrac{dx^3}{6\sqrt{3x^2 - 4d^2}}$.

Không mất tính tổng quát, đặt $d = 1$, ta có $V = \dfrac{x^3}{6\sqrt{3x^2 - 4}} = f(x)$, $x > \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{3x^2 \cdot 6\sqrt{3x^2 - 4} - 6x^3 \cdot \dfrac{6x}{2\sqrt{3x^2 - 4}}}{36(\sqrt{3x^2 - 4})^2} = \dfrac{x^2(x^2 - 2)}{(\sqrt{3x^2 - 4})^3} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Bảng biến thiên

x	$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{1}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $V_{S.ABC}$ nhỏ nhất bằng $\dfrac{d^3}{3}$ khi $x = d\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích tứ diện đều cạnh a, khối bát diện đều cạnh a. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

(A) $\dfrac{V_1}{V_2} = 2$. (B) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{2}$. (C) $\dfrac{V_1}{V_2} = 4$. (D) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

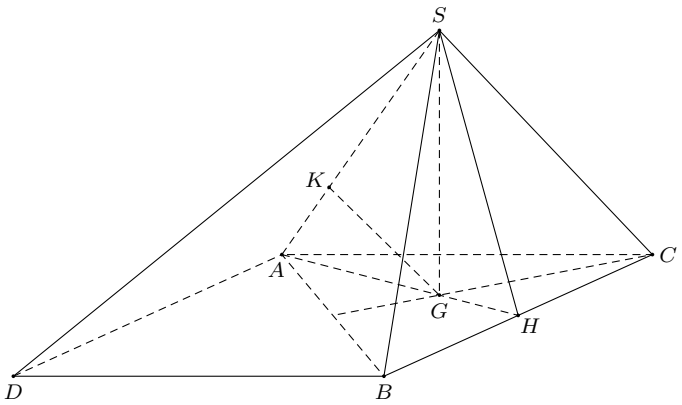
Ta có $\begin{cases} V_1 = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} \\ V_2 = 2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3} \end{cases}$. Suy ra $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 43. Cho khối chóp tam giác đều có chiều cao là $6a$, khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BC là a. Thể tích V của khối chóp là

(A) $V = \dfrac{27a^3\sqrt{3}}{10}$. (B) $V = \dfrac{81a^3\sqrt{3}}{40}$. (C) $V = \dfrac{81a^3\sqrt{3}}{10}$. (D) $V = \dfrac{27a^3\sqrt{3}}{40}$.

Lời giải.



Dựng hình bình hành $ABCD$, ta có

$$BC \parallel (SAD) \Rightarrow \mathrm{d}(BC, SA) = \mathrm{d}(BC, (SAD)) = \mathrm{d}(H, (SAD)) = \frac{3}{2}\mathrm{d}(G, (SAD)) = \frac{3}{2}GK = a.$$

Suy ra $GK = \dfrac{2a}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{AG^2} = \dfrac{1}{KG^2} - \dfrac{1}{SG^2} \Rightarrow AG = \dfrac{3a}{2\sqrt{5}} \Rightarrow AB = \dfrac{3\sqrt{15}}{10}$.

Thể tích khối chóp $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} \cdot SG = \dfrac{27a^3\sqrt{3}}{40}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 44. Cho tứ diện đều cạnh a. Gọi h là tổng khoảng cách từ một điểm trong của khối tứ diện lên các mặt của nó. Tìm mệnh đề đúng.

(A) $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. (B) $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$. (C) $h = \dfrac{4a\sqrt{6}}{3}$. (D) $h = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

Ta có thể tích của khối tứ diện đều cạnh a là $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$, diện tích mỗi mặt là $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Ta có $V = \dfrac{1}{3} \cdot S \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + h_4)$

$$\Rightarrow h = \frac{3V}{S} = \frac{\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{12}}{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Cho khối bát diện đều cạnh a. Gọi h là tổng khoảng cách từ một điểm trong của khối tứ diện lên các mặt của nó. Tìm mệnh đề đúng.

(A) $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. (B) $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$. (C) $h = \dfrac{4a\sqrt{6}}{3}$. (D) $h = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

Ta có thể tích của khối bát diện đều cạnh a là $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$, diện tích mỗi mặt là $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Ta có $V=\dfrac{1}{3}\cdot S\cdot(h_1+h_2+..J_8)$

$$\Rightarrow h=\frac{3V}{S}=\frac{\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{3}}{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}=\frac{4a\sqrt{6}}{3}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Tìm trong các khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên là $2\sqrt{3}$, khối chóp có thể tích lớn nhất là

(A) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. (B) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$. (C) $4\sqrt{3}$. (D) $2\sqrt{6}$.

Lời giải.

Gọi cạnh đáy là $x\quad(x>0)$. Khi đó điện tích đáy là $S=\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$, chiều cao của hình chóp là $h=\dfrac{\sqrt{3\,(36-x^2)}}{3}\quad(x<6)$.

Thể tích khối chóp là $V=\dfrac{1}{3}S\cdot h=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3\,(36-x^2)}}{3}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{x^2}{2}\cdot(36-x^2)}}{6}\le\dfrac{\sqrt{12^3}}{6}=4\sqrt{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\dfrac{x^2}{2}=(36-x^2)\Leftrightarrow x=2\sqrt{6}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 47. Trong cách khối chóp tam giác đều $SABC$ có khoảng cách từ A đến (SBC) là 3, khối chóp có thể tich nhò nhất là

(A) $\dfrac{3}{8}$. (B) $\dfrac{9}{2}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

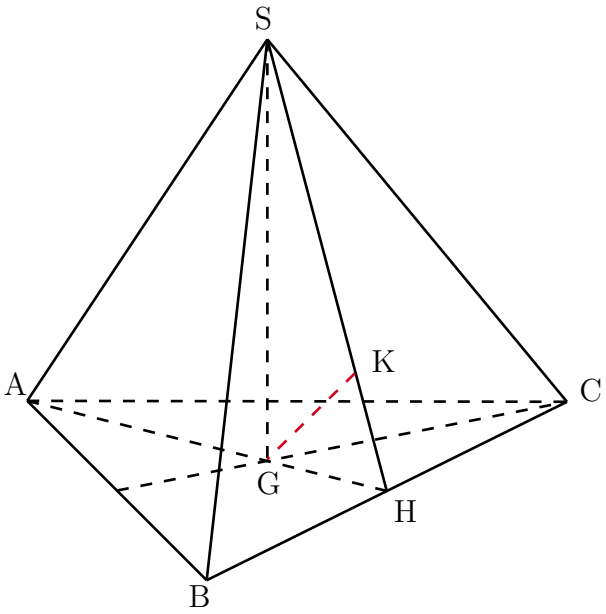
Lời giải.

Gọi cạnh đáy là $x \quad (x>0)$. Khi đó $GH=\dfrac{x\sqrt{3}}{6}$.
Ta có $d(A,(SBC))=3d(G,(SBC))=3GK=3 \Rightarrow GK=1$.
Có

$$HK=\sqrt{HG^2-GK^2}=\sqrt{\frac{x^2-12}{12}} \quad (x>2\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow SH=\frac{GH^2}{HK}=\frac{x^2}{\sqrt{12}\sqrt{x^2-12}}.$$

Diện tích tam giác SBC là
$S_{SBC}=\dfrac{1}{2}BC.SH=\dfrac{1}{4\sqrt{3}}\cdot\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-12}}$.
Để thể tích khối chóp nhỏ nhất khi diện tích tam giác SBC nhỏ nhất.
Khảo sát hàm số $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-12}}, x>2\sqrt{3}$ ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số đạt được khi $x=3\sqrt{2}$.
Vậy $\min V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4\sqrt{3}}\cdot\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-12}}=\dfrac{9}{2}$.



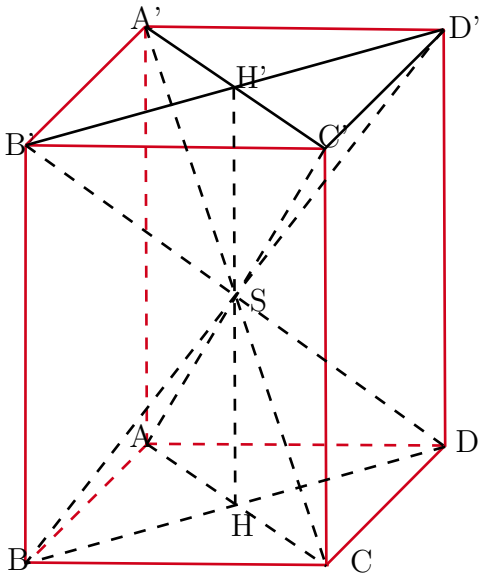
Chọn đáp án (C) □

Câu 48. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi A',B',C',D' lần lượt là các điểm đối xứng của A,B,C,D qua S. Tính thể tích V của khối đa diện có sáu mặt $(ABCD)$, $(A'B'C'D')$, $(BCA'D')$, $(ADB'C')$, $(CDB'A')$, $(ABD'C')$.

(A) $V=2\sqrt{2}a^3$. (B) $V=\sqrt{2}a^3$. (C) $V=\dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$. (D) $V=\dfrac{8\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải.

Khối đa diện tạo thành là một khối hộp chữ nhật có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao:
$h=HH'=2SH=2\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=a\sqrt{2}$.
Do đó $V=S\cdot h=a^2\sqrt{2}a=a^3\sqrt{2}$.



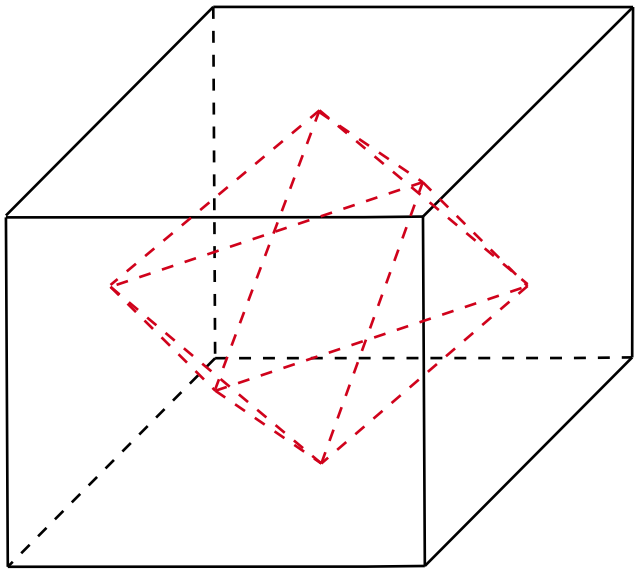
Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Một khối bát diện dều cạnh a. Ngoại tiếp bát diện đều bơi một khối lập phương sao cho các đỉnh của khối bát diện đều là tâm các mặt của khối lập phương. Tính thể tích khối lập phương.

(A) $V=\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. (B) $V=2\sqrt{2}a^3$. (C) $V=4\sqrt{2}a^3$. (D) $V=\dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải.

Gọi b là độ dài các cạnh của khối lập phương, độ dài các cạnh của khối bát diện đều $a=\dfrac{b\sqrt{2}}{2}\Rightarrow b=a\sqrt{2}$.
Do đó $V=b^3=2a^3\sqrt{2}$.



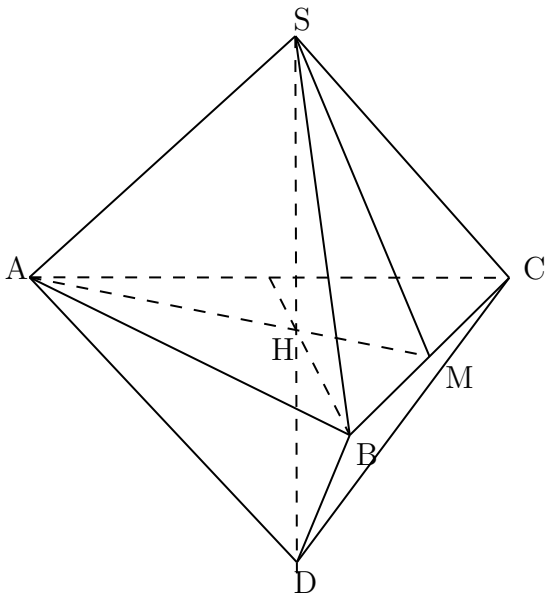
Chọn đáp án (B) □

Câu 50. Cho khối tứ diện đều (H) có cạnh bằng 1. Qua mỗi cạnh của (H) dựng một mặt phẳng không chứa các điểm trong của (H) và tạo với hai mặt phẳng của (H) đi qua cạnh đó những góc bằng nhau. Các mặt phẳng như thế giới hạn một đa giác (H'). Tính thể tích của (H').

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$. (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $V_{(H')} = V_{(H)} + 4V_{SABC}$,
trong đó $S.ABC$ là khối chóp tam giác đều như hình vẽ.



Ta có $V_{(H)} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$ và $HD = \sqrt{1^2 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow \tan\widehat{HMD} = \dfrac{HD}{HM} = \dfrac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{6}} = 2\sqrt{2}.$

Do đó $\tan\widehat{SMH} = \tan\left(\dfrac{\pi - \widehat{HMD}}{2}\right) = \cot\dfrac{\widehat{HMD}}{2} = \sqrt{2}.$

Do đó $SH = HM \cdot \tan\widehat{SMH} = \dfrac{\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}.$

Vì vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{6}}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{24}$

$\Rightarrow V_{H'} = \dfrac{\sqrt{2}}{12} + 4 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{24} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}.$

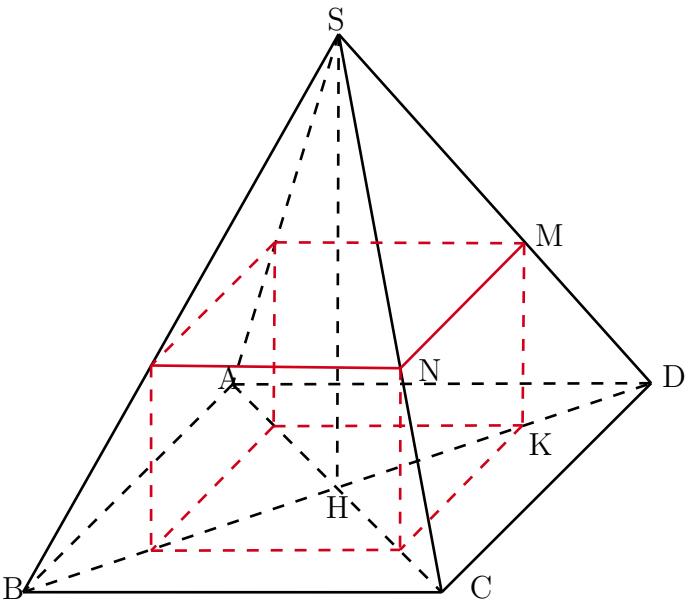
Chọn đáp án (B) □

Câu 51. Khối tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng 1. Khối lập phương có một mặt nàm trên mặt đáy của khối chóp tứ giác đều và tất cả các cạnh còn lại của mặt đối diện nằm trên các mặt bên của khối chóp tứ giác đều. Tính thể tich V của hình lập phương.

(A) $V = 5\sqrt{2} - 7$. (B) $V = 6\sqrt{3} - 10$. (C) $V = \dfrac{5\sqrt{2} - 7}{3}$. (D) $V = \dfrac{6\sqrt{3} - 10}{3}$.

Lời giải.

Theo giả thiết thì khối lập phương có dạng như hình vẽ.



Chiều cao h của khối chóp tứ giác đều là $h = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Độ dài cạnh lập phương lả x, theo Thales ta có $\dfrac{MN}{AD} = \dfrac{SM}{SA} = 1 - \dfrac{AM}{SA} = 1 - \dfrac{MK}{SH}$

$\Rightarrow \dfrac{x}{1} = 1 - \dfrac{x}{h} \Rightarrow x = \dfrac{h}{h+1} = \sqrt{2} - 1.$

Do đó $V = (\sqrt{2} - 1)^3 = 5\sqrt{2} - 7$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 52. Một khối tứ diện đều (H) có cạnh bẳng 1. Khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau, có mặt đáy nằm trên một mặt của khối tứ diện (H) và tất cả các cạnh còn lại của mặt

đối diện nằm trên các mặt còn lại của khối tứ diện (H). Tính thể tích của khối lăng trụ tam giác đều đó.

A $V=\dfrac{27\sqrt{2}-22\sqrt{3}}{6}$.

B $V=\dfrac{45\sqrt{6}-58\sqrt{3}}{686}$.

C $V=\dfrac{27\sqrt{2}-22\sqrt{3}}{2}$.

D $V=\dfrac{9\sqrt{6}-22}{2}$.

Lời giải.

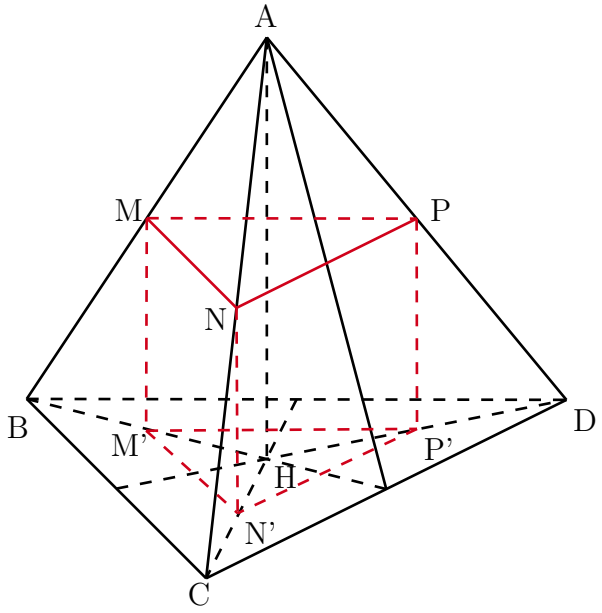
Theo giả thiết ta có khối lăng trụ tam giác đều $MNP.M'N'P'$ như hình vẽ dưới đây.

Đặt $MN=MM'=x$.

Theo Thales ta có $\dfrac{MN}{BC}=\dfrac{AM}{AB}=1-\dfrac{BM}{AB}=1-\dfrac{MM'}{AH}$.

trong đó $MN=MM'=x, BC=1, AH=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,

do đó $V=\dfrac{x^3\sqrt{3}}{4}=\dfrac{(\sqrt{6}-2)^3\sqrt{3}}{4}=\dfrac{27\sqrt{2}-22\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án **C** □

Câu 53. Từ một miếng tôn hình vuông cạnh 50 cm, người ta cắt đi bốn tam giác cân bằng nhau MAN, NBP, PCQ, QDM sau đó gò các tam giác cân ABN, BCP, CDQ, DAM sao cho các đỉnh MN, P, Q trùng nhau để được khối chóp tứ giác đều. Khối chóp tứ giác đều có thể tích lớn nhất là

A $\dfrac{15625}{6}$ cm^3. **B** $\dfrac{15625}{2}$ cm^3. **C** $\dfrac{4000\sqrt{10}}{3}$ cm^3. **D** $\dfrac{4000\sqrt{10}}{9}$ cm^3.

Lời giải.

Đặt $AD=x; a=50$ cm.

Gọi I là trung điểm của AB,

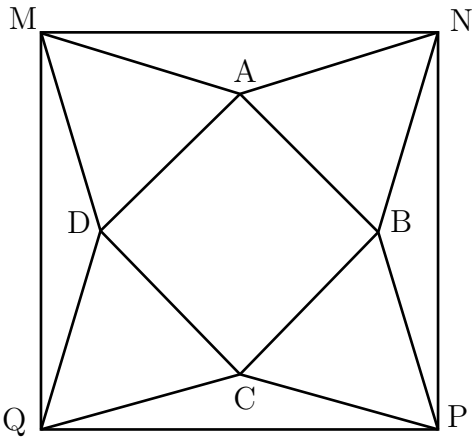
ta có $NI=\dfrac{NQ-AD}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}-x}{2}$.

Chiều cao khối chóp là

$$h=\sqrt{NI^2-HI^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}-x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2-a\sqrt{2}x}{2}}.$$

Do đó $V=\dfrac{Sh}{3}=f(x)=\dfrac{x^2\sqrt{\dfrac{a^2-a\sqrt{2}x}{2}}}{3}$

$\leq \max\limits_{\left(0;\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)} f(x)=f\left(\dfrac{2\sqrt{2}a}{5}\right)=\dfrac{4\sqrt{10}a^3}{375}=\dfrac{4000\sqrt{10}}{3}$.



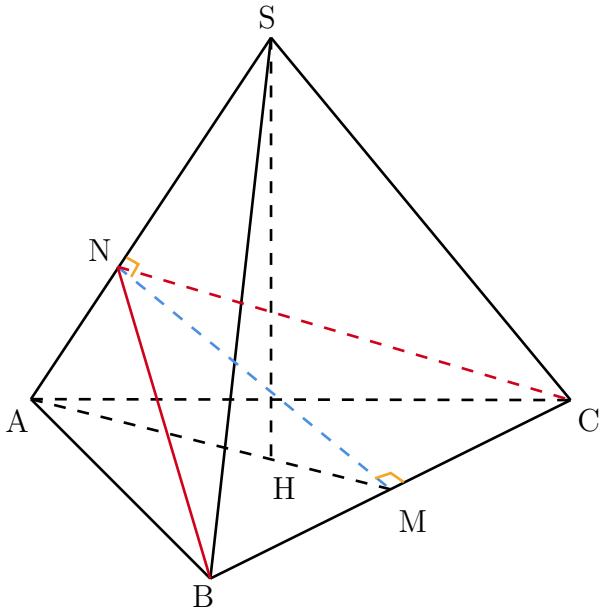
Chọn đáp án (D) □

Câu 54. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a, mặt phẳng chứa BC và vuông góc với SA cắt khối chóp theo một thiết diện có diện tích bằng $\frac{a^2}{4}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

(A) $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{24}$. (B) $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$. (C) $V=\frac{a^3}{36}$. (D) $V=\frac{a^3}{72}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC, N là hình chiếu vuông góc của M trên SA. Suy ra $SA\perp(BCN)$, do đó thiết diện là tam giác cân NBC.



$$MN=\frac{2S_{\Delta NBC}}{BC}=\frac{2\cdot\frac{a^2}{4}}{a}=\frac{a}{2}.$$

Đặt $SH=h$, ta có $AM.SH=SA\cdot MN$

$$\Rightarrow \frac{a\sqrt{3}h}{2}=\frac{a\sqrt{h^2+\frac{a^2}{3}}}{2}\Rightarrow h=\frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Vậy $V=\frac{\sqrt{3}a^2h}{12}=\frac{\sqrt{3}a^2\cdot\frac{a\sqrt{6}}{6}}{12}=\frac{\sqrt{2}a^3}{24}$.

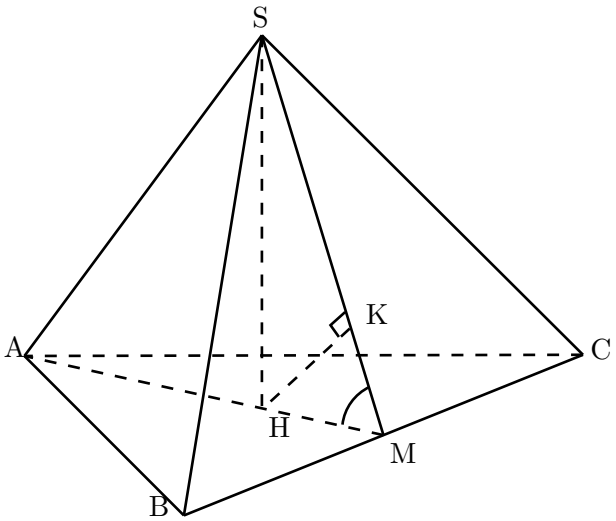
Chọn đáp án (A) □

Câu 55. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng α, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Tính $\tan\alpha$, khi thể tích khối chóp S.ABC đạt giá trị nhỏ nhất.

(A) $\tan\alpha=\frac{1}{3}$. (B) $\tan\alpha=\frac{1}{2}$. (C) $\tan\alpha=\sqrt{2}$. (D) $\tan\alpha=3$.

Lời giải.

Đặt $AB=x$ và $SH=h$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên SM.



Ta có $\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{h^2}+\frac{1}{\left(\frac{x\sqrt{3}}{6}\right)^2}$

$$\Rightarrow \frac{9}{d^2(A,(SBC))}=\frac{1}{h^2}+\frac{12}{x^2}$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{12h^2}{h^2-1}.$$

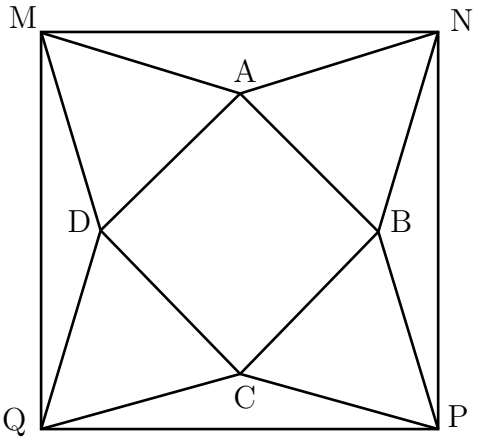
Do đó $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}x^2}{4}\cdot h=f(h)=\frac{\sqrt{3}h^3}{h^2-1}\geq \min_{(0;+\infty)}f(h)=f(\sqrt{3})=\frac{9}{2}$. Dấu bằng đạt tại $h=\sqrt{3}\Rightarrow x=18\Rightarrow\tan\alpha=\frac{h}{x\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 56. Từ một tấm tôn hình vuông có cạnh bằng $1+\sqrt{3}$, người ta cắt tấm tôn theo các tam giác cân bằng nhau MAN, NBP, PCQ, QDM sau đó gò các tam giác cân ABN, BCP, CDQ, DAM sao cho các đỉnh M, N, P, Q trùng nhau để được khối chóp tứ giác đều. Biết góc ở đỉnh của tam giác cân bị cắt đi là $150°$. Tính thể tích V khối chóp tứ giác đều tạo thành.

(A) $V=\dfrac{3\sqrt{6}+5\sqrt{2}}{24}$. (B) $V=\dfrac{2}{3}$. (C) $V=\dfrac{5\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{24}$. (D) $V=\dfrac{2}{9}$.

Lời giải.



Ta có: $\widehat{MAN}=150° \Rightarrow \widehat{MNA}=15° \Rightarrow \widehat{ANB}=60°$.

Suy ra khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng AM.

Xét $\triangle MAN$ ta có $AM=\dfrac{\dfrac{MN}{2}}{\sin 75^0}=\sqrt{2}$.

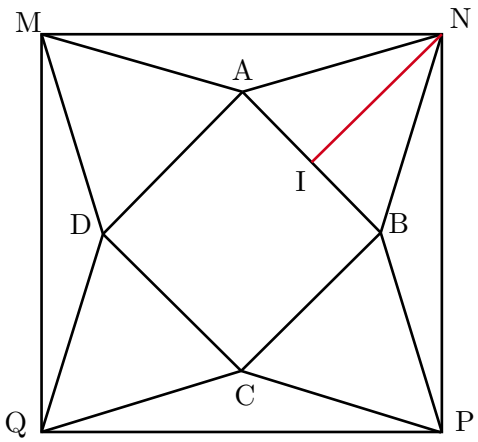
Do đó: $V=\dfrac{AM^3\sqrt{2}}{6}=\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 57. Từ một tấm tôn hình vuông có cạnh bằng a, người ta cắt đi bốn tam giác cân bằng nhau MAN, NBP, PCQ, QDM sau đó gò các tam giác cân ABN, BCP, CDQ, DAM sao cho các đỉnh M, N, P, Q trùng nhau để được khối chóp tứ giác đều. Khối chóp tứ giác đều có thể tích lớn nhất là

(A) $\dfrac{a^3}{48}$. (B) $\dfrac{a^3}{16}$. (C) $\dfrac{4\sqrt{10}a^3}{375}$. (D) $\dfrac{4\sqrt{10}a^3}{125}$.

Lời giải.



Gọi $AD = x$, ta có $NI = \dfrac{NQ - AD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2} - x}{2}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$.

Chiều cao khối chóp là: $h = \sqrt{NI^2 - HI^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{2} - x}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{a^2 - a\sqrt{2}x}{2}}$.

Diện tích đáy: $S_{ABCD} = x^2$.

Vậy thể tích: $V = \dfrac{1}{3}S_{\text{ABCD}}\,, h = \dfrac{x^2\sqrt{\dfrac{a^2 - a\sqrt{2}x}{2}}}{3}, x \in \left(0; \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$.

Xét hàm số : $f(x) = \dfrac{x^2\sqrt{\dfrac{a^2 - a\sqrt{2}x}{2}}}{3}, x \in \left(0; \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$

Có $f'(x) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{-5a\sqrt{2}x^2 + 4a^2x}{4\sqrt{\dfrac{a^2 - a\sqrt{2}x}{2}}}\right), x \in \left(0; \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2\sqrt{2}a}{5}$.

x	$-\infty$		0		$\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$		$\dfrac{a}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
y'			$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$		
y		$\nearrow$	$\|\|$				$\|\|$	$\searrow$	

Suy ra $max_{\left(0;\frac{a}{\sqrt{2}}\right)} f(x) = f\left(\dfrac{2\sqrt{2}a}{5}\right) = \dfrac{4\sqrt{10}a^3}{375} \Rightarrow \max V = \dfrac{4\sqrt{10}a^3}{375}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 58. Một khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có m là tan góc giữa cạnh bên và mặt đáy. Người ta tăng cạnh hình vuông mặt đáy gấp đôi nhưng muốn giữ nguyên thể tích khối chóp nên đã thay đổi đồng thời chiều cao cho phù hợp. Hỏi giá trị của m thay đổi như thế nào?

(A) Giảm 2 lần. (B) Tăng 2 lần. (C) Giảm 8 lần. (D) Tăng 8 lần.

Lời giải.

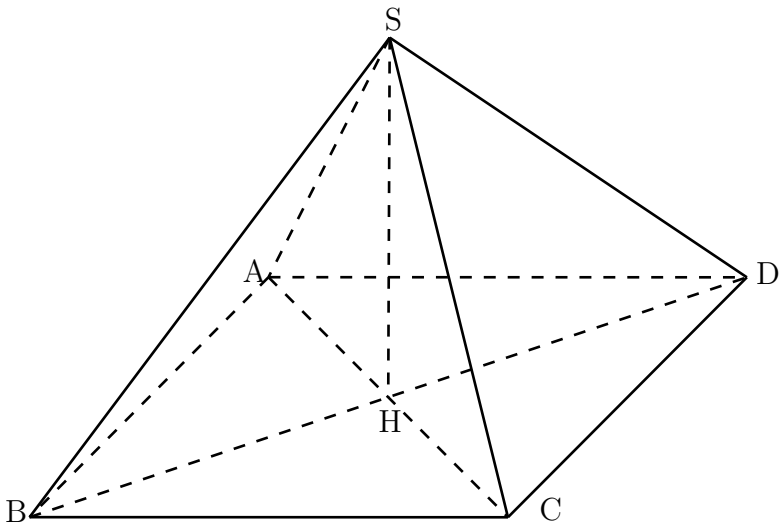
Ta có $\begin{cases} SC \cap (ABCD) = C \\ SH \perp (ABCD) \end{cases}$

Suy ra góc giữa cạnh bên SC và đáy là góc $\widehat{SCH}$

$\Rightarrow SH = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \cdot \tan(\widehat{SCH}) = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \cdot m.$

Ta có $\begin{cases} V = \dfrac{Sh}{3} = \dfrac{a^2 \cdot \dfrac{a}{\sqrt{2}} \cdot m}{3} = \dfrac{a^3 m\sqrt{2}}{6} \\ V = \dfrac{S'h'}{3} = \dfrac{(2a)^3 m'\sqrt{2}}{6} \end{cases}$

$\Rightarrow m' = \dfrac{m}{8}.$



Chọn đáp án (C) □

Câu 59. Một khối tứ diện đều (H) có cạnh bằng 1. Khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau, có mặt đáy nằm trên một mặt của khối tứ diện (H) và tất cả các cạnh còn lại của mặt đối diện nằm trên các mặt còn lại của khối tứ diện (H). Tính thể tích của khối lăng trụ tam giác đều đó.

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{27}$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{48}$. (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{18}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải.

Theo giả thiết, ta có khối lăng trụ tam giác đều $MNP.MN'P'$ như hình vẽ.

Đặt $MN = x, MM' = h'; BC = 1; AH = \dfrac{\sqrt{6}}{3}.$

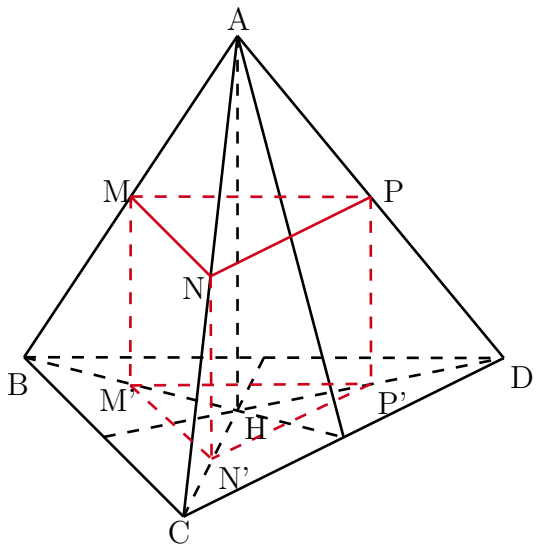
Theo Thales, ta có $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AM}{AB} = 1 - \dfrac{MM'}{AH}$

$\Rightarrow \dfrac{x}{1} = 1 - \dfrac{h'}{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$

$\Rightarrow h' = \dfrac{\sqrt{6}}{3}(1-x)$

Do đó

$V = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}h' = f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2(1-x) \le \max_{(0;1)} f(x) = f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{27}.$



Chọn đáp án (A) □

Câu 60. Khối tứ diện đều (H) có tất cả các cạnh bằng 1. Khối hộp chữ nhật (H') có một mặt nằm trên mặt đáy của (H) và tát cả các cạnh còn lại của mặt đáy đối diện nằm trên các mặt bên của (H). Tìm thể tích lớn nhất của (H').

(A) $5\sqrt{2} - 7$. (B) $\dfrac{2\sqrt{2}}{27}$. (C) $\dfrac{4\sqrt{2}}{27}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{27}$.

Lời giải.

Theo giả thiết thì hình hộp chữ nhật (H') có dạng như hình vẽ.

Đặt $h = SH = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; MN = x; MK = h'$.

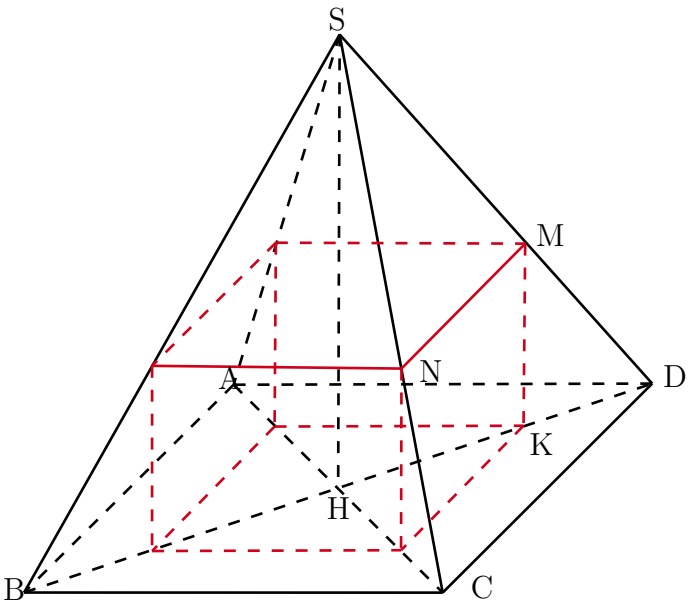
Theo Thales, ta có

$\dfrac{MN}{AD} = \dfrac{SM}{SA} = 1 - \dfrac{AM}{SA} = 1 - \dfrac{MK}{SH}$

$\Rightarrow \dfrac{x}{1} = 1 - \dfrac{h'}{h} \Rightarrow h' = (1-x)h.$

Do đó

$V_{(H')} = x^2 h' = x^2(1-x)h = f(x) = \dfrac{\sqrt{2}x^2(1-x)}{2} \le f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{27}.$



Chọn đáp án (B) □

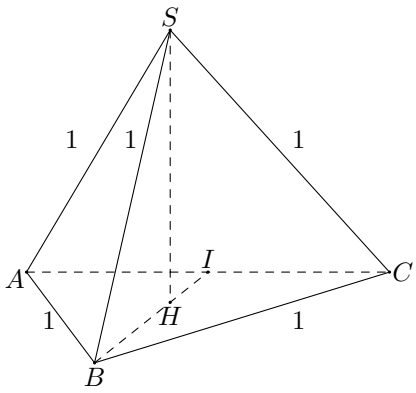
Dạng 6. Thể tích khối tứ diện đặc biệt

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = BA = BC = 1$. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$.

(A) $\dfrac{1}{6}$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$. (C) $\dfrac{1}{8}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.

Gọi SH là đường cao của hình chóp và I là trung điểm của AC.



Vì $SA = SB = SC = 1$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Do đó $H \in BI$.

Đặt $AC = x$, $0 < x < \sqrt{3}$.

Ta có $BI = \sqrt{AB^2 - AI^2} = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2}$.

Suy ra $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot BI \cdot AC = \dfrac{x\sqrt{4-x^2}}{4}$.

Mặt khác $HB = \dfrac{AB \cdot AC \cdot BC}{4 \cdot S_{ABC}} = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

Suy ra $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{\dfrac{3-x^2}{4-x^2}}$.

Khi đó, $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SH = \dfrac{1}{12} \cdot x\sqrt{3-x^2} \le \dfrac{1}{12} \cdot \dfrac{x^2+3-x^2}{2} = \dfrac{1}{8}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = \sqrt{3-x^2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

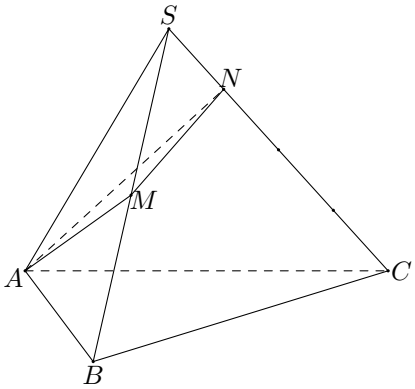
Vậy $\max V = \dfrac{1}{8}$.

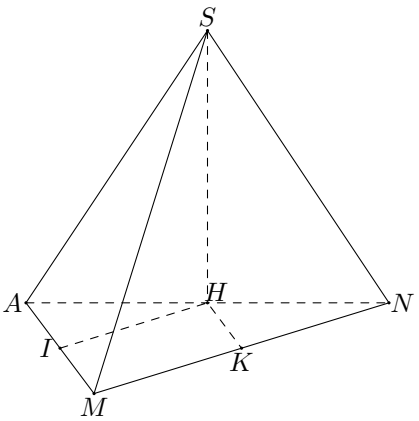
Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = 60^\circ$, $\widehat{BSC} = 90^\circ$, $\widehat{CSA} = 120^\circ$ và $SA = a$, $SB = 2a$, $SC = 4a$.

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. (B) $\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. (C) $a^3\sqrt{2}$. (D) $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.





Trên các cạnh SB, SC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $SM = SN = a$.

Khi đó, $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow V_{S.ABC} = 8 \cdot V_{S.AMN}$.

Xét khối chóp $S.AMN$. Gọi SH là đường cao của hình chóp.

Tam giác SAM đều $\Rightarrow AM = a$.

Tam giác SMN vuông cân tại $S \Rightarrow MN = a\sqrt{2}$.

Tam giác SAN cân tại S và $\widehat{NSA} = 120^\circ$

$\Rightarrow AN = \sqrt{SA^2 + SN^2 - 2 \cdot SA \cdot SN \cdot \cos 120^\circ} = a\sqrt{3}$.

Suy ra tam giác AMN vuông tại M.

Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AM, MN.

Khi đó $\begin{cases} AM \perp SI \\ AM \perp SH \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SHI) \Rightarrow AM \perp HI$.

Chứng minh tương tự ta có $MN \perp HK$.

Do đó H là trung điểm của AN.

Khi đó $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \dfrac{a}{2}$. Suy ra $V_{S.AMN} = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{AMN} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Vậy $V_{S.ABC} = 8 \cdot V_{S.AMN} = 2\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 4a$, $CD = x$ và các cạnh còn lại bằng $3a$. Tính x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ là lớn nhất.

(A) $2a\sqrt{10}$. (B) $a\sqrt{10}$. (C) $6a$. (D) $3a$.

Lời giải.

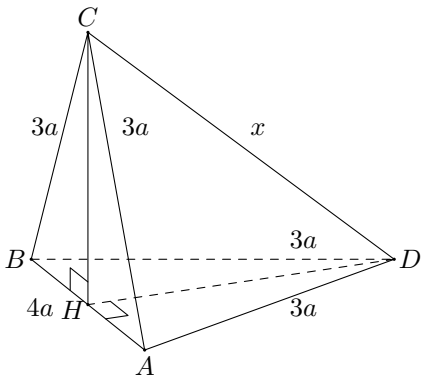
Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow CH \perp AB$, $DH \perp AB$.

$CH = DH = \sqrt{(3a)^2 - (2a)^2} = a\sqrt{5}$.

Áp dụng công thức $V = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{S_1 \cdot S_2 \cdot \sin\alpha}{a}$.

Suy ra

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{S_{ABC} \cdot S_{ABD} \cdot \sin((ABC),(ABD))}{AB} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a\sqrt{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a\sqrt{5} \cdot \sin((ABC),(ABD))}{4a} \\ &= \frac{5}{6} \cdot a^3 \cdot \sin((ABC),(ABD)). \end{aligned}$$



Do đó thể tích $ABCD$ lớn nhất khi $\sin((ABC),(ABD)) = 1 \Leftrightarrow (ABC) \perp (ABD)$.

Khi đó $CH \perp DH \Rightarrow CD^2 = CH^2 + DH^2 = 10a^2 \Rightarrow CD = a\sqrt{10}$.

Chọn đáp án (B) □

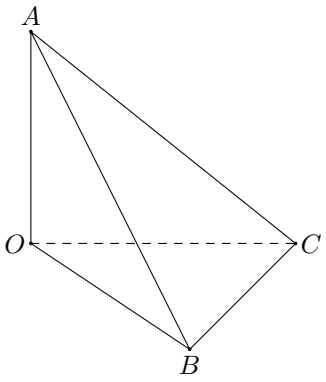
Câu 4. Cho khối tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau thỏa mãn $OA^2 + OB^2 + OC^2 = 12$. Thể tích lớn nhất của khối tứ diện bằng

(A) 8. (B) $\dfrac{4}{3}$. (C) 4. (D) $\dfrac{8}{3}$.

Lời giải.

Ta có $V = \dfrac{1}{6} \cdot OA \cdot OB \cdot OC$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V^2 &= \frac{1}{36} \cdot OA^2 \cdot OB^2 \cdot OC^2 \\ &\le \frac{1}{36} \left(\frac{OA^2 + OB^2 + OC^2}{3} \right)^3 \\ &= \frac{16}{9}. \end{aligned}$$



$\Rightarrow V \le \dfrac{4}{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $OA = OB = OC = 2$.

Vậy $\max V = \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng 3 và $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC. Góc giữa mặt phẳng (SAB) và (SAC) lần lượt là $30°$, $60°$. Tính cot góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

(A) $\dfrac{24 - 13\sqrt{3}}{15}$. (B) $\dfrac{8 - 5\sqrt{3}}{5}$. (C) $\dfrac{24 + 13\sqrt{3}}{15}$. (D) $\dfrac{8 + 5\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải.

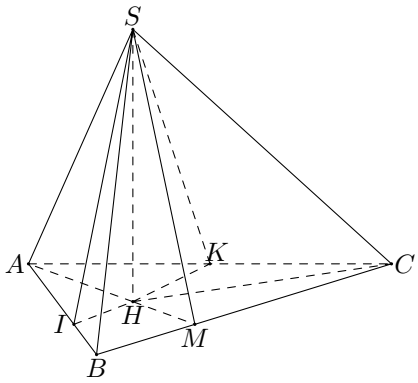
Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy. α là góc giữa hai mặt (SBC) và (ABC).

Ta có $AB^2 + AC^2 = BC^2$ nên $\triangle ABC$ vuông tại $A \Rightarrow S_{ABC} = 6$ và $SH = \dfrac{3V}{S_{ABC}} = \dfrac{3}{2}$.

Từ H kẻ $HI \perp AB$, $HK \perp AC$, $HM \perp BC$.

Suy ra $HI = \dfrac{SH}{\tan 30°} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, $HK = \dfrac{SH}{\tan 60°} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Suy ra

$$\begin{aligned} S_{HBC} &= S_{ABC} - S_{HAB} - S_{HAC} \\ &= 6 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 \\ &= \frac{24 - 13\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$



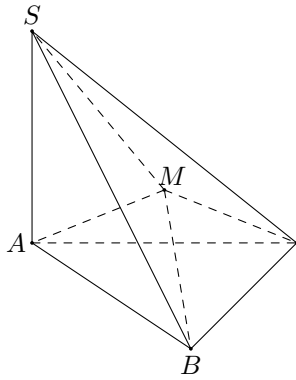
$\Rightarrow HM = \dfrac{2S_{HBC}}{BC} = \dfrac{24 - 13\sqrt{3}}{10}$; $\cot \alpha = \dfrac{HM}{SH} = \dfrac{24 - 13\sqrt{3}}{15}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 8$, $BC = 6$. Biết $SA = 6$ và vuông góc với mặt đáy (ABC). Một điểm M thuộc phần không gian bên trong của hình chóp và cách đều tất cả các mặt của hình chóp . Tính thể tích của khối tứ diện $M.ABC$.

(A) $V = 24$. (B) $V = \dfrac{64}{3}$. (C) $V = \dfrac{32}{3}$. (D) $V = 12$.

Lời giải.



Từ giả thiết ta có $BC \perp AB$, $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp BS$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10$.

Xét $\triangle SBA$ vuông tại A ta có $SB = \sqrt{AS^2 + AB^2} = 10$.

Gọi h là khoảng cách chung từ M đến các mặt của hình chóp $S.ABC$.

Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned} V_{S.ABC} &= \frac{1}{6} \cdot SA \cdot BA \cdot BC \\ &= 48 \\ &= V_{M.ABC} + V_{M.ABS} + V_{M.CBS} + V_{M.ACS} \\ &= \frac{1}{3}h\left(S_{ABC} + S_{ABS} + S_{ASC} + S_{SBC}\right) \\ &= \frac{1}{3}h\left(\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AS + \frac{1}{2} \cdot SB \cdot BC + \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AS\right) \\ &= 36h. \end{aligned}$$

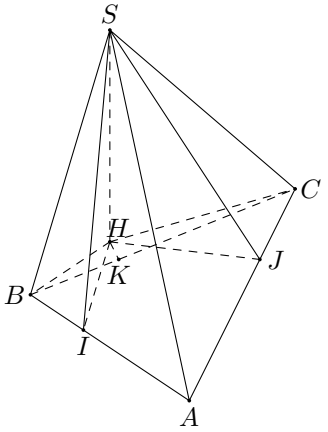
Suy ra $h = \dfrac{4}{3} \Rightarrow V_{M.ABC} = \dfrac{1}{3}h \cdot S_{ABC} = \dfrac{32}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 4a$, $AC = 3a$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H. Biết A, H nằm khác phía với đường thẳng BC và các mặt bên của hình chóp cùng tạo với mặt đáy góc $60°$. Tính thể tích V của hình chóp đã cho.

(A) $V = 2a^3\sqrt{3}$. (B) $V = 12a^3\sqrt{3}$. (C) $V = 6a^3\sqrt{3}$. (D) $V = 36a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi I, J , K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên các cạnh AB, AC, BC.

Khi đó $\widehat{SIH} = \widehat{SJH} = \widehat{SKH} = 60° \Rightarrow HI = HJ = HK = \dfrac{SH}{\sqrt{3}}$.

Ta có

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle HAB} + S_{\triangle HAC} - S_{\triangle HBC} \\ &= \frac{1}{2}\left(AB + AC - BC\right) \cdot \frac{SH}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{SH}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC = a\cdot \dfrac{SH}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow SH = 6a\sqrt{3}.$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}\cdot SH\cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3}\cdot 6a\sqrt{3}\cdot 6a^2 = 12a^3\sqrt{3}.$

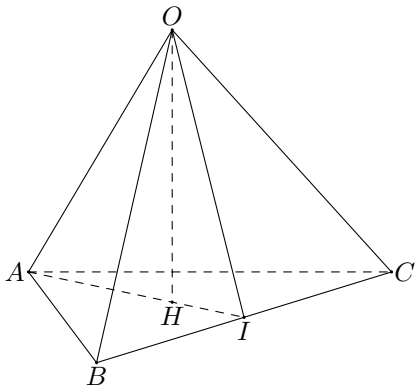
Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Cho khối tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) bằng 1. Thể tích nhỏ nhất của khối tứ diện $OABC$ bằng

(A) $\dfrac{9}{2}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Đặt $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ $(a, b, c > 0)$.



Vẽ $AI \perp BC$ $(I \in BC)$, $OH \perp AI$.

Suy ra $OH \perp (ABC) \Rightarrow \mathrm{d}\,(O, (ABC)) = OH = 1$.

Ta có $V_{O.ABC} = \dfrac{1}{3}\cdot OA\cdot S_{\triangle OBC} = \dfrac{1}{6}\cdot OA\cdot OB\cdot OC = \dfrac{abc}{6}$.

Xét tam giác OAI vuông tại O có

$$\begin{aligned}\frac{1}{OH^2} &= \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OI^2}\\ &= \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}\\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.\end{aligned}$$

Suy ra $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = 1$.

Ta lại có $1 = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \geq \dfrac{3}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} \Leftrightarrow 1 \geq \dfrac{27}{(abc)^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{6}\cdot abc \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $V_{O.ABC} \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \sqrt{3}$.

Vậy $\min V_{O.ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

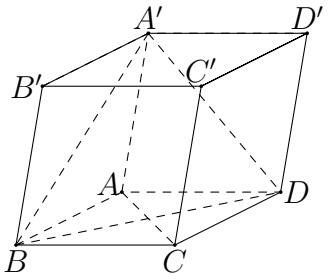
Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a và các góc $\widehat{A'AB} = \widehat{BAD} = \widehat{A'AD} = \alpha$ $(0° < \alpha < 90°)$. Biết khối hộp đã cho có thể tích bằng $\dfrac{a^3\sqrt{3\sqrt{3}-5}}{2}$.

(A) $\alpha = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (B) $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$. (C) $\alpha = \arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. (D) $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức nhanh ta có



$$\begin{aligned} V_{A.A'BD} &= \frac{a\cdot a\cdot a}{6}\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\alpha-\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\alpha} \\ &= \frac{a^3}{6}\cdot\sqrt{1-3\cos^2\alpha+2\cos^3\alpha}. \end{aligned}$$

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = 3V_{A'.ABCD} = 6V_{A.A'BD} = a^3\cdot\sqrt{1-3\cos^2\alpha+2\cos^3\alpha}.$

$$\begin{aligned} & V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{a^3\sqrt{3\sqrt{3}-5}}{2} \\ \Leftrightarrow\ & a^3\cdot\sqrt{1-3\cos^2\alpha+2\cos^3\alpha} = \frac{a^3\sqrt{3\sqrt{3}-5}}{2} \\ \Leftrightarrow\ & 2\cdot\sqrt{1-3\cos^2\alpha+2\cos^3\alpha} = \sqrt{3\sqrt{3}-5} \\ \Leftrightarrow\ & 4\cdot\left(1-3\cos^2\alpha+2\cos^3\alpha\right) = 3\sqrt{3}-5 \\ \Leftrightarrow\ & 8\cos^3\alpha-12\cos^2\alpha-3\sqrt{3}+9=0 \\ \Leftrightarrow\ & \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Rightarrow\ & \alpha = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

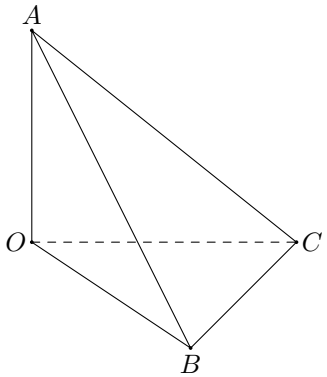
Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Cho khối tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc thỏa mãn $\frac{1}{OA}+\frac{4}{OB}+\frac{9}{OC}=1$. Khi biểu thức $OA+OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất, tính thể tích của khối tứ diện $OABC$.

(A) 162. (B) 72. (C) 108. (D) 216.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz



$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\geq\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_ib_j=a_jb_i, \forall i\neq j$.

Ta có $1=\frac{1}{OA}+\frac{4}{OB}+\frac{9}{OC}=\frac{1}{OA}+\frac{2^2}{OB}+\frac{3^2}{OC}\geq\frac{(1+2+3)^2}{OA+OB+OC}=\frac{36}{OA+OB+OC}$.

Suy ra $OA+OB+OC\geq 36$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{OA}=\frac{2}{OB}=\frac{3}{OC}$.

Mà $\frac{1}{OA}+\frac{4}{OB}+\frac{9}{OC}=1$ nên $OA=6$, $OB=12$, $OC=18$.

Khi đó $\min(OA+OB+OC)=36$.

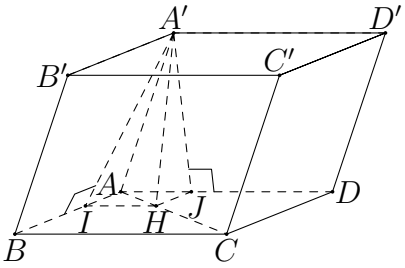
Vậy $V_{O.ABC}=\frac{1}{6}\cdot OA\cdot OB\cdot OC=\frac{1}{6}\cdot 6\cdot 12\cdot 18=216$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a, $\widehat{A'AB} = \widehat{BAD} = \widehat{A'AD} = \alpha$ $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$. Tính thể tích khối hộp đã cho theo a và α.

(A) $V = \sqrt{2}a^3 \cos\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{1+2\cos\alpha}$.
(B) $V = \sqrt{2}a^3 \sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{1+2\cos\alpha}$.
(C) $V = 2a^3 \cos^2\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{1+2\cos\alpha}$.
(D) $V = 2a^3 \sin^2\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{1+2\cos\alpha}$.

Lời giải.



Gọi H, I, J lần lượt là hình chiếu của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ và các cạnh AB, AD.

Ta có $\begin{cases} A'H \perp AB \\ AI \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (A'HI) \Rightarrow AB \perp HI$.

Tương tự cũng có $HJ \perp AD$.

Xét hai tam giác vuông $A'AI$ và $A'AJ$ có $\begin{cases} AA', \text{chung} \\ \widehat{A'AI} = \widehat{A'AJ} = \alpha \end{cases}$

nên $\triangle A'AI = \triangle A'AJ$.

Suy ra $AI = AJ = AA'\cos\alpha = a\cos\alpha$.

Do đó $\triangle AHI = \triangle AHJ \Rightarrow HI = HJ$.

Vậy H cách đều AB và AD nên nằm trên phân giác $\widehat{BAD} \Rightarrow H \in AC$.

Ta có $AH = \dfrac{AI}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$, $A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \dfrac{a}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}$.

Diện tích đáy $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = AB \cdot AD \cdot \sin\alpha = a^2\sin\alpha$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'H \cdot S_{ABCD} = 2a^3 \sin\dfrac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha} = 2a^3 \sin^2\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{1+2\cos\alpha}$.

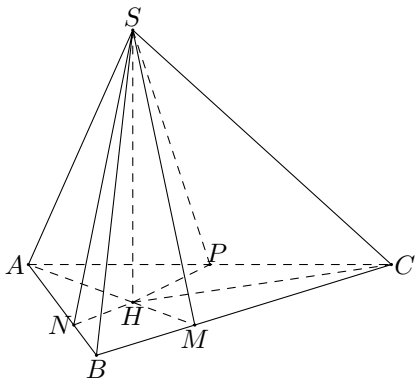
Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC và các mặt bên (SBC), (SCA), (SAB) tạo với mặt đáy (ABC) các góc lần lượt là 30°, 45°, 60°. Tính thể tích khối chóp đã cho.

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{128\left(4+\sqrt{3}\right)}$.
(B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8\left(4+\sqrt{3}\right)}$.
(C) $V = \dfrac{a^3}{8\left(2\sqrt{3}+1\right)}$.
(D) $V = \dfrac{a^3}{128\left(2\sqrt{3}+1\right)}$.

Lời giải.

Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của H lên các cạnh BC, AB, AC; h là chiều cao của khối chóp $S.ABC$.



Khi đó, $\widehat{SNH} = 30^\circ$, $\widehat{SPH} = 45^\circ$, $\widehat{SMH} = 60^\circ$.

Ta có

$$\begin{aligned}
& S_{\triangle ABC} = S_{\triangle HAB} + S_{\triangle HAC} + S_{\triangle HBC} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}a(HN + NM + HP) \\
\Leftrightarrow\ & (HN + NM + HP) = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & (\tan 30^\circ + \tan 45^\circ + \tan 60^\circ)h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & h = \frac{3a}{2\left(4+\sqrt{3}\right)}.
\end{aligned}$$

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{3a}{2\left(4+\sqrt{3}\right)} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8\left(4+\sqrt{3}\right)}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một tứ giác lồi và góc tạo bởi các mặt bên (SAB), (SBC), (SCD), (SDA) và mặt đáy tương ứng là 90°, 60°, 60°, 60°. Biết tam giác SAB vuông cân tại S có $AB = a$, chu vi tứ giác $ABCD$ bằng $9a$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

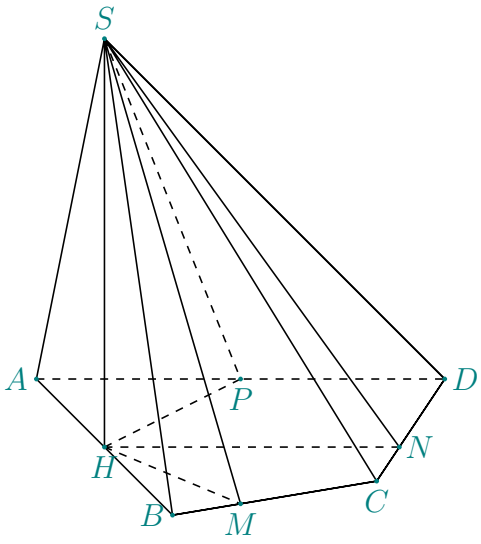
(A) $V = a^3\sqrt{3}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. (D) $V = \dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AB.

Theo giả thiết ta có $SH \perp (ABCD)$, $SH = \dfrac{a}{2}$ và $BC + CD + DA = 8a$.

Gọi M, N, P là hình chiếu vuông góc của H lần lượt lên AD, DC, CB.



Suy ra $((SAD),(ABCD)) = \widehat{SMH} = 60^\circ$

$((SCD),(ABCD)) = \widehat{SNH} = 60^\circ$

$((SCB),(ABCD)) = \widehat{SPH} = 60^\circ$.

Từ đó $HM = HN = HP = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$.

Vậy

$$\begin{aligned} V_{S.ABCD} &= \frac{1}{3} \cdot SH \cdot (S_{\triangle HAD} + S_{\triangle HCD} + S_{\triangle HCB}) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} (HM \cdot DA + HN \cdot CD + HP \cdot CB) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}} \cdot 8a \\ &= \frac{a^3\sqrt{3}}{9}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

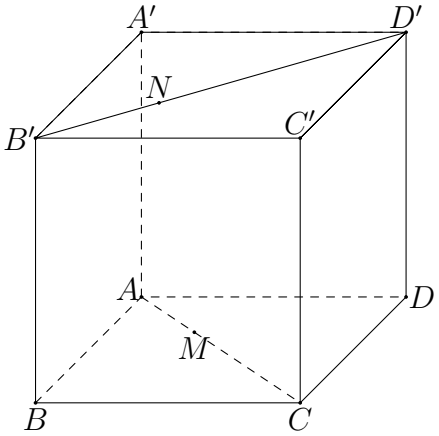
Câu 14. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm M, N lần lượt di động trên các tia AC, $B'D'$ sao cho $AM + B'N = a\sqrt{2}$. Thể tích khối tứ diện $AMNB'$ có giá trị lớn nhất là

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. (B) $\dfrac{a^3}{12}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. (D) $\dfrac{a^3}{6}$.

Lời giải.

Ta có $(AM, NB') = 90^\circ$.

$\mathrm{d}\,(AM, B'N) = a$. Đặt $AM = x$ $(x > 0)$.



Ta có

$$\begin{aligned} V_{A.MNB'} &= \frac{1}{6} \cdot AM \cdot B'N \cdot \sin(AM, B'N) \cdot \mathrm{d}\,(AM, B'N) \\ &= \frac{1}{6} \cdot x \cdot \left(a\sqrt{2} - x\right) \cdot 1 \cdot a \\ &\le \frac{1}{6} \cdot a \cdot \frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2}{4} \\ &= \frac{a^3}{12}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = a\sqrt{2} - x \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\max V_{A.MNB'} = \dfrac{a^3}{12}$.

Chọn đáp án (B) □

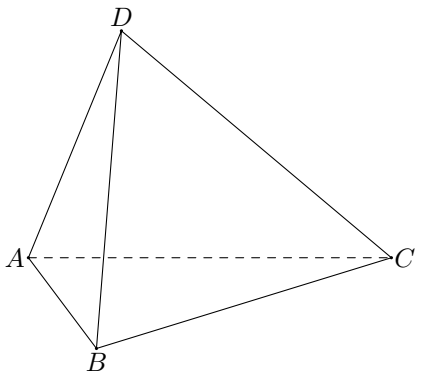
Câu 15. Khối tứ diện $ABCD$ có $AB = 2a$, tam giác CAB đều và tam giác DAB vuông cân tại D. Góc giữa hai mặt phẳng (CAB), (DAB) bằng 30°. Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

(A) $V = \dfrac{a^3}{4}$. (B) $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$. (C) $V = \dfrac{3a^3}{4}$. (D) $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

Lời giải.

Ta có $S_1 = S_{\triangle CAB} = \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}a^2$; $S_2 = S_{\triangle DAB} = \dfrac{2a \cdot a}{2} = a^2$ và $\alpha = 30^\circ = ((CAB), (DAB))$.

Do đó $V = \dfrac{2S_1S_2 \cdot \sin\alpha}{3AB} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{3}a^2 \cdot a^2 \cdot \sin 30^\circ}{3 \cdot 2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a^3$.



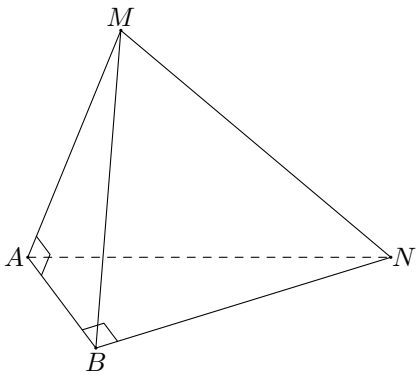
Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Cho hai đường thẳng Ax và By chéo nhau và vuông góc với nhau có $AB = 2a$ là đoạn vuông góc chung. Các điểm M, N lần lượt di động trên Ax, By sao cho $AM + 2BN = 3a$. Hỏi thể tích lớn nhất của khối tứ diện $ABMN$?

(A) $\dfrac{2a^3}{3}$. (B) $\dfrac{3a^3}{8}$. (C) $\dfrac{a^3}{4}$. (D) $\dfrac{3a^3}{2}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính thể tích của khối tứ diện $ABCD$
$V = \dfrac{1}{6} \cdot AB \cdot CD \cdot \mathrm{d}\,(AB, CD) \cdot \sin\,(AB, CD)$.
Đặt $AM = x$, $BN = y$ $(x, y > 0)$. Từ giả thiết ta có $x + 2y = 3a$.
Khi đó thể tích của khối tứ diện là



$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6} \cdot AM \cdot BN \cdot \mathrm{d}\,(AM, BN) \cdot \sin\,(AM, BN) \\ &= \frac{1}{6} \cdot AM \cdot BN \cdot AB \cdot \sin 90^\circ \\ &= \frac{axy}{3} \\ &= \frac{1}{3} \cdot a \cdot (3a - 2y) \cdot y \\ &= \frac{1}{6} \cdot a \cdot (3a - 2y) \cdot 2y \\ &\le \frac{1}{6} \cdot a \cdot \frac{(3a - 2y + 2y)^2}{4} \\ &= \frac{3a^2}{8}. \end{aligned}$$

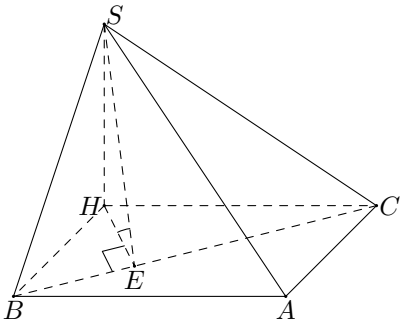
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 2y = \dfrac{3a}{2}$.
Vậy $\max V = \dfrac{3a^2}{8}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Cho khối chóp $S.ABC$ có $AB = 1$, $AC = 2$, $BC = \sqrt{5}$. Các tam giác SAB, SAC lần lượt vuông tại B, C, góc giữa mặt phẳng (SBC) và đáy bằng 60°. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

(A) $V = \dfrac{2\sqrt{15}}{5}$. (B) $V = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. (C) $V = \dfrac{2\sqrt{15}}{3}$. (D) $V = \dfrac{2\sqrt{15}}{15}$.

Lời giải.

Từ S vẽ $SH \perp (ABC)$.
Ta có $\begin{cases} AB \perp SB \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SBH) \Rightarrow AB \perp BH$.
Chứng minh tương tự ta có $AC \perp CH$.
Tam giác ABC vuông tại A do $AC^2 + AB^2 = BC^2$. Suy ra $ABHC$ là hình chữ nhật.
Từ H vẽ $HE \perp BC$ thì $((SBC), (ABC)) = \widehat{SHE} = 60^\circ \Rightarrow SH = HE\sqrt{3}$.
Trong đó $\dfrac{HB \cdot HC}{\sqrt{HB^2 + HC^2}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.
Suy ra $SH = \dfrac{2\sqrt{15}}{15}$.
Vậy $V = \dfrac{2\sqrt{15}}{15}$.



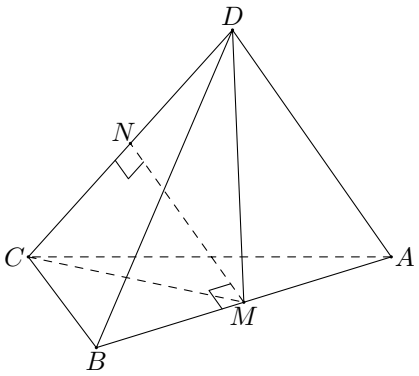
Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB = x$, tất cả các cạnh còn lại bằng nhau và bằng $2 - x$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của x để khối tứ diện đã cho có thể tích bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

(A) 1. (B) 6. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.



Các tam giác DAB, CAB cân nên ta có $\begin{cases} DM \perp AB \\ CM \perp AB \end{cases}$

$\Rightarrow AB \perp (CMD) \Rightarrow AB \perp MN$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $CD \perp NM$.

Ta có

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= V_{A.CDM} + V_{B.CDM} \\ &= \frac{1}{3} \cdot AM \cdot S_{CDM} + \frac{1}{3} \cdot BM \cdot S_{CDM} \\ &= \frac{1}{6} \cdot AB \cdot CD \cdot NM. \end{aligned}$$

Ta có $AB = x$, $CD = 2 - x$ và

$$\begin{aligned} MN &= \sqrt{MD^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{AD^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{(2-x)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{2-x}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2x^2 - 12x + 12}}{2}. \end{aligned}$$

Suy ra $V = \dfrac{1}{12}x(2-x)\sqrt{2x^2 - 12x + 12} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$

$\Leftrightarrow x(2-x)\sqrt{2x^2 - 12x + 12} = \sqrt{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0{,}275842455. \end{array}\right.$ Vậy có 2 giá trị của x thỏa đề bài.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Khối tứ diện $ABCD$ có $AB = 2a$, tam giác CAB đều và tam giác DAB vuông cân tại D. Góc giữa hai mặt phẳng (CAB), (DAB) bằng $30°$. Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

(A) $V = \dfrac{a^3}{4}$. (B) $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$. (C) $V = \dfrac{3a^3}{4}$. (D) $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

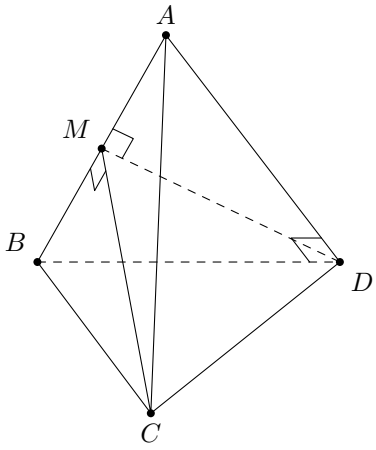
Lời giải.

Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow \begin{cases} CM \perp AB \\ DM \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (CDM)$.

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3} \cdot AB \cdot S_{CDM}$

$= \dfrac{1}{6} \cdot AB \cdot MC \cdot MD \cdot \widehat{CMD}$

$= \dfrac{1}{6} \cdot 2a \cdot a\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$ có $BD = 2$, hai tam giác ABD, BCD có diện tích lần lượt là 6 và 10. Biết thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng 16, tính số đo góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (BCD).

(A) $\arccos\left(\dfrac{4}{5}\right)$. (B) $\arcsin\left(\dfrac{4}{15}\right)$. (C) $\arcsin\left(\dfrac{4}{5}\right)$. (D) $\arccos\left(\dfrac{4}{15}\right)$.

Lời giải.

Áp dụng công thức

$V = \dfrac{2 \cdot S_{ABD} \cdot S_{ADC} \cdot \sin\left[\widehat{(ABD);(ADC)}\right]}{3BD}$

$\Leftrightarrow \sin\left[\widehat{(ABD);(ADC)}\right] = \dfrac{4}{5} \Leftrightarrow \widehat{(ABD);(ADC)} = \arcsin\left(\dfrac{4}{5}\right)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác lồi hai đường chéo AC và BD vuông góc nhau, mặt bên SAD là tam giác đều và tạo với mặt đáy góc 60°, $AD = 4$, $AC = 6$, $BD = 8$. Tính thể tích V của khối $S.ABCD$.

(A) $V = 24$. (B) $V = \dfrac{96}{5}$. (C) $V = \dfrac{48}{5}$. (D) $V = \dfrac{144}{5}$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABCD} = \dfrac{AC \cdot BD}{2} = 24$.

$V = \dfrac{2 \cdot S_{ABCD} \cdot S_{SAD} \cdot \sin\left[\widehat{(ABCD);(SAD)}\right]}{3AD} = 24$.

Chọn đáp án (A) □

Bổ đề: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, mặt phẳng (α) vuông góc các cạnh bên của lăng trụ và tạo với lăng trụ một thiết diện có diện tích S. Khi đó thể tích lăng trụ $V = AA' \cdot S$.

Câu 22. Cho khối tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và tổng diện tích các mặt (OBC), (OCA), (OAB) bằng $\sqrt{3}$. Diện tích mặt (ABC) bằng 1. Tính thể tích V của khối tứ diện đã cho.

(A) $V = \dfrac{1}{6}$. (B) $V = \dfrac{\sqrt[4]{12}}{9}$. (C) $V = \dfrac{2\sqrt[4]{3}}{9}$. (D) $V = \dfrac{\sqrt[4]{3}}{9}$.

Lời giải.

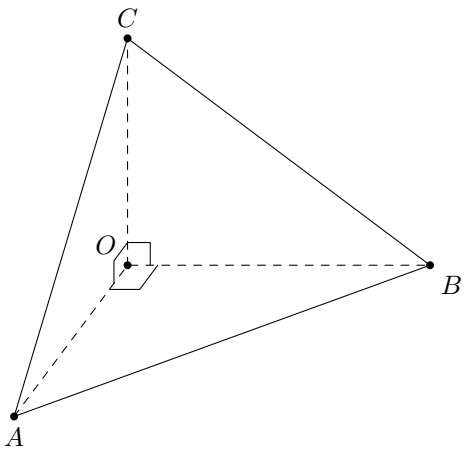
Đặt $OA=a,\ OB=b,\ OC=c$.

Ta có $2S_1=bc,\ 2S_2=ca,\ 2S_3=ab$.

Gọi α là góc giữa (ABC) và (OAB). Suy ra

$\tan\alpha = \dfrac{a\sqrt{b^2+c^2}}{bc} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \dfrac{bc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$.

Khi đó $S=\dfrac{S_1}{\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{2}=\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}\geq \sqrt{\dfrac{1}{3}\cdot(S_1+S_2+S_3)}=1$.



Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\sqrt[4]{\dfrac{4}{3}} \Rightarrow V=\dfrac{\left(\sqrt[4]{\dfrac{4}{3}}\right)^3}{6}=\dfrac{\sqrt[4]{12}}{9}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài các cạnh bằng x. Các điểm $M,\ N$ lần lượt trên các cạnh $AA_1,\ CC_1$ sao cho $AM+CN=2a$. Tìm x biết thể tích khối tứ diện $BDMN$ bằng $2a^3$.

(A) $x=a\sqrt{2}$. (B) $x=a\sqrt{6}$. (C) $x=a\sqrt{3}$. (D) $x=2a\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

Ta có

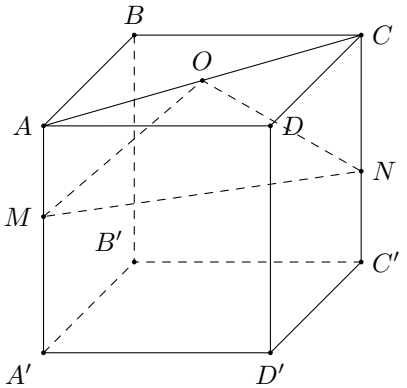
$BD\perp(ACNM)\Rightarrow V_{BDMN}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{MON}\cdot BD$.

$S_{OMN}=S_{ACNM}-S_{OAM}-S_{OCN}$

Ta có

$\dfrac{AM+CN}{2}\cdot AC-\dfrac{AM\cdot OA}{2}-\dfrac{CN\cdot OC}{2}=\dfrac{ax\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $V_{BDMN}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{ax\sqrt{2}}{2}\cdot x\sqrt{2}=2a^3\Leftrightarrow x=a\sqrt{6}$.



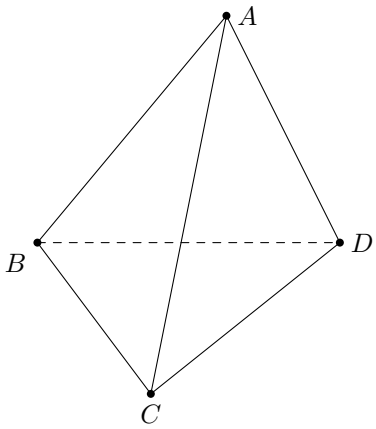
Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Cho khối tứ diện $ABCD$ có tam giác ABD đều, tam giác CAB vuông cân tại C, $AB=a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (CAB), (ADB). Tính $\cos\alpha$ khi thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

(A) $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. (B) $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$. (C) $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (D) $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có
$S_1 = S_{ABD} = \dfrac{(a\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}$,
$S_2 = S_{CAB} = \dfrac{AB^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4}$.
Ta có
$V = \dfrac{2S_1 \cdot S_2 \cdot \sin\alpha}{3AB} = \dfrac{2 \cdot \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4} \cdot \dfrac{3a^2}{4}\sin\alpha}{3\sqrt{3}a}$
$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}a^3}{8} = \dfrac{3a^3 \cdot \sin\alpha}{8} \Leftrightarrow \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$
$\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

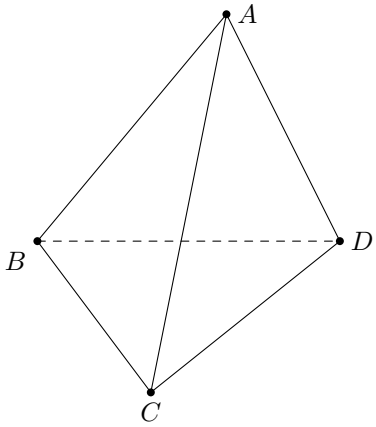


Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Cho khối chóp $S.ABC$ có $AB = 9(\text{cm})$, $BC = 11(\text{cm})$, $CA = 6(\text{cm})$, $SA = 3(\text{cm})$, $SB = 3\text{cm}$ và $SC = 5(\text{cm})$. Tính thể tích V của khối chóp.
(A) $V = \dfrac{\sqrt{2159}}{6}$ (cm^3). (B) $V = \dfrac{\sqrt{241}}{2}$ (cm^3). (C) $V = \dfrac{\sqrt{2159}}{2}$ (cm^3). (D) $V = \dfrac{3\sqrt{241}}{2}$ (cm^3).

Lời giải.

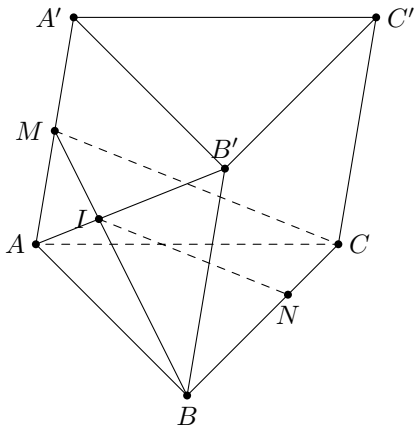
Áp dụng công thức tổng quát khi biết độ dài 6 cạnh hoặc dùng công thức tại đỉnh S, ta có
$\cos\widehat{ASB} = \dfrac{SA^2 + SB^2 - AB^2}{2SA \cdot SB} = -\dfrac{23}{42}$,
$\cos\widehat{BSC} = \dfrac{SB^2 + SC^2 - BC^2}{2SB \cdot SC} - \dfrac{47}{70}$,
$\cos\widehat{ASC} = \dfrac{SA^2 + SC^2 - AC^2}{2SA \cdot SC} = -\dfrac{1}{15}$.
Vậy
$V = \dfrac{3 \cdot 5 \cdot 7}{6} \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \dfrac{-23}{42} \cdot \dfrac{-47}{70} \cdot \dfrac{-1}{15} - \left(\dfrac{-23}{42}\right)^2 - \left(\dfrac{-47}{70}\right)^2 - \left(\dfrac{-1}{15}\right)^2}$
$= \dfrac{\sqrt{2159}}{6}(\text{cm}^3)$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = 1$, $BC = 2$. Góc $\widehat{CBB'} = 90°$, $\widehat{ABB'} = 120°$. Gọi M là trung điểm của AA'. Biết $\text{d}(AB', CM) = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.
(A) $2\sqrt{2}$. (B) $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$. (C) $4\sqrt{2}$. (D) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.



Gọi $I = BM \cap AB'$, $N \in BC$ sao cho $IN \parallel CM$ suy ra $CM \parallel (AB'N)$.

Ta có $d(CM, AB') = d[C, (AB'N)] = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

Ta có $\cos\widehat{ABN} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{2}$.

Đặt $BB' = x$ thì

$V_{B.AB'N} = \dfrac{1}{6} \cdot 1 \cdot \dfrac{4}{3} \cdot x \cdot \sqrt{1 + 2 - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 0 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 0^2} = \dfrac{x\sqrt{2}}{9}$.

Mà $AB' = \sqrt{x^2 + x + 1}$, $BN = \dfrac{4}{3}$

Suy ra $NB' = \sqrt{x^2 + \dfrac{16}{9}}$,

$AN = \sqrt{AB^2 + BN^2 - 2 \cdot AB \cdot BN \cos\widehat{ABN}} = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$.

$\cos\widehat{B'AN} = \dfrac{x^2 + x + 1 + \dfrac{13}{9} - \left(x^2 + \dfrac{16}{9}\right)}{\dfrac{2\sqrt{13(x^2 + x + 1)}}{3}} = \dfrac{3x + 2}{2\sqrt{13(x^2 + x + 1)}}$.

$\Rightarrow \sin\widehat{B'AN} = \sqrt{1 - \dfrac{(3x + 2)^2}{52(x^2 + x + 1)}}$.

$\Rightarrow S_{AB'N} = \dfrac{\sqrt{13(x^2 + x + 1)}}{6} \cdot \sqrt{1 - \dfrac{(3x + 2)^2}{52(x^2 + x + 1)}} = \dfrac{\sqrt{43x^2 + 40x + 48}}{12}$.

Do đó $\mathrm{d}[B, (AB'N)] = \dfrac{3V_{B.AB'N}}{S_{AB'N}} = \dfrac{\dfrac{x\sqrt{2}}{3}}{\dfrac{\sqrt{43x^2 + 40x + 48}}{12}} \Rightarrow x = 4$.

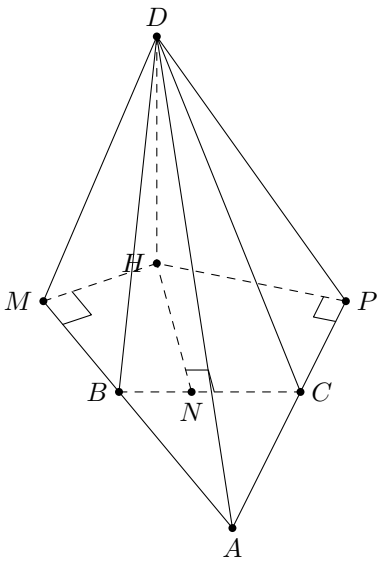
Vậy $V_{B.AB'N} = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB = 3a$, $AC = 4a$, $\widehat{BAC} = 90^\circ$ và góc giữa các mặt phẳng (DAB), (DBC), (DCA) và mặt phẳng (ABC) bằng nhau và bằng 60°, hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (ABC) là điểm H sao cho A, H nằm về hai phía của đường thẳng BC. Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

(A) $V = 2\sqrt{3}a^3$. (B) $V = 6\sqrt{3}a^3$. (C) $V = 4\sqrt{3}a^3$. (D) $V = 12\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.



Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của H lên các cạnh AB, BC, CA, suy ra
$\widehat{DMH} = \widehat{DNH} = \widehat{DPH} = 60^\circ$ (là góc của các mặt phẳng (DAB), (DBC), (DCA) với (ABC)).
Suy ra $HM = HN = HP$ suy ra H là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của $\triangle ABC$.
Gọi r_a là bán kính đường tròn bàng tiếp góc A.
$\Rightarrow r_a = HM = HN = HP$.
Ta có $S_{ABC} = \dfrac{AB \cdot AC}{2} = 6a^2$.
Ta có $S_{ABC} = S_{HAB} + S_{HAC} - S_{HBC}$
$= \dfrac{HM \cdot AB}{2} + \dfrac{HP \cdot AC}{2} - \dfrac{HN \cdot BC}{2}$
$= r_a \cdot \dfrac{b+c-a}{2} = r_a(p-a)$.
$\Rightarrow r_a = \dfrac{S_{ABC}}{p-a} = 6a$.
Lại có $\tan \widehat{DMH} = \dfrac{DH}{HM} \Rightarrow DH = r_a \cdot \tan 60^\circ = 6a\sqrt{3}$.
Vậy $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot DH \cdot S_{ABC} = 12a^3\sqrt{3}$.

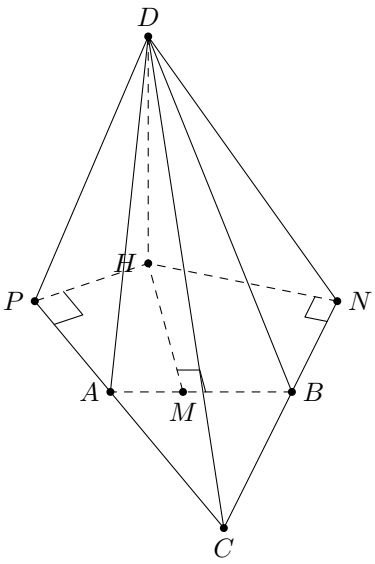
Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB = 3a$, $AC = 4a$, $\widehat{BAC} = 90^\circ$ và góc giữa các mặt phẳng (DAB), (DBC), (DCA) và mặt phẳng (ABC) bằng nhau và bằng 60°, hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (ABC) là điểm H sao cho C, H nằm về hai phía của đường thẳng AB. Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

(A) $V = 2\sqrt{3}a^3$. (B) $V = 6\sqrt{3}a^3$. (C) $V = 4\sqrt{3}a^3$. (D) $V = 12\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.

Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của H lên các cạnh AB, BC, CA, suy ra
$\widehat{DMH} = \widehat{DNH} = \widehat{DPH} = 60^\circ$ (là góc của các mặt phẳng (DAB), (DBC), (DCA) với (ABC)).
Suy ra $HM = HN = HP$ suy ra H là tâm đường tròn bàng tiếp góc C của $\triangle ABC$.



Gọi r_c là bán kính đường tròn bàng tiếp góc C.
$\Rightarrow r_c = HM = HN = HP$.
Ta có $S_{ABC} = \dfrac{AB \cdot AC}{2} = 6a^2$.
Ta có $S_{ABC} = S_{HAC} + S_{HBC} - S_{HAB}$
$= \dfrac{HP \cdot AC}{2} + \dfrac{HN \cdot BC}{2} - \dfrac{HM \cdot AB}{2}$
$= r_c \cdot \dfrac{a+b-c}{2} = r_c(p-c)$.
$\Rightarrow r_c = \dfrac{S_{ABC}}{p-c} = 2a$.
Lại có $\tan \widehat{DMH} = \dfrac{DH}{HM} \Rightarrow DH = r_c \cdot \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$.
Vậy $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot DH \cdot S_{ABC} = 4a^3\sqrt{3}$.

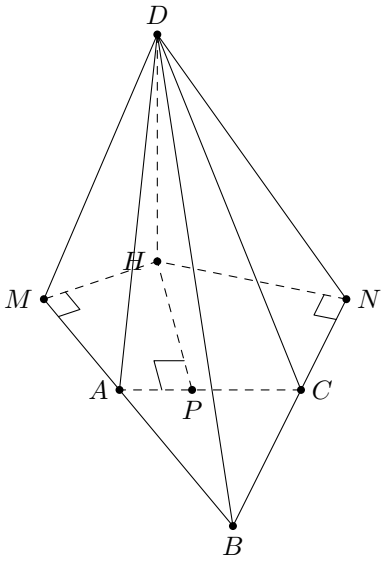
Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB = 3a$, $AC = 4a$, $\widehat{BAC} = 90^\circ$ và góc giữa các mặt phẳng (DAB), (DBC), (DCA) và mặt phẳng (ABC) bằng nhau và bằng 60°, hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (ABC) là điểm H sao cho B, H nằm về hai phía của đường thẳng AC. Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

(A) $V = 2\sqrt{3}a^3$. (B) $V = 6\sqrt{3}a^3$. (C) $V = 4\sqrt{3}a^3$. (D) $V = 12\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.

Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của H lên các cạnh AB, BC, CA, suy ra
$\widehat{DMH} = \widehat{DNH} = \widehat{DPH} = 60^\circ$ (là góc của các mặt phẳng (DAB), (DBC), (DCA) với (ABC)).
Suy ra $HM = HN = HP$ suy ra H là tâm đường tròn bàng tiếp góc B của $\triangle ABC$.



Gọi r_b là bán kính đường tròn bàng tiếp góc B.
$\Rightarrow r_b = HM = HN = HP$.
Ta có $S_{ABC} = \dfrac{AB \cdot AC}{2} = 6a^2$.
Ta có $S_{ABC} = S_{HAB} + S_{HBC} - S_{HAC}$
$= \dfrac{HM \cdot AB}{2} + \dfrac{HN \cdot BC}{2} - \dfrac{HP \cdot AC}{2}$
$= r_b \cdot \dfrac{a+c-b}{2} = r_b(p-b)$.
$\Rightarrow r_b = \dfrac{S_{ABC}}{p-b} = 3a$.
Lại có $\tan \widehat{DMH} = \dfrac{DH}{HM} \Rightarrow DH = r_b \cdot \tan 60^\circ = 3a\sqrt{3}$.
Vậy $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot DH \cdot S_{ABC} = 6a^3\sqrt{3}$.

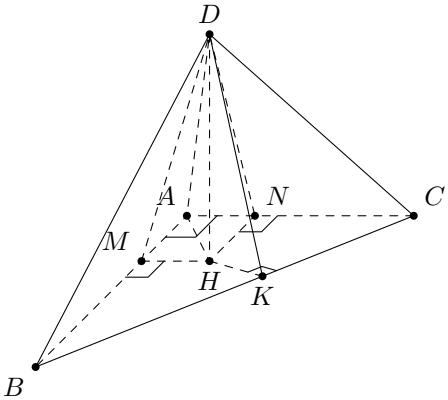
Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB = 3a$, $AC = 4a$, $\widehat{BAC} = 90^\circ$ và góc giữa các mặt phẳng (DAB), (DBC), (DCA) và mặt phẳng (ABC) bằng nhau và bằng 60°, hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (ABC) là điểm H nằm trong tam giác ABC. Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

(A) $V = 2\sqrt{3}a^3$. (B) $V = 6\sqrt{3}a^3$. (C) $V = 4\sqrt{3}a^3$. (D) $V = 12\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của D xuống (ABC). Gọi M, N, K lần lượt là hình chiếu của H xuống AB, AC, BC.
Ta có $\widehat{DMH} = \widehat{DNH} = \widehat{DKH} = 60^\circ$.
Đặt $DH = x$, ta có
$HK = HN = HM = \dfrac{DH}{\tan 60^\circ} = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.



Suy ra H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$, vì thế ta có
$MH = r = \dfrac{S_{ABC}}{p} = \dfrac{0,5 \cdot AB \cdot AC}{0,5 \cdot (AB + AC + BC)} = \dfrac{0,5 \cdot 3a \cdot 4a}{0,5 \cdot (3a + 4a + 5a)} = a$.
Suy ra $x = a\sqrt{3}$.
Vậy $V_{D.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot DH = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 3a \cdot 4a \cdot a\sqrt{3} = 2a^3\sqrt{3}$.

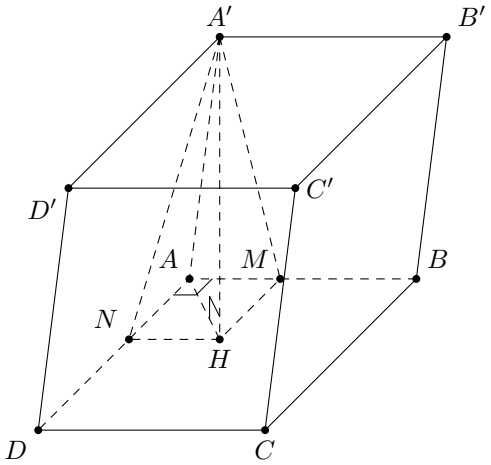
Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật, $AB=\sqrt{3}$, $AD=\sqrt{7}$. Hai mặt bên $(ABB'A)$, $(ADD'A')$ tạo với đáy các góc lần lượt là 45° và 60°. Tính thể tích V của khối hộp đã cho biết độ dài cạnh bên bằng 1.

(A) $V=3$. (B) $V=\dfrac{7}{3}$. (C) $V=\sqrt{3}$. (D) $V=\sqrt{7}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của A' xuống $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H xuống AB, AD.



Ta có $\widehat{A'MH}=45^\circ$, $\widehat{A'NH}=60^\circ$.

Đặt $A'H=x$, ta có

$HM=\dfrac{A'H}{\tan 45^\circ}=x$,

$HN=\dfrac{A'H}{\tan 60^\circ}=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$

và $AH^2=AA'^2-A'H^2=1-x^2$.

Xét hình chữ nhật $AMHN$ ta có

$AH^2=HM^2+HN^2\Leftrightarrow 1-x^2=x^2+\dfrac{x^2}{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $V_{D.ABC}=AB\cdot AD\cdot DH=\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}\cdot\dfrac{\sqrt{21}}{7}=3$.

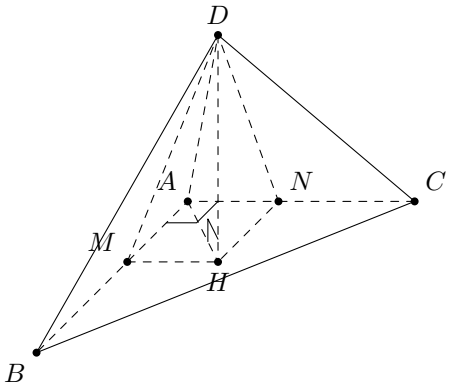
Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB=3a$, $AC=4a$, $\widehat{BAC}=90^\circ$, góc giữa các mặt phẳng (DAB), (DAC) và mặt phẳng (ABC) lần lượt là 45° và 60°. Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$ biết $AD=6a$.

(A) $V=\dfrac{12\sqrt{5}a^3}{5}$. (B) $V=\dfrac{4\sqrt{21}a^3}{7}$. (C) $V=\dfrac{4\sqrt{5}a^3}{5}$. (D) $V=\dfrac{12\sqrt{21}a^3}{7}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của D xuống (ABC). Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H xuống AB, AC.



Ta có $\widehat{DMH}=45^\circ$, $\widehat{DNH}=60^\circ$.

Đặt $DH=x$, ta có

$HM=\dfrac{DH}{\tan 45^\circ}=x$,

$HN=\dfrac{DH}{\tan 60^\circ}=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$

và $AH^2=AD^2-DH^2=36a^2-x^2$.

Xét hình chữ nhật $AMHN$ ta có

$AH^2 = HM^2 + HN^2 \Leftrightarrow 36a^2 - x^2 = x^2 + \dfrac{x^2}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{6a\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $V_{D.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot DH = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 3a \cdot 4a \cdot \dfrac{6a\sqrt{21}}{7} = \dfrac{12a^3\sqrt{21}}{7}$.

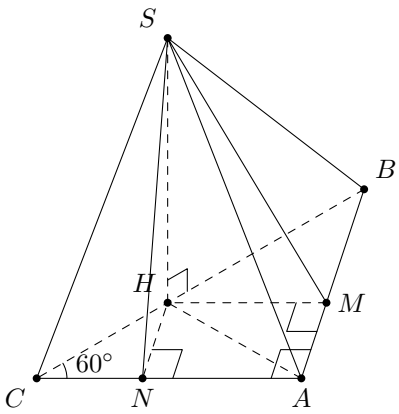
Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AC = \dfrac{a}{2}$, $BC = a$. Hai mặt phẳng (SAB), (SAC) cùng tạo với đáy góc $60°$, tam giác SBC nhọn và mặt phẳng SBC vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

(A) $V = \dfrac{(3-\sqrt{3})a^3}{32}$. (B) $V = \dfrac{(3+\sqrt{3})a^3}{32}$. (C) $V = \dfrac{3(3-\sqrt{3})a^3}{32}$. (D) $V = \dfrac{3(3+\sqrt{3})a^3}{32}$.

Lời giải.

Vì $(SBC) \perp (ABC)$ nên hình chiếu của S xuống đáy là H sẽ nằm trên BC.



Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H xuống AB, AC.

Ta có $\widehat{SMH} = \widehat{SNH} = 60°$, hơn nữa $\triangle SMH = \triangle SNH$ (tam giác vuông, cạnh góc vuông và góc nhọn).

Xét $\triangle ABC$ là nửa tam giác đều với $\widehat{A} = 90°$, $\widehat{C} = 60°$, $\widehat{B} = 30°$, $AB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, ta có

$$\begin{cases} CH + BH = a \\ \dfrac{CH}{BH} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow CH = \dfrac{a}{1+\sqrt{3}}.$$

Xét $\triangle AHC$, áp dụng định lý sin ta có

$\dfrac{AC}{\sin H} = \dfrac{AH}{\sin C} \Leftrightarrow \dfrac{a/2}{\sin 75°} = \dfrac{AH}{\sin 60°} \Leftrightarrow AH = \dfrac{(-\sqrt{6}+3\sqrt{2})a}{4}$.

Suy ra $MH = \dfrac{AH}{\sqrt{2}} = \dfrac{(3-\sqrt{3})a}{4}$.

Xét $\triangle SHM$ ta có $SH = MH \cdot \tan 60° = \dfrac{(-3+3\sqrt{3})a}{4}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot SH = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{(-3+3\sqrt{3})a}{4} = \dfrac{(3-\sqrt{3})a^3}{32}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Cho hai đường thẳng chéo nhau Ax, By tạo với nhau góc $60°$ và $AB = a$ là độ dài đoạn vuông góc chung. Hai điểm M, N di động trên Ax, By sao cho $MN = 2a$. Tìm thể tích lớn nhất của khối tứ diện $ABMN$.

(A) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{16}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{36}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

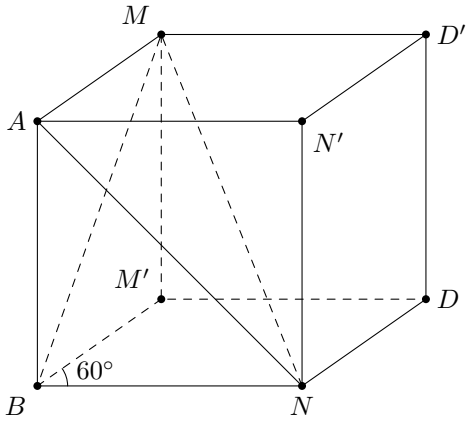
Lời giải.

Gọi $AM = x,\ BN = y$.

Theo định lý cos ta có $M'N^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 60$

$\Leftrightarrow MN^2 - MM'^2 = x^2 + y^2 - xy \Leftrightarrow 3a^2 = x^2 + y^2 - xy.$

$\Rightarrow 3a^2 \geq xy$ (vì $x^2 + y^2 \geq 2xy$)



$$\begin{aligned} V_{M.ABN} &= \frac{1}{6}\cdot V_{BNDM'.AN'D'M} \\ &= \frac{1}{6}\cdot BN\cdot BM'\cdot \sin\widehat{NBM'}\cdot AB \\ &= \frac{x\cdot y\cdot\sqrt{3}\cdot a}{12} = \frac{xya\sqrt{3}}{12} \\ &\leq \frac{3a^2\cdot a\sqrt{3}}{12} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Cho khối chóp $S.ABC$ có $AB = AC = a$, các góc $\widehat{BAC} = 120°$, $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90°$, góc giữa mặt phẳng (SAC) và đường thẳng SB bằng $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ và khoảng cách từ S đến (ABC) nhỏ hơn $2a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

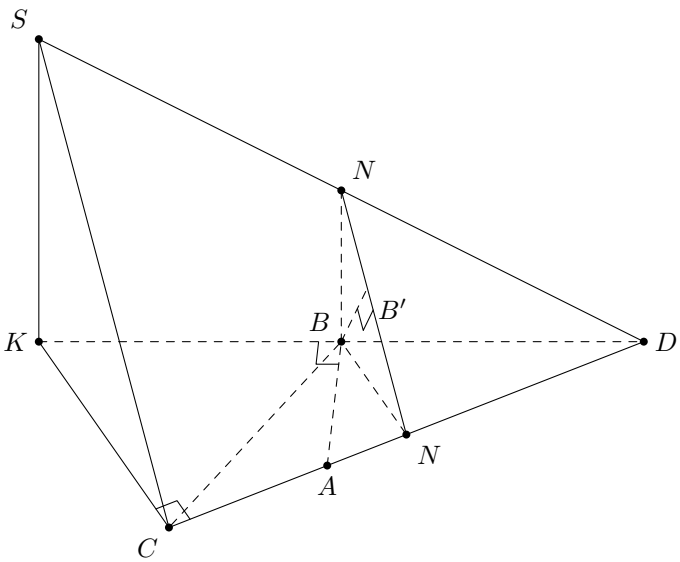
(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải.

Gọi K là hình chiếu của S xuống (ABC), đặt $SK = k < 2a$, ta có $KB = KC$ và $\widehat{ACK} = \widehat{ABK} = 90°$. Hơn nữa $\widehat{CKB} = 60°$.

Gọi $D = AC \cap KB$, $BM \perp AC$ tại M, $BN \parallel SK$ với $N \in SD$.

Gọi B' là hình chiếu của B xuống MN, B' cũng chính là hình chiếu của B xuống (SAC).



Ta có $\sin\widehat{B'AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$

$\Leftrightarrow \dfrac{BB'}{SB} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$ ($\triangle SBB'$ vuông tại B'). (1)

Dễ tính $SB = \sqrt{SK^2 + KB^2} = \sqrt{k^2 + 3a^2}$.

Bằng các tính chất hình học, ta tính được BM là đường trung bình của $\triangle DKC$ nên $BM = \dfrac{KC}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tương tự $BN = \dfrac{k}{2}$ và $MN = \dfrac{\sqrt{k^2 + 3a^2}}{2}$.

Suy ra $BB' = \dfrac{BM \cdot BN}{MN} = \dfrac{ak\sqrt{3}}{2\sqrt{k^2+3a^2}}$.

Thay vào (1) ta có $\dfrac{ak\sqrt{3}}{2(k^2+3a^2)} = \dfrac{\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow 4ak = k^2+3a^2 \Leftrightarrow (k-a)(k-30) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = a \text{ (loại)} \\ k = a \text{ (nhận)}. \end{array}\right.$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SK = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

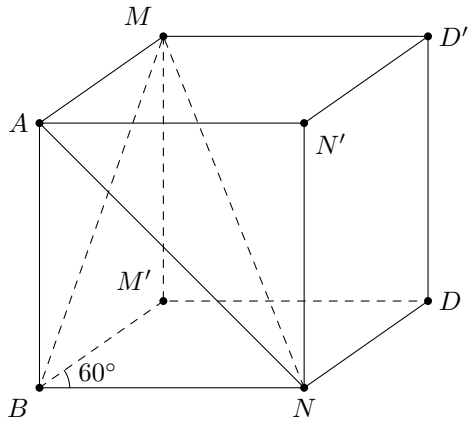
Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Cho hai đường thẳng a, b cố định chéo nhau. Gọi AB là đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng a, b ($A \in a$, $B \in b$). Trên a lấy điểm M khác A, trên b lấy điểm N khác B sao cho $AM = x$; $BN = y$. Biết $AB = 6$, góc giữa hai đường thẳng a, b là $60°$. Tính thể tích của tứ diện $ABMN$ theo x và y.

(A) $\dfrac{\sqrt{3}xy}{2}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}xy}{4}$. (C) $\dfrac{xy}{2}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}xy}{6}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} V_{M.ABN} &= \frac{1}{6} \cdot V_{BNDM'.AN'D'M} \\ &= \frac{1}{6} \cdot BN \cdot BM' \cdot \sin \widehat{NBM'} \cdot AB \\ &= \frac{x \cdot y \cdot \sqrt{3} \cdot 6}{12} = \frac{xy\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

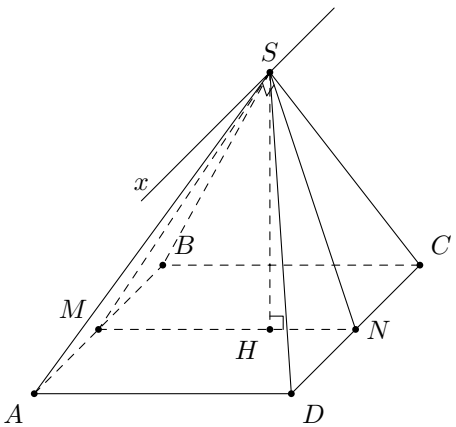


Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = SB$, $SC = SD$. Biết rằng mặt phẳng $(SAB) \perp (SCD)$ và tổng diện tích của hai tam giác SAB, SCD bằng $\dfrac{7a^2}{10}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

(A) $V = \dfrac{4a^3}{75}$. (B) $V = \dfrac{4a^3}{15}$. (C) $V = \dfrac{4a^3}{25}$. (D) $V = \dfrac{12a^3}{25}$.

Lời giải.



S là điểm chung của (SAB) và (SCD), đồng thời $AB \parallel CD$.

Khi đó kẻ $Sx \parallel AB \parallel CD$ thì Sx là giao tuyến của (SAB) và (SCD).

Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CD.

$\triangle SAB, \triangle SCD$ là các tam giác cân tại S nên $SM \perp AB$, $SN \perp CD$.

Mặt khác $SM \perp CD \Rightarrow SM \perp (ABCD) \Rightarrow (SMN) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến MN.

Kẻ $SH \perp MN\,(H \in MN) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

$SM \perp Sx, SN \perp Sx$ nên góc $[\widehat{(SAB);(SCD)}] = \widehat{(SM;SN)} = \widehat{MSN} = 90^\circ$.

$\dfrac{7a^2}{10} = S_{SAB} + S_{SCD} = \dfrac{1}{2}AB \cdot SM + \dfrac{1}{2}CD \cdot SN \xrightarrow{AB=CD} \dfrac{7a^2}{10} = \dfrac{1}{2}AB\,(SM + SN) \Rightarrow SM + SN = \dfrac{7a}{5}$.

$SM^2 + SN^2 = MN^2 = a^2 \Rightarrow SM \cdot SN = \dfrac{(SM+SN)^2 - (SM^2+SN^2)}{2} = \dfrac{12a^2}{25}$.

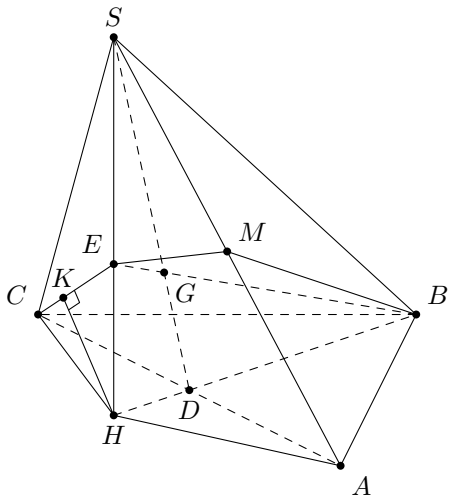
Vậy $SH = \dfrac{SM \cdot SN}{MN} = \dfrac{12a}{25} \Rightarrow V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SH = \dfrac{4a^3}{25}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 38. Cho khối chóp $S.ABC$có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh SA. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCM) bằng $\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

(A) $\dfrac{10\sqrt{3}}{9}a^3$. (B) $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}a^3$. (C) $\dfrac{5\sqrt{3}}{9}a^3$. (D) $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}a^3$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC).

Ta có $\begin{cases} BC \perp SC \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SCH) \Rightarrow BC \perp HC$.

Tương tự ta có $BA \perp AH$.

Suy ra H thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC.

Do đó, H thuộc đường thẳng BD sao cho $\overrightarrow{HD} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DB}$, với D là trung điểm cạnh AC.

Ta có tứ giác $ABCH$ nội tiếp đường tròn đường kính BH.

$\triangle ABC$ đều cạnh $2a \Rightarrow BD = a\sqrt{3}$.

Lại có $\dfrac{BD}{BH}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow BH=\dfrac{4BD}{3}=\dfrac{4}{3}a\sqrt{3}; HA=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.
Gọi $G=CM\cap SD, E=BG\cap SH$ thì G là trọng tâm $\triangle SAC$.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác $\triangle SDH$ với ba điểm E,G,B thẳng hàng,
ta có $\dfrac{SE}{EH}\cdot\dfrac{HB}{BD}\cdot\dfrac{DG}{GS}=1\Leftrightarrow\dfrac{SE}{EH}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=1\Leftrightarrow\dfrac{SE}{EH}=\dfrac{3}{2}$.
$\mathrm{d}(A;(BCM))=\mathrm{d}(S;(BCM))=\dfrac{SE}{HE}\mathrm{d}(H;(BCM))\Rightarrow\mathrm{d}(H;(BCM))=\dfrac{2}{3}\mathrm{d}(A;(BCM))=\dfrac{4a\sqrt{21}}{21}$.
Gọi K là hình chiếu của H trên CE thì K là hình chiếu của H trên $(BCM)\Rightarrow HK=\mathrm{d}(H,(BCM))=\dfrac{4a\sqrt{21}}{21}$.
$\triangle HCE$ vuông tại H, đường cao $HK\Rightarrow\dfrac{1}{HE^2}=\dfrac{1}{HK^2}-\dfrac{1}{HC^2}=\dfrac{9}{16a^2}\Rightarrow HE=\dfrac{4a}{3}$.
$SH=\dfrac{5}{2}HE=\dfrac{10a}{3}$.

Vậy thể tích của khối $S.ABC$ là $V=\dfrac{1}{3}S_{ABC}\cdot SH=\dfrac{10\sqrt{3}a^3}{9}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA=BC=x$, $SB=CA=y$, $SC=AB=z$ và $x^2+y^2+z^2=12$. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$ bằng

(A) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. (B) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{2}}{9}$. (D) $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính thể tích của tứ diện gần đều, ta có

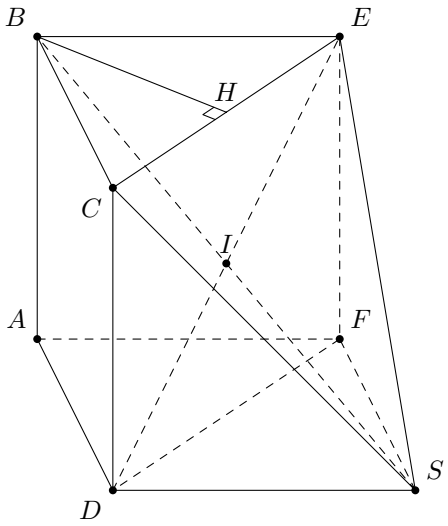
$$\begin{aligned}V_{S.ABC}&=\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot\sqrt{\left(x^2+y^2-z^2\right)\left(x^2+z^2-y^2\right)\left(y^2+z^2-x^2\right)}\\&=\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot\sqrt{\left(12-2z^2\right)\left(12-2y^2\right)\left(12-2x^2\right)}\\&=\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(6-z^2\right)\left(6-y^2\right)\left(6-x^2\right)}\\&=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{\left(6-z^2\right)\left(6-y^2\right)\left(6-x^2\right)}\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có
$\left(6-z^2\right)\left(6-y^2\right)\left(6-x^2\right)\le\left(\dfrac{6-z^2+6-y^2+6-x^2}{3}\right)^3=2^3=8$.
Do đó $V_{S.ABC}\le\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{8}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=2$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Cho hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh bằng 1, lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi S là điểm đối xứng với B qua trung điểm của đoạn thẳng DE. Thể tích của khối đa diện $ABCDSEF$ bằng

(A) $\dfrac{7}{6}$. (B) $\dfrac{11}{12}$. (C) $\dfrac{2}{3}$. (D) $\dfrac{5}{6}$.

Lời giải.



Ta có $ADE.BCF$ là một lăng trụ đứng có đáy $\triangle ADE$ là tam giác vuông cân tại A với $AD = AE = 1$, cạnh bên $AB = 1$.

Gọi I là trung điểm DE thì $BI = SI$ nên $d(S;(ADE)) = d(B;(ADE)) = BH$.

Ta có $V_{S.CDFE} = \dfrac{1}{3} \cdot d(S,(CDEF)) \cdot S_{CDFE} = \dfrac{1}{3} \cdot BH \cdot CD \cdot CE = \dfrac{1}{3}$.

$V_{BCE.ADF} = \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot BE \cdot AB = \dfrac{1}{2}$.

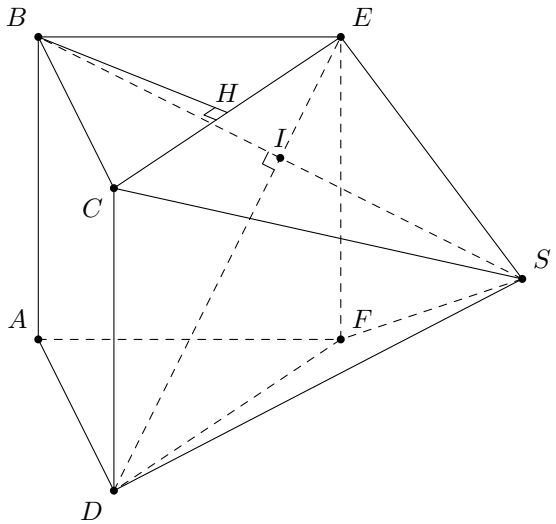
Khi đó $V_{ABCDSEF} = V_{BCE.ADF} + V_{S.CDEF} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Cho hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh bằng 1, lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi S là điểm đối xứng với B qua đường thẳng DE. Thể tích của khối đa diện $ABCDSEF$ bằng

(A) $\dfrac{7}{6}$. (B) $\dfrac{11}{12}$. (C) $\dfrac{2}{3}$. (D) $\dfrac{5}{6}$.

Lời giải.



Ta có $ADE.BCF$ là một lăng trụ đứng có đáy ΔADE là tam giác vuông cân tại A với $AD = AE = 1$, cạnh bên $AB = 1$, do đó $V_{BCE.ADF} = \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot BE \cdot AB = \dfrac{1}{2}$.

Gọi H là trung điểm CE và I là hình chiếu vuông góc của H trên DE, Khi đó ta có BI vuông góc DE với tại I và $BI = SI$ nên $d(S,(ADE)) = d(B,(ADE)) = BH$.

Ta có $V_{S.CDFE} = \dfrac{1}{3} \cdot d(S,(CDEF)) \cdot S_{CDFE} = \dfrac{1}{3} \cdot BH \cdot CD \cdot CE = \dfrac{1}{3}$.

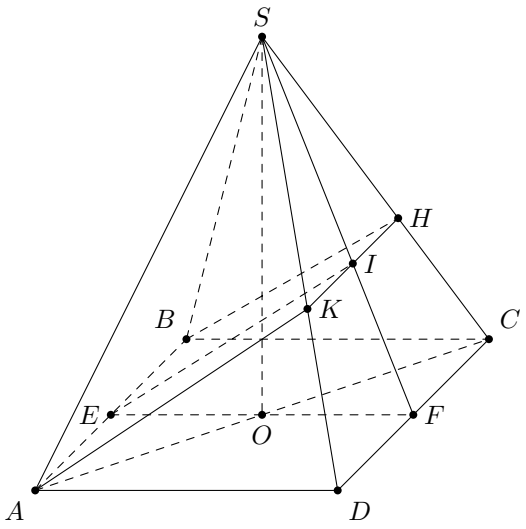
Khi đó $V_{ABCDSEF} = V_{BCE.ADF} + V_{S.CDEF} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 1, mặt bên tạo với đáy một góc $75°$. Mặt phẳng chứa (P) chứa đường thẳng AB và tạo với góc đáy một góc $45°$ chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Thể tích của khối đa diện chứa đỉnh S bằng

(A) $\dfrac{16+9\sqrt{3}}{78}$. (B) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{3(1+\sqrt{2})}$. (C) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{6(1+\sqrt{2})}$. (D) $\dfrac{16+9\sqrt{3}}{26}$.

Lời giải.



Gọi E, F lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD.

Chiều cao của khối chóp là $h = \dfrac{1}{2}\tan 75° = \dfrac{1}{2}\tan(45°+30°) = \dfrac{\tan 45° + \tan 30°}{2(1-\tan 45°\tan 30°)} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$.

Và $SE = \sqrt{h^2+OE^2} = \sqrt{\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Thể tích khối chóp tứ giác đều là $V_0 = \dfrac{Sh}{3} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{6}$.

Ta có $(SEF) \perp AB$. Kẻ $EI \cap SF = I$ sao cho $\widehat{IEF} = 45°$, khi đó

$(P) \equiv (ABI)$ và $(P) \cap (SCD) = HK \parallel CD \parallel AB$.

Ta lại có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SH$.

$$\frac{IS}{IF} = \frac{S_{SEI}}{S_{IEF}} = \frac{\sin\widehat{SEI}}{\sin\widehat{IEF}} = \frac{SE\cdot\sin 30°}{FE\cdot\sin 45°} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{2}}{1\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 1+\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{SI}{SF} = \frac{5+2\sqrt{3}}{13}.$$

Do đó theo tỉ số thể tích có

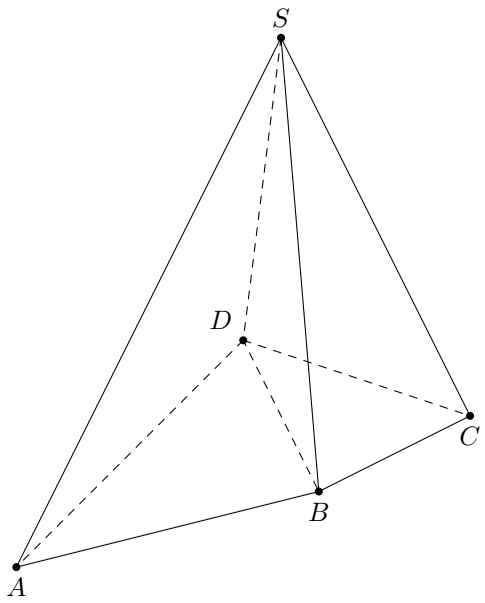
$$V_S = \frac{SH}{SC}\cdot\left(\frac{1}{2}V_0\right) + \frac{SK}{SD}\cdot\left(\frac{1}{2}V_0\right) = \frac{SI}{SF}\cdot\frac{1}{2}V_0 + \frac{SI}{SF}\cdot\frac{1}{2}V_0 = \frac{SI}{SF}\cdot V_0 = \frac{16+9\sqrt{3}}{78}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 43. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC vuông tại A, $AB = 3a$, $AC = a$. Mặt phẳng (DBC), (DAC), (DAB) lần lượt tạo với mặt phẳng (ABC) các góc 90°, α, β trong đó $\alpha + \beta = 90^\circ$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. (B) $\dfrac{3a^3}{13}$. (C) $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{10}$. (D) $\dfrac{3a^3}{8}$.

Lời giải.



Có $BC = \sqrt{10}a$, $S_{ABC} = \dfrac{3a^2}{2}$ và áp dụng công thức thể tích tứ diện khi biết ba góc của mặt bên tạo với đáy.

$$\begin{aligned} V &= \frac{2S^2}{3(a\cot\alpha + b\cot\beta + c\cot\gamma)} = \frac{2\left(\dfrac{3a^2}{2}\right)^2}{3(\sqrt{10}a\cdot 0 + a\cot\alpha + 3a\cot\beta)} \\ &= \frac{3a^3}{2(\cot\alpha + 3\tan\alpha)} \le \frac{3a^3}{4\sqrt{\cot\alpha\cdot 3\tan\alpha}} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 44. Cho khối đa diện $SABCD$ bằng cách ghép hai khối chóp tam giác $S.ABD$ và $S.BCD$ lại với nhau, biết $SA = 4$; $SB = 3$; $SC = 2$; $SD = 1$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSD} = \widehat{DSA} = \widehat{BSD} = 60^\circ$. Thể tích khối đa diện $SABCD$ bằng

(A) $3\sqrt{2}$. (B) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. (C) $\dfrac{7\sqrt{2}}{6}$. (D) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Ta có thể tích của khối tứ diện đều cạnh $a = 1$ là $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

Ta có $\dfrac{V_{S.ABD}}{V} = SA\cdot SB\cdot SD = 12 \Rightarrow V_{S.ABD} = \sqrt{2}$ và $\dfrac{V_{S.CBD}}{V} = SC\cdot SB\cdot SD = 6 \Rightarrow V_{S.CBD} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

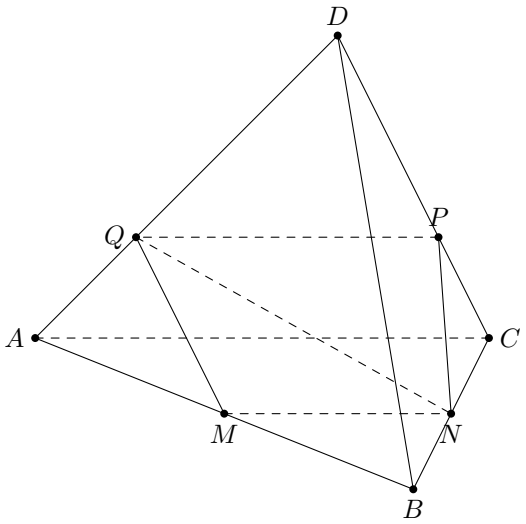
Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC; điểm P thuộc cạnh CD sao cho $PD = 2CP$, mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q. Tính thể tích khối đa diện $BMNPQD$.

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{16}$. (B) $\dfrac{23\sqrt{2}}{432}$. (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{48}$. (D) $\dfrac{13\sqrt{2}}{432}$.

Lời giải.



Ta có thiết diện của (MNP) và tứ diện là hình thang $MNPQ$ trong đó $MN \parallel PQ$.

Có $V_{BMNPQD} = V_{D.BPQ} + V_{B.MNQ} + V_{Q.BNP}$.

Ta lại có

$V_{D.BPQ} = \dfrac{4}{9}V_{ABCD}$.

$V_{Q.MBN} = \dfrac{1}{3}S_{MBN} \cdot d\,(Q, (MBN)) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{4}S_{ABC} \cdot \dfrac{1}{3}d\,(D, (ABC)) = \dfrac{1}{12}V_{ABCD}$.

$V_{Q.BPN} = \dfrac{1}{3}S_{PBN} \cdot d\,(Q, (PBN)) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{6}S_{BCD} \cdot \dfrac{2}{3}d\,(A, (PBN)) = \dfrac{1}{9}V_{ABCD}$.

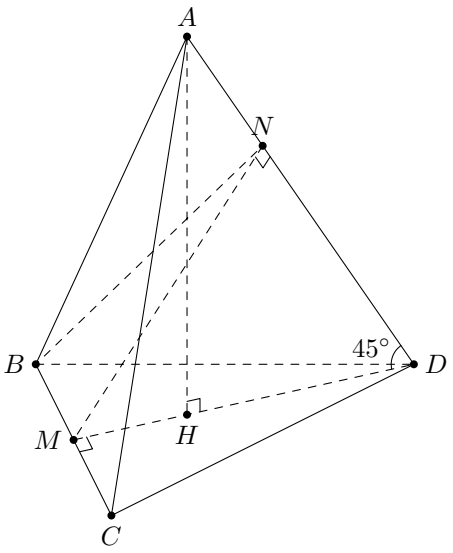
Suy ra $V_{BMNPQD} = \dfrac{23}{36}V_{ABCD} = \dfrac{23}{36} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{12} = \dfrac{23\sqrt{2}}{432}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 46. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 3a$, $AC = a\sqrt{15}$, $BD = a\sqrt{10}$, $CD = 4a$. Biết góc giữa đường thẳng AD và (BCD) là $45°$, khoảng cách giữa AD và BC là $\dfrac{5a}{4}$. Hình chiếu vuông góc của A lên (BCD) nằm trong tam giác BCD. Tính độ dài đoạn AD.

(A) $\dfrac{5a\sqrt{2}}{4}$. (B) $2a$. (C) $2a\sqrt{2}$. (D) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



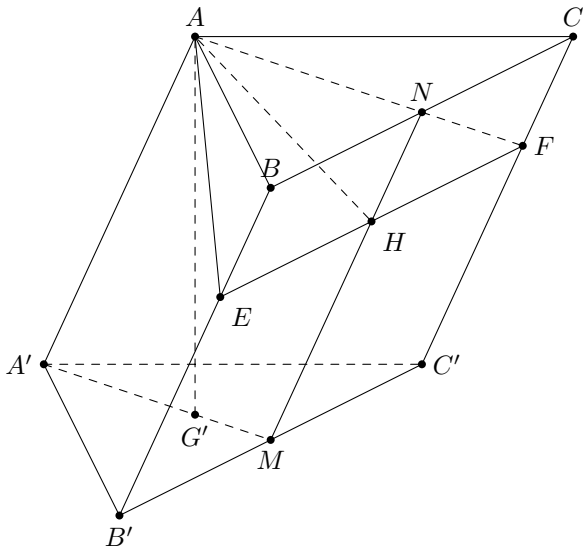
Ta có $\overrightarrow{AD}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\overrightarrow{AB} = \dfrac{AD^2+AC^2-CD^2}{2} - \dfrac{AD^2+AB^2-BD^2}{2} = 0 \Rightarrow AD \perp BC$.
Gọi H là hình chiếu của A lên (BCD); $M = DH \cap BC$ suy ra M nằm giữa BC.
Do $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp AD \end{cases} \Rightarrow BC \perp DM$.
Trong (ADM) dựng $MN \perp AD$ tại N suy ra MN là đoạn vuông góc chung của AD, $BC \Rightarrow MN = \dfrac{5a}{4}$.
Ta thấy góc giữa AD và (BCD) là $\widehat{ADH} = 45^\circ$.
Ta có $DM = MN\sqrt{2} = \dfrac{5a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow BM = \sqrt{BD^2 - MN^2} = \dfrac{a\sqrt{110}}{4}$.
$AN = \sqrt{AB^2 - BN^2} = \sqrt{AB^2 - (BM^2 + MN^2)} = \dfrac{3a}{4}; DN = MN = \dfrac{5a}{4}$.
Do đó $AD = AN + DN = 2a$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB', CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$; khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trọng tâm G' của tam giác $A'B'C'$ và $A'G' = \dfrac{4}{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

(A) 2. (B) $\dfrac{2}{3}$. (C) 4. (D) $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.



Kẻ $AE \perp BB'$, $AF \perp CC' \Rightarrow (AEF) \perp AA' \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{AEF}$.

Ta có $AE = d(A, BB') = 1$, $AF = d(A, CC') = \sqrt{3}$, $EF = d(C, BB') = 2$.

Vì tam giác AEF vuông tại A và $S_{AEF} = \dfrac{1}{2} AE \cdot AF = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh $B'C'$, BC và $H = MN \cap EF \Rightarrow AH \perp MN$ (do $MN \parallel AA'$) và H là trung điểm $EF \Rightarrow AH = \dfrac{EF}{2} = 1$.

Ta có $A'G' = \dfrac{4}{3} \Rightarrow A'M = \dfrac{3}{2} A'G' = 2$.

Hình bình hành $AA'MN$ có $S_{AA'MN} = AG' \cdot A'M = AH \cdot MN \Leftrightarrow 2\sqrt{AA'^2 - \left(\dfrac{4}{3}\right)^2} = 1 \cdot AA' \Leftrightarrow$ $AA' = \dfrac{8\sqrt{3}}{9}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{8\sqrt{3}}{9} = \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng $\dfrac{3}{4}$. Khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB', CC' lần lượt bằng 1; $\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Côsin góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(ACC'A')$ bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{\sqrt{13}}{4}$.

Lời giải.

Ta có $V_{A'.ABC} = \dfrac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{4}$ và $S_{ABA'} = \dfrac{1}{2} S_{ABB'A'} = \dfrac{1}{2} BB' \cdot d(A, BB') = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$.

Và $S_{ACA'} = \dfrac{1}{2} S_{ACC'A'} = \dfrac{1}{2} \cdot CC' \cdot d(A, CC') = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $\sin((ABB'A'), (ACC'A')) = \dfrac{3AA' \cdot V_{A'.ABC}}{2 \cdot S_{ABA'} \cdot S_{ACA'}} = \dfrac{3 \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{4}}{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

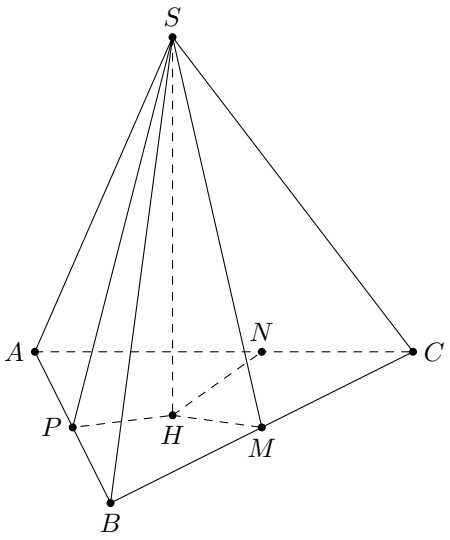
Suy ra $\cos((ABB'A'), (ACC'A')) = \sqrt{1 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 1, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$, khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCA) bằng $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$, khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng $\dfrac{\sqrt{30}}{20}$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

(A) $\dfrac{1}{36}$. (B) $\dfrac{1}{48}$. (C) $\dfrac{1}{12}$. (D) $\dfrac{1}{24}$.

Lời giải.



Diện tích mặt đáy $S = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$; diện tích các mặt bên (SBC); (SCA), (SAB) kí hiệu lần lượt là S_1, S_2, S_3.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) và M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên BC, CA, AB.

Khi đó các góc $\widehat{SMH}$, $\widehat{SNH}$, $\widehat{SPH}$ lần lượt là góc giữa các mặt bên (SBC), (SCA), (SAB) và đáy (ABC).

Theo định lý diện tích hình chiếu vuông góc, ta có

$$S_1 = \frac{S_{HBC}}{\cos\widehat{SMC}} = \frac{\dfrac{1}{2}\cdot BC\cdot HM}{\dfrac{HM}{SM}} = \frac{1}{2}BC\cdot HM = \frac{1}{2}SM = \frac{1}{2}\sqrt{h^2+HM^2}.$$

Tương tự có $S_2 = \dfrac{1}{2}\sqrt{h^2+HN^2}$, $S_3 = \dfrac{1}{2}\sqrt{h^2+HP^2}$.

Mặt khác $3V = S\cdot d(S,(ABC)) = S_1\cdot d(A,(SBC)) = S_2\cdot d(B,(SCA)) = S_3\cdot d(C,(SAB))$.

Suy ra $\dfrac{\sqrt{3}}{4}h = \dfrac{\sqrt{6}}{8}\sqrt{h^2+HM^2} = \dfrac{\sqrt{15}}{20}\sqrt{h^2+HN^2} = \dfrac{\sqrt{30}}{40}\sqrt{h^2+HP^2}$. (1)

Mặt khác $HM+HN+HP = \dfrac{2S_{HBC}}{BC}+\dfrac{2S_{HCA}}{CA}+\dfrac{2S_{HAB}}{AB} = 2(S_{HBC}+S_{HCA}+S_{HAB}) = 2S = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (2)

Kết hợp (1), (2) suy ra $h = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$ và $V = \dfrac{1}{3}\cdot S\cdot h = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{12} = \dfrac{1}{48}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 50. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân tại A, $AB = AC = 1$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Các mặt bên $(ABB'A')$, $(ACC'A')$ lần lượt tạo với đáy các góc 45°, 60° và $AA' = 1$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

(A) $\dfrac{3\sqrt{31}}{124}$. (B) $\dfrac{\sqrt{93}}{372}$. (C) $\dfrac{\sqrt{31}}{124}$. (D) $\dfrac{\sqrt{93}}{124}$.

Lời giải.

Diện tích đáy $S = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin 30^\circ = \dfrac{1}{4}$.

Chiều cao khối lăng trụ xác định bởi

$$\cos a = \frac{\sqrt{d^2 - \dfrac{h^2}{\sin^2\alpha}} \cdot \sqrt{\mathrm{d}^2 - \dfrac{h^2}{\sin^2\beta}} - h^2 \cdot \cot\alpha \cdot \cot\beta}{\mathrm{d}^2 - h^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{1-2h^2} \cdot \sqrt{1 - \dfrac{4}{3}h^2} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}h^2}{1 - h^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad h = \sqrt{\frac{3}{31}}$$

Vậy $V = S \cdot h = \dfrac{\sqrt{93}}{124}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 51. Cho khối chóp $S.ABC$ có $AB = 5\,(cm)$, $AC = 7\,(cm)$, $SA = 3\,(cm)$, $\widehat{CAB} = 30^\circ$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB), (SAC) và đáy lần lượt là 45°, 30°. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

(A) $V = \dfrac{35\sqrt{29}}{116}$. (B) $V = \dfrac{7\sqrt{5}}{4}$. (C) $V = \dfrac{21\sqrt{5}}{4}$. (D) $V = \dfrac{105\sqrt{5}}{116}$.

Lời giải.

Diện tích đáy $S = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin 30^\circ = \dfrac{35}{4}$.

Chiều cao khối chóp xác định bởi

$$\cos a = \frac{\sqrt{\mathrm{d}^2 - \dfrac{h^2}{\sin^2\alpha}} \cdot \sqrt{\mathrm{d}^2 - \dfrac{h^2}{\sin^2\beta}} - h^2 \cdot \cot\alpha \cdot \cot\beta}{\mathrm{d}^2 - h^2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{9-2h^2} \cdot \sqrt{9-4h^2} - \sqrt{3}h^2}{9 - h^2} \Leftrightarrow$$

$h = \dfrac{3}{\sqrt{29}}$.

Vậy $V = \dfrac{1}{3} \cdot S \cdot h = \dfrac{35\sqrt{29}}{116}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 52. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{7}$. Hai mặt bên (SAB), (SAC) lần lượt tạo với đáy góc 45°, 60° và $SA = 1$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

(A) $V = \dfrac{1}{2}$. (B) $V = \dfrac{7}{9}$. (C) $V = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (D) $V = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

Lời giải.

Diện tích đáy $S = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$.
Chiều cao khối chóp xác định bởi
$\cos a = \dfrac{\sqrt{\mathrm{d}^2 - \dfrac{h^2}{\sin^2\alpha}} \cdot \sqrt{\mathrm{d}^2 - \dfrac{h^2}{\sin^2\beta}} - h^2 \cdot \cot\alpha \cdot \cot\beta}{\mathrm{d}^2 - h^2} \Leftrightarrow 0 = \dfrac{\sqrt{1-2h^2} \cdot \sqrt{1 - \dfrac{4}{3}h^2} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}h^2}{1-h^2} \Leftrightarrow h = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.
Vậy $V = \dfrac{1}{3} \cdot S \cdot h = \dfrac{1}{2}$
Chọn đáp án (A) □

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = 1$ và $AC = \sqrt{3}$. Các mặt bên (SBC), (SAC), (SAB) lần lượt tạo với đáy các góc $30°$, $45°$ và $60°$. Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

(A) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{12}$. (B) $\dfrac{3\sqrt{3}}{20}$. (C) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{20}$.

Lời giải.

Có $V = \dfrac{2S^2}{3\left(a \cdot \cot\alpha + b \cdot \cot\beta + c \cdot \cot\gamma\right)} = \dfrac{2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{3\left(2 \cdot \cot 30° + \sqrt{3} \cdot \cot 45° + 1 \cdot \cot 60°\right)} = \dfrac{\sqrt{3}}{20}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$, đáy là tam giác vuông tại A và $AB = 1$, $AC = \sqrt{3}$. Các mặt bên (SAC), (SAB) lần lượt tạo với đáy các góc $45°$, $60°$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC. Côsin góc giữa mặt (SBC) và đáy bằng

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (C) $\dfrac{1}{4}$. (D) $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} V &= \frac{2S^2}{3\left(a \cdot \cot\alpha + b.\cot\beta + c \cdot \cot\gamma\right)} \\ &= \frac{2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{3\left(2 \cdot \cot\alpha + \sqrt{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Biến đổi tương đương, ta thu được

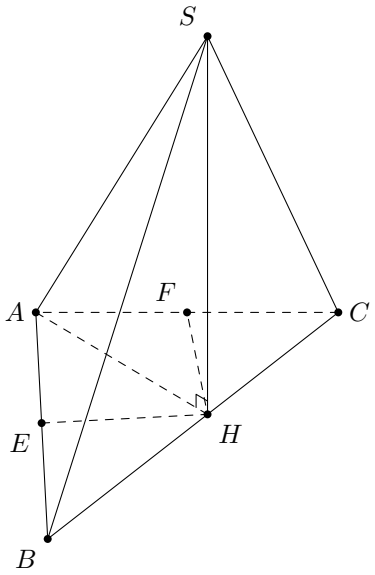
$$\cot\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 55. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB = a$, $AC = 2a$. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với đáy, hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng tạo với mặt phẳng đáy góc $60°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$ theo a.

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (B) $V = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. (D) $V = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải.



Cách 1.

Kẻ $SH \perp BC$ với $H \in BC$, ta có $SH \perp (ABC)$. Kẻ $HE \perp AB, HF \perp AC$ với $E \in AB$ và $F \in AC$. Ta có $\widehat{SEH} = \widehat{SFH} = 60^0$ và

$$HE = SH \cdot \cot 60° = h \cdot \cot 60°,\ HF = SH \cdot \cot 60° = h \cdot \cot 60°.$$

Diện tích đáy bằng $S = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = a^2$.

Mặt khác

$$S = S_{HAB} + S_{HAC} = \frac{1}{2}(AB \cdot HE + AC \cdot HF) = \frac{1}{2}(a \cdot h \cdot \cot 60° + 2a \cdot h \cdot \cot 60°).$$

Suy ra

$$h = \frac{2S}{\dfrac{a}{\sqrt{3}} + \dfrac{2a}{\sqrt{3}}} = \frac{2a}{\sqrt{3}} \Rightarrow V = \frac{S \cdot h}{3} = \frac{2\sqrt{3}a^3}{9}.$$

Cách 2.

Ta có $V = \dfrac{2S^2}{3(a \cdot \cot\alpha + b \cdot \cot\beta + c \cdot \cot\gamma)} = \dfrac{2a^4}{3\left(a\sqrt{5} \cdot 0 + 2 \cdot a \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} + a \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \dfrac{2\sqrt{3}a^3}{9}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 56. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 120°$. Các mặt bên (SAB), (SBC), (SCD), (SDA) lần lượt tạo với đáy các góc $90°$, $30°$, $45°$, $60°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$

(A) $V=\dfrac{\left(4\sqrt{3}-3\right)a^3}{26}$.
(B) $V=\dfrac{\left(4\sqrt{3}-3\right)a^3}{104}$.
(C) $V=\dfrac{\left(12\sqrt{3}-9\right)a^3}{26}$.
(D) $V=\dfrac{\left(12\sqrt{3}-9\right)a^3}{104}$.

Lời giải.

Ta có $V=\dfrac{2S^2}{3\left(a\cdot\cot\alpha+b\cdot\cot\beta+c\cdot\cot\gamma+d\cdot\cot\delta\right)}=\dfrac{2\left(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)^2}{3\left(a\cdot 0+a\cdot\sqrt{3}+a\cdot 1+a\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}=\dfrac{\left(4\sqrt{3}-3\right)a^3}{26}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 57. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=1, AD=2, AA'=3$. Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua C' và cắt các tia AB, AD, AA' lần lượt tại M, N, P. Khối tứ diện $AMNP$ có thể tích nhỏ nhất bằng

(A) 27. (B) 14. (C) 11. (D) 36.

Lời giải.

Khối tứ diện vuông $AMNP$ có $V_{AMNP}=\dfrac{1}{6}\cdot AM\cdot AP$.
Theo quy tắc hình hộp, có

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC'}=\frac{AB}{AM}\cdot\overrightarrow{AM}+\frac{AD}{AN}\cdot\overrightarrow{AN}+\frac{AA'}{AP}\overrightarrow{AP}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC'}=\frac{1}{AM}\overrightarrow{AM}+\frac{2}{AN}\overrightarrow{AN}+\frac{3}{AP}\overrightarrow{AP}.$$

Vì bốn điểm M, N, P, C' đồng phẳng nên $\dfrac{1}{AM}+\dfrac{2}{AN}+\dfrac{3}{AP}=1$.
Vì vậy theo bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$1=\frac{1}{AM}+\frac{2}{AN}+\frac{3}{AP}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{AM}\cdot\frac{1}{AN}\cdot\frac{1}{AP}}\Rightarrow AM\cdot AN\cdot AP\geq 6\cdot 27\Rightarrow V_{AMNP}\geq 27.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 58. Cho hai đường thẳng chéo nhau Ax, By và hợp với nhau một góc bằng 60^0. Biết $AB=a$ là đoạn vuông góc chung. Lấy điểm C trên By sao cho $BC=a$ và gọi D là hình chiếu vuông góc của C lên Ax. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (B) $\dfrac{a^3}{12}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Ta có

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}AD\cdot BC\cdot \mathrm{d}\left(AD,BC\right)\cdot\sin\left(AD,BC\right)=\frac{1}{6}\cdot AD\cdot BC\cdot AB\cdot\sin 60^\circ=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}AD.$$

Ta đi tính độ dài đoạn thẳng AD dựa trên giả thiết $CD \perp AD$, $(AD, BC) = 60^\circ$, $AB \perp AD$, $AB \perp BC$.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) &= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{AD^2 + AC^2 - CD^2}{2} - \frac{AD^2 + AB^2 - BD^2}{2} = \frac{AC^2 + BD^2 - CD^2 - AB^2}{2} \\ &= \frac{(AB^2 + BC^2) + (AB^2 + AD^2) - (AC^2 - AD^2) - AB^2}{2} \\ &= \frac{AB^2 + 2AD^2 + BC^2 - AC^2}{2} = AD^2\end{aligned}$$

và

$$\left|\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}\right| = \left|AD \cdot BC \cdot \cos\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}\right)\right| = \frac{a \cdot AD}{2}.$$

Vậy $\dfrac{a \cdot AD}{2} = AD^2 \Leftrightarrow AD = \dfrac{a}{2}$.

Do đó $V_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Chọn đáp án (C) □

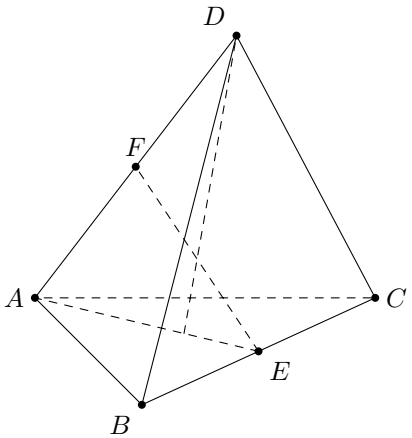
Câu 59. Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = BD = CD = 1$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất thì khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và BC bằng

(A) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. (B) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (C) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. (D) $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của cạnh BC, AD. Ta có

$$\begin{cases} BC \perp AE \\ BC \perp DE \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADE) \Rightarrow \begin{cases} BC \perp EF, \\ BC \perp AD. \end{cases}$$



Mặt khác

$$\triangle ABC = \triangle DBC \Rightarrow AE = DE \Rightarrow EF \perp AD \Rightarrow EF = d(AD, BC).$$

Vậy $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}AD \cdot BC \cdot \mathrm{d}(AD, BC) \cdot \sin(AD, BC) = \dfrac{1}{6}AD \cdot BC \cdot FE$.

Ta có

$$FE = \sqrt{AE^2 - \frac{AD^2}{4}} = \sqrt{\left(AB^2 - \frac{BC^2}{4}\right) - \frac{AD^2}{4}} = \sqrt{1 - \frac{BC^2}{4} - \frac{AD^2}{4}}.$$

Vậy

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}AD\cdot BC\cdot\sqrt{1-\frac{BC^2}{4}-\frac{AD^2}{4}} = \frac{1}{12}\sqrt{AD^2\cdot BC^2\cdot(4-AD^2-BC^2)}$$
$$\le \frac{1}{12}\sqrt{\left(\frac{AD^2+BC^2+4-AD^2-BC^2}{3}\right)^3}=\frac{2\sqrt{3}}{27}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow AD^2=BC^2=4-AD^2-BC^2\Leftrightarrow AD=BC=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow FE=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 60. Trong không gian cho ba tia $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$, $\mathrm{O}z$ đôi một vuông góc và các điểm A, B, C không trùng với điểm O lần lượt thay đổi trên các tia $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$, $\mathrm{O}z$ và luôn thỏa mãn điều kiện: Tỉ số diện tích tam giác ABC và thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng $\dfrac{3}{2}$. Khối tứ diện $OABC$ có thể tích nhỏ nhất bằng

(A) $\sqrt{6}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (C) $4\sqrt{3}$. (D) $\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\mathrm{d}\left(O,(ABC)\right)=\frac{3V_{OABC}}{S_{ABC}}=3\cdot\frac{2}{3}=2.$$

Vậy $\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{\mathrm{d}^2\left(O,(ABC)\right)}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{OA^2}\cdot\dfrac{1}{OB^2}\cdot\dfrac{1}{OC^2}}$.

Suy ra $V_{OABC}=\dfrac{1}{6}OA\cdot OB\cdot OC\ge\dfrac{\sqrt{12^3}}{6}=4\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (C) □

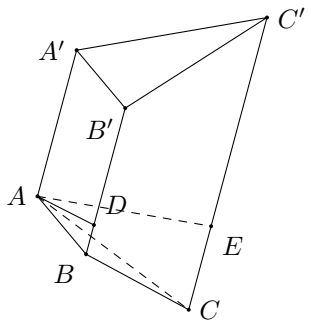
Câu 61. Cho khối đa diện $ABC.A'B'C'$ có $AA'\parallel BB'\parallel CC'$. Biết khoảng cách từ điểm A đến BB' bằng 1, khoảng cách từ điểm A đến CC' bằng $\sqrt{3}$; khoảng cách giữa hai đường thẳng BB', CC' bằng 2 và $AA'=1$, $BB'=2$, $CC'=3$. Thể tích của khối đa diện $ABC.A'B'C'$ bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Hạ $AD\perp BB'$ và $AE\perp CC'$ suy ra $(ADE)\perp AA'\parallel BB'\parallel CC'$ và $AD=1$,$AE=\sqrt{3}$, $DE=2$. Ta có

$$S_{ADE}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=S_{ADE}\cdot\frac{AA'+BB'+CC'}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1+2+3}{3}=\sqrt{3}.$$

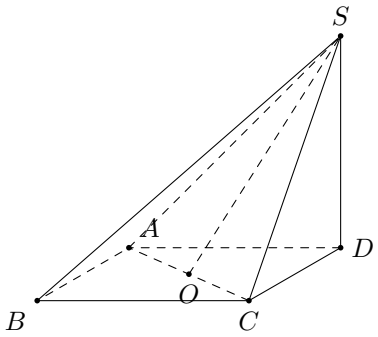


Chọn đáp án (C) □

Câu 62. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = a$, $AC = \sqrt{3}a$, $SB > 2a$ và $\widehat{ABC} = \widehat{BAS} = \widehat{BCS} = 90^0$, sin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng $\dfrac{\sqrt{11}}{11}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

(A) $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{6}$. (B) $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{9}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{9}$.

Lời giải.



Gọi D là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC). Ta có

$$\begin{cases} BA \perp SA \\ BA \perp SD \end{cases} \Rightarrow BA \perp (SAD) \Rightarrow BA \perp AD$$

và

$$\begin{cases} BC \perp CS \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SCD) \Rightarrow BC \perp CD.$$

Vậy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O và

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SD = \frac{1}{6} \cdot BA \cdot BC \cdot SD = \frac{\sqrt{2}a^2}{6}SD.$$

Đặt $SD = x$ ta có $\mathrm{d}\,(B,(SAC)) = \mathrm{d}\,(D,(SAC))$ và tứ diện $DSAC$ vuông tại D nên

$$\frac{1}{\mathrm{d}^2\,(D,(SAC))} = \frac{1}{DC^2} + \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DS^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow \mathrm{d}\,(D,(SAC)) = \frac{\sqrt{2}xa}{\sqrt{3x^2+2a^2}}$$

và

$$\sin\,(SB,(SAC)) = \frac{\mathrm{d}\,(B,(SAC))}{SB} = \frac{\mathrm{d}\,(D,(SAC))}{SB} = \frac{\dfrac{\sqrt{2}xa}{\sqrt{3x^2+2a^2}}}{\sqrt{x^2+3a^2}} = \frac{\sqrt{11}}{11} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}a \ \ (x > a)\,.$$

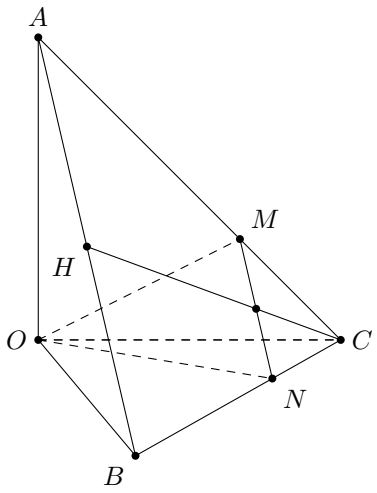
Do đó $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 63. Cho khối tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = \sqrt{2}$, $OC = 1$. Hai điểm M, N lần lượt di động trên các cạnh AC, BC sao cho hai mặt phẳng (OMN), (ABC) vuông góc với nhau. Khối đa diện $ABOMN$ có thể tích lớn nhất bằng

(A) $\dfrac{1}{4}$. (B) $\dfrac{1}{6}$. (C) $\dfrac{2}{9}$. (D) $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.



Kẻ $OH \perp AB$, $OK \perp CH$ suy ra

$$OK \perp (ABC) \Rightarrow (ABC) \perp (OMN) \Rightarrow OK \subset (OMN) \Rightarrow K \in MN.$$

Ta có

$$\begin{cases} OA = OB = \sqrt{2} \\ OC = OH = 1 \end{cases} \Rightarrow H,\ K \text{ lần lượt là trung điểm của } AB,\ CH.$$

Ta có

$$2\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{CK} = \frac{CA}{CM}\overrightarrow{CM} + \frac{CB}{CN}\overrightarrow{CN}.$$

Do M, K, N thẳng hàng nên $\dfrac{CA}{CM} + \dfrac{CB}{CN} = 4$.

Vậy

$$4 = \frac{CA}{CM} + \frac{CB}{CN} \geq 2\sqrt{\frac{CA}{CM}.\frac{CB}{CN}} \Leftrightarrow \frac{CA}{CM}.\frac{CB}{CN} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{CM}{CA}.\frac{CN}{CB} \geq \frac{1}{4}.$$

Vì vậy

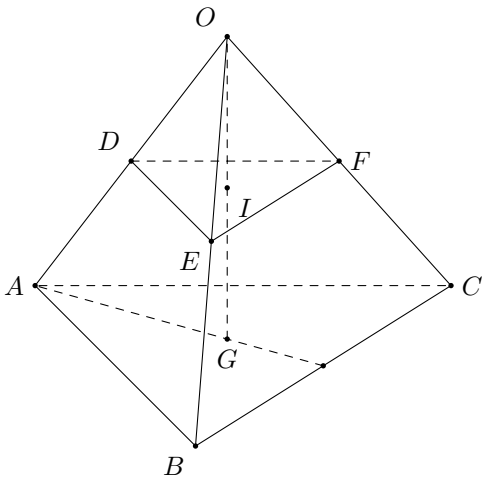
$$\frac{V_{OAMNB}}{V_{OABC}} = \frac{S_{AMNB}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{S_{CMN}}{S_{CAB}} = 1 - \frac{CM}{CA}.\frac{CN}{CB} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow V_{OAMNB} \leq \frac{3}{4}V_{OABC} = \frac{1}{4}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 64. Cho khối tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = 1$, $OB = 2$, $OC = 3$. Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$, mặt phẳng (α) qua trung điểm I của OG cắt các tia OA, OB, OC lần lượt tại D, E, F .Thể tích khối tứ diện $ODEF$có giá trị lớn nhất bằng

(A) $\dfrac{2}{9}$. (B) $\dfrac{1}{6}$. (C) $\dfrac{4}{3}$. (D) $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.



Ta có

$$3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\Leftrightarrow 6\overrightarrow{OI}=\frac{OA}{OD}\overrightarrow{OD}+\frac{OB}{OE}\overrightarrow{OE}+\frac{OC}{OF}\overrightarrow{OF}\Leftrightarrow 6\overrightarrow{OI}=\frac{1}{OD}\overrightarrow{OD}+\frac{2}{OE}\overrightarrow{OE}+\frac{3}{OF}\overrightarrow{OF}.$$

Do D,E,F,I đồng phẳng nên ta có $\dfrac{1}{OD}+\dfrac{2}{OE}+\dfrac{3}{OF}=6$.

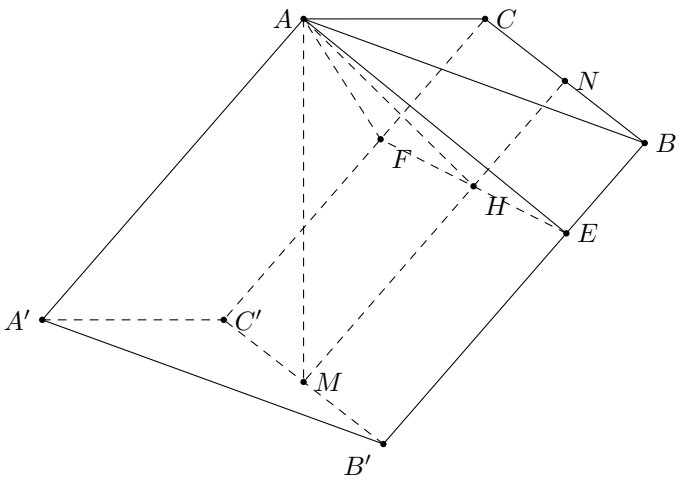
Vậy $6=\dfrac{1}{OD}+\dfrac{2}{OE}+\dfrac{3}{OF}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{OD}\cdot\dfrac{2}{OE}\cdot\dfrac{3}{OF}}\Rightarrow OD\cdot OE\cdot OF\leq\dfrac{4}{3}\Rightarrow V_{ODEF}\leq\dfrac{2}{9}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 65. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Khoảng cách từ điểm C đến BB' bằng $\sqrt{5}$, khoảng cách từ điểm A đến BB',CC' lần lượt là 1 và 2; hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M=\sqrt{5}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. (B) $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$. (C) $\sqrt{5}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải.



Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BB', CC'.

Ta có $AE=1$, $AF=2$ và $AA'\parallel BB'\parallel CC'$ nên $AE\perp AA'$, $AF\perp AA'\Rightarrow (EFA)\perp AA'\Rightarrow EF\perp AA'$.

Do đó $FE=d(C,BB')=\sqrt{5}$.

Gọi N là trung điểm của BC, $H=FE\cap MN\Rightarrow AH\perp MN\,(MN\parallel AA')$.

Ta có H là trung điểm của FE và $AE^2+AF^2=EF^2=5$ nên $AH=\dfrac{FE}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
Tam giác vuông AMN có $AN=A'M$ và

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AN^2}\Rightarrow\frac{4}{5}=\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{5}\Leftrightarrow AM=\frac{\sqrt{15}}{3}\Rightarrow AA'=\sqrt{5+\frac{15}{9}}=\frac{2\sqrt{15}}{3}.$$

Mặt khác, do $\begin{cases}AM\perp(A'B'C')\\AA'\perp(AEF)\end{cases}$ nên $((A'B'C'),(AEF))=(AM,AA')=\widehat{MAA'}=60^0$.
Tam giác AEF là hình chiếu vuông góc của tam giác $A'B'C'$ lên mặt phẳng (AEF). Vì vậy theo định lý hình chiếu ta có

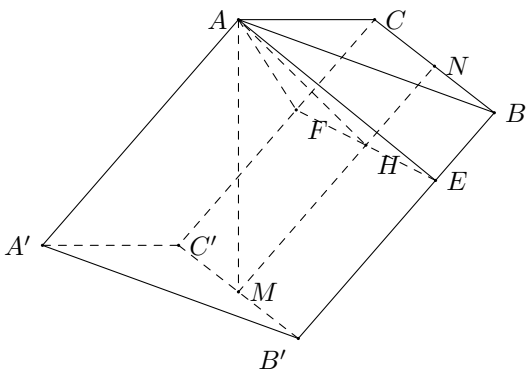
$$S_{A'B'C'}=\frac{S_{AEF}}{\cos\widehat{MAA'}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot1\cdot2}{\frac{\frac{\sqrt{15}}{3}}{\frac{2\sqrt{15}}{3}}}=2.$$

Suy ra $V_{ABC.A'B'C'}=S_{A'B'C'}\cdot AM=2\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{3}=\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 66. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB',CC' lần lượt là 1 và $\sqrt{3}$; góc giữa hai mặt bên của lăng trụ chung cạnh AA' bằng 90^0. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $AM'=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

(A) 2. (B) 1. (C) $\sqrt{3}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Gọi E,F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BB',CC'.
Ta có $AE=1$, $AF=2$ và $AA'\parallel BB'\parallel CC'$ nên $AE\perp AA'$, $AF\perp AA'\Rightarrow(EFA)\perp AA'$.
Do đó $\widehat{EAF}=((ABB'A'),(ACC'A'))=90^0\Rightarrow S_{AEF}=\dfrac{1}{2}AE\cdot AF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Gọi N là trung điểm của BC, $H=FE\cap MN\Rightarrow AH\perp MN\,(MN\parallel AA')$.
Ta có H là trung điểm của FE và $AH=\dfrac{EF}{2}=\dfrac{\sqrt{AE^2+AF^2}}{2}=1$.

Tam giác vuông AMN có $AN = A'M = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ và

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} \Rightarrow AM = 2 \Rightarrow AA' = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

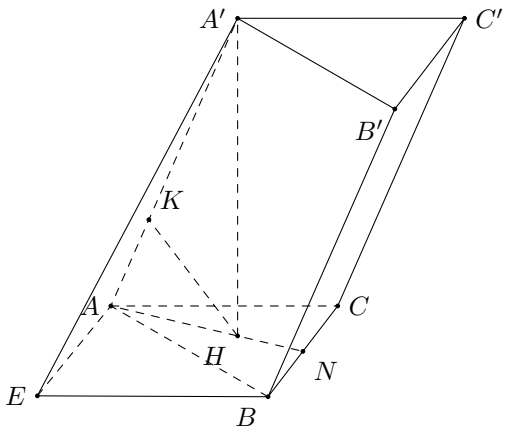
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{AEF} \cdot AA' = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{4\sqrt{3}}{3} = 2.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 67. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'.ABC$ là hình chóp tam giác đều, $AB = a$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AA' và BC là $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Hãy tính thể tích của khối chóp $A'.BB'C'C$.

(A) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{18}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{81}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{31}}{8}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu của A' lên $(ABC) \Rightarrow H$ là trọng tâm tam giác ABC.

N là trung điểm BC, dựng hình bình hành $ACBE$.

Ta có

$$\mathrm{d}\,(AA'; BC) = \mathrm{d}\,(BC; (A'AE)) = \mathrm{d}\,(N; (A'AE)) = \frac{3}{2}d\,(H; (A'AE)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Suy ra $\mathrm{d}\,(H; (A'AE)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Kẻ $HK \perp A'A$, ta chứng minh được $HK \perp (A'AE)$ nên $\mathrm{d}\,(H; A'AE) = HK$.

Xét $\triangle A'AH$ có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HA^2} + \dfrac{1}{HA'^2} \Rightarrow A'H = \dfrac{a}{3}$.

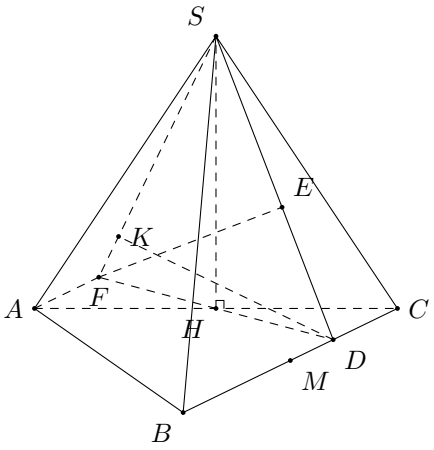
Do đó $V_{A'.BB'C'C} = \dfrac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{2}{3} \cdot A'H \cdot S_{ABC} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 68. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$, khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC. Thể tích khối chóp đã cho bằng

(A) $\dfrac{a^3}{4}$. (B) $\dfrac{a^3}{8}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm BC, D là hình chiếu của S lên BC. Dựng hình chữ nhật $AMDF$.

Khi đó, ta có

$$\begin{cases} DF \perp BC \\ SD \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SDF).$$

Từ D, F lần lượt kẻ $DK \perp SF$ với $(K \in SF)$, $FE \perp SD$ với $(E \in SD)$.

Ta có $BC \perp (SDF) \Rightarrow BC \perp EF$.

Mặt khác $EF \perp SD \Rightarrow \mathrm{d}(A;(SBC)) = \mathrm{d}(E;(SBC)) = EF$.

Tương tự, ta có $\mathrm{d}(SA;BC) = \mathrm{d}(D;(SAF)) = DK$ do $\begin{cases} AF \perp (SDF) \\ DK \perp SF \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} DK \perp SF \\ DK \perp AF \end{cases}$.

Theo giả thiết, ta có $EF = DK = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. Do đó $\triangle SDF$ cân tại S.

Khi đó hình chiếu của S lên (ABC) là trung điểm H của DF hay trung điểm AC.

Xét hai tam giác đồng dạng $\triangle SDF$ và $\triangle FDE$ có

$$\frac{SH}{EF} = \frac{DH}{DE} = \frac{\frac{1}{2}AM}{\sqrt{DF^2 - EF^2}}$$

Suy ra $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

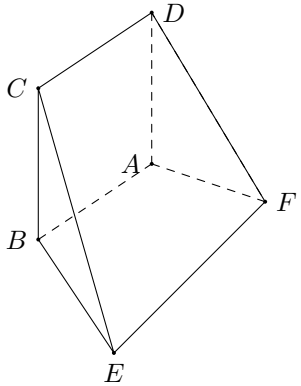
Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SH = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3}{8}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 69.

Cho hình chữ nhật $ABCD$ và hình thang cân $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Biết $AB = a$, $BC = BE = a\sqrt{2}$, $AB \parallel EF$ và $EF = 3a$. Thể tích khối đa diện $ABCDEF$ bằng

(A) $\dfrac{5a^3\sqrt{2}}{6}$. (B) $a^3\sqrt{2}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. (D) $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$.

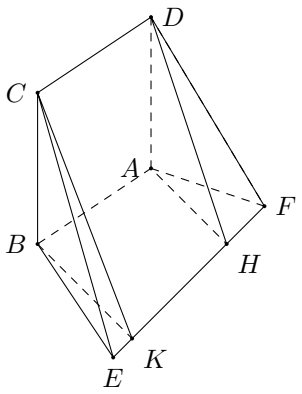


Lời giải.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B lên EF.

Khi đó $FH = EK = a \Rightarrow AH = BK = a$.

Ta có



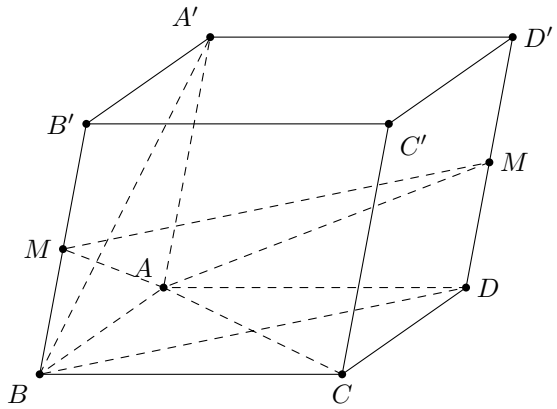
$$\begin{aligned} V_{ABCDEF} &= V_{D.AHF} + V_{C.CEK} + V_{DAH.CAK} \\ &= \frac{1}{3} \cdot DA \cdot S_{\triangle AFH} + \frac{1}{3} BC \cdot S_{\triangle CEK} + AB \cdot S_{\triangle BCK} \\ &= \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a + \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a + a \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2} \\ &= \frac{5a^3\sqrt{2}}{6}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 70. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'B$ vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$; góc giữa AA' với $(ABCD)$ bằng $45°$. Khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB'; DD' cùng bằng 1. Góc của mặt phẳng $(BB'C'C)$ và mặt phẳng $(C'CDD')$ bằng $60°$. Thể tích khối hộp đã cho bằng

(A) $2\sqrt{3}$. (B) 2 . (C) $\sqrt{3}$. (D) $3\sqrt{3}$.

Lời giải.



Hạ $AM \perp BB'$ và $AN \perp DD' \Rightarrow (AMN) \perp AA'$.

Do đó $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2V_{ABD.A'B'D'} = 2S_{AMN} \cdot AA'$.

Vì $\begin{cases} (BB'C'C) \parallel (ADD'A') \\ (C'CDD') \parallel (ABB'A') \end{cases}$ nên

$$[(ABB'A'), (ADD'A')] = [(BB'C'C), (C'CDD')] = 60°.$$

Khi đó, $\widehat{MAN} = 60°$ hoặc $\widehat{MAN} = 120°$.

Suy ra $S_{AMN} = \frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Hình bình hành $ABB'A'$ có $S_{ABB'A'} = AM \cdot BB' = A'B \cdot AB \Leftrightarrow 1 \cdot AA' = \frac{AA'}{\sqrt{2}} \cdot \frac{AA'}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow AA' = 2$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \sqrt{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Dạng 7. Tỉ số thể tích

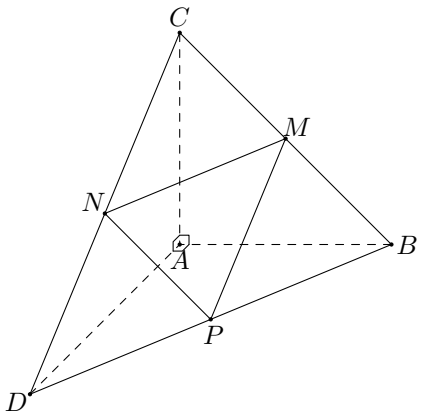
Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc. Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BC, CD, BD. Cho biết $AB = 4a$, $AC = 6a$, $AD = 7a$. Tính thể tích V của khối tứ diện $AMNP$.

(A) $V = 7a^3$. (B) $V = 28a^3$. (C) $V = 14a^3$. (D) $V = 21a^3$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} V_{A.MNP} &= \frac{1}{3} \cdot S_{MNP} \cdot \mathrm{d}(A,(MNP)) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot S_{BCD} \cdot \mathrm{d}(A,(MNP)) \\ &= \frac{1}{4} V_{ABCD} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot AB \cdot AC \cdot AD \\ &= 7a^3. \end{aligned}$$



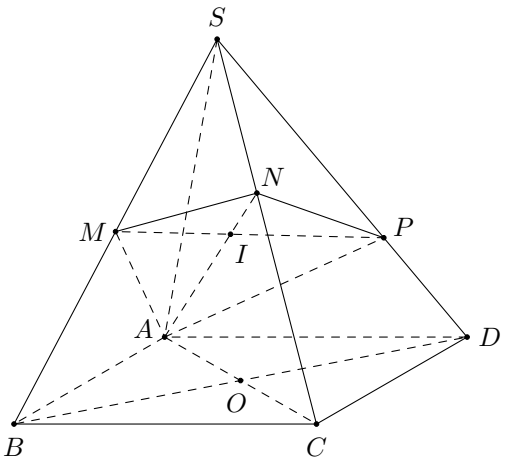
Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V. Gọi M là trung điểm của SB. P là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SP = 2DP$. Mặt phẳng (AMP) cắt cạnh SC tại N. Tính thể tích của khối đa diện $ABCDMNP$ theo V.

(A) $V_{ABCDMNP} = \frac{23}{30}V$. (B) $V_{ABCDMNP} = \frac{19}{30}V$.
(C) $V_{ABCDMNP} = \frac{2}{5}V$. (D) $V_{ABCDMNP} = \frac{7}{30}V$.

Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD, I = MP \cap SO, N = AI \cap SC$.



Khi đó $V_{ABCDMNP} = V_{S.ABCD} - V_{S.AMNP}$.

Đặt $\begin{cases} a = \dfrac{SA}{SA} = 1 \\ b = \dfrac{SB}{SM} = 2 \\ c = \dfrac{SC}{SN} \\ d = \dfrac{SD}{SP} = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Ta có $a + c = b + d \Rightarrow c = \dfrac{5}{2}$.

Suy ra $\dfrac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{a+b+c+d}{4abcd} = \dfrac{1+2+\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}}{4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{3}{2}} = \dfrac{7}{30}$.

Do đó $V_{ABCDMNP} = V_{S.ABCD} - V_{S.AMNP} = V - \dfrac{7}{30}V = \dfrac{23}{30}V$.

Chọn đáp án (A) □

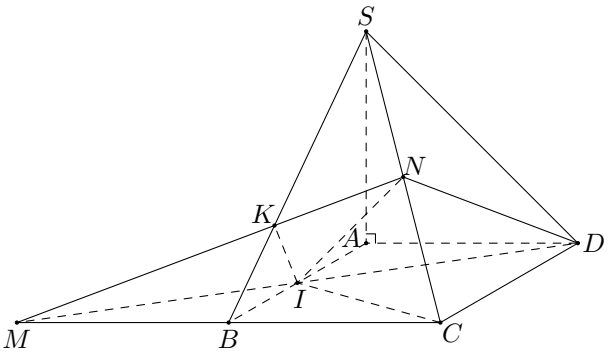
Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 45°. Gọi M là điểm đối xứng của C qua B và N là trung điểm của SC. Mặt phẳng (MND) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh S có thể tích là V_1, khối còn lại có thể tích là V_2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

(A) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{5}$. (B) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{5}{3}$. (C) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{12}{7}$. (D) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{7}{5}$.

Lời giải.

Trong tam giác SMC, SB và MN là hai trung tuyến cắt nhau tại trọng tâm $K \Rightarrow \dfrac{SK}{SB} = \dfrac{2}{3}$.

Mà BI là đường trung bình của tam giác $MCD \Rightarrow I$ là trung điểm AB.



Ta có $V_1 = V_{S.AID} + V_{S.IKN} + V_{S.IND}$.

Đặt: $V_{S.ABCD} = V$.

Suy ra $\begin{cases} V_{S.AID} = \dfrac{1}{4} \cdot V \\ V_{S.IKN} = \dfrac{SK}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SC} \cdot V_{S.IBC} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4}V = \dfrac{1}{12}V \\ V_{S.IND} = \dfrac{SN}{SC} \cdot V_{S.ICD} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2}V = \dfrac{1}{4} \cdot V. \end{cases}$

Do đó $V_1 = \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{4}\right) \cdot V = \dfrac{7}{12} \cdot V \Rightarrow V_2 = \dfrac{5}{12} \cdot V$.

Vậy tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{7}{5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đường thẳng đi qua trọng tâm của tam giác ABC và song song với BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D, E. Mặt phẳng $(A'DE)$ chia khối lăng trụ thành hai phần, phần khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích là V_1, phần còn lại có thể tích là V_2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

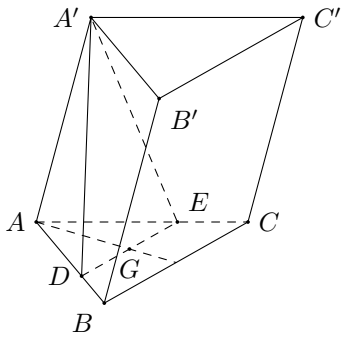
A $\dfrac{2}{3}$. **B** $\dfrac{4}{23}$. **C** $\dfrac{4}{9}$. **D** $\dfrac{4}{27}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \dfrac{V_{A'.ADE}}{V_{A'.ABC}} = \dfrac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \dfrac{AD}{AB}\cdot\dfrac{AE}{AC} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \\ V_{A'.ABC} = \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}. \end{cases}$

$\Rightarrow V_{A'.ADE} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2\cdot\dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{4}{27}V_{ABC.A'B'C'}$.

Do đó $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\dfrac{4}{27}}{1-\dfrac{4}{27}} = \dfrac{4}{23}$.



Chọn đáp án B □

Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V. Xét điểm P thuộc cạnh AB, điểm Q thuộc cạnh BC và điểm R thuộc cạnh BD sao cho $\dfrac{PA}{PB} = 2$, $\dfrac{QB}{QC} = 3$, $\dfrac{RB}{RD} = 4$. Tính thể tích của khối tứ diện $BPQR$.

A $\dfrac{V}{5}$. **B** $\dfrac{V}{4}$. **C** $\dfrac{V}{3}$. **D** $\dfrac{V}{6}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{V_{B.PQR}}{V_{B.ACD}} = \dfrac{BP}{BA}\cdot\dfrac{BQ}{BC}\cdot\dfrac{BR}{BD} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{4}{5} \Rightarrow V_{B.PQR} = \dfrac{1}{5}V$.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các điểm A', C' thỏa mãn $\overrightarrow{SA'} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC'} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{SC}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $A'C'$ cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D' và đặt $k = \dfrac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị nhỏ nhất của k là

A $\dfrac{1}{60}$. **B** $\dfrac{1}{30}$. **C** $\dfrac{4}{15}$. **D** $\dfrac{\sqrt{15}}{16}$.

Lời giải.

Đặt $\dfrac{SB}{SB'}=x$, $\dfrac{SD}{SD'}=y$. Mà $\dfrac{SB}{SB'}+\dfrac{SD}{SD'}=\dfrac{SA}{SA'}+\dfrac{SC}{SC'}\Rightarrow x+y=8$.

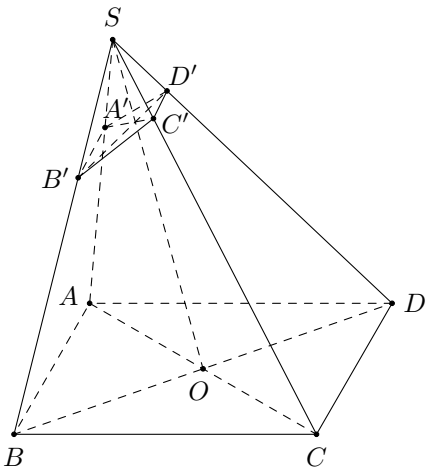
Ta có $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{1}{15x}\Rightarrow V_{S.A'B'C'}=\dfrac{1}{15x}V_{S.ABC}=\dfrac{1}{30x}V_{S.ABCD}$.

Ngoài ra $\dfrac{V_{S.A'D'C'}}{V_{S.ADC}}=\dfrac{1}{15y}\Rightarrow V_{S.A'D'C'}=\dfrac{1}{15y}V_{S.ADC}=\dfrac{1}{30y}V_{S.ABCD}$.

Do đó $k=\dfrac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{1}{30}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$.

Mặt khác $(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\geq 4\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geq\dfrac{1}{2}\Rightarrow k\geq\dfrac{1}{60}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của k là $\dfrac{1}{60}$ khi và chỉ khi $x=y=4$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Điểm I thuộc đoạn SA. Biết mặt phẳng (MNI) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần, phần chứa đỉnh S có thể tích bằng $\dfrac{7}{13}$ lần phần còn lại. Tính tỉ số $k=\dfrac{IA}{IS}$.

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) $\dfrac{3}{4}$. (C) $\dfrac{2}{3}$. (D) $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (MNI) cắt khối chóp theo thiết diện như hình 1.

Đặt $V_{S.ABCD}=V$.

Ta có $S_{\triangle APM}=S_{\triangle BMN}=\dfrac{1}{4}S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{8}S_{ABCD}\Rightarrow\dfrac{S_{\triangle APM}}{S_{ABCD}}=\dfrac{1}{8}$.

Mặt khác $\dfrac{\mathrm{d}\,(I,(ABCD))}{\mathrm{d}\,(S,(ABCD))}=\dfrac{IA}{SA}=\dfrac{k}{k+1}$.

Suy ra $\dfrac{V_{I.APM}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{S_{\triangle APM}}{S_{ABCD}}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\,(I,(ABCD))}{\mathrm{d}\,(S,(ABCD))}=\dfrac{k}{8(k+1)}$.

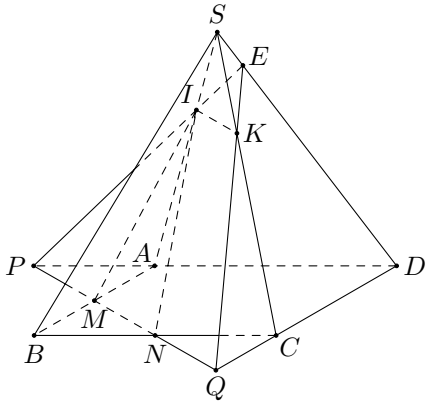
Ta được $V_{I.APM}=\dfrac{k}{8(k+1)}V$.

Do $MN\parallel AC\Rightarrow IK\parallel AC\Rightarrow IK\parallel(ABCD)$

Suy ra $\mathrm{d}\,(I,(ABCD))=\mathrm{d}\,(K,(ABCD))$.

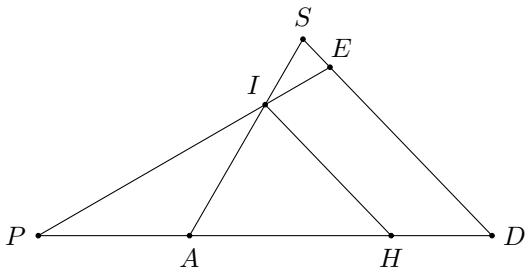
Mà $S_{\triangle APM}=S_{\triangle NCQ}\Rightarrow V_{I.APM}=V_{K.NCQ}=\dfrac{k}{8(k+1)}V$.

Ta được $V_{I.APM}=V_{K.NCQ}=\dfrac{k}{8(k+1)}V$.



Hình 1

Kẻ $IH \parallel SD$ $(H \in SD)$ như hình 2.



Hình 2

Ta có $\dfrac{IH}{SD} = \dfrac{AH}{AD} = \dfrac{AI}{AS} = \dfrac{k}{k+1}$.

Lại có $\dfrac{IH}{ED} = \dfrac{PH}{PD} = \dfrac{PA}{PD} + \dfrac{AH}{PD} = \dfrac{PA}{PD} + \dfrac{2AH}{3AD}$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2k}{3(k+1)} = \frac{3k+1}{3(k+1)}.$$

Do đó $\dfrac{ED}{SD} = \dfrac{IH}{SD} \div \dfrac{ID}{ED} = \dfrac{3k}{3k+1}$.

Suy ra $\dfrac{d\,(E,(ABCD))}{d\,(S,(ABCD))} = \dfrac{ED}{SD} = \dfrac{3k}{3k+1}$.

Mà $\dfrac{S_{\triangle PQD}}{S_{ABCD}} = \dfrac{9}{8} \Rightarrow \dfrac{V_{E.PQD}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{27k}{24k+8} \Rightarrow V_{E.PQD} = \dfrac{27k}{24k+8}V$.

Ta được $V_{E.PQD} = \dfrac{27k}{24k+8}V$.

Khi đó

$$\begin{aligned}
& V_{EIKAMNCD} = \frac{13}{20}V \\
\Leftrightarrow\ & V_{E.PQD} - V_{I.APM} - V_{K.NQC} = \frac{13}{20}V \\
\Leftrightarrow\ & \frac{27k}{8(3k+1)}V - \frac{k}{8(k+1)}V - \frac{k}{8(k+1)}V = \frac{13}{20}V \\
\Leftrightarrow\ & \frac{27k}{2(3k+1)} - \frac{k}{k+1} = \frac{13}{5} \\
\Leftrightarrow\ & k = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các điểm A', C' thỏa mãn $\overrightarrow{SA'} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC'} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{SC}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $A'C'$ cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D' và đặt $k = \dfrac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị lớn nhất của k là?

(A) $\dfrac{4}{105}$. (B) $\dfrac{1}{30}$. (C) $\dfrac{4}{15}$. (D) $\dfrac{4}{27}$.

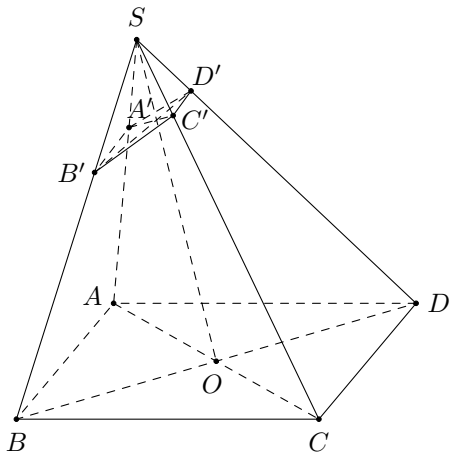
Lời giải.

Đặt $\dfrac{SB}{SB'}=x$, $\dfrac{SD}{SD'}=y$.

Ta có $\dfrac{SB}{SB'}+\dfrac{SD}{SD'}=\dfrac{SA}{SA'}+\dfrac{SC}{SC'}\Rightarrow x+y=8\Rightarrow y=8-x$.

Ngoài ra $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{1}{15x}\Rightarrow V_{S.A'B'C'}=\dfrac{1}{15x}V_{S.ABC}=\dfrac{1}{30x}V_{S.ABCD}$.

Mạt khác $\dfrac{V_{S.A'D'C'}}{V_{S.ADC}}=\dfrac{1}{15y}\Rightarrow V_{S.A'D'C'}=\dfrac{1}{15y}V_{S.ADC}=\dfrac{1}{30y}V_{S.ABCD}$.



Do đó $k=\dfrac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$

$=\dfrac{1}{30}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{4}{15xy}=\dfrac{4}{15x(8-x)}=\dfrac{4}{15(-x^2+8x)}$.

Mà $1\le x,\ y<8\Rightarrow 8-x\ge 1\Leftrightarrow x\le 7$.

Xét hàm số $f(x)=-x^2+8x$ trên đoạn $[1;\,7]$.

$f'(x)=-2x+8;\ f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin[1;\,7]\\ x=4\in[1;\,7]\end{array}\right.$

Tính $f(1)=7;\ f(7)=7;\ f(4)=32$.

k đạt giá trị lớn nhất khi $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Mà $\min\limits_{[1;\,7]}f(x)=7\Rightarrow k_{\max}=\dfrac{4}{15\cdot 7}=\dfrac{4}{105}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Cho tứ diện đều có chiều cao h, ở ba góc của tứ diện người ta cắt đi các tứ diện bằng nhau có chiều cao x để khối đa diện còn lại có thể tích bằng một nửa thể tích của khối đa diện đều ban đầu. Tìm x.

(A) $x=\dfrac{h}{\sqrt[3]{2}}$. (B) $x=\dfrac{h}{\sqrt[3]{3}}$. (C) $x=\dfrac{h}{\sqrt[4]{4}}$. (D) $x=\dfrac{h}{\sqrt[3]{6}}$.

Lời giải.

Gọi cạnh của khối tứ diện đều ban đầu là a.

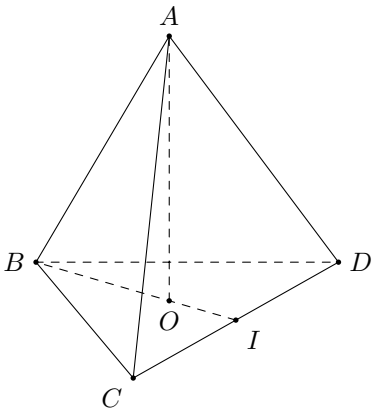
Ta có $AO=\sqrt{AB^2-BO^2}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow h=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\Rightarrow a=\dfrac{3h}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}h}{2}$; $V_{ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}=\dfrac{h^3\sqrt{3}}{8}$.

Thể tích của ba khối tứ diện đều có chiều cao x được cắt ra là

$V=3\cdot\dfrac{x^3\sqrt{3}}{8}=\dfrac{x^3\cdot 3\sqrt{3}}{8}$.

Khi đó $\dfrac{x^3\cdot 3\sqrt{3}}{8}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{h^3\sqrt{3}}{8}\Leftrightarrow x^3=\dfrac{h^3}{6}\Leftrightarrow x=\dfrac{h}{\sqrt[3]{6}}$.



Chọn đáp án (D) □

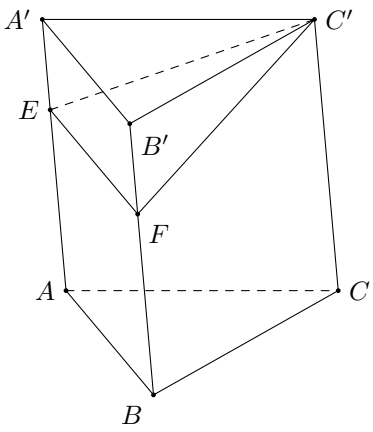
Câu 10. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Trên các cạnh AA', BB' lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $AA'=kA'E$, $BB'=kB'F$. Mặt phẳng $(C'EF)$ chia khối trụ đã cho thành hai khối đa diện bao gồm

khối chóp $(C'.A'B'FE)$ có thể tích V_1 và khối đa diện $(ABCEFC')$ có thế tích V_2. Biết rằng $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{2}{7}$, tìm k.

(A) $k=4$. (B) $k=3$. (C) $k=1$. (D) $k=2$.

Lời giải.

- Do khối chóp $C'.A'B'FE$ và khối chóp $C'.A'B'BA$ có chung đường cao hạ từ C'nên $\dfrac{V_{C'.A'B'FE}}{V_{C'.A'B'BA}}=\dfrac{S_{A'B'FE}}{S_{A'B'BA}}=\dfrac{2S_{A'B'E}}{2S_{A'B'A}}=\dfrac{A'E}{A'A}=\dfrac{1}{k}$. (1)
- Do khối chóp $C'.ABC$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chung đường cao hạ từ C' và đáy là $\triangle ABC$ nên $\dfrac{V_{C'.ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{V_{C'.A'B'BA}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\dfrac{2}{3}$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{V_{C'.A'B'FE}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\dfrac{2}{3k}\Rightarrow\dfrac{V_1}{V_{ABC.A'B'C'}}=\dfrac{2}{3k}\Rightarrow V_1=\dfrac{2}{3k}\cdot V_{ABC.A'B'C'}$



- Đặt $V=V_{ABC.A'B'C'}$. Khi đó $\begin{cases}V_1=\dfrac{2}{3k}\cdot V\\ V_2=V-V_1=V-\dfrac{2}{3k}\cdot V.\end{cases}$

Do đó

$$\begin{aligned}&\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{2}{7}\\ \Leftrightarrow\ &\dfrac{2}{3k}\cdot V=\dfrac{2}{7}\left(V-\dfrac{2}{3k}\cdot V\right)\\ \Leftrightarrow\ &\dfrac{2}{3k}=\dfrac{2}{7}\left(1-\dfrac{2}{3k}\right)\\ \Leftrightarrow\ &\dfrac{6}{7k}=\dfrac{2}{7}\\ \Leftrightarrow\ &2k=6\\ \Leftrightarrow\ &k=3.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, tâm O. Hình chiếu vuông góc của điểm S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của đoạn thẳng AO. Biết mặt phẳng (SCD) tạo với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 60°. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

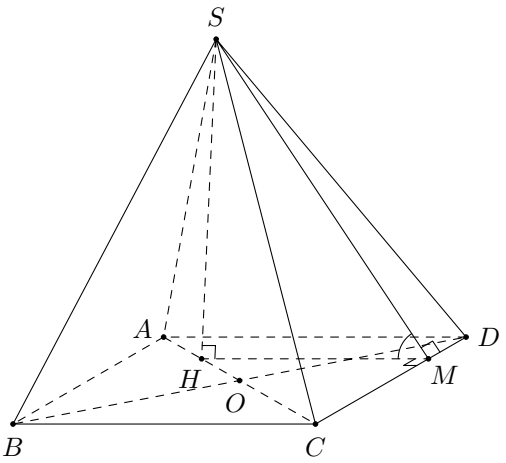
(A) $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}a^3$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^3$. (C) $\dfrac{3}{4}a^3$. (D) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^3$.

Lời giải.

Dựng $HM \perp CD$ tại M.

Ta có $\begin{cases} CD \perp HM \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHM) \Rightarrow CD \perp SM.$

Khi đó $\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ (SCD) \supset SM \perp CD \\ (ABCD) \supset HM \perp CD. \end{cases}$



Nên góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SMH}$.

Theo giả thiết ta có $\widehat{SMH} = 60^\circ$.

Mặt khác $\triangle CMH \backsim \triangle CDA$

Nên $\dfrac{HM}{AD} = \dfrac{CH}{CA} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow HM = \dfrac{3}{4}AD = \dfrac{3}{4}a.$

Xét $\triangle SMH$ vuông tại H ta có

$SH = HM \cdot \tan \widehat{SMH} = \dfrac{3a}{4} \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}a.$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{4}a \cdot a^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^3.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là 45°. Gọi M là điểm đối xứng của C qua B và N là trung điểm SC. Mặt phẳng (MND) chia khối chóp thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện có đỉnh S có thể tích là V_1, khối đa diện còn lại có thể tích V_2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

(A) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{12}{7}.$ (B) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{5}{3}.$ (C) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{5}.$ (D) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{7}{5}.$

Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$; $F = DM \cap AB$; $K = SB \cap MN$.

Ta có: $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên $\triangle ADB$ là tam giác đều.

Mà K là trọng tâm $\triangle SCM \Rightarrow \dfrac{MK}{MN} = \dfrac{2}{3}.$

Xét $\dfrac{V_{M.KFB}}{V_{M.NDC}} = \dfrac{MK}{MN} \cdot \dfrac{MF}{MD} \cdot \dfrac{MB}{MC} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$

Suy ra $V_{M.KFB} = \dfrac{1}{6} \cdot V_{M.NDC} \Rightarrow V_{KFBNDC} = \dfrac{5}{6}V_{M.NDC}.$

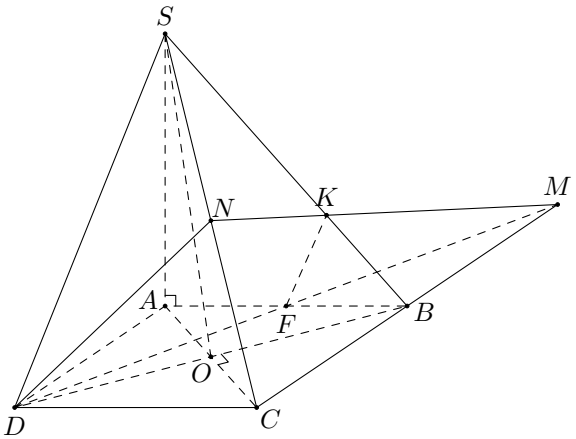
Lại có $V_{M.NDC} = 2V_{B.NDC} = 2 \cdot \dfrac{1}{2}V_{S.BCD} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABCD};$

(Vì $\mathrm{d}(N, (BDC)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(S, (BDC))$).

Do đó $V_2 = V_{KFBNDC} = \dfrac{5}{6}V_{M.NDC} = \dfrac{5}{12}V_{S.ABCD}.$

Suy ra $V_1 = V_{SADFKN} = V_{S.ABCD} - V_1 = \dfrac{7}{12}V_{S.ABCD}.$

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{7}{5}.$



Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 48cm^3. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm các cạnh CC', BC và $B'C'$. Tính thể tích của khối chóp $A'.MNP$.

(A) 8cm^3. (B) 12cm^3. (C) 24cm^3. (D) $\dfrac{16}{3}\text{cm}^3$.

Lời giải.

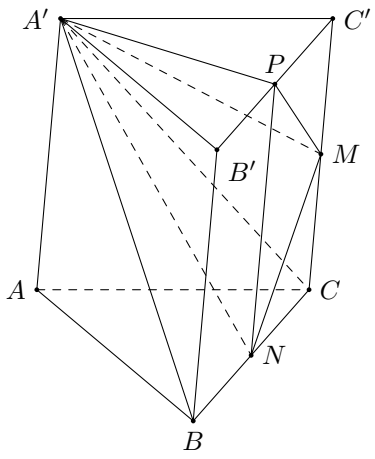
Gọi V là thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Ta có $\begin{cases} S_{\triangle MNP} = \dfrac{1}{4}S_{BCC'B'} \\ \text{d}(A', (MNP)) = \text{d}(A', (BCC'B')). \end{cases}$

$\Rightarrow V_{A'MNP} = \dfrac{1}{4}V_{A'BCC'B'}$.

Mặt khác $V_{A'BCC'B'} = V - V_{A'ABC} = V - \dfrac{1}{3}V = \dfrac{2}{3}V$.

$\Rightarrow V_{A'MNP} = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{3}V = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 48 = 8\text{cm}^3$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là $\triangle ABC$ vuông cân ở B, $AC = a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Gọi G là trọng tâm của $\triangle SBC$, mặt phẳng (α) đi qua AG và song song với BC chia khối chóp thành hai phần. Gọi V là thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S. Tính V.

(A) $\dfrac{5a^3}{54}$. (B) $\dfrac{2a^3}{9}$. (C) $\dfrac{4a^3}{27}$. (D) $\dfrac{4a^3}{9}$.

Lời giải.

Trong mặt phẳng (SBC), qua G kẻ đường thẳng song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại M, N.

Suy ra $BC \parallel (MAN)$, $AG \subset (MAN)$. Vì vậy $(MAN) \equiv (\alpha)$.

Ta có tam giác ABC vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = BC = a$.

$\Rightarrow V_{SABC} = \dfrac{1}{3}SA \cdot \dfrac{1}{2}\cdot AB \cdot BC = \dfrac{a^3}{6}$.

Gọi E là trung điểm của BC. Ta có $MN \parallel BC \Rightarrow \dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{SG}{SE} = \dfrac{2}{3}$.

Khi đó $\dfrac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \dfrac{SM}{SB}\cdot\dfrac{SN}{SC} = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$.

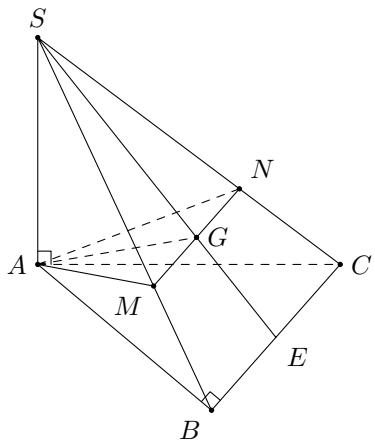
Suy ra $\dfrac{V}{V_{SABC}} = \dfrac{5}{9} \Rightarrow V = \dfrac{5}{9}V_{SABC} = \dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{a^3}{6} = \dfrac{5a^3}{54}$.

Cách tính khác:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Ta chứng minh được $AH \perp (SBC)$ và $BMNC$ là hình thang vuông tại B, M.

Khi đó $V_{ABMNC} = \dfrac{1}{3}\cdot AH \cdot \dfrac{1}{2}\cdot BM \cdot (MN + BC) = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{3}\cdot\left(\dfrac{2a}{3} + a\right) = \dfrac{5a^3}{54}$.

Chọn đáp án (A) □



Câu 15. Cho tứ diện đều có chiều cao h, ở bốn góc của tứ diện người ta cắt đi các tứ diện đều bằng nhau có chiều cao x để khối đa diện còn lại có thể tích bằng $\frac{3}{4}$ thể tích của khối đa diện ban đầu. Tìm x.

(A) $x=\dfrac{h}{\sqrt[3]{4}}$. (B) $x=\dfrac{h}{\sqrt[3]{16}}$. (C) $x=\dfrac{h}{\sqrt[3]{12}}$. (D) $x=\dfrac{h}{\sqrt[3]{6}}$.

Lời giải.

Gọi cạnh của khối tứ diện đều ban đầu là a, ta có $h=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}a\Rightarrow a=\sqrt{\dfrac{3}{2}}h$.

Thể tích của khối tứ diện ban đầu là $V=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}h\right)^2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot h=\dfrac{h^3}{8}$.

Do đó tổng thể tích của ba khối tứ diện đều có chiều cao x được cắt ra là $\dfrac{3x^3}{8}$.

Theo giả thiết ta có $\dfrac{3x^3}{8}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{h^3}{8}\Leftrightarrow x=\dfrac{h}{\sqrt[3]{12}}$.

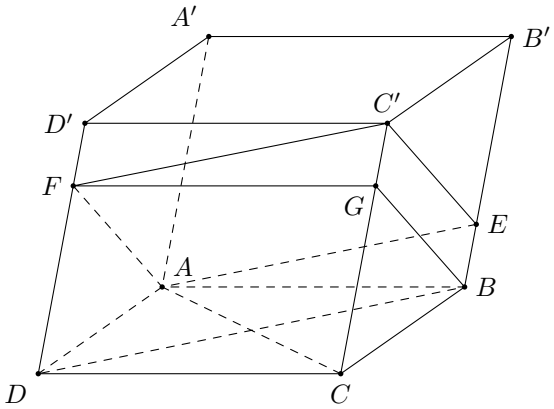
Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Lấy điểm E thuộc cạnh BB' sao cho $BE=\dfrac{BB'}{4}$, điểm F thuộc cạnh DD' sao cho $DF=\dfrac{3DD'}{4}$. Mặt phẳng qua ba điểm A, E, F chia khối hộp thành hai phần. Tính tỉ số hai phần ấy.

(A) 2. (B) 1. (C) $\frac{3}{2}$. (D) $\frac{4}{3}$.

Lời giải.

Ta thấy thiết diện của (AEF) và hình hộp là tứ giác $AFC'E$.



Ta có $V_{ABCD.AFC'E}=\dfrac{x+y+z+t}{4}\cdot V_{ABCD.A'B'C'D'}$ trong đó

$$\begin{cases} x=\dfrac{0}{AA'}=0\\ y=\dfrac{BE}{BB'}=\dfrac{1}{4}\\ z=\dfrac{CC'}{CC'}=1\\ t=\dfrac{DF}{DD'}=\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Do đó $V_{ABCD.AFC'E}=\dfrac{1}{2}V_{ABCD.A'B'C'D'}$.

Vậy tỉ lệ thể tích của hai khối là 1.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M,N lần lượt thuộc các cạnh bên AA',CC' sao cho $MA=MA';NC=4NC'$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Hỏi trong bốn khối tứ diện $GA'B'C',BB'MN,ABB'C'$ và $A'BCN$, khối tứ diện nào có thể tích nhỏ nhất?

(A) Khối $ABB'C'$. (B) Khối $A'BCN$. (C) Khối $BB'MN$. (D) Khối $GA'B'C'$.

Lời giải.

Ta có

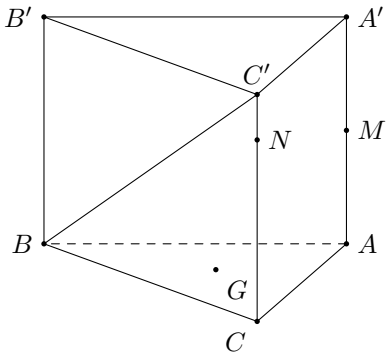
$V_{GA'B'C'} = \dfrac{1}{3}V_{ABCA'B'C'}$.

$V_{BB'MN} = V_{A'BB'N} = \dfrac{1}{2}V_{A'BCB'C'} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}V_{ABCA'B'C'} = \dfrac{1}{3}V_{ABCA'B'C'}$.

$V_{ABB'C'} = \dfrac{1}{2}V_{ABCB'C'} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}V_{ABCA'B'C'} = \dfrac{1}{3}V_{ABCA'B'C'}$.

$V_{A'BCN} = \dfrac{2}{5}V_{A'BCB'C'} = \dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{2}{3}V_{ABCA'B'C'} = \dfrac{4}{15}V_{ABCA'B'C'}$.

Do đó thể tích của khối $A'BCN$ nhỏ nhất.

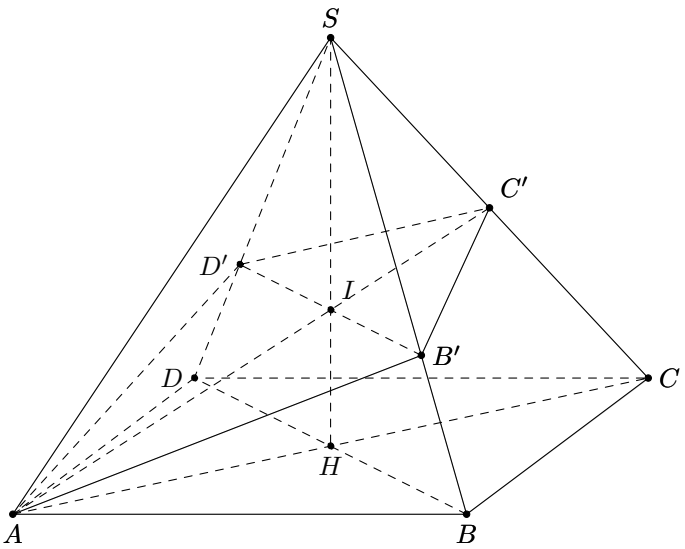


Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Biết C' là trung điểm SC. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích hai khối chóp $S.AB'C'D'$ và $S.ABCD$. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

(A) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{2}{3}$. (B) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{2}{9}$. (C) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{4}{9}$. (D) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.



Do $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm H của hình vuông $ABCD$. C' là trung điểm SC và H là trung điểm AC nên $I = AC' \cap SH$ là trọng tâm $\triangle SAC$, suy ra $SI = \dfrac{2}{3}SH$.

Ta có

$$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SH \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC \Rightarrow BD \parallel (P) \Rightarrow BD \parallel B'D'.$$

Mặt khác $\begin{cases} (P) \cap (SBD) = B'D' \\ I \in AC' \subset (P) \\ I \in SH \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in B'D'.$

Do đó

$$\frac{SB'}{SB}=\frac{SD'}{SD}=\frac{SI}{SH}=\frac{2}{3}.$$

Ta có

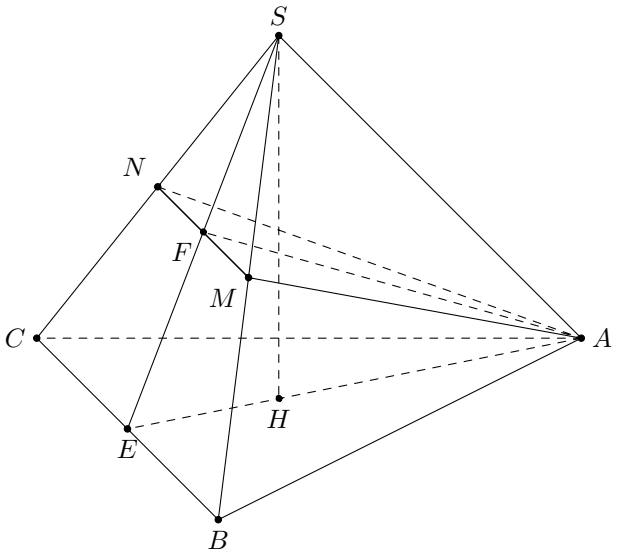
$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{\frac{1}{2}V_{S.AB'C'D'}}{\frac{1}{2}V_{S.ABCD}}=\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Cho hình chóp đều $S.ABC$, có đáy là tam giác đều cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC. Biết mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính thể tích V của khối chóp $A.BCNM$.

(A) $V=\dfrac{\sqrt{5}a^3}{32}$. (B) $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{16}$. (C) $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{48}$. (D) $V=\dfrac{\sqrt{5}a^3}{96}$.

Lời giải.



Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC, MN. Gọi H là trọng tâm $\triangle ABC$.

Ta có $\triangle SMN$ cân tại S, suy ra $SF\perp MN$.

$$\begin{cases} SF\perp MN \\ MN=(SBC)\cap(AMN)\Rightarrow SF\perp(AMN). \\ (SBC)\perp(AMN) \end{cases}$$

Ta có $\triangle ASE$ có AF vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến, nên $\triangle ASE$ cân tại A, suy ra

$$SA=AE=\frac{a\sqrt{3}}{2};\ SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\frac{a\sqrt{15}}{6};\ S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

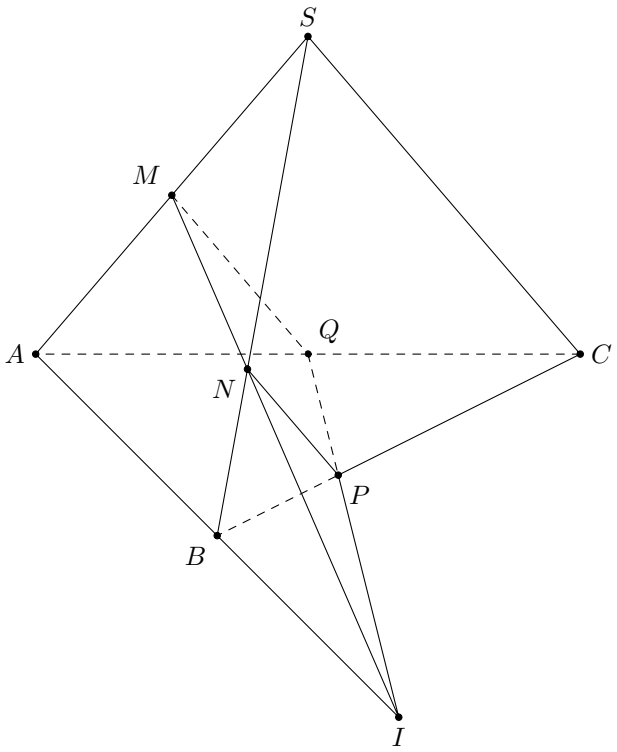
$$V_{SAMN}=\frac{1}{4}V_{SABC}\Rightarrow V_{A.MNCB}=\frac{3}{4}V_{SABC}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{15}}{6}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{5}}{32}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$. Gọi M là trung điểm của SA, lấy điểm N trên cạnh SB sao cho $\dfrac{SN}{SB}=\dfrac{2}{3}$. Mặt phẳng (α) qua MN và song song với SC chia khối chóp thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện chứa đỉnh A, V_2 là thể tích của khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

(A) $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{7}{16}$. (B) $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{7}{18}$. (C) $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{7}{11}$. (D) $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{7}{9}$.

Lời giải.



Kẻ $MQ \parallel SC$, $NP \parallel SC$ ta được $(MNPQ)$ chính là mặt phẳng (α).

Ba mặt phẳng (α), (SAB), (ABC) giao nhau theo ba giao tuyến MN, AB, PQ đồng quy tại I.

Xét trong tam giác SAB có

$$\frac{MS}{MA}\cdot\frac{IA}{IB}\cdot\frac{NB}{NS}=1\Leftrightarrow 1\cdot\frac{IA}{IB}\cdot\frac{1}{2}=1\Leftrightarrow\frac{IA}{IB}=2.$$

Nên B là trung điểm của IA.

Các tam giác SAI, IAC lần lượt có các trọng tâm là N, P.

Gọi thể tích khối chóp $IAMQ$ là V. Ta có

$$\frac{V_{IBNP}}{V_{IAMQ}}=\frac{IB}{IA}\cdot\frac{IN}{IM}\cdot\frac{IP}{IQ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}\Rightarrow\frac{V_1}{V}=\frac{7}{9}\Rightarrow V_1=\frac{7}{9}V. \quad (1)$$

$$\frac{V_{ABSC}}{V_{AIMQ}}=\frac{AB}{AI}\cdot\frac{AS}{AM}\cdot\frac{AC}{AQ}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2\Rightarrow V_{S.ABC}=2V\Rightarrow V_1+V_2=2V. \quad (2)$$

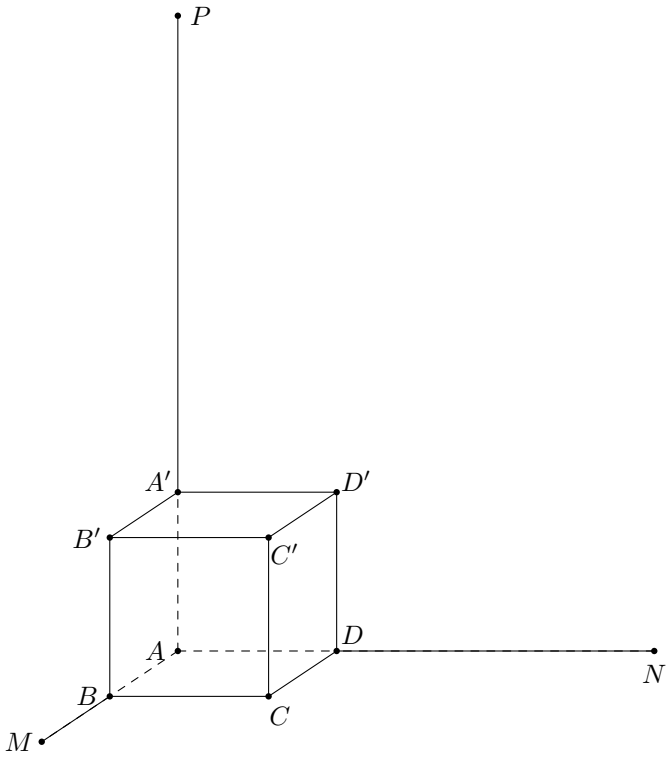
Từ (1) và (2) suy ra $V_2=2V-\dfrac{7}{9}V=\dfrac{11}{9}V$. Từ đó suy ra $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{7}{11}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 4a$, $AD = 6a$, $AA' = 7a$. Các điểm M, N, P thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AP} = 4\overrightarrow{AA'}$. Tính thể tích V của khối tứ diện $AMNP$.

(A) $V = 168a^3$. (B) $V = 672a^3$. (C) $V = 336a^3$. (D) $V = 1008a^3$.

Lời giải.



Ta có tứ diện $AMNP$ vuông tại A nên $V = \dfrac{1}{6}AM \cdot AN \cdot AP = \dfrac{1}{6} \cdot 8a \cdot 18a \cdot 28a = 672a^3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi C' là trung điểm của SC. Mặt phẳng (P) chứa AC' cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D'. Đặt $m = \dfrac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị nhỏ nhất của m bằng

(A) $\dfrac{2}{27}$. (B) $\dfrac{4}{27}$. (C) $\dfrac{1}{9}$. (D) $\dfrac{2}{9}$.

Lời giải.

Đặt $\dfrac{SA'}{SA}=1$; $x=\dfrac{SB'}{SB}$; $\dfrac{SC'}{SC}=\dfrac{1}{2}$; $y=\dfrac{SD'}{SD}$. Ta có

$$\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SD}{SD'}+\frac{SB}{SB'}\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3.$$

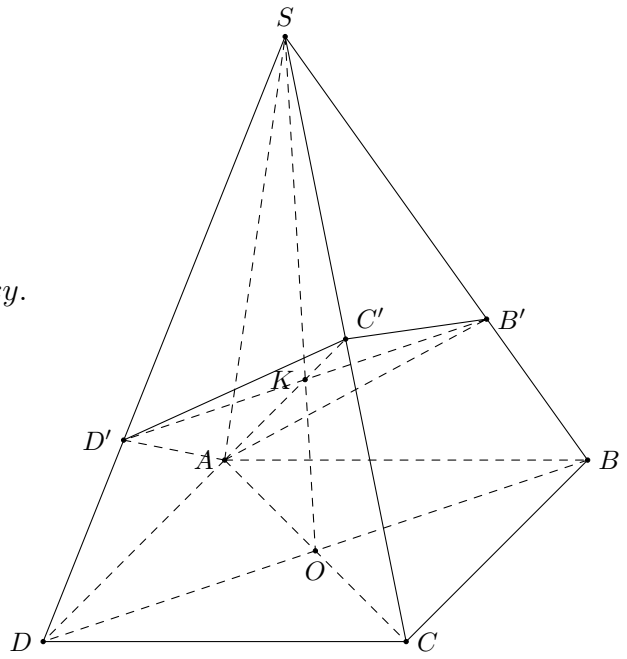
Ta có

$$m=\frac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_{S.B'C'D'}}{2V_{S.BCD}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SC'}{SC}\cdot\frac{SD'}{SD}=\frac{1}{4}xy.$$

Mà

$$3=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{2}{\sqrt{xy}}\Rightarrow xy\geq\frac{4}{9}.$$

Suy ra $m\geq\dfrac{1}{9}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi C' là trung điểm của SC. Mặt phẳng (P) chứa AC' cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D'. Đặt $m=\dfrac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị lớn nhất của m bằng

(A) $\dfrac{1}{9}$. (B) $\dfrac{1}{8}$. (C) $\dfrac{3}{8}$. (D) $\dfrac{4}{9}$.

Lời giải.

Đặt $x=\dfrac{SA'}{SA}=1$; $y=\dfrac{SB'}{SB}$; $z=\dfrac{SC'}{SC}=\dfrac{1}{2}$; $t=\dfrac{SD'}{SD}$. Ta có

$$\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SD}{SD'}+\frac{SB}{SB'}\Leftrightarrow 1+2=\frac{1}{t}+\frac{1}{y}\Leftrightarrow 3=\frac{1}{t}+\frac{1}{y}.$$

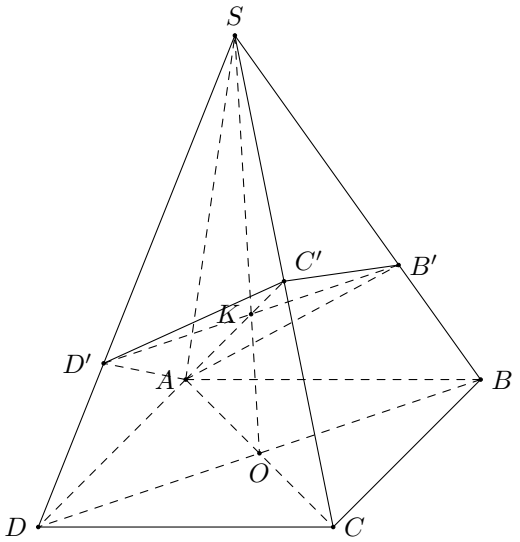
Ta có

$$m=\frac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_{S.B'C'D'}}{2V_{S.BCD}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SC'}{SC}\cdot\frac{SD'}{SD}=\frac{1}{4}yt.$$

Mà

$$\frac{1}{y}=3-\frac{1}{t}\Leftrightarrow y=\frac{t}{3t-1},\ \left(\frac{1}{3}<t\leq 1\right)$$

$$\Rightarrow m=f(t)=\frac{t^2}{4(3t-1)}\leq\max_{\left(\frac{1}{3};1\right]}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}.$$



Chọn đáp án (B) □

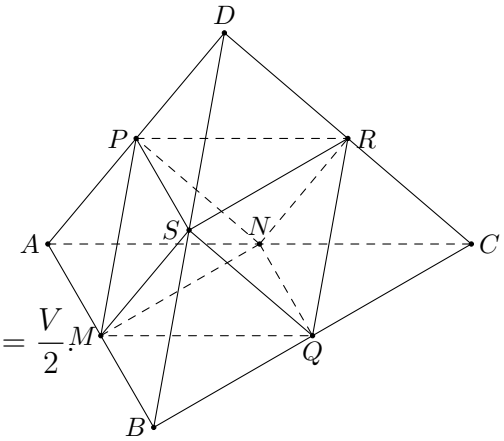
Câu 24. Cho khối tứ diện đều $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, AD, BC, CD, DB. Biết thể tích của khối bát diện đều $MQNPSR$ bằng $9\sqrt{2}$ cm^3. Tính độ dài cạnh của tứ diện đều $ABCD$.

(A) 2 cm. (B) 3 cm. (C) 6 cm. (D) $\sqrt[3]{2}$ cm.

Lời giải.

Gọi $V = V_{A.BCD}$, ta có

$$\frac{V_{A.MNP}}{V_{A.BCD}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AP}{AD} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{A.MNP} = \frac{1}{8}V.$$



Tương tự $V_{B.MQS} = \frac{1}{8}V$; $V_{C.NQR} = \frac{1}{8}V$; $V_{D.PRS} = \frac{1}{8}V$.
Khi đó ta có

$$V_{MQNPSR} = V - V_{A.MNP} - V_{B.MQS} - V_{C.NQR} - V_{D.PRS} = V - 4 \cdot \frac{1}{8}V = \frac{V}{2}.$$

Theo giả thiết

$$V_{MQNPSR} = 9\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{V}{2} = 9\sqrt{2} \Leftrightarrow V = 18\sqrt{2}.$$

Đặt độ dài cạnh của tứ diện là a, ta có

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = 18\sqrt{2} \Leftrightarrow a = 6.$$

Vậy $a = 6$ cm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh AB, AC sao cho $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$, $\frac{AN}{CN} = 2$. Mặt phẳng (α) chứa MN, song song với AD chia khối tứ diện thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V. Tính V.

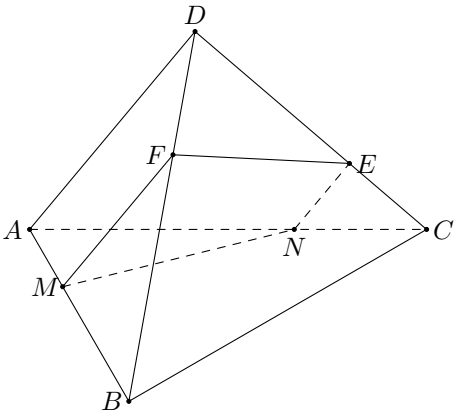
(A) $V = \frac{4\sqrt{2}a^3}{108}$. (B) $V = \frac{5\sqrt{2}a^3}{108}$. (C) $V = \frac{4\sqrt{2}a^3}{81}$. (D) $V = \frac{11\sqrt{2}a^3}{342}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} N \in (\alpha) \cap (ACD) \\ AD \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ACD) = NE \parallel AD \left(E \in CD, \frac{DE}{DC} = \frac{AN}{AC} = \frac{2}{3}\right).$$

$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABD) \\ AD \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABD) = MF \parallel AD \left(F \in BD, \frac{DF}{DB} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}\right).$$

Như vậy thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi (α) là tứ giác $MNEF$.



$$\frac{V_{A.MND}}{V_{A.BCD}} = \frac{AM}{AB}\cdot\frac{AN}{AC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9} \Rightarrow V_{A.MND} = \frac{2}{9}V_{A.BCD}.$$

Ta có

$$\frac{V_{D.MNF}}{V_{D.MNB}} = \frac{DF}{DB} = \frac{1}{3}.$$

và

$$\frac{V_{D.MNB}}{V_{D.ABC}} = \frac{S_{MNB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC} - S_{AMN} - S_{BCN}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC} - \frac{2}{9}S_{ABC} - \frac{1}{3}S_{ABC}}{S_{ABC}} = \frac{4}{9}.$$

Suy ra

$$V_{D.MNF} = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}V_{A.BCD} = \frac{4}{27}V_{A.BCD}.$$

Ta cũng có

$$\frac{V_{D.EFN}}{V_{D.CBN}} = \frac{DE}{DC}\cdot\frac{DF}{DB} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

và

$$\frac{V_{D.CBN}}{V_{D.CBA}} = \frac{S_{CBN}}{S_{CBA}} = \frac{CN}{CA} = \frac{1}{3}.$$

Suy ra

$$V_{D.EFN} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}V_{A.BCD} = \frac{2}{27}V_{A.BCD}.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} & V_{A.MND} + V_{D.MNF} + V_{D.EFN} = \frac{2}{9}V_{A.BCD} + \frac{4}{27}V_{A.BCD} + \frac{2}{27}V_{A.BCD} \\ \Leftrightarrow\ & V = \frac{12}{27}V_{A.BCD} = \frac{12}{27}\cdot\frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{a^3\sqrt{2}}{27} = \frac{4a^3\sqrt{2}}{108}. \end{aligned}$$

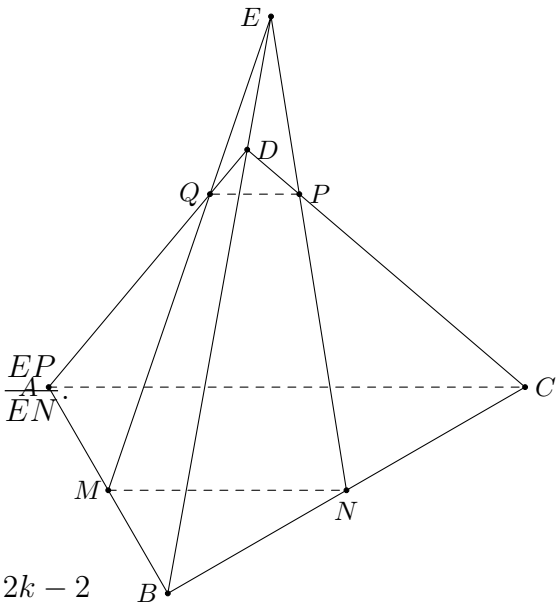
Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC và E là điểm thuộc tia đối của tia DB sao cho $\dfrac{BE}{BD} = k$. Tìm k để mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh B có thể tích $V = \dfrac{11\sqrt{2}a^3}{294}$.

(A) $k = \dfrac{6}{5}$. (B) $k = 6$. (C) $k = 4$. (D) $k = 5$.

Lời giải.

Gọi $P = EN \cap CD$, $Q = EM \cap AD$, suy ra thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi (MNE) là tứ giác $MNPQ$.



Ta có

$$\frac{V_{E.DPQ}}{V_{E.BNM}} = \frac{ED}{EB} \cdot \frac{EP}{EN} \cdot \frac{EQ}{EM}.$$

Từ giả thiết $\dfrac{BE}{BD} = k$ suy ra $\dfrac{ED}{EB} = \dfrac{k-1}{k}$.

$$\begin{cases} MN \parallel AC \\ (EMN) \cap (ACD) = PQ \end{cases} \Rightarrow PQ \parallel MN \parallel AC \Rightarrow \frac{EQ}{EM} = \frac{EP}{EN}.$$

Xét ΔEAB có EM là trung tuyến

$$\frac{EB}{ED} + 1 = 2\frac{EM}{EQ} \Rightarrow \frac{EM}{EQ} = \frac{\dfrac{k}{k-1}+1}{2} = \frac{2k-1}{2k-2} \Rightarrow \frac{EQ}{EM} = \frac{2k-2}{2k-1}.$$

Khi đó

$$\frac{V_{E.DPQ}}{V_{E.BNM}} = \frac{k-1}{k} \cdot \left(\frac{2k-2}{2k-1}\right)^2 \Rightarrow \frac{V}{V_{E.BNM}} = 1 - \frac{k-1}{k} \cdot \left(\frac{2k-2}{2k-1}\right)^2 = \frac{8k^2-11k+4}{k(2k-1)^2}.$$

Ta lại có

$$\frac{V_{E.BMN}}{V_{D.ABC}} = \frac{\mathrm{d}(E,(BMN)) \cdot S_{BMN}}{\mathrm{d}(D,(ABC)) \cdot S_{ABC}} = \frac{EB}{DB} \cdot \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BN}{BC} = \frac{k}{4}.$$

Suy ra

$$\frac{V}{V_{A.BCD}} = \frac{8k^2-11k+4}{k(2k-1)^2} \cdot \frac{k}{4} = \frac{8k^2-11k+4}{4(2k-1)^2}.$$

Khi đó

$$\frac{\frac{11\sqrt{2}a^3}{294}}{\frac{\sqrt{2}a^3}{12}} = \frac{8k^2-11k+4}{4(2k-1)^2} \Leftrightarrow \frac{22}{49} = \frac{8k^2-11k+4}{4(2k-1)^2} \Leftrightarrow 40k^2-187k+108 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 4 \\ k = \dfrac{27}{40}. \end{array}\right.$$

Vậy $k = 4$.

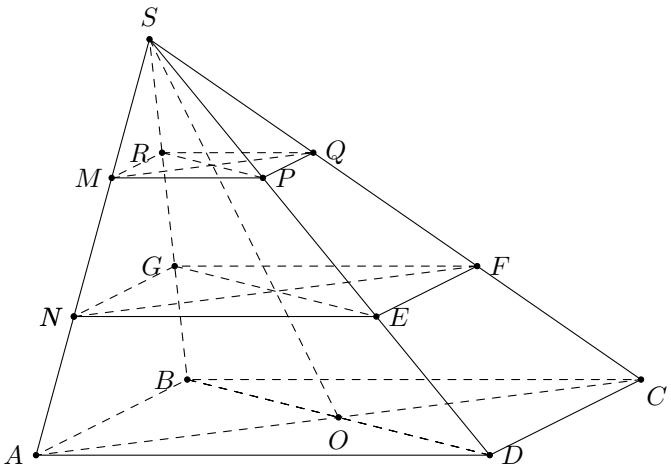
Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Trên cạnh SA lấy các điểm M, N sao cho $SM = MN = NA$. Hai mặt phẳng (α), (β) song song với $(ABCD)$ và lần lượt đi qua M, N chia khối chóp đã cho thành ba phần. Nếu phần trên có thể tích bằng 10 dm^3 thì phần ở giữa có thể tích là

(A) 70 dm^3. (B) 80 dm^3. (C) 180 dm^3. (D) 1.

190 dm^3

Lời giải.



Gọi $P = (\alpha) \cap SD$, $Q = (\alpha) \cap SC$, $R = (\alpha) \cap SE$, $E = (\beta) \cap SD$, $F = P = (\beta \cap SC$, $G = P = (\beta \cap SB$ theo đề ta có:

- $8 = 10$ dm^3.
- $V_{S.NEFG} = V_{S.NEF} + V_{S.NGF}$.
- $\dfrac{V_{S.NEF}}{V_{S.MPQ}} = \dfrac{SN}{SM} \cdot \dfrac{SE}{SP} \cdot \dfrac{SF}{SQ} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \Rightarrow V_{S.NEF} = 8V_{S.MPQ}$.
- $\dfrac{V_{S.NGF}}{V_{S.MRQ}} = \dfrac{SN}{SM} \cdot \dfrac{SG}{SR} \cdot \dfrac{SF}{SQ} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \Rightarrow V_{S.NGF} = 8V_{S.MRQ}$.

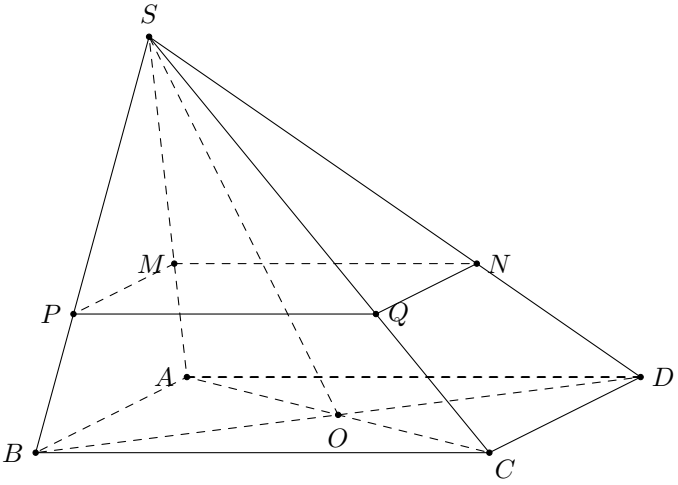
Suy ra $V_{S.NEFG} = V_{S.NEF} + V_{S.NGF} = 8V_{S.MPQ} + 8V_{S.MRQ} = 8(V_{S.MPQ} + V_{S.MRQ}) = 8V_{S.MRQ} = 80$ dm^3.

Vậy thể tích của khối chóp cụt $NEFG.MPQR$ là $V = V_{S.NEFG} - V_{S.MPQR} = 80 - 10 = 70$ dm^3. □

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SD. Mặt phẳng (α) chứa MN và cắt các tia SB, SC lần lượt tại P và Q. Đặt $\dfrac{SP}{SB} = x$, V_1 là thể tích của khối chóp $S.MNQP$ và V là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tìm x để $V = 2V_1$.

(A) $x = \dfrac{1}{2}$. (B) $x = \dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}$. (C) $x = \dfrac{-1+\sqrt{41}}{4}$. (D) $x = \sqrt{2}$.

Lời giải.



Ta chứng minh $PQ \parallel BC$.

Giả sử $(SBC) \cap (SAD) = d$ khi đó ta có: $\begin{cases} (SBC) \cap (SAD) = d \\ (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ (SAD) \cap (ABCD) = AD \\ BC \parallel AD \end{cases} \Rightarrow d \parallel BC,\ d \parallel AD.$

M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SD nên ta có $MN \parallel AD$, $MN \parallel d$.

Ta lại có: $\begin{cases} (SBC) \cap (SAD) = d \\ (SBC) \cap (\alpha) = PQ \\ (SAD) \cap (\alpha) = MN \\ d \parallel MN \end{cases} \Rightarrow PQ \parallel MN \Rightarrow PQ \parallel BC.$

Xét tam giác SBC có $PQ \parallel BC$, $\dfrac{SP}{SB} = x \Rightarrow \dfrac{SQ}{SC} = \dfrac{SP}{SB} = x$.

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V} &= \frac{V_{S.MNQP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.MNP} + V_{S.NQP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.MNP}}{2V_{S.ABD}} + \frac{V_{S.NQP}}{2V_{S.DCB}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{SM \cdot SN \cdot SP}{SA \cdot SB \cdot SD} + \frac{1}{2} \cdot \frac{SN \cdot SQ \cdot SP}{SD \cdot SC \cdot SB} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot x = \frac{x + 2x^2}{8}. \end{aligned}$$

Theo bài ra: $V = 2V_1 \Rightarrow \dfrac{V_1}{V} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{x + 2x^2}{8} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1 + \sqrt{33}}{4} \\ x = \dfrac{-1 - \sqrt{33}}{4} \end{array}\right.$.

Mà $\dfrac{SP}{SB} > 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 + \sqrt{33}}{4}$.

Cách 2:

Sử dụng công thức tính nhanh tỉ lệ thể tích của khối chóp tứ giác như sau:

Cho chóp $S.ABCD$ và mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD của khối chóp tại các điểm M, P, Q, N với $\dfrac{SQ}{SC} = \dfrac{SP}{SB} = x$, $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SN}{SA} = \dfrac{SN}{SD} = \dfrac{1}{2}$.

Thì ta có: $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{V_{S.MNQP}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{x \cdot x \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2}}{4} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x} + 2 + 2\right) = \dfrac{x + 2x^2}{8}$.

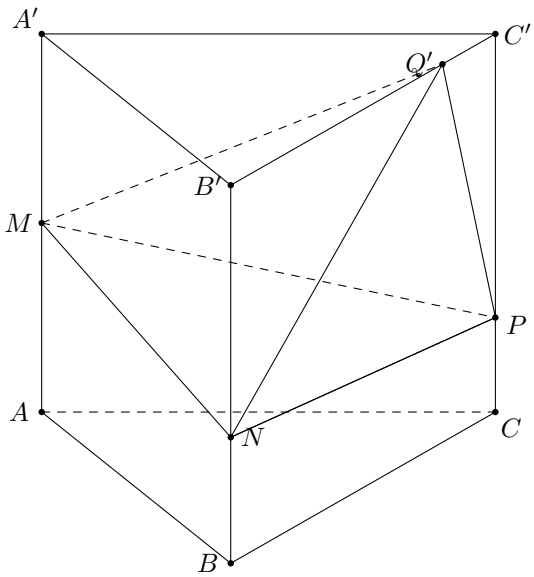
Theo bài ra: $V = 2V_1 \Rightarrow \dfrac{V_1}{V} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{x + 2x^2}{8} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1 + \sqrt{33}}{4} \\ x = \dfrac{-1 - \sqrt{33}}{4} \end{array}\right.$.

Mà $\dfrac{SP}{SB} > 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 + \sqrt{33}}{4}$. □

Câu 29. Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P, Q là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC', $B'C'$ thỏa mãn $\dfrac{AM}{AA'} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{BN}{BB'} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{CP}{CC'} = \dfrac{1}{4}$, $\dfrac{C'Q}{B'C'} = \dfrac{1}{5}$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối tứ diện $MNPQ$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Tính tỷ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

(A) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{11}{30}$. (B) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{11}{45}$. (C) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{19}{45}$. (D) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{22}{45}$.

Lời giải.



Đặt $BC = a$, $CC' = b$. Diện tích tam giác NPQ' là:

$$S_{NPQ'} = S_{BCC'B'} - (S_{NB'Q'} + S_{PC'Q'} + S_{BCPN}) = \frac{11ab}{30}.$$

Suy ra: $\dfrac{V_{M.NPQ'}}{V_{A'.BCC'B'}} = \dfrac{11}{30}$. Tức là: $\dfrac{V_1}{V_{A'BCC'B'}} = \dfrac{11}{30}$.

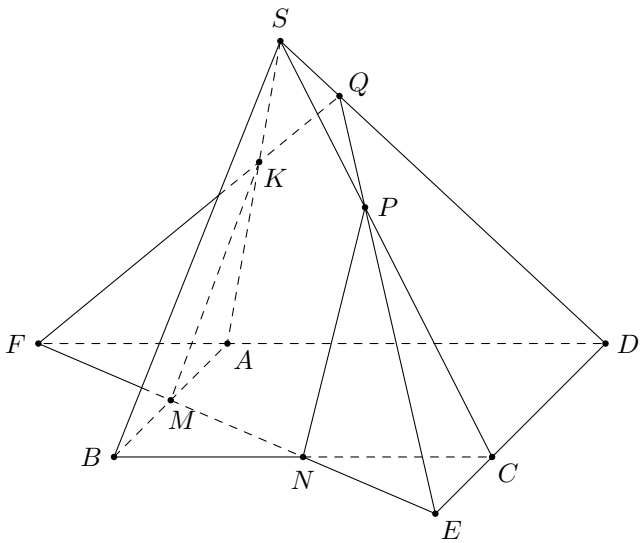
Mặt khác: $V_{A'.BCC'B'} + V_{A'.ABC} = V_{ABC.A'B'C'} \Leftrightarrow V_{A'.BCC'B'} + \dfrac{1}{3}V_2 = V_2 \Leftrightarrow V_{A'BCC'B'} = \dfrac{2}{3}V_2$.

Do đó: $\dfrac{V_1}{\dfrac{2}{3}V_2} = \dfrac{11}{30} \Leftrightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{11}{45}$. □

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Điểm K thuộc đoạn SA. Biết mặt phẳng (MNK) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần, phần chứa đỉnh S có thể tích bằng $\dfrac{7}{13}$ lần phần còn lại. Tính tỉ số $t = \dfrac{KA}{KS}$.

(A) $t = \dfrac{1}{2}$. (B) $t = \dfrac{3}{4}$. (C) $t = \dfrac{1}{3}$. (D) $t = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải.



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kéo dài MN cắt DA, DC lần lượt tại F, E.

Trong mặt phẳng (SAD), gọi $FK \cap SD = Q$. Trong mặt phẳng (SCD), gọi $QE \cap SC = P$.

Suy ra thiết diện là ngũ giác $MNPQK$ và $MN \parallel AC \parallel PK$.

Đặt $h = d(S,(ABCD))$. Ta có

$$\frac{KA}{KS} = t \Rightarrow \frac{KA}{SA} = \frac{t}{t+1} \Rightarrow d(K,(ABCD)) = d(P,(ABCD)) = \frac{t}{t+1} \cdot h.$$

Ta có

$$FA = BN = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \frac{FD}{FA} = 3.$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác SAD, suy ra

$$\frac{QS}{QD} \cdot \frac{FD}{FA} \cdot \frac{KA}{KS} = 1 \Leftrightarrow \frac{QS}{QD} \cdot 3 \cdot t = 1 \Rightarrow \frac{QS}{QD} = \frac{1}{3t} \Rightarrow \frac{QD}{SD} = \frac{3t}{3t+1} \Rightarrow d(Q,(ABCD)) = \frac{3t}{3t+1}h.$$

Mặt khác,

$$S_{FAM} = S_{NCE} = S_{BMN} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{8}S_{ABCD} \Rightarrow S_{DEF} = \frac{9}{8}S_{ABCD}.$$

Suy ra thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S là

$$\begin{aligned} V &= V_{QDEF} - V_{KAMF} - V_{PECN} = \frac{1}{3}\left(\frac{3t}{3t+1}h \cdot \frac{9}{8}S - \frac{t}{t+1} \cdot \frac{1}{8}S - \frac{t}{t+1} \cdot \frac{1}{8}S\right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{27t}{8(3t+1)} - \frac{2t}{8(t+1)}\right) \cdot h \cdot S_{ABCD}. \end{aligned}$$

Suy ra,

$$V = \left(\frac{27t}{8(3t+1)} - \frac{2t}{8(t+1)}\right) V_{ABCD}.$$

Phần thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S bằng $\frac{7}{13}$ phần còn lại suy ra thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S bằng $\frac{13}{20}$ thể tích khối chóp $S.ABCD$. Do đó,

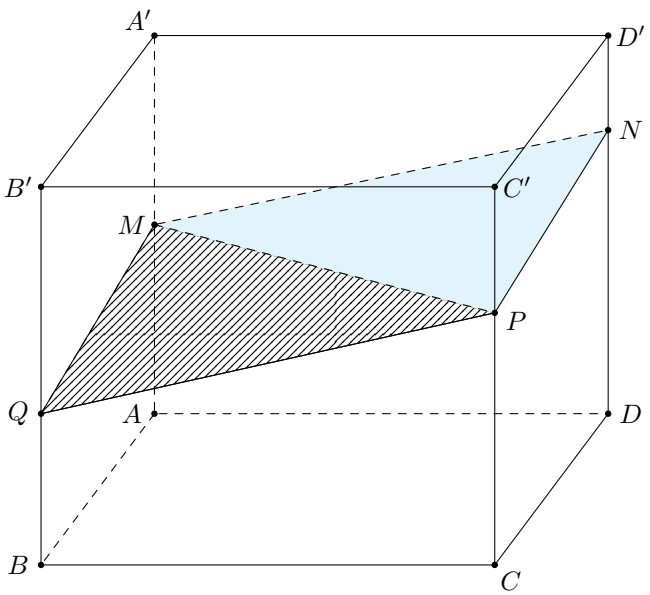
$$\frac{27t}{8(3t+1)} - \frac{2t}{8(t+1)} = \frac{13}{20} \Rightarrow t = \frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 31.

Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 2110. Biết $A'M = MA$, $DN = 3ND'$, $CP = 2C'P$ như hình vẽ. Mặt phẳng (MNP) chia khối hộp đã cho thành hai khối đa diện. Thể tích khối đa diện nhỏ hơn bằng

(A) $\frac{5275}{6}$. (B) $\frac{5275}{12}$. (C) $\frac{7385}{18}$. (D) $\frac{8440}{9}$.



Lời giải.

Gọi Q là giao điểm của mặt phẳng (MNP) với BB'.

Giả sử $\dfrac{A'M}{AA'}=x$, $\dfrac{C'P}{CC'}=y$, $\dfrac{D'N}{DD'}=z$, $\dfrac{B'Q}{BB'}=t$. Khi đó, $x+y=z+t$. Ta có

$$\frac{V_{A'B'D'.MQN}}{A'B'D'.ABD}=\frac{x+z+t}{3}\Rightarrow\frac{V_{A'B'D'.MQN}}{V_{A'B'C'D'.ABCD}}=\frac{x+z+t}{6}.$$

$$\frac{V_{C'B'D'.PQN}}{V_{C'B'D'.CBD}}=\frac{y+z+t}{3}\Rightarrow\frac{V_{C'B'D'.PQN}}{V_{A'B'C'D'.ABCD}}=\frac{y+z+t}{6}.$$

Suy ra,

$$\frac{V_{MNPQ.A'D'C'B'}}{V_{ABCD.A'D'C'B'}}=\frac{1}{2}\left(\frac{A'M}{AA'}+\frac{C'P}{CC'}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{12}$$

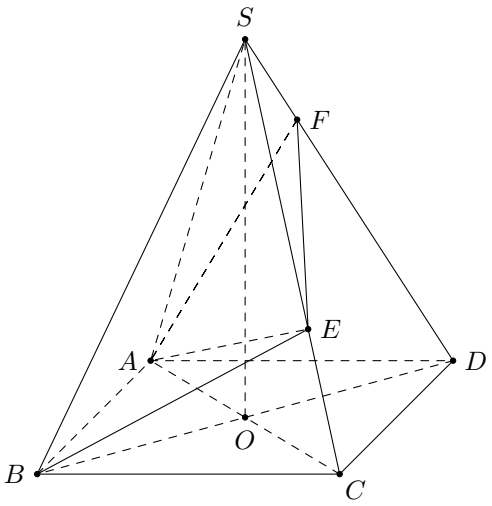
$$\Rightarrow\quad V_{MNPQ.A'D'C'B'}=\frac{5}{12}V_{ABCD.A'D'C'B'}=\frac{5275}{6}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB=2a$, $BC=a$, $SA=SB=SC=SD=a\sqrt{2}$. Giả sử E thuộc cạnh SC sao cho $SE=2EC$, F là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SF=\dfrac{1}{3}FD$. Thể tích khối đa diện $SABEF$ bằng

(A) $\dfrac{5\sqrt{3}a^3}{36}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{18}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{9}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{27}$.

Lời giải.



Vì $SA=SB=SC=SD=a\sqrt{2}$ nên hình chiếu vuông góc hạ từ đỉnh S xuống đáy trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đáy, tức là trùng với điểm $O=AC\cap BD$.

Ta có

$$SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{2a^2-\frac{4a^2+a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow S_{S.ABCD}=\frac{1}{3}\cdot SO\cdot S_{ABCD}=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Ta có

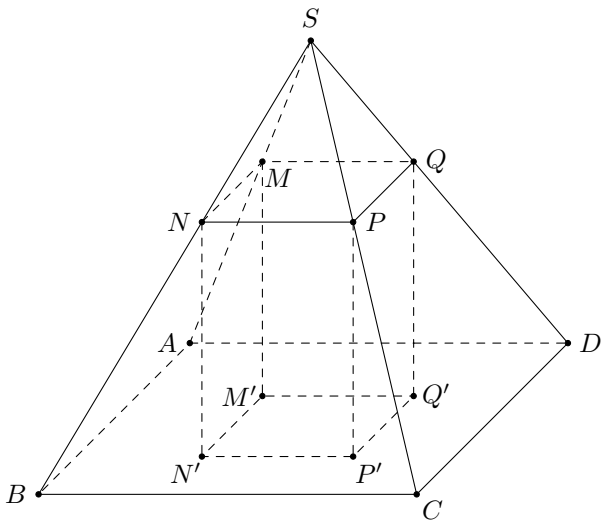
$$V_{S.ABEF}=V_{S.ABE}+V_{S.AEF}=\frac{SE}{SC}\cdot V_{S.ABC}+\frac{SE}{SC}\cdot\frac{SF}{SD}\cdot V_{S.ACD}=\frac{2}{3}\left(\frac{a^3\sqrt{3}}{6}\right)+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{a^3\sqrt{3}}{6}\right)=\frac{5\sqrt{3}a^3}{36}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q. Gọi M', N', P', Q' lần lượt là hình chiếu của M, N, P, Q trên mặt phẳng đáy. Tìm tỉ số $\dfrac{SM}{SA}$ để thể tích khối đa diện $MNPQ.M'N'P'Q'$ đạt giá trị lớn nhất.

(A) $\dfrac{3}{4}$. (B) $\dfrac{2}{3}$. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.



Đặt $\dfrac{SM}{SA} = x$ $(0 < x < 1)$. Kí hiệu V, h lần lượt là thể tích và chiều cao của khối chóp đã cho. Theo Định lý Ta-lét, ta có

$$\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{QM}{DA} = \frac{SM}{SA} = x.$$

Khi đó,

$$\frac{\mathrm{d}(M,(ANCD))}{\mathrm{d}(S,(ABCD))} = \frac{AM}{SA} = 1 - x \Rightarrow \mathrm{d}(M,(ABCD)) = (1-x)h.$$

Vì vậy

$$V_{MNPQ.M'N'P'Q'} = MN \cdot MQ \cdot \mathrm{d}\left(M,(ABCD)\right) = x^2(1-x)h \cdot AB \cdot AD = 3x^2(1-x)V.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$x^2(1-x) = \frac{1}{2}x \cdot x(2-2x) \le \frac{1}{2}\left(\frac{x+x+2-2x}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}.$$

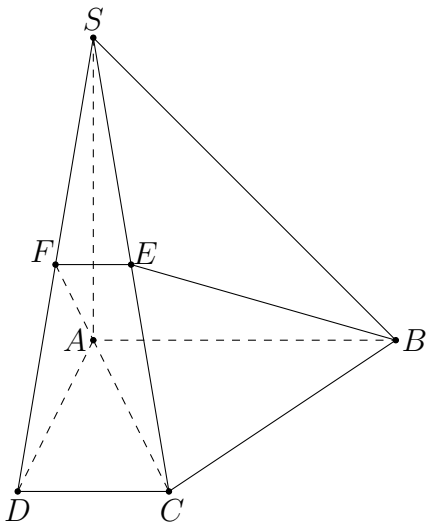
Do đó, $V_{MNPQ.M'N'P'Q'} \le \dfrac{4}{9}V$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2-2x \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với hai đáy là AB và CD, $AB = 2CD$. Gọi E là một điểm trên cạnh SC. Mặt phẳng (ABE) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau. Tính tỉ số $\dfrac{SE}{SC}$.

(A) $\dfrac{\sqrt{10}-2}{2}$. (B) $\sqrt{6}-2$. (C) $\sqrt{2}-1$. (D) $\dfrac{\sqrt{26}-4}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} (ABE)\cap(SDC)=Et \\ AB \parallel DC \end{cases} \Rightarrow Et \parallel DC \parallel AB.$



Gọi $F = Et \cap SD$, $\dfrac{SE}{SC} = x$, $(0 < x < 1) \Rightarrow \dfrac{SF}{SD} = \dfrac{SE}{SC} = x$.

Do $ABCD$ là hình thang có $AB = 2CD$ nên $S_{\triangle ACB} = 2S_{\triangle ADC}$

$\Rightarrow S_{\triangle ADC} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}; S_{\triangle ACB} = \dfrac{2}{3}S_{ABCD}$.

Ta có $\dfrac{V_{S.ACD}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{S_{\triangle ACD}}{S_{ABCD}} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{S.ACD} = \dfrac{1}{3}V_{S.ABCD}$.

$\dfrac{V_{S.ABC}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{ABCD}} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{2}{3}V_{S.ABCD}$.

Lại có $\dfrac{V_{S.AEF}}{V_{S.ACD}} = \dfrac{SE}{SC}\cdot\dfrac{SF}{SD} = x^2$

$\Rightarrow V_{S.AEF} = x^2 \cdot V_{S.ACD} = \dfrac{1}{3}x^2 \cdot V_{S.ABCD}$.

$\dfrac{V_{S.ABE}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SE}{SC} = x \Rightarrow V_{S.ABE} = x \cdot V_{S.ABC} = \dfrac{2}{3}x \cdot V_{S.ABCD}$.

Theo bài ra mặt phẳng (ABE) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau nên

$$\begin{aligned} & V_{S.ABEF} = \frac{1}{2}V_{SABCD} \\ \Leftrightarrow\ & V_{S.AEF} + V_{S.ABE} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x\right)\cdot V_{S.ABCD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{2} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-2+\sqrt{10}}{2} \\ x = \dfrac{-2-\sqrt{10}}{2}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Do $0 < x < 1 \Rightarrow x = \dfrac{-2+\sqrt{10}}{2}$.

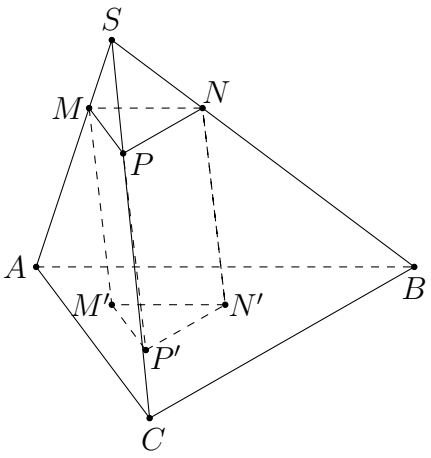
Chọn đáp án (A) □

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABC$, một mặt phẳng song song với đáy (ABC) cắt các cạnh bên SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P. Gọi M', N', P' lần lượt là hình chiếu của M, N, P trên mặt phẳng đáy. Tìm tỉ số $\dfrac{SM}{SA}$ để thể tích khối đa diện $MNP.M'N'P'$ đạt giá trị lớn nhất.

(A) $\dfrac{3}{4}$. (B) $\dfrac{2}{3}$. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Đặt $\dfrac{SM}{SA} = x\ (0 < x < 1)$, kí hiệu V, h lần lượt là thể tích và chiều cao của khối chóp đã cho.



Theo định lý Ta-lét, ta có $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{NP}{BC} = \dfrac{PQ}{CD} = \dfrac{SM}{SA} = x$.

Và $\dfrac{d\,(M,(ABC))}{d\,(S,(ABC))} = \dfrac{AM}{SA} = 1 - x$

$\Rightarrow \mathrm{d}\,(M,(ABC)) = (1-x)\,h$.

Vì vậy

$$\begin{aligned} V_{MNP.M'N'P'} &= S_{MNP} \cdot d\,(M,(ABCD)) \\ &= x^2 \cdot (1-x) \cdot h \cdot S_{ABC} \\ &= 3x^2\,(1-x)\,V. \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có $x^2\,(1-x) = \dfrac{1}{2}x \cdot x \cdot (2-2x) \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+x+2-2x}{3}\right)^3 = \dfrac{4}{27}$.

Do đó, $V_{MNP.M'N'P'} \le \dfrac{4}{9}V$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 2-2x \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$, một mặt phẳng (P) song song với đáy (ABC) và cắt các cạnh bên SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P. Tìm tỉ số $\dfrac{SM}{SA}$ để (P) chia khối chóp đã cho thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau.

(A) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. (B) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{1}{4}$.

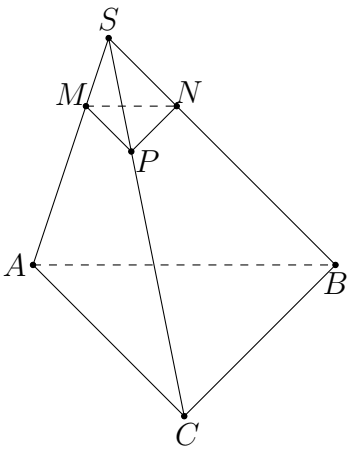
Lời giải.

Đặt $\dfrac{SM}{SA} = x\,(0 < x < 1)$.

Theo định lý Ta-lét, ta có $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{SP}{SC} = x$

và $V_{S.MNP} = \dfrac{SM}{SA} \cdot \dfrac{SN}{SB} \cdot \dfrac{SP}{SC} \cdot V_{S.ABC} = x^3 \cdot V_{S.ABC}$.

Theo giả thiết, $V_{S.MNP} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABC}$ nên $x^3 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.



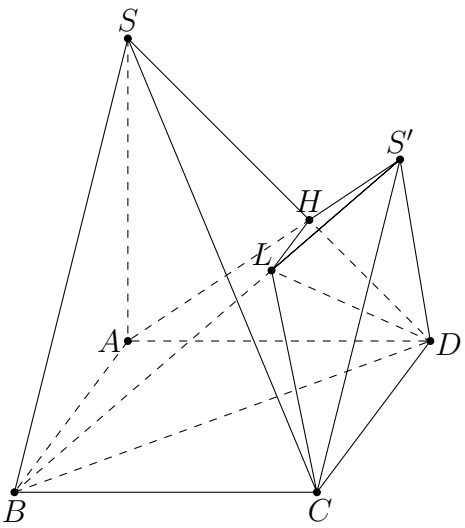
Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại D lấy điểm S' thỏa mãn $S'D = \dfrac{1}{2}SA$ và S', S ở cùng phía đối với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

(A) $\dfrac{4}{9}$. (B) $\dfrac{7}{9}$. (C) $\dfrac{7}{18}$. (D) $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $V_2 = \dfrac{1}{3}SA \cdot S_{ABCD}$, $V_{S'.ABCD} = \dfrac{1}{3}S'D \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}V_2$.
Gọi $H = S'A \cap SD$, $L = S'B \cap (SCD)$ khi đó thể tích chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$ là thể tích khối $HLCDAB$.
Do $AB \parallel CD$ nên giao tuyến HL của hai mặt $(S'AB)$ và (SCD) phải song song với AB.



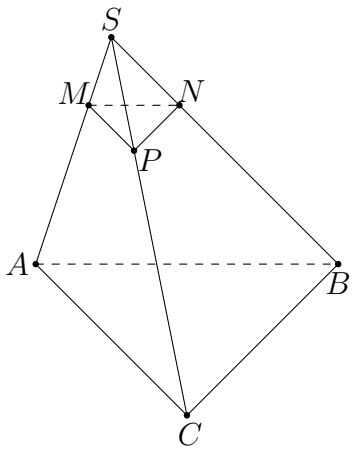
$V_1 = V_{HLCDAB} = V_{S'.ABCD} - V_{S'.HLCD}$;
$\dfrac{S'H}{HA} = \dfrac{S'D}{SA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{S'H}{S'A} = \dfrac{1}{3}$.
$\dfrac{V_{S'.HLD}}{V_{S'.ABD}} = \dfrac{S'H \cdot S'L}{SA \cdot SB} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}$
$\Rightarrow V_{S'.HLD} = \dfrac{1}{9}V_{S'.ABD} = \dfrac{1}{18}V_{S'.ABCD}$.
$\dfrac{V_{S'.LCD}}{V_{S'.BCD}} = \dfrac{S'L}{S'B} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{S'.LCD} = \dfrac{1}{3}V_{S'.BCD} = \dfrac{1}{6}V_{S'.ABCD}$.
$V_{S'.HLCD} = V_{S'.HLD} + V_{S'.LCD} = \dfrac{1}{18}V_{S'.ABCD} + \dfrac{1}{6}V_{S'.ABCD} = \dfrac{2}{9}V_{S'.ABCD}$.
$\Rightarrow V_1 = V_{S'.ABCD} - V_{S'.HLCD} = \dfrac{7}{9}V_{S'.ABCD} = \dfrac{7}{18}V_2$.
Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{7}{18}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABC$ có tất cả các cạnh đều bằng a, một mặt phẳng (P) song song với mặt đáy (ABC) và cắt các cạnh bên SA, SB, SC lần lượt tại M , N, P. Tính diện tích tam giác MNP biết mặt phẳng (P) chia khối chóp đã cho thành hai khối đa diện có diện tích bằng nhau.

(A) $S_{MNP} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$. (B) $S_{MNP} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}$. (C) $S_{MNP} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4\sqrt[3]{2}}$. (D) $S_{MNP} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4\sqrt[4]{4}}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) song song với (ABC) và cắt các cạnh bên SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P.



Theo Ta-lét ta có $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{SP}{SC} = x > 0$.
Do đó $\dfrac{V_{S.MNP}}{V_{SABC}} = \dfrac{SM}{SA} \cdot \dfrac{SN}{SB} \cdot \dfrac{SP}{SC} = x^3 > 0$.
Theo giả thiết
$\dfrac{V_{S.MNP}}{V_{SABC}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^3 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$
$\Rightarrow \dfrac{MN}{AB} = \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow MN = \dfrac{a}{\sqrt[3]{2}}$.

Vì tam giác ABC đều cạnh a nên tam giác MNP là tam giác đều có cạnh bằng $\dfrac{a}{\sqrt[3]{2}}$.

Vậy $S_{MNP} = \dfrac{\left(\dfrac{a}{\sqrt[3]{2}}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4\sqrt[3]{4}}$.

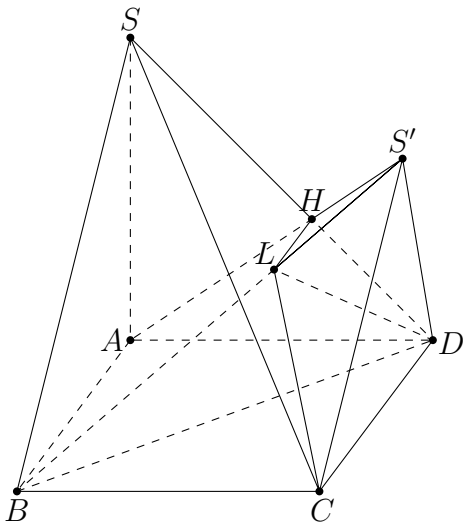
Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trên đường thẳng qua D và song song với SA lấy điểm S' thỏa mãn $\overrightarrow{S'D} = k\overrightarrow{SA}$ với $k > 0$. Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

(A) $\dfrac{2k^2+k}{2(k+1)^2}$. (B) $\dfrac{3k+2}{2(k+1)^2}$. (C) $\dfrac{3k^2+2k}{2(k+1)^2}$. (D) $\dfrac{k}{k+1}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{V_{S'.ABCD}}{V_2} = \dfrac{S'D}{SA} = k$.



Gọi $H = S'A \cap SD$, $L = S'B \cap (SCD)$ khi đó thể tích chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$ là thể tích khối $HLCDAB$. Do $AB \parallel CD$ nên giao tuyến HL của hai mặt $(S'AB)$ và (SCD) phải song song với AB. $V_1 = V_{HLCDAB} = V_{S'.ABCD} - V_{S'.HLCD}$.

$\dfrac{S'H}{HA} = \dfrac{S'D}{SA} = k \Rightarrow \dfrac{S'H}{S'A} = \dfrac{k}{k+1} \Rightarrow \dfrac{S'L}{S'B} = \dfrac{k}{k+1}$.

$\dfrac{V_{S'.HLD}}{V_{S'.ABD}} = \dfrac{S'H \cdot S'L}{SA \cdot SB} = \dfrac{k^2}{(k+1)^2}$

$\Rightarrow V_{S'.HLD} = \dfrac{k^2}{(k+1)^2} V_{S'.ABD} = \dfrac{k^2}{2(k+1)^2} V_{S'.ABCD}$.

$\dfrac{V_{S'.LCD}}{V_{S'.BCD}} = \dfrac{S'L}{S'B} = \dfrac{k}{k+1} \Rightarrow V_{S'.LCD} = \dfrac{k}{k+1} V_{S'.BCD} = \dfrac{k}{2(k+1)} V_{S'.ABCD}$

$V_{S'.HLCD} = V_{S'.HLD} + V_{S'.LCD} = \dfrac{k^2}{2(k+1)^2} V_{S'.ABCD} + \dfrac{k}{2(k+1)} V_{S'.ABCD} = \dfrac{2k^2+k}{2(k+1)^2} V_{S'.ABCD} \Rightarrow V_1 =$

$V_{S'.ABCD} - V_{S'.HLCD} = \dfrac{3k+2}{2(k+1)^2} V_{S'.ABCD} = \dfrac{3k^2+2k}{2(k+1)^2} V_2$.

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{3k^2+2k}{2(k+1)^2}$.

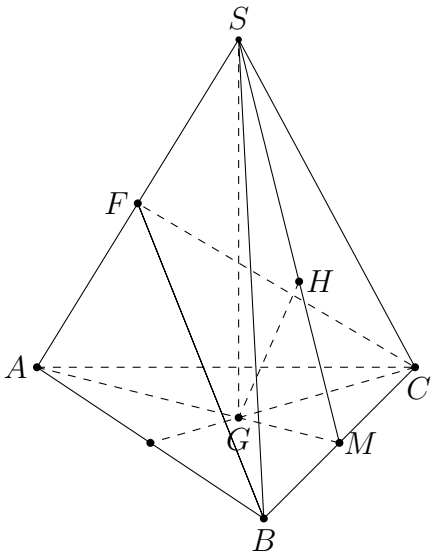
Chọn đáp án (C) □

Câu 40. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, biết góc tạo bởi SG và (SBC) bằng $30°$. Mặt phẳng chứa BC và vuông góc với SA chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích V_1, V_2 trong đó V_1 là phần thể tích chứa điểm S. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

(A) 6. (B) $\dfrac{1}{6}$. (C) $\dfrac{6}{7}$. (D) 7.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC, $F = SA \cap (\alpha)$, trong đó (α) là mặt phẳng chứa BC và vuông góc SA, H là hình chiếu của G lên SM.
Ta có $SA \perp (\alpha)$, $FM \subset (\alpha)$ nên $SA \perp FM$.
Vì $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên SG là đường cao hình chóp ứng với đáy (ABC) và ABC là tam giác đều.
Ta có AM vừa là đường trung tuyến, vừa là đường cao trong tam giác đều nên $AM \perp BC$.
$SG \perp (ABC)$, $BC \subset (ABC)$ nên $SG \perp BC$.
$AM \cap SG = G$ và $AM, SG \subset (SAM)$.



Suy ra $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp GH$. Do đó $\begin{cases} GH \perp SM \\ GH \perp BC \\ SM \cap BC = M \\ SM, BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow GH \perp (SBC)$.

Ta lại có $\begin{cases} SG \cap (SBC) = S \\ SH \perp (SBC) \end{cases} \Rightarrow SH$ là hình chiếu vuông góc của SG lên (SBC).

$\Rightarrow \left(\widehat{SG, (SBC)}\right) = \left(\widehat{SG, SH}\right) = \widehat{GSH} = 30^\circ$.

Giả sử cạnh của tam giác đều ABC là a.

Xét tam giác SGM vuông tại G, ta có $SG = GM \cot 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{a}{2}$.

Xét tam giác SAG vuông tại G, ta có $SA = \sqrt{AG^2 + SG^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{3} + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$.

Trong tam giác SAM, ta có $MF = \dfrac{SG \cdot AM}{SA} = \dfrac{\dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{21}}{6}} = \dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$.

Xét tam giác AFM vuông tại F, ta có

$$FA = \sqrt{AM^2 - FM^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3a\sqrt{7}}{14}\right)^2} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Suy ra $\dfrac{SF}{SA} = 1 - \dfrac{FA}{SA} = 1 - \dfrac{\dfrac{a\sqrt{21}}{7}}{\dfrac{a\sqrt{21}}{6}} = 1 - \dfrac{6}{7} = \dfrac{1}{7}$.

Mà $\dfrac{V_{S.FBC}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SF}{SA} = \dfrac{1}{7} \Rightarrow V_1 = V_{S.FBC} = \dfrac{1}{7} V_{S.ABC} \Rightarrow V_2 = \dfrac{6}{7} V_{S.ABC}$.

Do đó $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{6}$.

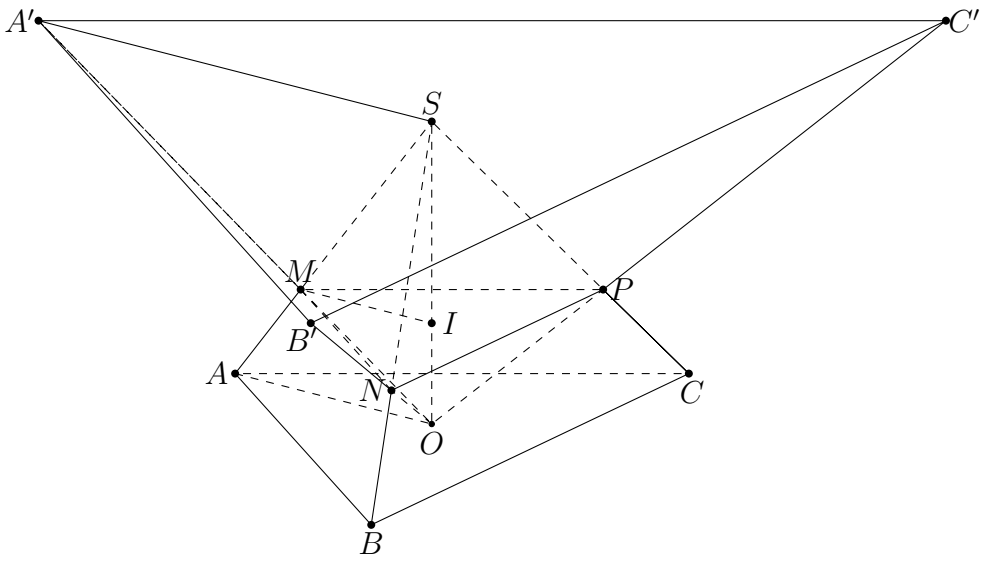
Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên tạo với đường cao một góc 30°, O là trọng tâm tam giác ABC. Một hình chóp tam giác đều thứ hai $O.A'B'C'$ có S là tâm của tam giác $A'B'C'$

và cạnh bên của hình chóp $O.A'B'C'$ tạo với đường cao một góc 60° sao cho mỗi cạnh bên SA, SB, SC lần lượt cắt các cạnh bên OA', OB', OC'. Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối chóp $S.ABC$ và $O.A'B'C'$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp $S.ABC$. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

(A) $\dfrac{9}{16}$. (B) $\dfrac{1}{4}$. (C) $\dfrac{27}{64}$. (D) $\dfrac{9}{64}$.

Lời giải.



Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của mỗi cạnh bên SA, SB, SC tương ứng với các cạnh bên OA', OB', OC'. Phần chung của hai khối chóp $S.ABC$ và $O.A'B'C'$ là khối đa diện $SMNPO$.

Từ giả thiết ta có $(ABC) \parallel (A'B'C')$ mà ta có $MN \parallel AB \parallel A'B'$, $NP \parallel AC \parallel A'C'$ do đó $(ABC) \parallel (MNP)$, $(A'B'C') \parallel (MNP)$ và $\triangle MNP$ đều.

Xét các tam giác vuông SMI và OMI ta có $SI = \dfrac{MI}{\tan 30^\circ} = MI\sqrt{3}$, $OI = \dfrac{MI}{\tan 60^\circ} = \dfrac{MI}{\sqrt{3}}$.

Suy ra $\dfrac{SI}{OI} = 3$ suy ra $\dfrac{SI}{SO} = \dfrac{MN}{AB} = \dfrac{3}{4}$, $\dfrac{OI}{OS} = \dfrac{MN}{A'B'} = \dfrac{1}{4}$.

Suy ra $\dfrac{A'B'}{AB} = 3$ hay $\dfrac{V_{O.A'B'C'}}{V_2} = 3^2 = 9 \Rightarrow V_{O.A'B'C'} = 9V_2$.

Do đó $\dfrac{V_{S.MNP}}{V_2} = \left(\dfrac{SI}{SO}\right)^3 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^3 = \dfrac{27}{64}$.

Mặt khác $\dfrac{V_{O.MNP}}{V_{O.A'B'C'}} = \left(\dfrac{OI}{OS}\right)^3 = \left(\dfrac{1}{4}\right)^3 = \dfrac{1}{64}$, suy ra $\Rightarrow \dfrac{V_{O.MNP}}{V_2} = \dfrac{9}{64}$.

Từ đó $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{V_{OMNP} + V_{SMNP}}{V_2} = \dfrac{27}{64} + \dfrac{9}{64} = \dfrac{9}{16}$.

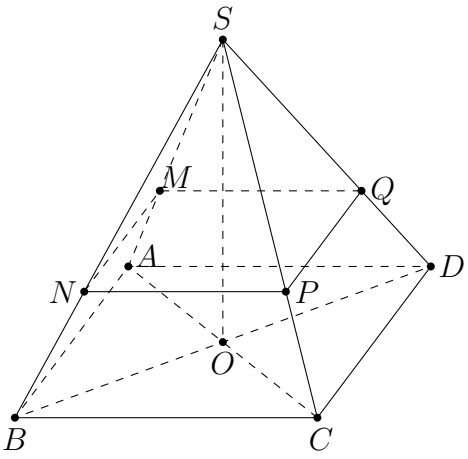
Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Một viên đá có dạng khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a. Người ta cưa viên đá theo mặt phẳng song song với mặt đáy của khối chóp để chia viên đá thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính diện tích thiết diện viên đá bị cưa bởi mặt phẳng nói trên.

(A) $\dfrac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$. (B) $\dfrac{a^2}{\sqrt[3]{2}}$. (C) $\dfrac{a^2}{2}$. (D) $\dfrac{a^2}{2\sqrt[3]{2}}$.

Lời giải.

Giả sử cắt viên đá khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ theo mặt phẳng $(MNPQ)$ song song với $(ABCD)$ như hình vẽ.



Theo Ta-lét ta có $\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{SN}{SB}=\dfrac{SP}{SC}=\dfrac{SQ}{SD}=x>0$.

Theo giả thiết ta có

$$\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{V_{S.MNP}+V_{S.MPQ}}{2V_{S.ABC}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}}+\frac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACD}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{SM}{SA}\cdot\frac{SP}{SC}\left(\frac{SN}{SB}+\frac{SQ}{SD}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^3=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\Rightarrow\frac{MN}{AB}=\frac{SM}{SA}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\Rightarrow MN=\frac{a}{\sqrt[3]{4}}.$$

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $MNPQ$ là hình vuông cạnh $\dfrac{a}{\sqrt[3]{4}}$.

Vậy $S_{MNPQ}=\left(\dfrac{a}{\sqrt[3]{4}}\right)^2=\dfrac{a^2}{2\sqrt[3]{2}}$.

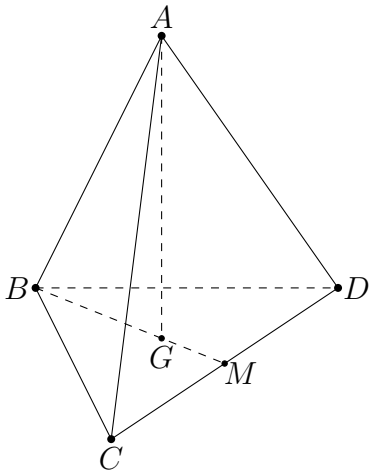
Chọn đáp án (D) □

Câu 43. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm tam giác BCD. Tính thể tích của khối chóp $A.GBC$.

(A) $V=3$. (B) $V=4$. (C) $V=6$. (D) $V=5$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{V_{A.GBC}}{V_{A.BCD}}=\dfrac{S_{GBC}}{S_{BCD}}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow V_{A.GBC}=\dfrac{1}{3}V_{A.BCD}=4$.



Chọn đáp án (B) □

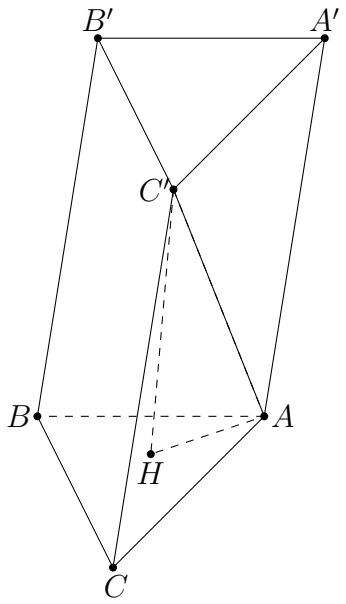
Câu 44. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh $AC=2\sqrt{2}$. Biết AC' tạo với mặt phẳng (ABC) góc 60° và $AC'=4$. Tính thể tích V của khối đa diện $ABCB'C'$.

(A) $V=\dfrac{8}{3}$. (B) $V=\dfrac{16}{3}$. (C) $V=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. (D) $V=\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC^2 = \dfrac{1}{2}\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 4$
và $d\left(C', (ABC)\right) = C'H = AC' \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$.
Khi đó,

$$\begin{aligned} V_{ABCB'C'} &= V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'} \\ &= V_{ABC.A'B'C'} - \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} \\ &= \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} \\ &= \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

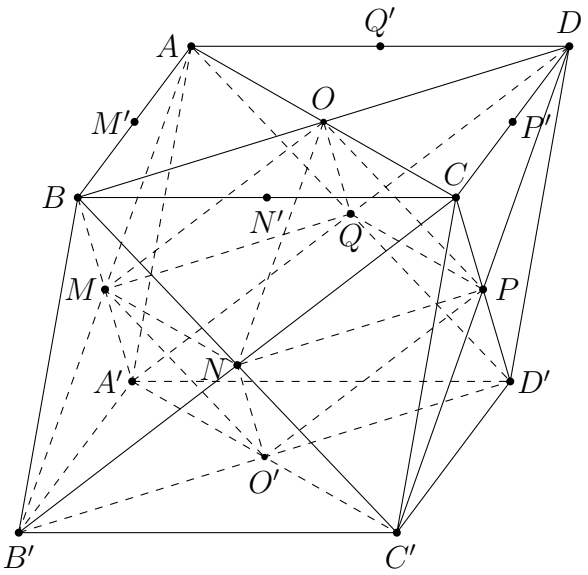


Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối của hai khối tứ diện $A'BC'D$ và $AB'CD'$. Gọi V_2 là thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) $\dfrac{1}{6}$. (C) $\dfrac{1}{3}$. (D) $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

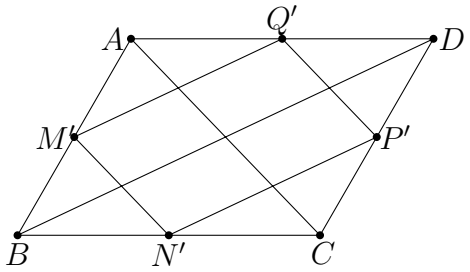


Gọi O, O', M, N, P, Q lần lượt là tâm của các hình chữ nhật $ABCD$, $A'B'C'D'$, $A'B'BA$, $BB'C'C$, $CC'D'D$, $AA'D'D$.

Ta có phần chung của hai khối tứ diện $A'BC'D$ và $AB'CD'$ là bát diện $OMNPQO'$.

Gọi M', N', P', Q' lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{S_{MNPQ}}{S_{ABCB}} &= \frac{S_{M'N'P'Q'}}{S_{ABCB}}\\ &= \frac{S_{ABCB}-S_{AM'Q'}-S_{BM'N'}-S_{CN'P'}-S_{DP'Q'}}{S_{ABCB}}\\ &= \frac{S_{ABCB}-4\cdot\frac{1}{8}.S_{ABCB}}{S_{ABCB}}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$



Ngoài ra, chiều cao của khối chóp $V_{O.MNPQ}$ bằng $\frac{1}{2}$ chiều cao của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Suy ra $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2V_{O.MNPQ}}{V_2}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 46. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, trên các cạnh AA', BB' lấy các điểm M, N sao cho $AA'=3A'M$, $BB'=3B'N$. Mặt phẳng $(C'MN)$ chia khối lăng trụ đã cho thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $C'.A'B'NM$, V_2 là thể tích của khối đa diện $ABCMNC'$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

(A) $\frac{V_1}{V_2}=\frac{4}{7}$. (B) $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{7}$. (C) $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{7}$. (D) $\frac{V_1}{V_2}=\frac{3}{7}$.

Lời giải.

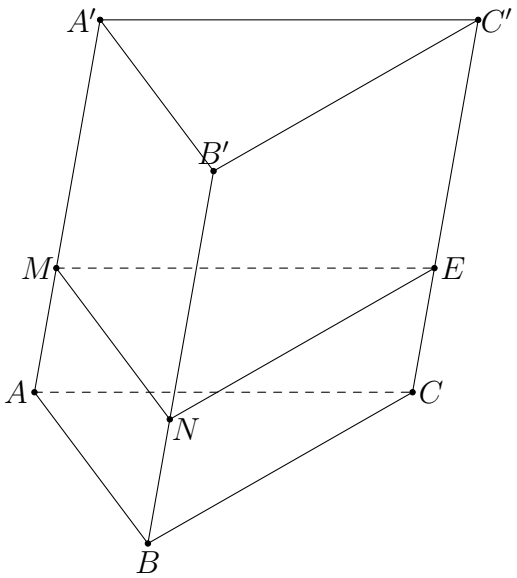
Đặt $V=V_{ABC.A'B'C'}$. Lấy điểm E trên CC' sao cho $CC'=3C'E$.

Suy ra $\frac{A'M}{A'A}=\frac{B'N}{B'B}=\frac{C'E}{C'C}=\frac{1}{3}\Rightarrow (MNE)\ /\!/\ (ABC)$.

Ta có $V_{C'.MNE}=\frac{1}{3}V_{A'B'C'.MNE}$ nên $V_1=\frac{2}{3}V_{A'B'C'.MNE}$.

Mặt khác $V_{A'B'C'.MNE}=\frac{1}{3}V$.

Suy ra $V_1=\frac{2}{3}.\frac{1}{3}V=\frac{2}{9}V\Rightarrow V_2=V-\frac{2}{9}V=\frac{7}{9}V\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{7}$.

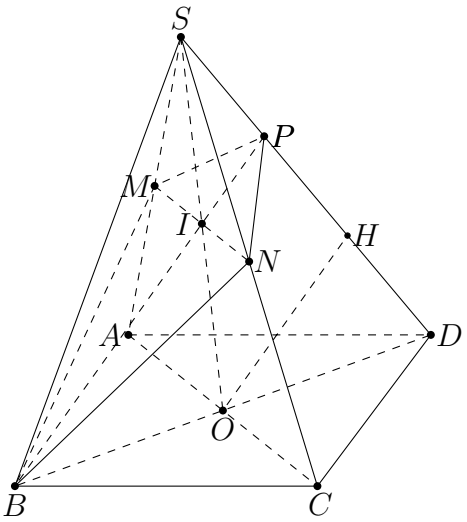


Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC. Mặt phẳng (BMN) cắt SD tại P. Tỉ số $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}$ bằng

(A) $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{16}$. (B) $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{6}$. (C) $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{12}$. (D) $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{8}$.

Lời giải.



Ta có M, N là trung điểm của SA, SC nên $\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{SN}{SC}=\dfrac{1}{2}$.

Cách 1. Áp dụng định lý Menelaus cho ΔSOD ta có
$$\frac{PS}{PD}\cdot\frac{BD}{BO}\cdot\frac{IO}{IS}=1\Rightarrow\frac{PS}{PD}\cdot 2\cdot 1=1\Rightarrow\frac{PS}{PD}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{SP}{SD}=\frac{1}{3}.$$

Cách 2. Kẻ $OH\parallel BP$, ta có O là trung điểm của BD nên H là trung điểm của PD.

Ta có $OH\parallel IP$ mà I là trung điểm của SO nên P là trung điểm của SH.

Suy ra $SP=PH=HD\Rightarrow\dfrac{SP}{SD}=\dfrac{1}{3}$.

Theo công thức tỉ số thể tích ta có $\dfrac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{2V_{S.BMP}}{2V_{S.BAD}}=\dfrac{SM}{SA}\cdot\dfrac{SP}{SD}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$.

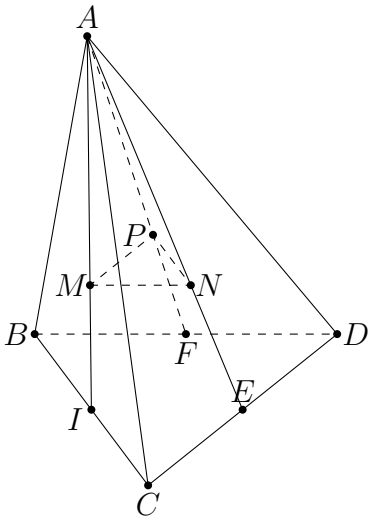
Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 54, gọi M, N ,P lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACD, ADB. Tính thể tích của khối tứ diện $AMNP$.

(A) $V=\dfrac{27}{2}$. (B) $V=4$. (C) $V=9$. (D) $V=16$.

Lời giải.

Gọi I, E, Flần lượt là trung điểm các cạnh BC, CD, DB.



Ta có

$$\begin{aligned}V_{AMNP}&=\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot V_{ADEF}\\&=\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{4}V_{ABCD}\\&=\frac{2}{27}V_{ABCD}\\&=\frac{2}{27}\cdot 54=4.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng 6 và góc nhọn bằng 45°, cạnh bên của hình hộp bằng 10 và tạo với mặt phẳng đáy một góc 45°. Tính thể tích khối đa diện $ABCDD'B'$.

(A) $V = 180$. (B) $V = 60$. (C) $V = 90$. (D) $V = 120$.

Lời giải.

Gọi $A'H$ là đường cao của hình hộp.

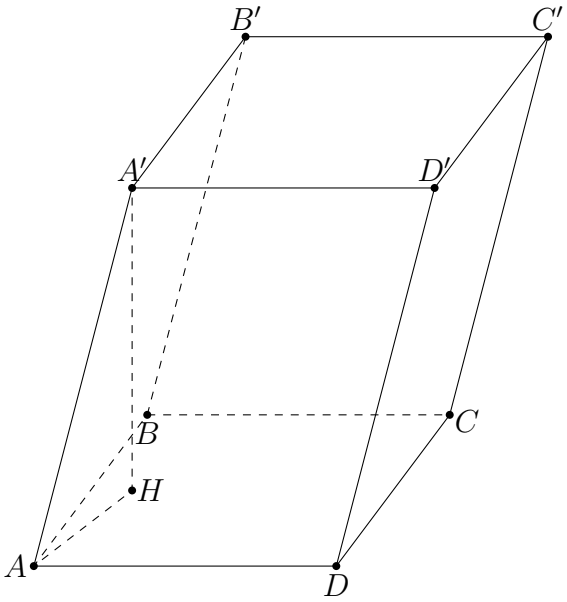
Khi đó $(AA'; (ABCD)) = \widehat{A'AH} = 45^\circ$

$\Rightarrow A'H = AA' \cdot \sin 45^\circ = 5\sqrt{2}$.

$S_{ABCD} = 6^2 \cdot \sin 45^\circ = 18\sqrt{2}$.

Nên $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.A'H = 180$.

$$\begin{aligned} V_{ABCDD'B'} &= V_{A.BDD'B'} + V_{C.BDD'B'} \\ &= \frac{2}{3} \cdot V_{ABD.A'B'D'} + \frac{2}{3} V_{BCD.B'C'D'} \\ &= \frac{2}{3} V_{ABCD.A'B'C'D'} = 120. \end{aligned}$$



Chọn đáp án (D) □

Câu 50. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, gọi M, N lần lượt thuộc các cạnh bên AA', CC' sao cho $MA = MA'$, $NC = 4NC'$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Hỏi trong bốn khối tứ diện $GA'B'C'$, $BB'MN$, $ABB'C'$ và $A'BCN$, khối tứ diện nào có thể tích nhỏ nhất?

(A) Khối $A'BCN$. (B) Khối $GA'B'C'$. (C) Khối $ABB'C'$. (D) Khối $BB'MN$.

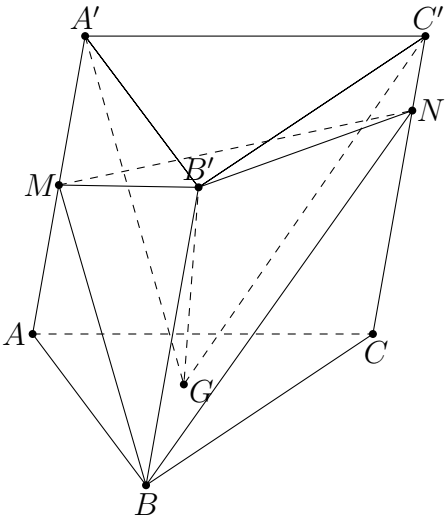
Lời giải.

Đặt $V = V_{ABC.A'B'C'}$.

Ta có $G \in (ABC)$ nên $V_{G.A'B'C'} = \frac{1}{3}V$.

Mà

$$\begin{aligned} V_{BB'MN} &= V_{M.BB'N} = V_{A.BB'N} \\ &= \frac{1}{2} \cdot V_{A.BB'C'C} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} V = \frac{1}{3} V. \end{aligned}$$



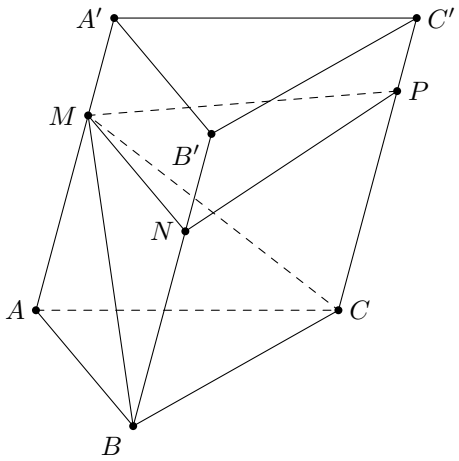
Và $V_{ABB'C'} = \dfrac{1}{2}V_{A.BB'C'C} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}V = \dfrac{1}{3}V$.
Ta có $\dfrac{S_{CBN}}{S_{CBC'}} = \dfrac{CN}{CC'} = \dfrac{4}{5}$ nên $V_{A'BCN} = \dfrac{4}{5}V_{A'BCC'} = \dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{1}{2}V_{A'BCC'B'} = \dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}V = \dfrac{4}{15}V$.
Vậy khối tứ diện $A'BCN$ có thể tích nhỏ nhất.

Chọn đáp án (A) □

Câu 51. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 60. Gọi M, N, P lần lượt thuộc các cạnh bên AA', BB', CC' sao cho $MA = 2MA'$, $NB = 3NB'$, $PC = 4PC'$. Tính thể tích khối đa diện $BCMNP$.

(A) 40. (B) 30. (C) 31. (D) $\dfrac{85}{3}$.

Lời giải.



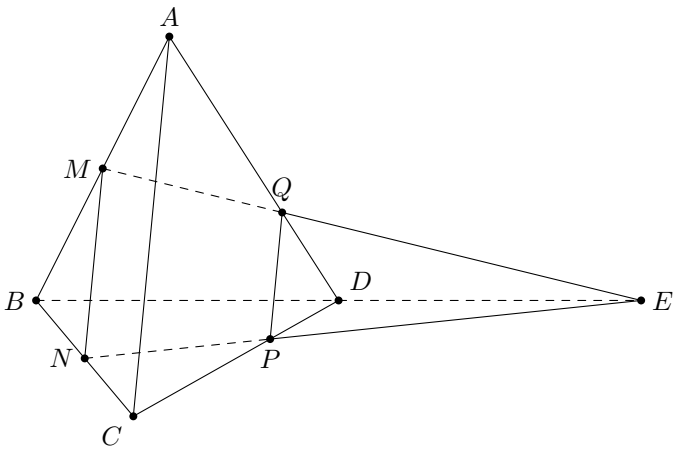
Gọi d là khoảng cách giữa BB' và CC'.
Ta có $S_{BCPN} = \dfrac{1}{2}(CP + BN)\cdot \mathrm{d} = \dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{3}{4}BB' + \dfrac{4}{5}CC'\right)\cdot \mathrm{d} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{31}{20}BB'\cdot \mathrm{d} = \dfrac{31}{40}\cdot S_{BCC'B'}$.
Do đó $V_{BCMNP} = V_{M.BCPN} = \dfrac{31}{40}V_{M.BCC'B'} = \dfrac{31}{40}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{31}{40}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 60 = 31$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 52. Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và E đối xứng với điểm B qua D. Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V. Tính V.

(A) $V = \dfrac{13\sqrt{2}a^3}{216}$. (B) $V = \dfrac{7\sqrt{2}a^3}{216}$. (C) $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{18}$. (D) $V = \dfrac{11\sqrt{2}a^3}{216}$.

Lời giải.



Gọi $P = CD \cap NE$, $Q = AD \cap ME$, khi đó (MNE) chia hình chóp là hai khối đa diện gồm $ACMNPQ$ và $BMNDQP$.

Dễ dàng chứng minh được P, Q lần lượt là trọng tâm tam giác EBC và EAB.

Khi đó $\dfrac{EQ}{EM} = \dfrac{EP}{EN} = \dfrac{2}{3}$.

Ta có $V_{E.DQP} = \dfrac{ED}{EB} \cdot \dfrac{EQ}{EM} \cdot \dfrac{EP}{EN} \cdot V_{E.BMN} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} V_{E.BMN} = \dfrac{2}{9} V_{E.BMN}$

$\Rightarrow V_{BMNDQP} = V_{E.BMN} - V_{E.DQP} = \dfrac{7}{9} V_{E.BMN}$.

Lại có $S_{\Delta BMN} = \dfrac{1}{4} S_{\Delta ABC}$, $\dfrac{\mathrm{d}\,(E;(ABC))}{\mathrm{d}\,(D;(ABC))} = \dfrac{EB}{DB} = 2$.

Nên $\dfrac{V_{E.BMN}}{V_{D.ABC}} = \dfrac{\mathrm{d}\,(E;(ABC)) \cdot S_{\Delta BMN}}{\mathrm{d}\,(D;(ABC)) \cdot S_{\Delta ABC}} = 2 \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$ suy ra $V_{BMNDQP} = \dfrac{7}{9} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot V_{D.ABC} = \dfrac{7}{18} \cdot V_{D.ABC}$

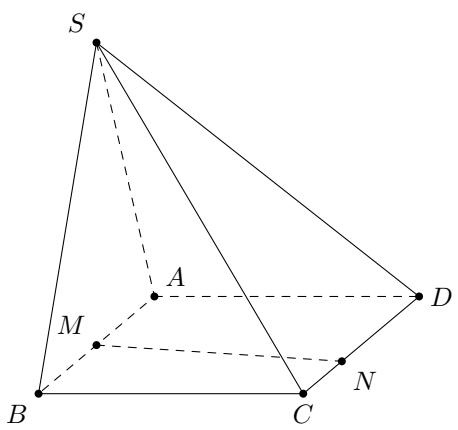
$\Rightarrow V = V_{ACMNPQ} = V_{D.ABC} - V_{DMBDQP} = \dfrac{11}{18} \cdot V_{D.ABC} = \dfrac{11}{18} \cdot \dfrac{\sqrt{2}a^3}{12} = \dfrac{11\sqrt{2}a^3}{216}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích bằng 48. Kí hiệu M, N lần lượt là các điểm thuộc cạnh AB, CD sao cho $MA = MB$, $ND = 2NC$. Tính thể tích V của khối chóp $S.MBCN$.

(A) $V = 40$. (B) $V = 8$. (C) $V = 20$. (D) $V = 28$.

Lời giải.



Gọi d là khoảng cách giữa AB và CD.

Ta có $S_{MBCN}=\dfrac{1}{2}(BM+CN)\cdot \mathrm{d}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}AB+\dfrac{1}{3}CD\right)\cdot \mathrm{d}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot AB\cdot \mathrm{d}=\dfrac{5}{12}\cdot S_{ABCD}$.

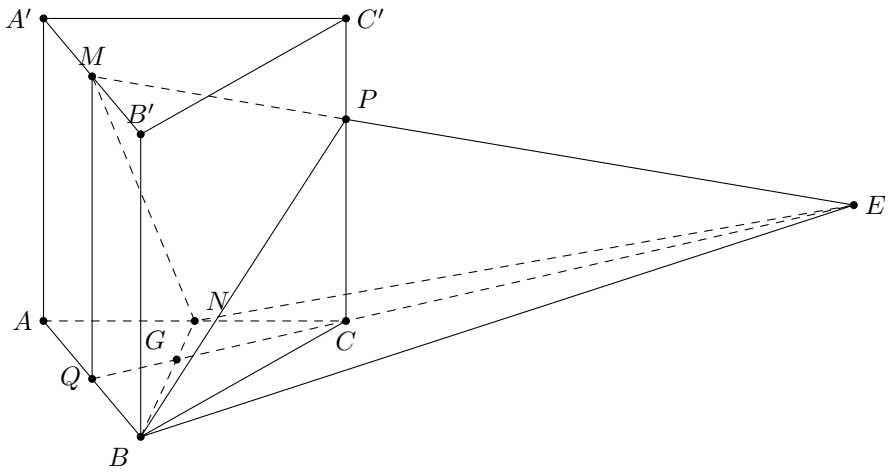
Nên $V_{S.MBCN}=\dfrac{5}{12}V_{S.ABCD}=\dfrac{5}{12}\cdot 48=20$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 54. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B'$, AC và P là điểm thuộc cạnh CC' sao cho $CP=2C'P$. Tính thể tích khối tứ diện $BMNP$ theo V.

(A) $\dfrac{2V}{9}$. (B) $\dfrac{V}{3}$. (C) $\dfrac{5V}{24}$. (D) $\dfrac{4V}{9}$.

Lời giải.



Gọi B là diện tích tam giác ABC, h là độ dại đường cao của hình lăng trụ, suy ra $V=B\cdot h$.

Gọi Q là trung điểm AB, G là trọng tâm tam giác ABC.

Gọi V_1 là thể tích khối chóp $BMNP$, V_2 là thể tích khối chóp $MBNE$ với $E=QC\cap MP$.

Ta có $\dfrac{PE}{ME}=\dfrac{CE}{QF}=\dfrac{PC}{MQ}=\dfrac{2}{3}$ do $PC\parallel MQ$ và $PC=2PC'$ nên $\dfrac{PC}{MQ}=\dfrac{PC}{CC'}=\dfrac{2}{3}$.

Ta có $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{MP}{ME}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow V_1=\dfrac{1}{3}V_2$.

Do $GC=\dfrac{2}{3}QC, CE=2QC\Rightarrow GE=GC+CE=\dfrac{8}{3}QC$.

Ta lại có $V_2=\dfrac{1}{3}S_{BNE}\cdot h$. Ta tính diện tích tam giác BNE theo diện tích tam giác ABC ta có

$S_{BNE}=S_{BGE}+S_{NGE}=\dfrac{8}{3}(S_{NQC}+S_{BQC})=\dfrac{8}{3}S_{QBNC}$.

Mà $\dfrac{S_{AQN}}{S_{ABC}}=\dfrac{AQ}{AB}\cdot\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow S_{QBCN}=\dfrac{3}{4}S_{ABC}$ do đó $S_{BNE}=\dfrac{8}{3}S_{QBNC}=2B$.

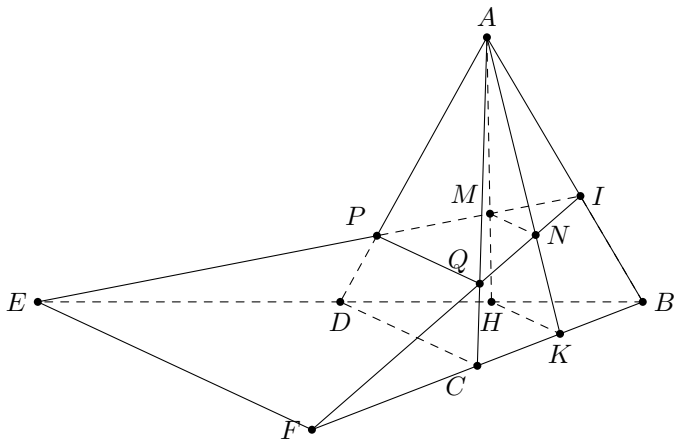
Nên $V_2=\dfrac{1}{3}S_{BNE}\cdot h=\dfrac{1}{3}\cdot 2B\cdot h=\dfrac{2V}{3}\Rightarrow V_1=\dfrac{1}{3}V_2=\dfrac{2V}{9}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 55. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M,N lần lượt là trọng tâm các tam giác ABD, ABC và E là điểm đối xứng với B qua D. Mặt (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V. Tính V.

(A) $V=\dfrac{9\sqrt{2}a^3}{320}$. (B) $V=\dfrac{3\sqrt{2}a^3}{320}$. (C) $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{96}$. (D) $V=\dfrac{3\sqrt{2}a^3}{80}$.

Lời giải.



Gọi H, K lần lượt là trung điểm của BD, BC và $I = EM \cap AB$.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác AHB ta được
$\dfrac{AM}{MH} \cdot \dfrac{HE}{EB} \cdot \dfrac{BI}{IA} = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{BI}{IA} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{BI}{IA} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow AI = \dfrac{3}{5}AB$ $\dfrac{AI}{AB} = \dfrac{3}{5} \neq \dfrac{AN}{AK} = \dfrac{2}{3}$
$\Rightarrow$ Hai đường thẳng IN và BC cắt nhau, gọi giao điểm là F.

Gọi $P = EM \cap AD$. Vì $MN \parallel CD$ nên áp dụng định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng (IEF), (ACD) và (BCD) thì $PQ \parallel EF \parallel CD$.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ADB ta được
$\dfrac{AP}{PD} \cdot \dfrac{DE}{EB} \cdot \dfrac{BI}{IA} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{AP}{PD} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{AP}{PD} = 3.$

Có $ABCD$ là tứ diện đều cạnh bằng $a \Rightarrow V_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$

$\dfrac{V_{APQI}}{V_{ABCD}} = \dfrac{AP}{AD} \cdot \dfrac{AQ}{AC} \cdot \dfrac{AI}{AB} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{27}{80} \Rightarrow V_{APQI} = \dfrac{27}{80}V_{ABCD} = \dfrac{27}{80} \cdot \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}.$

Vậy $V_{APQI} = \dfrac{9\sqrt{2}a^3}{320}.$

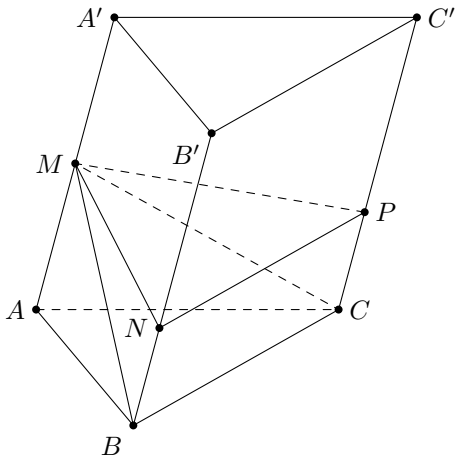
Chọn đáp án (A) □

Câu 56. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V. Các điểm M, N, P trên các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\dfrac{AM}{AA'} = x$, $\dfrac{BN}{BB'} = y$, $\dfrac{CP}{CC'} = z$. Biết thể tích của khối đa diện $ABC.MNP$ bằng $\dfrac{1}{2}V$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $x + y + z = 1$. (B) $x + y + z = 2$. (C) $x + y + z = \dfrac{3}{2}$. (D) $x + y + z = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $V_{ABC.NMP} = V_{M.ABC} + V_{M.BCPN}$.
Trong đó $V_{M.ABC} = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}\left(M,(ABC)\right).S_{ABC} = \dfrac{x}{3}V$
$V_{M.BCPN} = \dfrac{S_{BCPN}}{S_{BCC'B'}}V_{M.BCC'B'} = \dfrac{BP+CN}{BB'+CC'}V_{A.BCC'B'}$
$= \dfrac{y+z}{1+1}\cdot\dfrac{2}{3}V = \dfrac{y+z}{3}V.$
Khi đó $V_{ABC.MNP} = \dfrac{x+y+z}{3}V.$
Vậy $V_{ABC.MNP} = \dfrac{1}{2}V \Leftrightarrow \dfrac{x+y+z}{3}V = \dfrac{1}{2}V \Leftrightarrow x+y+z = \dfrac{3}{2}.$

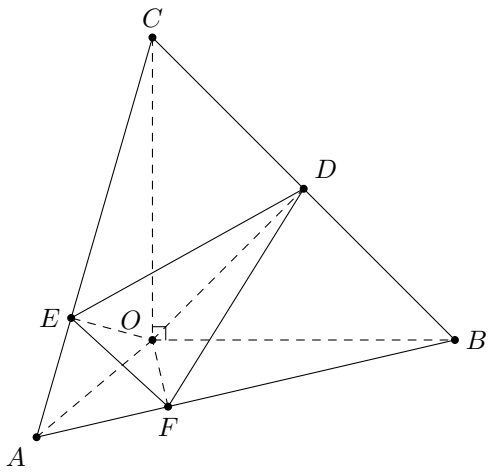


Chọn đáp án (C) □

Câu 57. Cho khối tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = 1$, $OB = 2$, $OC = 3$. Gọi D, E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ đỉnh O xuống các cạnh BC, CA, AB. Thể tích khối tứ diện $ODEF$ bằng

(A) $\dfrac{36}{325}$. (B) $\dfrac{276}{325}$. (C) $\dfrac{289}{325}$. (D) $\dfrac{49}{325}$.

Lời giải.

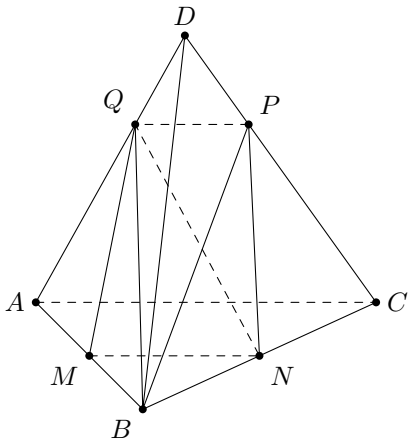


Ta có
$\dfrac{CE}{CA} = \dfrac{CO^2}{CA^2} = \dfrac{9}{10} \Rightarrow \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{1}{10}$, $\dfrac{CD}{CB} = \dfrac{CO^2}{CB^2} = \dfrac{9}{13} \Rightarrow \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{4}{13}$, $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{AO^2}{AB^2} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow \dfrac{BF}{BA} = \dfrac{4}{5}$.
Ta có thể tích khối tứ diện $OABC$ là $V_0 = \dfrac{1}{6}OA\cdot OB\cdot OC = 1$.
Ta có $V_{A.OEF} = \dfrac{AO}{AO}\cdot\dfrac{AE}{AC}\cdot\dfrac{AF}{AB}V_0 = \dfrac{1}{50}V_0$, $V_{C.OED} = \dfrac{CO}{CO}\cdot\dfrac{CE}{CA}\cdot\dfrac{CD}{CB}V_0 = \dfrac{81}{130}V_0$,
$V_{B.ODF} = \dfrac{BO}{BO}\cdot\dfrac{BD}{BC}\cdot\dfrac{BF}{BA}V_0 = \dfrac{16}{65}V_0$.
Vậy $V_{ODEF} = \left(1 - \dfrac{1}{50} - \dfrac{81}{130} - \dfrac{16}{65}\right)V_0 = \dfrac{36}{325}V_0 = \dfrac{36}{325}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 58. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC. Điểm P trên cạnh CD sao cho $PD = 2CP$. Mặt phẳng (MNE) cắt AD tại Q. Tính thể tích khối đa diện $BMNPQD$.

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{16}$. (B) $\dfrac{23\sqrt{2}}{432}$. (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{48}$. (D) $\dfrac{13\sqrt{2}}{432}$.

Lời giải.



Có $MN \parallel AC \Rightarrow (MNP) \cap (ACD) = PQ \parallel MN \parallel AC$.

Ta chia khối đa diện thành các khối tứ diện $V_{BMNPQD} = V_{D.PQB} + V_{B.MNQ} + V_{B.PQN}$.

Thể tích khối tứ diện đều đã cho là $V_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

Ta có $V_{D.PQB} = \dfrac{DP}{DC} \cdot \dfrac{DQ}{DA} \cdot \dfrac{DB}{DB} V_0 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 V_0 = \dfrac{4}{9} V_0$.

Và $V_{B.MNQ} = \dfrac{BM}{BA} \cdot \dfrac{BN}{BC} \cdot \dfrac{BQ}{BQ} V_{B.ACQ} = \dfrac{1}{4} V_{B.ACQ} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{S_{ACQ}}{S_{ACD}} V_0 = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{AQ}{AD} V_0 = \dfrac{1}{12} V_0$.

Và $V_{B.PQN} = \dfrac{BP}{BP} \cdot \dfrac{BQ}{BQ} \cdot \dfrac{BN}{BC} V_{B.PQC} = \dfrac{1}{2} V_{B.PQC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{S_{PQC}}{S_{ADC}} V_0 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{9} V_0 = \dfrac{1}{9} V_0$.

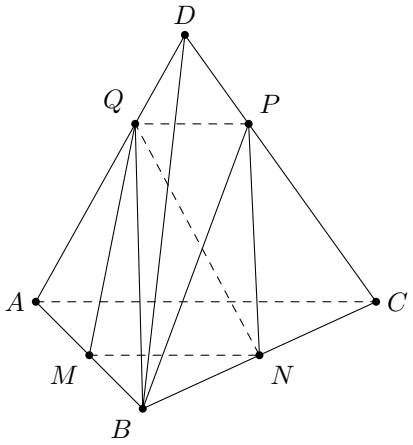
Vậy $V_{BMNPQD} = \left(\dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{9}\right) V_0 = \dfrac{23}{36} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{12} = \dfrac{23\sqrt{2}}{432}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 59. Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC. Điểm P trên cạnh CD sao cho $PC = 2PD$. Mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q. Thể tích khối đa diện $BMNPQD$ bằng

(A) $\dfrac{11\sqrt{2}}{216}$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{27}$. (C) $\dfrac{5\sqrt{2}}{108}$. (D) $\dfrac{7\sqrt{2}}{216}$.

Lời giải.



Có $MN \parallel AC \Rightarrow (MNP) \cap (ACD) = PQ \parallel MN$.

Ta chia khối đa diện thánh các khối tứ diện

$$V_{BMNPQD} = V_{D.PQB} + V_{B.MNQ} + V_{B.PQN}.$$

Thể tích khối tứ diện đều đã cho là $V_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

Ta có $V_{D.PQB} = \dfrac{DP}{DC} \cdot \dfrac{DQ}{DA} \cdot \dfrac{DB}{DB} \cdot V_0 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 V_0 = \dfrac{1}{9}V_0$.

Và $V_{B.MNQ} = \dfrac{BM}{BA} \cdot \dfrac{BN}{BC} \cdot \dfrac{BQ}{BQ} \cdot V_{B.ACQ} = \dfrac{1}{4}V_{B.ACQ} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{S_{ACQ}}{S_{ACD}}V_0 = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{AQ}{AD}V_0 = \dfrac{1}{6}V_0$.

Và $V_{B.PQN} = \dfrac{BP}{BP} \cdot \dfrac{BQ}{BQ} \cdot \dfrac{BN}{BC} \cdot V_{B.PQC} = \dfrac{1}{2}V_{B.PQC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{S_{PQC}}{S_{ADC}}V_0 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{9}V_0 = \dfrac{1}{9}V_0$.

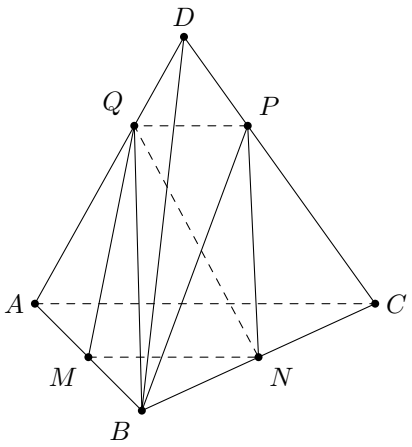
Vậy $V_{BMNPQD} = \left(\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{9}\right) \cdot V_0 = \dfrac{7}{18} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{12} = \dfrac{7\sqrt{2}}{216}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 60. Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC. Điểm P trên cạnh CD sao cho $PC = 2PD$. Mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q. Thể tích khối đa diện $BMNPQD$ bằng

(A) $\dfrac{11\sqrt{2}}{216}$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{27}$. (C) $\dfrac{5\sqrt{2}}{108}$. (D) $\dfrac{7\sqrt{2}}{216}$.

Lời giải.



Có $MN \parallel AC \Rightarrow (MNP) \cap (ACD) = PQ \parallel MN$.

Ta chia khối đa diện thánh các khối tứ diện

$$V_{BMNPQD} = V_{D.PQB} + V_{B.MNQ} + V_{B.PQN}.$$

Thể tích khối tứ diện đều đã cho là $V_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

Ta có $V_{D.PQB} = \dfrac{DP}{DC} \cdot \dfrac{DQ}{DA} \cdot \dfrac{DB}{DB} \cdot V_0 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \cdot V_0 = \dfrac{1}{9} \cdot V_0$.

Và $V_{B.MNQ} = \dfrac{BM}{BA} \cdot \dfrac{BN}{BC} \cdot \dfrac{BQ}{BQ} \cdot V_{B.ACQ} = \dfrac{1}{4} \cdot V_{B.ACQ} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{S_{ACQ}}{S_{ACD}} \cdot V_0 = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{AQ}{AD} \cdot V_0 = \dfrac{1}{6} \cdot V_0$.

Và $V_{B.PQN}=\dfrac{BP}{BP}\cdot\dfrac{BQ}{BQ}\cdot\dfrac{BN}{BC}\cdot V_{B.PQC}=\dfrac{1}{2}\cdot V_{B.PQC}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{S_{PQC}}{S_{ADC}}\cdot V_0=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{9}\cdot V_0=\dfrac{1}{9}\cdot V_0$.

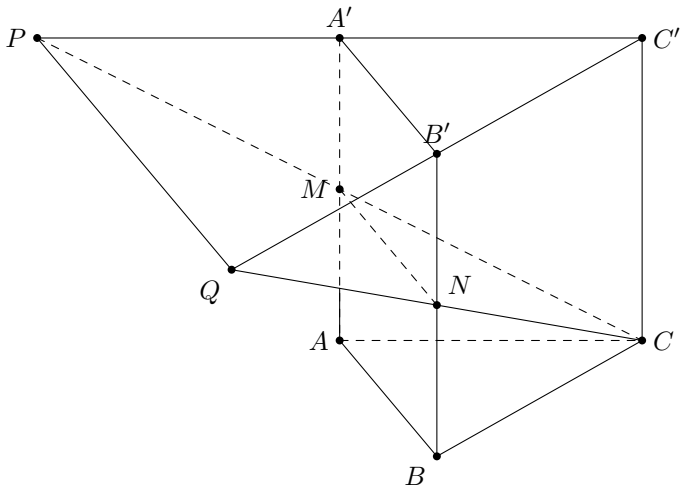
Vậy $V_{BMNPQD}=\left(\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}\right)\cdot V_0=\dfrac{7}{18}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{12}=\dfrac{7\sqrt{2}}{216}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 61. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AA' và BB'. Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P, đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q. Thể tích của khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng

(A) 1. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.



Ta có A' là trung điểm của PC'; B' là trung điểm của QC'.

Do đó $V_{C.C'PQ}=\dfrac{S_{C'PQ}}{S_{C'A'B'}}\cdot V_{C.A'B'C'}=4\cdot V_{C.A'B'C'}=4\cdot\dfrac{1}{3}\cdot V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{4}{3}$.

Mặt khác $V_{A'B'C'.MNC}=\dfrac{\dfrac{A'M}{A'A}+\dfrac{B'N}{BB'}+\dfrac{C'C}{C'C}}{3}\cdot V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+1}{3}\cdot V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{2}{3}$.

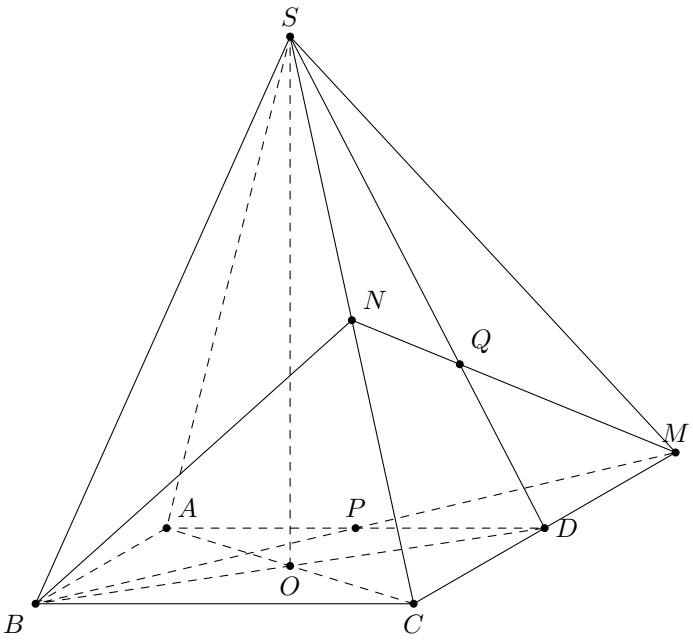
Do đó $V_{A'MPB'NQ}=V_{C.C'PQ}-V_{A'B'C'.MNC}=\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 62. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là điểm đối xứng của C qua D, N là trung điểm của cạnh SC. Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Tính thể tích V của khối đa diện chứa đỉnh S.

(A) $V=\dfrac{15\sqrt{2}a^3}{144}$. (B) $V=\dfrac{7\sqrt{2}a^3}{72}$. (C) $V=\dfrac{11\sqrt{2}a^3}{144}$. (D) $V=\dfrac{7\sqrt{2}a^3}{144}$.

Lời giải.



Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$; $P = MB \cap AD$ và $Q = SD \cap MN$ suy ra Q là trọng tâm của tam giác $SMC \Rightarrow \dfrac{QD}{SD} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}\,(Q,(ABCD))}{\mathrm{d}\,(S,(ABCD))} = \dfrac{1}{3}$.

Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh S là $S.ABPQN$.

Ta có $\mathrm{d}\,(S,(ABCD)) = SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \mathrm{d}\,(S,(ABCD)) \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot AB^2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Có $V_{N.BCM} = \dfrac{1}{3} \cdot \mathrm{d}\,(N,(ABCD)) \cdot S_{BCM} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\,(S,(ABCD)) \cdot \dfrac{MD \cdot BC}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lạ có $V_{Q.DMP} = \dfrac{1}{3} \cdot \mathrm{d}\,(Q,(DMP)) \cdot S_{DMP} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3}\mathrm{d}\,(S,(ABCD)) \cdot \dfrac{MD \cdot PA}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{72}$.

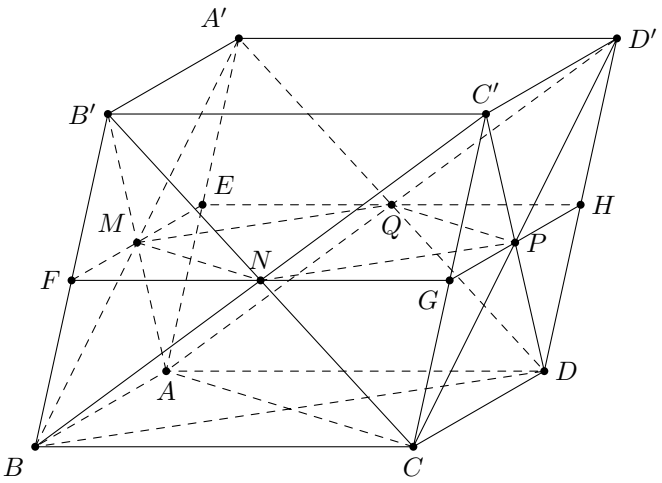
Mà $V_{SABPQN} = V_{S.ABCD} + V_{Q.DMP} - V_{N.BCM} \cdot V_{SABPQN} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6} + \dfrac{a^3\sqrt{2}}{72} - \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} = \dfrac{7a^3\sqrt{2}}{72}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 63. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đường cao bằng 8 và đáy là hình vuông cạnh bằng6. Gọi M, N, P, Q lần lượt là tâm của các mặt $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DAA'D'$. Thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các điểm A, B, C, D, M, N, P, Q bằng

(A) 108. (B) 168. (C) 96. (D) 120.

Lời giải.



Thể tích khối hộp đã cho $V = 6^2.8 = 288$.

Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AA', BB', CC', DD'.

Ta có

$$V_{ACBDMNPQ} = V_{ABCDGH} - (V_{A.MNQ} + V_{B.MFN} + V_{C.NGP} + V_{D.PHQ});$$

$$V_{ABCDGH} = \frac{1}{2} \cdot V;$$

$$\begin{aligned} V_{A.MNQ} &= V_{B.MFN} = V_{C.NGP} = V_{D.PHQ} \\ &= \frac{DH}{DD'} \cdot \frac{DP}{DC'} \cdot \frac{DQ}{DA'} \cdot V_{D.D'C'A'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot V = \frac{1}{48} \cdot V. \end{aligned}$$

Vậy $V_{ACBDMNPQ} = \frac{1}{2} \cdot V - \left(\frac{1}{48} \cdot V + \frac{1}{48} \cdot V + \frac{1}{48} \cdot V + \frac{1}{48} \cdot V \right) = \frac{5}{12} \cdot V = 120.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 64. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành, M là điểm đối xứng với C qua B. N là trung điểm SC. Mặt phẳng (MND) chia hình chóp thành hai khối đa diện. Gọi V_1 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh S và V_2 là thể tích khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$?

(A) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{3}$. (B) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{12}{7}$. (C) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{5}$. (D) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$.

Lời giải.

Ta có $V_1 = V_{S.ADQ} + V_{S.PQD} + V_{S.DNP}$ mà $\frac{V_{S.ADQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \mathrm{d}(S,(ABCD)) \cdot S_{AQD}}{\frac{1}{3} \cdot \mathrm{d}(S,(ABCD)) \cdot S_{ABCD}} = \frac{1}{4}$.

Và $\frac{V_{S.PQD}}{V_{S.BQD}} = \frac{SP \cdot SQ \cdot SD}{SB \cdot SQ \cdot SD} = \frac{SP}{SB}$.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác SBC với cát tuyến MPN ta có

$$\frac{MB \cdot PS \cdot NC}{MC \cdot PB \cdot NS} = 1 \Rightarrow \frac{PS}{PB} = 2 \text{ suy ra } \frac{SP}{SB} = \frac{2}{3}.$$

Suy ra $\frac{V_{S.PQD}}{V_{S.BQD}} = \frac{2}{3}$ mà $\frac{V_{S.BDQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \mathrm{d}(S,(ABCD)) \cdot S_{\Delta BQD}}{\frac{1}{3} \cdot \mathrm{d}(S,(ABCD)) \cdot S_{ABCD}} = \frac{1}{4}$ nên $\frac{V_{S.PQD}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{6}$.

Ta lại có $\dfrac{V_{S.PND}}{V_{S.BCD}}=\dfrac{SP\cdot SN\cdot SD}{SB\cdot SC\cdot SD}=\dfrac{1}{3}$ mà $\dfrac{V_{S.BCD}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot \mathrm{d}\left(S,(ABCD)\right)\cdot S_{\Delta BCD}}{\frac{1}{3}\cdot \mathrm{d}\left(S,(ABCD)\right)\cdot S_{ABCD}}=\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\dfrac{V_{S.PND}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{1}{6}$.

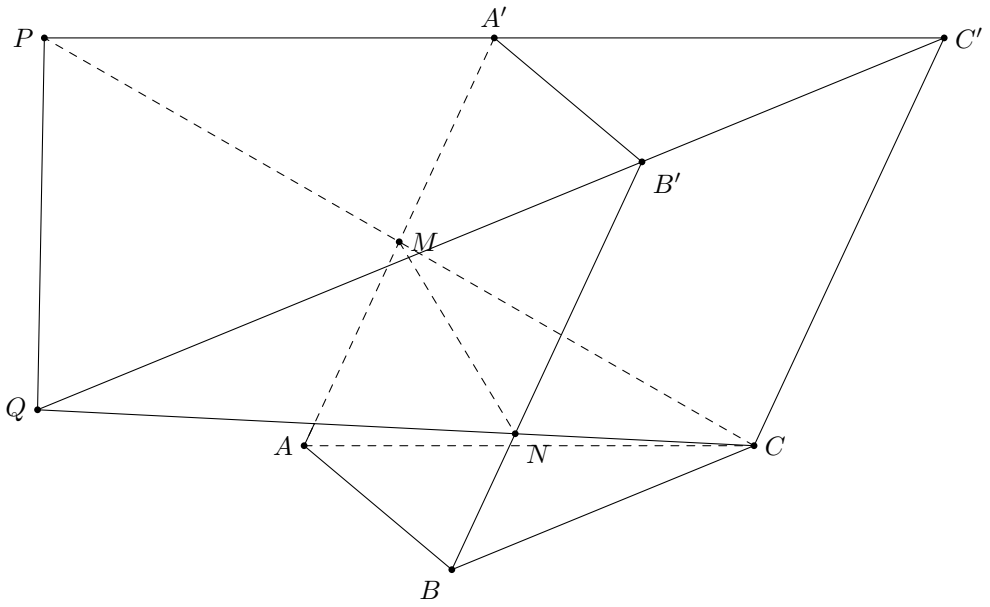
Vậy $V_1=\dfrac{7}{12}\cdot V_{S.ABCD}$ suy ra $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{7}{5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 65. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 2. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh AA' và BB' sao cho M là trung điểm của AA' và $B'N=\dfrac{2}{3}BB'$. Đường thẳng CM cắt đường thẳng $A'C'$ tại P và đướng thẳng CN cắt đường thẳng $B'C'$ tại Q. Thể tích khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng

(A) $\dfrac{13}{18}$. (B) $\dfrac{23}{9}$. (C) $\dfrac{7}{18}$. (D) $\dfrac{5}{9}$.

Lời giải.



Ta có $\Delta PA'M=\Delta CAM\,(g.c.g)\Rightarrow PA'=A'C'\Rightarrow C'P=2C'A'$.

$\dfrac{QB'}{QC'}=\dfrac{B'N}{C'C}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow QB'=\dfrac{2}{3}\cdot QC'\Rightarrow QC'=3\cdot B'C'$.

Ta có $S_{C'PQ}=\dfrac{1}{2}\cdot C'P\cdot C'Q\cdot \sin\widehat{PC'Q}=\dfrac{1}{2}\cdot 2C'A'\cdot 3B'C'\cdot \sin\widehat{A'C'B'}=3\cdot S_{C'A'B'}$.

Suy ra $\dfrac{V_{C.C'PQ}}{V_{C.C'A'B'}}=\dfrac{S_{C'PQ}}{S_{C'A'B'}}=3\Rightarrow V_{C.C'PQ}=3\cdot V_{C.C'A'B'}=V_{ABC.A'B'C'}=2$.

Mặt khác $\dfrac{V_{A'B'C'.MNC}}{V_{A'B'C'.ABC}}=\dfrac{\frac{A'M}{A'A}+\frac{B'N}{B'B}+\frac{C'C}{C'C}}{3}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+1}{3}=\dfrac{13}{18}\Rightarrow V_{A'B'C'.MNC}=\dfrac{13}{9}$.

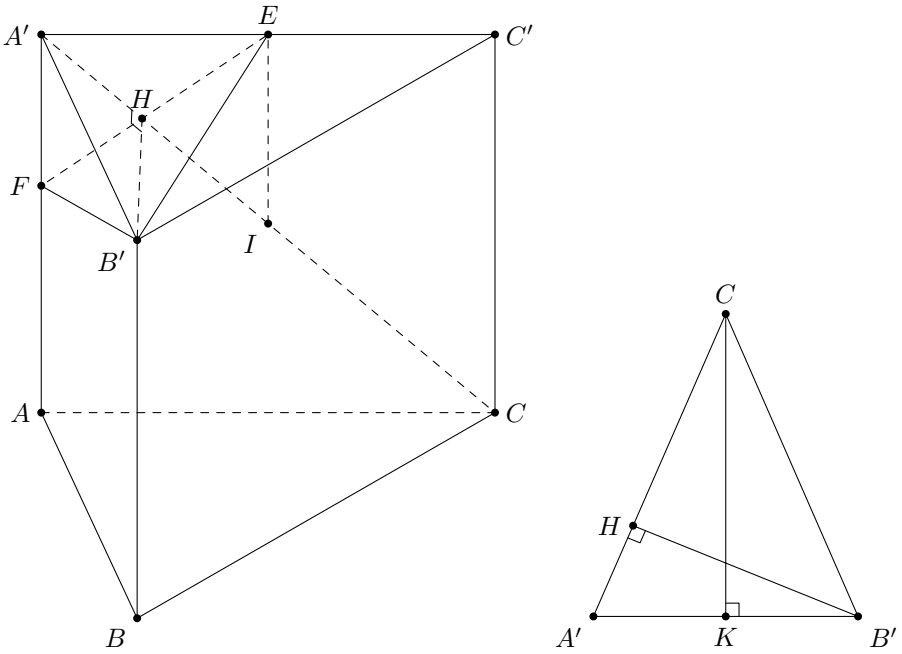
Ta có $V_{A'MPB'NQ}=V_{C.C'PQ}-V_{A'B'C'.MNC}=2-\dfrac{13}{9}=\dfrac{5}{9}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 66. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng $2a$. Mặt phẳng (P) qua B' và vuông góc với $A'C$ chia lăng trụ thành hai khối. Biết thể tích của hai khối là V_1 và V_2 với $V_1<V_2$. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

(A) $\dfrac{1}{11}$. (B) $\dfrac{1}{23}$. (C) $\dfrac{1}{47}$. (D) $\dfrac{1}{7}$.

Lời giải.



Gọi E, I, K lần lượt là trung điểm $A'C'$, $A'C$ và $A'B'$.

Ta có $B'E \perp (ACC'A') \Rightarrow B'E \perp A'C$. (1)

Trong $(A'B'C)$, từ B' kẻ $B'H \perp A'C$ tại H.

Trong $(AA'C'C)$, gọi $F = HE \cap AA'$.

Ta lại có $\begin{cases} B'H \perp A'C \\ B'E \perp A'C \end{cases} \Rightarrow (B'HF) \perp A'C \Rightarrow A'C \perp B'F$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra tam giác $B'EF$ là thiết diện của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ khi cắt bởi mặt phẳng (P).

Tam giác $CA'B'$ cân tại C, ta có

$$CK \cdot A'B' = B'H \cdot A'C \Rightarrow B'H = \frac{CK \cdot A'B'}{A'C} = \frac{\dfrac{a\sqrt{19}}{2} \cdot a}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{19}}{2\sqrt{5}}.$$

Tam giác $B'HC$ vuông tại H, ta có $CH = \sqrt{B'C^2 - B'H^2} = \dfrac{9a}{2\sqrt{5}}$.

$\Rightarrow CH = \dfrac{9}{10} \cdot CA' \Rightarrow A'H = \dfrac{1}{4} \cdot HI$.

$\Delta HA'F \sim \Delta HIE \Rightarrow \dfrac{A'F}{IE} = \dfrac{A'H}{IH} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{A'F}{A'A} = \dfrac{1}{8}$.

Khi đó $\dfrac{V_{A'.B'EF}}{V_{A'.B'C'A}} = \dfrac{A'B'}{A'B'} \cdot \dfrac{A'E}{A'C'} \cdot \dfrac{A'F}{A'A} = \dfrac{1}{16}$.

$\Rightarrow V_{A'.B'EF} = \dfrac{1}{16} \cdot V_{A'.B'C'A} = \dfrac{1}{16} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{48} \cdot V_{ABC.A'B'C'}$.

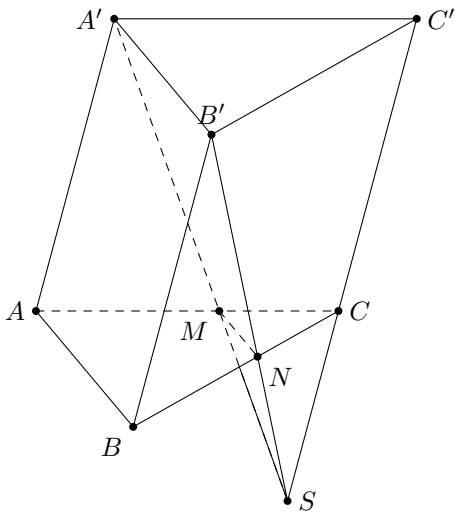
Suy ra $\dfrac{V_1}{V_{ABC.A'B'C'}} = \dfrac{1}{48} \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{47}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 67. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và M, N là hai điểm lần lượt trên cạnh CA, CB sao cho MN song song với AB và $\dfrac{CM}{CA}=k$. Mặt phẳng $(MNB'A')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai phần có thể tích V_1 và V_2 sao cho $\dfrac{V_1}{V_2}=2$. Khi đó giá trị của k là

(A) $k=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. (B) $k=\dfrac{1}{2}$. (C) $k=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. (D) $k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Vì ba mặt phẳng $(MNB'A')$, $(ACC'A')$, $(BCC'B')$ đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt $A'M$, $B'N$, CC' và $A'M$, CC' không song song nên $A'M$, $B'N$, CC' đồng qui tại S.

Ta có $k=\dfrac{CM}{CA}=\dfrac{MN}{AB}=\dfrac{MN}{A'B'}=\dfrac{SM}{SA'}=\dfrac{SN}{SB'}=\dfrac{SC}{SC'}$.

Từ đó $V_{S.MNC}=k^3\cdot V_{S.A'B'C'}\Rightarrow V_1=V_{MNC.A'B'C'}=(1-k^3)\cdot V_{S.A'B'C'}$.

Mặt khác $\dfrac{V_{ABC.A'B'C'}}{V_{S.A'B'C'}}=\dfrac{3\cdot CC'}{SC'}=\dfrac{3\cdot(SC'-SC)}{SC'}=3\cdot(1-k)\Rightarrow V_{S.A'B'C'}=\dfrac{V_{ABC.A'B'C'}}{3\cdot(1-k)}$.

Suy ra $V_1=(1-k^3)\cdot\dfrac{V_{ABC.A'B'C'}}{3\cdot(1-k)}=\dfrac{(k^2+k+1)\cdot V_{ABC.A'B'C'}}{3}$.

Vì $\dfrac{V_1}{V_2}=2$ nên $V_1=\dfrac{2}{3}\cdot V_{ABC.A'B'C'}\Rightarrow\dfrac{k^2+k+1}{3}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow k^2+k-1=0\Rightarrow k=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\,(k>0)$.

Vậy $k=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Dạng 8. Các bài toán thể tích chọn lọc

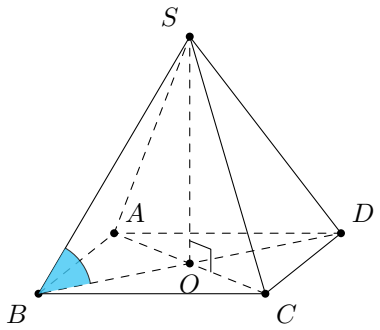
Câu 1. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA=a\sqrt{11}$, cô-sin góc hợp bởi cạnh SB và $(ABCD)$ bằng $\dfrac{1}{10}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

(A) $\dfrac{121}{150}a^3$. (B) $\dfrac{121}{50}a^3$. (C) $\dfrac{121}{500}a^3$. (D) $\dfrac{11}{500}a^3$.

Lời giải.

Ta có $(SB,(ABCD))=(SB,BO)=\widehat{SBO}$.
Theo giả thiết, ta có $\cos\widehat{SBO}=\dfrac{1}{10}$.
Suy ra $BO=\cos\widehat{SBO}\cdot SB=\dfrac{1}{10}\cdot a\sqrt{11}=\dfrac{a\sqrt{11}}{10}$.
Do đó $AB=BO\sqrt{2}=\dfrac{a\sqrt{22}}{10}$ và $SO=\sqrt{SB^2-BO^2}=\dfrac{33}{10}a$.
Thể tích của khối chóp là

$$V=\frac{1}{3}\cdot S_{ABCD}\cdot SO=\frac{1}{3}\cdot\frac{11}{50}\cdot\frac{33}{10}a^3=\frac{121}{500}a^3.$$



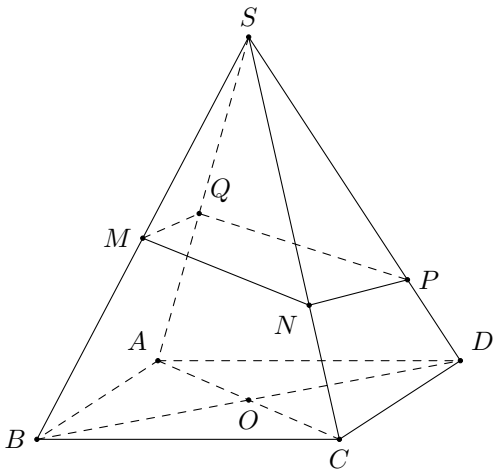
Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SB, N là điểm thuộc cạnh SC sao cho $SN=2CN$, P là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SP=3DP$. Mặt phẳng (MNP) cắt SA tại Q. Biết khối chóp $S.MNPQ$ có thể tích bằng 1, khối đa diện $ABCD.QMNP$ có thể tích bằng

(A) 4. (B) $\dfrac{9}{5}$. (C) $\dfrac{17}{5}$. (D) $\dfrac{14}{5}$.

Lời giải.

Gọi $O=AC\cap BD$.
Đặt $a=\dfrac{SA}{SQ}$; $b=\dfrac{SB}{SM}=2$; $c=\dfrac{SC}{SN}=\dfrac{3}{2}$; $d=\dfrac{SD}{SP}=\dfrac{4}{3}$.
Ta có: $a+c=b+d\Rightarrow a=\dfrac{11}{6}$.
$\dfrac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.BCDA}}=\dfrac{a+b+c+d}{4abcd}=\dfrac{5}{22}\Rightarrow V_{S.ABCD}=\dfrac{22}{5}$.
Vậy $V_{ABCD.QMNP}=V_{S.ABCD}-V_{S.MNPQ}=\dfrac{17}{5}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$, mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 30°. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{4}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Gọi AH là đường cao của tam giác ABC.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow BC \perp A'H$.

Mà $BC \perp AH$, $BC = (A'BC) \cap (ABC)$ nên góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{AHA'} = 30^\circ$.

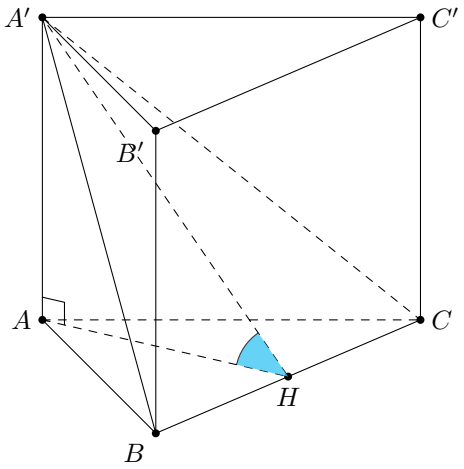
Ta có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{4}{3a^2}$

$\Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Mà $\tan 30^\circ = \dfrac{AA'}{AH} \Rightarrow AA' = AH.\tan 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{a}{2}$.

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. Đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng $(ACC'A')$ góc α thỏa mãn $\cot\alpha = 2$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

(A) $\dfrac{4}{3}a^3\sqrt{11}$. (B) $\dfrac{1}{9}a^3\sqrt{11}$. (C) $\dfrac{1}{3}a^3\sqrt{11}$. (D) $\dfrac{2}{3}a^3\sqrt{11}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm AC, suy ra $BI \perp AC$.

Mặt khác do $BI \perp CC'$ nên $BI \perp (ACC'A')$.

Do đó $\alpha = (BC', (ACC'A')) = (BC', IC') = \widehat{BC'I}$.

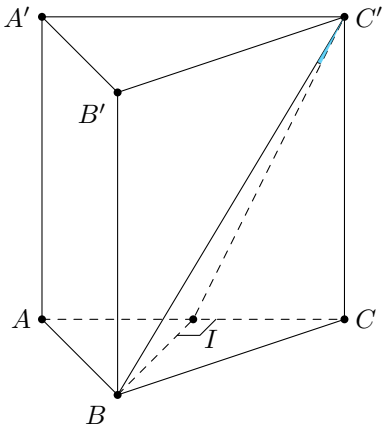
Ta có: $S_{\Delta ABC} = \left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$ và $BI = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = a$.

Theo đề bài: $\cot\alpha = 2 \Leftrightarrow \dfrac{C'I}{BI} = 2 \Leftrightarrow C'I = 2a$.

Suy ra $CC' = \sqrt{C'I^2 - CI^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{33}}{3}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V = S_{\Delta ABC} \cdot CC' = \frac{a^2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{33}}{3} = \frac{1}{3}a^3\sqrt{11}.$$



Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA' = \dfrac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính thể tích V của khối lăng trụ đó theo a.

(A) $V = a^3\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. (B) $V = \dfrac{2a^3}{3}$. (C) $V = \dfrac{3a^3}{4\sqrt{2}}$. (D) $V = a^3$.

Lời giải.

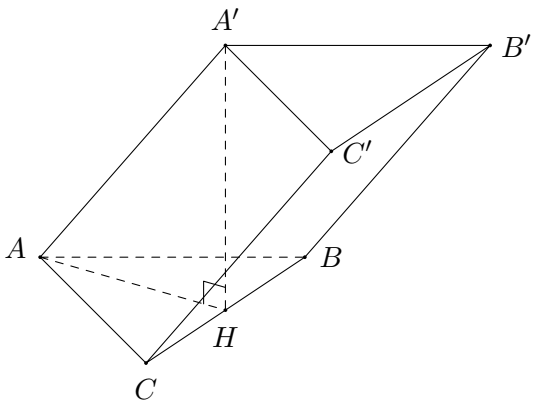
Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC), suy ra H là trung điểm của BC và tam giác $A'AH$ vuông tại H.

Ta có $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$\Rightarrow A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{\dfrac{9a^2}{4} - \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy

$$V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{ABC} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{2}a^3}{8} = \frac{3a^3}{4\sqrt{2}}.$$



Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Biết tích của khoảng cách từ điểm B' và điểm D đến mặt phẳng $(D'AC)$ bằng $6a^2\,(a > 0)$. Giả sử thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là ka^2. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

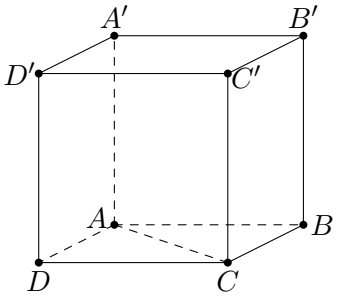
(A) $k \in (20; 30)$. (B) $k \in (100; 120)$. (C) $k \in (50; 80)$. (D) $k \in (40; 50)$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của DB' và $D'O$. Vì AC vuông góc với BD và CC' nên $AC \perp (BDD'B')$.

Gọi x là độ dài cạnh hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, khi đó hình chữ nhật $BDD'B'$ có $BD = B'D' = x\sqrt{2}; DO = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$; $OD' = \dfrac{x\sqrt{6}}{2}$; $BD' = x\sqrt{3}$.

Vì $\dfrac{DO}{B'D'} = \dfrac{DI}{B'I} = \dfrac{OI}{D'I} = \dfrac{1}{2}$ suy ra $DI = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$; $OI = \dfrac{x\sqrt{6}}{6}$ do đó tam giác $\triangle DIO$; $\triangle D'IB'$ là các tam giác vuông.



Do $AC \perp (BDD'B')$ và $DB' \perp D'O$ nên $\mathrm{d}\,(B', (ACD')) \times \mathrm{d}\,(D, (ACD')) = B'I \cdot DI = \dfrac{2}{3}x^2 = 6a^2$ nên $x = 3a$.

Lại có thể tích của $ABCD.A'B'C'D'$ là ka^3 nên $ka^3 = 27a^3 \Leftrightarrow k = 27$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a và $(A'BC)$ hợp với mặt đáy ABC một góc $30°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. (D) $V = \dfrac{3a^3}{8}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC.

Suy ra $AH \perp BC$. Mà $A'H \perp BC$, $(ABC) \cap (A'BC) = BC$.

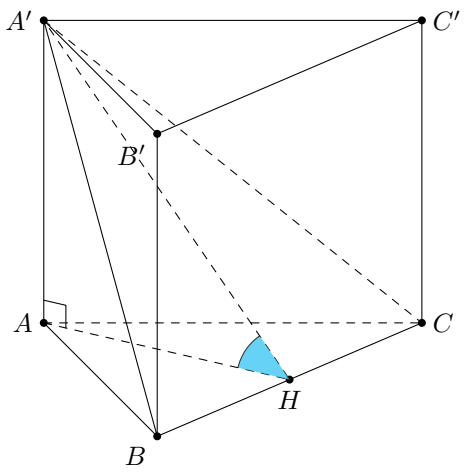
$\Rightarrow ((A'BC), (ABC)) = (AH, A'H) = \widehat{AHA'} = 30°$.

Ta có ABC là tam giác đều cạnh bằng a nên $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

$A'A = AH \cdot \tan 30° = \dfrac{a}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V = A'A \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}.$$



Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của cạnh AB. Góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt đáy bằng 45^0. Thể tích khối chóp đã cho bằng

(A) $\dfrac{a^3}{4}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. (D) $\dfrac{a^3}{8}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Tam giác ABC đều nên $CH \perp AB$, mà $CD \parallel AB$.

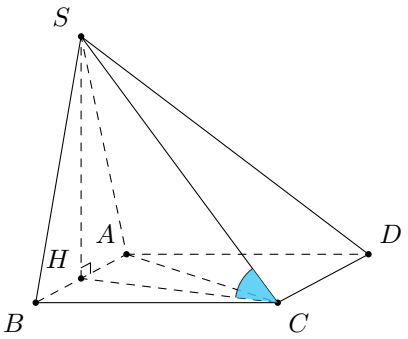
$\Rightarrow CH \perp CD$. (1)

Có $CD = (SCD) \cap (ABCD)$. (2)

Mà $\begin{cases} CD \perp CH \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp SC$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$((SCD), (ABCD)) = (SC; CH) = \widehat{SCH} = 45°.$$



Trong tam giác SCH có

$$SH = HC = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{4}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

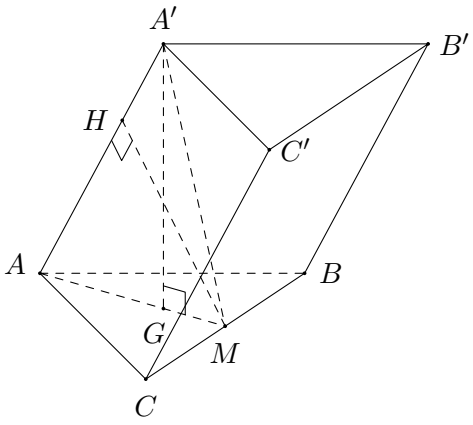
Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và M là trung điểm BC.

Dễ thấy $AM \perp BC$, $A'G \perp BC \Rightarrow BC \perp (A'AM)$.

Gọi H là hình chiếu của M lên AA'.

Khi đó $\begin{cases} MH \perp BC \text{ tại } M \\ MH \perp AA' \text{ tại } H \end{cases} \Rightarrow$ khoảng cách giữa hai đường AA' và BC bằng $MH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.



Đặt $A'G = x$, $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

$A'A = \sqrt{A'G^2 + AG^2} = \sqrt{x^2 + \dfrac{a^2}{3}}$.

Ta có $A'G \cdot AM = HM \cdot A'A \Rightarrow x \cdot a\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{x^2 + \dfrac{a^2}{3}} \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{3}$.

Thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = A'G \cdot S_{ABC} = \dfrac{a}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên đáy ABC trùng với trung điểm I của cạnh BC, cạnh bên AA' tạo với đáy ABC góc $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

(A) $V = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. (B) $V = \dfrac{3a^3}{2}$. (C) $V = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{16}$. (D) $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Lời giải.

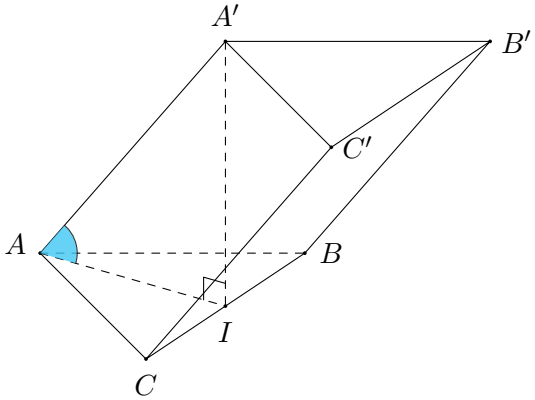
Ta có: $A'I \perp (ABC)$; AI là hình chiếu vuông góc của AA' lên mặt đáy (ABC).

Do đó $(AA', (ABC)) = (AA', AI) = \widehat{A'AI} = 60°$.

Tam giác ABCđều cạnh a nên $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông $A'AI$, ta có

$$A'I = AI \cdot \tan\widehat{A'AI} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \tan 60° = \frac{3a}{2}.$$



Thể tích V của khối lăng trụ đã cho là

$$V = A'I \cdot S_{ABC} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh bằng a, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Gọi A', B', C' tương ứng là các điểm đối xứng của A, B, C qua S. Thể tích V của khối bát diện có các mặt $ABC, A'B'C', A'BC, B'CA, C'AB, AB'C', BA'C', CA'B'$ là

(A) $V = 2\sqrt{3}a^3$. (B) $V = \dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. (C) $V = \dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$. (D) $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $V = 2V_{A'B'C'BC} = 2 \cdot 4 \cdot V_{A'.SBC} = 8 \cdot V_{A.SBC} = 8 \cdot V_{S.ABC}$.

Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$.

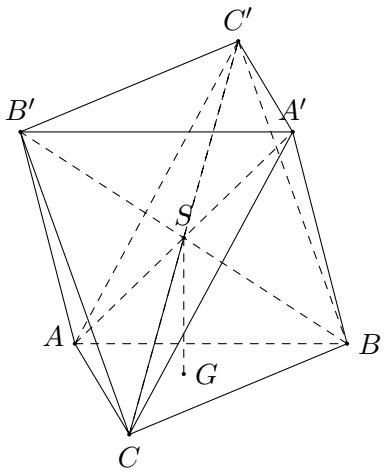
Ta có $(\widehat{SA, (ABC)}) = \widehat{(SA, AG)} = \widehat{SAG} = 60°$.

Xét $\triangle SAG$ vuông tại G có

$$\tan \widehat{SAG} = \frac{SG}{AG} \Rightarrow SG = AG \cdot \tan \widehat{SAG} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = a.$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SG \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

$$\Rightarrow V = 8V_{S.ABC} = \frac{2\sqrt{3}a^3}{3}.$$



Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải.

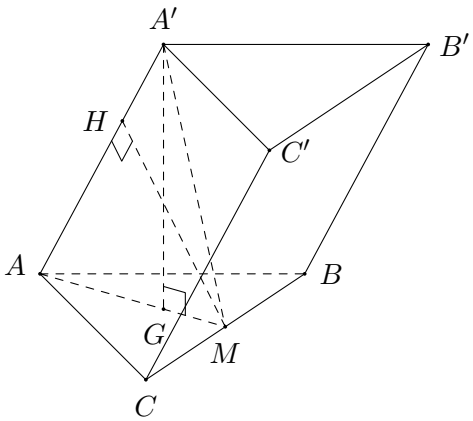
Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và M là trung điểm BC.

Dễ thấy $AM \perp BC$, $A'G \perp BC \Rightarrow BC \perp (A'AM)$.

Gọi H là hình chiếu của M lên AA'.

Khi đó $\begin{cases} MH \perp BC \text{ tại } M \\ MH \perp AA' \text{ tại } H \end{cases} \Rightarrow$ khoảng cách giữa hai đường AA' và BC bằng $MH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Đặt $A'G = x$, $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $A'A = \sqrt{A'G^2 + AG^2} = \sqrt{x^2 + \dfrac{a^2}{3}}$.



Ta có $A'G \cdot AM = HM \cdot A'A \Rightarrow x \cdot a\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{x^2 + \dfrac{a^2}{3}} \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{3}$.

Thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = A'G \cdot S_{ABC} = \dfrac{a}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

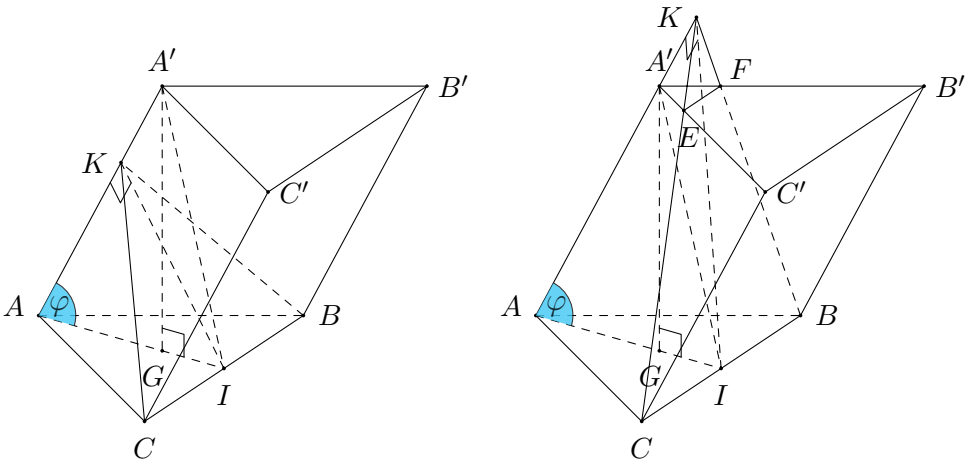
Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Một mặt phẳng (P) chứa BC và vuông góc

với AA' cắt hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo một thiết diện có diện tích bằng $\dfrac{3a^2}{8}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (B) $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{10}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.



Gọi H là trọng tâm tam giác ABC, ta có $A'H \perp (ABC)$.

$AH \cap BC = I \Rightarrow I$ là trung điểm của BC và $AI \perp BC$.

Ta có $AI = AB \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AH = \dfrac{2}{3}AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot AI = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Gọi K là hình chiếu của I trên đường thẳng AA'. Khi đó $AA' \perp (BCK)$ hay $(P) \equiv (BCK)$.

Ta có hình chiếu của tam giác ABC trên mặt phẳng (P) là tam giác BCK.

Ta có hai khả năng về vị trí điểm K.

Khả năng 1: K nằm trong đoạn AA' thì thiết diện của (P) và lăng trụ là tam giác cân BCK.

Khả năng 2: K nằm ngoài đoạn AA' thì thiết diện của (P) và lăng trụ là hình thang cân $BCDE$.

Trong cả hai khả năng trên ta đều có $S_{\text{thiết diện}} \le S_{BCK}$.

Gọi $\alpha = \widehat{AIK}$ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (ABC).

Ta có $\cos\alpha = \dfrac{S_{BCK}}{S_{ABC}} \ge \dfrac{S_{\text{thiết diện}}}{S_{ABC}} = \dfrac{\dfrac{3a^2}{8}}{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha \le 30^0 \Rightarrow \varphi = \widehat{A'AI} = 90^\circ - \alpha \ge 60^\circ$.

$\Rightarrow \cos\varphi \le \dfrac{1}{2} \Rightarrow AA' = \dfrac{AH}{\cos\varphi} \ge 2AH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ và $AK = AI\cos\varphi \le \dfrac{AI}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Do đó $AK < AA'$ hay K phải nằm giữa A và A'.

Ta có $S_{BCK} = \dfrac{1}{2}BC \cdot KI = \dfrac{1}{2}a \cdot KI = \dfrac{3a^2}{8} \Rightarrow KI = \dfrac{3a}{4}$.

Suy ra $\sin\widehat{A'AI} = \dfrac{IK}{AI} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{A'AI} = 60^\circ \Rightarrow A'H = AH \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a$.

Do đó thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V = S_{ABC} \cdot A'H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' xuống mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Thể tích khối lăng trụ bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (C) $\dfrac{3a^3\sqrt{7}}{14}$. (D) $\dfrac{3a^3\sqrt{7}}{28}$.

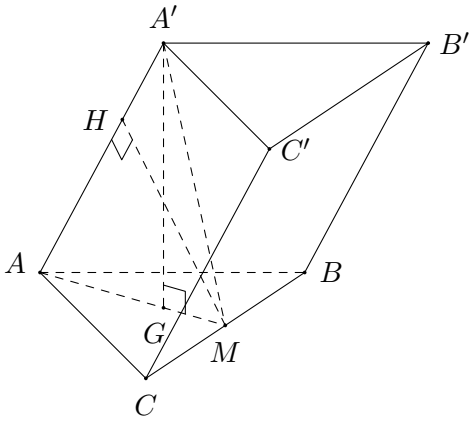
Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và M là trung điểm BC.

Dễ thấy $AM \perp BC$, $A'G \perp BC \Rightarrow BC \perp (A'AM)$.

Gọi H là hình chiếu của M lên AA'.

Khi đó $\begin{cases} MH \perp BC \text{ tại } M \\ MH \perp AA' \text{ tại } H \end{cases} \Rightarrow$ khoảng cách giữa hai đường AA' và BC bằng $MH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.



Đặt $A'G = x$, $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

$A'A = \sqrt{A'G^2 + AG^2} = \sqrt{x^2 + \dfrac{a^2}{3}}$.

Ta có $A'G \cdot AM = HM \cdot A'A \Rightarrow x \cdot a\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{x^2 + \dfrac{a^2}{3}} \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{3}$.

Thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = A'G \cdot S_{ABC} = \dfrac{a}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SD. Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại I. Tính thể tích khối đa diện $ABCDMNI$.

(A) $V = \dfrac{5\sqrt{3}a^3}{18}$. (B) $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{18}$. (C) $V = \dfrac{5\sqrt{3}a^3}{6}$. (D) $V = \dfrac{13\sqrt{3}a^3}{36}$.

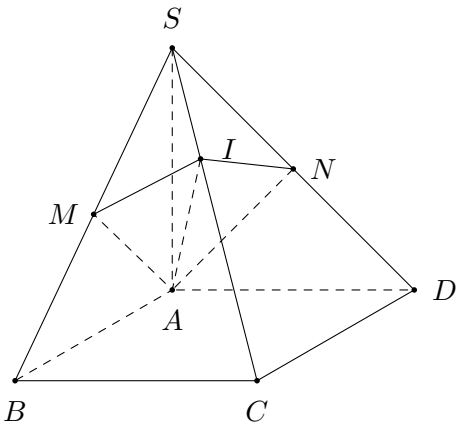
Lời giải.

Đặt $x = \dfrac{SA}{SA} = 1$, $y = \dfrac{SM}{SB} = \dfrac{1}{2}$, $z = \dfrac{SI}{SC}$ và $t = \dfrac{SN}{SD} = \dfrac{1}{2}$.

Ta có $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{t} \Rightarrow z = \dfrac{1}{3}$.

Khi đó $\dfrac{V_{S.AMIN}}{S.ABCD} = \dfrac{xyzt}{4}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{t}\right) = \dfrac{1}{6}$.

Suy ra $V_{ABCD.MNI} = \dfrac{5}{6} \cdot V_{S.ABCD} = \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot a^2 = \dfrac{5\sqrt{3}a^3}{18}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Cho tứ diện OABC có $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ và đôi một vuông góc với nhau. Gọi r là bán kính mặt cầu tiếp xúc với cả bốn mặt của tứ diện. Giả sử $a \geq b, a \geq c$. Giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{a}{r}$ là

(A) $1+\sqrt{3}$. (B) $2+\sqrt{3}$. (C) $\sqrt{3}$. (D) $3+\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $V_{OABC}=\dfrac{abc}{6}$, $S_{\text{tp}}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(ab+bc+ac+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}\right)$.
Gọi T là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện OABC, ta có

$$V_{OABC}=V_{TOAB}+V_{TOAC}+V_{TOBC}+V_{TABC}=\frac{1}{3}\cdot r\cdot(S_{OAB}+S_{OAC}+S_{OBC}+S_{ABC})=\frac{1}{3}\cdot r\cdot S_{\text{tp}}.$$

(r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$).
$\Rightarrow r=\dfrac{3V_{OABC}}{S_{tp}}=\dfrac{abc}{ab+bc+ac+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}}$.
Suy ra

$$\begin{aligned}\frac{a}{r}&=\frac{ab+bc+ac+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}}{bc}\\&=\frac{a}{c}+1+\frac{a}{b}+\sqrt{\frac{a^2}{c^2}+1+\frac{a^2}{b^2}}\\&\geq 1+1+1+\sqrt{1+1+1}=3+\sqrt{3}.\end{aligned}$$

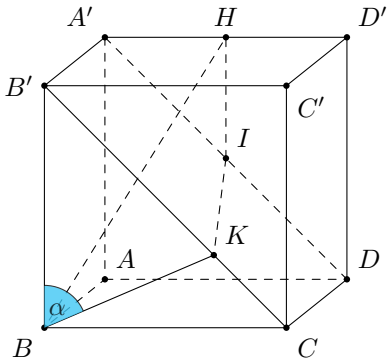
Vậy $\left(\dfrac{a}{r}\right)_{\min}=3+\sqrt{3}\Leftrightarrow a=b=c$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=BC=a$, $AA'=a\sqrt{3}$. Gọi I là giao điểm của AD' và $A'D$; H là hình chiếu của I trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$; K là hình chiếu của B lên mặt phẳng $(CA'B')$. Tính thể tích của khối tứ diện $IHBK$.

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải.

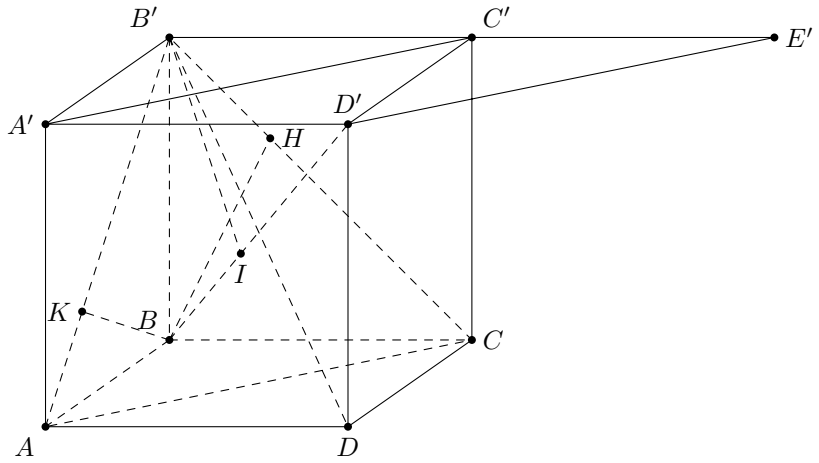
Gọi H là trung điểm của $A'D'\Rightarrow IH\parallel AA'\Rightarrow IH\perp(A'B'C'D')$ và $IH=\dfrac{AA'}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Gọi K là hình chiếu của B lên $CB'\Rightarrow BK\perp CB'$, mà $BK\perp A'B'$ nên $BK\perp(CA'B')$.
$\Delta BB'C$ có $BK=\sqrt{\dfrac{B'B^2\cdot BC^2}{B'B^2+BC^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
$\mathrm{d}(IH,BK)=\mathrm{d}(IH,(BB'C'C))=\mathrm{d}(AA',(BB'C'C))=\mathrm{d}(A,(BB'C'C))=AB=a$.
Gọi α là góc giữa IH và BK, mà $IH\parallel BB'$ nên $\alpha=\widehat{B'BK}$.
Khi đó $\cos\alpha=\dfrac{BK}{BB'}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Ta có $V_{IHBK}=\dfrac{1}{6}IH\cdot BK\cdot\mathrm{d}(IH,BK)\cdot\sin\alpha=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$.
Chọn đáp án (C) □



Câu 18. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khoảng cách giữa AB và $B'C$ là $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$, khoảng cách giữa BC và AB' là $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$, khoảng cách giữa AC và BD' là $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích khối hộp.

(A) $4a^3$. (B) $3a^3$. (C) $5a^3$. (D) $2a^3$.

Lời giải.



Gọi $AB = x$; $AD = y$; $AA' = z$ lần lượt là độ dài các cạnh của hình hộp chữ nhật.

Ta có $\mathrm{d}(AB, B'C) = \mathrm{d}(AB, (B'CD)) = BH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$ (H là hình chiếu của B lên $B'C$).

Xét tam giác BCB' ta có

$$\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{BH^2} = \frac{5}{4a^2}. \quad (1)$$

Ta có $\mathrm{d}(BC, AB') = \mathrm{d}(BC, (ADB')) = BK = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$ (K là hình chiếu của B lên AB').

Xét tam giác ABB' ta có

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{BK^2} = \frac{5}{4a^2}. \quad (2)$$

Dựng đường thẳng d đi qua D' và song song với $A'C'$. Kéo dài $B'C'$ cắt d tại E'.

Ta có

$$\mathrm{d}(AC, BD') = \mathrm{d}(AC, (BD'E')) = \mathrm{d}(C, (BD'E')) = \mathrm{d}(C', (BD'E')) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(B', (BD'E')).$$

Từ (1) và (2), suy ra $x = y \Rightarrow A'B'C'D'$ là hình vuông.

Suy ra $E'D' \perp B'D' \Rightarrow \mathrm{d}(B', (BD'E')) = B'I = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ (I là hình chiếu của B' lên BD').

Xét tam giác $BB'D'$ ta có

$$\frac{1}{z^2} + \frac{1}{\left(x\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{B'I^2} = \frac{3}{4a^2}. \quad (3)$$

Từ (2) và (3), ta suy ra $\begin{cases} x = a \\ z = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = a \\ z = 2a. \end{cases}$

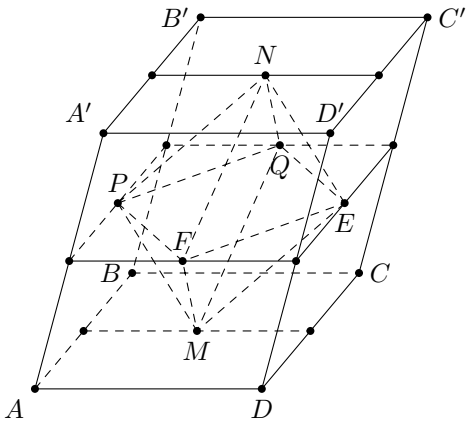
Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = a \cdot a \cdot 2a = 2a^3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng V. Gọi M, N, P, Q, E, F lần lượt là tâm các hình bình hành $ABCD$, $A'B'C'D'$, $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DAA'D'$. Thể tích khối đa diện có các đỉnh M, P, Q, E, F, N bằng

(A) $\dfrac{V}{4}$. (B) $\dfrac{V}{2}$. (C) $\dfrac{V}{6}$. (D) $\dfrac{V}{3}$.

Lời giải.



Gọi V_1 là thể tích khối đa diện có các đỉnh M, P, Q, E, F, N.

Gọi S, h lần lượt là diện tích đáy và chiều cao của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Ta có

$$S_{PQEF} = \frac{1}{2}PE \cdot QF \cdot \sin(PE, QF) = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin(AB, BC) = \frac{S}{2}.$$

Suy ra

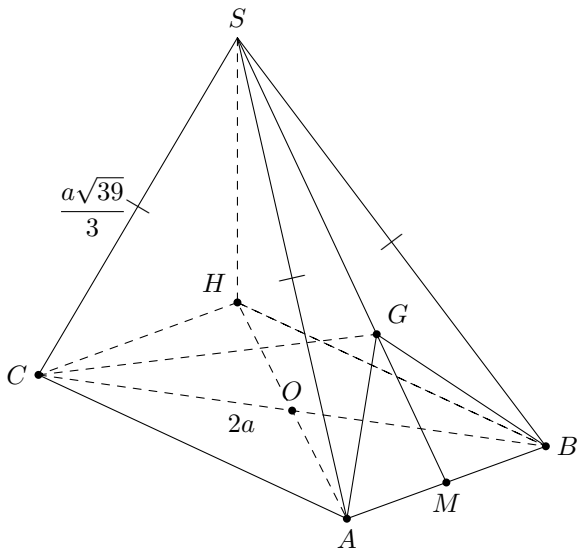
$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot S_{PQEF} \cdot (\mathrm{d}(M, (PQEF)) + \mathrm{d}(N, (PQEF))) = \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{2} \cdot h = \frac{V}{6}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = \dfrac{a\sqrt{39}}{3}$. Tam giác ABC cân tại A có góc $\widehat{A} = 120^\circ$, $BC = 2a$. G là trọng tâm tam giác SAB. Thể tích khối chóp $G.ABC$ là

(A) $\dfrac{2a^3}{9}$. (B) a^3. (C) $\dfrac{a^3}{3}$. (D) $\dfrac{a^3}{9}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu của S trên mặt đáy, vì $SA = SB = SC$ nên $HA = HB = HC$.

Hay H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Suy ra $HA = HB = HC = \dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi O là trung điểm BC, tam giác ABC cân tại A nên $\begin{cases} AO \perp BC \\ \widehat{BAO} = \widehat{CAO} = 60^\circ. \end{cases}$

Suy ra $AB = AC = \dfrac{BO}{\sin \widehat{BAO}} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

Đường cao của khối chóp là $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\dfrac{39a^2}{9} - \dfrac{12a^2}{9}} = a\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3} \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{a^3}{3}$.

Do G là trọng tâm tam giác SAB nên $GM = \dfrac{1}{3}SM \Rightarrow \mathrm{d}\,(G, (ABC)) = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}\,(S, (ABC))$.

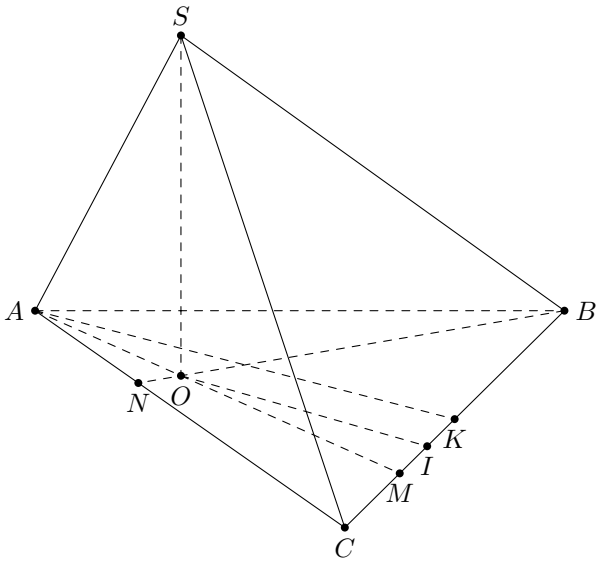
Suy ra $V_{G.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot V_{S.ABC} = \dfrac{a^3}{9}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$, từ B đến mặt phẳng (SAC) là $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$, từ C đến mặt phẳng (SAB) là $\dfrac{\sqrt{30}}{20}$ và hình chiếu vuông góc của S xuống đáy nằm trong tam giác ABC. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

(A) $\dfrac{1}{36}$. (B) $\dfrac{1}{48}$. (C) $\dfrac{1}{12}$. (D) $\dfrac{1}{24}$.

Lời giải.



Gọi O là chân đường cao hạ từ S xuống mặt phẳng (ABC).

Đặt $\mathrm{d}\,(O, BC) = a$, $\mathrm{d}\,(O, AC) = b$, $\mathrm{d}\,(O, AB) = c$, $SO = h$.

Ta có $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OAC} + S_{\Delta OAB} \Rightarrow a + b + c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (1).

Mặt khác

$$\frac{\mathrm{d}\,(O,(SBC))}{\mathrm{d}\,(A,(SBC))}=\frac{OM}{AM}=\frac{OI}{AK}=\frac{2a}{\sqrt{3}}\Rightarrow \mathrm{d}\,(O,(SBC))=\frac{2a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra $\dfrac{2}{a^2}=\dfrac{1}{h^2}+\dfrac{1}{a^2}\Rightarrow a=h.$

Tương tự

$$\frac{\mathrm{d}\,(O,(SAC))}{\mathrm{d}\,(B,(SAC))}=\frac{\mathrm{d}\,(O,AC)}{\mathrm{d}\,(B,AC)}=\frac{2b}{\sqrt{3}}\Rightarrow \mathrm{d}\,(O,(SAC))=\frac{2b}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{15}}{10}=\frac{b}{\sqrt{5}}.$$

Suy ra $\dfrac{5}{b^2}=\dfrac{1}{h^2}+\dfrac{1}{b^2}\Rightarrow b=2h.$

Tương tự

$$\frac{\mathrm{d}\,(O,(SAB))}{\mathrm{d}\,(C,(SAB))}=\frac{\mathrm{d}\,(O,AB)}{\mathrm{d}\,(C,AB)}=\frac{2c}{\sqrt{3}}\Rightarrow \mathrm{d}\,(O,(SAC))=\frac{2c}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{30}}{20}=\frac{c}{\sqrt{10}}.$$

Suy ra $\dfrac{10}{c^2}=\dfrac{1}{h^2}+\dfrac{1}{c^2}\Rightarrow c=3h.$

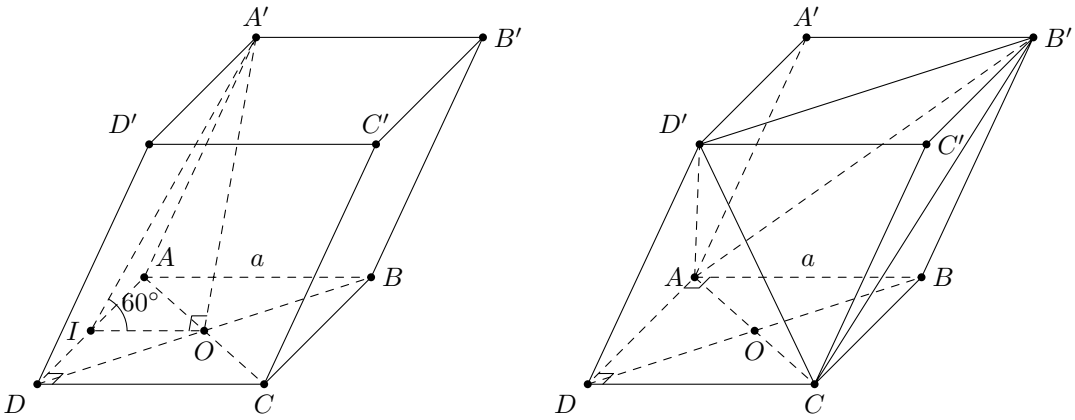
Từ $(1)\Rightarrow h+2h+3h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow h=\dfrac{\sqrt{3}}{12}\Rightarrow V=\dfrac{1}{3}\cdot SO\cdot S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{48}.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy$ABCD$ là hình chữ nhật $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(ABCD)$ bằng 60°. Tính thể tích khối tứ diện $ACB'D'$.

(A) $\dfrac{a^3}{2}$. (B) $\dfrac{a^3}{6}$. (C) $\dfrac{a^3}{3}$. (D) $\dfrac{3a^3}{2}$.

Lời giải.



Gọi $O=AC\cap BD$ và I là trung điểm của AD.

Ta có $(ADD'A')\cap(ABCD)=AD$, $OI\perp AD$ và $A'O\perp(ABCD)$ nên góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(ABCD)$ là $\widehat{A'IO}=60^\circ$.

Tam giác $A'IO$ vuông tại O nên $A'O=IO\cdot\tan\widehat{A'IO}=\dfrac{a}{2}\cdot\tan 60^\circ=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là $V=AB\cdot AD\cdot A'O=a\cdot a\sqrt{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3a^3}{2}$.

Dễ thấy

$$V_{CC'B'D'}=V_{B'ABC}=V_{AA'B'D'}=V_{D'ACD}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot AD\cdot DC\cdot A'O=\frac{1}{6}\cdot a\sqrt{3}\cdot a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3}{4}.$$

Vậy thể tích khối tứ diện $ACB'D'$ là

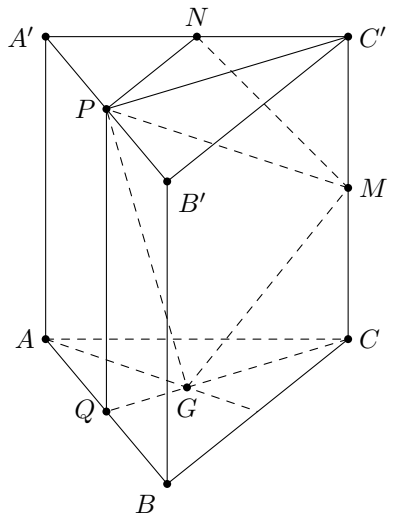
$$V_{ACB'D'} = V - V_{CC'B'D'} - V_{B'ABC} - V_{AA'B'D'} - V_{D'ACD} = V - 4V_{D'ACD} = \frac{3a^3}{2} - 4 \cdot \frac{a^3}{4} = \frac{a^3}{2}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. M, N, P lần lượt là trung điểm của CC', $A'C'$, $A'B'$. Biết thể tích của khối $GMNP$ bằng 5, tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

(A) 72. (B) 21. (C) 18. (D) 17.

Lời giải.



Gọi Q là trung điểm của AB. Đặt $S = S_{PQCC'}$; $h = \mathrm{d}\,(A', (PQCC'))$.

Theo giả thiết $V_{N.GMP} = \frac{1}{3} S_{GMP} \cdot \mathrm{d}\,(N, (GMP)) = 5 \Rightarrow S_{GMP} \cdot \mathrm{d}\,(N, (GMP)) = 15$.

Ta có

$$S_{MPG} = S_{PQCC'} - S_{PQG} - S_{PMC'} - S_{MGC} = S - \frac{S}{6} - \frac{S}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot S = \frac{5S}{12}.$$

Lại có $\mathrm{d}\,(N, (GMP)) = \frac{1}{2} \mathrm{d}\,(A', (GMP))$. Suy ra $S_{GMP} \cdot \mathrm{d}\,(N, (GMP)) = \frac{5S}{12} \cdot \frac{h}{2} \Rightarrow S \cdot h = 72$.

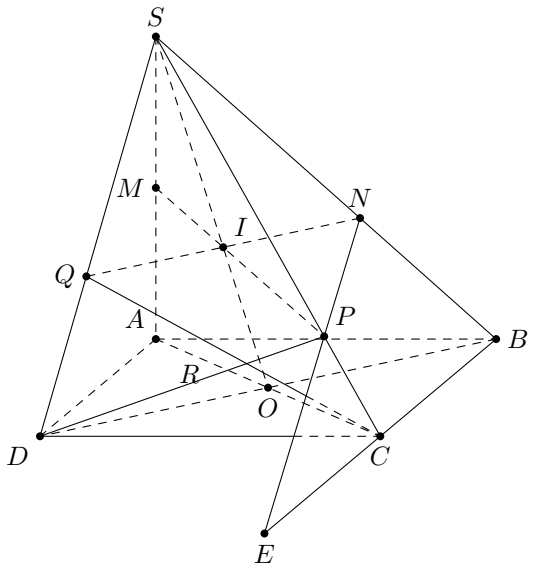
Mặt khác, vì $V_{A'.PQCC'} = \frac{2}{3} \cdot \frac{V_{ABC.A'B'C'}}{2}$ nên $V_{ABC.A'B'C'} = S \cdot h = 72$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi N là trung điểm SB, P thuộc đoạn SC sao cho $SP = 2PC$, M thuộc đoạn SA sao cho $SM = \frac{4}{5} MA$. Mặt phẳng (MNP) cắt SD tại Q. NP cắt BC tại E, CQ cắt DP tại R. Biết rằng thể tích khối chóp $EPQR$ bằng 18 (cm^3). Thể tích khối chóp $SMNPQ$ bằng

(A) 65 (cm^3). (B) $\frac{260}{9}$ (cm^3). (C) 75 (cm^3). (D) 70 (cm^3).

Lời giải.



Gọi $O = AC \cap BD$, $I = MP \cap SO \Rightarrow Q = NI \cap SD$.

Áp dụng định lí Menelauyt cho tam giác SBC với cát tuyết $\overline{NPE}$, ta được $\dfrac{NB}{NS} \cdot \dfrac{PS}{PC} \cdot \dfrac{EC}{EB} = 1 \Rightarrow CE = CB$.

Do ba điểm M, I, P thẳng hàng nên $\overrightarrow{SI} = x\overrightarrow{SP} + (1-x)\overrightarrow{SM} = x \cdot \dfrac{2}{3}\overrightarrow{SC} + (1-x) \cdot \dfrac{4}{9}\overrightarrow{SA}$.

Mặt khác, ta có $\overrightarrow{SI} = k\overrightarrow{SO} = k\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{SC} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{SA}\right)$. Suy ra $x = \dfrac{3}{5}$, $k = \dfrac{8}{15}$.

Tương tự với ba điểm thẳng hàng N, I, Q ta có $\overrightarrow{SQ} = \dfrac{4}{7}\overrightarrow{SD}$.

Áp dụng định lí Menelauyt cho tam giác SCQ với cát tuyết $\overline{PRD}$, ta được $\dfrac{RQ}{RC} = \dfrac{6}{7}$.

Từ đó ta có $S_{PRQ} = \dfrac{6}{13}S_{PQC} = \dfrac{6}{13} \cdot \dfrac{1}{3}S_{SQC} = \dfrac{2}{13} \cdot \dfrac{4}{7} \cdot S_{SDC} = \dfrac{8}{91}S_{SDC}$.

Suy ra $V_{EPQR} = \dfrac{8}{91}V_{ESDC} = \dfrac{8}{91}V_{SBDC} = \dfrac{4}{91}V_{SABCD} \Rightarrow V_{SABCD} = \dfrac{18 \cdot 91}{4}$.

Do đó

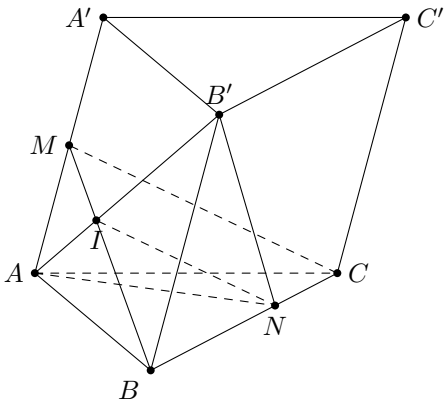
$$\begin{aligned} V_{SMNPQ} = V_{SMNP} + V_{SMPQ} &= \left(\frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} + \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SP}{SC} \cdot \frac{SQ}{SD}\right) \cdot \frac{V_{SABCD}}{2} \\ &= \left(\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{7}\right) \cdot \frac{V_{SABCD}}{2} = 65\,\text{cm}^3. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = 1$, $BC = 2$. Góc $\widehat{CBB'} = 90°$, $\widehat{ABB'} = 120°$. Gọi M là trung điểm cạnh AA'. Biết $\mathrm{d}(AB', CM) = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

(A) $2\sqrt{2}$. (B) $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$. (C) $4\sqrt{2}$. (D) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.



Gọi $I = BM \cap AB'$; $IN \parallel CM$, $(N \in BC)$. Khi đó $CM \parallel (AB'N)$.

Suy ra $\mathrm{d}(CM, A'B) = \mathrm{d}\,(C, (AB'N)) = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

Mặt khác, ta có

$$\frac{IM}{IB} = \frac{AM}{BB'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{NC}{NB} = \frac{IM}{IB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{d}\,(B, (AB'N)) = 2\mathrm{d}\,(C, (AB'N)) = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

Ta có: $\cos\widehat{ABN} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{2}$. Đặt $BB' = x$, áp dụng công thức thể tích khối chóp tam giác khi biết ba cạnh chung đỉnh và ba góc tại đỉnh đó. Ta được

$$V_{B.AB'N} = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} \cdot x \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0^2} = \frac{x\sqrt{2}}{9}.$$

Mặt khác, ta có

$$AB' = \sqrt{x^2 + x + 1}, BN = \frac{4}{3} \Rightarrow NB' = \sqrt{x^2 + \frac{16}{9}}, AN = \sqrt{AB^2 + BN^2 - 2AB \cdot BN \cdot \cos\widehat{ABN}} = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

Ta lại có

$$\cos\widehat{B'AN} = \frac{x^2 + x + 1 + \dfrac{13}{9} - \left(x^2 + \dfrac{16}{9}\right)}{\dfrac{2\sqrt{13(x^2 + x + 1)}}{3}} = \frac{3x + 2}{2\sqrt{13(x^2 + x + 1)}} \Rightarrow \sin\widehat{B'AN} = \sqrt{1 - \frac{(3x + 2)^2}{52(x^2 + x + 1)}}.$$

Và

$$S_{AB'N} = \frac{\sqrt{13(x^2 + x + 1)}}{6} \cdot \sqrt{1 - \frac{(3x + 2)^2}{52(x^2 + x + 1)}} = \sqrt{\frac{43x^2 + 40x + 48}{12}}.$$

Do đó

$$\mathrm{d}\,(B, (ANB')) = \frac{3V_{B.ANB'}}{S_{ANB'}} = \frac{\dfrac{x\sqrt{2}}{3}}{\dfrac{\sqrt{43x^2 + 40x + 48}}{12}} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \Leftrightarrow x = 4 \quad (x > 0).$$

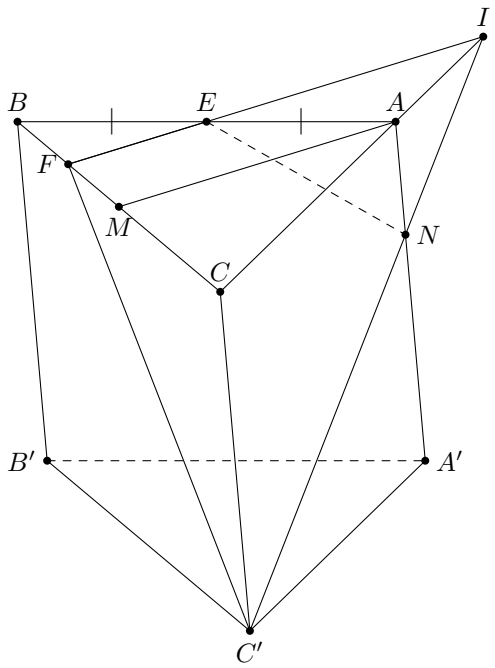
Vậy $V_{B.ANB'} = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$ và $V_{ABC.A'B'C'} = 3 \cdot V_{B'.ABC} = 3 \cdot \left(\dfrac{3}{2} V_{B.ANB'}\right) = \dfrac{9}{2} \cdot \dfrac{4\sqrt{2}}{9} = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V, đáy là tam giác cân, $AB = AC$. Gọi E là trung điểm cạnh AB và F là hình chiếu vuông góc của E lên BC. Mặt phẳng $(C'EF)$ chia khối lăng trụ đã cho thành hai khối đa diện. Tính thể tích khối đa diện chứa đỉnh A.

(A) $\dfrac{47}{72}V$. (B) $\dfrac{25}{72}V$. (C) $\dfrac{29}{72}V$. (D) $\dfrac{43}{72}V$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BC, vì $\triangle ABC$ cân tại A nên $AM \perp BC$. Lại có $EF \perp BC \Rightarrow EF \parallel AM$.
$\triangle ABC$ có E là trung điểm của AB, $EF \parallel AM \Rightarrow F$ là trung điểm của $BM \Rightarrow EF$ là đường trung bình của ΔBAM.

Kéo dài FE cắt tia CA tại I. Nối $C'I$ cắt $A'A$ tại N. Khi đó mặt phẳng $(C'EF)$ cắt lăng trụ theo thiết diện là tứ giác $EFC'N$.

Gọi thể tích khối đa diện chứa đỉnh A là V_1.

Ta có $AM \parallel FI \Rightarrow \dfrac{AM}{FI} = \dfrac{CM}{CF} = \dfrac{2}{3}$, mà $AM = 2EF \Rightarrow \dfrac{EF}{FI} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{IE}{IF} = \dfrac{2}{3}$.

Ta lại có $\dfrac{IA}{IC} = \dfrac{FM}{FC} = \dfrac{1}{3}$; $\dfrac{IN}{IC'} = \dfrac{IA}{IC}$ nên $\dfrac{IN}{IC'} = \dfrac{1}{3}$.

Suy ra $\dfrac{V_{I.EAN}}{V_{I.FCC'}} = \dfrac{IE}{IF} \cdot \dfrac{IA}{IC} \cdot \dfrac{IN}{IC'} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{27}$.

Do đó $\dfrac{V_1}{V_{I.FCC'}} = 1 - \dfrac{2}{27} = \dfrac{25}{27}$. Dễ thấy $\dfrac{IC}{AC} = \dfrac{3}{2}$ và $\dfrac{S_{FCC'}}{S_{BCC'B'}} = \dfrac{3}{8}$, do đó

$$\frac{V_{I.FCC'}}{V_{A.BCC'B'}} = \frac{\frac{1}{3}\mathrm{d}\left(I,(FCC')\right) \cdot S_{FCC'}}{\frac{1}{3}\mathrm{d}\left(A,(BCC'B')\right) \cdot S_{BCC'B'}} = \frac{IC}{AC} \cdot \frac{S_{FCC'}}{S_{BCC'B'}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{16}.$$

Ta lại có $\dfrac{V_{A.BCC'B'}}{V} = 1 - \dfrac{V_{A.A'B'C'}}{V} = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

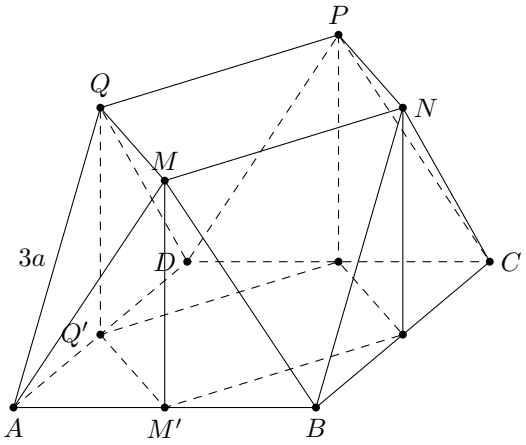
Suy ra $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{25}{27} \cdot \dfrac{9}{16} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{25}{72} \Rightarrow V_1 = \dfrac{25}{72}V$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Cho khối đa diện lồi (H) gồm có 8 đỉnh là A, B, C, D, M, N, P, Q; trong đó có hai mặt $(ABCD)$ và $(MNPQ)$ là hai hình vuông song song với nhau; hình chiếu vuông góc của M, N, P, Q lên mặt phẳng $(ABCD)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,BC,CD,DA. Biết rằng $AM = 3a$, $AB = 4a$. Thể tích khối đa diện (H) được tính theo a bằng

(A) $\dfrac{40a^3}{\sqrt{3}}$. (B) $\dfrac{40a^3\sqrt{5}}{3}$. (C) $\dfrac{20a^3\sqrt{5}}{3}$. (D) $\dfrac{18a^3\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải.



Ta có $MM' = \sqrt{(3a)^2 - (2a)^2} = a\sqrt{5}$.

Chia khối đa diện đã cho thành khối lăng trụ đều có đáy là $MNPQ$ và chiều cao là MM' và 4 khối chóp tứ giác có đáy là hình chữ nhật dạng như $A.MQQ'M'$.

Ta có $MN = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{4a\sqrt{2}}{2} = 2a\sqrt{2}$;$\mathrm{d}\,(A,(MQQ'M')) = \dfrac{AC}{4} = a\sqrt{2}$.

Suy ta thể tích khối lăng trụ $V_{MNPQ.M'N'P'Q'} = \left(2a\sqrt{2}\right)^2 \cdot a\sqrt{5} = 8a^3\sqrt{5}$.

Thể tích khối chóp tứ giác $A.MQQ'M'$ là

$$V_{A.MQQ'M'} = \frac{1}{3}S_{MQQ'M'} \cdot \mathrm{d}\,(A,(MQQ'M')) = \frac{1}{3} \cdot \left(2a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{5}\right) \cdot a\sqrt{2} = \frac{4a^3\sqrt{5}}{3}.$$

Suy ta thể tích khối đa diện đã cho là

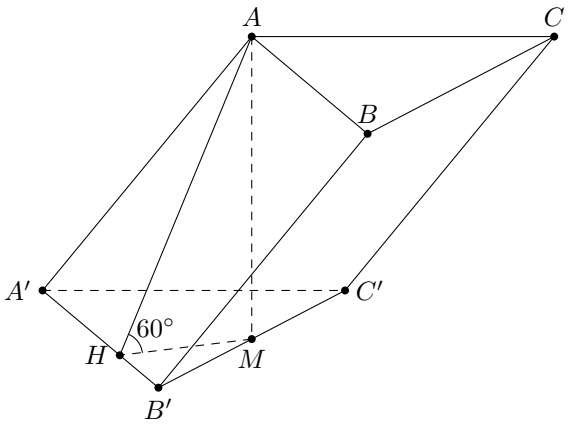
$$V_{(H)} = V_{MNPQ.M'N'P'Q'} + 4V_{A.MQQ'M'} = 8a^3\sqrt{5} + 4 \cdot \frac{4a^3\sqrt{5}}{3} = \frac{40a^3\sqrt{5}}{3}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A lên đáy $(A'B'C')$ trùng với trung điểm M của cạnh $B'C'$. Góc nhị diện giữa hai mặt phẳng $(AA'B')$ và (ABC) bằng $60°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

(A) $\dfrac{a^3}{16}$. (B) $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{16}$. (C) $\dfrac{3a^3}{8}$. (D) $\dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải.



Hạ HM vuông góc với $A'B'$ tại điểm H.

Khi đó góc nhị diện giữa hai mặt phẳng $(AA'B')$ và (ABC) cũng chính là góc giữa 2 mặt phẳng $(AA'B')$ và $(A'B'C')$ và bằng $\widehat{AHM} = 60^\circ$.

Xét tam giác vuông $HB'M$ vuông tại H có $HM = \dfrac{a}{2} \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Xét tam giác vuông AMH vuông tại M có $AM = HM \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{3a}{4}$.

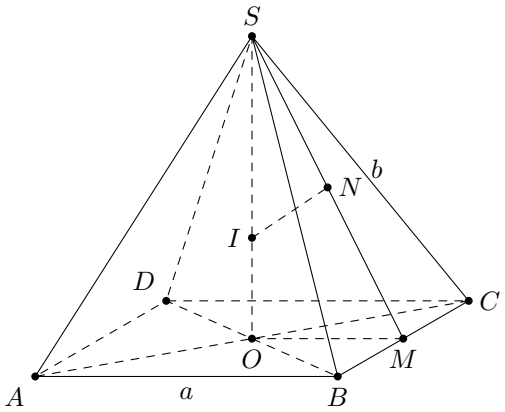
Thể tích khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AM = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{3a}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{16}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$. Bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp tứ giác $S.ABCD$ tính theo a tương ứng bằng

(A) $\dfrac{a\sqrt{14}}{\sqrt{15}+3}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{7}}{\sqrt{30}+\sqrt{2}}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{5}+1}$. (D) $\dfrac{2a\sqrt{3}}{4\sqrt{7}+3}$.

Lời giải.



Chiều cao hình chóp $SO = h = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

Suy ra $SM = \sqrt{SC^2 - MC^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

Cách 1. Gọi tâm mặt cầu nội tiếp là I, khi đó ta có $IO = IN = r$.

Từ hình vẽ ta có $IN \perp (SBC)$, $\triangle SIN \backsim \triangle SOM$.

Khi đó, ta có

$$\frac{SI}{SM}=\frac{IN}{OM}\Leftrightarrow\frac{h-r}{\frac{a\sqrt{15}}{2}}=\frac{r}{\frac{a}{2}}\Leftrightarrow\frac{\frac{a\sqrt{14}}{2}-r}{\frac{a\sqrt{15}}{2}}=\frac{2r}{a}\Leftrightarrow r=\frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{30}+\sqrt{2}}.$$

Cách 2. Thể tích khối chóp $V_{SABCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABCD}\cdot SO=\frac{1}{3}a^2\cdot\frac{a\sqrt{14}}{2}=\frac{a^3\sqrt{14}}{6}$.

Diện tích mặt bên $S_{SBC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot SM=\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$.

Áp dụng công thức

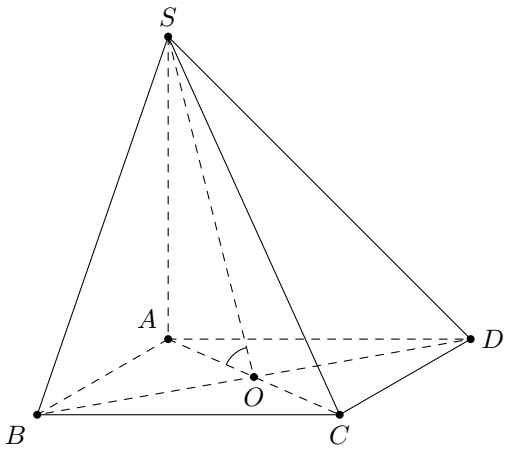
$$r=\frac{3V}{S_{tp}\cdot S_{ABCD}}=\frac{3V}{4S_{SBC}+S_{ABCD}}=\frac{3\cdot\frac{a^3\sqrt{14}}{6}}{4\cdot\frac{a^2\sqrt{15}}{4}+a^2}=\frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{30}+\sqrt{2}}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$. Biết góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 60°. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ tương ứng bằng

(A) $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. (B) $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. (C) $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. (D) $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có $\left(\widehat{(SBD),(ABCD)}\right)=\widehat{SOA}=60^\circ$.

Xét tam giác SOA vuông tại A có $h=SA=AO\cdot\tan\widehat{SOA}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\tan 60^\circ=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

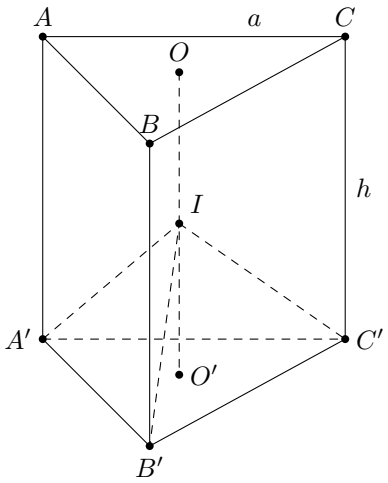
Suy ra $V_{S.ABCD}=\frac{1}{2}\cdot S_{ABCD}\cdot SA=\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot\frac{a\sqrt{6}}{2}=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy bằng a. Biết thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $\frac{a^3\sqrt{5}}{2}$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

(A) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. (B) $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. (C) $a\sqrt{2}$. (D) a.

Lời giải.



Thể tích khối lăng trụ

$$V = S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{a^3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow h = AA' = \frac{2a\sqrt{15}}{3}.$$

Bán kính đáy lăng trụ $R_d = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Áp dụng công thức tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ

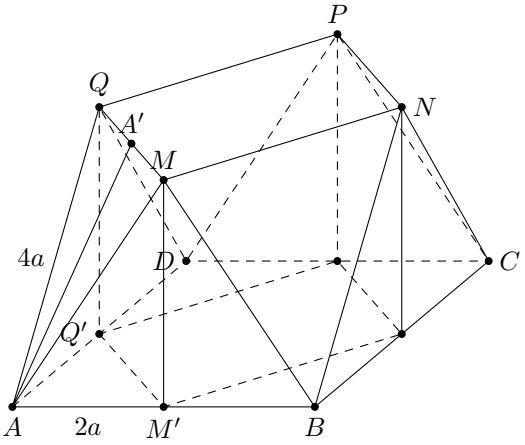
$$R = \sqrt{R_d^2 + \frac{h^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{\left(\frac{2a\sqrt{15}}{3}\right)^2}{4}} = a\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Cho khối đa diện lồi (H) gồm có 8 đỉnh là A, B, C, D, M, N, P, Q; trong đó có hai mặt $(ABCD)$ và $(MNPQ)$ là hai hình vuông song song với nhau; hình chiếu vuông góc của M,N,P,Q lên mặt phẳng $(ABCD)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Biết rằng $AM = AB = 4a$. Hãy tính theo a diện tích toàn phần của khối đa diện (H).

(A) $24a^2 + 16a^2\sqrt{7} + 16a^2\sqrt{3}$.
(B) $a^2\sqrt{7} + 16a^2\sqrt{3} + 36a^2$.
(C) $24a^2 + 8a^2\sqrt{7} + 16a^2\sqrt{3}$.
(D) $24a^2 + 16a^2\sqrt{3}$.

Lời giải.



Ta dễ dàng tính được $MM' = \sqrt{(4a)^2 - (2a)^2} = 2a\sqrt{3}$.

Các cạnh hình vuông $MNPQ$ là $MN = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{4a\sqrt{2}}{2} = 2a\sqrt{2}$.

Nếu ta gọi A' là trung điểm của MP thì ta có

$$AA' = \sqrt{AM^2 - MA'^2} = \sqrt{(4a)^2 - \left(a\sqrt{2}\right)^2} = a\sqrt{14}.$$

Suy ra diện tích toàn phần của khối đa diện (H) là

$$\begin{aligned} S_{tp(H)} &= S_{ABCD} + S_{MNPQ} + 4 \cdot S_{\Delta AMQ} + 4 \cdot S_{\Delta MAB} \\ &= (4a)^2 + \left(2a\sqrt{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{14} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot 2a\sqrt{3} \\ &= 24a^2 + 8a^2\sqrt{7} + 16a^2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Tỉ lệ diện tích xung quanh của hình lập phương (H_1) (tổng diện tích 4 mặt bên) so với diện tích toàn phần của hình tứ diện đều (H_2) bằng $\sqrt{3}$. Hỏi khi đó tỉ lệ thể tích của hình lập phương (H_1) so với thể tích hình tứ diện đều (H_2) bằng bao nhiêu?

(A) $\dfrac{9\sqrt{6}}{4}$. (B) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Gọi cạnh của hình lập phương và cạnh của tứ diện đều lần lượt là a, b.

Ta có $\dfrac{S_{xq\,(H_1)}}{S_{tp\,(H_2)}} = \dfrac{4a^2}{4 \cdot \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{3} \Rightarrow b^2 = \dfrac{4}{3}a^2 \Rightarrow b = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$

Suy ra: $\dfrac{V_{(H_1)}}{V_{(H_2)}} = \dfrac{a^3}{b^3 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{12}} = \dfrac{a^3}{\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^3 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{12}} = \dfrac{9\sqrt{6}}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

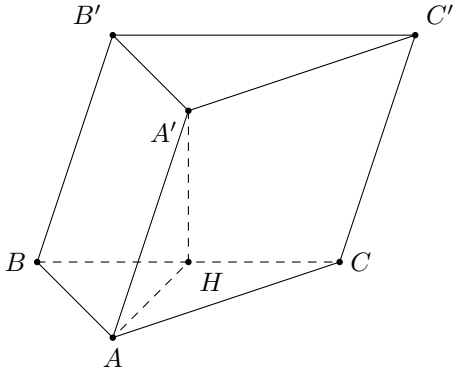
Câu 34. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên với mặt đáy của lăng trụ là $30°$. Hình chiếu vuông góc của A' lên đáy (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{9}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải.

Do góc giữa cạnh bên với mặt đáy của lăng trụ là $30°$ nên suy ra $\widehat{A'AH} = 30° \Rightarrow A'H = AH \cdot \tan 30° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{a}{2}$.

Suy ra thể tích lăng trụ của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.



Chọn đáp án (B) □

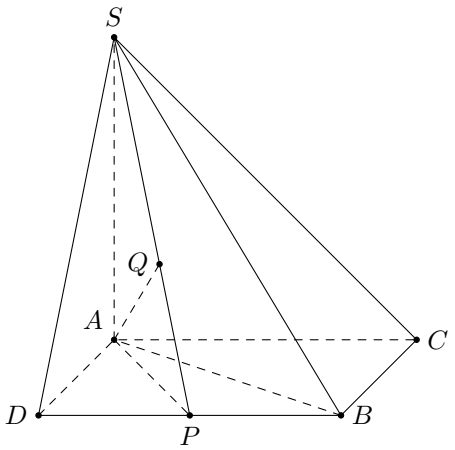
Câu 35. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

(A) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. (C) $2a$. (D) $\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải.

Tam giác SAB vuông tại A và có
$\widehat{SBA} = 60^\circ \Rightarrow SA = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.
Dựng hình bình hành $ABCD$, suy ra:

$$\begin{aligned} AC \parallel (SBD) \Rightarrow \mathrm{d}(AC;SB) &= \mathrm{d}(AC;(SBD)) \\ &= \mathrm{d}(A;(SBD)) \\ &= AQ = \frac{SA \cdot AP}{\sqrt{SA^2 + AP^2}}. \end{aligned}$$



Trong đó $AP \perp BD$; $AQ \perp SB$.
Tam giác ABC đều suy ra: $AP = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\Rightarrow \mathrm{d}(AC;SB) = AQ = \frac{SA \cdot AP}{\sqrt{SA^2 + AP^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

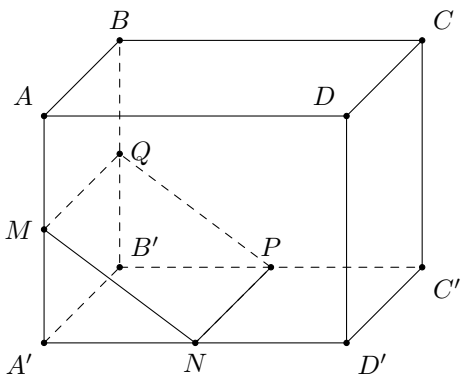
Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', $A'D'$, $B'C'$. Mặt phẳng (MNP) chia khối hình hộp thành hai phần có thể tích là V_1 và V_2, trong đó $V_1 < V_2$. Tỉ lệ thể tích $\dfrac{V_1}{V_2}$ tương ứng bằng

(A) $\dfrac{1}{7}$. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) 1. (D) $\dfrac{1}{8}$.

Lời giải.

Giao điểm của mặt phẳng (MNP)với cạnh BB' là trung điểm Q của BB'.
Khi đó thể tích V_1 là phần thể tích khối lăng trụ $A'MN.B'PQ$ như hình vẽ.



Ta có $S_{\triangle A'MN} = \dfrac{1}{4} S_{\triangle A'AD} \Rightarrow S_{\triangle A'MN} = \dfrac{1}{8} S_{\triangle A'ADD'}$
$\Rightarrow V_{A'MN.B'PQ} = \dfrac{1}{8} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \dfrac{V}{8} = V_1$.
$\Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{7}$.

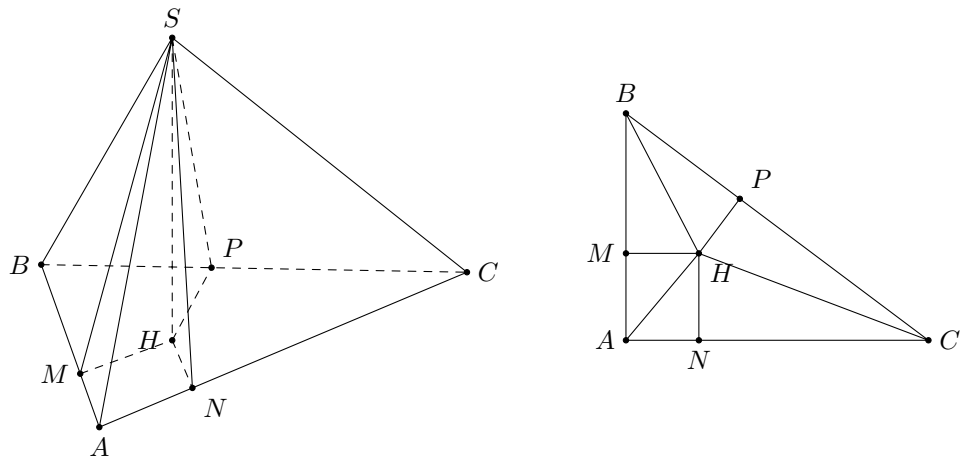
Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A với cạnh huyền $BC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt đáy ABC nằm trong tam giác ABC. Biết các mặt bên (SAB), (SBC), (SCA) lần lượt tạo với đáy các góc $60°$, $60°$, $45°$. Thể tích của hình chóp $S.ABC$ tính theo a tương ứng bằng

(A) $\dfrac{3a^3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6}}$. (B) $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{2+3\sqrt{2}+\sqrt{6}}$. (C) $\dfrac{2a^3}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{6}}$. (D) $\dfrac{6a^3}{2+\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) và M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên các cạnh AB, AC, BC. Khi đó góc tạo bởi các mặt phẳng (SAB), (SCA), (SBC) với (ABC) lần lượt là $\widehat{SMH}$, $\widehat{SNH}$, $\widehat{SPH}$. Suy ra $\widehat{SMH} = \widehat{SPH} = 60°$, $\widehat{SNH} = 45°$.



Đặt $SH = h \Rightarrow HM = HP = SH \cdot \cot 60° = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$; $HN = SH \cdot \cot 45° = h$.

Ta có

$$\begin{aligned}
& S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABH} + S_{\triangle ACH} + S_{\triangle CBH} \\
\Leftrightarrow\ & AB \cdot AC = AB \cdot MH + BC \cdot HP + AC \cdot HN \\
\Leftrightarrow\ & 2a^2 = a\sqrt{2} \cdot \frac{h}{\sqrt{3}} + 2a \cdot \frac{h}{\sqrt{3}} + a\sqrt{2} \cdot h \\
\Rightarrow\ & h = \frac{2a\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}} \\
\Rightarrow\ & V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{2a^3}{2\sqrt{3}+\sqrt{6}+3\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

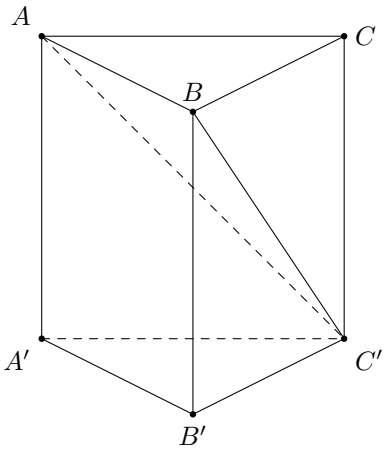
Chọn đáp án (C) □

Câu 38. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A có $AC = 2a$. Đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng $(ACC'A')$ một góc $30°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

(A) $2a^3\sqrt{2}$. (B) $4a^3\sqrt{2}$. (C) $a^3\sqrt{3}$. (D) $3a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ACC'A')$, mà $BC' \cap (ACC'A') = C'$ nên góc tạo bởi đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ACC'A')$ là $\left(\widehat{BC', (ACC'A')}\right) = \left(\widehat{BC', AC'}\right) = \widehat{AC'B} = 30^\circ$.



Ta có $AB = AC = 2a \Rightarrow AC' = AB \cdot \cot 30^\circ = 2a\sqrt{3}$.

Suy ra đường cao lăng trụ là

$$h = CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = \sqrt{\left(2a\sqrt{3}\right)^2 - (2a)^2} = 2a\sqrt{2}.$$

Thể tích lăng trụ là $V = S_{\triangle ABC} \cdot CC' = \dfrac{1}{2} \cdot (2a)^2 \cdot 2a\sqrt{2} = 4a^3\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết rằng tam giác SAC vuông tại đỉnh S và có diện tích bằng $2a^2$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có giá trị nhỏ nhất là

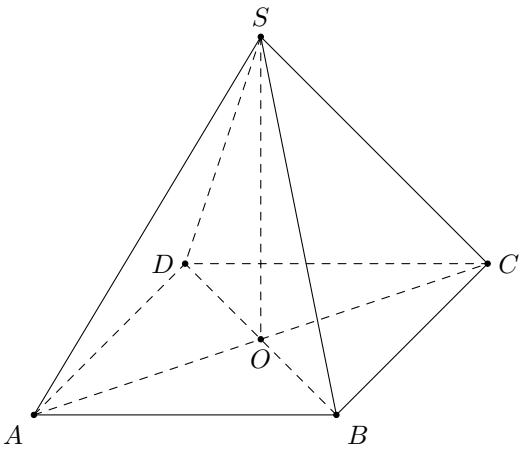
(A) $8\pi a^2$. (B) $4\pi a^2$. (C) $6\pi a^2$. (D) $12\pi a^2$.

Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$.

Ta có $\triangle SAC$ vuông tại S nên

$$OS = OA = OB = OC = OD = R.$$



Vậy O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bán kính R.

Đặt $SC = x$, $x > 0$. Theo đầu bài, diện tích tam giác SAC là $2a^2$ nên

$$\frac{1}{2}SA \cdot SC = 2a^2 \Leftrightarrow SA \cdot SC = 4a^2 \Rightarrow SA = \frac{4a^2}{SC} = \frac{4a^2}{x}.$$

Suy ra $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{16a^4}{x^2} + x^2} \overset{AM-GM}{\geq} \dfrac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{\dfrac{16a^4}{x^2} \cdot x^2}} = a\sqrt{2}$.

Để diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là nhỏ nhất thì bán kính R nhỏ nhất $\Rightarrow \min R = a\sqrt{2}$.

Vậy diện tích nhỏ nhất của mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(a\sqrt{2}\right)^2 = 8\pi a^2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích là V. Gọi M, N, P, Q lần lượt là những điểm nằm trên các cạnh SA, SB, SC, SD sao cho $SM = MA$, $SN = NB$, $SP = 2PC$, $SQ = 3QD$. Thể tích khối đa diện lồi có 5 đỉnh S, M, N, P, Q tính theo V bằng

(A) $\dfrac{5V}{24}$. (B) $\dfrac{V}{8}$. (C) $\dfrac{7V}{16}$. (D) $\dfrac{7V}{32}$.

Lời giải.

Dễ thấy $V_{S.ABD} = V_{S.CBD} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{2}V$.

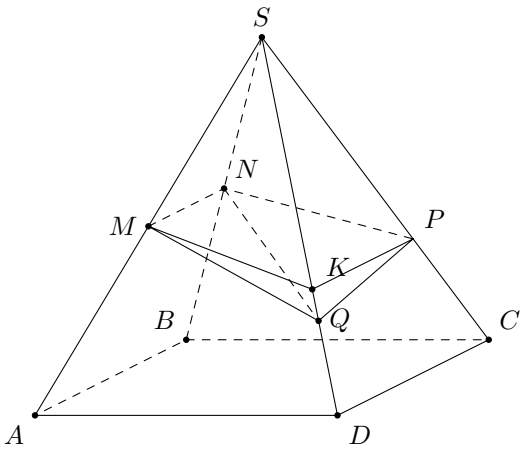
Có $\dfrac{V_{S.MNQ}}{V_{S.ABD}} = \dfrac{SM}{SA}\cdot\dfrac{SN}{SB}\cdot\dfrac{SQ}{SD} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{16}$.

$\Rightarrow V_{S.MNQ} = \dfrac{3}{16}V_{S.ABD} = \dfrac{3}{32}V$.

$\dfrac{V_{S.PNQ}}{V_{S.CBD}} = \dfrac{SP}{SC}\cdot\dfrac{SN}{SB}\cdot\dfrac{SQ}{SD} = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$.

$\Rightarrow V_{S.PNQ} = \dfrac{1}{4}V_{S.CBD} = \dfrac{1}{8}V$.

Vậy $V_{SMNPQ} = V_{S.MNQ} + V_{S.PNQ} = \dfrac{3}{32}V + \dfrac{1}{8}V = \dfrac{7}{32}V$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = 2AD = 2a$ và cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) bằng $\dfrac{2a}{3}$. Hãy tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

(A) $\dfrac{2a^3}{3}$. (B) $\dfrac{a^3}{3}$. (C) $\dfrac{a^3}{6}$. (D) $\dfrac{3a^3}{8}$.

Lời giải.

Gọi chiều cao của hình chóp là $h = SA$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{[\mathrm{d}\,(A;(SBD))]^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{\left(\frac{2a}{3}\right)^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} \\ \Rightarrow\ & h = a. \end{aligned}$$

Vậy thể tích khối chóp $V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \dfrac{1}{3}AB\cdot AD\cdot h = \dfrac{1}{3}2a\cdot a\cdot a = \dfrac{2a^3}{3}$.

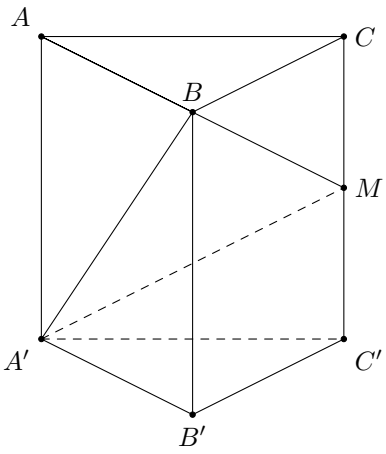
Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'D'$ có $AB = 2$, $AC = 4$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của CC' và tam giác BMA' vuông tại M. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

(A) 24. (B) $12\sqrt{3}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{42}}{3}$. (D) $2\sqrt{42}$.

Lời giải.

Đặt $AA'=2x$, tam giác ABC có $AB=2$, $AC=4$ và $BAC=60^\circ$.



$\Rightarrow BC=2\sqrt{3}$.

Ta có: $\begin{cases} A'M=\sqrt{x^2+16} \\ BM=\sqrt{x^2+12} \\ A'B=\sqrt{4x^2+4}. \end{cases}$

Tam giác BMA' vuông tại $M \Rightarrow x^2+16+x^2+12=4x^2+4 \Rightarrow x=2\sqrt{3}$

$\Rightarrow AA'=4\sqrt{3}$.

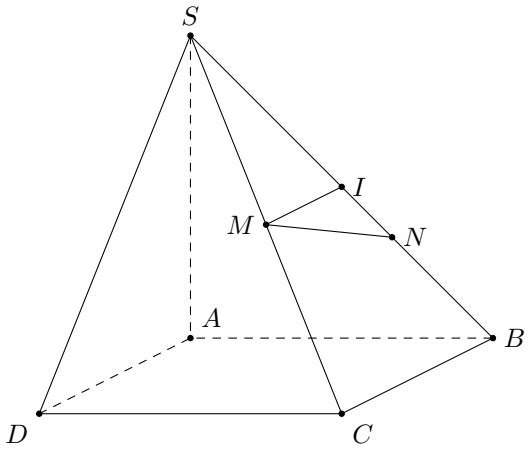
$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot \sin 60^\circ=2\sqrt{3}$; $V_{ABC.A'B'C'}=S_{ABC}\cdot AA'=24$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và SA vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của SC và N nằm trên cạnh SB sao cho $NS=2NB$. Biết rằng $MN=\dfrac{2a}{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$.

Lời giải.



Cách 1: Gọi I là trung điểm của SB.

Xét $\triangle MNI$ vuông tại I, ta có $NI=\sqrt{MN^2-MI^2}=\sqrt{\dfrac{4a^2}{9}-\dfrac{a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{7}}{6}$.

$IN=\dfrac{1}{6}SB \Rightarrow SB=a\sqrt{7}$.

$SA=\sqrt{SB^2-AB^2}=\sqrt{7a^2-a^2}=a\sqrt{6}$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $V=\dfrac{1}{3}SA\cdot AB^2=\dfrac{1}{3}a\sqrt{6}\cdot a^2=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Cách 2: Gắn hệ trục tọa độ vào hình chóp với: A trùng với O, trục Ox dọc theo $\overrightarrow{AD}$, trục Oy dọc theo $\overrightarrow{AB}$, trục Oz dọc theo $\overrightarrow{AS}$.

Ta gán các giá trị $a=1$. Khi đó, $A(0,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(1,1,0)$, $D(1,0,0)$, $S(0,0,h)$.

$M\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{h}{2}\right)$, $\overrightarrow{NS}+2\overrightarrow{NB}=\vec{0} \Rightarrow N\left(0,\dfrac{2}{3},\dfrac{h}{3}\right)$.

$MN=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{h}{2}-\frac{h}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{h^2+10}}{6}=\frac{a}{2}=\frac{2a}{3}\Rightarrow h=\sqrt{6}.$

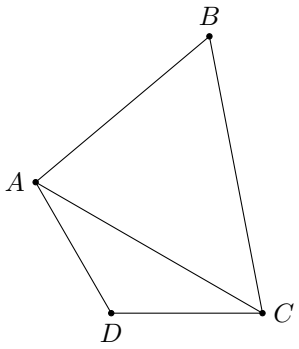
Suy ra thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 1^2\cdot 1\cdot\sqrt{6}=\frac{1^3\cdot\sqrt{6}}{3}=\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 44. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có mặt cầu ngoại tiếp là (S), biết (S) có bán kính là 6. Đáy $ABCD$ là tứ giác có $\widehat{ABC}=60^\circ$ và $AD=CD=4$. Thể tích tứ diện $A'ACD$ bằng

(A) $\frac{16\sqrt{15}}{3}$. (B) $8\sqrt{5}$. (C) $16\sqrt{3}$. (D) $\frac{12\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải.



Vì lăng trụ đứng tồn tại mặt cầu ngoại tiếp nên bắt buộc đáy phải là tứ giác nội tiếp được đường tròn.

Suy ra $\widehat{ADC}=180^\circ-\widehat{ABC}=120^\circ$.

Trong $\triangle ADC$ có $AC=\sqrt{DA^2+DC^2-2\cdot DA\cdot DC\cdot\cos 120^\circ}=4\sqrt{3}$.

Khi đó bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADC$ (cũng là bán đường tròn ngoại tiếp tứ giác đáy $ABCD$) là

$$R_{\triangle ADC}=\frac{AC}{2\sin 120^\circ}=\frac{4\sqrt{3}}{2\sin 120^\circ}=4.$$

Nếu chiều dài cạnh bên (cũng là chiều cao lăng trụ) là $h=AA'$ thì bán kính mặt cầu tiếp là

$R=6=\sqrt{R^2_{\triangle ADC}+\frac{h^2}{4}}=\sqrt{4^2+\frac{h^2}{4}}\Rightarrow h=4\sqrt{5}.$

Vậy thể tích tứ diện $A'ACD$ là

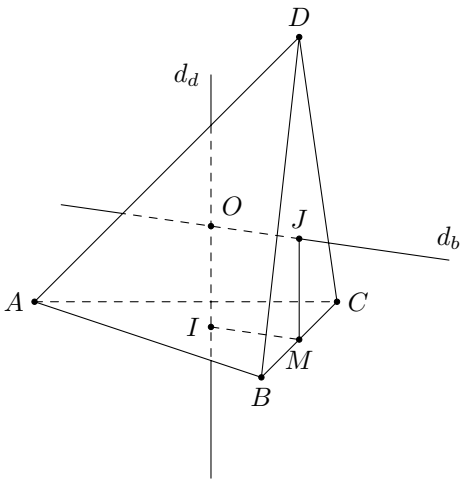
$$\begin{aligned}V_{A'ACD}&=\frac{1}{3}S_{ACD}\cdot AA'=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}DA\cdot DC\cdot\sin 120^\circ\right)\cdot h\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot\sin 120^\circ\right)\cdot 4\sqrt{5}=\frac{16\sqrt{15}}{3}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Cho tứ diện $ABCD$ có (ABC) vuông góc với (BCD) và $BC=6$, $\widehat{BAC}+\widehat{BDC}=90^0$. Chu vi của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và DBC lần lượt là $a\sqrt{3}$ và a. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ tương ứng là

(A) $\sqrt{39}$. (B) 12. (C) $\sqrt{41}$. (D) $2\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi R_d, R_b lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và BCD.

Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và BCD.

$\Rightarrow R_d = IC$, $R_b = JC$.

Gọi d_d, d_b lần lượt là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và BCD.

Gọi O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp $ABCD \Rightarrow O = d_d \cap d_b$.

Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow MI$, MJ là các đường trung trực của BC.

$\Rightarrow MIOJ$ là hình chữ nhật.

$R = \sqrt{OJ^2 + CJ^2} = \sqrt{IM^2 + CJ^2} = \sqrt{IC^2 - MC^2 + CJ^2} = R = \sqrt{R_d^2 + R_b^2 - \dfrac{GT^2}{4}}$.

Đây là dạng hình chóp có hai mặt vuông góc với nhau.

Khi đó công thức tính bán kính mặt cầu là $R = \sqrt{R_d^2 + R_b^2 - \dfrac{GT^2}{4}}$, trong đó GT là độ dài giao tuyến $GT = BC = 6$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và DBC là $R_{\triangle ABC} = \dfrac{BC}{2\sin\widehat{BAC}}$; $R_{\triangle BDC} = \dfrac{BC}{2\sin\widehat{BDC}}$.

Từ giả thiết suy ra $R_{\triangle ABC} = \sqrt{3}R_{\triangle DBC} \Leftrightarrow \dfrac{BC}{2\sin\widehat{BAC}} = \sqrt{3}.\dfrac{BC}{2\sin\widehat{BDC}} \Rightarrow \sin\widehat{BDC} = \sqrt{3}\sin\widehat{BAC}$.

Lại có: $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BDC} = 60°$; $\widehat{BAC} = 30° \Rightarrow R_{\triangle ABC} = 6$, $R_{\triangle BDC} = 2\sqrt{3}$.

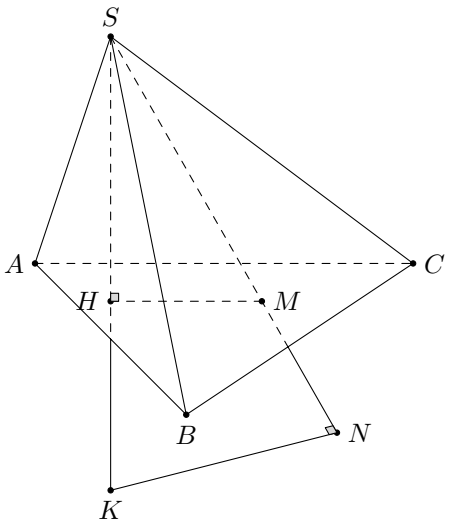
Suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $R = \sqrt{6^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 - \dfrac{6^2}{4}} = \sqrt{39}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 1. Gọi M là một điểm di động nằm trên mặt phẳng (ABC). Gọi N là điểm nằm trên đường thẳng MS sao cho $SM \cdot SN = 3$. Quỹ tích điểm N khi M thay đổi là một mặt cầu có bán kính bằng $\sqrt{3}$. Biết khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) nhỏ hơn $\sqrt{3}$. Thể tích hình chóp $SABC$ tương ứng bằng

(A) $\dfrac{1}{6}$. (B) $\dfrac{1}{8}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{2}}{15}$.

Lời giải.



Hạ đường cao SH vuông góc với (ABC) tại H (Vì $SABC$ cố định nên SH cố định), trên SH lấy điểm K sao cho $SH \cdot SK = SM \cdot SN = 3$.

Suy ra điểm K cố định và được xác định bởi $SK = \dfrac{3}{SH}$.

Suy ra $\triangle SHM \backsim \triangle SNK \Rightarrow \widehat{SNK} = 90^\circ$.

Suy ra N nhìn SK (cố định) một góc vuông. Vì thế M chạy trên mặt phẳng (ABC) thì N nằm trên mặt cầu cố định có đường kính là SK.

Suy ra $SK = 2R = 2\sqrt{3} \Rightarrow SH \cdot SK = 2\sqrt{3}SH \Rightarrow SH = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

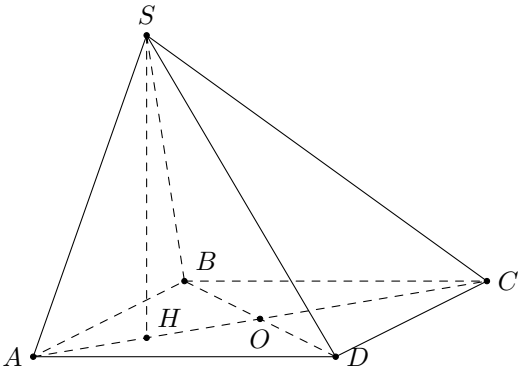
Suy ra $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot SH = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{8}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Biết tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SABCD$ trùng với tâm O của hình vuông đáy $ABCD$ và chân đường cao H hạ từ đỉnh S xuống đáy $ABCD$ trùng với trung điểm của đoạn thẳng OA. Thể tích hình chóp $SABCD$ bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{6}}{12}a^3$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}a^3$. (C) $\dfrac{1}{8}a^3$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}a^3$.

Lời giải.



Tâm mặt cầu ngoại tiếp là điểm O cách đều các đỉnh $OA = OB = OC = OD = OS = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Ta có $OH = \dfrac{OA}{2} = \dfrac{a}{2\sqrt{2}} \Rightarrow SH = \sqrt{SO^2 - OH^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

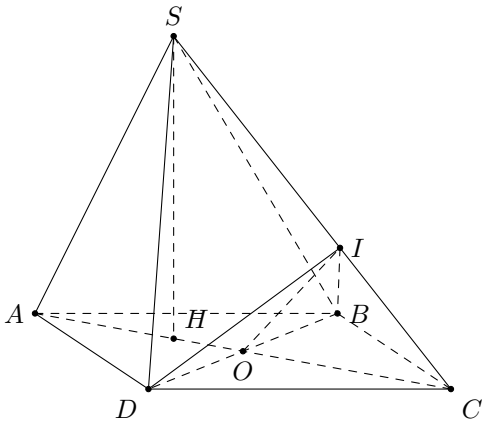
Suy ra thể tích của hình chóp $SABCD$ là $V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SH = \dfrac{1}{3}a^2 \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi nhưng không là hình vuông, $AB = SA = SB = SD = a$. Biết rằng thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$, khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng

(A) $30°$. (B) $45°$. (C) $60°$. (D) $90°$.

Lời giải.



Cách 1: Dễ thấy

$$V_{S.ABD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{1}{6}SA{\cdot}SB{\cdot}SD\sqrt{1 - \cos^2\widehat{ASB} - \cos^2\widehat{ASD} - \cos^2\widehat{BSD} + 2\cos\widehat{ASB}\cdot\cos\widehat{ASD}\cdot\cos\widehat{BSD}}$$

Mặt khác $AB = AD = SA = SB = SD = a$ nên $S.ABD$ là tứ diện đều.

Suy ra $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2}AC$, nên tam giác $\triangle SAC$ vuông tại S.

Mặt khác: Dựng $OI \perp SC$ trong mặt phẳng (SAC). Dễ dàng ta chứng minh được $SC \perp (BID)$.

Nên: $\begin{cases} OI = \dfrac{1}{2}SA = \dfrac{1}{2}BD & (1) \\ ((SBC);(SCD)) = (BI;DI)\,. & (2) \end{cases}$

Từ $(1) \Rightarrow \triangle BID \perp$ tại I. Từ (1); (2) suy ra $((SBC);(SDC)) = (BI;DI) = 90°$.

Cách 2: Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$. Ta có $\triangle SCB$, $\triangle SDC$ là các tam giác cân lần lượt tại B, D.

Gọi I là trung điểm của $SC \Rightarrow \begin{cases} BI \perp SC \\ DI \perp SC. \end{cases}$

Do đó góc giữa hai mặt phẳng(SBC) và (SDC) là góc giữa hai đường thẳng BI và DI.

$\triangle SBC = \triangle SDC \Rightarrow BI = DI \Rightarrow \triangle IBD$ cân tại I.

Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Do $SA=SB=SD \Rightarrow HA=HB=HD \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác $\triangle ABD$.
Mà $\triangle ABD$ cân tại A nên H nằm trên đường chéo AC của hình thoi $ABCD$.
Đặt $OB=x$ $(0<x<a)$. Ta có $OA=\sqrt{a^2-x^2}$; $\sin\widehat{OAB}=\dfrac{OB}{AB}=\dfrac{x}{a}$.
$\sin\widehat{BAD}=\sin 2\widehat{OAB}=2\sin\widehat{OAB}\cdot\cos\widehat{OAB}=2\dfrac{OB}{AB}\cdot\dfrac{OA}{AB}=\dfrac{2x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}$.
Ta có $\dfrac{BD}{\sin\widehat{BAD}}=2AH \Rightarrow AH=\dfrac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}$.
Suy ra $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{a^4}{4\left(a^2-x^2\right)}}=\sqrt{\dfrac{3a^4-4a^2x^2}{4\left(a^2-x^2\right)}}=\dfrac{a}{2}\dfrac{\sqrt{3a^2-4x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}$.
Gọi V là thể tích của khối chóp $S.ABCD$.
Ta có $V=\dfrac{1}{3}SH\cdot S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}SH\cdot AO\cdot BD=\dfrac{a}{6}\cdot\dfrac{\sqrt{3a^2-4x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\sqrt{a^2-x^2}\cdot 2x=\dfrac{a}{3}\sqrt{3a^2x^2-4x^4}$.
Theo giả thiết

$$\begin{aligned}
& V=\frac{a^3\sqrt{2}}{6} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{a}{3}\sqrt{3a^2x^2-4x^4}=\frac{a^3\sqrt{2}}{6} \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{3a^2x^2-4x^4}=\frac{a^2\sqrt{2}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & 8x^4-6a^2x^2+a^4=0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x^2=\dfrac{a^2}{4} \\ x^2=\dfrac{a^2}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{a}{2} \\ x=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

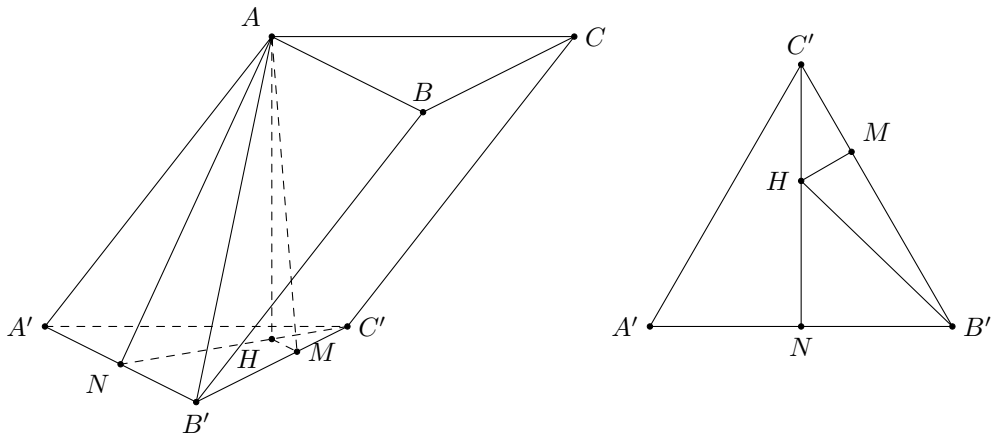
Do tứ giác $ABCD$ không phải là hình vuông nên $x\neq\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy $x=\dfrac{a}{2}$ hay $OB=\dfrac{a}{2}$.
Mà $OI=\dfrac{SA}{a}=\dfrac{a}{2}$. Suy ra $\triangle BIO$ vuông cân tại $O \Rightarrow \widehat{BIO}=45^\circ \Rightarrow \widehat{BID}=90^\circ$.
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là 90°.

Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Cho một hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Biết rằng $AA'=AB'=2a$ và hình chiếu vuông góc của A lên cạnh $B'C'$ là điểm M sao cho $\overrightarrow{MB'}+2\overrightarrow{MC'}=\vec{0}$. Thể tích theo a của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{285}}{12}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{95}}{36}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{95}}{6}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{95}}{12}$.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm $A'B' \Rightarrow AN \perp A'B'$.

Gọi H là chân đường cao hạ từ A xuống mặt phẳng $(A'B'C') \Rightarrow HN \perp A'B'$, $HM \perp B'C'$.

Ta có: $C'M = \dfrac{a}{3} \Rightarrow C'H = \dfrac{C'M}{\cos 30^\circ} = \dfrac{\dfrac{a}{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2a}{3\sqrt{3}}$.

$HN = C'N - C'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} - \dfrac{2a}{3\sqrt{3}} = \dfrac{5a\sqrt{3}}{18}$.

$HB'^2 = HN^2 + NB'^2 = \left(\dfrac{5a\sqrt{3}}{18}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{13a^2}{27} \Rightarrow AH = \sqrt{AB'^2 - HB'^2} = \sqrt{(2a)^2 - \dfrac{13a^2}{27}} = \dfrac{a\sqrt{285}}{9}$.

Suy ra thể tích lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle A'B'C'} \cdot AH = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{285}}{9} = \dfrac{a^3\sqrt{95}}{12}$.

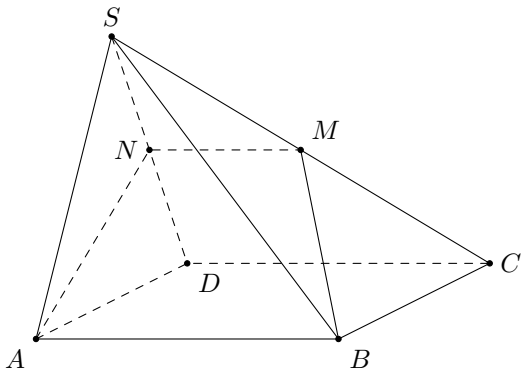
Chọn đáp án (D) □

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Mặt phẳng (α) đi qua A, B và trung điểm M của SC. Mặt phẳng (α) chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1, V_2 với $V_1 < V_2$. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ tương ứng bằng

(A) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{4}$. (B) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{3}{8}$. (C) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{5}{8}$. (D) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{3}{5}$.

Lời giải.

Gọi N là giao điểm của mặt phẳng (ABM) với SD, đặt $V = V_{S.ABCD}$.



Áp dụng công thức tỉ số thể tích cho khối chóp có đáy là hình bình hành: $\dfrac{SA}{SA}+\dfrac{SC}{SM}=\dfrac{SB}{SB}+\dfrac{SD}{SN}\Rightarrow\dfrac{SC}{SM}=\dfrac{SD}{SN}$, mà $\dfrac{SC}{SM}=2\Rightarrow\dfrac{SD}{SN}=2$.

$$\frac{V_{S.ABMN}}{V_{S.ABCD}}=\frac{\dfrac{SA}{SA}+\dfrac{SB}{SB}+\dfrac{SC}{SM}+\dfrac{SD}{SN}}{4\dfrac{SA}{SA}\cdot\dfrac{SB}{SB}\cdot\dfrac{SC}{SM}\cdot\dfrac{SD}{SN}}=\frac{1+1+2+2}{4\cdot1\cdot1\cdot2\cdot2}=\frac{3}{8}.$$

Mặt phẳng $(ABMN)$ chia hình chóp thành hai phần có thể tích theo tỉ lệ 3 và 5.

Suy ra: $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{3}{5}$.

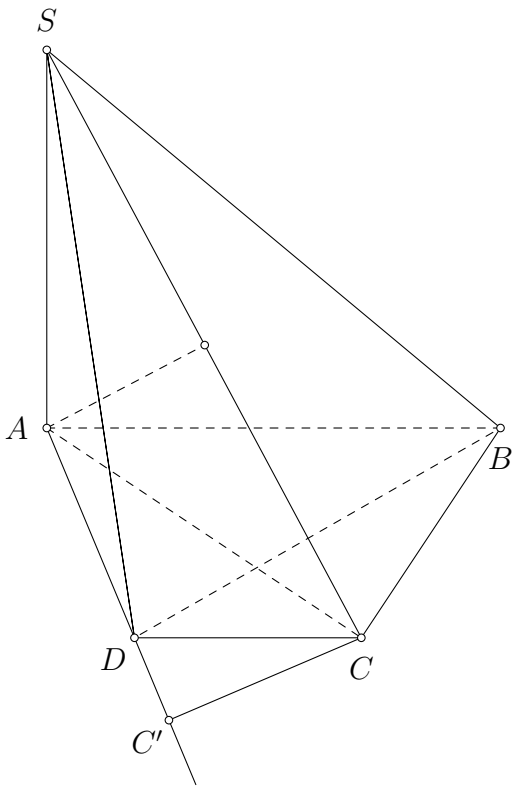
Chọn đáp án (D) □

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB=2a$. Có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $ABCD$ và $SA=a\sqrt{3}$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) tương ứng bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

Lời giải.

Cách 1: Gọi góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) là φ.



Dễ thấy $\begin{cases}BD\perp AD\\BD\perp SA\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAD)\Rightarrow D$ là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (SAD).

Gọi C' là hình chiếu vuông góc của C lên mặt phẳng (SAD).

Suy ra: $AC'=AC\cos\widehat{CAD}=a\sqrt{3}\cdot\cos30^\circ\Rightarrow DC'=\dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow S_{\triangle SDC'}=\dfrac{1}{2}\cdot DC'\cdot SA=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a}{2}\cdot a\sqrt{3}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra $\triangle SDC'$ là hình chiếu vuông góc của $\triangle SBC$ lên mặt phẳng (SAD).

Ta có: $CB\perp AC\Rightarrow CB\perp(SAC)\Rightarrow CB\perp SC$

$\Rightarrow\triangle SBC$ vuông tại C.

Tam giác SBC có $SB=a\sqrt{7};SC=a\sqrt{6};BC=a\Rightarrow S_{\triangle SBC}=\dfrac{1}{2}\cdot SC\cdot CB=\dfrac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

Suy ra $\cos\varphi=\dfrac{S_{\triangle SAC'}}{S_{\triangle SBC}}=\dfrac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{a^2\sqrt{6}}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Cách 2: Ta chứng minh được $BD \perp (SAD)$.

Dựng $SE \perp SC$ tại $E \Rightarrow SE \perp (SBC)$.

Suy ra: $\widehat{((SAD);(SBC))} = \widehat{(AE;BD)}$.

Gọi $O = AC \cap BD$; dựng $OI \perp SC$ tại $I \Rightarrow OI \parallel AE$

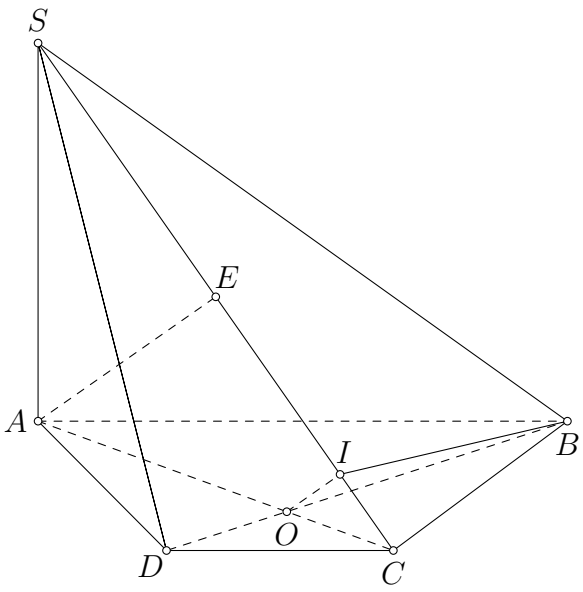
$\Rightarrow \widehat{(AE;BD)} = \widehat{(OI;BD)} = \widehat{IOB}$.

$\cos\widehat{IBO} = \dfrac{OI}{OB}$.

Ta tính được: $OE = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow OI = \dfrac{OE}{3} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$ $BD = a\sqrt{3} \Rightarrow BO = \dfrac{2}{3}BD = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra: $\cos\widehat{IOB} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

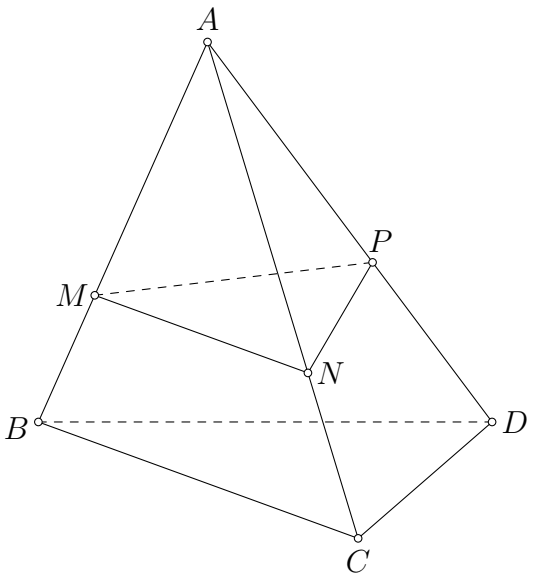


Chọn đáp án (C) □

Câu 52. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = \dfrac{9}{2}$ và $AD = \dfrac{2}{3}$. Gọi M là một điểm nằm trên cạnh AB sao cho $MA = 2MB$. Một mặt phẳng thay đổi (α) đi qua M cắt các cạnh AC và AD lần lượt tại N và P sao cho luôn thoả mãn $\dfrac{V_{AMNP}}{V_{ABCD}} = \dfrac{NC}{AN}$. Giá trị nhỏ nhất của $AN + AP$ tương ứng bằng

(A) 3. (B) $\dfrac{64}{15}$. (C) $\dfrac{15}{4}$. (D) $\dfrac{263}{120}$.

Lời giải.



Đặt $\begin{cases} AN = x \\ AP = y \end{cases}$ với $0 < x < \dfrac{9}{2}, 0 < y < \dfrac{2}{3}$ suy ra $NC = \dfrac{9}{2} - x$.

$\dfrac{V_{AMNP}}{V_{ABCD}} = \dfrac{NC}{AN} \Leftrightarrow \dfrac{AM}{AB} \cdot \dfrac{AN}{AC} \cdot \dfrac{AP}{AD} = \dfrac{NC}{AN}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{x}{\frac{9}{2}} \cdot \dfrac{y}{\frac{2}{3}} = \dfrac{\frac{9}{2} - x}{x}$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{9}{2} \cdot \dfrac{\frac{9}{2} - x}{x^2} \Leftrightarrow y = \dfrac{81 - 18x}{4x^2}$.

Suy ra $AN + AP = x + y = x + \dfrac{81 - 18x}{4x^2}$.

Đặt $f(x) = x + \dfrac{81 - 18x}{4x^2}$ với $0 < x < \dfrac{9}{2}$.

$f'(x) = 1 + \dfrac{9x^2 - 81x}{2x^4} = \dfrac{2x^4 + 9x^2 - 81x}{2x^4}$ có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	0		3		$\dfrac{9}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{15}{4}$	$\nearrow$	$\dfrac{9}{2}$

Từ bảng biến thiên ta thấy $AN + AP$ nhỏ nhất bằng $\dfrac{15}{4}$ khi $x = 3$.

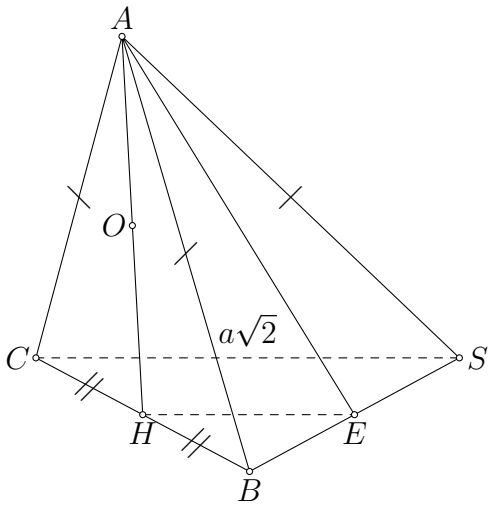
Chọn đáp án (C) □

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SC = a\sqrt{2}$, tam giác SAB đều cạnh a và tam giác SAC vuông tại A. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

(A) $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. (B) $\dfrac{\pi a^3}{6}$. (C) $4\pi a^3$. (D) $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $AC = \sqrt{SC^2 - SA^2} = a$. Gọi H, E lần lượt là trung điểm BC, BS.



$\triangle ABC$ cân tại A, H là trung điểm $BC \Rightarrow AH \perp BC$.

$\begin{cases} (ABC) \perp (SBC) \\ AH \subset (ABC), AH \perp BC (cmt) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp BS$

$\begin{cases} BS \perp AH \\ BS \perp AE \end{cases} \Rightarrow BS \perp HE, HE // CS \Rightarrow BS \perp CS \Rightarrow \triangle BSC$ vuông tại S.

$\Rightarrow AH$ là trục đường tròn ngoại tiếp $\triangle BSC \Rightarrow$ tâm O của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$:

$R = OA = OB = OC$

$$R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4 \cdot S_{\triangle ABC}} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{2AH \cdot BC} = \frac{AB \cdot AC}{2\sqrt{AB^2 - \dfrac{BC^2}{4}}} = a.$$

Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là: $V = \dfrac{4\pi a^3}{3}$

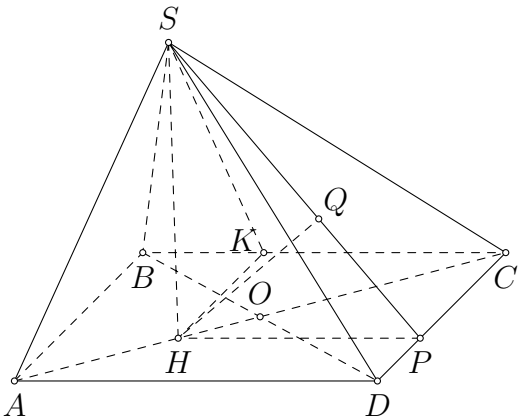
Chọn đáp án (A) □

Câu 54. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 6. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là điểm H nằm trong đoạn AC sao cho $HC = 2HA$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng

(A) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. (B) $3\sqrt{3}$. (C) $4\sqrt{2}$. (D) $5\sqrt{3}$.

Lời giải.

Kẻ $HK \perp BC$ tại K, suy ra $HK = \dfrac{2a}{3}$, $\widehat{SKH} = 60^\circ$ và $\triangle SHK$ vuông tại H.



Suy ra $SH = h = HK \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Kẻ $HP \perp CD$ tại P, hạ $HQ \perp SP$ tại Q. Suy ra $HP = \dfrac{2a}{3}$.

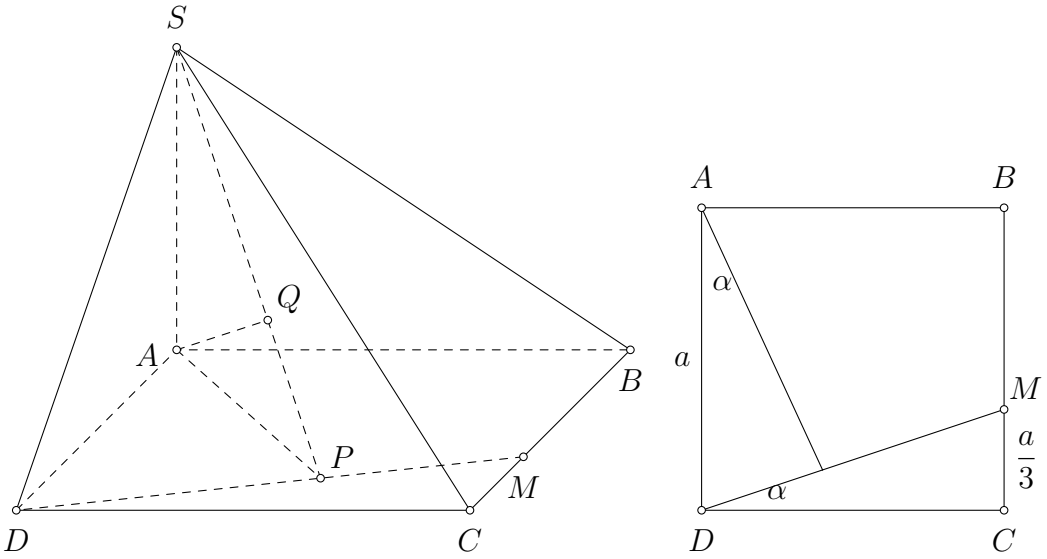
Vậy $\mathrm{d}(A, (SCD)) = \dfrac{3}{2} \cdot \mathrm{d}(H, (SCD)) = \dfrac{3}{2} \cdot HQ = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{SH \cdot HP}{\sqrt{SH^2 + HP^2}} = 3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 55. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc mặt phẳng đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SDM) bằng $\dfrac{a}{2}$, trong đó M là một điểm nằm trên đoạn BC sao cho $BM = 2MC$. Thể tích khối chóp $SABCD$ tính theo a bằng

(A) $\dfrac{a^3}{\sqrt{26}}$. (B) $\dfrac{2a^3}{\sqrt{26}}$. (C) $\dfrac{a^3}{2\sqrt{26}}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{11}}{24}$.

Lời giải.



Đây là dạng bài cơ bản về khoảng cách từ chân đường cao A đến mặt phẳng nghiêng có đỉnh S.

Hạ AP vuông góc với DM tại P, dựng AQ vuông góc với SP tại Q, khi đó khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SDM) chính là AQ.

Ta có $AP = AD\cos\alpha = AD \cdot \dfrac{DC}{DM} = a \cdot \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{10}}{3}} = \dfrac{3a}{\sqrt{10}}$

Có $\mathrm{d}\,(A;(SDM)) = AQ \Rightarrow \dfrac{1}{AQ^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AP^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{\left(\frac{3a}{\sqrt{10}}\right)^2} \Rightarrow SA = \dfrac{3a}{\sqrt{26}}$.

Suy ra thể tích $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \dfrac{3a}{\sqrt{26}} = \dfrac{a^3}{\sqrt{26}}$.

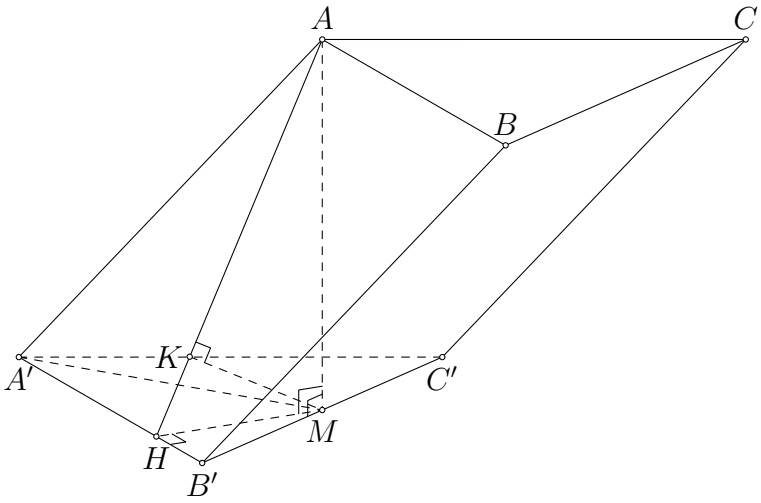
Chọn đáp án (A) □

Câu 56. Cho một hình lăng trụ $ABCA'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A xuống đáy $(A'B'C')$ là trung điểm M của cạnh $B'C'$, biết rằng $AA' = 2a$. Khoảng cách từ C' đến mp (ABA') bằng:

(A) $a\sqrt{\dfrac{39}{55}}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{13}}{6}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{15}}{10}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{39}}{16}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên $A'B'$ và K là hình chiếu vuông góc của điểm M trên AH.



Ta có $MK \perp (ABA')$, suy ra $d(M,(ABA')) = MK$.

Tam giác $AA'M$ vuông tại M có $A'M = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $A'A = 2a$

$\Rightarrow AM = \sqrt{A'A^2 - A'M^2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

Tam giác $HB'M$ vuông tại H, có $B'M = \dfrac{a}{2}$ và $\widehat{HB'M} = 60^0$,

$\Rightarrow \sin\widehat{HB'M} = \dfrac{HM}{B'M} \Rightarrow HM = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác HAM vuông tại M

Suy ra $KM = \sqrt{\dfrac{HM^2 \cdot AM^2}{HM^2 + AM^2}} = \dfrac{a\sqrt{39}}{2\sqrt{55}}$.

Suy ra $\mathrm{d}(C',(ABA')) = 2\mathrm{d}(M,(ABA')) = a\sqrt{\dfrac{39}{55}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 57. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 2AD = 2a$ và $SA = SB = 2a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\dfrac{a^3}{2}$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCD$.

(A) $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. (B) $\dfrac{2a}{3}$. (C) $a\dfrac{\sqrt{16-2\sqrt{3}}}{3}$. (D) $a\dfrac{\sqrt{8-\sqrt{5}}}{3}$.

Lời giải.

Gọi M, N là trung điểm của AB và CD thì ta có $SM \perp AB, MN \perp AB \Rightarrow AB \perp (SMN)$.

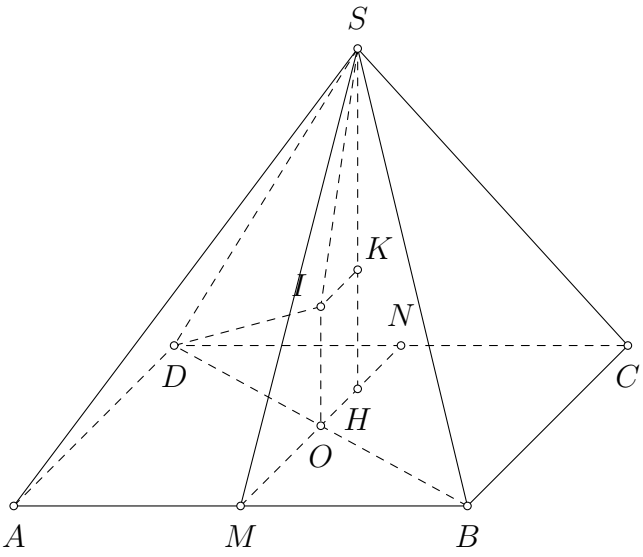
Kẻ $SH \perp MN, H \in MN$, khi đó $SH \perp AB$ $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC} \cdot SH = \dfrac{1}{3}a^2 \cdot SH = \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow SH = \dfrac{3a}{2}$.

Có $SM = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow MH = \sqrt{SM^2 - SH^2} = \sqrt{3a^2 - \dfrac{9a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ $OH = MH - MO = \dfrac{a\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$.

Gọi $O = AC \cap BD$,I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ suy ra $IO \perp (ABCD)$ $\Rightarrow IO \parallel SH$. Kẻ $IK \perp SH, K \in SH \Rightarrow IOHK$ là hình chữ nhật.



Bán kính mặt cầu ngoại tiếp $S.ABCD$ là:

$R = IS = \sqrt{IK^2 + KS^2} = \sqrt{OH^2 + (SH - IO)^2}$

$R = \sqrt{\dfrac{a^2\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{4} + \left(\dfrac{3a}{2} - IO\right)^2}$

$R = ID = \sqrt{IO^2 + OD^2} = \sqrt{OH^2 + (SH - IO)^2} = \sqrt{IO^2 + \dfrac{5a^2}{4}}$

$\Rightarrow \dfrac{a^2\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{4} + \left(\dfrac{3a}{2} - IO\right)^2 = IO^2 + \dfrac{5a^2}{4}$

$\Rightarrow IO = \dfrac{4-\sqrt{3}}{6}a$.

Suy ra bán kính:

$$R = \sqrt{IO^2 + OD^2} = \sqrt{\left(\frac{4-\sqrt{3}}{6}\right)^2 a^2 + \frac{5a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{16-2\sqrt{3}}}{3}$$

Chọn đáp án (C) □

Dạng 9. Bài toán góc - khoảng cách

Câu 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $3a$. Điểm M thuộc cạnh AD sao cho $A'M = 2a$. Tính khoảng cách giữa AM và BD' theo a

(A) $\dfrac{3\sqrt{14}}{14}a$. (B) $\dfrac{\sqrt{14}}{14}a$. (C) $\dfrac{\sqrt{7}}{7}a$. (D) $\dfrac{3\sqrt{7}}{7}a$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của BB' và $N = AI \cap BA'$ thì N là trọng tâm $\triangle ABB'$.

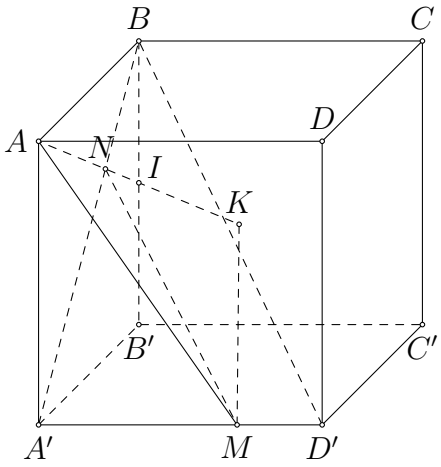
Khi đó $MN \parallel BD' \Rightarrow BD' \parallel (AMK)$ với $K = A'B' \cap AI$ và $A'K = 6a$.

Ta có $\mathrm{d}(AM, BD') = \mathrm{d}(D', (AMK)) = \dfrac{1}{2} \cdot \mathrm{d}(A', (AMK)) = \dfrac{1}{2} \cdot \mathrm{d}$.

Do $A'M, A'A, A'K$ đôi một vuông góc nên ta có

$$\frac{1}{\mathrm{d}^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{A'M^2} + \frac{1}{A'K^2} = \frac{7}{18a^2} \Rightarrow \mathrm{d} = \frac{3\sqrt{14}}{7}a$$

Vậy $\mathrm{d}(AM, BD') = \dfrac{3\sqrt{14}}{14}a$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt đáy là tam giác vuông tại đỉnh A, $AB = AC = a$. Đường thẳng SA vuông góc với mp(ABC), $SA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC

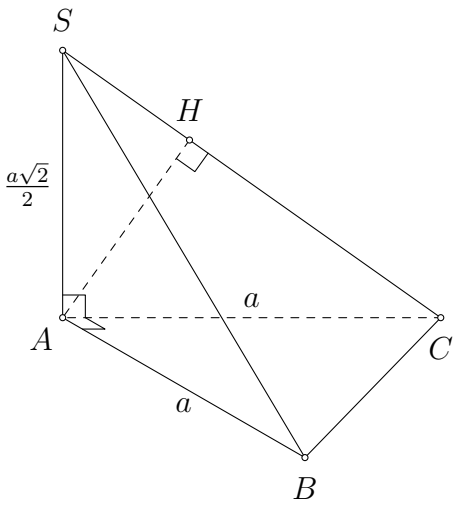
(A) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. (B) $a\sqrt{3}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{a}$. (D) $3\sqrt{3}a$.

Lời giải.

AC là hình chiếu của SC lên mp(ABC), $AB \perp AC \Rightarrow AB \perp SC$.

Trong mặt phẳng (SAC) dựng $AH \perp SC$ thì AH là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB và SC.

$$\mathrm{d}(AB, SC) = AH = \frac{AC \cdot SA}{\sqrt{AC^2 + SA^2}} = \frac{\dfrac{a \cdot a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{a^2 + \dfrac{2a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh $AB = a$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SO \perp (ABCD)$, $SO = \dfrac{3a}{4}$. Gọi M là trung điểm của CD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BD là

(A) $\dfrac{3a}{8}$. (B) $\dfrac{3\sqrt{7}a}{14}$. (C) $\dfrac{8a}{3}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{7}a}{3}$.

Lời giải.

Gọi N là trung điểm của OC. Trong mp(SON), kẻ $OH \perp SN$ $(H \in SN)$. (1)

Do M, N lần lượt là trung điểm của CD và OC nên MN là đường trung bình của ΔOCD.

$\Rightarrow MN \parallel OD$ hay $MN \parallel BD$. Do đó $\mathrm{d}\,(BD, SM) = \mathrm{d}\,(BD, (SMN)) = \mathrm{d}\,(O, (SMN))$.

Ta có $\begin{cases} MN \parallel BD \\ BD \perp AC \end{cases}$ nên $MN \perp AC$ hay $MN \perp ON$.

Lại có $MN \perp SO$ (do $SO \perp (ABCD)$) nên $MN \perp (SON) \Rightarrow MN \perp OH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OH \perp (SMN) \Rightarrow \mathrm{d}\,(BD, SM) = d\,(O, (SMN)) = OH$.

Do $ABCD$ là hình thoi nên $AB = AD = a$.

Lại có $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên ΔABD là tam giác đều cạnh a.

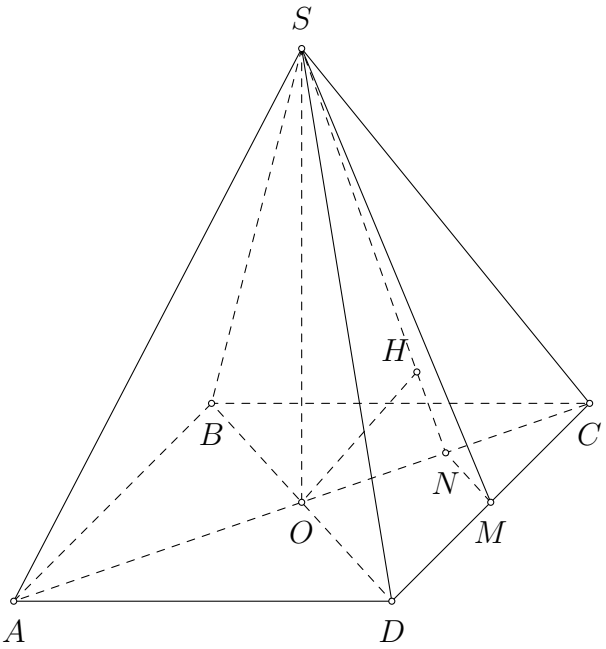
Mà AO là đường cao của ΔABD nên $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow ON = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Xét ΔSON vuông tại O có

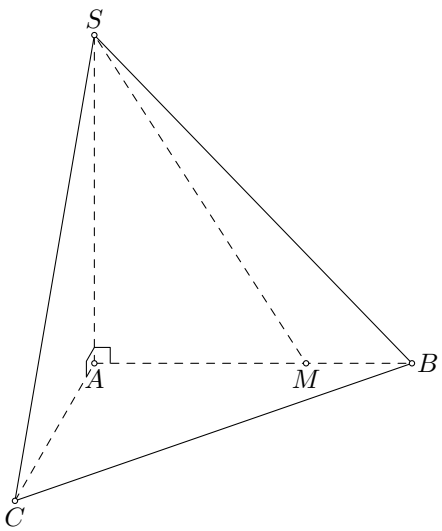
$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{16}{3a^2} + \frac{16}{9a^2} = \frac{64}{9a^2} \Rightarrow OH = \frac{3a}{8}$$

Vậy $\mathrm{d}\,(BD, SM) = \dfrac{3a}{8}$.

Chọn đáp án (A) □

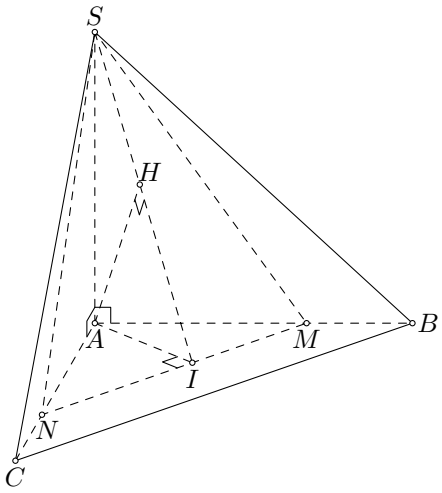


Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$, tam giác ABC có $AB = 6a$ $AC = 3a, \widehat{BAC} = 120^\circ$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$ (Xem hình vẽ). Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC bằng



(A) $\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$. (B) $\dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$. (C) $\dfrac{4a\sqrt{39}}{13}$. (D) $\dfrac{6a\sqrt{39}}{13}$.

Lời giải.



Kẻ $MN \parallel BC$, suy ra $BC \parallel (SMN)$.

Ta có: $\mathrm{d}\,(SM, BC) = \mathrm{d}\,(BC, (SMN)) = d\,(B, (SMN)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\,(A, (SMN))$.

Kẻ $AI \perp MN, AH \perp SI$, suy ra $AH \perp (SMN)$, $d\,(A, (SMN)) = AH$.

Ta có: $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow AN = \dfrac{2}{3}.AC = \dfrac{2}{3}.3a = 2a$.

$MN = \sqrt{(2a)^2 + (4a)^2 - 2.2a.4a.\cos 120^\circ} = 2a\sqrt{7}$.

$$\begin{aligned}
S_{AMN} &= \frac{1}{2}AM.AN.\sin\widehat{BAC} = \frac{1}{2}AI.MN \\
\Rightarrow AI &= \frac{AM.AN.\sin\widehat{BAC}}{MN} \\
&= \frac{4a.2a.\sin 120^\circ}{2a\sqrt{7}} \\
&= \frac{2a\sqrt{21}}{7}\frac{1}{AH^2} \\
&= \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} \\
&= \frac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}\right)^2} \\
&= \frac{13}{12a^2} \\
\Rightarrow AH &= \frac{2a\sqrt{39}}{13}
\end{aligned}$$

Vậy $\mathrm{d}\,(SM, BC) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2a\sqrt{39}}{13} = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Cho $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của AD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BMvà SD bằng

(A) $\dfrac{a}{2}$. (B) a. (C) $\dfrac{a\sqrt{57}}{3}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{57}}{19}$.

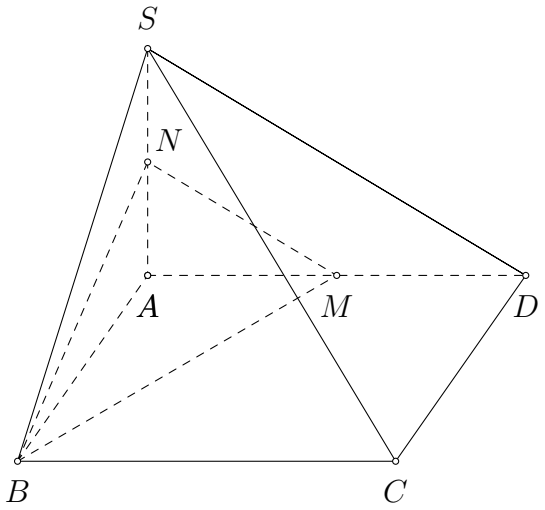
Lời giải.

Gọi N là trung điểm của SA.

Do MN là đường trung bình của tam giác SAD nên $MN \parallel SD$. Vậy $SD \parallel (BMN)$ vì vậy $\mathrm{d}(SD, BM) = d(SD, (BMN)) = \mathrm{d}(D, (BMN)) = \mathrm{d}(A, (BMN)) = h$.

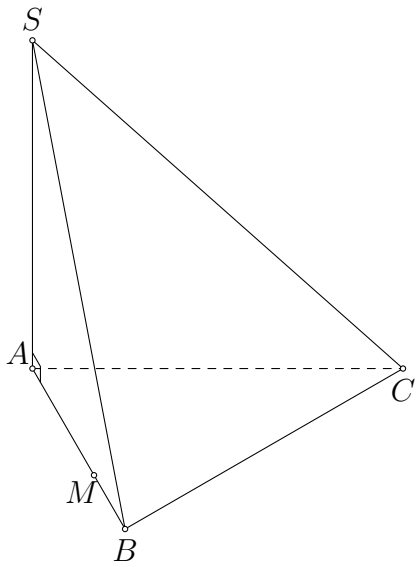
Do $A.BMN$ là một góc tam diện vuông nên

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{19}{3a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{57}}{19}$$



Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC đều cạnh 3a, $SA \perp (ABC)$ và $SA = 2a$ (minh họa như hình vẽ). Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $AM = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC bằng



(A) $\frac{\sqrt{21}a}{7}$. (B) $\sqrt{21}a$. (C) $2\sqrt{21}a$. (D) $\frac{2\sqrt{21}a}{7}$.

Lời giải.

Gọi N là điểm trên cạnh AC sao cho $AN = 2a$, ta có:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN \parallel BC \Rightarrow BC \parallel (SMN)$$

Suy ra $\begin{cases} \mathrm{d}(BC, SM) = \mathrm{d}(BC, (SMN)) = \mathrm{d}(B, (SMN)) \\ \mathrm{d}(B, (SMN)) = \dfrac{BM}{AM} \cdot \mathrm{d}(A, (SMN)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(A, (SMN)) \end{cases}$

Gọi E là trung điểm của MN, kẻ $AH \perp SE, (H \in SE)$ vì tam giác AMN đều cạnh $2a$ nên $AE = a\sqrt{3}$.

Do $\begin{cases} AE \perp MN \\ SA \perp MN \end{cases} \Rightarrow MN \perp AH.$

Mặt khác $AH \perp SE \Rightarrow AH \perp (SMN) \Rightarrow d(A, (SMN)) = AH$.

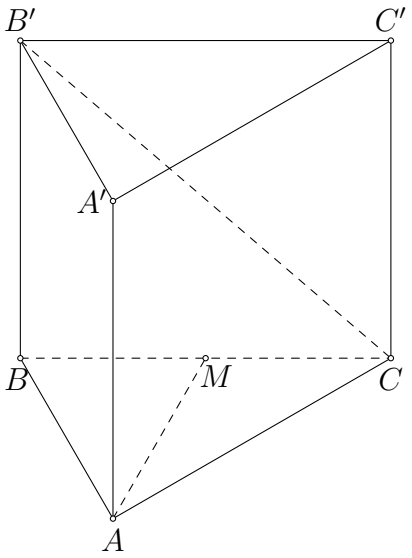
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAE, ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{7}{12a^2} \Rightarrow AH = \frac{2\sqrt{21}a}{7}$$

Vậy $\mathrm{d}(BC, SM) = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông, $BA = BC = 2a$, cạnh bên $AA' = 4a, M$ là trung điểm của BC (minh họa như hình bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'C$ và AM bằng



(A) $\dfrac{2a\sqrt{7}}{7}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. (C) a. (D) $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

Gọi N là trung điểm của BB', khi đó MN là đường trung bình của $\triangle BCB'$

$\Rightarrow MN \parallel B'C \Rightarrow B'C \parallel (AMN)$

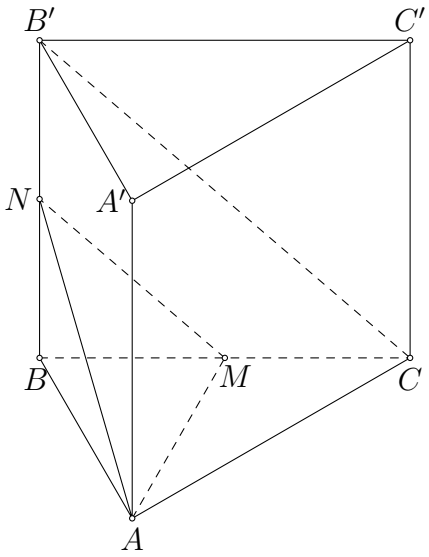
$\Rightarrow \mathrm{d}(AM, B'C) = \mathrm{d}(B'C, (AMN)) = \mathrm{d}(C, (AMN)) = \mathrm{d}(B, (AMN)) = h$

Ta có $BN = \dfrac{1}{2}BB' = 2a; BM = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2} \cdot 2a = a$

Áp dụng công thức tính đường cao của tứ diện vuông ta có:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{6}{4a^2} \Rightarrow h = \frac{2a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Vậy $\mathrm{d}(AM, B'C) = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$



Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $AM, B'C$ biết $AA' = a\sqrt{2}$.

(A) $\dfrac{a\sqrt{10}}{10}$. (B) $a\sqrt{2}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{30}}{10}$. (D) $2a$.

Lời giải.

Gọi N là trung điểm của BB' suy ra $MN \parallel B'C$.

Do đó $\mathrm{d}(AM, B'C) = \mathrm{d}(B'C, (AMN)) = \mathrm{d}(C, (AMN))$.

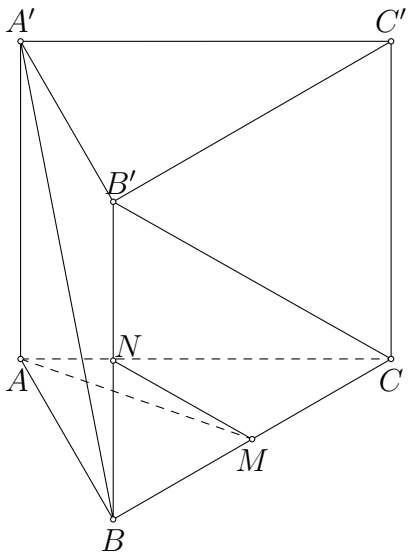
Mà M là trung điểm của BC nên $\mathrm{d}(B, (AMN)) = \mathrm{d}(C, (AMN))$.

Ta có BA, BM, BN đôi một vuông góc với nhau nên $\dfrac{1}{d^2(B, (AMN))} = \dfrac{1}{BA^2} + \dfrac{1}{BM^2} + \dfrac{1}{BN^2}$.

Mặt khác $BM = \dfrac{BC}{2} = a, AB = a\sqrt{3}, BN = \dfrac{1}{2}BB' = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $\dfrac{1}{d^2(B, (AMN))} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \dfrac{10}{3a^2}$.

$\Rightarrow \mathrm{d}(B, (AMN)) = \dfrac{a\sqrt{30}}{10} \Rightarrow \mathrm{d}(AM, B'C) = \dfrac{a\sqrt{30}}{10}$

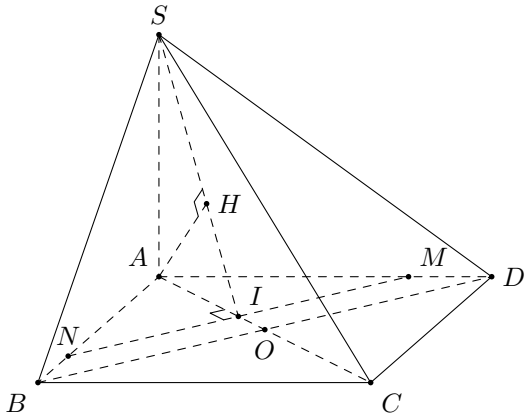


Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là điểm thuộc AD sao cho $AM = 3MD$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BD bằng

(A) $\dfrac{a\sqrt{35}}{35}$. (B) $\dfrac{3a\sqrt{35}}{35}$. (C) $\dfrac{2a\sqrt{35}}{35}$. (D) $\dfrac{9a\sqrt{35}}{35}$.

Lời giải.



Gọi N là điểm thuộc AB sao cho $AN = 3NB \Rightarrow MN \parallel BD \Rightarrow BD \parallel (SMN)$.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

Ta có $\mathrm{d}(BD, SM) = \mathrm{d}(BD, (SMN)) = \mathrm{d}(O, (SMN))$.

Gọi $I = AO \cap MN$. Vì $AO \cap (SMN) = I$ nên

$$\frac{\mathrm{d}(O, (SMN))}{\mathrm{d}(A, (SMN))} = \frac{IO}{IA} = \frac{1}{3} \Rightarrow \mathrm{d}(O, (SMN)) = \frac{1}{3}\mathrm{d}(A, (SMN)).$$

Trong (SAI), kẻ $AH \perp SI$.

Ta có $\begin{cases} MN \perp AI \\ MN \perp SA \end{cases} \Rightarrow MN \perp (SAI) \Rightarrow MN \perp AH$.

Mà $SI \perp AI$ nên $AH \perp (SMN)$. Do đó $\mathrm{d}(A, (SMN)) = AH$.

Ta có $AI = \dfrac{3}{4}AO = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{8}$.

Tam giác SAI vuông tại A, có đường cao AH nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{64}{18a^2} = \frac{35}{9a^2} \Rightarrow AH = \frac{3a\sqrt{35}}{35}.$$

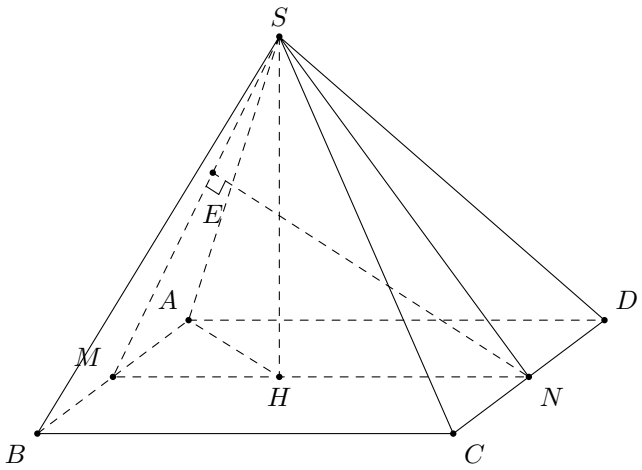
Vậy $\mathrm{d}(O, (SMN)) = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}(A, (SMN)) = \dfrac{1}{3}AH = \dfrac{a\sqrt{35}}{35}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, tam giác SAB cân tại S. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng đáy nằm trên miền trong của hình vuông $ABCD$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt đáy bằng $30°$, góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng đáy bằng $45°$. Thể tích hình chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{a^3}{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SA.

(A) $2a$. (B) a. (C) $\dfrac{a}{3}$. (D) $a\sqrt{2}$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Ta có $AB \perp (SMN)$.

Kẻ $SH \perp MN$, suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Khi đó $(\widehat{SA,(ABCD)}) = \widehat{SAH} = 30^\circ$ và $(\widehat{(SAB),(ABCD)}) = \widehat{SMH} = 45^\circ$.

Kẻ $NE \perp SM$, suy ra $NE \perp (SAB)$.

Ta có $\mathrm{d}(CD, SA) = \mathrm{d}(\mathrm{CD}, (\mathrm{SAB})) = \mathrm{d}(N, (SAB)) = NE$.

$SA = \dfrac{SH}{\sin 30^\circ} = 2SH$; $SM = \dfrac{SH}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}SH$.

Lại có

$$SA^2 = SM^2 + AM^2 \Leftrightarrow 4SH^2 = 2SH^2 + \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow 8SH^2 - AB^2 = 0. \quad (1)$$

và

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH \cdot AB^2 = \frac{a^3}{3} \Rightarrow SH \cdot AB^2 = a^3. \qquad (2)$$

Giải (1) và (2), ta được $SH = \dfrac{a}{2}$, $AB = a\sqrt{2}$.

Xét $\triangle SMN$ có $SH \cdot MN = NE \cdot SM$ nên $NE = \dfrac{\dfrac{a}{2} \cdot a\sqrt{2}}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = a$.

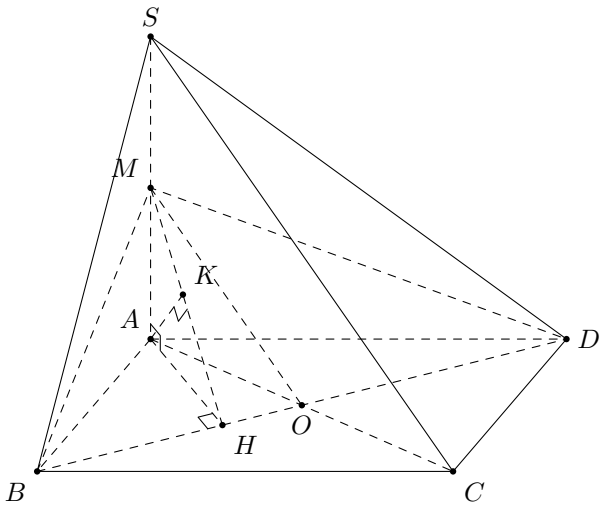
Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SA bằng a.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC.

(A) $\dfrac{2a}{3}$. (B) $\dfrac{a}{3}$. (C) $\dfrac{a}{2}$. (D) $\dfrac{3a}{4}$.

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của AC và BD; M là trung điểm của SA.

Ta có OM là đường trung bình của $\triangle SAC$ nên $OM \parallel SC$. Suy ra $SC \parallel (MBD)$.

Khi đó $\mathrm{d}(SC, BD) = \mathrm{d}(SC, (MBD)) = \mathrm{d}(C, (MBD))$.

Trong $(ABCD)$, kẻ $AH \perp BD$; trong (MBD), kẻ $AK \perp MH$.

Khi đó K là hình chiếu của A lên (MBD).

Ta có $AC \cap (MBD) = O$ và $OA = OC$ nên

$$\frac{\mathrm{d}(C, (MBD))}{\mathrm{d}(A, (MBD))} = \frac{OC}{OA} = 1 \Rightarrow \mathrm{d}(C, (MBD)) = \mathrm{d}(A, (MBD)) = AK.$$

Xét tứ diện $A.MBD$ có AB, AD, AM đôi một vuông góc nhau nên

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow AK = \frac{2a}{3}.$$

Vậy khoảng cách giữa SC và BD là $\dfrac{2a}{3}$.

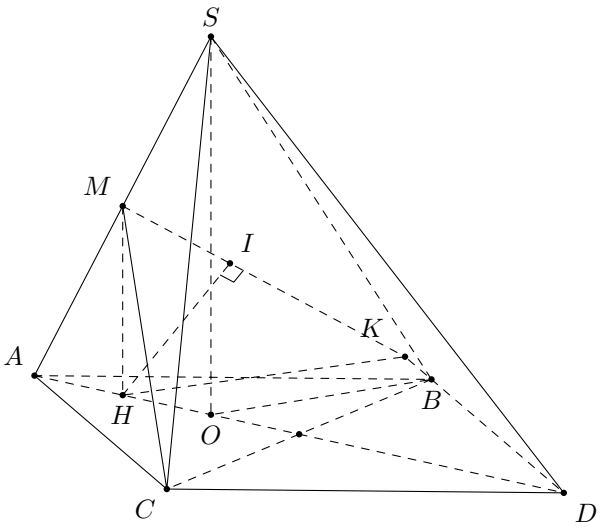
Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên bằng $\dfrac{a\sqrt{37}}{3}$. Gọi M là trung điểm của cạnh SA. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BM.

(A) $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. (B) $\dfrac{5a\sqrt{3}}{6}$. (C) $\dfrac{5a\sqrt{3}}{12}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Cách 1:



Gọi D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABDC$.

Khi đó $AC \parallel BD$ nên $AC \parallel (MBD)$.

Ta có $\mathrm{d}(AC, BM) = \mathrm{d}(AC, (MBD)) = \mathrm{d}(A, (MBD))$.

Gọi O là trọng tâm của $\triangle ABC$. Suy ra $SO \perp (ABC)$.

Gọi H là trung điểm AO. Suy ra $MH \parallel SO \Rightarrow MH \perp (ABC)$.

Vẽ $HK \perp BD$ tại K, vẽ $HI \perp MK$ tại I. Suy ra $\mathrm{d}(H, (MBD)) = HI$.

Ta có $HK \parallel BO$. Suy ra $\dfrac{BO}{HK} = \dfrac{OD}{HD} = \dfrac{4}{5}$.

Khi đó $HK = \dfrac{5}{4}BO = \dfrac{5}{4} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot 2a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{5a\sqrt{3}}{6}$.

Ta có

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{37}}{3}\right)^2 - \left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{25a}{9} \Rightarrow SO = \frac{5a}{3} \Rightarrow MH = \frac{5a}{6}.$$

Lại có

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{MH^2} + \frac{1}{MK^2} = \frac{36}{25a^2} + \frac{36}{75a^2} = \frac{48}{25a^2} \Rightarrow HI = \frac{5a\sqrt{3}}{12}.$$

Suy ra $\mathrm{d}(H, (MBD)) = HI = \dfrac{5a\sqrt{3}}{12}$.

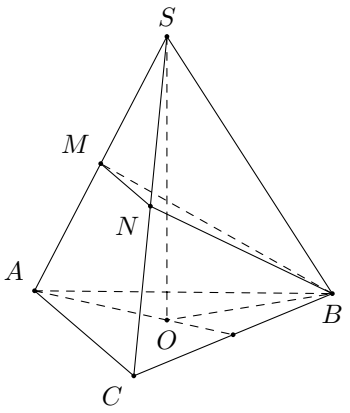
Mặt khác

$$\frac{\mathrm{d}(H, (MBD))}{\mathrm{d}(A, (MBD))} = \frac{DH}{DA} = \frac{5}{6} \Rightarrow \mathrm{d}(A, (MBD)) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{12} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $\mathrm{d}(AC, BM) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Cách 2:

Gọi O là trọng tâm $\triangle ABC$, N là trung điểm SC.



Ta có $MN \parallel AC \Rightarrow AC \parallel (BMN)$.

Khi đó $\mathrm{d}(AC, BM) = \mathrm{d}(AC, (BMN)) = \mathrm{d}(A, (BMN)) = \mathrm{d}(S, (BMN))$.

Tam giác $\triangle SAO$ vuông tại O nên

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{37}}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{5a}{3}.$$

Ta có $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} SO \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{5a}{3} \cdot a^2\sqrt{3} = \dfrac{5a^2\sqrt{3}}{9}$.

Ta có $BM = BN = \sqrt{\dfrac{BS^2 + BC^2}{2} - \dfrac{SC^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{109}}{6}$ và $MN = a$.

Khi đó, $\triangle BMN$ cân tại B và do đó tính được $S_{BMN} = \dfrac{5a^2}{6}$.

Ta có

$$\mathrm{d}\left(S, (BMN)\right) = \frac{3V_{S.BMN}}{S_{BMN}} = \frac{3V_{S.ABC}}{4 \cdot S_{BMN}} = \frac{3 \cdot \dfrac{5a^3\sqrt{3}}{9}}{4 \cdot \dfrac{5a^2}{6}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

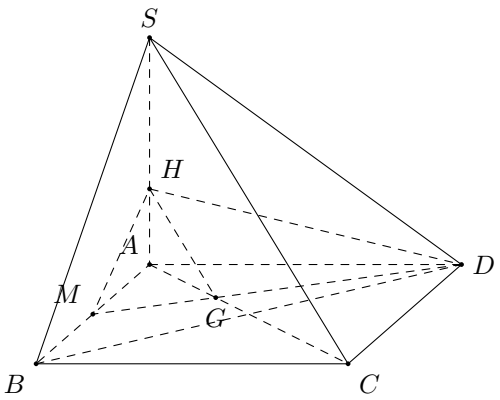
Vậy $\mathrm{d}(AC, BM) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 3a$. Gọi M là trung điểm AB. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và DM.

(A) $\dfrac{4a\sqrt{21}}{21}$. (B) $\dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{21}}{21}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.



Gọi G là giao điểm của AC và DM thì G là trọng tâm $\triangle ABD$ nên $\dfrac{AG}{AC} = \dfrac{1}{3}$.

Vẽ $GH \parallel SC$ thì $\dfrac{AH}{AS} = \dfrac{AG}{AC} = \dfrac{1}{3}$ và $SC \parallel (HDM)$.

Do đó $\mathrm{d}(SC, DM) = \mathrm{d}(SC, (HDM)) = \mathrm{d}(C, (HDM))$.

Gọi $h = \mathrm{d}(A,(HDM))$ Xét tứ diện $H.ADM$ có AH, AM, AD đôi một vuông góc nên ta có

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{\left(\frac{3a}{3}\right)^2} + \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{21}{4a^2} \Rightarrow h = \frac{2a\sqrt{21}}{21}.$$

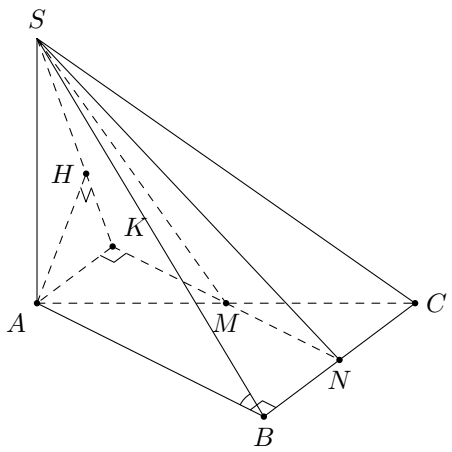
Vậy $\mathrm{d}(SC,DM) = \mathrm{d}(C,(HDM)) = \dfrac{GC}{GA}\mathrm{d}(A,(HDM)) = 2 \cdot \dfrac{2a\sqrt{21}}{21} = \dfrac{4a\sqrt{21}}{21}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B có $AB = BC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60°. Gọi M là trung điểm của AC, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SM theo a.

(A) $\dfrac{2a\sqrt{39}}{\sqrt{13}}$. (B) $\dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$. (C) $\dfrac{2a\sqrt{11}}{13}$. (D) $\dfrac{2a\sqrt{11}}{\sqrt{13}}$.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm BC. Ta có $AB \parallel MN \Rightarrow AB \parallel (SMN)$.

Khi đó $\mathrm{d}(AB,SM) = \mathrm{d}(AB,(SMN)) = \mathrm{d}(A,(SMN))$.

Dựng $AK \perp MN$, dựng $AH \perp SK$. Khi đó $\mathrm{d}(A,(SMN)) = AH$.

Góc giữa (SBC) và (ABC) bằng góc $\widehat{SBA}$, suy ra $\widehat{SBA} = 60^\circ$.

Ta có $SA = AB \cdot \tan\widehat{SBA} = 2a\sqrt{3}$; $AK = BN = a$ nên $AH = \dfrac{AK \cdot AS}{\sqrt{AK^2 + AS^2}} = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$.

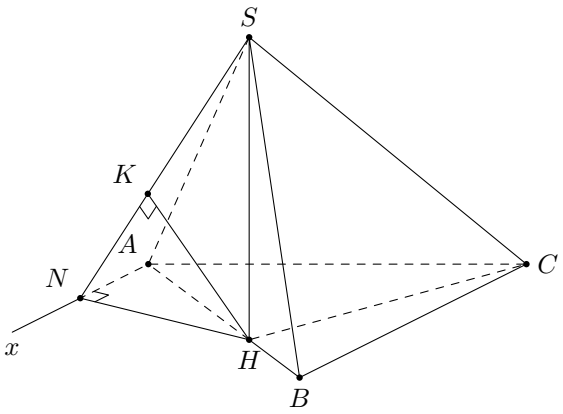
Vậy $\mathrm{d}(AB,SM) = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

(A) $\dfrac{a\sqrt{42}}{8}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{42}}{4}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{42}}{12}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{42}}{10}$.

Lời giải.



Áp dụng định lý Cosin trong $\triangle HBC$, ta có

$$HC^2 = HB^2 + BC^2 - 2HB \cdot BC \cdot \cos\widehat{HBC} = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + a^2 - 2a \cdot \frac{a}{3} \cdot \cos 60^\circ = \frac{7a^2}{9} \Rightarrow HC = \frac{a\sqrt{7}}{3}.$$

Vì góc giữa SC và (ABC) bằng 60° nên $\widehat{SCH} = \widehat{(SC, (ABC))} = 60^\circ$.

Tam giác SHC vuông tại H nên $SH = HC \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{21}}{3}$.

Kẻ $Ax \parallel BC$. Gọi N, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên Ax và SN.

Ta có $BC \parallel (SAN)$ và $BA = \dfrac{3}{2}AH$ nên $\mathrm{d}(SA, BC) = \mathrm{d}(B, (SAN)) = \dfrac{3}{2}\mathrm{d}(H, (SAN))$.

Vì $Ax \perp (SHN)$ nên $Ax \perp HK$. Do đó $HK \perp (SAN)$, suy ra $\mathrm{d}(H, (SAN)) = HK$.

Ta có $AH = \dfrac{2a}{3}$, $HN = AH \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow HK = \dfrac{SH \cdot HN}{\sqrt{SH^2 + HN^2}} = \dfrac{a\sqrt{42}}{12}$.

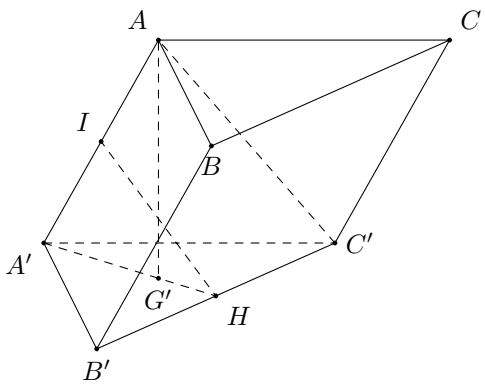
Vậy $\mathrm{d}(SA, BC) = \dfrac{2}{3} \cdot \mathrm{d}(H, (SAN)) = \dfrac{a\sqrt{42}}{8}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Biết hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trọng tâm G' của tam giác $A'B'C'$ và $AA' = a$. Ta có khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ là

(A) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Do hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trọng tâm G' của $\triangle A'B'C'$ đều cạnh a và cạnh $AA'=a$ nên tứ diện $AA'B'C'$ là tứ diện đều.

Gọi H, I lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và AA'.

Ta có $\triangle IB'C'$, $\triangle HAA'$ là các tam giác cân nên $IH\perp AA'$; $IH\perp B'C'$.

Khi đó $\mathrm{d}(AA',B'C')=IH$.

Ta có $A'H=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $A'G'=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AG'=\sqrt{AA'^2-A'G'^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{3}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Xét diện tích $\triangle AA'H$, ta có

$$\frac{1}{2}AG'\cdot A'H=\frac{1}{2}AA'\cdot HI\Leftrightarrow HI=\frac{AG'\cdot A'H}{AA'}=\frac{\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{a}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

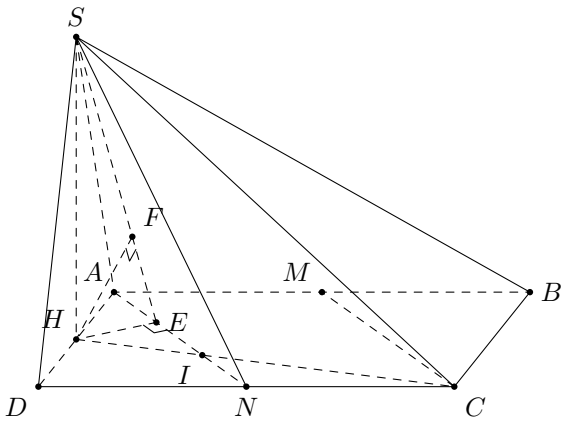
Vậy khoảng cách giữa AA' và $B'C'$ là $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAD) là tam giác đều và $(SAD)\perp(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của cạnh đáy AB. Ta có khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CM là

(A) $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{5}}{4}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Gọi N, H lần lượt là trung điểm của AD và CD.

Ta có $\triangle SAD$ đều cạnh a nên $SH\perp AD$, $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vì M, N là trung điểm của AB, CD và $ABCD$ là hình vuông nên $AN\parallel CM$. Suy ra $CM\parallel(SAN)$.

Khi đó $\mathrm{d}(SA,CM)=\mathrm{d}(CM,(SAN))=\mathrm{d}(C,(SAN))$.

Gọi $I=AN\cap CH$. Suy ra I là trọng tâm $\triangle ADC$. Do đó $IC=2HI$.

Vì $HC\cap(SAN)=I$ nên $\dfrac{\mathrm{d}(C,(SAN))}{\mathrm{d}(H,(SAN))}=\dfrac{IC}{IH}=2\Rightarrow\mathrm{d}(C,(SAN))=2\mathrm{d}(H,(SAN))$.

Ta có $\begin{cases}(SAD)\perp(ABCD)\\(SAD)\cap(ABCD)=AD\Rightarrow SH\perp(ABCD).\\SH\perp AD\end{cases}$

Trong $(ABCD)$, kẻ $HE \perp AN$; trong (SHE), kẻ $HF \perp SE$.

Ta suy ra được $h = \mathrm{d}(H,(SAN)) = HF$.

Vì $\triangle AEH \backsim \triangle ADN$ nên $\dfrac{HE}{DN} = \dfrac{HA}{NA} \Rightarrow HE = \dfrac{HA \cdot HN}{NA} = \dfrac{a\sqrt{5}}{10}$.

Xét $\triangle SHE$ vuông tại H có HF là đường cao có

$$\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HE^2} = \frac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{5}}{10}\right)^2} = \frac{64}{3a^2} \Rightarrow HF = \frac{a\sqrt{3}}{8}.$$

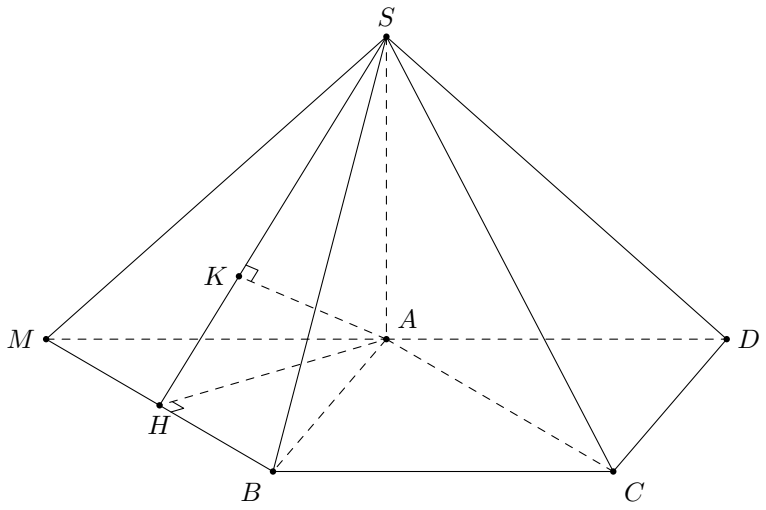
Vậy $\mathrm{d}(SA,CM) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách giữa AC và SB, biết góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30°.

(A) $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. (B) $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{37}a}{185}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{185}a}{37}$.

Lời giải.



Dựng $BM \parallel AC$, khi đó $\mathrm{d}(AC,SB) = \mathrm{d}(AC,(SBM)) = \mathrm{d}(A,(SBM))$.

Dựng $AH \perp MB$, $AK \perp SH$. Khi đó $AK \perp (SBM) \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SBM)) = AK$.

Ta có góc giữa SC và $(ABCD)$ là 30° nên $\widehat{SCA} = 30^\circ$.

Xét $\triangle SAC$ vuông tại A, ta có $SA = \dfrac{AC}{\tan 30^\circ} = \dfrac{a\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

Tam giác $\triangle ABM$ vuông tại A, $AH \perp BM$ nên $AH = \dfrac{AM \cdot AB}{MB} = \dfrac{2a \cdot a}{a\sqrt{5}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Xét $\triangle SAH$ vuông tại A, $AK \perp SH$, ta có $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AH^2} \Rightarrow AK = \dfrac{2a\sqrt{185}}{37}$.

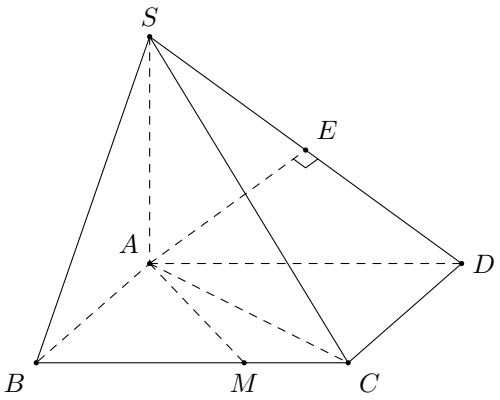
Vậy $\mathrm{d}(AC,SB) = \dfrac{2a\sqrt{185}}{37}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABC là hình bình hành thỏa mãn $AB = a\sqrt{6}$, $BC = 3a$, $AC = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 3a$. Gọi M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $BM = 2MC$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và SD là

(A) $\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. (D) $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Vì $AB^2 + AC^2 = BC^2$ nên $\triangle ABC$ vuông tại A.

Do $BM = 2MC$ nên $MC = \dfrac{1}{3}BC = a$.

Ta có $BC \cdot MC = 3a \cdot a = 3a^2 = AC^2$ và $\triangle ABC$ vuông tại A nên $AM \perp BC$ hay $AM \perp AD$.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $AM \perp SA$. Mà $AM \perp AD$ nên $AM \perp (SAD)$.

Trên mặt phẳng (SAD), kẻ $AE \perp SD$. Khi đó $AM \perp AE$.

Suy ra AE là đoạn vuông góc chung của AM và SD. Do đó $\mathrm{d}(AM, SD) = AE$.

Ta có $SA = AD = 3a$, $SA \perp AD$ nên $AE = \dfrac{1}{2}SD = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

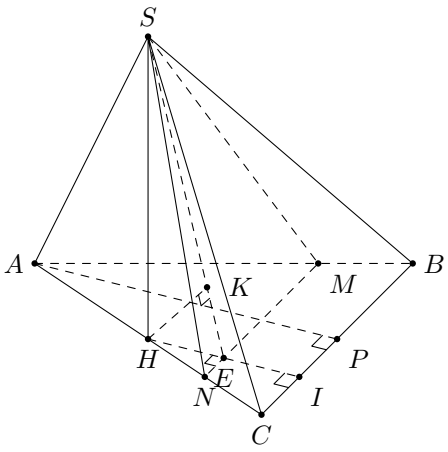
Vậy $\mathrm{d}(AM, SD) = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng đáy là trung điểm H của AC và $SH = 2a$. Gọi M là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AM = 3MB$. Khoảng cách giữa SM và BC bằng.

(A) $a\sqrt{\dfrac{12}{259}}$. (B) $a\sqrt{\dfrac{259}{12}}$. (C) $a\sqrt{\dfrac{67}{12}}$. (D) $a\sqrt{\dfrac{12}{67}}$.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm HC. Ta có $MN \parallel BC$, suy ra $BC \parallel (SMN)$.

Khi đó $\mathrm{d}(SM, BC) = \mathrm{d}(BC, (SMN)) = \mathrm{d}(C, (SMN)) = \mathrm{d}(H, (SMN))$.

Trong (ABC), kẻ $HE \perp MN$. Suy ra $MN \perp (SHE)$.

Khi đó $(SHE) \perp (SMN)$ và cắt nhau theo giao tuyến SE.

Trong (SHE), kẻ $HK \perp SE$. Ta có $\mathrm{d}(H, (SMN)) = HK$.

Gọi P là trung điểm BC, suy ra $AP \perp BC$ và $AP = a\sqrt{3}$.

Nhận xét rằng HE cắt BC tại trung điểm I của CG. Suy ra $DE = \dfrac{1}{2}HI = \dfrac{1}{4}AG = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Xét $\triangle SHE$ vuông tại H có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HS^2} + \dfrac{1}{HE^2} \Rightarrow HK = a\sqrt{\dfrac{12}{67}}$.

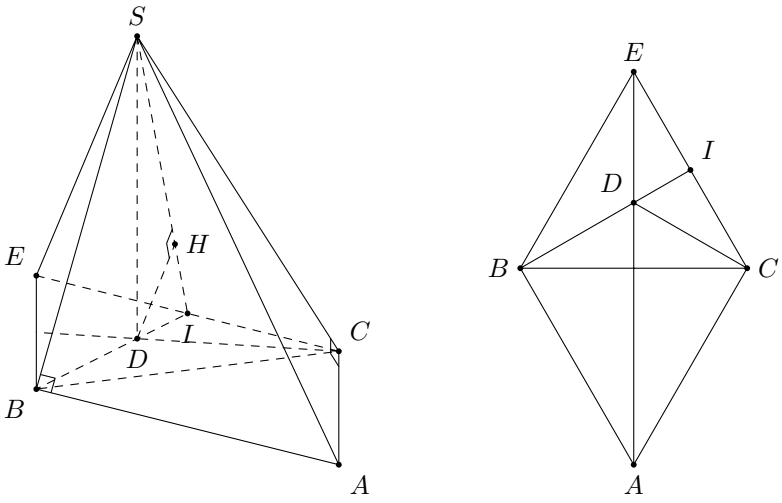
Vậy $\mathrm{d}(SM, BC) = a\sqrt{\dfrac{12}{67}}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a, tam giác SAB vuông tại B, tam giác SAC vuông tại C. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa SC và AB theo a.

(A) $\dfrac{\sqrt{3}a}{8}$. (B) $\dfrac{3a}{\sqrt{13}}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}a}{6}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}a}{4}$.

Lời giải.



Gọi D là hình chiếu của S lên (ABC), suy ra $SD \perp (ABC)$.

Ta có $\begin{cases} SD \perp AB \\ SB \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SBD) \Rightarrow BA \perp BD$.

Tương tự, có $AC \perp DC$ hay $\triangle ACD$ vuông tại C.

Dễ thấy $\triangle SBA = \triangle SCA$ (c.huyền-cgv), suy ra $SB = SC$.

Từ đó chứng minh được $\triangle SBD = \triangle SCD$ nên $DB = DC$.

Suy ra DA là đường trung trực của BC, nên cũng là đường phân giác của $\widehat{BAC}$.

Ta có $\widehat{DAC} = 30^\circ$, suy ra $DC = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Lại có góc giữa (SAB) và (ABC) là $\widehat{SBD} = 60^\circ$ nên $SD = BD \cdot \tan \widehat{SBD} = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = a$.

Dựng hình bình hành $ABEC$. Vì $\triangle ABC$ đều nên $\triangle BEC$ đều.

Ta có $\widehat{CBD} = \widehat{ABD} - \widehat{ABC} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Suy ra BD là phân giác của $\widehat{CBE}$.

Gọi I là trung điểm của EC thì $BI \perp EC$.

Dựng $DH \perp SI$ tại I, ta có

$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{DI^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{13}{a^2} \Rightarrow DH = \frac{a}{\sqrt{13}}.$$

Suy ra $\mathrm{d}(D, (SCE)) = \dfrac{a}{\sqrt{13}}$.

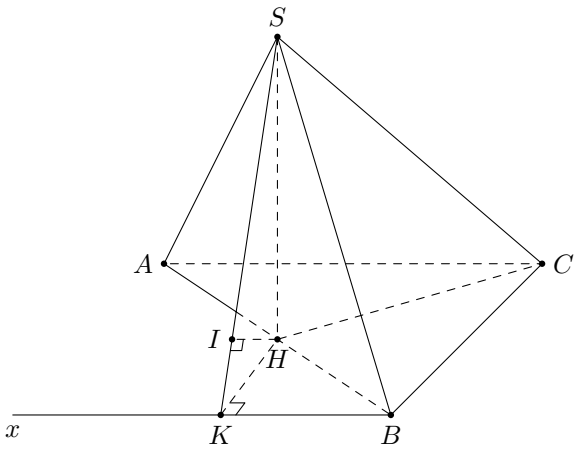
Vì $AB \parallel (SEC)$ nên $\mathrm{d}(AB, SC) = \mathrm{d}(AB, (SCE)) = \mathrm{d}(B, (SCD)) = \dfrac{BI}{DI} \cdot \mathrm{d}(D, (SCE)) = \dfrac{3a}{\sqrt{13}}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB, góc giữa SC và đáy bằng 60°. Tính khoảng cách giữa SB và AC.

(A) $\dfrac{3a}{\sqrt{26}}$. (B) $\dfrac{3a}{\sqrt{13}}$. (C) $\dfrac{3a}{\sqrt{52}}$. (D) $\dfrac{a}{\sqrt{13}}$.

Lời giải.



Vì $SH \perp (ABC)$ nên góc giữa SC và (ABC) là $\widehat{SCH} = 60^\circ$.

Ta có $CH = AC \cdot \sin \widehat{HAC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SH = CH \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{3a}{2}$.

Kẻ $Bx \parallel AC$. Suy ra $AC \parallel (SBx)$.

Khi đó $\mathrm{d}(AC, SB) = \mathrm{d}(AC, (SBx)) = \mathrm{d}(A, (SBx)) = 2\mathrm{d}(H, (SBx))$.

Từ H kẻ $HK \perp Bx$. Khi đó $Bx \perp (SHK) \Rightarrow (SHK) \perp (SBx)$.

Ta có $\begin{cases} (SHK) \perp (SBx) \\ (SHK) \cap (SBx) = SK \Rightarrow HI = \mathrm{d}(H, (SBx)). \\ HI \perp SK \end{cases}$

$HK = HB \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Khi đó

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{4}{9a^2} + \frac{16}{3a^2} = \frac{52}{9a^2} \Rightarrow HI = \frac{3a}{\sqrt{52}}.$$

Suy ra $\mathrm{d}(H, (SBx)) = HI = \dfrac{3a}{\sqrt{52}}$.

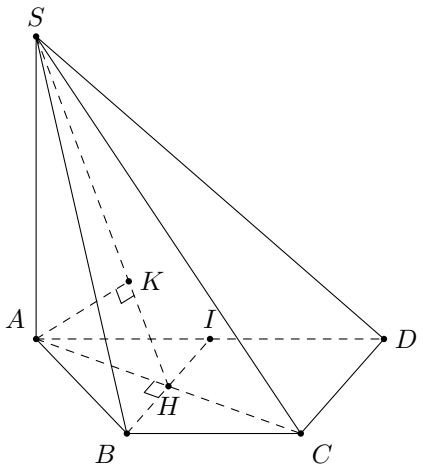
Vậy $\mathrm{d}(SB, AC) = 2HI = \dfrac{3a}{\sqrt{13}}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là nửa lục giác đều với $AD = 2a$, $AB = BC = CD = a$, $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD theo a.

(A) $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{6}}{5}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{14}}{7}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm AD, H là giao điểm của AC và BI.

Vì $CD \parallel BI$ nên H là trung điểm của AC.

Ta có $\mathrm{d}(CD, SB) = \mathrm{d}(CD, (SBI)) = \mathrm{d}(C, (SBI)) = \mathrm{d}(A, (SBI))$.

Kẻ $AK \perp SH$ tại K. (1)

Vì $\begin{cases} BI \parallel CD \\ CD \perp AC \end{cases}$ nên $BI \perp AH$.

Lại có $BI \perp SA$ nên $BI \perp (SAH)$. Suy ra $BI \perp (AK)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AK \perp (SBI)$ nên $\mathrm{d}(A,(SBI)) = AK$.

Ta có

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Xét $\triangle SAH$ vuông tại A, đường cao AK có

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

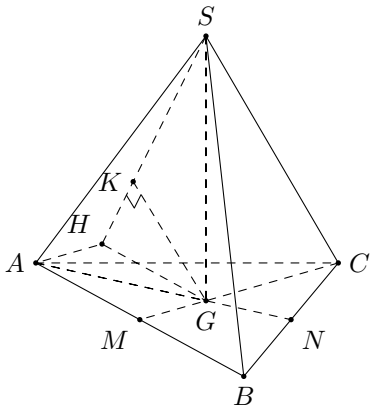
Vậy $\mathrm{d}(CD, SB) = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Góc giữa đường thẳng SA với mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng GC và SA bằng

(A) $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. (B) $\dfrac{a}{5}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{5}}{10}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{2}}{5}$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC.

Gọi H là hình chiếu của G lên đường thẳng đi qua A và song song với CG.

Dựng $GK \perp AH$. Khi đó $\mathrm{d}(GC, SA) = \mathrm{d}(GC, (SAH)) = GK$.

Ta có $AHGM$ là hình chữ nhật và $AG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lại có góc giữa SA và (ABC) là $\widehat{SAG} = 60^\circ$ nên $SG = AG \cdot \tan 60^\circ = a$ và $GH = AM = \dfrac{a}{2}$.

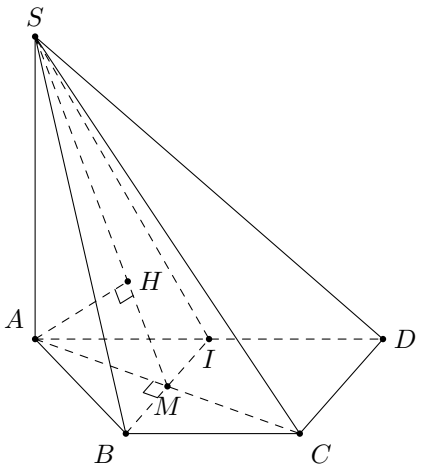
Khi đó $\mathrm{d}(GC, SA) = GK = \dfrac{GS \cdot GH}{\sqrt{GS^2 + GH^2}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy là nửa lục giác đều có $AB = CD = CD = a$, $SA \perp (ABCD)$, góc giữa SC và $(ABCD)$ là 45°. Khoảng cách giữa SB và CD là

(A) $\dfrac{a\sqrt{15}}{3}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. (C) $\dfrac{3a}{5}$. (D) $\dfrac{5a}{3}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm AD.

Ta có $BCDI$ là hình bình hành nên $BI \parallel CD \Rightarrow CD \parallel (SBI)$.

Khi đó $\mathrm{d}(CD, BI) = \mathrm{d}(CD, (SBI)) = \mathrm{d}(D, (SBI))$.

Ta có $AD \cap (SBI) = I$ nên $\dfrac{\mathrm{d}(D, (SBI))}{\mathrm{d}(A, (SBI))} = \dfrac{DI}{AI} = 1 \Rightarrow \mathrm{d}(D, (SBI)) = \mathrm{d}(A, (SBI))$.

Vì $ABCD$ là nửa lục giác nội tiếp hình tròn tâm I nên $\widehat{ACD} = 90^\circ$. Suy ra $AC \perp CD$.

Khi đó $\begin{cases} AM \perp BI \\ SA \perp BI \end{cases} \Rightarrow BI \perp (SAM) \Rightarrow (SBI) \perp (SAM)$.

Lại có $(SBI) \cap (SAM) = SM$. Trong (SAM), kẻ $AH \perp SM$ thì $AH \perp (SBI)$.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa SC và $(ABCD)$ là $\widehat{SCA} = 45^\circ \Rightarrow SA = AC = CD \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Dễ thấy $\triangle ABI$ đều cạnh a nên $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét $\triangle SAM$ vuông tại A có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AM^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Vậy $\mathrm{d}(CD, BI) = \mathrm{d}(D, (SBI)) = \mathrm{d}(A, (SBI)) = AH = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

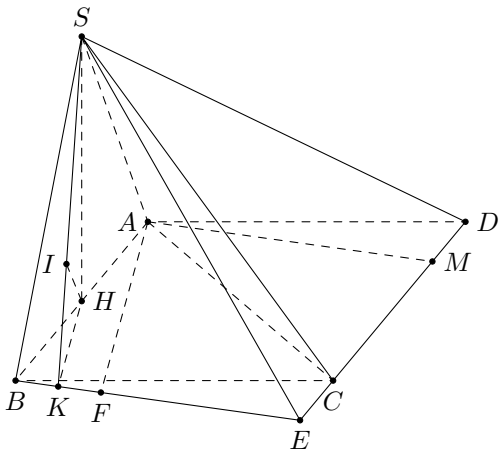
Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $4a$, tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Gọi M là điểm trên cạnh CD sao cho $CM = 3a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AM bằng

(A) $\dfrac{8\sqrt{51}}{17}a$. (B) $\dfrac{\sqrt{51}}{12}a$. (C) $\dfrac{4\sqrt{51}}{17}a$. (D) $\dfrac{\sqrt{51}}{6}a$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AB.



Ta có $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(ABCD)=AB\Rightarrow SH\perp(ABCD).\\\text{Trong }(SAB),SH\perp AB\end{cases}$

Theo giả thiết ta có $AB=BC=4a$ và $\widehat{BAD}=120^\circ\Rightarrow\widehat{ABD}=30^\circ\Rightarrow\widehat{ABC}=60^\circ$ nên $\triangle ABC$ là tam giác đều, cạnh $4a$.

Khi đó $S_{\triangle ABC}=\dfrac{(4a)^2\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}a^2$ và $SH=\dfrac{4a\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}a$.

Ta có

$$\begin{aligned}AM^2&=AD^2+DM^2-2AD\cdot DM\cdot\cos\widehat{ADM}\\&=(4a)^2+a^2-2\cdot4a\cdot a\cdot\cos60^\circ\\&=13a^2\Rightarrow AM=a\sqrt{13}.\end{aligned}$$

Trên tia đối của tia CD lấy điểm E sao cho $CE=a$.

Khi đó, tứ giác $AMEB$ là hình bình hành $\Rightarrow BE=AM=a\sqrt{13}$.

Mặt khác, $\triangle ADM=\triangle BCE\Rightarrow S_{AMEB}=S_{ABCD}=2S_{\triangle ABC}=8\sqrt{3}a^2$.

Ta có $\begin{cases}AM\not\subset(SBE)\\AM\parallel BE\\BE\subset(SBE)\end{cases}\Rightarrow AM\parallel(SBE).$

Do đó $\mathrm{d}\,(AM,SB)=\mathrm{d}(AM,(SBE))=\mathrm{d}\,(A,(SBE))$.

Ta lại có $\dfrac{\mathrm{d}\,(A,(SBE))}{\mathrm{d}\,(H,(SBE))}=\dfrac{AB}{HB}=2\Rightarrow\mathrm{d}\,(A,(SBE))=2\mathrm{d}\,(H,(SBE))$.

Trong $(ABCD)$, gọi K và F lần lượt là hình chiếu của H và A lên BE.

Do đó $HK=\dfrac{1}{2}AF=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{S_{AMEB}}{EB}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{8\sqrt{3}a^2}{a\sqrt{13}}=\dfrac{4\sqrt{39}a}{13}$ (do HK là đường trung bình của $\triangle ABF$).

Ta có $\begin{cases}BE\perp HK\\BE\perp SH\,(\text{Do }SH\perp(ABCD))\\HK,SH\subset(SHK)\\HK\cap SH=H\end{cases}\Rightarrow BE\perp(SHK).$

Mà $BE\subset(SBE)\Rightarrow(SBE)\perp(SHK)$. Ta lại có $(SBE)\cap(SHK)=SK$.

Trong (SHK), kẻ $HI\perp SK$, $(I\in SK)\Rightarrow HI\perp(SBE)\Rightarrow\mathrm{d}\,(H,(SBE))=HI$.

Xét tam giác SHK vuông tại H nên $\dfrac{1}{HI^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{\left(2\sqrt{3}a\right)^2}+\dfrac{1}{\left(\dfrac{4\sqrt{39}a}{13}\right)^2}=\dfrac{17}{48a^2}$.

Suy ra $HI=\dfrac{4\sqrt{51}}{17}a$.

Vậy $\mathrm{d}\,(AM,SB)=\dfrac{8\sqrt{51}}{17}a$.

Chọn đáp án (A) □

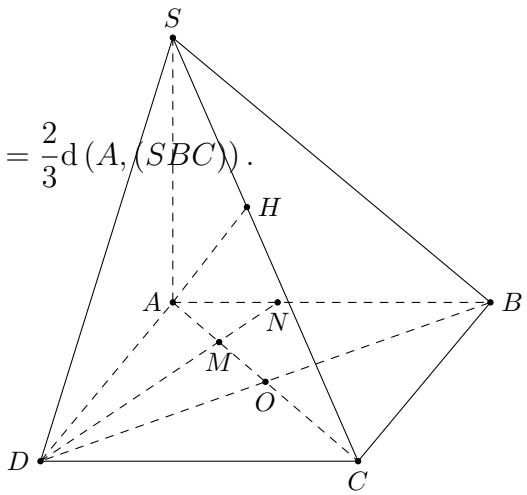
Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, $AC = 2a$, $BC = a$, $DC = a\sqrt{5}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi M là trung điểm OA, $DM \cap AB = N$. Tính $\mathrm{d}\,(N, (SBC))$.

(A) $\dfrac{2a}{3}$. (B) $\dfrac{4a\sqrt{5}}{15}$. (C) $\dfrac{a}{2}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle ABO$ với cát tuyến DMN ta có

$$\frac{AM}{OM}\cdot\frac{DO}{DB}\cdot\frac{AN}{BN} = 1 \Rightarrow \frac{AN}{BN} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{NB}{AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \mathrm{d}\,(N, (SBC)) = \frac{2}{3}\mathrm{d}\,(A, (SBC)).$$



Xét $\triangle ABC$ có $AB^2 = CD^2 = 5a^2$;

Ta có $AC^2 + BC^2 = 4a^2 + a^2 = 5a^2 \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại C.

Vậy $AC \perp BC$.

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$. Suy ra $BC \perp (SAC)$.

Kẻ $AH \perp SC$, ta có $BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AH$ nên

$$AH \perp (SBC) \Rightarrow AH = \mathrm{d}\,(A, (SBC)).$$

Xét $\triangle SAC$ vuông tại A, ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \dfrac{SA\cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \dfrac{a\cdot 2a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}a$.

Vậy $\mathrm{d}\,(N, (SBC)) = \dfrac{2}{3}\mathrm{d}\,(A, (SBC)) = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2a}{\sqrt{5}} = \dfrac{4a\sqrt{5}}{15}$.

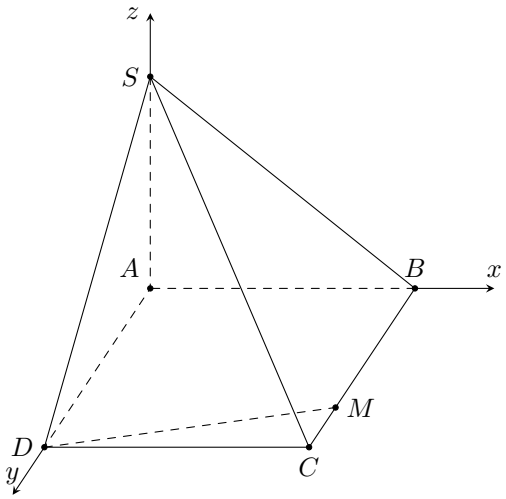
Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Độ dài các cạnh $AB = 3a$, $AD = 4a$, $SA = 5a$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh BC và $BM = 3a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và MD là

(A) $\dfrac{15a}{\sqrt{259}}$. (B) $\dfrac{29a}{\sqrt{245}}$. (C) $\dfrac{39a}{\sqrt{245}}$. (D) $\dfrac{45a}{\sqrt{259}}$.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Dề-các vuông góc $Oxyz$ thỏa $O \equiv A$, điểm B nằm trên Ox, điểm D nằm trên Oy, điểm S nằm trên Oz như hình vẽ.



Từ giả thiết ta có tọa độ các điểm $B(3a;0;0), D(0;4a;0), S(0;0;5a)$ và $M(3a;3a;0)$ suy ra tọa độ các véc-tơ $\overrightarrow{SB} = (3a;0;-5a)$;
$\overrightarrow{MD} = (-3a;a;0)$, $\overrightarrow{BM} = (0;3a;0)$.
Tích có hướng $\left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{MD}\right] = (5a^2;15a^2;3a^2)$.
Vận dụng công thức tính khoảng cách

$$\mathrm{d}(SB,MD) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{MD}\right]\cdot\overrightarrow{BM}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{MD}\right]\right|} = \frac{45a^3}{a^2\sqrt{259}} = \frac{45a}{\sqrt{259}}.$$

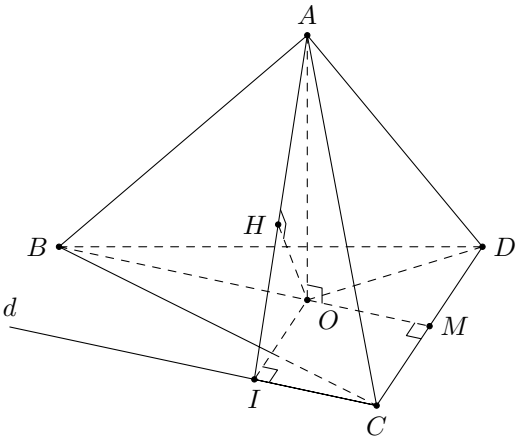
Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BM.

(A) $\dfrac{a\sqrt{22}}{11}$. (B) $a\sqrt{22}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{11}}{22}$. (D) $a\sqrt{11}$.

Lời giải.

Gọi O là trọng tâm của tam giác BCD.



Qua C kẻ đường thẳng d song song với BM.
Khi đó $\mathrm{d}(AC,BM) = \mathrm{d}(BM,(AC,d)) = \mathrm{d}(O,(AC,d))$.
Do tứ diện $ABCD$ là tứ diện đều $\Rightarrow AO \perp (BCD)$.

$$\begin{cases} \text{Kẻ } OI \perp d, I \in d \\ OH \perp AI, H \in AI \end{cases} \Rightarrow OH \perp (AC,d).$$

Suy ra $\mathrm{d}(O,(AC,d)) = OH$.
Ta có $d \parallel BM \Rightarrow d \perp CD$. Tứ giác $IOMC$ là hình chữ nhật, suy ra $IO = MC = \dfrac{a}{2}$.
Do BM là đường cao trong tam giác đều cạnh bằng a nên ta có $BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Ta có $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} \Rightarrow AO = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

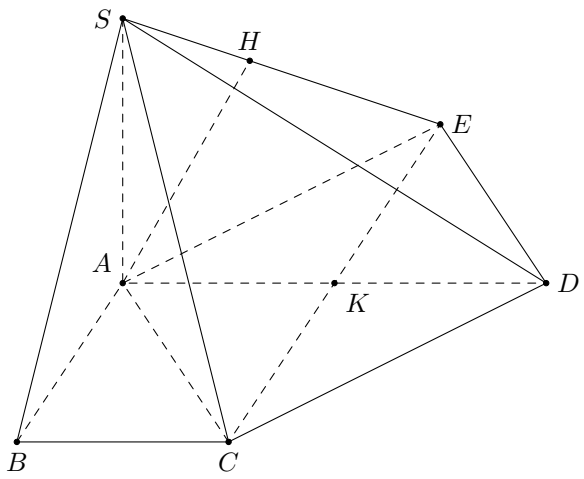
Do đó ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OI^2} \Rightarrow OH = \dfrac{OA\cdot OI}{\sqrt{OA^2+OI^2}} \Rightarrow OH = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{a}{2}}{\sqrt{\dfrac{2a^2}{3}+\dfrac{a^2}{4}}} = \dfrac{a\sqrt{22}}{11}$.

Vậy $\mathrm{d}(AC,BM) = \dfrac{a\sqrt{22}}{11}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD bằng

(A) $\dfrac{a\sqrt{2}}{6}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải.



Kẻ $CK \perp AD$. Ta có $CK = a$, $AK = BC = a \Rightarrow KD = a$.

Do $AC = a\sqrt{2}$, $CD = \sqrt{CK^2 + KD^2} = a\sqrt{2}$;

$AC^2 + CD^2 = AD^2 \Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại C.

Dựng hình chữ nhật $ACDE$, kẻ $AH \perp SE$ tại H.

Ta có $DE \perp AE$ và $DE \perp SA$ nên $DE \perp (SAE)$.

Suy ra $DE \perp AH$.

$\begin{cases} DE \perp AH \\ SE \perp AH \end{cases}$ nên $AH \perp (SDE)$ tại H. Khi đó $\mathrm{d}(A, (SDE)) = AH$.

Ta có $AC \parallel (SDE)$, do đó

$$\mathrm{d}(AC, SD) = \mathrm{d}(AC, (SDE)) = \mathrm{d}(A, (SDE)) = AH.$$

Xét SAE vuông tại A, ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy $\mathrm{d}(AC, SD) = AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

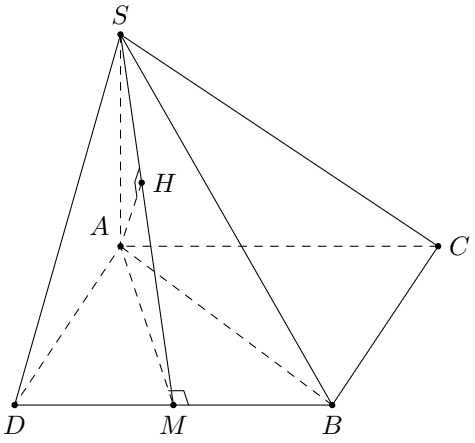
Câu 31. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng $75°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB gần bằng giá trị nào sau đây? (lấy 3 chữ số phần thập phân)

(A) $0.833a$. (B) $0.844a$. (C) $0.855a$. (D) $0.866a$.

Lời giải.

Vì $SA \perp (ABC)$ nên

$$\widehat{(SB,(ABC))} = \widehat{(SB,AB)} = \widehat{SBA} \Rightarrow \widehat{SBA} = 75^\circ.$$



Ta có $SA = AB \cdot \tan \widehat{SBA} = a \cdot \tan 75^\circ = a\left(2+\sqrt{3}\right)$.
Dựng hình bình hành $ACBD$, ta có $AC \parallel (SBD)$ nên

$$\mathrm{d}\,(AC,SB) = \mathrm{d}\,(AC,(SBD)) = \mathrm{d}\,(A,(SBD))\,.$$

Gọi M là trung điểm BD, suy ra $BD \perp AM$.
Từ $SA \perp (ABC)$ ta có $BD \perp SA$, do đó $BD \perp (SAM)$. Kẻ $AH \perp SM$ $(H \in SM)$ thì $BD \perp AH$.
Từ $\begin{cases} BD \perp AH \\ AH \perp SM \end{cases}$ suy ra $AH \perp (SBD)$ nên $\mathrm{d}\,(A,(SBD)) = AH$.

Tam giác ABD đều cạnh a nên $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Trong tam giác SAM vuông tại A, ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(a\left(2+\sqrt{3}\right)\right)^2} = \frac{25-12\sqrt{3}}{3a^2} \Rightarrow AH \approx 0.844a.$$

Vậy $\mathrm{d}\,(AC,SB) = \mathrm{d}\,(A,(SBD)) = AH \approx 0.844a$.

Chọn đáp án (B) □

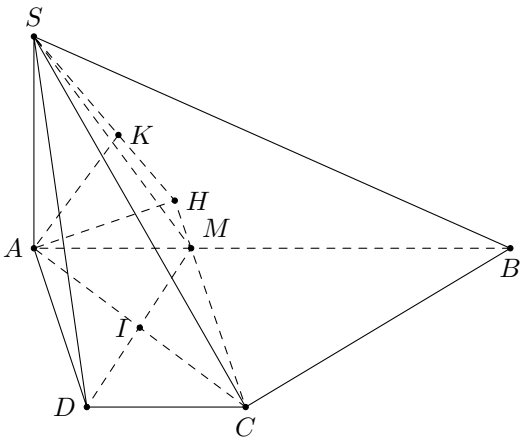
Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, với $AB \parallel CD$; $AB = 3a$, $AD = DC = a$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, biết SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AB = 3AM$. Khoảng cách giữa SM và AD bằng

(A) $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{15}}{3}$. (C) $\dfrac{2a}{5}$. (D) $\dfrac{2a}{3}$.

Lời giải.

Do $AB = 3AM = 3a$ nên $AM = a \Rightarrow AD = DC = AM = a$.

Do $AM \parallel DC$ và $AM = CD = AD = a$ nên $AMCD$ là hình thoi có cạnh bằng a.



Suy ra $\begin{cases} CM = a \\ AD \parallel CM \end{cases} \Rightarrow AD \parallel (SCM)$ nên

$$\mathrm{d}\,(AD, SM) = \mathrm{d}\,(AD, (SCM)) = \mathrm{d}\,(A, (SCM)).$$

Kẻ $AH \perp CM, (H \in CM)$, $AK \perp SH, (K \in SH)$.

Ta có $\begin{cases} SA \perp CM \,(\text{vì } SA \perp (ABCD)) \\ CM \perp AH \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAH)$,

suy ra $CM \perp AK$.

Do $\begin{cases} AK \perp SH \\ AK \perp CM \end{cases}$ nên $AK \perp (SMC)$, suy ra $AK = \mathrm{d}\,(A, (SCM))$.

Do $AM = AD = a$, $\widehat{MAD} = 60^\circ$ nên $\triangle MAD$ là tam giác đều cạnh bằng $a \Rightarrow AC = 2AI = a\sqrt{3}$ với I là tâm hình thoi $AMCD$.

Ta có $S_{\triangle AMC} = \dfrac{1}{2} \cdot MI \cdot AC = \dfrac{1}{2} AH \cdot MC \Rightarrow AH = \dfrac{MI \cdot AC}{MC} = \dfrac{\frac{a}{2} \cdot a\sqrt{3}}{a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét $\triangle SAH$ vuông tại A có $AK \perp SH$. Ta có

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Vậy $\mathrm{d}\,(AD, SM) = \mathrm{d}\,(AD, (SCM)) = \mathrm{d}\,(A, (SCM)) = AK = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

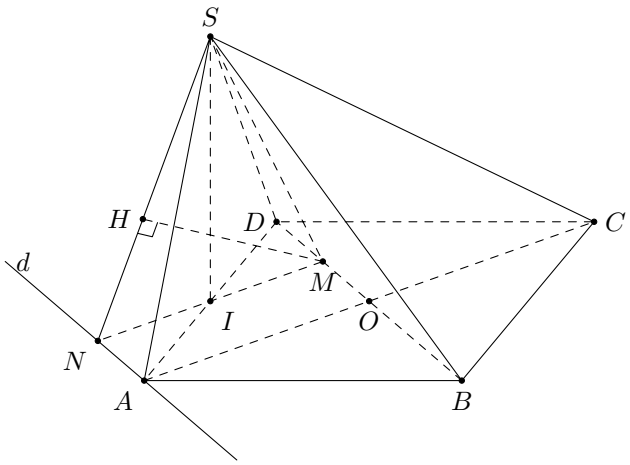
Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách giữa SA và BD.

(A) $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{21}}{10}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải.

Qua A kẻ đường thẳng d song song với BD. Gọi O là giao điểm AC và BD; I, M lần lượt là trung điểm AD và OD; N là giao điểm d và IM. Nên $BD \parallel d \Rightarrow BD \parallel (SA, d)$.



Khi đó $\mathrm{d}(SA, BD) = \mathrm{d}(BD, (SA, d)) = \mathrm{d}(M, (SA, d))$

Trong (SMN) kẻ $MH \perp SN$, $(H \in SN)$. (1)

Theo giả thiết $\begin{cases} SI \perp AD \\ (SAD) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.

Suy ra $SI \perp d$. (*)

Mặt khác ta có $\begin{cases} d \parallel BD \\ BD \perp AO \Rightarrow d \perp MN. \quad (**) \\ AO \parallel MN \end{cases}$

Từ (*),(**) suy ra $d \perp (SMN) \Rightarrow d \perp MH$. (2)

Từ (1),(2) suy ra $MH \perp (SA, d)$. Vậy $\mathrm{d}(SA, BD) = \mathrm{d}(M, (SA, d)) = MH$.

Xét tam giác SMN có $S_{\triangle SMN} = \dfrac{1}{2} MH \cdot SN = \dfrac{1}{2} SI \cdot MN \Rightarrow MH = \dfrac{SI \cdot MN}{SN}$

Với $SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $MN = AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow IN = \dfrac{1}{2} MN = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, $SN = \sqrt{SI^2 + IN^2} = \dfrac{a\sqrt{14}}{4}$.

Do đó $MH = \dfrac{SI \cdot NM}{SN} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $\mathrm{d}(SA, BD) = MH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

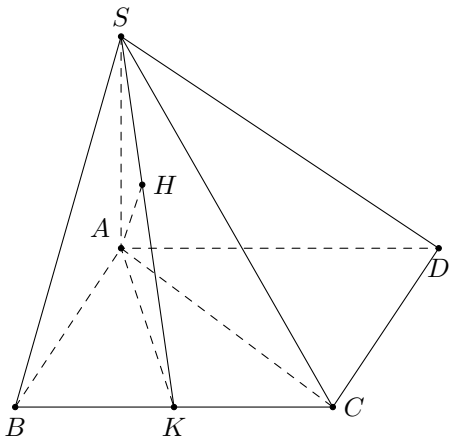
Chọn đáp án (D) □

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SA \perp (ABCD)$, góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30°. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AD.

(A) $\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{3}}{13}$. (C) $\dfrac{2a}{\sqrt{13}}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{39}}{3}$.

Lời giải.

Do $ABDC$ là hình thoi nên $AD \parallel BC$. Khi đó $AD \parallel (SBC)$.
Khi đó $\mathrm{d}(SB, AD) = \mathrm{d}(AD, (SBC)) = \mathrm{d}(A, (SBC))$.
(Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên BC, H là hình chiếu vuông góc của A lên SK).
Khi đó $AH \perp (SBC)$, suy ra $\mathrm{d}(A, (SBC)) = AH$.
Tam giác ABC cân tại B và $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên tam giác ABC là tam giác đều. Suy ra $AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Ta có $SA = AD \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Vậy $AH = \dfrac{AK \cdot SA}{\sqrt{AK^2 + SA^2}} = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.



Chọn đáp án (A) □

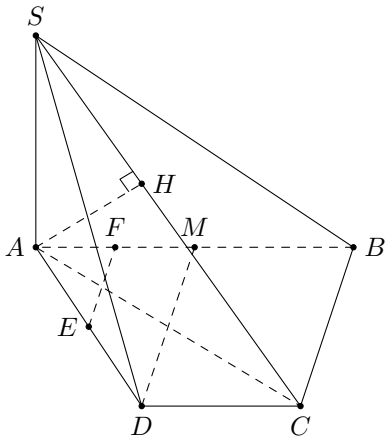
Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB = 2a, AD = DC = CB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3a$. Gọi E là trung điểm AD, F nằm trên AB sao cho $AF = \dfrac{1}{4}AB$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và EF bằng

(A) $\dfrac{3a}{4}$. (B) $\dfrac{9a}{8}$. (C) $\dfrac{3\sqrt{13}a}{13}$. (D) $\dfrac{6\sqrt{13}a}{13}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm AB.
Ta có $BCDM$ là hình bình hành (vì CD song song và bằng BM) nên $DM = BC = \dfrac{1}{2}AB$ suy ra tam giác ADB vuông tại D. Tương tự tam giác ACB vuông tại C.
Vì $\begin{cases} EF \parallel DM \\ DM \parallel CB \end{cases} \Rightarrow EF \parallel CB \Rightarrow EF \parallel (SBC)$, khi đó

$$\mathrm{d}(EF, SB) = \mathrm{d}(EF, (SBC)) = \mathrm{d}(F, (SBC)) = \frac{3}{4}\mathrm{d}(A, (SBC)).$$

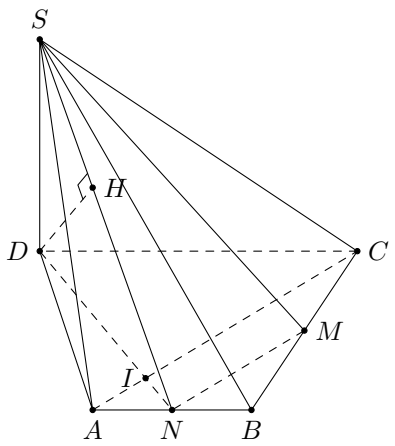


Ta có $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow (SBC) \perp (SAC)$.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SC thì $AH \perp (SBC)$, do đó $\mathrm{d}(A, (SBC)) = AH$.
Trong tam giác vuông SAC ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{9a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{4}{9a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{3a}{2}$.
Vậy $\mathrm{d}(SB, EF) = \dfrac{9a}{8}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SD vuông góc với $(ABCD)$, $SD = a\sqrt{5}$. Đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $CD = 2AD = 2AB = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM.

(A) a. (B) $\dfrac{a}{2}$. (C) $\dfrac{a}{4}$. (D) $\dfrac{a}{5}$.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm của AB. Suy ra MN là đường trung bình của $\triangle ABC$.

Khi đó $\mathrm{d}\,(AC,SM) = \mathrm{d}\,(AC,(SMN)) = \mathrm{d}\,(I,(SMN))$, (với $I = DN \cap AC$).

Ta có $ID \cap (SMN) = N \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}\,(I,(SMN))}{\mathrm{d}\,(D,(SMN))} = \dfrac{IN}{DN} = \dfrac{1}{5}$, (do $AN \parallel CD$ nên $\dfrac{IN}{ID} = \dfrac{AN}{CD} = \dfrac{1}{2}\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{IN}{DN} = \dfrac{1}{5}$).

Suy ra $\mathrm{d}\,(I,(SMN)) = \dfrac{1}{5}\mathrm{d}\,(D,(SMN))$.

Xét $\triangle ADN$ và $\triangle DCA$ có $\widehat{D} = \widehat{A} = 90^\circ$.

Khi đó $\dfrac{AN}{AD} = \dfrac{AD}{DC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \triangle ADN = \triangle DCA, (c-g-c)$, khi đó

$$\widehat{ADN} = \widehat{DCA} \Rightarrow DN \perp AC \Rightarrow MN \perp (SDN)\,.$$

Ta có $\begin{cases} (SMN) \perp (SDN) \\ (SMN) \cap (SDN) = SN \Rightarrow \mathrm{d}\,(D,(SMN)) = DH. \\ DH \perp SN \end{cases}$

Xét $\triangle DAN$ vuông tại A thì $DN = \sqrt{DA^2 + AN^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét $\triangle SDN$ vuông tại D, ta có

$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{DN^2} \Rightarrow DH = a \Rightarrow \mathrm{d}\,(I,(SMN)) = \frac{1}{5}\mathrm{d}\,(D,(SMN)) = \frac{a}{5}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, mặt bên SAB là tam giác đều. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm của AO. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD.

(A) $\dfrac{a\sqrt{560}}{112}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{560}}{10}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{560}}{5}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{560}}{28}$.

Lời giải.

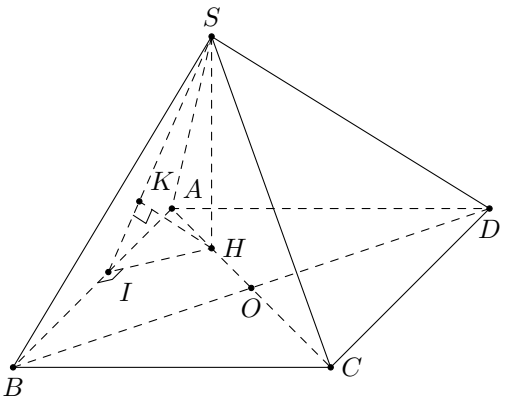
Gọi H là trung điểm của AO. Theo giả thiết $SH \perp (ABCD)$.

Ta có $CD \parallel AB \Rightarrow CD \parallel (SAB)$, do đó

$$\mathrm{d}\,(SA, CD) = \mathrm{d}\,(CD, (SAB)) = \mathrm{d}\,(C, (SAB))\,.$$

Mặt khác $\dfrac{\mathrm{d}\,(C, (SAB))}{\mathrm{d}\,(H, (SAB))} = \dfrac{CA}{HA} = 4$, khi đó

$$\mathrm{d}\,(C, (SAB)) = 4\mathrm{d}\,(H, (SAB))\,.$$



Trong $(ABCD)$, kẻ $HI \perp AB$ tại I; kẻ $HK \perp SI$ tại K.

Vậy $\mathrm{d}\,(H, (SAB)) = HK$.

Tam giác SHI vuông tại H nên $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HS^2} + \dfrac{1}{HI^2}$. (1)

Hình thoi có $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên tam giác ABC đều $\Rightarrow AC = a$; $BO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác AIH đồng dạng tam giác $AOB \Rightarrow \dfrac{IH}{OB} = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow IH = \dfrac{OB \cdot AH}{AB} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a}{4}}{a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{8}$. (2)

Tam giác SAB đều nên $SA = SB = AB = a$.

Tam giác SAH vuông tại H nên $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a}{4}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{4}$. (3)

Thay (2) và (3) vào (1) ta được $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{8}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{15}}{4}\right)^2} = \dfrac{112}{5a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{560}}{112}$.

Vậy $\mathrm{d}\,(C, (SAB)) = 4\mathrm{d}\,(H, (SAB)) = 4 \cdot \dfrac{a\sqrt{560}}{112} = \dfrac{a\sqrt{560}}{28}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, $SA \perp (ABCD)$; $AB = 2a$, $AD = CD = a$. Gọi N là trung điểm SA. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng SC và DN, biết rằng thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

(A) $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

Lời giải.

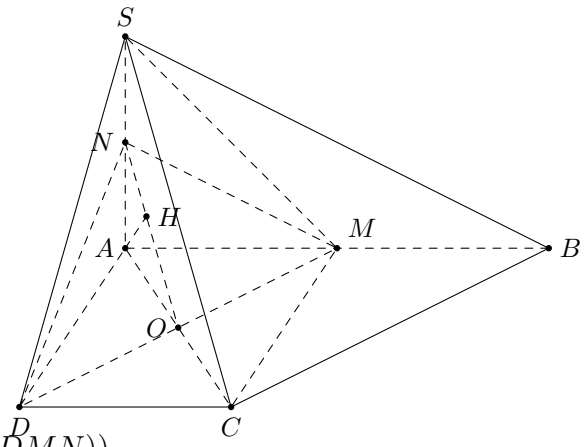
Ta có $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}(a+2a)\cdot a=\dfrac{3a^2}{2}$.

Suy ra $SA=\dfrac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}}=\dfrac{3a^3\sqrt{6}}{2}\cdot\dfrac{2}{3a^2}=a\sqrt{6}$.

Gọi M là trung điểm của AB, O là giao điểm của AC và DM.

Ta có tứ giác $ADCM$ là hình vuông cạnh a.

Ta có (DNM) chứa ON và $ON\ /\!/\ SC$ nên $SC\ /\!/\ (DNM)$. Do đó



$$\mathrm{d}\,(SC,DN)=\mathrm{d}\,(SC,(DMN))=\mathrm{d}\,(C,(DMN))=\mathrm{d}\,(A,(DMN)).$$

Trong (SAC) kẻ $AH\perp NO$.

Ta có $\begin{cases}DM\perp AC\\ DM\perp SA\end{cases}\Rightarrow DM\perp(SAC)$.

Khi đó $\begin{cases}AH\perp NO\\ AH\perp DM,\ (\text{Vì } DM\perp(SAC))\end{cases}\Rightarrow AH\perp(DMN)$.

Nên $\mathrm{d}\,(A,(DMN))=AH$.

Xét tam giác AON vuông tại A, ta có $AN=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$; $AO=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, khi đó

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AN^2}+\frac{1}{AO^2}=\frac{1}{\frac{a^2}{2}}+\frac{1}{\frac{3a^2}{2}}=\frac{8}{3a^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Vậy $\mathrm{d}\,(SC,DN)=AH=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

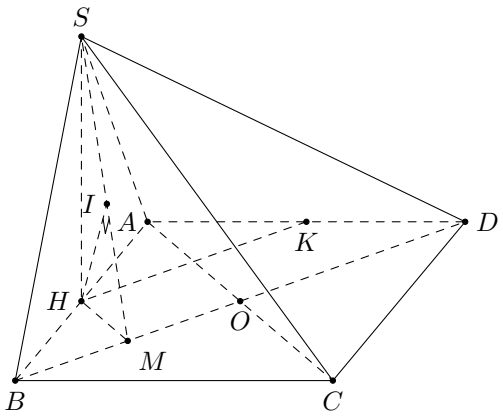
Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SD=\dfrac{a\sqrt{33}}{2}$. Hình chiếu vuông góc H của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn AB. Gọi Klà trung điểm của AD. Tính khoảng cách giữa hai đường SD và HK theo a.

(A) $\dfrac{a\sqrt{399}}{19}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{105}}{15}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{399}}{57}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{105}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $HK \parallel BD \Rightarrow HK \parallel (SBD)$, do đó

$$\mathrm{d}\,(HK, SD) = \mathrm{d}\,(HK, (SBD)) = \mathrm{d}\,(H, (SBD)).$$



Dựng $HM \perp BD$. Ta có $\begin{cases} BD \perp HM \\ BD \perp SH \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SHM)$.

Dựng $HI \perp SM$. Ta có $\begin{cases} HI \perp SM \\ HI \perp BD \end{cases} \Rightarrow HI \perp (SBD)$.

Vậy $\mathrm{d}\,(H, (SBD)) = HI$.

Ta có $HM = \dfrac{AO}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, $HD = \sqrt{AH^2 + AD^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$,
$SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = a\sqrt{7}$.
Xét $\triangle SHM$ vuông tại H, ta có

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HM^2} = \frac{1}{\left(a\sqrt{7}\right)^2} + \frac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{57}{7a^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{399}}{57}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và HK là $\dfrac{a\sqrt{399}}{57}$.

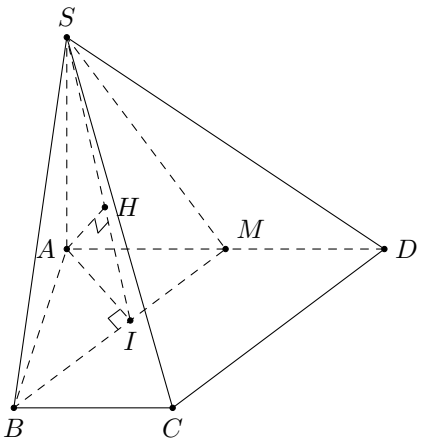
Chọn đáp án (C) □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a; AD = 2a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của AD. Tính khoảng cách giữa SM và CD.

(A) $\dfrac{2a}{3}$. (B) $\dfrac{2a\sqrt{17}}{17}$. (C) $\dfrac{a}{3}$. (D) $\dfrac{5a}{6}$.

Lời giải.

Do $ABCD$ là hình thang có $AB = BC = a$; $AD = 2a$ và M là trung điểm của AD nên ta có $BM \parallel CD \Rightarrow CD \parallel (SBM)$.



Do đó $\mathrm{d}\,(SM, CD) = \mathrm{d}\,(CD, (SBM)) = \mathrm{d}\,(D, (SBM)) = \mathrm{d}\,(A, (SBM))$.

$\begin{cases} \text{Kẻ } AI \perp BM \\ SA \perp BM \end{cases} \Rightarrow (SAI) \perp (SBM)$.

Ta có $(SAI) \cap (SBM) = SI$. Kẻ $AH \perp SI \Rightarrow AH \perp (SBM)$ hay $\mathrm{d}\,(A, (SBM)) = AH$.

Xét tam giác SAI có $SA = 2a$; $AI = \dfrac{1}{2}BM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $\widehat{SAI} = 90^\circ$.

Khi đó $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{(2a)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} \Rightarrow AH = \dfrac{2a}{3}$.

Vậy $\mathrm{d}\,(SM, CD) = \mathrm{d}\,(A, (SBM)) = AH = \dfrac{2a}{3}$.

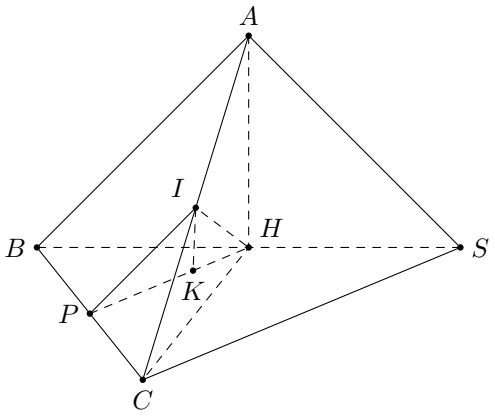
Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\triangle ABC$ vuông cân tại B, $AB=a$, $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^\circ$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. (B) $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AC, H là trung điểm của SB, P là trung điểm của BC.



Ta có $\triangle SAB$, $\triangle SCB$ vuông tại A và C nên $HS=HA=HB=HC$, khi đó H là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Mặt khác $IA=IB=IC$, do đó I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Từ đó suy ra $IH\perp(ABC)\Rightarrow IH\perp BC$ mà $IP\perp BC$, suy ra $BC\perp(IHP)$.

Kẻ $IK\perp HP\Rightarrow IK\perp(SBC)$, khi đó

$$IK=\mathrm{d}\left(I,(SBC)\right)=\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(A,(SBC)\right)=\frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Ta có $\dfrac{1}{IK^2}=\dfrac{1}{IH^2}+\dfrac{1}{IP^2}\Rightarrow\dfrac{1}{IH^2}=\dfrac{8}{a^2}\Rightarrow IH=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\Rightarrow PH=\sqrt{IP^2+IH^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Suy ra $SC=2PH=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\Rightarrow S_{\triangle SBC}=\dfrac{1}{2}\cdot BC\cdot SC=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot\dfrac{a\sqrt{6}}{2}=\dfrac{a^2\sqrt{6}}{4}$.

Vậy $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}\left(A,(SBC)\right)\cdot S_{\triangle SBC}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{6}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, $AB=2a$, $BC=4a$. Gọi M là trung điểm của BC có $\widehat{SCB}=\widehat{SMA}=90^\circ$, $\left(\widehat{SB,(ABC)}\right)=60^\circ$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

(A) $\dfrac{4\sqrt{39}a^3}{3}$. (B) $4\sqrt{39}a^3$. (C) $\sqrt{39}a^3$. (D) $\dfrac{\sqrt{39}a^3}{3}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC).

Suy ra $\left(\widehat{SB,(ABC)}\right)=\widehat{SBH}=60^\circ$.

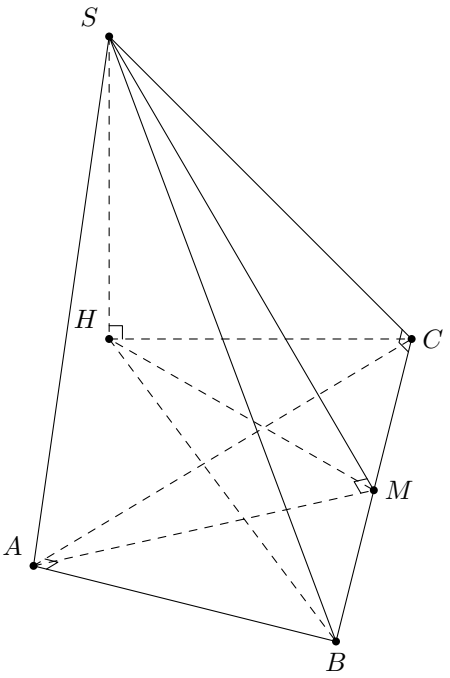
Do $\widehat{SCB}=\widehat{SMA}=90^\circ$ nên $BC\perp CH, AM\perp MH$.

Ta có $\triangle ABM$ đều cạnh $2a$ và $\widehat{AMH}=90^\circ$ nên $\widehat{HMC}=30^\circ$.

Từ đó $CH=CM\cdot\tan 30^\circ=\dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$

$\Rightarrow HB=\sqrt{CH^2+BC^2}=\dfrac{2\sqrt{39}}{3}a\Rightarrow SH=HB\cdot\tan 60^\circ=2\sqrt{13}a$.

Vậy $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}\cdot SH\cdot S_{ABC}=\dfrac{4\sqrt{39}}{3}a^3$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AC=4a\sqrt{3}$, $\widehat{ASB}>30^\circ$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 30°. Biết I trung điểm SA là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Gọi α là góc giữa IB và mặt phẳng (SAC). Khi $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ thì khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

(A) $\dfrac{14\sqrt{3}}{5}a$. (B) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}a$. (C) $3\sqrt{3}a$. (D) $4\sqrt{3}a$.

Lời giải.

Ta có I trung điểm SA là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC\Rightarrow\widehat{SBA}=\widehat{SCA}=90^\circ$. Dựng hình chữ nhật $ABDC$.

Mà $\begin{cases}AB\perp BD\\AB\perp SB\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SBD)\Rightarrow AB\perp SD$ (1)

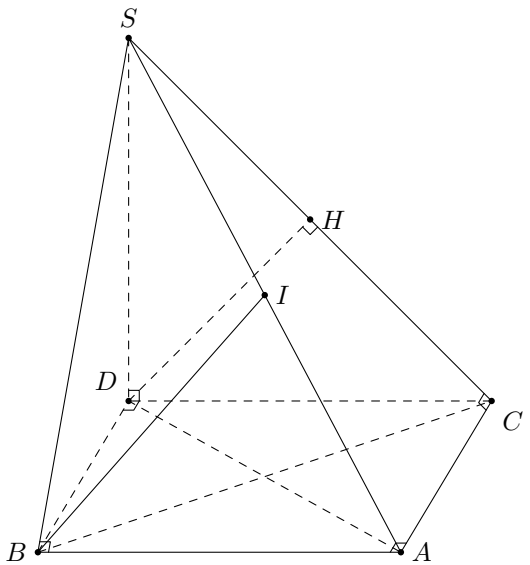
Và $\begin{cases}AC\perp CD\\AC\perp SC\end{cases}\Rightarrow AC\perp(SCD)\Rightarrow AC\perp SD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $SD\perp(ABCD)$.

Mặt khác $\begin{cases}(SAB)\cap(ABC)=AB\\SB\perp AB, SB\subset(SAB)\\BD\perp AB, BD\subset(ABC)\end{cases}\Rightarrow$

$\left(\widehat{(SAB),(ABC)}\right)=\widehat{(SB,BD)}=\widehat{SBD}=30^\circ$.

Xét tam giác SBD có $\tan\widehat{SBD}=\dfrac{SD}{BD}\Leftrightarrow\tan 30^\circ=\dfrac{SD}{4\sqrt{3}}\Rightarrow SD=4\sqrt{3}a\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}=4a$.



Đặt $AB=x$. Ta có $IB=\dfrac{1}{2}SA=\dfrac{1}{2}\sqrt{DB^2+DC^2+SD^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{64a^2+x^2}$.

Gọi H là hình chiếu của D lên $SC \Rightarrow DH=\dfrac{SD\cdot DC}{\sqrt{SD^2+DC^2}}=\dfrac{4ax}{\sqrt{16a^2+x^2}}$.

Mặt khác $\sin(IB,(SAC))=\dfrac{\mathrm{d}(B,(SAC))}{IB}=\dfrac{\mathrm{d}(D,(SAC))}{IB}=\dfrac{DH}{IB}\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{21}}{7}a=\dfrac{\dfrac{4ax}{\sqrt{16a^2+x^2}}}{\dfrac{1}{2}\sqrt{64a^2+x^2}}$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\sqrt{3}a\Leftrightarrow AB=4\sqrt{3}a\\ x=\dfrac{8\sqrt{3}a}{3}\Leftrightarrow AB=\dfrac{8\sqrt{3}a}{3}.\end{array}\right.$$

Với $AB=\dfrac{8\sqrt{3}a}{3}$, $SB=8a$, ta tính được $\tan\widehat{ASB}=\dfrac{AB}{SB}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\widehat{ASB}=30^\circ$(loại).

Với $AB=4\sqrt{3}a$, $SB=8a$, ta tính được $\tan\widehat{ASB}=\dfrac{AB}{SB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\widehat{ASB}>30^\circ$(nhận).

Mà $\begin{cases}AB\perp AC\\ AB\perp SB\end{cases}\Rightarrow\mathrm{d}(AC,SB)=AB=4\sqrt{3}a.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=2a$, $AC=a$, $\widehat{SBA}=\widehat{SCA}=90^\circ$, góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) bằng 45°. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{3}$. (B) $a^3\sqrt{5}$. (C) $\dfrac{2a^3\sqrt{5}}{3}$. (D) $2a^3\sqrt{5}$.

Lời giải.

Trong mặt phẳng (ABC) dựng hình chữ nhật $ABHC$.

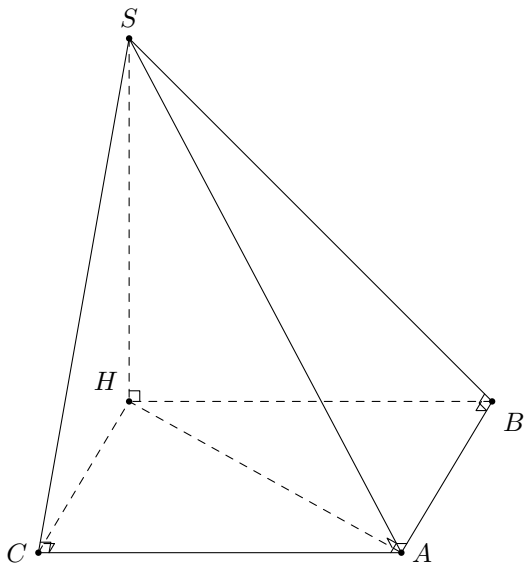
Khi đó ta có $\begin{cases}AB\perp HB\\ AB\perp SB\end{cases}\Rightarrow AB\perp SH\,(1)$ và

$\begin{cases}AC\perp CH\\ AC\perp SC\end{cases}\Rightarrow AC\perp SH\,(2).$

Từ (1) và (2) suy ra $SH\perp(ABC)$.

Nên ta có HA là hình chiếu vuông góc của SA trên mặt phẳng (ABC).

Do đó góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) bằng góc giữa hai đường thẳng SA, HA và bằng góc $\widehat{SAH}$ nên suy ra $\widehat{SAH}=45^\circ$.



Theo cách dựng trên ta có

$HA=BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=a\sqrt{5}$ và tam giác SAH vuông cân tại H nên $SH=HA=a\sqrt{5}$.

Ta cũng có $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC=\dfrac{1}{2}a\cdot 2a=a^2$.

Vậy $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SH\cdot S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{3}\cdot a\sqrt{5}\cdot a^2=\dfrac{a^3\sqrt{5}}{3}$.

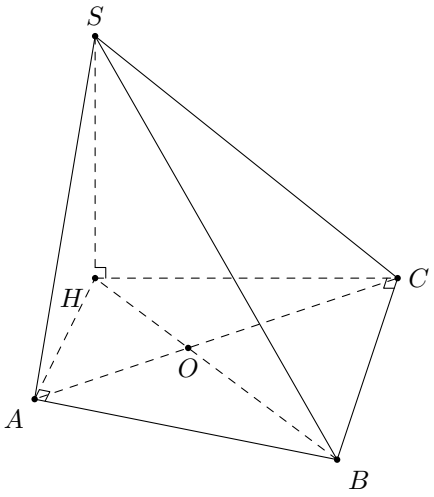
Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SB = 2\sqrt{3}a$, $AB = 2\sqrt{2}a$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$, $\left(\widehat{SB,(ABC)}\right) = 30^\circ$, $\left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right) = 60^\circ$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a bằng

(A) $\dfrac{16\sqrt{6}a^3}{27}$. (B) $\dfrac{8\sqrt{6}a^3}{27}$. (C) $\dfrac{8\sqrt{3}a^3}{3}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{6}a^3}{3}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$.



Ta có $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HAB} = \widehat{HCB} = 90^\circ$.

Mặt khác $\left(\widehat{SB,(ABC)}\right) = 30^\circ \Leftrightarrow \left(\widehat{SB,HB}\right) = \widehat{SBH} = 30^\circ$.

Trong tam giác vuông SHB có

$SH = SB \cdot \sin 30^\circ = a\sqrt{3}, HB = SB \cdot \cos 30^\circ = 3a$,

$HA = \sqrt{HB^2 - AB^2} = a$.

Ta có $\left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right) = 60^\circ \Leftrightarrow \left(\widehat{HC,SC}\right) = \widehat{SCH} = 60^\circ$

$\Rightarrow HC = SH \cdot \cot 60^\circ = a; CB = 2a\sqrt{2}$.

Gọi O là giao điểm của AC và HB, trong tam giác HAB có

$$\frac{1}{AO^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{9}{8a^2} \Rightarrow AO = \frac{2\sqrt{2}a}{3} \Rightarrow OB = \frac{8a}{3}.$$

Vậy thể tích $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}OA \cdot OB \cdot SH = \dfrac{16\sqrt{6}a^3}{27}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

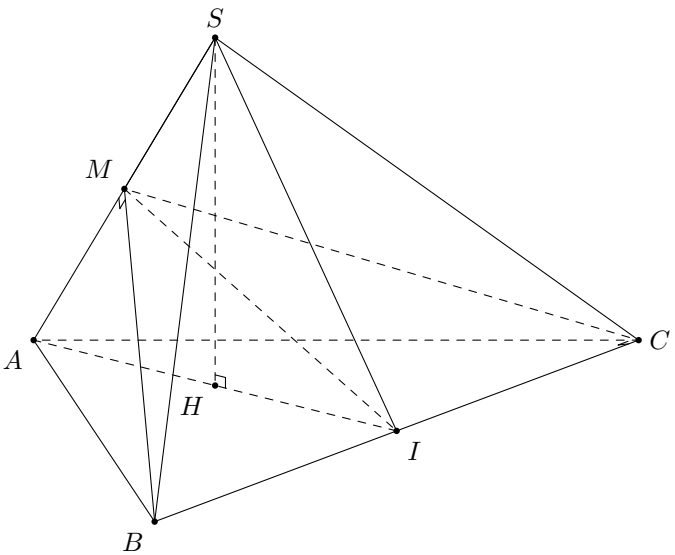
(A) $a^3\sqrt{3}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Dễ thấy $\triangle SAB = \triangle SAC \Rightarrow SB = SC$.

Gọi I là trung điểm của BC.

Ta có $\begin{cases} AI \perp BC \\ SI \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI)$.



Kẻ $SH \perp AI \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Vậy $\left(\widehat{SA,(ABC)}\right) = \widehat{SAH} = \widehat{SAI} = 60^\circ$.

Kẻ $BM \perp SA$, do $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp SA$, suy ra $SA \perp (MBC)$.

Tam giác IMA vuông tại M có $IA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\cos 60^\circ = \dfrac{AM}{AI} \Rightarrow AM = AI \cdot \cos 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}a}{4}$.

Lại có $\sin 60^\circ = \dfrac{IM}{AI} \Rightarrow IM = AI \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{3a}{4}$.

Tam giác SAB vuông tại B, BM là đường cao: $AB^2 = AM \cdot SA \Rightarrow SA = \dfrac{AB^2}{AM} = \dfrac{4a}{\sqrt{3}}$.

Xét $\triangle SAI$ có $SH \cdot AI = IM \cdot SA \Rightarrow SH = \dfrac{IM \cdot SA}{AI} = 2a$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3} 2a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

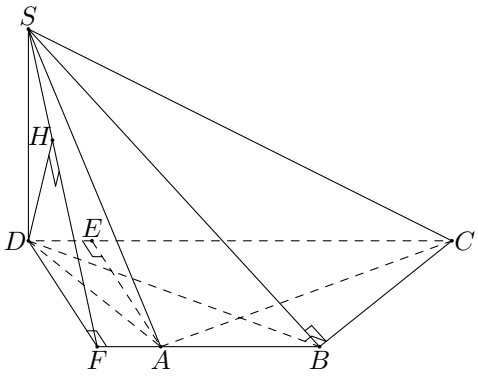
Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = BC = a$, $\widehat{ABC} = 120^\circ$, cosin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) nằm trên tia $Cx \parallel AB$ (cùng phía với A trong nửa mặt phẳng bờ BC) và nhìn cạnh AC dưới góc 60°.

(A) a^3. (B) $\dfrac{a^3}{3}$. (C) $\dfrac{a^3}{2}$. (D) $\dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải.

Gọi D là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC).



Theo giả thiết ta có $CD \parallel AB$, suy ra $ABCD$ là hình thang.

Mặt khác, ta có $\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = 180^\circ$, suy ra $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

Do đó $ABCD$ là hình thang cân, hơn nữa $ABCD$ là nửa lục giác đều.

Đặt $\varphi = ((SAB),(SBC)) \Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{\mathrm{d}(C,(SAB))}{\mathrm{d}(C,SB)}$. (1)

Vẽ $AE \perp CD$, $DF \perp AB$ và $DH \perp SF$.

Ta có $\begin{cases} AB \perp DF \\ AB \perp SD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SDF) \Rightarrow AB \perp DH$.

Ta có $\begin{cases} DH \perp AB \\ DH \perp SF \end{cases} \Rightarrow DH \perp (SAB) \Rightarrow \mathrm{d}(D,(SAB)) = DH$.

Vì $CD \parallel AB$ nên $\mathrm{d}(C,(SAB)) = \mathrm{d}(D,(SAB)) = DH$.

Vì $ABCD$ là nửa lục giác đều nên $BC \perp BD$, mặt khác $BC \perp SD$ nên $BC \perp (SBD)$, do đó $BC \perp SB$, suy ra $\mathrm{d}(C,SB) = CB = a$.

Đặt $SD = h$ $(h > 0)$.

Ta có $DF = AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{BC^2 - \dfrac{AB^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét $\triangle SDF$ vuông tại D có DH là đường cao, ta có $DH = \dfrac{SD \cdot DF}{\sqrt{SD^2 + DF^2}} = \dfrac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2 + 3a^2}}$.

Thay vào (1) ta có

$$\sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \frac{DH}{CB} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{15}}{5} = \frac{h\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2 + 3a^2}} \Leftrightarrow 15h^2 = 45a^2 \Leftrightarrow h = a\sqrt{3} \Rightarrow SD = a\sqrt{3}.$$

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$$V=\frac{1}{3}\cdot SD\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}\cdot SD\cdot\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\widehat{ABC}=\frac{a^3}{4}.$$

Chọn đáp án (D) □

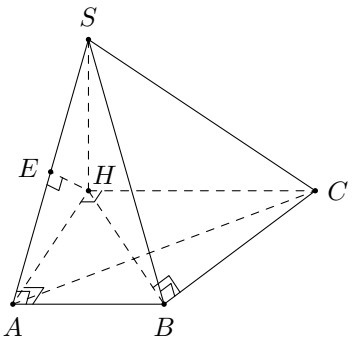
Câu 48. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ABC}=135^\circ$, $AB=a$, $BC=a\sqrt{2}$, $(AC,(SAB))=\alpha$ thỏa mãn $\sin\alpha=\frac{1}{5}$, $\widehat{SAB}=\widehat{SBC}=90^\circ$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ tính theo a bằng

(A) $\frac{a^3}{12}$. (B) $\frac{a^3}{4}$. (C) $\sqrt{5}a^3$. (D) $\frac{\sqrt{5}a^3}{3}$.

Lời giải.

Dựng $SH\perp(ABC)$.

Ta có $\begin{cases}AB\perp SA\\AB\perp SH\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SAH)\Rightarrow AB\perp AH$.



Tương tự $BC\perp BH$.

Ta có $AB=a$, $\widehat{ABH}=45^\circ$, suy ra $\triangle HAB$ vuông cân tại A, suy ra $AH=AB=a$, $HB=a\sqrt{2}$.

Xét $\triangle BCH$ vuông tại B có $BH=BC$ nên $\triangle BCH$ vuông cân tại B.

Do đó $\widehat{AHC}=\widehat{AHB}+\widehat{BHC}=90^\circ\Rightarrow HC\perp AH\Rightarrow HC\parallel AB$.

Suy ra $\mathrm{d}(C,(SAB))=\mathrm{d}(H,(SAB))$.

Xét tam giác ABC, ta có $AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\widehat{ABC}=5a^2\Rightarrow AC=a\sqrt{5}$.

Vẽ $HE\perp SA$.

Vì $AB\perp(SAH)$ nên $AB\perp HE$.

Ta có $\begin{cases}HE\perp AB\\HE\perp SA\end{cases}\Rightarrow HE\perp(SAB)\Rightarrow\mathrm{d}(H,(SAB))=HE\Rightarrow\mathrm{d}(C,(SAB))=HE$.

Đặt $SH=h$ $(h>0)$.

Xét tam giác SAH vuông tại H có HE là đường cao, ta có $HE=\dfrac{SH\cdot HA}{\sqrt{SH^2+HA^2}}=\dfrac{ah}{\sqrt{h^2+a^2}}$.

Ta có $\sin\alpha=\dfrac{\mathrm{d}(C,(SAB))}{AC}=\dfrac{HE}{AC}\Rightarrow\dfrac{1}{5}=\dfrac{h}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{h^2+a^2}}\Rightarrow 4h^2=a^2\Rightarrow h=\dfrac{a}{2}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot BA\cdot BC\cdot\sin\widehat{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot a\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a^2}{2}$.

Vậy thể tích khối tứ diện $S.ABC$ là

$$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}\cdot SH\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a^2}{2}=\frac{a^3}{12}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC cân tại A, cạnh $AB=a$, góc $\widehat{BAC}=120^\circ$. Tam giác SAB vuông tại B, tam giác SAC vuông tại C. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 60°. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

(A) $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (B) $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (C) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (D) $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.

Gọi J là trung điểm SB, suy ra $JA = JC = JB$.

Khối chóp $J.ABC$ là khối chóp có cạnh bên bằng nhau nên hình chiếu vuông góc của J lên (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp G của tam giác ABC.

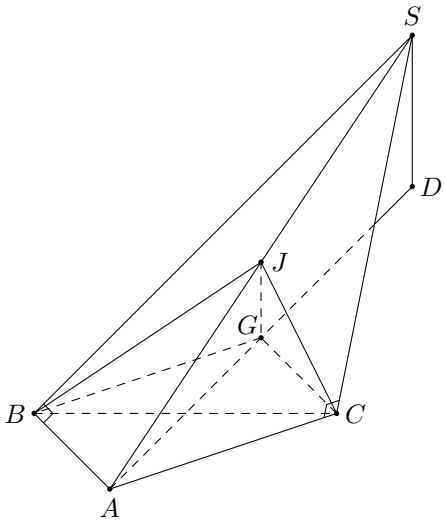
Vì tam giác ABC cân tại A, $AB = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$ nên $ABGC$ là hình thoi.

Gọi D là điểm đối xứng của A qua G.

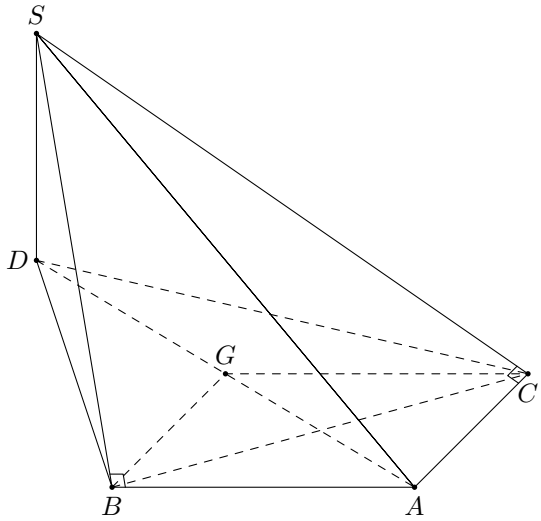
Khi đó G là trung điểm AD.

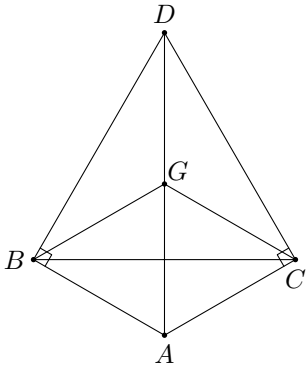
Ta có JG là đường trung bình tam giác SBD nên $JG \parallel SD$.

Vì $\begin{cases} JG \parallel SD \\ JG \perp (ABC) \end{cases}$ nên $SD \perp (ABC)$.



Vẽ lại hình và vẽ riêng phần đáy cho dễ nhìn.





Ta có $GA = GB = GD$ nên tam giác ABD vuông tại B, suy ra $AB \perp BD$.

Ta có $\begin{cases} (SAB) \cap (ABC) = AB \\ SB \subset (SAB), SB \perp AB \\ BD \subset (ABC), BD \perp AB \end{cases} \Rightarrow ((SAB), (ABC)) = \widehat{SBD} \Rightarrow \widehat{SBD} = 60^\circ$.

Xét tam giác ABD có $AB = a$, $AD = 2AG = 2AB = 2a$, suy ra $BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SBD có $\tan \widehat{SBD} = \dfrac{SD}{BD} \Rightarrow SD = BD \tan \widehat{SBD} = 3a$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \widehat{BAC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3} \cdot SD \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot 3a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = 2a$, $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng 60°. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

(A) $\dfrac{2a^3}{3}$. (B) $\dfrac{a^3}{3}$. (C) $4a^3$. (D) $\dfrac{4a^3}{3}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm SA, suy ra $IA = IC = IB$.

Khối chóp $I.ABC$ là khối chóp có cạnh bên bằng nhau nên hình chiếu vuông góc của I lên (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp G của tam giác ABC.

Vì tam giác ABC vuông cân nên G là trung điểm BC.

Gọi D là điểm đối xứng của A qua G.

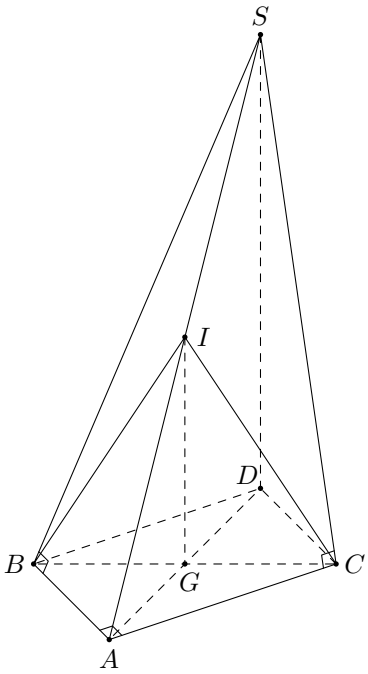
Khi đó G là trung điểm AD.

Ta có IG là đường trung bình tam giác SAD nên $IG \parallel SD$.

Vì $\begin{cases} IG \parallel SD \\ IG \perp (ABC) \end{cases}$ nên $SD \perp (ABC)$.

Dễ thấy $ABDC$ là hình vuông.

Đến đây ta có thể vẽ lại hình cho dễ nhìn.

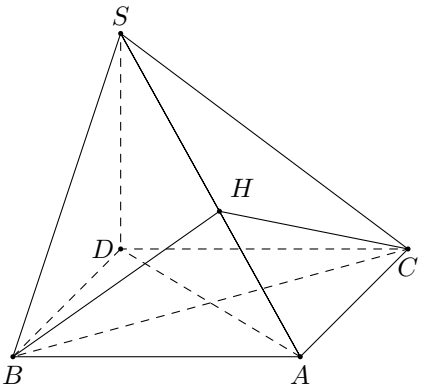


Vẽ $BH \perp SA$.

Ta có $\begin{cases} AD \perp BC \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SA$.

Ta có $\begin{cases} SA \perp BH \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (BCH) \Rightarrow SA \perp CH$.

Vì $\begin{cases} (SAB) \cap (SAC) = SA \\ BH \subset (SAB) \\ BH \perp SA \\ CH \subset (SAC) \\ CH \perp SA \end{cases}$ nên $((SAB), (SAC)) = (BH, CH)$.



Suy ra $\widehat{BHC} = 60^\circ$ hoặc $\widehat{BHC} = 120^\circ$.

Ta có $\triangle SBA = \triangle SCA \Rightarrow BH = CH$.

Trường hợp 1. Nếu $\widehat{BHC} = 60^\circ$ thì $\triangle BCH$ đều, suy ra $BH = BC > BA$: vô lý vì $BH < BA$.

Trường hợp 2. Nếu $\widehat{BHC} = 120^\circ$ thì $BH = \dfrac{BC}{\sqrt{3}} = \dfrac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow SB = \dfrac{BH \cdot BA}{\sqrt{BA^2 - BH^2}} = 2a\sqrt{2}$.

Ta có $SD = \sqrt{SB^2 - BD^2} = 2a$.

Vậy thể tích $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3} \cdot SD \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot 2a \cdot \dfrac{1}{2} \cdot (2a)^2 = \dfrac{4a^3}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Dạng 10. Cực trị khối đa diện

Câu 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = x$, $AD = 1$. Biết rằng góc giữa đường

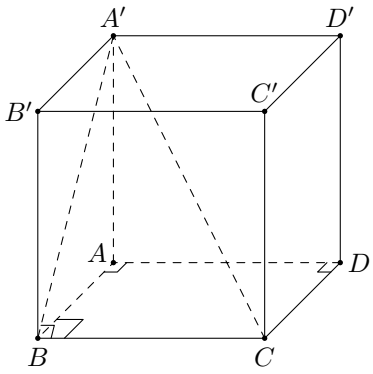
thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng 30°. Tìm giá trị lớn nhất $V_{\max}$ của thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

(A) $V_{\max}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. (B) $V_{\max}=\dfrac{1}{2}$. (C) $V_{\max}=\dfrac{3}{2}$. (D) $V_{\max}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} CB\perp AB \\ CB\perp AA' \end{cases} \Rightarrow CB\perp (ABB'A')$.

Ta có $\begin{cases} A'C\cap (ABB'A')=A' \\ C\in A'C \\ CB\perp (ABB'A') \end{cases} \Rightarrow (A'C,(ABB'A'))=\widehat{CA'B}=30^\circ$.



Xét tam giác $A'BC$ vuông tại B, ta có

$$\tan\widehat{CA'B}=\frac{BC}{A'B}\Rightarrow A'B=\frac{BC}{\tan\widehat{CA'B}}=\sqrt{3}.$$

Xét tam giác $A'AB$ vuông tại A, ta có

$$AA'=\sqrt{A'B^2-AB^2}=\sqrt{3-x^2}.$$

Thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là $V=AA'\cdot S_{ABCD}=x\sqrt{3-x^2}$, với $x\in\left(0;\sqrt{3}\right)$.

Ta có $x\sqrt{3-x^2}\leqslant\dfrac{x^2+3-x^2}{2}=\dfrac{3}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $x=\sqrt{3-x^2}\Leftrightarrow\begin{cases} x\geqslant 0 \\ x^2=3-x^2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ x=-\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\in\left(0;\sqrt{3}\right)$.

Vậy $V_{\max}=\dfrac{3}{2}$ khi $x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

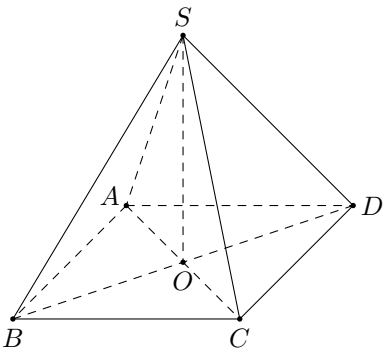
Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ đều, có cạnh bên bằng 1. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ bằng

(A) $\dfrac{4}{27}$. (B) $\dfrac{1}{6}$. (C) $\dfrac{4\sqrt{3}}{27}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $ABCD$, suy ra $SO \perp (ABCD)$.



Đặt $AB = 2x$ $(x > 0)$.

Ta có $OD = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2} = x\sqrt{2}$.

Xét tam giác SOD vuông tại O, ta có

$$SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{1 - 2x^2}.$$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{4}{3} \cdot x^2\sqrt{1 - 2x^2}, \text{với } x \in \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Ta có

$$\frac{4}{3} \cdot x^2\sqrt{1 - 2x^2} = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{x^2 \cdot x^2 \cdot (1 - 2x^2)} \leqslant \frac{4}{3} \cdot \sqrt{\left(\frac{x^2 + x^2 + 1 - 2x^2}{3}\right)^3} = \frac{4\sqrt{3}}{27}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x^2 = x^2 = 1 - 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \in \left(0; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Vậy thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ là $\dfrac{4\sqrt{3}}{27}$.

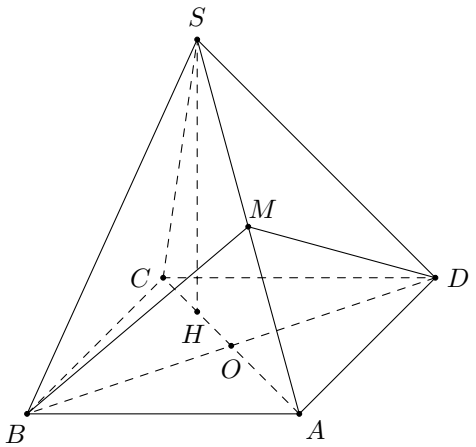
Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = x$, các cạnh còn lại của hình chóp đều bằng 2. Giá trị của x để thể tích khối chóp đó lớn nhất là

(A) $2\sqrt{2}$. (B) $\sqrt{2}$. (C) $\sqrt{7}$. (D) $\sqrt{6}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$ và M là trung điểm của SA. Vì $SB = SC = SD$ nên chân đường cao H hạ từ S xuống mặt đáy là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$ và do đó H nằm trên AC. Ta có



$$\begin{cases} SA \perp BM \\ SA \perp DM \end{cases} \Rightarrow SA \perp (BDM) \Rightarrow SA \perp OM.$$

Mà OM là đường trung bình của $\triangle SAC$ nên $OM \parallel SC$. Do đó $SA \perp SC$ và $\triangle SAC$ vuông tại S. Khi đó

$$AC = \sqrt{SC^2 + SA^2} = \sqrt{4 + x^2};\ SH = \frac{SA \cdot SC}{AC} = \frac{2x}{\sqrt{4 + x^2}}.$$

$$BD = 2OB = 2\sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{4AB^2 - AC^2} = \sqrt{12 - x^2}.$$

Suy ra

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot x\sqrt{12 - x^2} \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2 + 12 - x^2}{2} = 2.$$

Vậy thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ bằng 2. Dấu bằng xảy ra khi $x = \sqrt{12 - x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{6}$.

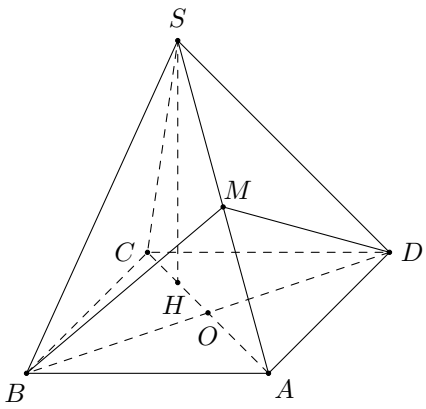
Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Biết $SA = x$ $\left(0 < x < \sqrt{3}\right)$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Tìm x để thể tích của khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

(A) 2. (B) $2\sqrt{2}$. (C) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. (D) $\sqrt{6}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$ và M là trung điểm của SA. Vì $SB = SC = SD$ nên chân đường cao H hạ từ S xuống mặt đáy là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$ và do đó H nằm trên AC. Ta có



$$\begin{cases} SA \perp BM \\ SA \perp DM \end{cases} \Rightarrow SA \perp (BDM) \Rightarrow SA \perp OM.$$

Mà OM là đường trung bình của $\triangle SAC$ nên $OM \parallel SC$. Do đó $SA \perp SC$ và $\triangle SAC$ vuông tại S. Khi đó

$$AC = \sqrt{SC^2 + SA^2} = \sqrt{1 + x^2};\ SH = \frac{SA \cdot SC}{AC} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

$$BD = 2OB = 2\sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{4AB^2 - AC^2} = \sqrt{3 - x^2}.$$

Suy ra

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot SH = \frac{1}{6} \cdot x\sqrt{3 - x^2} \le \frac{1}{6} \cdot \frac{x^2 + 3 - x^2}{2} = \frac{1}{4}.$$

Vậy thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{1}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = \sqrt{3 - x^2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

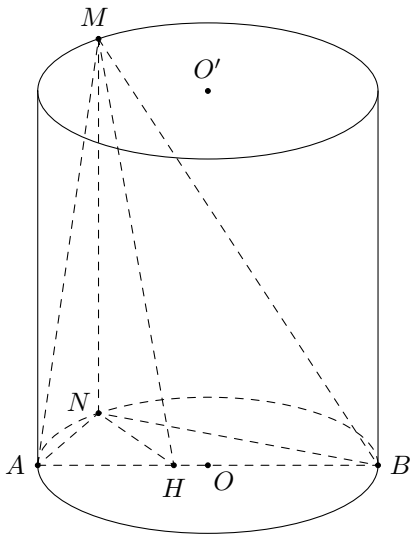
Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Cho hình trụ có hai đường tròn đáy là $(O; R)$ và $(O'; R)$, chiều cao cuả hình trụ là $R\sqrt{3}$. Giả sử AB là một đường kính cố định trên đường tròn (O) và M là điểm di động trên đường tròn (O'). Hỏi diện tích của tam giác MAB đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

(A) $2R^2$. (B) $4R^2$. (C) $R^2\sqrt{3}$. (D) $2R^2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi N là hình chiếu của M lên mặt phẳng đáy và H là hình chiếu của N lên AB.



Khi đó ta có $\begin{cases} AB \perp NH \\ AB \perp MN \end{cases} \Rightarrow AB \perp (MNH) \Rightarrow AB \perp MH.$

Suy ra

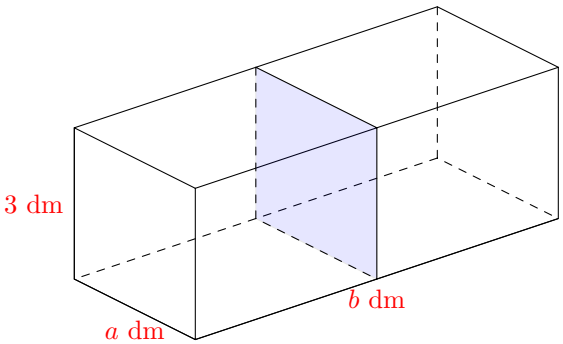
$$\begin{aligned} S_{\triangle MAB} &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MH \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \sqrt{MN^2 + NH^2} \\ &= R \cdot \sqrt{\left(R\sqrt{3}\right)^2 + NH^2} \\ &\le R \cdot \sqrt{3R^2 + ON^2} \\ &= R \cdot \sqrt{3R^2 + R^2} \\ &= 2R^2. \end{aligned}$$

Vậy diện tích $\triangle MAB$ lớn nhất bằng $2R^2$, đạt được khi $H \equiv O$, tức là $\triangle MAB$ cân tại M.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6.

Người ta muốn thiết kế một bể cá bằng kính không có nắp với thể tích 72 dm^3, chiều cao là 3 dm. Một vách ngăn ở giữa, chia bể cá thành hai ngăn, với các kích thước a, b như hình vẽ. Tính a, b để bể cá tốn ít nguyên vật liệu nhất. Coi bề dày các tấm kính như nhau và không ảnh hưởng đến thể tích bể cá.



(A) $a = \sqrt{24}$ dm; $b = \sqrt{54}$ dm.

(B) $a = 6$ dm; $b = 4$ dm.

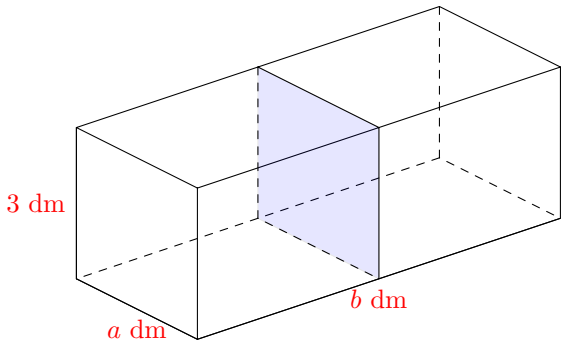
(C) $a = 3\sqrt{2}$ dm; $b = 4\sqrt{2}$ dm.

(D) $a = 4$ dm; $b = 6$ dm.

Lời giải.

Vì thể tích của bể cá bằng 72 dm^3 nên ta có

$$a \cdot b \cdot 3 = 72 \Leftrightarrow ab = 24 \Leftrightarrow b = \frac{24}{a}.$$



Phần kính để làm bể cá gồm có 4 mặt bên, mặt đáy và phần vách ngăn ở giữa. Do đó ta có tổng diện tích kính là

$$\begin{aligned} S &= ab + 3 \cdot 3a + 2 \cdot 3b \\ &= 24 + 9a + 6b \\ &= 24 + 9a + 6 \cdot \frac{24}{a} \\ &\geq 24 + 2\sqrt{9a \cdot \frac{144}{a}} \\ &= 96. \end{aligned}$$

Vậy diện tích ít nhất cần làm bể cá là 96 dm^2. Dấu bằng xảy ra khi $a = 4$ dm và $b = 6$ dm.

Chọn đáp án (D) □

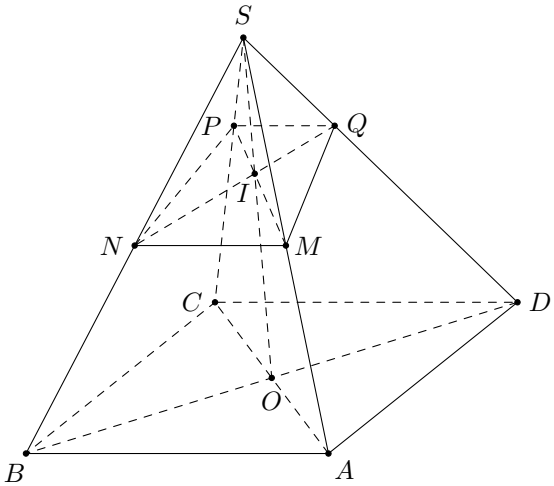
Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Một mặt phẳng không qua S và cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q thỏa mãn $\overrightarrow{SA} = 2\overrightarrow{SM}$, $\overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SP}$. Tính tỉ số $\dfrac{SB}{SN}$ khi biểu thức $T = \left(\dfrac{SB}{SN}\right)^2 + 4 \cdot \left(\dfrac{SD}{SQ}\right)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(A) $\dfrac{SB}{SN} = \dfrac{11}{2}$. (B) $\dfrac{SB}{SN} = 5$. (C) $\dfrac{SB}{SN} = 4$. (D) $\dfrac{SB}{SN} = \dfrac{9}{2}$.

Lời giải.

Đặt $\dfrac{SA}{SM} = a$; $\dfrac{SB}{SN} = b$; $\dfrac{SC}{SP} = c$; $\dfrac{SD}{SQ} = d$. Ta sẽ chứng minh

$$a + c = b + d.$$



Thật vậy, gọi I là giao điểm của 3 đường thẳng MP, NQ và SO. Với kí hiệu diện tích tam giác ABC là $[ABC]$, ta có

$$\begin{cases} \dfrac{[SNI]}{[SBO]} = \dfrac{SN}{SB} \cdot \dfrac{SI}{SO} \\ \dfrac{[SQI]}{[SDO]} = \dfrac{SQ}{SD} \cdot \dfrac{SI}{SO}. \end{cases}$$

Vì $[SBO] = [SDO] = \dfrac{1}{2}[SBD]$ nên cộng hai vế lại ta có

$$2 \cdot \frac{[SNQ]}{[SBD]} = \frac{SI}{SO}\left(\frac{SN}{SB} + \frac{SQ}{SD}\right) \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SQ}{SD} = \frac{SI}{SO} \cdot \frac{SN \cdot SD + SQ \cdot SB}{SB \cdot SD} \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{SO}{SI} = \frac{SB}{SN} + \frac{SD}{SQ}.$$

Tương tự, ta cũng có được $2 \cdot \dfrac{SO}{SI} = \dfrac{SA}{SM} + \dfrac{SC}{SP}$. Từ đó suy ra $\dfrac{SA}{SM} + \dfrac{SC}{SP} = \dfrac{SB}{SN} + \dfrac{SD}{SQ}$.

Quay trở lại bài toán, ta có $a=2$ và $c=3$ nên $b+d=a+c=5$. Suy ra

$$T=b^2+4d^2=b^2+4(5-b)^2=5\left(b-4\right)^2+20\geq 20.$$

Vậy $T_{\min}=20$ đạt được khi $b=4$.

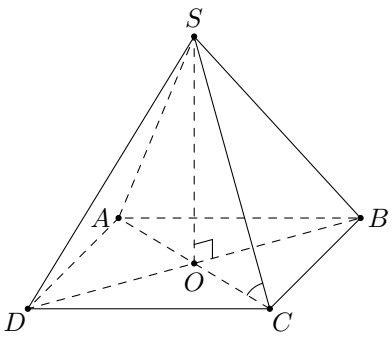
Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Một kim tự tháp Ai Cập có hình dạng là một khối chóp tứ giác đều có độ dài cạnh bên là một số thực dương không đổi. Gọi α là góc giữa cạnh bên của kim tự tháp và mặt đáy. Khi thể tích của kim tự tháp lớn nhất, tính $\sin\alpha$.

(A) $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. (B) $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (C) $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. (D) $\sin\alpha=\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Đặt $SC=c$ với $a>0$. Ta có $\begin{cases}SO\perp(ABCD)\\ SC\cap(ABCD)=C\end{cases}$ suy ra $\widehat{SCO}=\alpha$.



Mặt khác $OC=a\cos\alpha$; $SO=a\sin\alpha$.

$AC=2OC=2a\cos\alpha$; $AB=\dfrac{AC}{\sqrt{2}}=a\sqrt{2}\cos\alpha$;

$S_{ABCD}=AB^2=2a^2\cos^2\alpha$.

$V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot SO\cdot S_{ABCD}=\dfrac{2}{3}a^3\sin\alpha\cos^2\alpha=\dfrac{2}{3}a^3\sin\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right)$

Xét hàm $y=t\left(1-t^2\right)$ với $\begin{cases}t=\sin\alpha\\ 0<t<1\end{cases}$

Lập bảng biến thiên ta tìm được $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ thì hàm số y đạt giá trị lớn nhất.

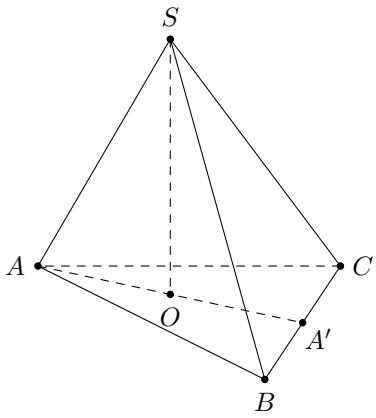
Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=AB=AC=a$ và $BC=2x$. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của hình chóp $S.ABC$.

(A) $\dfrac{a^3}{8}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. (D) $\dfrac{a^3}{6}$.

Lời giải.

Gọi O là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC).



Vì $SA = SB = SC$ nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Tam giác ABC cân tại A. Gọi A' là trung điểm của BC. Khi đó AA' là đường trung trực của tam giác ABC nên điểm O nằm trên đường thẳng AA'.

Ta có $AA' = \sqrt{AB^2 - BA'^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$

nên $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC \cdot AA' = \dfrac{1}{2} \cdot 2x\sqrt{a^2 - x^2} = x\sqrt{a^2 - x^2}$.

Lại có $S_{ABC} = \dfrac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R}$

$\Rightarrow OA = R = \dfrac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{ABC}} = \dfrac{a^2 \cdot 2x}{4x\sqrt{a^2 - x^2}} = \dfrac{a^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Trong tam giác vuông SAO, ta có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^4}{4\left(a^2 - x^2\right)}} = \dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{3a^2 - 4x^2}{a^2 - x^2}}$.

Thể tích $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{3a^2 - 4x^2}{a^2 - x^2}} \cdot x\sqrt{a^2 - x^2} = \dfrac{a}{12} \cdot 2x\sqrt{3a^2 - 4x^2}$.

Mặt khác $2x\sqrt{3a^2 - 4x^2} \le \dfrac{4x^2 + 3a^2 - 4x^2}{2} = \dfrac{3a^2}{2}$.

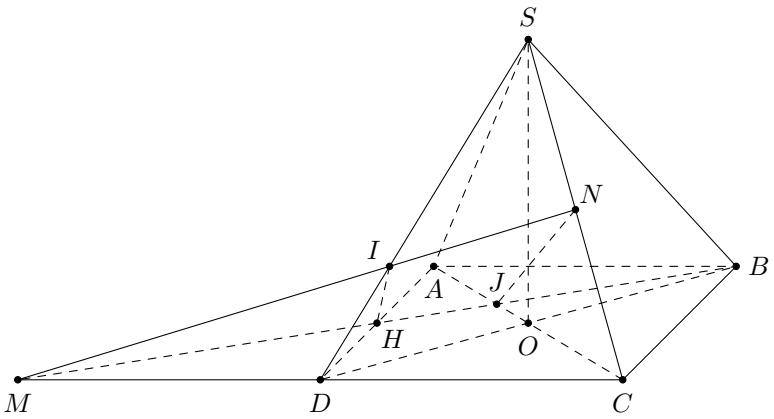
Do đó $V_{S.ABC} \le \dfrac{a}{12} \cdot \dfrac{3}{2}a^2 = \dfrac{a^3}{8}$. Vậy $V_{\max} = \dfrac{a^3}{8}$ khi $2x = \sqrt{3a^2 - 4x^2} \Leftrightarrow x = a\sqrt{\dfrac{3}{8}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với đáy một góc $60°$, gọi M là điểm đối xứng với C qua D; N là trung điểm của SC, mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần. Gọi (H_1) là phần đa diện chứa điểm S có thể tích V_1; (H_2) là phần đa diện còn lại có thể tích V_2. Tính tỉ số thể tích $\dfrac{V_1}{V_2}$.

(A) $\dfrac{31}{5}$. (B) $\dfrac{7}{3}$. (C) $\dfrac{7}{5}$. (D) $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.



Áp dụng tỉ số thể tích cho khối chóp $M.CNB$ ta có

$$\frac{V_{MDIH}}{V_{MCNB}} = \frac{MD}{MC} \cdot \frac{MI}{MN} \cdot \frac{MH}{MB} = \frac{1}{4} \cdot \frac{MI}{MN}$$

Định lý menelaus cho tam giác MNC với cát tuyến DIS ta có

$$\frac{SN}{SC}\cdot\frac{CD}{DM}\cdot\frac{MI}{IN}=1\Leftrightarrow\frac{IN}{IM}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{MI}{MN}=\frac{2}{3}.$$

Vậy $\dfrac{V_{MDIH}}{V_{MCNB}}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{3}\Rightarrow V_2=\dfrac{5}{6}V_{MCNB}$.

Mà $V_{MCNB}=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}\left(N;(MBC)\right)\cdot S_{\triangle MBC}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot SO\cdot DC\cdot BC=\dfrac{1}{2}V_{S.ABCD}$.

$\Rightarrow V_2=\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{2}V_{S.ABCD}=\dfrac{5}{12}V_{S.ABCD}\Rightarrow V_1=\dfrac{7}{12}V_{S.ABCD}$.

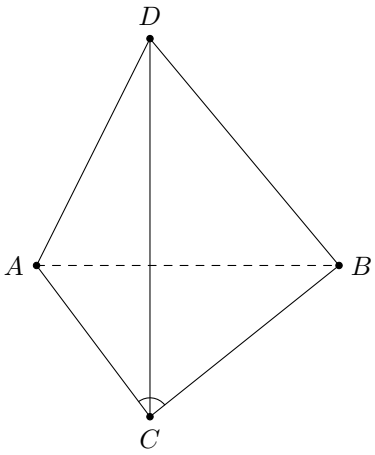
Vậy $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{7}{5}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích $V=\dfrac{1}{6}$, góc $\widehat{ABC}=45^\circ$ và $AD+BC+\dfrac{AC}{\sqrt{2}}=3$. Hỏi độ dài cạnh CD?

(A) $2\sqrt{3}$. (B) $\sqrt{3}$. (C) $\sqrt{2}$. (D) 2.

Lời giải.



$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot\mathrm{d}\left(D,(ABC)\right)\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot CA\cdot CB\sin 45^\circ\cdot\mathrm{d}\left(D,(ABC)\right)\\&=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot CA\cdot CB\cdot\mathrm{d}\left(D,(ABC)\right)\le\frac{1}{6}\cdot\frac{CA\cdot CB\cdot AD}{\sqrt{2}}(1)\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương AD, BC, $\dfrac{AC}{\sqrt{2}}$ ta có

$$\frac{AC}{\sqrt{2}}\cdot BC\cdot AD\le\left(\frac{\frac{AC}{\sqrt{2}}+BC+AD}{3}\right)^3.$$

Do đó $V\le\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{\frac{AC}{\sqrt{2}}+BC+AD}{3}\right)^3=\dfrac{1}{6}$ (2)

Mặt khác ta có $V=\dfrac{1}{6}$, do đó để thõa mãn yêu cầu bài toán thì từ (1) và (2), đẳng thức phải xảy ra, tức là

$$\begin{cases}DA\perp(ABC)\\\dfrac{AC}{\sqrt{2}}=BC=AD=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}CD=\sqrt{AC^2+DA^2}\\BC=1,AD=1,AC=\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow CD=\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C (A, B, C không trùng với gốc tọa độ). Thể tích tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

(A) $\dfrac{81}{2}$. (B) $\dfrac{243}{2}$. (C) $\dfrac{81}{6}$. (D) 243.

Lời giải.

Ta có $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ $(a,\ b,\ c>0)$
$(P)\colon \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$; $M(9;1;1)\in(P)\Rightarrow \dfrac{9}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$
$1=\dfrac{9}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{9}{a}\cdot\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{1}{c}}\Rightarrow V_{O.ABC}=abc\geq 243.$
Đẳng thức xảy ra khi $a=27$, $b=c=3$.

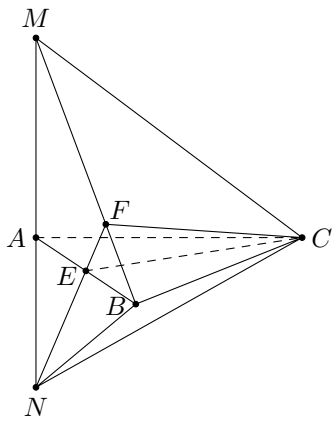
Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 2. Trên đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm M sao cho $AM=x$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của C lên AB, MB. Đường thẳng qua E, F cắt d tại N. Xác định x để thể tích khối tứ diện $BCMN$ nhỏ nhất.

(A) $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (B) $x=1$. (C) $x=2$. (D) $x=\sqrt{2}$.

Lời giải.

Do $\begin{cases} MB\perp FC \\ MB\perp EC \end{cases}\Rightarrow MB\perp(EFC)\Rightarrow FB\perp EF.$



Xét các tam giác vuông $\triangle NAE$, $\triangle BFE$, $\triangle BAM$.
Ta có $\triangle NAE\sim\triangle BFE\sim\triangle BAM\Rightarrow \dfrac{NA}{BA}=\dfrac{AE}{AM}\Rightarrow AM\cdot AN=AE\cdot BA=2$.

$$\begin{aligned} V_{BCMN} &= \frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot(AM+AN) \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{2^2\sqrt{3}}{4}\cdot(AM+AN) \\ &\geq \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{AM\cdot AN} \\ &= \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

Vậy $\min V_{BCMN}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ khi $AM=AN=\sqrt{2}$ hay $x=\sqrt{2}$.

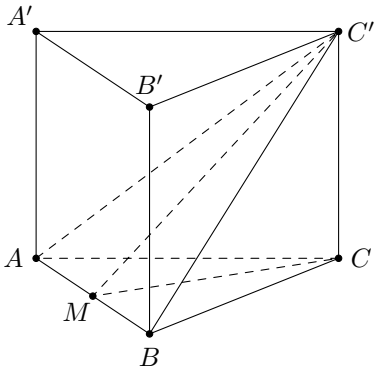
Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Tam giác ABC' có diện tích bằng $3\sqrt{3}$ và nằm trong mặt phẳng tạo với đáy một góc bằng α, $\alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Tìm α để thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đạt giá trị lớn nhất.

(A) $\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$. (B) $\tan\alpha=\sqrt{6}$. (C) $\tan\alpha=\sqrt{2}$. (D) $\tan\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của AB.



Khi đó $AB \perp (MCC') \Rightarrow$ góc giữa (ABC') và (ABC) là $\widehat{CMC'} = \alpha$.

Đặt $AB = x,\ x > 0 \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4},\ CC' = CM \cdot \tan\alpha = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}\tan\alpha$

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \tan\alpha = \dfrac{3x^3}{8}\tan\alpha.$

Ta có $S_{ABC} = S_{ABC'}\cos\alpha = 3\sqrt{3}\cos\alpha$

$\Rightarrow \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}\cos\alpha \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3\cos\alpha}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} &= \frac{3}{8} \cdot 24\cos\alpha\sqrt{3\cos\alpha} \cdot \tan\alpha \\ &= 9\sqrt{3}\sin\alpha\sqrt{\cos\alpha} \\ &= 9\sqrt{3} \cdot \sqrt{\cos\alpha\,(1-\cos^2\alpha)} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t\,(1-t^2) = t - t^3,\ t \in (0;1)$. Ta có $f'(t) = 1 - 3t^2$.

$\Rightarrow$ Hàm số đạt giá trị lớn nhất khi $t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ và $\max\limits_{(0;1)} f(t) = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

Khi đó $\max V_{ABC.A'B'C'} = 6 \Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{2}$.

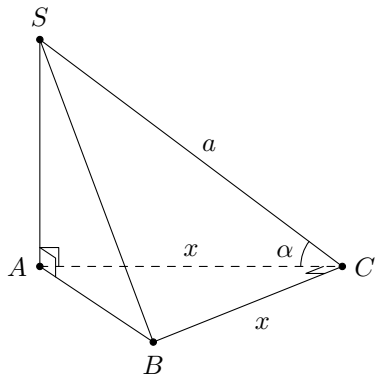
Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$, trong đó $SA \perp (ABC)$, $SC = a$ và đáy (ABC) là tam giác vuông cân tại đỉnh C. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC). Khi thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất thì $\sin 2\alpha$ bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Đặt $AC = BC = x$, $SA = \sqrt{a^2 - x^2}$.



Ta có thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$$V = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{6}\sqrt{a^2x^4 - x^6}$$

Xét hàm số $f(x) = a^2x^4 - x^6$ với $0 < x < a$.

$f'(x) = 4a^2x^3 - 6x^5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \end{array}\right.$.

x	0		$\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$		a
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $x = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Khi đó $\sin\alpha = \dfrac{SA}{SC} = \dfrac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\alpha = \dfrac{AC}{SC} = \dfrac{\frac{a}{\sqrt{6}}}{a} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{3} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

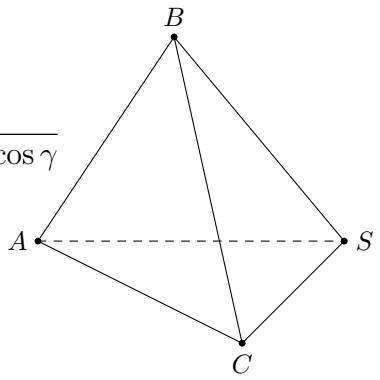
Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = x$, các cạnh còn lại của hình chóp đều bằng a. Để thể tích khối chóp lớn nhất thì giá trị x bằng

(A) $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. (B) $\dfrac{a}{2}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (D) a.

Lời giải.

Cách 1: Đặt $\alpha = \widehat{ABS}$, $\beta = \widehat{ABC} = 60°$, $\gamma = \widehat{CBS} = 60°$.



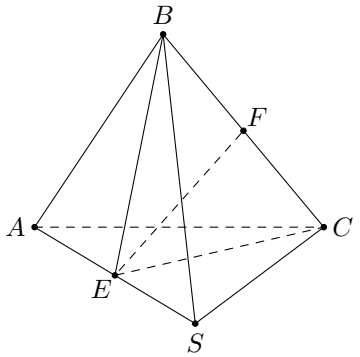
Ta có

$$V_{B.SAC} = \frac{BA \cdot BC \cdot BS}{6}\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$
$$= \frac{a^3}{6}\sqrt{\frac{1}{2} - \cos^2\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha}$$

$V_{B.SAC}$ đạt GTLN khi $\dfrac{1}{2} - \cos^2\alpha + \dfrac{1}{2}\cos\alpha$ đạt GTLN $\Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{4}$.

Với $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$ ta được $x = \sqrt{BA^2 + BS^2 - 2BA \cdot BS \cdot \cos\alpha} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Cách 2: Gọi E, F lần lượt là trung điểm SA và BC.



Vì $\triangle BAS$ và $\triangle CAS$ lần lượt cân tại B và C nên $\begin{cases} BE \perp SA \\ CE \perp SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (BEC)$.

Ta có $BE = CE = \sqrt{a^2 - \dfrac{x^2}{4}}$; $EF = \dfrac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2}$.

Suy ra $S_{\triangle BEC} = \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot EF = \dfrac{a\sqrt{3a^2 - x^2}}{4}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\triangle BEC} = \dfrac{1}{3}x \cdot \dfrac{a\sqrt{3a^2 - x^2}}{4} \le \dfrac{a}{12} \cdot \dfrac{x^2 + (3a^2 - x^2)}{2} = \dfrac{a^3}{8}$.

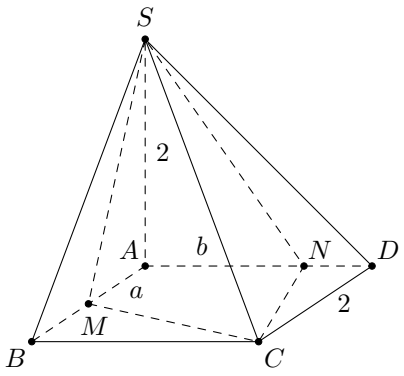
Dấu "=" xảy ra khi $x = \sqrt{3a^2 - x^2} \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA = 2$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB, AD sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (ANC). Tính tổng $T = \dfrac{1}{AN^2} + \dfrac{1}{AM^2}$ khi thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất.

(A) $T=\dfrac{13}{9}$. (B) $T=2$. (C) $T=\dfrac{5}{4}$. (D) $T=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ với:

$A(0;0;0)$, $S(0;0;2)$, $B(2;0;0)$, $C(2;2;0)$, $D(0;2;0)$, $M(a;0;0)$, $N(0;b;0)$ $(a,b\in[0;2])$

$\overrightarrow{AC}=(2;2;0)$, $\overrightarrow{AM}=(a;0;0)$, $\overrightarrow{AN}=(0;b;0)$

$\overrightarrow{SC}=(2;2;-2)$, $\overrightarrow{SM}=(a;0;-2)$, $\overrightarrow{SN}=(0;b;-2)$

$\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SC}\right]=(4;2a-4;2a)\Rightarrow\overrightarrow{n_1}=(2;a-2;a)$ là VTPT của mặt phẳng (SCM).

$\left[\overrightarrow{SN},\overrightarrow{SC}\right]=(4-2b;-4;-2b)\Rightarrow\overrightarrow{n_2}=(2-b;-2;-b)$ là VTPT của mặt phẳng (SCN).

Ta có

$$\begin{aligned}(SCM)\perp(SCN)&\Leftrightarrow\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}\\&\Leftrightarrow\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\\&\Leftrightarrow2(2-b)-2(a-2)-ab=0\\&\Leftrightarrow8-2b-2a-ab=0\\&\Leftrightarrow8-2a-b(2+a)=0\\&\Leftrightarrow b=\frac{8-2a}{a+2}\end{aligned}$$

Mà $0\le b=\dfrac{8-2a}{a+2}\le2\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{8-2a}{a+2}\ge0\\\dfrac{8-2a}{a+2}\le2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\in(-2;4]\\\dfrac{4-4a}{a+2}\le0\Leftrightarrow a\in(-\infty;2)\cup[1;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow a\in[1;4]$.

Do đó $a\in[1;2]$

$S_{AMCN}=S_{\triangle AMC}+S_{\triangle ANC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}\right]\right|+\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\dfrac{1}{2}\cdot2a+\dfrac{1}{2}\cdot2b=a+b=a+\dfrac{8-2a}{a+2}=\dfrac{a^2+8}{a+2}$.

Xét hàm số $f(a)=\dfrac{a^2+8}{a+2}$ trên $[1;2]$.

$f'(a)=\dfrac{a^2+4a+8}{(a+2)^2}$; $f'(a)=0\Leftrightarrow a^2+4a+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&a=-2-2\sqrt{3}\notin[1;2]\\&a=-2+2\sqrt{3}\end{aligned}\right.$.

Ta có $f(1)=3$ khi $a=1$, $b=2$; $f(2)=3$ khi $a=2$, $b=1$; $f\left(-2+2\sqrt{3}\right)=-4+4\sqrt{3}$ khi $a=-2+2\sqrt{3}$, $b=-2+2\sqrt{3}$.

Khi đó $\max\limits_{a\in[0;2]}f(a)=3\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&a=2,b=1\\&a=1,b=2\end{aligned}\right.$.

$V_{S.AMCN}=\dfrac{1}{3}\cdot SA\cdot S_{AMCN}$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow S_{AMCN}$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&a=2,b=1\\&a=1,b=2\end{aligned}\right.$.

- $a=2, b=1$: $\overrightarrow{AM}=(2;0;0) \Rightarrow AM=2$, $\overrightarrow{AN}=(0;1;0) \Rightarrow AN=1$. Vậy $T=\dfrac{1}{AN^2}+\dfrac{1}{AM^2}=\dfrac{1}{4}+1=\dfrac{5}{4}$.
- $a=1, b=2$: $\overrightarrow{AM}=(1;0;0) \Rightarrow AM=1$, $\overrightarrow{AN}=(0;2;0) \Rightarrow AN=2$. Vậy $T=\dfrac{1}{AN^2}+\dfrac{1}{AM^2}=1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}$.

Kết luận: $T=\dfrac{1}{AN^2}+\dfrac{1}{AM^2}=\dfrac{5}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=x$, $CD=y$, tất cả các cạnh còn lại bằng 2. Khi thể tích tứ diện $ABCD$ là lớn nhất tính xy.

(A) $\dfrac{2}{3}$. (B) $\dfrac{4}{3}$. (C) $\dfrac{16}{3}$. (D) $\dfrac{1}{3}$.

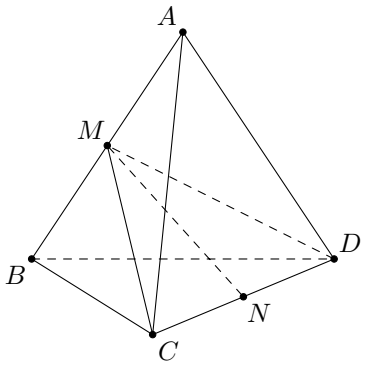
Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Tam giác ADB, CAB là hai tam giác cân cạnh đáy AB nên $DM \perp AB$ và $CM \perp AB$. Suy ra $AB \perp (MCD)$.

$V_{ABCD}=V_{B.MCD}+V_{A.MCD}=\dfrac{1}{3}\cdot BM\cdot S_{MCD}+\dfrac{1}{3}\cdot AM\cdot S_{MCD}=\dfrac{x}{3}\cdot S_{MCD}$.

$\triangle ABC=\triangle ABD$ (c.c.c) nên $CM=DM \Rightarrow MN \perp CD$.



$$\begin{aligned} S_{MCD}=\frac{1}{2}\cdot CD\cdot MN &= \frac{1}{2}y\cdot\sqrt{MC^2-CN^2} \\ &= \frac{1}{2}y\cdot\sqrt{(BC^2-BM^2)-CN^2} \\ &= \frac{1}{2}y\sqrt{4-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}} \\ &= \frac{1}{4}y\sqrt{16-(x^2+y^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{ABCD}=\frac{xy}{12}\sqrt{16-(x^2+y^2)} &\le \frac{xy}{12}\sqrt{16-2xy} \\ &= \frac{1}{12}\sqrt{xy\cdot xy\,(16-2xy)} \\ &\le \frac{1}{12}\sqrt{\left(\frac{xy+xy+(16-2xy)}{3}\right)^3} \\ &= \frac{1}{12}\sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^3} \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x=y \\ xy=16-2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ xy=\dfrac{16}{3} \end{cases}$.

Vậy thể tích $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất khi $xy=\dfrac{16}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA = 2$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB, AD $(AN < AM)$ sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC). Khi thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của $\dfrac{1}{AN^2} + \dfrac{16}{AM^2}$ bằng

(A) $\dfrac{17}{4}$. (B) 5. (C) $\dfrac{5}{4}$. (D) 2.

Lời giải.

Cách 1: Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $D(0;2;0)$, $S(0;0;2)$. Suy ra C(2;2;0).

Đặt $AM = x$, $AN = y$; x, $y \in [0;2]$, $x > y$. Suy ra $M(x;0;0)$, $N(0;y;0)$.

$\overrightarrow{SM} = (x;0;-2)$, $\overrightarrow{SC} = (2;2;-2)$, $\overrightarrow{SN} = (0;y;-2)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SC}\right] = (4;2x-4;2x)$, $\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{SN}, \overrightarrow{SC}\right] = (4-2y;-4;-2y)$.

Do $(SMC) \perp (SNC)$ nên

$$\begin{aligned} \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} &\Leftrightarrow 4(4-4y) - 4(2x-4) - 4xy = 0 \\ &\Leftrightarrow xy + 2(x+y) = 8 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{8-2x}{x+2} \end{aligned}$$

Vì $y \le 2$ nên $\dfrac{8-2x}{x+2} \le 2 \Leftrightarrow x \ge 1$.

$S_{AMCN} = S_{ABCD} - S_{BMC} - S_{DNC} = 4 - (2-x) - (2-y) = x + y$.

Do đó $V_{S.AMCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{AMCN} = \dfrac{2}{3}(x+y) = \dfrac{2}{3}\left(x + \dfrac{8-2x}{x+2}\right) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{x^2+8}{x+2}$.

Xét $f(x) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{x^2+8}{x+2}$ với $x \in [1;2]$, $f'(x) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{x^2+4x-8}{(x+2)^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 + 2\sqrt{3} \\ x = -2 - 2\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Lập BBT ta suy ra $\max\limits_{[1;2]} f(x) = f(1) = f(2) = 2$.

Vậy $\max V_{S.AMCN} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ (do $x > y$) $\Rightarrow \dfrac{16}{AM^2} + \dfrac{1}{AN^2} = \dfrac{16}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 5$.

Cách 2: Đặt $AM = x$, $AN = y$; x, $y \in [0;2]$, $x > y$.

Gọi $O = AC \cap DB$, $E = BD \cap CM$, $F = BD \cap CN$.

H là hình chiếu vuông góc của O trên SC, khi đó $HO = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Ta có $\begin{cases} SC \perp OH \\ SC \perp BD \end{cases} \Rightarrow SC \perp (HBD) \Rightarrow \begin{cases} SC \perp HE \\ SC \perp HF \end{cases}$.

Do đó góc giữa (SCM) và (SCN) bằng góc giữa HE và HF. Suy ra $HE \perp HF$.

Mặt khác $V_{S.AMCN} = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{AMCN} = \dfrac{2}{3}(x+y)$.

Tính OE, OF: Ta có $x > 0$, $y > 0$ và nếu $x \neq 2$, $y \neq 2$ thì gọi K là trung điểm của AM. Khi đó

$$\frac{OE}{EB} = \frac{KM}{MB} = \frac{x}{4-2x} \Rightarrow \frac{OE}{x} = \frac{EB}{4-2x} = \frac{OB}{4-x} \Rightarrow OE = \frac{x\sqrt{2}}{4-x}.$$

Tương tự $OF = \dfrac{y\sqrt{2}}{4-y}$. Mà $OE \cdot OF = OH^2 \Leftrightarrow (x+2)(y+2) = 12$.

Nếu $x = 2$, $y = 2$ thì ta cũng có $OE \cdot OF = OH^2 \Leftrightarrow (x+2)(y+2) = 12$.

Tóm lại $(x+2)(y+2) = 12$.

Suy ra $V_{S.AMCN} = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{AMCN} = \dfrac{2}{3}(x+y) = \dfrac{2}{3}\left[(x+2)+(y-2)-4\right] = \dfrac{2}{3}\left[(x+2)+\dfrac{12}{x+2}-4\right]$.

Khảo sát hàm số ta được $\max V_{S.AMCN} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ (do $x > y$) $\Rightarrow \dfrac{16}{AM^2} + \dfrac{1}{AN^2} = \dfrac{16}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 5$.

Cách 3: Đặt $AM = m$, $AN = n$ $(0 \leq n < m \leq 2)$

Dựng $AP \perp CM$, $AQ \perp CN$ $(P \in CM, Q \in CN)$.

Ta có $\dfrac{AP}{BC} = \dfrac{AM}{CM} \Rightarrow AP = \dfrac{2m}{\sqrt{4+(2-m)^2}}$.

Tương tự $AQ = \dfrac{2n}{\sqrt{4+(2-n)^2}}$.

Trong mặt phẳng (SAP) dựng $AL \perp SP$ $(L \in SP)$, $AV \perp SQ$ $(V \in SQ)$. Mặt phẳng (ALV) cắt SC tại H.

Dựa vào điều kiện bài toán dễ dàng chứng minh được tứ giác $ALHV$ là hình chữ nhật và $AH \perp SC$.

Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{3}{8} \Rightarrow AH^2 = \dfrac{8}{3}$.

$\dfrac{1}{AL^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SP^2} = \dfrac{m^2-2m+4}{2m^2} \Rightarrow AL^2 = \dfrac{2m^2}{m^2-2m+4}$ và $AV^2 = \dfrac{2n^2}{n^2-2n+4}$.

Do $ALHV$ là hình chữ nhật nên

$$\begin{aligned} AV^2 + AL^2 = AH^2 &\Rightarrow \frac{2n^2}{n^2-2n+4} + \frac{2m^2}{m^2-2m+4} = \frac{8}{3} \\ &\Leftrightarrow (mn-m-n+4)\left(mn+2(m+n)-8\right) = 0 \end{aligned}$$

Vì $mn-m-n+4 = mn+2-m+2-n > 0$ nên $mn+2(m+n) = 8$.

Do $0 < n < m \leq 2 \Rightarrow (m-2)(n-2) \geq 0 \Leftrightarrow mn-2(m+n)+4 \geq 0 \Rightarrow 12-4(m+n) \geq 0 \Rightarrow m+n \leq 3$.

Ta có $S_{ANCM} = S_{ABCD} - S_{BMC} - S_{DNC} = 4 - \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2-m) - \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2-n) = m+n$.

Suy ra $V_{SAMCN} = \dfrac{1}{3} SA \cdot S_{AMCN} = \dfrac{2}{3}(m+n) \leq 2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = 2$, $n = 1$. Khi đó, $\dfrac{16}{AM^2} + \dfrac{1}{AN^2} = 5$.

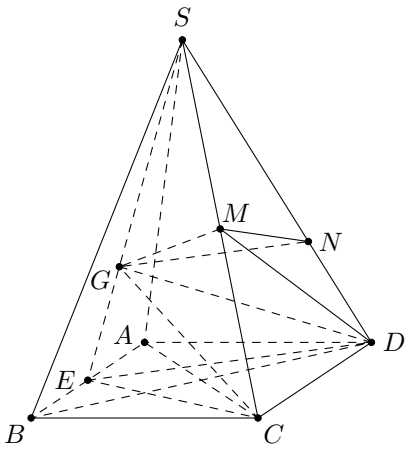
Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N là hai điểm nằm trên hai cạnh SC, SD sao cho $\dfrac{SM}{SC}=\dfrac{1}{2}$ và $\dfrac{SN}{ND}=2$, biết G là trọng tâm của tam giác SAB. Tỉ số thể tích $\dfrac{V_{GMND}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{m}{n}$ (m, n là các số nguyên dương và $(m,n)=1$). Giá trị của $m+n$ bằng

(A) 17. (B) 19. (C) 21. (D) 7.

Lời giải.

$\dfrac{V_{S.GMN}}{V_{S.GMD}}=\dfrac{SN}{SD}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow V_{GMND}=\dfrac{1}{3}V_{S.GMD}.$
$\dfrac{V_{S.GMD}}{V_{S.GCD}}=\dfrac{SM}{SD}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow V_{S.GMD}=\dfrac{1}{2}V_{S.GCD}.$
$\dfrac{V_{S.GCD}}{V_{S.ECD}}=\dfrac{SG}{SE}=\dfrac{2}{3}.$
Suy ra



$$\begin{aligned} V_{GMND}=\frac{1}{3}V_{S.GMD} &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}V_{S.ECD}\\ &= \frac{1}{9}V_{S.ECD}\\ &= \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}V_{S.ABCD}\\ &= \frac{1}{18}V_{S.ABCD}\end{aligned}$$

Suy ra $\dfrac{V_{S.GMND}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{1}{18}$. Do đó $m=1$, $n=18\Rightarrow m+n=19$.

Chọn đáp án (B) □

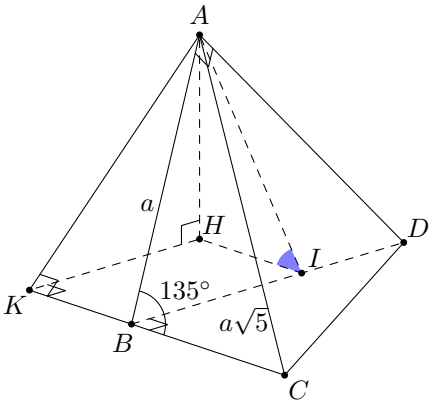
Câu 21. Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{DAB}=\widehat{CBD}=90^\circ$, $AB=a$, $AC=a\sqrt{5}$ và $\widehat{ABC}=135^\circ$. Góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (BCD) bằng 30°. Thể tích của tứ diện $ABCD$ là

(A) $\dfrac{a^3}{2\sqrt{3}}$. (B) $\dfrac{a^3}{\sqrt{2}}$. (C) $\dfrac{a^3}{3\sqrt{2}}$. (D) $\dfrac{a^3}{6}$.

Lời giải.

Trong tam giác ABC có

$$\begin{aligned} & AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos 135^\circ \\ \Leftrightarrow\ & BC^2 + BC \cdot a\sqrt{2} - 4a^2 = 0 \\ \Rightarrow\ & BC = a\sqrt{2} \end{aligned}$$



Gọi K là hình chiếu của A lên BC ta có $\widehat{ABC} = 135^\circ$ nên $\widehat{ABK} = 45^\circ$.

Suy ra tam giác AKB vuông cân tại K.

Do đó $AK = BK = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi I, H lần lượt là hình chiếu của A lên BD và $(ABCD)$, ta có $KBIH$ là hình chữ nhật.

Khi đó $((\widehat{ABD});(BCD)) = \widehat{AIH} = 30^\circ$. Suy ra $AH = HI \tan 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Từ đó ta tính được $BI = KH = \sqrt{AK^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác ABD vuông tại A, đường cao AI nên $AB^2 = BI \cdot BD \Rightarrow BD = \dfrac{AB^2}{BI} = a\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối chóp $ABCD$ là $V = \dfrac{1}{6} AH \cdot BD \cdot BC = \dfrac{a^3}{6}$.

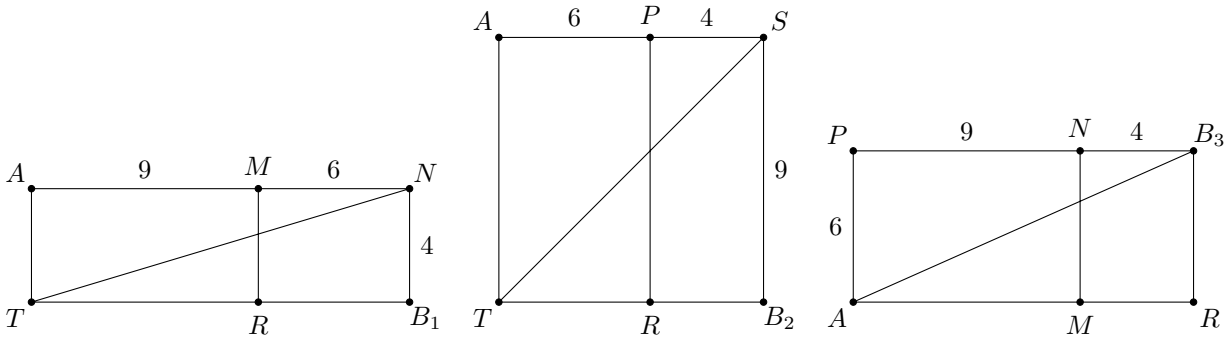
Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Cho một cái hộp hình chữ nhật có kích thước ba cạnh lần lượt là 4cm, 6cm, 9cm như hình vẽ. Một con kiến ở vị trí A muốn đi đến vị trí B. Biết rằng con kiến chỉ có thể bò trên cạnh hay trên bề mặt của hình hộp đã cho. Gọi x cm là quãng đường ngắn nhất con kiến đi từ A đến B. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $x \in (15;16)$. (B) $x \in (13;14)$. (C) $x \in (12;13)$. (D) $x \in (14;15)$.

Lời giải.

Vì con kiến bò theo mặt của hình hộp từ A đến B nên khi ta vẽ hình khai triển của hình hộp chữ nhật và trải phẳng như hình vẽ thì xem như con kiến bò trên một mặt phẳng.



Khi đó B sẽ được tách thành 3 vị trí là B_1, B_2 và B_3. Quãng đường ngắn nhất sẽ là một trong ba đoạn thẳng AB_1, AB_2 hay AB_3. Ta có:

$AB_1 = \sqrt{15^2 + 4^2} = \sqrt{241}$.

$AB_2 = \sqrt{9^2 + 10^2} = \sqrt{181} \approx 13{,}45$.

$AB_3 = \sqrt{6^2 + 13^2} = \sqrt{205}$.

Do đó quãng đường ngắn nhất là $AB_2 \approx 13{,}45 \in (13; 14)$.

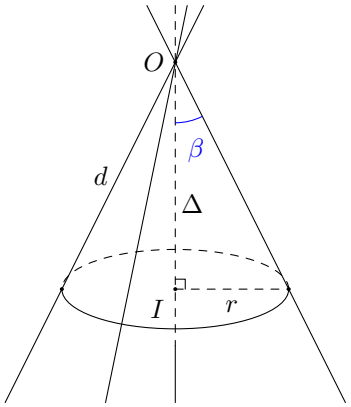
Chọn đáp án (B) □

§ 1. MẶT NÓN, MẶT TRỤ & MẶT CẦU

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Mặt nón

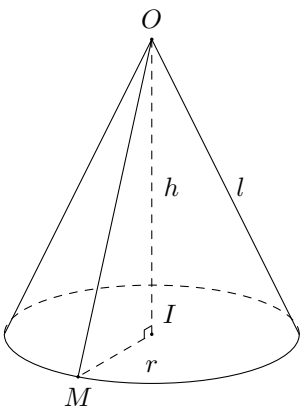
Đường thẳng d, Δ cắt nhau tại O và tạo thành góc β với $0^\circ < \beta < 90^\circ$, mặt phẳng (P) chứa d, Δ.
Mặt phẳng (P) quay quanh trục Δ với góc β không đổi $\Rightarrow$ mặt nón tròn xoay đỉnh O.



- Δ gọi là trục.
- d được gọi là đường sinh.
- Góc 2β gọi là góc ở đỉnh.

2. Khối nón

- Khối nón là phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay kể cả hình nón đó. Những điểm không thuộc khối nón gọi là những điểm ngoài của khối nón.
- Những điểm thuộc khối nón nhưng không thuộc hình nón tương ứng gọi là những điểm trong của khối nón. Đỉnh, mặt đáy, đường sinh của một hình nón cũng là đỉnh, mặt đáy, đường sinh của khối nón tương ứng.



- Cho hình nón có chiều cao h, đường sinh l và bán kính đáy r.

— **Diện tích xung quanh** của hình nón: $\boxed{S_{\text{xq nón}} = \pi rl}$.

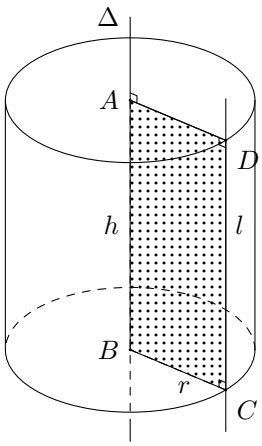
— **Diện tích đáy (hình tròn)**: $\boxed{S_{\text{đáy}} = \pi r^2}$.

— **Diện tích toàn phần** của hình nón: $\boxed{S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + S_{\text{đáy}} = \pi rl + \pi r^2}$.

— **Thể tích khối nón**: $\boxed{V_{\text{nón}} = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} h = \frac{1}{3} \pi r^2 h}$.

3. Mặt trụ

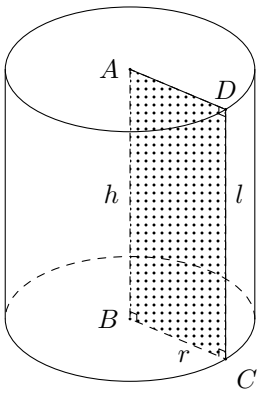
Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng Δ và l song song với nhau, cách nhau một khoảng bằng r. Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay, gọi tắt là mặt trụ.



- Đường thẳng Δ gọi là trục.
- Đường thẳng l là đường sinh.
- r là bán kính của mặt trụ đó.

4. Khối trụ

- Khối trụ tròn xoay hay khối trụ là phần không gian được giới hạn bởi một hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ tròn xoay đó. Những điểm không thuộc khối trụ gọi là những điểm ngoài của khối trụ. Những điểm thuộc khối trụ nhưng không thuộc hình trụ tương ứng gọi là những điểm trong của khối trụ.



- Mặt đáy, chiều cao, đường sinh, bán kính của một hình trụ cũng là Mặt đáy, chiều cao, đường sinh, bán kính của khối trụ tương ứng.
- Hình trụ có chiều cao h, đường sinh l và bán kính đáy r.

— **Diện tích xung quanh**: $\boxed{S_{\text{xq}} = 2\pi rh}$.

— **Diện tích toàn phần**: $\boxed{S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + 2 \cdot S_{\text{đáy}} = 2\pi rh + 2\pi r^2}$.

— **Thể tích khối trụ**: $\boxed{V_{\text{trụ}} = S_{\text{đáy}} \cdot h = \pi r^2 h}$.

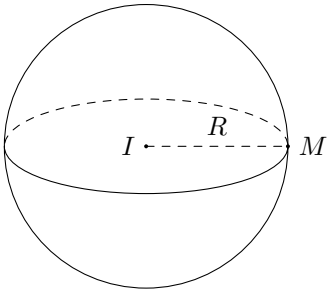
5. Mặt cầu

Cho điểm I cố định và một số thực dương R.

Tập hợp tất cả những điểm M trong không gian cách I một khoảng R được gọi là mặt cầu tâm I, bán kính R.

Kí hiệu $S(I;R)$.

Khi đó $\boxed{S(I;R)=\{M|IM=R\}}$



6. Công thức tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu

Cho mặt cầu S có tâm I , bán kính R . Khi đó, ta có các công thức như sau

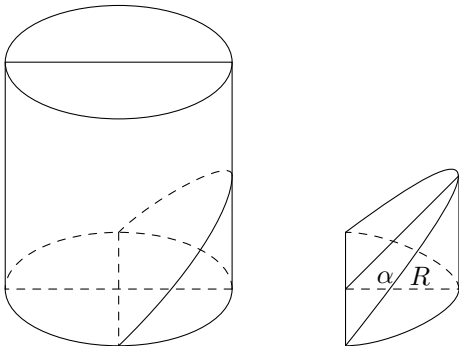
- Diện tích mặt cầu: $\boxed{S=4\pi R^2}$.
- Thể tích khối cầu: $\boxed{V=\dfrac{4}{3}\pi R^3}$.

7. Một số công thức tính đặc biệt về khối tròn xoay

Hình nêm loại 1

Công thức tính thể tích

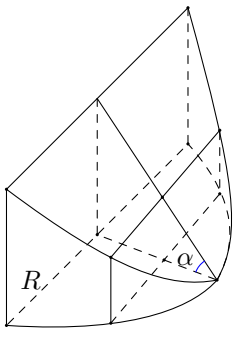
$$\boxed{V=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha.}$$



Hình nêm loại 2

Công thức tính thể tích

$$\boxed{V=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)R^3\tan\alpha.}$$



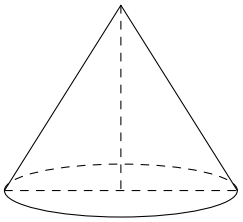
B VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Một hình nón tròn xoay có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân có cạnh bằng a. Tính diện tích S_{tp} toàn phần của hình nón đó.

(A) $S_{\text{tp}} = \dfrac{\pi a^2(\sqrt{2}+8)}{2}$.
(B) $S_{\text{tp}} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$.
(C) $S_{\text{tp}} = \dfrac{\pi a^2(\sqrt{2}+1)}{2}$.
(D) $S_{\text{tp}} = \dfrac{\pi a^2(\sqrt{2}+4)}{2}$.

Lời giải.

Theo đề suy ra đường sinh $\ell = a$, và đường tròn đáy có bán kính $r = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Khi đó $S_{\text{tp}} = \pi r \cdot (\ell + r) = \dfrac{\pi a^2(\sqrt{2}+1)}{2}$.

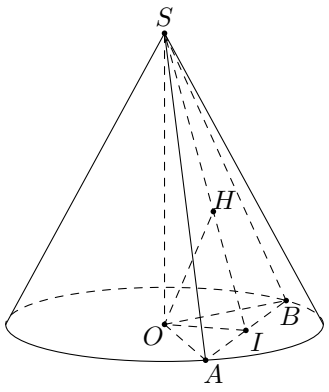
Chọn đáp án (C) □

Ví dụ 2. Một hình nón đỉnh S, đáy hình tròn tâm O và $SO = h$. Một mặt phẳng (P) qua đỉnh S cắt đường tròn (O) theo dây cung AB sao cho góc $\widehat{AOB} = 90^\circ$, biết khoảng cách từ O đến (P) bằng $\dfrac{h}{2}$. Khi đó diện tích xung quanh hình nón bằng

(A) $\dfrac{\pi h^2\sqrt{10}}{3}$.
(B) $\dfrac{\pi h^2\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$.
(C) $\dfrac{2\pi h^2\sqrt{10}}{3}$.
(D) $\dfrac{\pi h^2\sqrt{10}}{6}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AB.



Ta có $OI = \dfrac{SO \cdot OI}{\sqrt{SO^2 + OI^2}} = \dfrac{h\sqrt{3}}{3}$.

Xét $\triangle OAB$ vuông cân tại O nên

$$AB = 2OI = \frac{2h\sqrt{3}}{3},\ R = OA = OB = \frac{h\sqrt{6}}{3}.$$

Suy ra $SB = \sqrt{SO^2 + OB^2} = \sqrt{h^2 + \left(\dfrac{h\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \dfrac{h\sqrt{15}}{3}$.

Diện tích xung quanh của hình nón là

$$S_{\text{xq}} = \pi R \cdot SB = \pi \cdot \frac{h\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{h\sqrt{15}}{3} = \frac{\pi h^2\sqrt{10}}{3}.$$

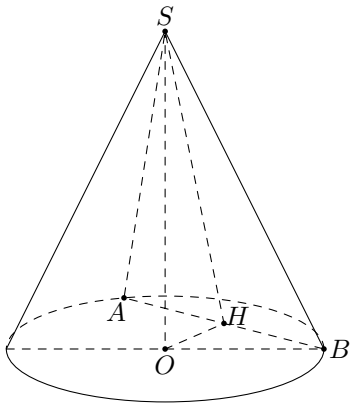
Chọn đáp án (A) □

Ví dụ 3. Hình nón (N) có đỉnh S, tâm đường tròn đáy là O, góc ở đỉnh bằng 120°. Một mặt phẳng qua S cắt hình nón (N) theo thiết diện là tam giác vuông SAB. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO bằng 3. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (N).

(A) $S_{\text{xq}} = 27\sqrt{3}\pi$. (B) $S_{\text{xq}} = 18\sqrt{3}\pi$. (C) $S_{\text{xq}} = 9\sqrt{3}\pi$. (D) $S_{\text{xq}} = 36\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.

Theo bài ra ta có $\triangle SAB$ vuông tại S có $OH = 3$, $\widehat{BSO} = 60^\circ$.



Gọi r là bán kính đường tròn đáy của hình nón thì đường sinh

$$\ell = SB = \frac{r}{\sin 60^\circ} = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

Suy ra $BH = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{r\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác OBH vuông tại H, ta có $9 + \dfrac{6r^2}{9} = r^2 \Leftrightarrow r = 3\sqrt{3}$.

Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (N) là

$$S_{\text{xq}} = \pi r\ell = \pi \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 18\pi\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án (B) □

C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Dạng 1. Các yếu tố liên quan đến khối nón, Khối trụ

Câu 1. Một hình nón tròn xoay có đường sinh $2a$. Thể tích lớn nhất của khối nón đó là

(A) $\dfrac{16\pi a^3}{3\sqrt{3}}$. (B) $\dfrac{16\pi a^3}{9\sqrt{3}}$. (C) $\dfrac{4\pi a^3}{3\sqrt{3}}$. (D) $\dfrac{8\pi a^3}{3\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Gọi hình nón tròn xoay có đường sinh $\ell = 2a$, bán kính đáy là R và đường cao là h.

Ta có $R^2 + h^2 = 4a^2$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$4a^2 = R^2 + h^2 = \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2} + h^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{R^4h^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{R^4h^2}{4} \leq \frac{64}{27}a^6 \Rightarrow \frac{1}{3}\pi R^2 h \leq \frac{16\pi\sqrt{3}}{27}a^3.$$

Khi đó $V_{\max} = \dfrac{16\pi\sqrt{3}}{27}a^3$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{R^2}{2} = h^2 \\ h^2 + R^2 = 4a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a \\ R = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}a. \end{cases}$

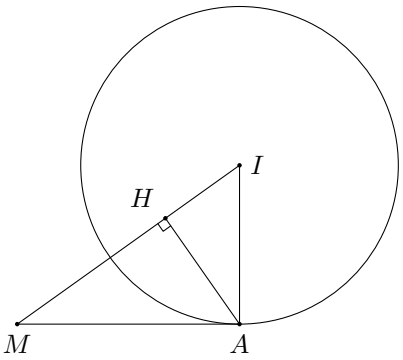
Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Cho đường tròn (C) có tâm I, bán kính $R = a$. Gọi M là điểm nằm ngoài (C) và $IM = a\sqrt{3}$; A là điểm thuộc (C) và MA tiếp xúc với (C); H là hình chiếu của A trên đường thẳng IM. Tính theo a thể tích V của khối tròn xoay tạo bởi hình tam giác MAH quay xung quanh trục IM.

(A) $V = \dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi a^3$. (B) $V = \dfrac{\sqrt{3}}{8}\pi a^3$. (C) $V = \dfrac{4\sqrt{3}}{27}\pi a^3$. (D) $V = \dfrac{9}{8}\pi a^3$.

Lời giải.

Tam giác MAH vuông tại H nên hình nón được tạo thành có chiều cao $h = MH$ và bán kính đáy là $r = AH$.



Ta có $IH \cdot IM = IA^2 \Leftrightarrow IH = \dfrac{IA^2}{IM} = \dfrac{a^2}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

$\Rightarrow MH = IM - IH = a\sqrt{3} - \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Do đó $AH^2 = IH \cdot MH = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{2a}{\sqrt{3}} = \dfrac{2a^2}{3}$.

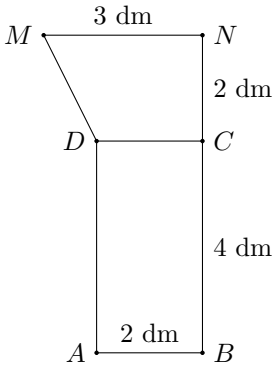
Vậy thể tích khối nón là

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{2a^2}{3} \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{27}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 3.

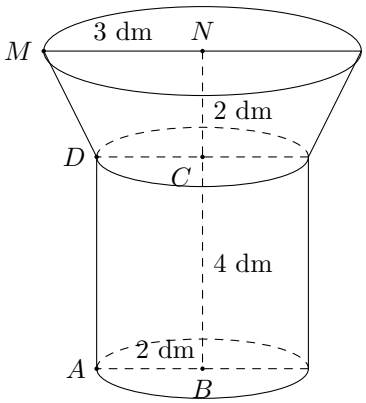
Hình bên bao gồm hình chữ nhật $ABCD$ và hình thang vuông $CDMN$. Các điểm B, C, N thẳng hàng, $AB = CN = 2$ dm; $BC = 4$ dm; $MN = 3$ dm. Quay hình bên xung quanh cạnh BN ta được khối tròn xoay có thể tích bằng



(A) 54π dm^3. (B) $\dfrac{86\pi}{3}$ dm^3. (C) $\dfrac{86}{3}$ dm^3. (D) 54 dm^3.

Lời giải.

Khi quay hình trên quanh cạnh BN ta được một khối tròn xoay gồm một khối trụ có bán kính đáy bằng 2 dm, chiều cao bằng 4 dm và một khối nón cụt có bán kính hai đáy lần lượt là 2 dm và 3 dm, chiều cao bằng 2 dm.



Do đó thể tích của khối tròn xoay là

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{trụ}} + V_{\text{nón cụt}} \\ &= 4\pi \cdot 4 + \frac{2}{3}\left(4\pi + 9\pi + \sqrt{4\pi \cdot 9\pi}\right) \\ &= \frac{86\pi}{3}\,(\text{dm}^3). \end{aligned}$$

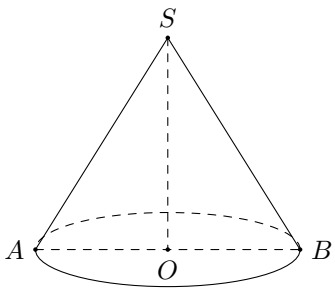
Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Biết thiết diện qua trục của một hình nón là tam giác đều có diện tích bằng $a^2\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối nón đã cho.

(A) $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$. (B) $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$. (C) $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{6}$. (D) $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi đỉnh của hình nón là S, tâm đường tròn đáy của hình nón là O, AB là một đường kính của đường tròn đáy.



Khi đó $\triangle SAB$ là một thiết diện qua trục của hình nón đã cho.

Diện tích của tam giác SAB là $\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}=a^2\sqrt{3}\Rightarrow AB=2a$.

Bán kính đường tròn đáy $R=\dfrac{AB}{2}=a$.

Đường cao của hình nón là $h=SO=\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.

Thể tích khối nón đã cho là $V=\dfrac{1}{3}\pi R^2h=\dfrac{\pi a^2\cdot a\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Cho hình trụ (T) có chiều cao $h=2$ m, bán kính đáy $r=3$ m. Giả sử (L) là hình lăng trụ đều n cạnh có hai đáy là đa giác đều nội tiếp đường tròn đáy của hình trụ (T). Khi n tăng lên vô hạn thì tổng diện tích tất cả các mặt của của khối lăng trụ (L) có giới hạn là

(A) $S=12$. (B) $S=20\pi$. (C) $S=30\pi$. (D) $S=12\pi$.

Lời giải.

Cách 1: Vì (L) là hình lăng trụ đều n cạnh có hai đáy là đa giác đều nội tiếp đường tròn đáy của hình trụ (T) nên độ dài mỗi cạnh của lăng trụ là $a=2r\cdot\sin\dfrac{\pi}{n}$.

Do đó diện tích của n mặt bên là $S_1=nah=2nrh\cdot\sin\dfrac{\pi}{n}=12n\cdot\sin\dfrac{\pi}{n}$.

Công thức diện tích của đa giác đều n cạnh, có độ dài mỗi cạnh bằng a là $s=\dfrac{nr^2\cdot\sin\dfrac{2\pi}{n}}{2}$.

Nên diện tích của hai đáy là $S_2=2s=9n\cdot\sin\dfrac{2\pi}{n}$.

Tổng diện tích tất cả các mặt của khối lăng trụ (L) là

$$S=S_1+S_2=12n\cdot\sin\frac{\pi}{n}+9n\cdot\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Khi n tăng lên vô hạn, ta có

$$\lim_{x\to+\infty}\left(12n\cdot\sin\frac{\pi}{n}+9n\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(12n\cdot\sin\frac{\pi}{n}\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(9n\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\right)=30\pi.$$

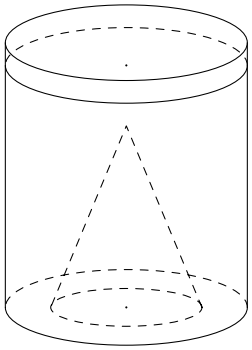
Cách 2: Khi n tăng lên vô hạn, hình lăng trụ tiến dần tới hình trụ.

Do đó tổng diện tích tất cả các mặt của của khối lăng trụ (L) bằng với diện tích toàn phần của hình trụ (T) và bằng $2\pi rh + 2\pi r^2 = 30\pi$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6.

Một khối nón làm bằng chất liệu không thấm nước, có khối lượng riêng lớn hơ khối lượng riêng của nước, có đường kính đáy bằng a và chiều cao 12, được đặt trong và trên đáy của một cái cốc hình trụ bán kính đáy a như hình vẽ, sao cho đáy của khối nón tiếp xúc với đáy của cốc hình trụ. Đổ nước vào cốc hình trụ đến khi mực nước đạt đến độ cao 12 thì lấy khối nón ra. Hãy tính độ cao của nước trong cốc sau khi đã lấy khối nón ra.



(A) 11,37. (B) 11. (C) $6\sqrt{3}$. (D) $\dfrac{\pi\sqrt{37}}{2}$.

Lời giải.

Gọi V, R, h lần lượt là thể tích khối trụ (khối chứa phần nước trong cốc), bán kính đáy cốc và chiều cao của lượng nước trong cốc khi chưa lấy khối nón ra.

Suy ra $V = \pi R^2 h$ (1)

Gọi V_1, R_1, h_1 lần lượt là thể tích, bán kính đáy và chiều cao của khối nón.

Suy ra $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi R_1^2 h_1$ (2)

Gọi V_2, h_2 là thể tích lượng nước đổ vào và độ cao của nước trong cốc sau khi đã lấy khối nón ra.

Suy ra $V_2 = \pi R^2 h_2$ (3)

Từ (1),(2) và (3) ta có

$$\begin{aligned} V - V_1 = V_2 &\Leftrightarrow \pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi R_1^2 h_1 = \pi R^2 h_2 \\ &\Leftrightarrow R^2 h - \frac{1}{3} R_1^2 h_1 = R^2 h_2 \\ &\Leftrightarrow h_2 = \frac{R^2 h - \dfrac{1}{3} R_1^2 h_1}{R^2} \quad (4) \end{aligned}$$

Thay $R = a$, $R_1 = \dfrac{a}{2}$, $h = h_1 = 12$ vào (4) ta có $h_2 = 12 - \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{4} \cdot 12 = 11$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Một hình trụ có thiết diện qua trục là một hình vuông. Biết diện tích xung quanh của khối trụ bằng 16π. Thể tích V của khối trụ bằng

(A) $V = 32\pi$. (B) $V = 64\pi$. (C) $V = 8\pi$. (D) $V = 16\pi$.

Lời giải.

Gọi $ABCD$ là thiết diện qua trục của khối trụ.

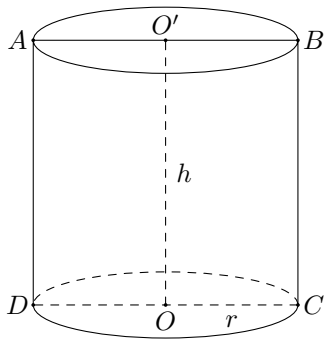
Vì $ABCD$ là hình vuông nên ta có $OC = \dfrac{1}{2}OO' \Rightarrow h = 2r$ (1).

Diện tích xung quanh của khối trụ là $S_{xq} = 2\pi rh$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $S_{xq} = 2\pi rh = 4\pi r^2$.

Ta có $S_{xq} = 16\pi \Rightarrow 4\pi r^2 = 16\pi \Rightarrow 4\pi r^2 = 16\pi$.

Thể tích của khối trụ là $V = \pi r^2 h = 2\pi r^3 = 2\pi \cdot 2^3 = 16\pi$ (đvtt).



Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Cho hình nón tròn xoay có độ dài đường sinh là $2a$, góc ở đỉnh của hình nón bằng $60°$. Thể tích V của khối nón đã cho là

(A) $V = \dfrac{\pi a^3}{3}$. (B) $V = \pi\sqrt{3}a^3$. (C) $V = \pi a^3$. (D) $V = \dfrac{\pi\sqrt{3}a^3}{3}$.

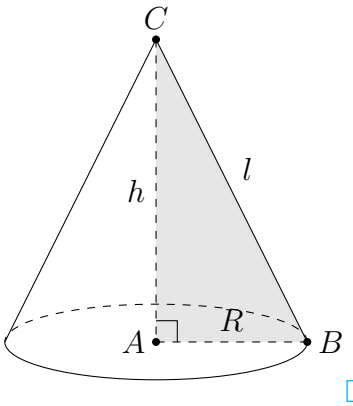
Lời giải.

Ta có $l = CB = 2a$, $\widehat{BCA} = 30°$.

Xét tam giác ABC vuông tại A có

$$\begin{cases} \sin 30° = \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{r}{l} \Rightarrow r = l \cdot \sin 30° = 2a\dfrac{1}{2} = a \\ \cos 30° = \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{h}{l} \Rightarrow h = l \cdot \cos 30° = 2a\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}. \end{cases}$$

Suy ra $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi a^2 \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{\pi\sqrt{3}a^3}{3}$.



□

Câu 9. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi N là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AN = 2ND$. Đường thẳng qua N vuông góc với BN cắt BC tại K. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay tứ giác $ANKB$ quanh trục BK là

(A) $V = \dfrac{7}{6}\pi a^3$. (B) $V = \dfrac{9}{14}\pi a^3$. (C) $V = \dfrac{6}{7}\pi a^3$. (D) $V = \dfrac{14}{9}\pi a^3$.

Lời giải.

Ta có $NB = \sqrt{a^2 + \dfrac{4a^2}{9}} = \dfrac{a\sqrt{13}}{3}$.

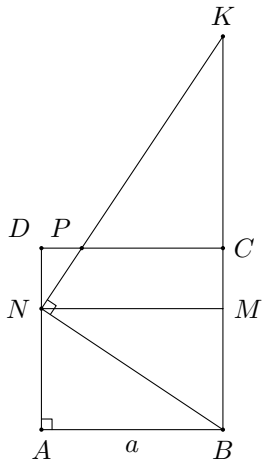
Ta có $\triangle ABN$ đồng dạng $\triangle NKB$ suy ra

$$\frac{AN}{NB} = \frac{NB}{KB} \Rightarrow KB = \frac{NB^2}{AN} = \frac{13a^2}{9} \cdot \frac{3}{2a} = \frac{13a}{6}$$

Gọi M là điểm trên BC sao cho $BM = 2MC$.

Suy ra $BM = \dfrac{2a}{3}$; $MK = \dfrac{3a}{2}$.

Vậy $V = \pi a^2 \cdot \dfrac{2a}{3} + \dfrac{1}{3}\pi a^2 \cdot \dfrac{3a}{2} = \dfrac{7}{6}\pi a^3$.

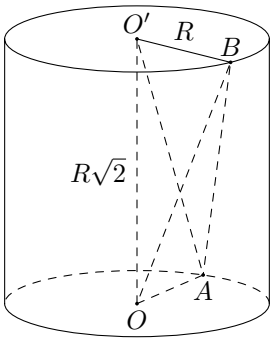


Câu 10. Cho khối trụ có đáy là các đường tròn tâm (O), (O') có bán kính là R và chiều cao $h = R\sqrt{2}$. Gọi A, B lần lượt là các điểm thuộc (O) và (O') sao cho OA vuông góc với $O'B$. Tỉ số thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ với thể tích khối trụ là

(A) $\dfrac{2}{3\pi}$. (B) $\dfrac{1}{3\pi}$. (C) $\dfrac{1}{6\pi}$. (D) $\dfrac{1}{4\pi}$.

Lời giải.

Thể tích khối trụ $V_1 = \pi R^2 h = \pi R^2 \cdot R\sqrt{2} = \pi R^3\sqrt{2}$.



Khối tứ diện $BO'OA$ có BO' là đường cao và đáy là tam giác vuông $O'OA$, do đó thể tích khối tứ diện là

$$V_2 = \frac{1}{3}S_{O'OA} \cdot O'B = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}OA \cdot OO' \cdot O'B = \frac{1}{6}R \cdot R\sqrt{2} \cdot R = \frac{\sqrt{2}}{6}R^3$$

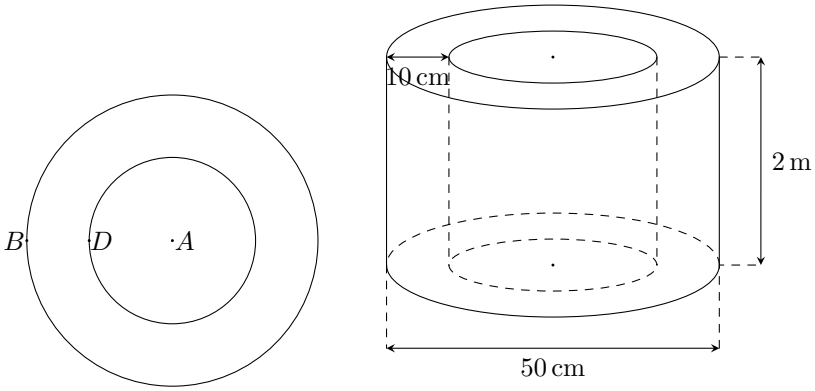
Vậy $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{R^3\sqrt{2}}{6} \cdot \dfrac{1}{\pi R^3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{6\pi}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 11. Người ta cần đổ một ống cống thoát nước hình trụ với chiều cao 2 m, độ dày thành ống là 10 cm. Đường kính ống là 50 cm. Tính lượng bê tông cần dùng để làm ra ống thoát nước đó?

(A) $0{,}08\pi$ (m^3). (B) $0{,}18\pi$ (m^3). (C) $0{,}5\pi$ (m^3). (D) $0{,}045\pi$ (m^3).

Lời giải.



Bán kính ống cống là $R = AB = \dfrac{50}{2} = 25\,\text{cm} = 0{,}25\text{m}$.

Do lớp bê tông dày 10 cm nên bán kính phần được giới hạn bên trong là $r = AD = 15\,\text{cm} = 0{,}15\,\text{m}$.

Thể tích phần bê tông là $V = \pi \cdot h\,(R^2 - r^2) = \pi \cdot 2\,(0{,}25^2 - 0{,}15^2) = 0{,}08\pi\,(\text{m}^3)$.

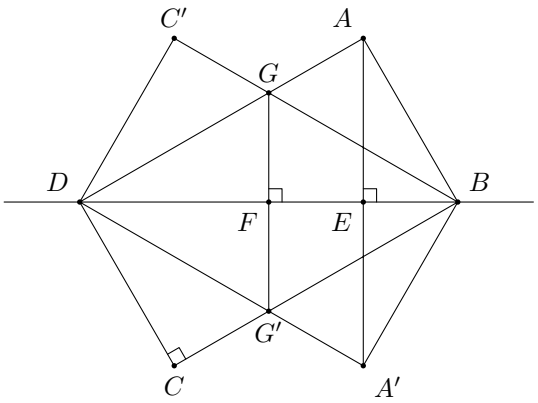
Chọn đáp án (A)

Câu 12. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2$, $AD = 2\sqrt{3}$ và nằm trong mặt phẳng (P). Quay (P) một vòng quanh đường thẳng BD. Khối tròn xoay được tạo thành có thể tích bằng

(A) $\dfrac{28\pi}{9}$. (B) $\dfrac{28\pi}{3}$. (C) $\dfrac{56\pi}{9}$. (D) $\dfrac{56\pi}{3}$.

Lời giải.

Cách 1:



Gọi A', C' lần lượt đối xứng với A, C qua BD, $G = BC' \cap AD$, G' đối xứng với G qua BD.

Gọi $E = AA' \cap BD$, $F = GG' \cap BD \Rightarrow F$ là trung điểm BD.

Gọi V là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh đường thẳng BD.

V_1 là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác BAD quanh cạnh BD (cũng là thể tích của khối tròn xoay khi quay tam giác BCD quanh cạnh BD).

V_1', V_1'' lần lượt là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay $\triangle BAE$, $\triangle EAD$ quanh cạnh BD.

V_2 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay $\triangle BGD$ quanh cạnh BD.

V_2' là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay $\triangle BGF$ quanh cạnh BD.

Ta có V_1' là thể tích của khối nón đỉnh B, bán kính đáy AE.

Tính được $AE = \dfrac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2}} = \sqrt{3}$, $BD = 4$, $BE = 1$, $DE = 3$.

$\Rightarrow V_1' = \dfrac{1}{3}\pi \cdot AE^2 \cdot BE = \dfrac{1}{3}\pi(\sqrt{3})^2 = \pi$.

Ta có V_1'' là thể tích của khối nón đỉnh D, bán kính đáy AE.

$\Rightarrow V_1'' = \dfrac{1}{3}\pi \cdot AE^2 DE = \dfrac{1}{3}\pi(\sqrt{3})^2 \cdot 3 = 3\pi$.

Suy ra $V_1 = V_1' + V_1'' = \pi + 3\pi = 4\pi$.

Ta có V_2' là thể tích của khối nón đỉnh B, bán kính đáy GF.

Ta chứng minh được $\triangle BGF \sim \triangle BDC'$ $(g-g)$.

$\Rightarrow \dfrac{GF}{DC'} = \dfrac{BF}{BC'} \Rightarrow GF = \dfrac{BF \cdot DC'}{BC'} = \dfrac{BD \cdot DC'}{2BC'} = \dfrac{4 \cdot 2}{2 \cdot 2\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

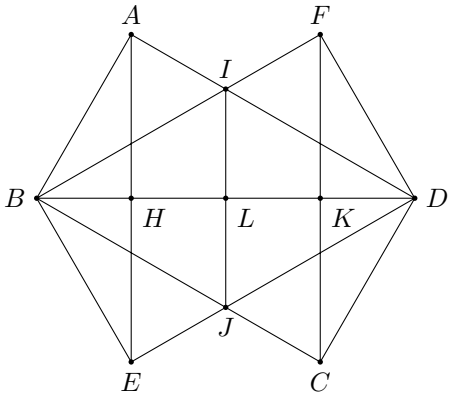
$V_2' = \dfrac{1}{3}\pi \cdot GF^2 \cdot BF = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot 2 = \dfrac{8\pi}{9}$.

Ta có $V_2 = 2V_2' = \dfrac{16\pi}{9}$.

Vậy $V = 2V_1 - V_2 = 2 \cdot 4\pi - \dfrac{16\pi}{9} = \dfrac{56\pi}{9}$.

Cách 2:

Gọi điểm như hình vẽ. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối nón, nón cụt nhận được khi quay tam giác ABH và tứ giác $AHLT$ quay BD.



Ta có $\begin{cases} AH = \sqrt{3} \\ IL = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ BH = HL = 1. \end{cases}$

Suy ra

$$\begin{aligned} V &= 2\left(V_1 + V_2\right) \\ &= 2\left[\frac{1}{3}BH \cdot \pi \cdot AH^2 + \frac{1}{3}HL \cdot \pi \cdot \left(IL^2 + IL \cdot AH + AH^2\right)\right] \\ &= 2\left[\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \pi \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \pi \cdot \left(\frac{4}{3} + 2 + 3\right)\right] = \frac{56\pi}{9}. \end{aligned}$$

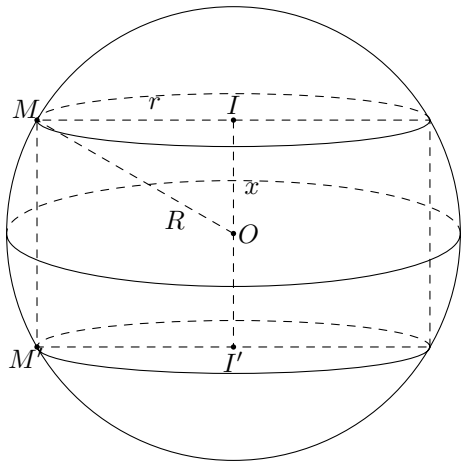
Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Cho mặt cầu (S) có bán kính $\sqrt{3}$. Trong tất cả các khối trụ nội tiếp mặt cầu (S), khối trụ có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

(A) $\dfrac{3\pi\sqrt{3}}{2}$. (B) 4π. (C) 3π. (D) $\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi bán kính mặt cầu là R và chiều cao của khối trụ là $h = 2x > 0$.



Suy ra bán kính đáy trụ là $r = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = 2\pi\left(R^2 - x^2\right)x$.

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} V^2 &= 2\pi^2\left(R^2 - x^2\right)^2 \cdot 2x^2 \\ &\le 2\pi^2\left(\frac{2\left(R^2 - x^2\right) + 2x^2}{3}\right)^3 = \frac{16\pi^2R^6}{27}. \end{aligned}$$

Suy ra $V \le \dfrac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$R^2 - x^2 = 2x^2 \Leftrightarrow x = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

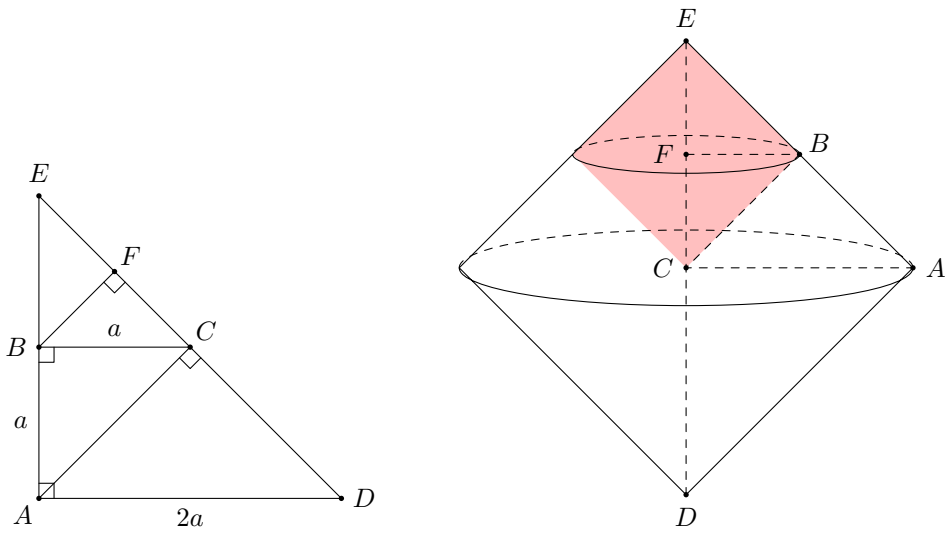
Vậy $\max V = \dfrac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$. Với $R = \sqrt{3}$ thì $\max V = 4\pi$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{B} = 90°$, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình thang $ABCD$ xung quanh trục CD.

(A) $\dfrac{7\sqrt{2}\pi a^3}{6}$. (B) $\dfrac{7\sqrt{2}\pi a^3}{12}$. (C) $\dfrac{7\pi a^3}{6}$. (D) $\dfrac{7\pi a^3}{12}$.

Lời giải.



Gọi E là giao điểm của AB và CD. Gọi F là hình chiếu vuông góc của B trên CE.

Ta có: $\triangle BCF = \triangle BEF$ nên tam giác $\triangle BCF$ và $\triangle BEF$ quay quanh trục CD tạo thành hai khối nón bằng nhau có thể tích V_1.

$\triangle ADC = \triangle AEC$ nên tam giác $\triangle ADC$ và $\triangle AEC$ quay quanh trục CD tạo thành hai khối nón bằng nhau có thể tích V.

Nên thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình thang $ABCD$ xung quanh trục CD bằng

$$2V - 2V_1 = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi \left(CD \cdot AC^2 - CF \cdot BF^2\right) = \frac{2}{3}\pi \left[\left(a\sqrt{2}\right)^3 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3\right] = \frac{7\sqrt{2}\pi a^3}{6} \text{ (đvtt).}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D có $CD = 2AB = 2AD = 4$. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra bởi hình thang $ABCD$ khi quay xung quanh đường thẳng BC bằng

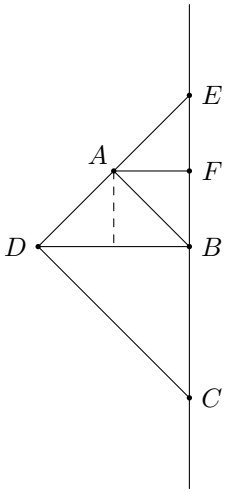
(A) $\frac{28\sqrt{2}}{3}\pi$. (B) $\frac{20\sqrt{2}}{3}\pi$. (C) $\frac{32\sqrt{2}}{3}\pi$. (D) $\frac{10\sqrt{2}}{3}\pi$.

Lời giải.

Ta có: $AB = AD = 2$, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2\sqrt{2}$, $BC = \sqrt{AD^2 + \left(\frac{1}{2}CD\right)^2} = 2\sqrt{2}$.

Tam giác BCD vuông cân tại B do $CD^2 = BD^2 + BC^2$ và $BD = BC = 2\sqrt{2}$.

Kéo dài $AD \cap BC = E$. Kẻ $AF \perp BE$ tại F. Khi đó $AF \parallel BD$.



Dễ chứng minh: $\triangle BCD = \triangle BED$, $\triangle ABF = \triangle AEF$, $AF = BF = \dfrac{1}{2}BD = \sqrt{2}$.

Thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi tam giác ECD khi quay xung quanh đường thẳng BC bằng 2 lần thể tích khối nón sinh ra bởi tam giác BCD khi quay xung quanh đường thẳng BC (bán kính đáy BD, đường cao BC):

$$V_1 = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi BD^2 \cdot BC = \frac{32\sqrt{2}\pi}{3}.$$

Thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi tam giác ABE khi quay xung quanh đường thẳng BC bằng 2 lần thể tích khối nón sinh ra bởi tam giác ABF khi quay xung quanh đường thẳng BC (bán kính đáy AF, đường cao BF):

$$V_2 = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot AF^2 \cdot BF = \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi.$$

Thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi hình thang $ABCD$ khi quay xung quanh đường thẳng BC là

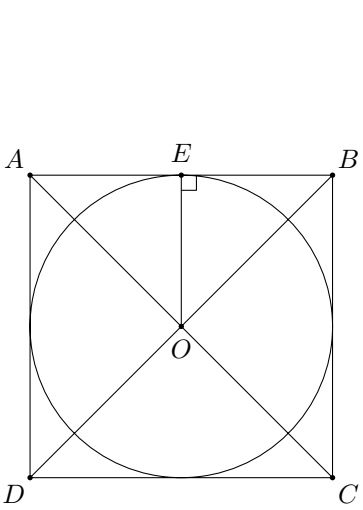
$$V = V_1 - V_2 = \frac{28\sqrt{2}}{3}\pi.$$

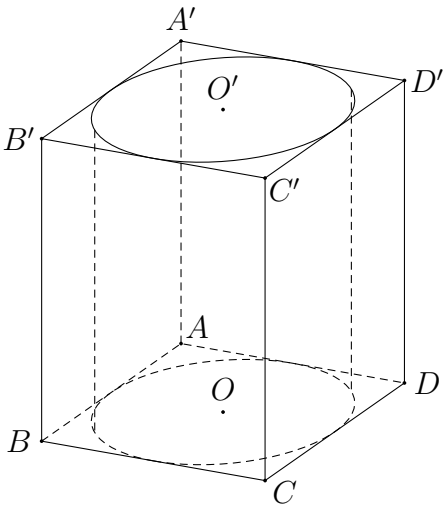
Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Một khối trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của một hình lập phương cạnh a. Tính thể tích V của khối trụ đã cho.

(A) $V = \dfrac{1}{3}a^3\pi$. (B) $V = \dfrac{1}{4}a^3\pi$. (C) $V = a^3\pi$. (D) $V = \dfrac{1}{2}a^3\pi$.

Lời giải.



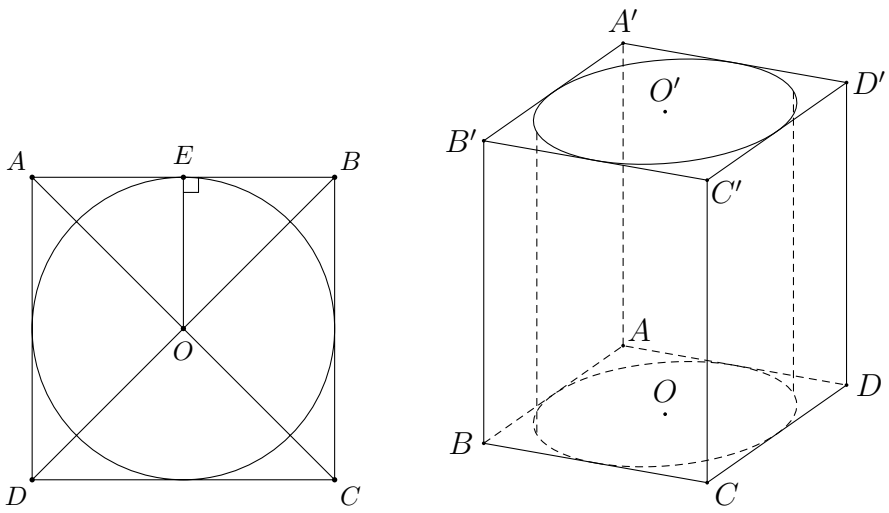


Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Kẻ $OE \perp AB$ tại E, khi đó bán kính của đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ là OE.
Ta có $OE = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$.
Diện tích hình tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ là $S = \pi \cdot OE^2 = \dfrac{1}{4}a^2\pi$.
Gọi h là chiều cao của khối trụ, khi đó $h = AA'$.
Thể tích V của khối trụ đã cho là $V = h \cdot S = AA' \cdot S = a \cdot \dfrac{1}{4}a^2\pi = \dfrac{1}{4}a^3\pi$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Một khối trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của một hình lập phương cạnh a. Tính thể tích V của khối trụ đã cho.

(A) $V = \dfrac{1}{3}a^3\pi$. (B) $V = \dfrac{1}{4}a^3\pi$. (C) $V = a^3\pi$. (D) $V = \dfrac{1}{2}a^3\pi$.

Lời giải.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Kẻ $OE \perp AB$ tại E, khi đó bán kính của đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ là OE. Ta có $OE = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$.
Diện tích hình tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ là $S = \pi \cdot OE^2 = \dfrac{1}{4}a^2\pi$.
Gọi h là chiều cao của khối trụ, khi đó $h = AA'$.
Thể tích V của khối trụ đã cho là $V = h \cdot S = AA' \cdot S = a \cdot \dfrac{1}{4}a^2\pi = \dfrac{1}{4}a^3\pi$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$ có DA vuông góc với (ABC), $DB \perp BC$, $AD = AB = BC = a$. Kí hiệu V_1, V_2, V_3 lần lượt là thể tích của hình tròn xoay sinh bởi tam giác ABD khi quay quanh AD, tam giác ABC khi quay quanh AB, tam giác DBC khi quay quanh BC. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) $V_1 + V_2 = V_3$. (B) $V_1 + V_3 = V_2$. (C) $V_2 + V_3 = V_1$. (D) $V_1 = V_2 = V_3$.

Lời giải.

Quay tam giác ABD khi quay quanh AD ta có $V_1 = \dfrac{1}{3}AD \cdot \pi AB^2 = \dfrac{\pi}{3} \cdot a^3$ (đvtt).

Quay tam giác ABC khi quay quanh AB ta có $V_2 = \dfrac{1}{3}AB \cdot \pi BC^2 = \dfrac{\pi}{3} \cdot a^3$ (đvtt).

Quay tam giác DBC khi quay quanh BC ta có $V_3 = \dfrac{1}{3}BC \cdot \pi BD^2 = \dfrac{\pi}{3} \cdot AB \cdot 2AB^2 = \dfrac{2\pi}{3}a^3$ (đvtt).

Vậy $V_1 + V_2 = V_3$.

Chọn đáp án (A) □

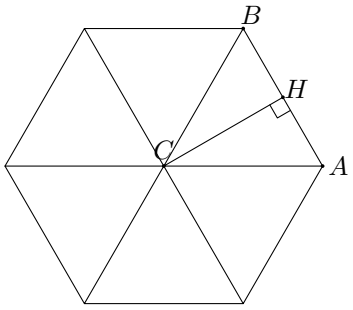
Câu 19. Một đội xây dựng cần hoàn thiện một hệ thống cột trụ tròn của một cửa hàng kinh doanh gồm 10 chiếc. Trước khi hoàn thiện mỗi chiếc cột là một khối bê tông cốt thép hình lăng trụ lục giác đều có cạnh 20 cm, sau khi hoàn thiện mỗi cột là một khối trụ có đường kính đáy bằng 42 cm. Chiều cao của mỗi cột trước và sau khi hoàn thiện là 4 m. Biết lượng xi măng cần dùng chiếm 80% lượng vữa và cứ một bao xi măng 50 kg thì tương đương với 64000 cm^3 xi măng. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu bao xi măng loại 50 kg để hoàn thiện toàn bộ hệ thống cột đã cho?

(A) 25. (B) 18. (C) 28. (D) 22.

Lời giải.

Diện tích của một lục giác đều cạnh a là

$$S = 6\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\,(20)^2\,\sqrt{3}}{2} = 600\sqrt{3}\ \left(\text{cm}^2\right).$$



Tổng thể tích 10 chiếc cột ban đầu là

$$V_1 = 10 \cdot S \cdot h = 10 \cdot 600\sqrt{3} \cdot 400 = 2{,}4 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{3}\ \left(\text{cm}^3\right).$$

Tổng thể tích 10 khối trụ sau khi hoàn thiện là

$$V_2 = 10 \cdot \pi r^2 h = 10\pi \cdot \left(\frac{42}{2}\right)^2 \cdot 400 = 1764000\pi\ \left(\text{cm}^3\right).$$

Thể tích vữa cần dùng là

$$V = V_2 - V_1 = 1764000\pi - 2{,}4 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{3}\ \left(\text{cm}^3\right).$$

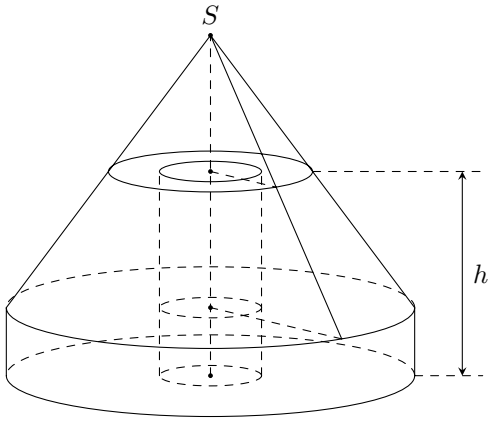
Số bao xi măng cần dùng là

$$n = \frac{0{,}8V}{64000} = \frac{0{,}8\left[1764000\pi - 2{,}4 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{3}\right]}{64000} \approx 17{,}3106.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 20.

Để định vị một trụ điện, người ta cần đúc một khối bê tông có chiều cao $h = 1{,}5\,\text{m}$ gồm



- Phần dưới có dạng hình trụ bán kính đáy $R = 1\,\text{m}$ và có chiều cao bằng $\dfrac{1}{3}h$.
- Phần trên có dạng hình nón bán kính đáy bằng R đã bị cắt bỏ bớt một phần hình nón có bán kính đáy bằng $\dfrac{1}{2}R$ ở phía trên.
- Phần ở giữa rỗng có dạng hình trụ, bán kính đáy bằng $\dfrac{1}{4}R$.

Thể tích của khối bê tông bằng

(A) 2,815 (cm^3). (B) 2,814 (cm^3). (C) 3,403 (cm^3). (D) 3,109 (cm^3).

Lời giải.

Thể tích phần khối trụ phía dưới: $V_1 = \pi R^2 \dfrac{1}{3}h = 0,5\pi\ (\text{cm}^3)$.

Thể tích phần khối nón cụt: $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi\left[R^2 + \left(\dfrac{R}{2}\right)^2 + R.\dfrac{R}{2}\right].\dfrac{2h}{3} = \dfrac{7\pi}{12}\ (\text{cm}^3)$.

Thể tích phần trụ rỗng: $V_3 = \pi\left(\dfrac{R}{4}\right)^2 h = \dfrac{3\pi}{32}\ (\text{cm}^3)$.

Thể tích khối bê tông: $V_1 + V_2 - V_3 \approx 3,109\ (\text{cm}^3)$.

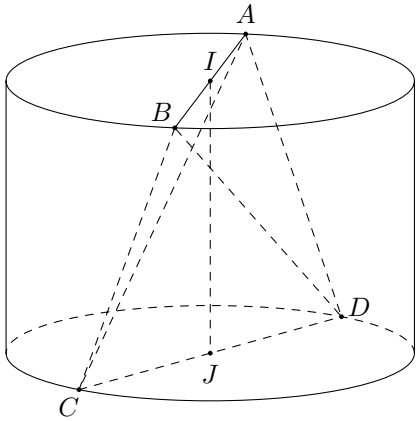
Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Cho khối trụ (T), AB và CD lần lượt là hai đường kính trên các mặt đáy của khối (T). Biết góc giữa AB và CD là $30°$, $AB = 6\,\text{cm}$ và thể tích khối $ABCD$ là $30\,\text{cm}^3$. Khi đó thể tích khối trụ (T) là

(A) $90\pi\ (\text{cm}^3)$. (B) $30\pi\ (\text{cm}^3)$. (C) $45\pi\ (\text{cm}^3)$. (D) $\dfrac{90\pi\sqrt{3}}{270}\ (\text{cm}^3)$.

Lời giải.

Gọi h, V lần lượt là chiều cao và thể tích khối trụ (T).



$\Rightarrow \text{d}\,(AB, CD) = h\ (\text{cm})$.

Ta có

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= \frac{1}{6}h \cdot \sin(AB, CD) \cdot AB \cdot CD \\ &= \frac{1}{6}h \cdot \sin 30° \cdot 6^2 \\ \Rightarrow h &= \frac{6V_{ABCD}}{\sin 30° \cdot 6^2} = 10\ (\text{cm}). \end{aligned}$$

Suy ra $V_{(T)} = \pi\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 \cdot h = 90\pi\ (\text{cm}^3)$.

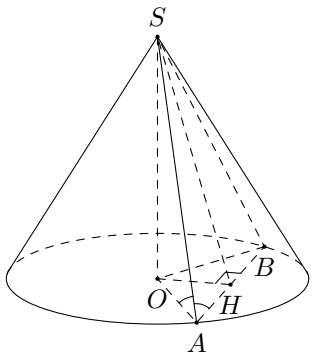
Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Cho hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O bán kính R. Trên đường tròn (O) lấy hai điểm A, B sao cho tam giác OAB vuông. Biết diện tích tam giác SAB bằng $R^2\sqrt{2}$. Thể tích hình nón đã cho bằng

(A) $\dfrac{\pi R^3\sqrt{14}}{12}$. (B) $\dfrac{\pi R^3\sqrt{14}}{2}$. (C) $\dfrac{\pi R^3\sqrt{14}}{6}$. (D) $\dfrac{\pi R^3\sqrt{14}}{3}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của đoạn AB.



Nhận thấy:

Tam giác OAB vuông cân tại O.

Mặt khác: $OH \perp AB, SH \perp AB$ nên góc giữa hai mặt phẳng $(SAB), (OAB)$ bằng $\varphi = \widehat{SHO}$.

Ta có: $S_{\triangle OAB} = S_{\Delta AAB} \cdot \cos\varphi \Rightarrow \frac{1}{2}R^2 = R^2\sqrt{2} \cdot \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Mà $\cos\varphi = \dfrac{OH}{SH} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \dfrac{\frac{R\sqrt{2}}{2}}{SH} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow SH = \dfrac{R\sqrt{2}}{2} \cdot 2\sqrt{2} = 2R.$

$\Rightarrow SO = \sqrt{SH^2 - OH^2} = \sqrt{4R^2 - \left(\dfrac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{R\sqrt{14}}{2}.$

Vậy thể tích của khối nón bằng $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 \cdot SO = \dfrac{1}{3}\pi R^2 \cdot \dfrac{R\sqrt{14}}{2} = \dfrac{\pi R^3\sqrt{14}}{6}$.

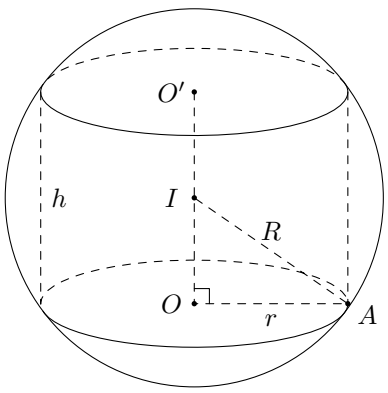
Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Một khối đá có hình là một khối cầu có bán kính R, người thợ thủ công mỹ nghệ cần cắt và gọt viên đá đó thành một viên đá cảnh có hình dạng là một khối trụ. Tính thể tích lớn nhất có thể của viên đá cảnh sau khi đã hoàn thiện.

(A) $\dfrac{4\sqrt{3}\pi R^3}{9}$. (B) $\dfrac{4\sqrt{3}\pi R^3}{3}$. (C) $\dfrac{4\sqrt{3}\pi R^3}{6}$. (D) $\dfrac{3\sqrt{3}\pi R^3}{12}$.

Lời giải.

Vì tính chất cách đều nên I là trung điểm OO'.



Trong tam giác IOA có $r^2 = R^2 - \dfrac{h^2}{4}$.

Khi đó $V = \pi r^2 h = \pi h\left(R^2 - \dfrac{h^2}{4}\right) = f(h)$.

Ta có $f'(h) = \pi R^2 - \dfrac{3\pi}{4}h^2 = 0 \Leftrightarrow h = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Lập bảng biến thiên ta thu được V_{max} khi $h = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Vậy thể tích lớn nhất của viên đá cảnh là $V_{max} = \dfrac{4\sqrt{3}\pi R^3}{9}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Một hình thang cân có chiều cao h và độ dài hai đáy là a, b. Tính thể tích vật thể tròn xoay thu được khi quay hình thang này quanh đường trung trực của hai đáy.

(A) $\frac{1}{3}\pi h\left(a^2+ab+b^2\right)$.
(B) $\frac{1}{6}\pi h\left(a^2+ab+b^2\right)$.
(C) $\frac{1}{12}\pi h\left(a^2+ab+b^2\right)$.
(D) Cả A, B, C đều sai.

Lời giải.

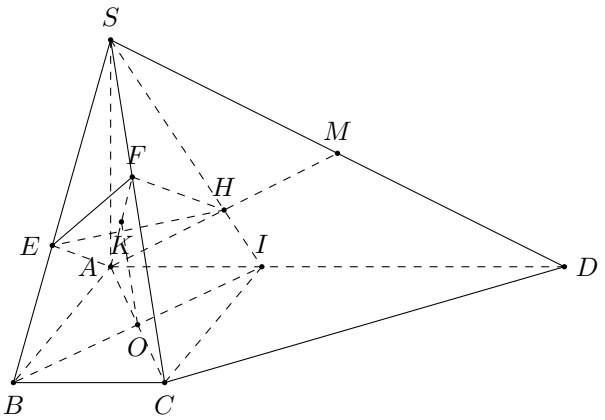
Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD.
Theo giả thiết, ta có $EB=\frac{a}{2}$, $FC=\frac{b}{2}$ và $EF=h$. Đặt $SE=x$.
$\triangle SEB\sim\triangle SFC\Rightarrow\frac{SE}{SF}=\frac{EB}{FC}\Rightarrow\frac{x}{x+h}=\frac{a}{b}\Rightarrow x=\frac{ah}{b-a}$. Suy ra $SF=\frac{ah}{b-a}+h=\frac{bh}{b-a}$.
Thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là
$V=\frac{1}{3}\pi\cdot SF\cdot FC^2-\frac{1}{3}\pi\cdot SE\cdot EB^2=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{bh}{b-a}\cdot\frac{b^2}{4}-\frac{ah}{b-a}\cdot\frac{a^2}{4}\right)$
$=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{h}{4(b-a)}\cdot\left(b^3-a^3\right)=\frac{1}{12}\pi h\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, tứ giác $ABCD$ là hình thang vuông với cạnh đáy AD và BC. Độ dài $AD=3CB=3a$, $AB=a$, $SA=a\sqrt{3}$. Điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AI}$, M là trung điểm SD, H là giao điểm của AM và SI. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SC. Tính thể tích V của khối nón có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác EFH và đỉnh thuộc mặt phẳng $(ABCD)$.

(A) $V=\frac{\pi a^3}{5\sqrt{5}}$.
(B) $V=\frac{\pi a^3}{2\sqrt{5}}$.
(C) $V=\frac{\pi a^3}{\sqrt{5}}$.
(D) $V=\frac{\pi a^3}{10\sqrt{5}}$.

Lời giải.



Nhận xét: Tứ giác $ABCI$ là hình vuông. Dễ chứng minh $BC\perp(SAB)$ và $BI\perp SC$.
$\begin{cases}EA\perp SB\\EA\perp BC\end{cases}\Rightarrow EA\perp(SBC)\Rightarrow EA\perp SC$.
$\begin{cases}EA\perp SC\\FA\perp SC\end{cases}\Rightarrow SC\perp(AEF)$.

Trong tam giác vuông SAB có $\dfrac{SE}{SB}=\dfrac{SA^2}{SB^2}=\dfrac{3}{4}$.

Trong tam giác SAD có $\dfrac{HS}{HI}\cdot\dfrac{AI}{AD}\cdot\dfrac{MD}{MS}=1\Rightarrow\dfrac{HS}{HI}=3\Rightarrow\dfrac{SH}{SI}=\dfrac{3}{4}$.

Trong tam giác SBI có $\dfrac{SE}{SB}=\dfrac{SH}{SI}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow EH\parallel BI$. Do $BI\perp SC$ nên $EH\perp SC$.

Suy ra các điểm A,E,F,H cùng thuộc mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC. Gọi K là trung điểm AF.

Vì $\begin{cases}EA\perp EF\\AH\perp FH\end{cases}\Rightarrow K$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔEFH.

Ta có: $AF=\dfrac{SA\cdot AC}{SC}=\dfrac{a\sqrt{3}a\sqrt{2}}{a\sqrt{5}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$.

Suy ra bán kính đáy của khối nón là $R=\dfrac{1}{2}AF=\dfrac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{5}}$.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCI$.

Do $\begin{cases}SC\perp(EFH)\\OK\parallel SC\end{cases}\Rightarrow OK\perp(EFH)\Rightarrow O$ là đỉnh của khối nón.

Chiều cao của khối nón là $h=\dfrac{1}{2}FC=\dfrac{1}{2}\sqrt{AC^2-AF^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2-\dfrac{6}{5}a^2}=\dfrac{a}{\sqrt{5}}$.

Vậy thể tích khối nón là $V=\dfrac{1}{3}\cdot\pi R^2\cdot h=\dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{5}}\right)^2\cdot\dfrac{a}{\sqrt{5}}=\dfrac{\pi a^3}{10\sqrt{5}}$.

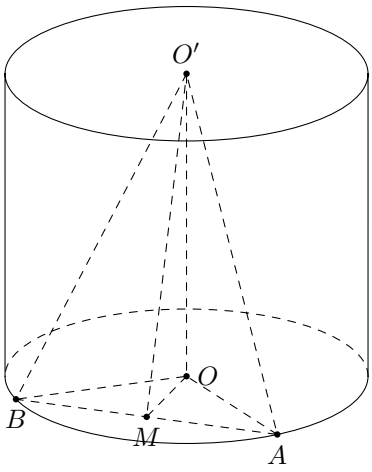
Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O;R)$ và $(O';R)$. AB là một dây cung của đường tròn $(O;R)$ sao cho tam giác $O'AB$ là tam giác đều và mặt phẳng $(O'AB)$ tạo với mặt phẳng chứa đường tròn $(O;R)$ một góc 60°. Tính theo R thể tích V của khối trụ đã cho.

(A) $V=\dfrac{\pi\sqrt{7}R^3}{7}$. (B) $V=\dfrac{3\pi\sqrt{5}R^3}{5}$. (C) $V=\dfrac{\pi\sqrt{5}R^3}{5}$. (D) $V=\dfrac{3\pi\sqrt{7}R^3}{7}$.

Lời giải.

Đặt độ dài cạnh $AB = x (x > 0)$ và M là trung điểm AB.



Vì tam giác $O'AB$ đều nên $O'A = O'B = AB = x \Rightarrow O'M = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

Vì mặt phẳng $(O'AB)$ tạo với mặt phẳng chứa đường tròn $(O; R)$ góc 60° nên $\widehat{O'MO} = 60^\circ$.

Xét tam giác $O'OM$ vuông tại O ta có: $\cos\widehat{O'MO} = \dfrac{OM}{O'M}$. Suy ra

$$\cos 60^\circ = \frac{OM}{\dfrac{x\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow OM = \frac{x\sqrt{3}}{4}$$

Xét tam giác OAM vuông ở M có: $OA^2 = OM^2 + AM^2$ nên

$R^2 = \left(\dfrac{x\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow R^2 = \dfrac{7}{16}x^2 \Rightarrow x = \dfrac{4\sqrt{7}}{7}R.$

Do đó: $O'M = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{21}}{7}R$ và $OM = \dfrac{x\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}R.$

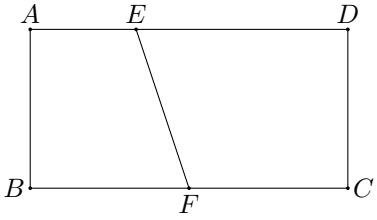
Vì vậy, ta có $OO' = \sqrt{O'M^2 - OM^2} = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}R.$

Vậy thể tích khối trụ là $V = \pi R^2.h = \pi R^2 \cdot \dfrac{3\sqrt{7}}{7}R \Rightarrow V = \dfrac{3\pi\sqrt{7}R^3}{7}.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 27.

Có một miếng bìa hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 3$ và $AD = 6$. Trên cạnh AD lấy điểm E sao cho $AE = 2$, trên cạnh BC lấy điểm F là trung điểm BC. Cuốn miếng bìa lại sao cho cạnh AB và DC trùng nhau để tạo thành mặt xung quanh của một hình trụ. Khi đó tính thể tích V của tứ diện $ABEF$.



(A) $V = \dfrac{\pi}{3}$. (B) $V = \dfrac{9\sqrt{3}}{2\pi^2}$. (C) $V = \dfrac{3\pi^3}{2}$. (D) $V = \dfrac{2}{3\pi^2}$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra BF là đường kính đường tròn đáy của hình trụ.

Kẻ đường sinh FK, gọi O là trung điểm AK.

Gọi r là bán kính đáy, suy ra $2\pi r = 6 \Leftrightarrow r = \dfrac{3}{\pi}$.

Đặt $\widehat{AOE} = \alpha$ (rad). Trong hình chữ nhật $ABCD$ có $AE = 2$.

$\Rightarrow l_{\widehat{AE}} = r.\alpha = 2 \Rightarrow \widehat{AOE} = \alpha = \dfrac{2}{r} = \dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow \widehat{EOK} = \dfrac{\pi}{3}$, suy ra tam giác EOK là tam giác đều cạnh $r = \dfrac{3}{\pi}$. Gọi H là trung điểm $OK \Rightarrow EH \perp AK,\ EH \perp AB.$

$\Rightarrow EH \perp (ABFK) \Rightarrow d(E, (ABF)) = EH = \dfrac{r\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}.$

Diện tích tam giác ABF là $S = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot BF = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot \dfrac{6}{\pi} = \dfrac{9}{\pi}.$

Thể tích khối tứ diện $ABEF$ là $V = \dfrac{1}{3}S_{ABF} \cdot d(E, (ABF)) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{9}{\pi} \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2\pi^2}.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 3. Tính diện tích xung quanh của hình nón có đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ và chiều cao bằng chiều cao của hình chóp.

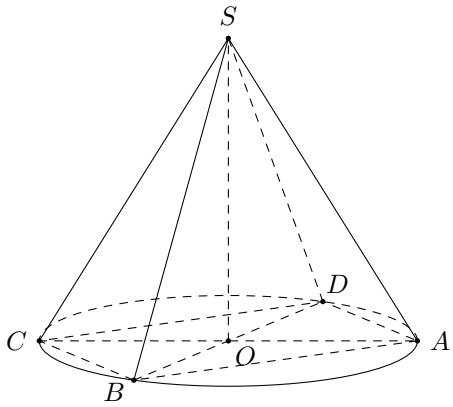
(A) $S_{xp}=\dfrac{9\pi}{2}$. (B) $S_{xq}=\dfrac{9\sqrt{2}\pi}{4}$. (C) $S_{xq}=9\pi$. (D) $S_{xq}=\dfrac{9\sqrt{2}\pi}{2}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Do hình chóp $S.ABCD$ đều nên $SO\perp(ABCD)$.

Khối nón có đáy là hình tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ nên có bán kính là $r=OA=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $S_{\text{xq}}=\pi r\ell=\pi\cdot\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cdot 3=\dfrac{9\sqrt{2}\pi}{2}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Một hình nón có chiều cao $2a$, bán kính đáy $a\sqrt{2}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt đáy góc 60°. Tính diện tích thiết diện.

(A) $\dfrac{5\sqrt{2}a^2}{3}$. (B) $\dfrac{4\sqrt{3}a^2}{3}$. (C) $\dfrac{5\sqrt{3}a^2}{3}$. (D) $\dfrac{4\sqrt{2}a^2}{3}$.

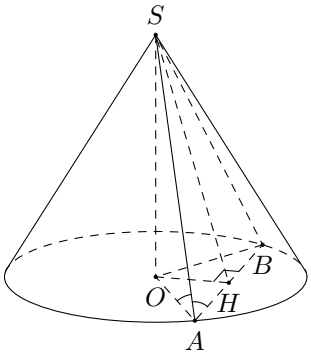
Lời giải.

Dễ thấy góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt đáy là góc $\widehat{SHO}=60^\circ$.

Xét tam giác vuông SOH có $OH=2a\cdot\cot 60^\circ=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$; $SH=\dfrac{2a}{\sin 60^\circ}=\dfrac{4a}{\sqrt{3}}$.

Lại có $AB=2\cdot HB=2\sqrt{OB^2-OH^2}=2\sqrt{2a^2-\dfrac{4a^2}{3}}=\dfrac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}$.

Vậy $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}SH\cdot AB=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4a}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{2}a^2}{3}$.



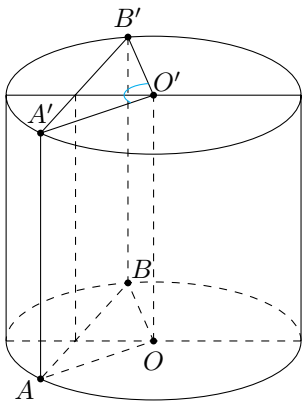
Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Cho hình trụ có tâm hai đáy lần lượt là O và O'; bán kính đáy hình trụ bằng a. Trên hai đường tròn (O) và (O') lần lượt lấy hai điểm A và B sao cho AB tạo với trục của hình trụ một góc 30° và có khoảng cách tới trục của hình trụ bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính diện tích toàn phần của hình trụ đã cho

(A) $2\pi a^2(\sqrt{3}+1)$. (B) $\dfrac{\pi a^2}{3}(\sqrt{3}+2)$. (C) $\pi a^2(\sqrt{3}+2)$. (D) $\dfrac{2\pi a^2}{3}(\sqrt{3}+3)$.

Lời giải.

Gọi A' là hình chiếu của A trên (O'); B' là hình chiếu của B trên (O).
Khi đó $OO' \parallel AA'$ nên $\left(\widehat{AB, OO'}\right) = \widehat{(AB, AA')} = \widehat{BAA'} = 30^\circ$ (do $\triangle ABA'$ vuông tại B).
Gọi I là trung điểm $A'B$. Do $OO' \parallel (AA'BB')$ nên



$$d(OO', AB) = d(OO', (AA'BB')) = d(O', (AA'BB')) = O'I = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Ta có $A'B = 2BI = 2\sqrt{O'B^2 - O'I^2} = 2\sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = a.$

$$OO' = AA' = A'B \cdot \cot 30^\circ = a\sqrt{3}.$$

Diện tích toàn phần: $S_{hp} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi a \cdot a\sqrt{3} + 2\pi a^2 = 2\pi a^2(\sqrt{3}+1)$.

Chọn đáp án (A) □

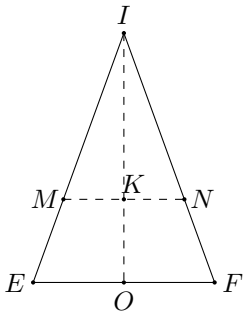
Câu 31. Cho hình nón đỉnh I, đường cao SO và có độ dài đường sinh bằng 3 cm, góc ở đỉnh bằng 60°. Gọi K là điểm thuộc đoạn SO thỏa mãn $IO = \frac{3}{2}IK$, cắt hình nón bằng mặt phẳng (P) qua K và vuông góc với IO, khi đó thiết diện tạo thành có diện tích là S. Tính S.

(A) $S = \frac{\pi}{3}(\text{cm}^2)$. (B) $S = \pi(\text{cm}^2)$. (C) $S = 3\pi(\text{cm}^2)$. (D) $S = \frac{2\pi}{3}(\text{cm}^2)$.

Lời giải.

Xét tam giác IOF vuông tại O ta có:

$$EF = 2OF = 2 \cdot \sin 30^\circ \cdot 3 = 3 \text{ (cm)}.$$



Mặt khác thiết diện đi qua điểm K và vuông góc với IO nên $MN \parallel EF$.
Ta xét tỉ lệ: $\frac{MN}{EF} = \frac{IK}{IO} \Leftrightarrow MN = \frac{IK \cdot EF}{IO} = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$ (cm).
Vậy bán kính của thiết diện là: $KN = \frac{MN}{2} = 1$ (cm). Suy ra: $S = \pi$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Cho hình nón (N) có bán kính đáy bằng 6 và chiều cao bằng 12. Mặt cầu (S) ngoại tiếp hình nón (N) có tâm là I. Một điểm M di động trên mặt đáy của nón (N) và cách I một đoạn bằng 6. Quỹ tích tất cả các điểm M tạo thành đường cong có tổng độ dài bằng

(A) 6π. (B) $6\pi\sqrt{2}$. (C) $3\pi\sqrt{7}$. (D) $4\pi\sqrt{6}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của đáy. Đặt $OI = a \Rightarrow AI = 12 - a$.
Để I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình nón thì $IA = IB \Rightarrow \sqrt{6^2 + a^2} = 12 - a \Rightarrow a = 4,5$.
M thuộc mặt đáy cách I một khoảng bằng $6 \Rightarrow IM = 6$.

Xét $\triangle IOM$ vuông tại O: $OM = \sqrt{IM^2 - IO^2} = \sqrt{15,75}$.

Suy ra tập hợp M là đường tròn tâm O bán kính OM. Chu vi là $2\pi\sqrt{15,75} = 3\pi\sqrt{7}$.

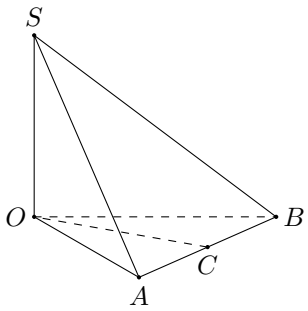
Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO. Gọi A, B là hai điểm thuộc đường tròn đáy của hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng $2a$, $\widehat{SAO} = 30^\circ$, $\widehat{SAB} = 60^\circ$. Diện tích xung quanh hình nón đã cho bằng

(A) $2\pi a^2\sqrt{3}$. (B) $\dfrac{3\pi a^2\sqrt{2}}{4}$. (C) $4\pi a^2\sqrt{3}$. (D) $3\pi a^2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Đặt $OA = R$. Gọi C là trung điểm của AB.



Tam giác OAB cân tại $O \Rightarrow OC \perp AB \Rightarrow OC = 2a$.

Ta tính được: $SA = SB = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ và $AB = 2AC = 2\sqrt{R^2 - 4a^2}$.

Xét tam giác SAB có $\begin{cases} SA = SB \\ \widehat{SAB} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle SAB$ đều.

$\Rightarrow SA = AB \Leftrightarrow \dfrac{4R^2}{3} = 4\left(R^2 - 4a^2\right) \Rightarrow R = \sqrt{6}a \Rightarrow SA = 2\sqrt{2}a$.

Diện tích xung quanh của hình nón đã cho là: $S = \pi R.SA = 4\pi a^2\sqrt{3}$.

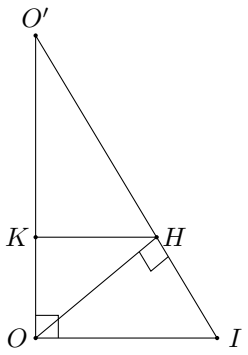
Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Cho hình trụ có trục OO', bán kính đáy r và chiều cao $h = \dfrac{3r}{2}$. Hai điểm M, N di động trên đường tròn đáy (O) sao cho OMN là tam giác đều. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên $(O'MN)$. Khi M, N di động trên đường tròn (O) thì đoạn thẳng OH tạo thành mặt xung quanh của một hình nón, diện tích S của mặt này.

(A) $S = \dfrac{9\sqrt{3}\pi r^2}{32}$. (B) $S = \dfrac{9\sqrt{3}\pi r^2}{16}$. (C) $S = \dfrac{9\pi r^2}{32}$. (D) $S = \dfrac{9\pi r^2}{16}$.

Lời giải.

Trong (O) kẻ $OI \perp MN$ tại I. Khi đó ta có $MN \perp (OO'I) \Rightarrow (OO'I) \perp (O'MN)$.



Trong $(OO'I)$ kẻ $OH \perp O'I$ tại $H \Rightarrow OH \perp (O'MN)$ tại H nên H là hình chiếu vuông góc của O lên $(O'MN)$.

Tam giác OMN đều cạnh r, có OI là đường trung tuyến nên $OI = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác $O'OI$ vuông tại O, đường cao OH nên ta có

$\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{O'O^2} + \dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{4}{9r^2} + \dfrac{4}{3r^2} = \dfrac{16}{9r^2} \Rightarrow OH = \dfrac{3r}{4}$.

$O'I = \sqrt{O'O^2 + OI^2} = r\sqrt{3}$.

$O'O^2 = O'H \cdot O'I \Rightarrow \dfrac{O'H}{O'I} = \dfrac{O'O^2}{O'I^2} = \dfrac{3}{4}$.

Kẻ $HK \perp O'O$ tại K ta có KH là bán kính đáy của mặt nón.

Ta có $\dfrac{HK}{OI} = \dfrac{O'H}{O'I} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow HK = \dfrac{3}{4}OI = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}r$.

Diện tích S cần tính là $S = \pi \cdot HK \cdot OH = \pi \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{8}r \cdot \dfrac{3r}{4} = \dfrac{9\sqrt{3}r^2}{32}$.

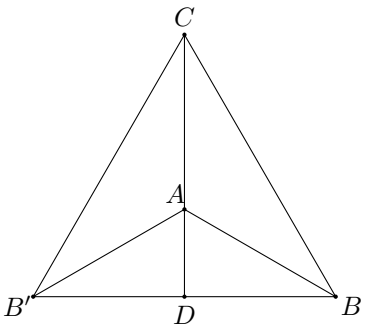
Chọn đáp án (A) □

Câu 35. Cho tam giác ABC cân tại A, biết $AB = 2a$ và góc $\widehat{ABC} = 30°$, cho tam giác ABC quay xung quanh đường thẳng AC được khối tròn xoay. Khi đó thể tích khối tròn xoay bằng

(A) $2\pi a^3$. (B) $6\pi a^3$. (C) $\dfrac{2\pi a^3}{3}$. (D) $2a^3$.

Lời giải.

Gọi D là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng AC.



V_1 là thể tích khối nón tròn xoay sinh bởi tam giác vuông CDB khi quay quanh trục CD.

V_2 là thể tích khối nón tròn xoay sinh bởi tam giác vuông ADB khi quay quanh trục AD.

Khi đó thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = V_1 - V_2$.

Tam giác ABC cân tại A và $AB = 2a = AC$, $\widehat{ABC} = 30° \Rightarrow \widehat{CAB} = 120°$ và $\widehat{DAB} = 60°$.

Do đó $DB = AB \cdot \sin 60° = a\sqrt{3}$.

Vậy ta có

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot DB^2 \cdot DC - \frac{1}{3}\pi \cdot DB^2 \cdot DA = \frac{1}{3}\pi \cdot DB^2(DC - DA) = \frac{1}{3}\pi \cdot DB^2 \cdot AC = \frac{1}{3}\pi \cdot (a\sqrt{3})^2 \cdot 2a = 2\pi a^3$$

.

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Một hộp đựng mỹ phẩm được thiết kế có thân hộp là hình trụ có bán kính hình tròn đáy $r = 5cm$, chiều cao $h = 6cm$ và nắp hộp là một nửa hình cầu. Người ta cần sơn mặt ngoài của cái hộp đó thì diện tích S cần sơn là

(A) $S = 80\pi \text{cm}^2$. (B) $S = 110\pi \text{cm}^2$. (C) $S = 160\pi \text{cm}^2$. (D) $S = 130\pi \text{cm}^2$.

Lời giải.

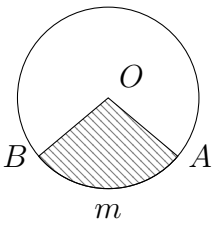
Diện tích xung quanh phần thân hộp là: $S_1 = 2\pi \cdot 5 \cdot 6 = 60\pi(\text{cm}^2)$.
Diện tích xung quanh nửa hình cầu là: $S_2 = \dfrac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot 5^2 = 50\pi(\text{cm}^2)$.
Diện tích cần sơn là: $S = S_1 + S_2 = 110\pi(\text{cm}^2)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Cho khối trụ có bán kính đáy bằng $4(cm)$ và chiều cao $5(cm)$. Gọi AB là một dây cung đáy dưới sao cho $AB = 4\sqrt{3}(cm)$. Người ta dựng mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B và tạo với mặt phẳng đáy hình trụ một góc 60° như hình vẽ. Tính diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (P).

(A) $\dfrac{8(4\pi - 3\sqrt{3})}{3}(\text{cm}^2)$. (B) $\dfrac{4(4\pi - \sqrt{3})}{3}(\text{cm}^2)$. (C) $\dfrac{4(4\pi - 3\sqrt{3})}{3}(\text{cm}^2)$. (D) $\dfrac{8(4\pi - \sqrt{3})}{3}(\text{cm}^2)$.

Lời giải.

Gọi S là diện tích thiết diện, S' là diện tích hình chiếu của thiết diện lên mặt phẳng đáy. Khi đó $S' = S \cdot \cos 60^\circ$.



Ta có $AB = 4\sqrt{3} \Rightarrow \cos \widehat{AOB} = \dfrac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ$.

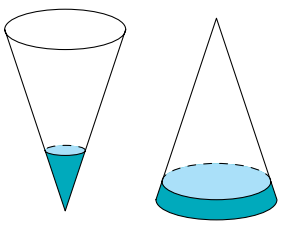
$$\Rightarrow \begin{cases} S_{OAB} = \dfrac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin 120^\circ = 4\sqrt{3} \\ S_{OAmB} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot OA^2 = \dfrac{16\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow S' = S_{OAmB} - S_{OAB} = \dfrac{4(4\pi - 3\sqrt{3})}{3}.$$

$$\Rightarrow S = \dfrac{S'}{\cos 60^\circ} = \dfrac{8(4\pi - 3\sqrt{3})}{3}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 38.

Một khối đồ chơi có dạng khối nón, chiều cao bằng 20 cm, trong đó có chứa một lượng nước. Nếu đặt khối đồ chơi theo hình H_1 thì chiều cao lượng nước bằng $\dfrac{2}{3}$ chiều cao của khối nón. Hỏi nếu đặt khối đồ chơi theo hình H_2 thì chiều cao h' của lượng nước trong khối đó gần với giá trị nào sau đây?

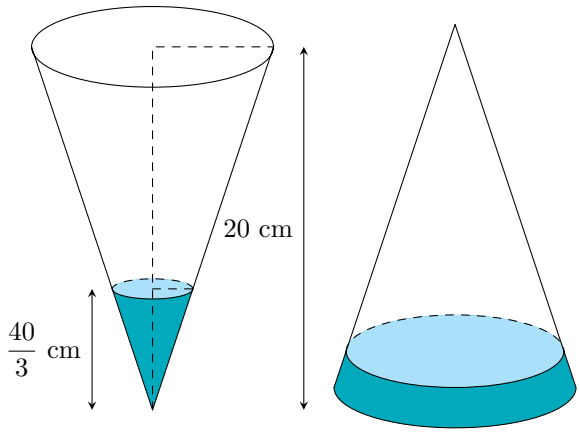


(A) 2,21 cm. (B) 5,09 cm. (C) 6,67 cm. (D) 5,93 cm.

Lời giải.

Gọi r_1, h_1, V_1 lần lượt là bán kính đáy, chiều cao và thể tích khối nón giới hạn bởi phần chứa nước lúc ban đầu; r, h, V lần lượt là bán kính đáy, chiều cao và thể tích khối nón giới hạn bởi cái phễu; h' là chiều cao mực nước sau khi lộn ngược phễu. Theo tính chất tam giác đồng dạng ta có

$$\frac{r_1}{r}=\frac{h_1}{h}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{V_1}{V}=\left(\frac{h_1}{h}\right)^3=\frac{8}{27}.$$



Sau khi lộn ngược phễu, tỉ số thể tích giữa phần không gian trong phễu không chứa nước và thể tích phễu bằng

$$1-\frac{8}{27}=\frac{(h-h')^3}{h^3}\Leftrightarrow\frac{19}{27}=\frac{(20-h')^3}{20^3}\Leftrightarrow h'\approx 2{,}21\text{ cm}.$$

Chọn đáp án (A) □

Dạng 2. Khối tròn xoay nội, ngoại tiếp đa diện

Câu 1. Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng $36\pi a^2$. Tính thể tích V của lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ.

(A) $27\sqrt{3}a^3$. (B) $24\sqrt{3}a^3$. (C) $36\sqrt{3}a^3$. (D) $81\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.

Ta có $S_{xq}=36\pi a^2=2\pi Rh$.

Do đó thiết diện qua trục là hình vuông nên ta có $2R=h$.

Khi đó $h^2=36a^2\Rightarrow h=6a;R=3a$.

Diện tích của mặt đáy hình lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ là $B=6\cdot\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{27a^2\sqrt{3}}{2}$.

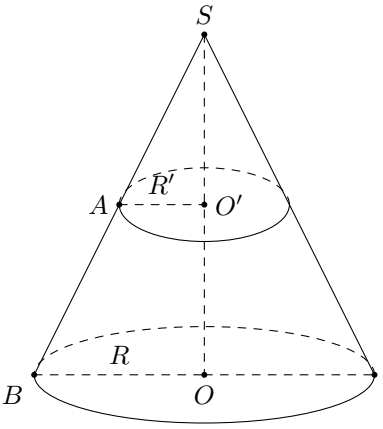
Thể tích V của lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ là $V=B\cdot h=81a^3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Cho hình nón N_1 đỉnh S đáy là đường tròn $C(O;R)$, đường cao $SO=40$cm. Người ta cắt nón bằng mặt phẳng vuông góc với trục để được nón nhỏ N_2 có đỉnh S và đáy là đường tròn $C'(O';R')$. Biết rằng tỷ số thể tích $\dfrac{V_{N_2}}{V_{N_1}}=\dfrac{1}{8}$. Tính độ dài đường cao nón N_2.

(A) 20cm. (B) 5cm. (C) 10cm. (D) 49cm.

Lời giải.



Ta có $V_{N_1} = \dfrac{1}{3}\pi R^2 \cdot SO$, $V_{N_2} = \dfrac{1}{3}\pi R'^2 SO'$.

Mặt khác $\triangle SO'A$ và $\triangle SOB$ đồng dạng nên $\dfrac{R'}{R} = \dfrac{SO'}{SO}$.

Suy ra $\dfrac{V_{N_2}}{V_{N_1}} == \dfrac{R'^2 \cdot SO'}{R^2 \cdot SO} = \left(\dfrac{SO'}{SO}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$.

Do đó $\dfrac{SO'}{SO} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow SO' = \dfrac{1}{2} \cdot 40 = 20$ cm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Một hình tứ diện đều cạnh a có một đỉnh trùng với đỉnh hình nón, ba đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy của hình nón. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

(A) $\pi\sqrt{3}a^2$. (B) $\dfrac{1}{3}\pi\sqrt{2}a^2$. (C) $\dfrac{1}{2}\pi\sqrt{3}a^2$. (D) $\dfrac{1}{3}\pi\sqrt{3}a^2$.

Lời giải.

Do đáy hình chóp là tam giác đều nên bán kính đáy của hình nón $r = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$.

Đường sinh của hình nón có độ dài bằng cạnh của hình tứ diện đều.

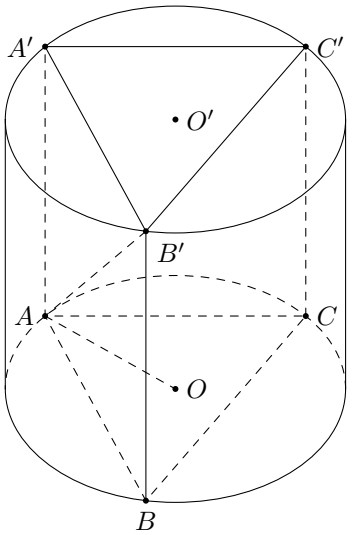
Vậy diện tích xung quanh hình nón là $\pi \cdot r \cdot 1 = \pi \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3}a \cdot a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi a^2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$có độ dài cạnh đáy bằng a, góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

(A) $V = a^3\pi\sqrt{3}$. (B) $V = \dfrac{4a^3\pi\sqrt{3}}{3}$. (C) $V = \dfrac{a^3\pi\sqrt{3}}{9}$. (D) $V = \dfrac{a^3\pi\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Gọi O và O' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$.

Do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên $\triangle ABC$ là tam giác đều và $B'B \perp (ABC)$.

Góc giữa AB' và mặt phẳng (ABC) chính là góc giữa AB' và AB hay $\widehat{B'AB} = 60°$.

Suy ra $BB' = AB \cdot \tan 60° = a\sqrt{3}$.

Lại có $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh a nên $OA = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Mặt khác, hình trụ ngoại tiếp lăng trụ tam giác đều $ABC \cdot A'B'C'$ có đường cao là BB', bán kính đáy là OA.

Vậy thể tích khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ là

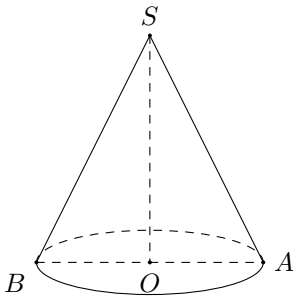
$$V = \pi \cdot OA^2 \cdot BB' = \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và bán kính đáy bằng a. Thể tích của khối nón đã cho bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. (C) $\dfrac{2\pi a^3}{3}$. (D) $\dfrac{\pi a^3}{3}$.

Lời giải.



Gọi khối nón đã cho có S là đỉnh, O là tâm đáy, đường sinh SA.

Ta có $SA = 2a$, $OA = a$. $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

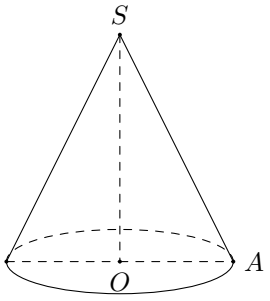
Thể tích của khối nón là $V = \dfrac{1}{3}SO \cdot \pi \cdot OA^2 = \dfrac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \pi \cdot a^2 = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích khối nón đã cho bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. (B) $\dfrac{2\pi a^3}{3}$. (C) $\dfrac{\pi a^3}{3}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Lời giải.



Giả sử khối nón có đỉnh S, đường tròn đáy tâm O và bán kính $R = OA$.

Ta có tam giác SOA vuông tại O nên nên

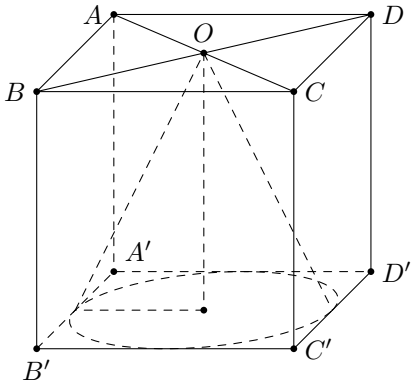
$R = OA = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{(2a)^2 - (a\sqrt{3})^2} = a$.

Thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot a^2 \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Một hình nón có đỉnh là tâm của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$. Kết quả diện tích toàn phần S_{tp} của hình nón đó bằng $\dfrac{\pi a^2}{4}(\sqrt{b} + c)$ với b và c là hai số nguyên dương và $b > 1$. Tính bc.

(A) $bc = 7$. (B) $bc = 15$. (C) $bc = 8$. (D) $bc = 5$.



Lời giải.

Hình nón có đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$ có cạnh là a nên đáy của hình nón là hình tròn có bán kính $r = \dfrac{a}{2}$.

Hình nón có đỉnh là tâm của hình vuông $ABCD$ nên chiều cao của hình nón bằng độ dài cạnh của hình vuông. Suy ra $h = a$.

Khi đó độ dài đường sinh của hình nón là

$$l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Diện tích toàn phần của hình nón là

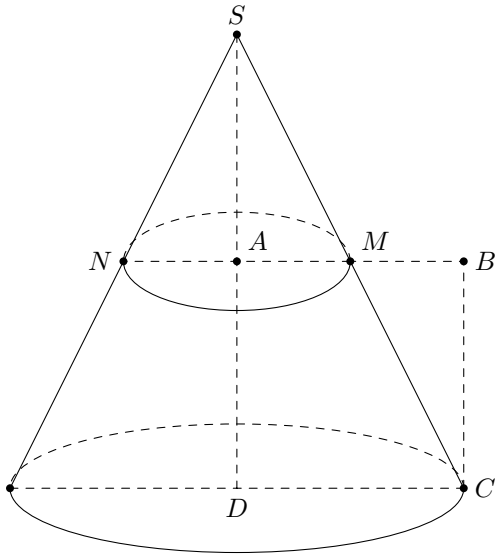
$$S_{tp} = \pi r(r + l) = \pi \frac{a}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\pi a^2}{4}(1 + \sqrt{5}).$$

Suy ra $b = 5$, $c = 1 \Rightarrow bc = 5$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Gọi M là trung điểm AB. Cho tứ giác $AMCD$ và các điểm trong của nó quay quanh trục AD ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích khối tròn xoay đó.

(A) $\dfrac{7\pi}{3}$. (B) $\dfrac{7\pi}{6}$. (C) $\dfrac{14\pi}{3}$. (D) $\dfrac{14\pi}{6}$.



Lời giải.

Gọi S là giao điểm của CM và DA.

Vì M là trung điểm của AB mà $\begin{cases} AM \parallel CD \\ AM = \dfrac{CD}{2} \end{cases}$ nên AM là đường trung bình của $\triangle SCD$, suy ra A là trung điểm của SD. Do đó $SD = 2AD = 4$.

Khi cho tứ giác $AMCD$ và các điểm trong của nó quay quanh trục AD thì ta được một khối nón cụt có chiều cao $AD = 2$, hai đáy là hai đường tròn có bán kính lần lượt là $R_1 = CD = 2$, $R_2 = AM = 1$ và có thể tích là V.

Tam giác SCD và các điểm trong của nó quay quanh trục SD sẽ tạo thành một khối nón tròn xoay có chiều cao $SD = 4$, bán kính đáy $R_1 = CD = 2$ nên có thể tích là $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi R_1^2 \cdot SD = \dfrac{16\pi}{3}$.

Tam giác SAM và các điểm trong của nó quay quanh trục SD tạo thành một khối nón tròn xoay có chiều cao $SA = 2$, bán kính đáy $R_2 = AM = 1$ nên có thể tích là $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi R_2^2.SA = \dfrac{2\pi}{3}$. Ta có $V = V_1 - V_2 = \dfrac{14\pi}{3}$.

Cách khác

Áp dụng công thức tính nhanh thể tích khối nón cụt có chiều cao h, hai bán kính đáy là R_1, R_2.

$V = \dfrac{1}{3}\pi\left(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2\right) \cdot h = \dfrac{1}{3}\pi(4 + 1 + 2) \cdot 2 = \dfrac{14\pi}{3}$.

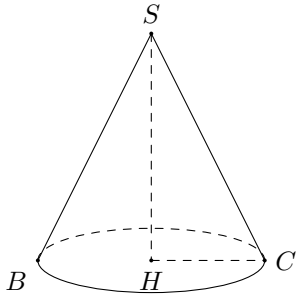
Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Cho hình nón có bán kính đáy bằng 2, góc ở đỉnh bằng 60°. Tính thể tích của khối nón đó.

(A) $\dfrac{8\sqrt{3}\pi}{9}$ cm^3. (B) $8\sqrt{3}\pi$ cm^3. (C) $\dfrac{8\sqrt{3}\pi}{3}$ cm^3. (D) $\dfrac{8\pi}{3}$ cm^3.

Lời giải.

Cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua trục, ta được thiết diện là tam giác ABC cân tại đỉnh A của hình nón.



Do góc ở đỉnh của hình nón là $\widehat{BAC} = 60°$, suy ra $\widehat{HAC} = 30°$. Bán kính đáy $R = HC = 2$ cm. Xét $\triangle AHC$ vuông tại H, ta có $AH = \dfrac{HC}{\tan 30°} = \dfrac{2}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2\sqrt{3}$ cm. Thể tích của khối nón $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 \cdot AH = \dfrac{8\sqrt{3}\pi}{3}$ cm^3.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Gọi (H) là hình tròn xoay thu được khi cho tam giác đều ABC có cạnh a quay quanh AB, tính thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi (H).

(A) $\dfrac{\pi a^3}{4}$. (B) $\dfrac{\pi a^3}{8}$. (C) $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$. (D) $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Khi cho tam giác đều ABC có cạnh a quay quanh AB ta thu được hai khối nón có cùng chiều cao $h = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$ và cùng bán kính đáy $r = h_B = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó $V = 2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \pi = \dfrac{\pi a^3}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$, $AA' = 3a$. Thể tích khối nón có đỉnh trùng với tâm của hình chữ nhật $ABCD$, đường tròn đáy ngoại tiếp $A'B'C'D'$ là

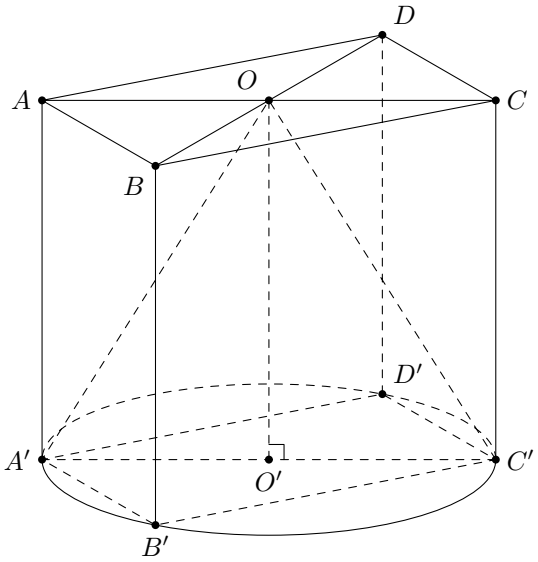
(A) $\dfrac{15\pi a^3}{4}$.. (B) $\dfrac{5\pi a^3}{4}$. (C) $15\pi a^3$. (D) $5\pi a^3$.

Lời giải.

Gọi O, O' lần lượt là tâm hình chữ nhật $ABCD$ và hình chữ nhật $A'B'C'D'$. Ta có đường cao khối nón h$= OO' = AA' = 3a$; bán kính $r = A'O' = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + (2a)^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Vậy thể tích khối nón đã cho là

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 3a = \frac{5\pi a^3}{4}.$$



Chọn đáp án (B) □

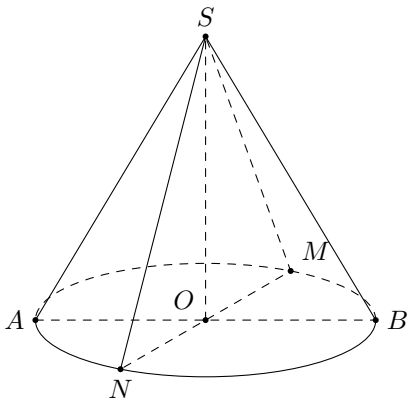
Câu 12. Thể tích của khối nón có thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh a bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{48}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{24}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{8}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{12}$.

Lời giải.

Kí hiệu h, l, r lần lượt là độ dài đường cao, độ dài đường sinh và bán kính đáy của hình nón. Theo giả thiết ta có $\begin{cases} r = \dfrac{1}{2}MN = \dfrac{a}{2} \Rightarrow h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}. \\ l = SM = a \end{cases}$.

Vậy $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \dfrac{a^2}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{24}$.

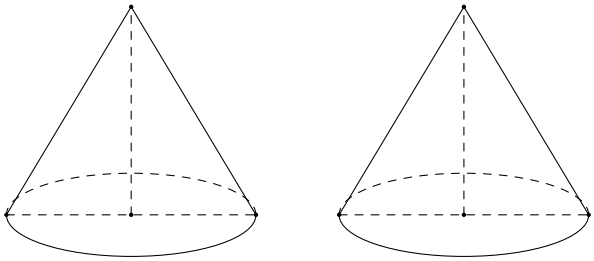


Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Gọi V_1 là thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB và V_2 là thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC. Khi đó, tỷ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

(A) $\dfrac{3}{4}$. (B) $\dfrac{4}{3}$. (C) $\dfrac{16}{9}$. (D) $\dfrac{9}{16}$.

Lời giải.



Ta có công thức tính thể tích khối nón có chiều cao h và bán kính r là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Khi quay tam giác ABC quanh canh AB thì $h = AB = 6$ cm và $r = AC = 8$ cm thì $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 6 = 128\pi$.

Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC thì $h = AC = 8$ cm và $r = AB = 6$ cm thì $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi$.

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{4}{3}$.

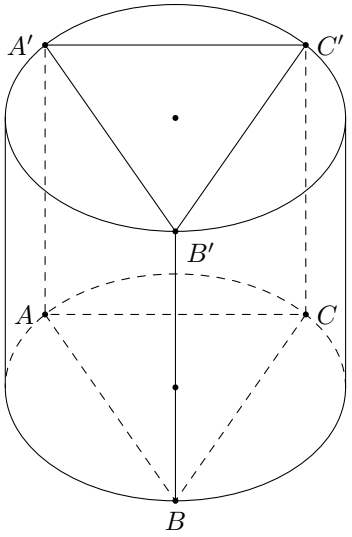
Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Cho hình lăng trụ đều và một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn ngoại tiếp hai mặt đáy của hình lăng trụ. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối lăng trụ và khối trụ. Tính $\dfrac{V_1}{V_2}$.

(A) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4\pi}$. (B) $\dfrac{3\sqrt{5}}{4\pi}$. (C) $\dfrac{5\sqrt{2}}{4\pi}$. (D) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

Lời giải.

Giả sử lăng trụ đều có cạnh đáy là a, chiều cao h. Khi đó, bán kính đáy của hình trụ là $R = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



Do đó $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{h \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}{h \cdot \pi \cdot \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

Cách khác

Đặc biệt hóa lăng trụ đã cho thành lăng trụ có tất cả các cạnh cùng bằng 1.

Khi đó $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{4}}{\pi\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Cắt hình nón (N) bởi một mặt phẳng đi qua trục của nó, ta được thiết diện là một tam giác đều cạnh $2a$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình nón (N) theo a là

(A) $\dfrac{32\sqrt{3}\pi a^3}{27}$. (B) $4\sqrt{3}\pi a^3$. (C) $\dfrac{16\sqrt{2}\pi a^3}{27}$. (D) $\dfrac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27}$.

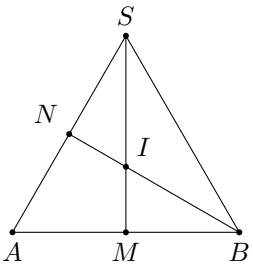
Lời giải.

Giả sử thiết diện là tam giác SAB, với S là đỉnh của hình nón.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, SA.

Khi đó tâm mặt cầu ngoại tiếp hình nón nằm trên đường thẳng SM.

Gọi I là trọng tâm tam giác SBC thì $IA = IS$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình nón (N).



Bán kính mặt cầu là $R = IS = \dfrac{2}{3}SM = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2a = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

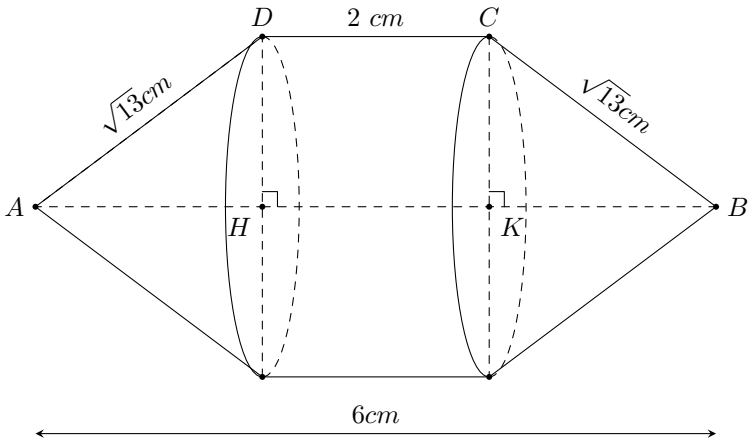
Từ đó thể tích khối cầu là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\dfrac{2a}{\sqrt{3}}\right)^3 = \dfrac{32\sqrt{3}\pi a^3}{27}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Cho hình thang cân $ABCD$, AB song song CD, $AB = 6$ cm, $CD = 2$ cm, $AD = BC = \sqrt{13}$ cm. Quay hình thang $ABCD$ xung quanh đường thẳng AB ta được một khối tròn xoay có thể tích là

(A) 18π (cm^3). (B) 30π (cm^3). (C) 24π (cm^3). (D) 12π (cm^3).

Lời giải.



Kẻ $DH \perp AB$, $CK \perp AB$ với H, $K \in AB$. Suy ra $HK = 2$ cm.

Do $ABCD$ là hình thang cân, $AB = 6$ cm, $CD = 2$ cm nên $AH = BK = 2$ cm.

Do $\triangle ADH, \triangle BCK$ vuông nên $DH = CK = \sqrt{13-4} = 3$ cm.

Đoạn DH quay xung quanh AB tạo thành hình tròn (C_1) tâm H, bán kính $R_1 = HD = 3$ cm.

Đoạn CK quay xung quanh AB tạo thành hình tròn (C_2) tâm K, bán kính $R_2 = CK = 3$ cm.

Gọi (V_1) là thể tích khối nón đỉnh A, đáy là hình tròn (C_1).

Gọi (V_2) là thể tích khối nón đỉnh B, đáy là hình tròn (C_2).

Gọi (V_3) là thể tích khối trụ chiều cao HK và hai đáy là hai hình tròn (C_1), (C_2).

Ta có $V_1 = V_2 = \dfrac{1}{3}\pi \cdot DH^2 \cdot AH = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 2 = 6\pi$ (cm^3).

$V_3 = \pi \cdot DH^2 \cdot HK = \pi \cdot 3^2 \cdot 2 = 18\pi$ (cm^3).

Khi hình thang $ABCD$ quay xung quanh đường thẳng AB ta được một khối tròn xoay có thể tích là

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 6\pi + 6\pi + 12\pi = 30\pi \left(\text{ cm}^3 \right).$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Cho hình nón có đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O sao cho $SO = a\sqrt{5}$, một mặt phẳng (α) cắt mặt nón theo hai đường sinh SA, SB. Biết khoảng cách từ O đến mặt phẳng (α) bằng $2\sqrt{5}$ và diện tích tam giác SAB bằng 360. Thể tích khối nón bằng

(A) $1325\pi\sqrt{5}$. (B) $265\pi\sqrt{5}$. (C) $1325\sqrt{5}$. (D) $265\sqrt{5}$.

Lời giải.

Kẻ $OI \perp AB$, $OH \perp SI \Rightarrow OH = \mathrm{d}(O,(\alpha)) = 2\sqrt{5}$.

Ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OI^2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{OH^2} - \dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{1}{(2\sqrt{5})^2} - \dfrac{1}{(6\sqrt{5})^2} = \dfrac{2}{45}$

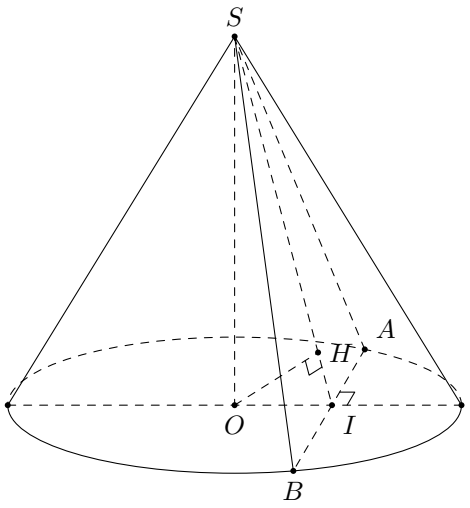
$\Rightarrow OI = \dfrac{3\sqrt{10}}{2}$.

$SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = \sqrt{(6\sqrt{5})^2 + \left(\dfrac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2} = \dfrac{9\sqrt{10}}{2}$.

$S_{SAB} = \dfrac{1}{2} \cdot SI \cdot AB = SI \cdot IA \Rightarrow IA = \dfrac{S_{SAB}}{SI} = \dfrac{360}{\left(\dfrac{9\sqrt{10}}{2}\right)} = 8\sqrt{10}$.

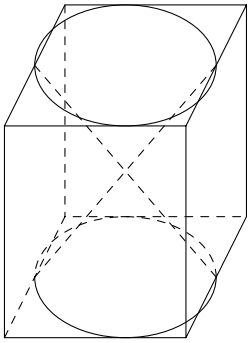
$r = \sqrt{OI^2 + IA^2} = \sqrt{(8\sqrt{10})^2 + \left(\dfrac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2} = \dfrac{5\sqrt{106}}{2}$.

$V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\dfrac{5\sqrt{106}}{2}\right)^2 \cdot 6\sqrt{5} = 1325\pi\sqrt{5}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Một hình hộp đứng có đáy là hình vuông chứa đồng hồ cát như hình vẽ. Tỉ số thể tích của đồng hồ cát và phần còn lại của đồng hồ cát và hình hộp đứng là



(A) $\dfrac{\pi}{24-2\pi}$. (B) $\dfrac{\pi}{6-\pi}$. (C) $\dfrac{\pi}{24-\pi}$. (D) $\dfrac{\pi}{12-\pi}$.

Lời giải.

Gọi $V_{(H)}, V_{(DH)}, V_{(CL)}$ lần lượt là thể tích của hộp đứng, đồng hồ cát và phần còn lại.

Cho cạnh đáy hộp bằng 6, chiều cao hộp bằng 8.

Đồng hồ cát tạo bởi 2 nón bằng nhau và chiều cao nón bằng 4; bán kính đáy nón bằng 3.

Ta có: $V_{(H)} = 8 \cdot 6^2 = 288; V_{(DH)} = 2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 3^2 = 24\pi; V_{(CL)} = V_{(H)} - V_{(DH)} = 288 - 24\pi$.

Theo đề thì đáp án bằng $\dfrac{V_{(DH)}}{V_{(CL)}} = \dfrac{24\pi}{288-24\pi} = \dfrac{\pi}{12-\pi}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Cho khối nón (N) có chiều cao $h = 20$ cm, bán kính đáy $r = 25$ cm. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua đỉnh của (N) và cách tâm của mặt đáy bằng 12 cm. Khi đó (α) cắt (N) theo một thiết diện có diện tích là

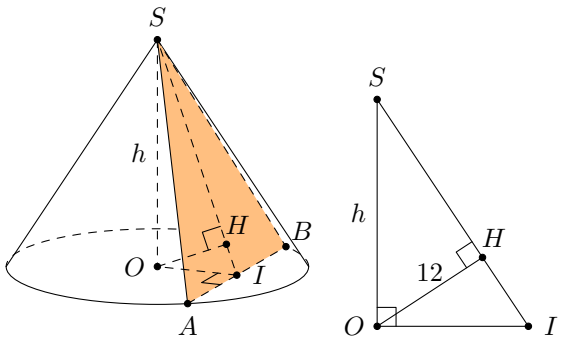
(A) $S = 300$ cm^2. (B) $S = 500$ cm^2. (C) $S = 406$ cm^2. (D) $S = 400$ cm^2.

Lời giải.

Gọi S, O lần lượt là đỉnh và tâm đường tròn đáy của khối nón (N).

Ta có mặt phẳng (α) cắt đường tròn đáy tâm O tại 2 điểm A, B.

Vậy mặt phẳng (α) cắt khối nón theo một thiết diện là $\triangle SAB$.



Kẻ $OI \perp AB, OH \perp SI$.

Ta có $\begin{cases} OI \perp AB \\ SO \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow AB \perp OH$.

Ta có $\begin{cases} AB \perp OH \\ SI \perp OH \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SAB) \Rightarrow \mathrm{d}\,(O, (SAB)) = OH = 12$ cm.

Áp dụng hệ thức lượng cho $\triangle SOI$ vuông tại O có đường cao OH được

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow OI = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{OH^2} - \frac{1}{SO^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{12^2} - \frac{1}{20^2}}} = 15 \text{ cm}.$$

Xét $\triangle AOI$ vuông tại I có

$$IA^2 + OI^2 = AO^2 \Rightarrow IA = \sqrt{AO^2 - OI^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20 \text{ cm}.$$

Xét $\triangle SOI$ vuông tại O có

$$SO^2 + IO^2 = SI^2 \Rightarrow SI = \sqrt{SO^2 + IO^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25 \text{ cm}.$$

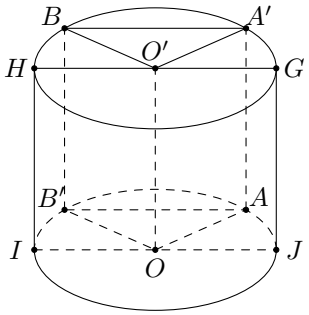
Vậy $S_{SAB} = \dfrac{1}{2} SI \cdot AB = SI \cdot IA = 25 \cdot 20 = 500 \text{ cm}^2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Cho hình trụ có hai đáy là hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$, chiều cao bằng đường kính đáy. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O' lấy điểm B. Thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ có giá trị lớn nhất bằng

(A) $\dfrac{R^3}{2}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}R^3}{3}$. (C) $\dfrac{R^3}{6}$. (D) $\dfrac{R^3}{3}$.

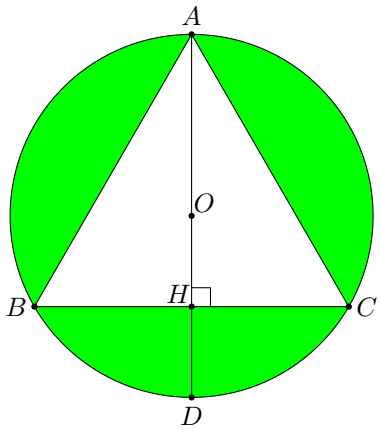
Lời giải.



Ta có $V_{BOO'A} = \dfrac{1}{2}V_{BOO'AA'} = \dfrac{1}{3}V_{OAB'O'A'B} = \dfrac{1}{6}\cdot 2R\cdot R^2\cdot \sin\widehat{AOA'} = \dfrac{R^3}{3} \Rightarrow \max V_{BOO'A} = \dfrac{R^3}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a và nội tiếp trong đường tròn tâm O, AD là đường kính của đường tròn tâm O. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra do phần tô đậm quay quanh đường thẳng AD bằng



(A) $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$. (B) $\dfrac{20\pi a^3\sqrt{3}}{217}$. (C) $\dfrac{23\pi a^3\sqrt{3}}{216}$. (D) $\dfrac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27}$.

Lời giải.

Gọi thể tích của khối tròn xoay sinh ra do phần tô đậm quay quanh đường thẳng AD là V_1.

Gọi Thể tích của khối tròn xoay sinh ra do hình tam giác ABC quay quanh đường thẳng AD là V_2.

Gọi Thể tích của khối tròn xoay sinh ra do hình tròn đường kính AD quay quanh đường thẳng AD là V_3.

Khi đó: $V_1 = V_3 - V_2 = \dfrac{4}{3}\pi\cdot OA^3 - \dfrac{1}{3}\pi\cdot HC^2\cdot AH = \dfrac{4}{3}\cdot\pi\cdot\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^3 - \dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left(\dfrac{a}{2}\right)^2\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{23\pi a^3\sqrt{3}}{216}$.

Chọn đáp án (C) □

Dạng 3. Cực trị và toán thực tế về khối tròn xoay

Câu 1. Thể tích khối nón có bán kính đáy bằng $2a$ và chiều cao bằng $3a$ là

(A) $4\pi a^3$. (B) $12\pi a^3$. (C) $2\pi a^3$. (D) πa^3.

Lời giải.

Ta có $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}\pi(2a)^2 3a = 4\pi a^3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Mặt tiền của một ngôi biệt thự có 8 cây cột trụ tròn, tất cả đều có chiều cao 4,2 m. Trong số các cây đó có hai cây cột trước đại sảnh đường kính bằng 40 cm, sáu cây cột còn lại phân bổ đều hai bên đại sảnh và chúng đều có đường kính bằng 26 cm. Chủ nhà thuê nhân công để sơn các cây cột bằng một loại sơn giả đá, biết giá thuê là 380000/1 m^2. Hỏi người chủ phải chi ít nhất bao nhiêu tiền để sơn hết tất cả các cây cột nhà đó ?

(A) ≈ 15642000. (B) ≈ 12521000. (C) ≈ 10400000. (D) ≈ 11833000.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hai cây cột trước đại sảnh là $S_1 = 2 \cdot (2\pi \cdot 0{,}2 \cdot 4{,}2)$.

Diện tích xung quanh của sáu cây cột trước đại sảnh là $S_2 = 6 \cdot (2\pi \cdot 0{,}13 \cdot 4{,}2)$.

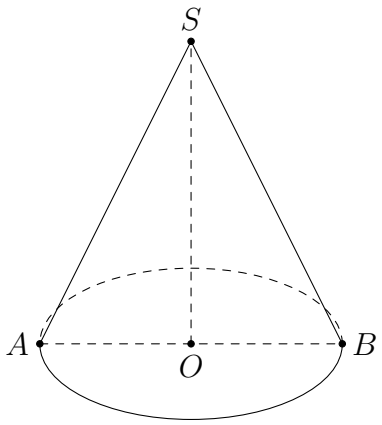
Số tiền người chủ phải trả để sơn hết các cây cột là $(S_1 + S_2) \times 380000 \approx 11833000$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Lượng nguyên liệu cần dùng để làm ra một chiếc nón lá được ước lượng qua phép tính diện tích xung quanh của mặt nón. Cứ 1 kg lá dùng đề làm nón có thể làm ra số nón có tổng diện tích xung quanh là 6,13 m^2. Hỏi nếu muốn làm ra 1000 chiếc nón lá giống nhau có đường kính vành nón 50 cm, chiều cao 30 cm thì cần khối lượng lá gần nhất với con số nào dưới đây?

(A) 50 kg. (B) 76 kg. (C) 48 kg. (D) 38 kg.

Lời giải.



$50 \text{ cm} = 0{,}5 \text{ m}; 30 \text{ cm} = 0{,}3 \text{ m}$.

Theo đề ta có đường kính $AB = 0{,}5$ m, suy ra bán kính đáy $r = \dfrac{AB}{2} = 0{,}25$ m, đường cao $h = 0{,}3$ m.

Độ dài đường sinh $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \dfrac{\sqrt{61}}{20} \Rightarrow S_{xq} = \pi rl = \pi \cdot 0{,}25 \cdot \dfrac{\sqrt{61}}{20} = \pi \dfrac{\sqrt{61}}{80}$ (m^2).

Làm 1000 chiếc nón lá thì có diện tích xung quanh là $1000 \cdot S_{xq} = 1000 \cdot \pi \dfrac{\sqrt{61}}{80} = \pi \cdot \dfrac{25\sqrt{61}}{2}$ (m^2).

Cứ 1 kg lá dùng đề làm nón có thể làm ra số nón có tổng diện tích xung quanh là 6,13 m^2, suy ra khối lượng lá để làm 1000 chiếc nón là $\pi \cdot \dfrac{25\sqrt{61}}{2} : 6{,}13 \approx 50$ kg.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Người ta ngâm một loại rượu trái cây bằng cách xếp 6 trái cây hình cầu có cùng bán kính bằng 5 cm vào một cái bình hình trụ sao cho hai quả nằm cạnh nhau tiếp xúc với nhau, các quả đều tiếp xúc với tất cả các đường sinh của mặt xung quanh của hình trụ, đồng thời quả nằm bên dưới cùng tiếp xúc với mặt đáy trụ, quả nằm bên trên cùng tiếp xúc với nắp của hình trụ, cuối cùng là đổ rượu vào đầy bình. Số lít rượu tối thiểu cần đổ vào bình gần nhất với số nào sau đây?

(A) 1,57. (B) 1,7. (C) 1570. (D) 1,2.

Lời giải.

Thể tích của 6 khối cầu là $V_1 = 6 \cdot \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 6 \cdot \dfrac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = 1000\pi\,(\text{cm}^3)$.
Thể tích của cái bình hình trụ là $V_2 = \pi R^2 \cdot h = \pi \cdot 5^2 \cdot (6 \cdot 10) = 1500\pi\,(\text{cm}^3)$.
Thể tích rượu tối thiểu cần đổ vào bình là $V = V_2 - V_1 = 1500\pi - 1000\pi = 500\pi\,(\text{cm}^3) = 1{,}57(l)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Một khối đồ chơi gồm một khối trụ và một khối nón có cùng bán kính được chồng lên nhau, độ dài đường sinh khối trụ bằng độ dài đường sinh khối nón và bằng đường kính của khối trụ, khối nón. Biết thể tích của toàn bộ khối đồ chơi là 50 cm^3, thể tích khối trụ gần với số nào nhất trong các số sau

(A) 36,5 cm^3. (B) 40,5 cm^3. (C) 38,2 cm^3. (D) 38,8 cm^3.

Lời giải.

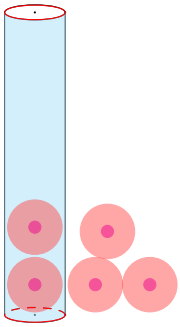
Gọi a(cm) là độ dài đường kính khối trụ, khi đó thể tích khối trụ là $V_T = \pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 a = \dfrac{\pi a^3}{4}$(cm^3).
Dễ thấy chiều cao khối nón là $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên thể tích khối nón là $V_N = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$(cm^3).
Thể tích của toàn bộ khối đồ chơi là

$$\begin{aligned} V = V_N + V_T &\Leftrightarrow \frac{\pi a^3}{4} + \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24} = 50 \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi a^3}{4}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) = 50 \\ &\Leftrightarrow V_T\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) = 50 \\ &\Leftrightarrow V_T = 50 : \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \approx 38,8\,(\text{cm}^3). \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 6.

Một con quạ bị khát nước, nó tìm thấy một bình đựng nước hình trụ, do mức nước trong bình chỉ còn lại hai phần ba so với thể tích của bình nên nó không thể thò đầu vào uống nước được. Nó liền gắp 3 viên bi ve hình cầu để sẵn bên cạnh bỏ vào bình thì mực nước dâng lên vừa đủ đầy bình và nó có thể uống nước. Biết 3 viên bi ve hình cầu đều có bán kính là 1cm và chiều cao của bình hình trụ gấp 8 lần bán kính của nó. Diện tích xung quanh của bình hình trụ nói trên gần với số nào nhất trong các số sau?



(A) 65,8 cm^2. (B) 61,6 cm^2. (C) 66,6 cm^2. (D) 62,3 cm^2.

Lời giải.

Gọi chiều cao của bình nước hình trụ là h(cm).

Gọi bán kính của bình nước hình trụ là R(cm).

Ta có chiều cao của bình nước thì gấp 8 lần bán kính của viên bi ve nên: $h = 8 \cdot 1 = 8$(cm).

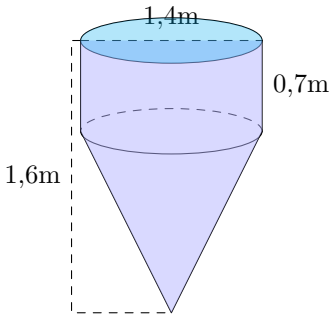
Khi cho ba viên bi vào bình nước thì nước dâng lên đến miệng bình, nên ta có thể tích của ba viên bi bằng một phần ba thể tích của bình nước $3\left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (1)^3\right) = \frac{1}{3} \cdot (8 \cdot \pi R^2) \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{3}{2}}$(cm).

Diện tích xung quanh của bình nước là $S_{xq} = 2\pi Rh = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 8 \approx 61{,}6$ (cm^2).

Chọn đáp án (B) □

Câu 7.

Người ta làm một dụng cụ sinh hoạt gồm hình nón và hình trụ như hình vẽ. Cần bao nhiêu mét vuông vật liệu để làm?



(A) 5,6 m^2. (B) 6,6 m^2. (C) 5,2 m^2. (D) 4,5 m^2.

Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta có các kích thước như sau

Bán kính đáy của hình nón và hình trụ $r = \frac{1{,}4}{2} = 0{,}7$ m.

Chiều cao của hình nón $h = 1{,}6 - 0{,}7 = 0{,}9$ m.

Suy ra độ dài đường sinh của hình nón $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{0{,}9^2 + 0{,}7^2} = \sqrt{1{,}3}$.

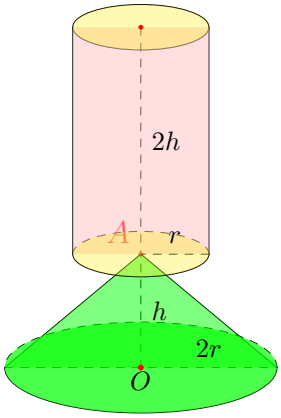
Tổng vật liệu cần làm bằng diện tích xung quanh của khối hình

$$S_{xq} = S_{\text{xp h.nón}} + S_{\text{xq h.trụ}} = \pi rl + 2r\pi \cdot h_{tru} = \pi \cdot 0,7 \cdot \sqrt{1{,}3} + 2 \cdot 0{,}7\pi \cdot 0{,}7 = 5{,}586 \approx 5{,}6.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 8.

Một khối đồ chơi gồm một khối hình trụ (T) gắn chồng lên một khối hình nón (N), lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thoả mãn $r_2 = 2r_1, h_1 = 2h_2$. Biết rằng thể tích của khối nón (N) bằng 20 cm^3. Thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng



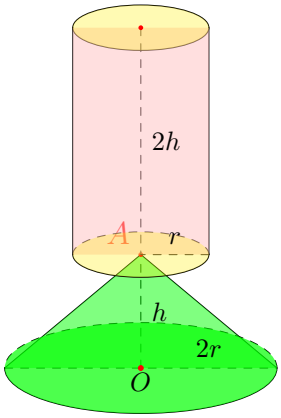
(A) 140 cm^3. (B) 120 cm^3. (C) 30 cm^3. (D) 50 cm^3.

Lời giải.

Thể tích khối nón là $V_N = \dfrac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 = 20$ cm^3.

Thể tích khối trụ là $V_T = \pi r_1^2 h_1 = \pi \left(\dfrac{r_2}{2}\right)^2 2h_2 = \dfrac{3}{2}V_N = 30$ cm^3.

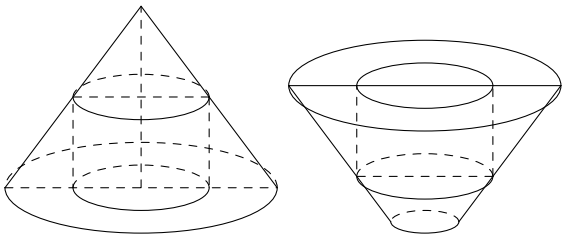
Vậy thể tích của toàn bộ khối đồ chơi là $V = V_N + V_T = 50$ cm^3.



Chọn đáp án (D) □

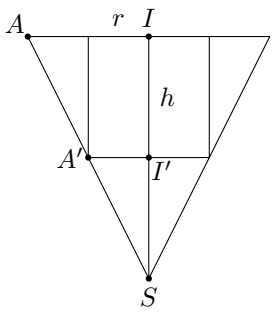
Câu 9.

Khi sản xuất hộp mì tôm các nhà sản xuất luôn để một khoảng trống dưới đáy hộp. Hình vẽ dưới mô tả cấu trúc của hộp mì tôm. Thớ mì tôm có dạng hình trụ, hộp mì có dạng hình nón cụt được cắt ra bởi hình nón có chiều cao 9 cm và bán kính đáy 6 cm. Nhà sản xuất tìm cách sao cho thớ mì tôm có được thể tích lớn nhất vì mục đích thu hút khách hàng. Tìm thể tích lớn nhất đó.



(A) 48π. (B) $\dfrac{81}{2}\pi$. (C) 36π. (D) 54π.

Lời giải.



Ta có mặt cắt qua trục hình nón như hình vẽ. Đặt r là bán kính đáy hình trụ, h là chiều cao của hình trụ.

Thớ mì tôm có được thể tích lớn nhất khi khối trụ có thể tích lớn nhất.

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h$.

Ta có hai tam giác SAI và $SA'I'$ đồng dạng $\Rightarrow \dfrac{SI}{SI'} = \dfrac{AI}{A'I'} \Leftrightarrow \dfrac{9}{9-h} = \dfrac{6}{r} \Rightarrow h = 9 - \dfrac{3r}{2}$.

Khi đó $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot \left(9 - \dfrac{3r}{2}\right) = \pi\left(-\dfrac{3r^3}{2} + 9r^2\right) - 1$.

Khảo sát hàm số V, biến số $r (0 < r < 6); V' = \pi\left(-\dfrac{9r^2}{2} + 18r\right)$.

$V' = 0 \Leftrightarrow \pi\left(-\dfrac{9r^2}{2} + 18r\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r = 0 (l) \\ r = 4 (n) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

r	0		4		6
V'	0	$+$	0	$-$	
V	0	↗	48π	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $V_{\max} = 48\pi$ khi $r = 4$.

Vậy thớ mì tôm có thể tích lớn nhất là 48π.

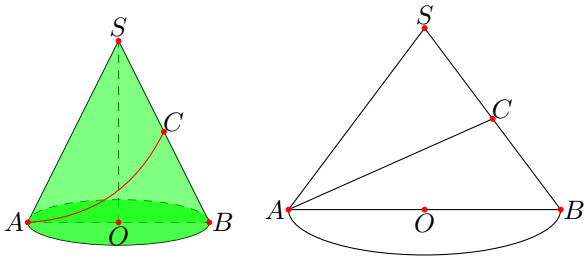
Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Tại trung tâm một thành phố người ta tạo điểm nhấn bằng cột trang trí hình nón có kích thước như sau: chiều dài đường sinh $l = 10$ m, bán kính đáy $R = 5$ m. Biết rằng tam giác SAB là thiết diện qua trục của hình nón và C là trung điểm SB. Trang trí một hệ thống đèn điện tử chạy từ A đến C trên mặt nón. Xác định giá trị ngắn nhất của chiều dài dây đèn điện tử.

(A) 10 m. (B) 15 m. (C) $5\sqrt{5}$ m. (D) $5\sqrt{3}$ m.

Lời giải.

Khi cắt mặt xung quanh hình nón bởi mặt phẳng (SAB), rồi trải phẳng phần mặt xung quanh có chứa hệ thống đèn trang trí ta được một hình quạt như trên.



Ta có độ dài cung quạt chính là nửa chu vi của đường tròn đáy hình nón là $l_1 = \pi R = 5\pi$ m.

Khi đó $ASB = \dfrac{l_1}{l} = \dfrac{\pi}{2}$.

Nên khi trải phẳng ta được tam giác SAB vuông tại S.

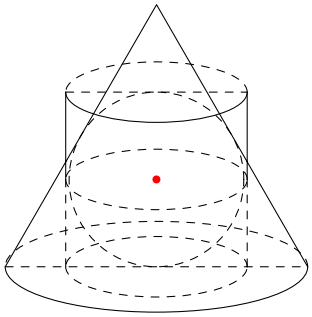
Chiều dài ngắn nhất của dây đèn trang trí chính là độ dài đoạn thẳng AC.

Do đó giá trị ngắn nhất của dây đèn là

$$AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5} \text{ m}.$$

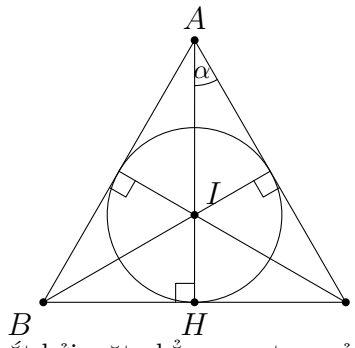
Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Cho một hình cầu nội tiếp hình nón tròn xoay có góc ở đỉnh là 2α, bán kính đáy là R và chiều cao là h. Một hình trụ ngoại tiếp hình cầu đó có đáy dưới nằm trong mặt phẳng đáy của hình nón . Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình nón và hình trụ, biết rằng $V_1 \neq V_2$. Gọi M là giá trị lớn nhất của tỉ số $\dfrac{V_2}{V_1}$. Giá trị của biểu thức $P = 48M + 25$ thuộc khoảng nào dưới đây?



(A) $(40; 60)$. (B) $(60; 80)$. (C) $(20; 40)$. (D) $(0; 20)$.

Lời giải.



Mặt cắt bởi mặt phẳng qua trục của hình nón

Gọi r là bán kính hình cầu, khi đó r cũng là bán kính đường tròn đáy của hình trụ đã cho, chiều cao của hình trụ bằng $2r$.

Ta có $\begin{cases} V_1 = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h \\ V_2 = \pi r^2 \cdot 2r \end{cases} \Rightarrow \dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{6r^3}{R^2 h}$.

Xét mặt cắt qua trục của hình nón là 1 tam giác cân ABC có diện tích là $S = \dfrac{1}{2}h \cdot 2R = Rh$.

Tam giác cân có chiều dài cạnh bên $AB = AC = \dfrac{R}{\sin\alpha}$.

Mặt khác áp dụng công thức $S = pr$ với p là nửa chu vi tam giác, r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

Ta có $p = \dfrac{1}{2}\left(2R + 2\dfrac{R}{\sin\alpha}\right) \Rightarrow S = Rh = \left(R + \dfrac{R}{\sin\alpha}\right) r \Leftrightarrow r = \dfrac{h \cdot \sin\alpha}{\sin\alpha + 1}$.

Khi đó $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{6h^3 \sin^3\alpha}{R^2 h(\sin\alpha + 1)^3} = \dfrac{6\sin^3\alpha}{(\sin\alpha + 1)^3} \cdot \left(\dfrac{h}{R}\right)^2$

$= \dfrac{6\sin^3\alpha}{(\sin\alpha + 1)^3} \cdot \cot^2\alpha = \dfrac{6\sin\alpha\left(1 - \sin^2\alpha\right)}{(\sin\alpha + 1)^3} = \dfrac{6\sin\alpha(1 - \sin\alpha)}{(\sin\alpha + 1)^2}$.

Xét hàm số $y = \dfrac{6\sin\alpha(1 - \sin\alpha)}{(\sin\alpha + 1)^2}$.

Đặt $t = \sin\alpha, t \in (0;1)$ ta có $y = \dfrac{6t(1-t)}{(t+1)^2}, t \in (0;1)$.

Ta có $y' = \dfrac{-6(3t-1)}{(t+1)^3}; y' = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{3}$.

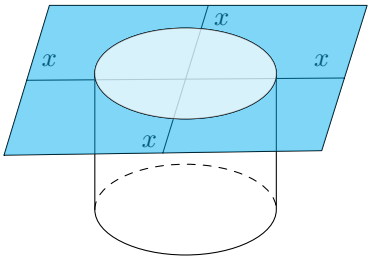
Bảng biến thiên

t	0		$\dfrac{1}{3}$		1
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$\dfrac{3}{4}$	↘	0

Suy ra $M = \dfrac{3}{4}$. Vậy $P = 48M + 25 = 48 \cdot \dfrac{3}{4} + 25 = 61$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Trên một mảnh đất hình vuông có diện tích $81\,\text{m}^2$ người ta đào một cái ao nuôi cá hình trụ sao cho tâm của hình tròn đáy trùng với tâm của mảnh đất. Ở giữa mép ao và mép mảnh đất người ta để lại một khoảng đất trống để đi lại, biết khoảng cách nhỏ nhất giữa mép ao và mép mảnh đất là $x(\text{m})$. Giả sử chiều sâu của ao cũng là $x(\text{m})$. Tính thể tích lớn nhất V của ao.



(A) $V = 13{,}5\pi\,(\text{m}^3)$. (B) $V = 27\pi\,(\text{m}^3)$.
(C) $V = 72\pi\,(\text{m}^3)$. (D) $V = 36\pi\,(\text{m}^3)$.

Lời giải.

Ta có bán kính đáy hình trụ là $r = \dfrac{9-2x}{2}$.

Thể tích ao là $V = \pi R^2 h = \pi\left(\dfrac{9-2x}{2}\right)^2 x = \dfrac{\pi}{4}(9-2x)^2 x$.

Xét hàm số $f(x) = (9-2x)^2 x = 4x^3 - 36x^2 + 81x$, với $0 < x < \dfrac{9}{2}$.

Ta có $f'(x) = 12x^2 - 72x + 81$.

Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 72x + 81 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2}\,(\text{nhận}) \\ x = \dfrac{9}{2}\,(\text{loại}). \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{3}{2}$		$\frac{9}{2}$
f'		$+$	0	$-$	
f	0	↗	54	↘	0

Từ bảng biến thiên suy ra: $\max\limits_{\left(0;\frac{9}{2}\right)} f(x) = 54 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$.

Vậy thể tích lớn nhất V của ao là $V = \dfrac{54\pi}{4} = \dfrac{27\pi}{2} = 13{,}5\pi\,(\text{m}^3)$.

Chọn đáp án (A) □

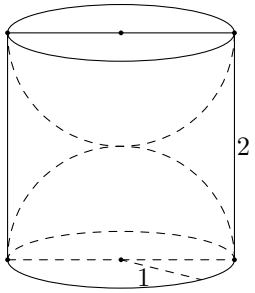
Câu 13. Một khối gỗ hình trụ tròn xoay có bán kính đáy bằng 1, chiều cao bằng 2. Người ta khoét từ hai đầu khối gỗ hai nửa khối cầu mà đường tròn đáy của khối gỗ là đường tròn lớn của mỗi nửa khối cầu. Tỉ số thể tích phần còn lại của khối gỗ và cả khối gỗ ban đầu là

(A) $\dfrac{2}{3}$. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) $\dfrac{1}{3}$. (D) $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Thể tích của khối trụ là $V = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 = 2\pi$.

Vì đường tròn đáy của khối trụ là đường tròn lớn của mỗi nửa khối cầu nên bán kính của mỗi nửa khối cầu là $R = 1$.



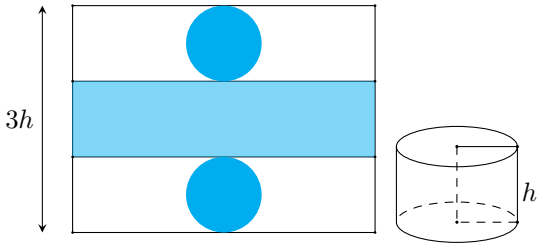
Thể tích của hai nửa khối cầu bị khoét đi là $V_1 = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4\pi \cdot 1^3}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$.

Thể tích của phần còn lại của khối gỗ là $V_2 = V - V_1 = 2\pi - \dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$.

Vậy tỉ số thể tích cần tìm là $\dfrac{V_2}{V} = \dfrac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Từ một tấm thép phẳng hình chữ nhật, người ta muốn làm một chiếc thùng đựng dầu hình trụ bằng cách cắt ra hai hình tròn bằng nhau và một hình chữ nhật sau đó hàn kín lại, như trong hình vẽ dưới đây. Hai hình tròn làm hai mặt đáy, hình chữ nhật làm thành mặt xung quanh của thùng đựng dầu. Biết thùng đựng dầu có thể tích bằng 50,24 lít. Diện tích của tấm thép hình chữ nhật ban đầu gần với giá trị nào sau đây nhất?

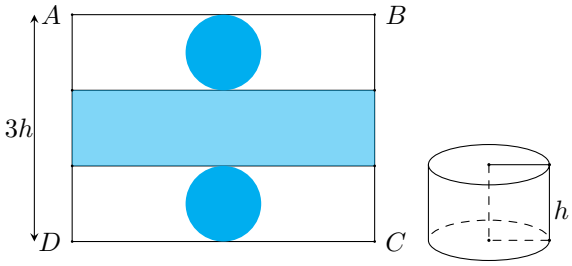


(A) 1,2 (m^2). (B) 1,5 (m^2).

(C) 1,8 (m^2). (D) 2,2 (m^2).

Lời giải.

Gọi tấm thép hình chữ nhật ban đầu là $ABCD$, r là bán kính của hình tròn đáy.



Ta có $3h = 4r + h \Leftrightarrow h = 2r$.

Thể tích của thùng đựng dầu là

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot r^2 \cdot 2r = 6{,}28r^3$

$\Leftrightarrow 50{,}24 = 6{,}28r^3$

$\Leftrightarrow r^3 = 8$

$\Leftrightarrow r = 2\,(\text{dm}) = 0{,}2\,(\text{m})$.

Do đó $AD = 3h = 6r = 1{,}2\,(\text{m})$ và $AB = 2\pi \cdot r = 1{,}256\,(\text{m})$.

Vậy diện tích của tấm thép hình chữ nhật ban đầu là

$S = AB \cdot AD = 1{,}2 \cdot 1{,}256 = 1{,}5072$ (m^2).

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Một thùng đựng nước hình trụ có bán kính đáy là 65 cm và chiều cao 160 cm. Hỏi thùng đó đựng được tối đa bao nhiêu lít nước?

(A) $2123{,}7\,(l)$. (B) $3265{,}6\,(l)$. (C) $676\,(l)$. (D) $10400\,(l)$.

Lời giải.

Thể tích khối trụ $V = \pi r^2 h = \pi(6{,}5)^2 \cdot 16 = 676\pi \approx 2123{,}7\,(l)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Cần sản xuất một vỏ hộp sữa hình trụ có thể tích V cho trước. Để tiết kiệm vật liệu nhất thì bán kính đáy phải bằng

(A) $\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. (B) $\sqrt[3]{\dfrac{V}{2}}$. (C) $\sqrt[3]{\dfrac{V}{3\pi}}$. (D) $\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$.

Lời giải.

Giả sử vỏ hộp sữa có bán kính đáy là R, chiều cao là h $(R,\, h > 0)$.

Vì thể tích vỏ hộp là V nên ta có $V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi R^2}$.

Để tiết kiệm vật liệu nhất thì hình trụ vỏ hộp sữa phải có diện tích toàn phần

$$S_{\text{tp}} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2 \text{ nhỏ nhất.}$$

Cách 1

Ta có $S_{\text{tp}} = \dfrac{2V}{R} + 2\pi R^2 = \dfrac{V}{R} + \dfrac{V}{R} + 2\pi R^2 \geq 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$.

S_{tp} đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $\dfrac{V}{R} = 2\pi R^2 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Cách 2

Xét hàm số $f(R) = \dfrac{2V}{R} + 2\pi R^2$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(R) = -\dfrac{2V}{R^2} + 4\pi R = \dfrac{4\pi R^3 - 2V}{R^2}$.

$f'(R) = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Bảng biến thiên:

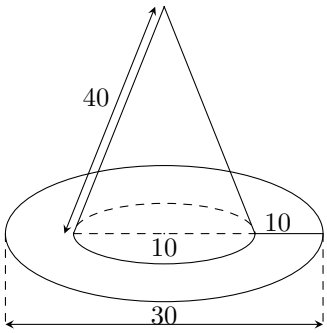
R	0		$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$		$+\infty$
$f'(R)$		$-$	0	$+$	
$f(R)$		↘		↗	

Từ bảng biến thiên ta thấy $f(R)$ đạt nhỏ nhất khi $R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Vậy để tiết kiệm vật liệu nhất thì bán kính đáy vỏ hộp phải bằng $\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Tính diện tích vải tối thiểu để may được chiếc mũ có hình dạng và kích thước được cho bởi hình vẽ bên, biết phía trên có dạng hình nón và phía dưới có dạng hình vành khăn.



(A) 450π. (B) 400π. (C) 350π. (D) 500π.

Lời giải.

Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích xung quanh của hình nón phía trên và diện tích của hình vành khăn phía dưới.

Ta có $S_1 = \pi \cdot 5 \cdot 40 = 200\pi$ và $S_2 = \pi \cdot 15^2 - \pi \cdot 5^2 = 200\pi$.

Khi đó diện tích vải tối thiểu để may được chiếc mũ là $S_1 + S_2 = 200\pi + 200\pi = 400\pi$.

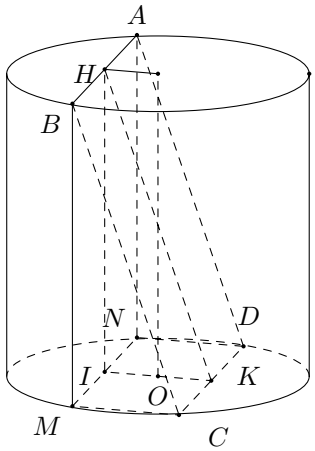
Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Cho hình trụ có bán kính bằng r và chiều cao cũng bằng r. Một hình vuông $ABCD$ có hai cạnh AB, CD lần lượt là các dây cung của hai đường tròn đáy, còn cạnh BC, AD không phải là đường sinh của hình trụ, tan của góc giữa mặt phẳng chứa hình vuông và mặt đáy bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. (B) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. (C) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. (D) 1.

Lời giải.

Gọi MN là hình chiếu vuông góc của AB lên đường tròn đáy.



Ta có $MNDC$ là hình chữ nhật và $NC \cap MD = O$ là tâm đường tròn đáy.

Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm AB, MN, CD.

Lại có $HK \perp CD, IK \perp CD$, suy ra góc giữa mặt phẳng chứa hình vuông $ABCD$ và mặt đáy là $\widehat{HKI} \Rightarrow \tan\widehat{HKI} = \dfrac{IH}{IK}$.

Đặt $AB = BC = CD = AD = x\,(x > 0)$.

Ta có $MC = IK = 2OK = 2\sqrt{OC^2 - CK^2} = 2\sqrt{r^2 - \dfrac{x^2}{4}}$.

Trong tam giác vuông BMC, ta có

$$BM^2 + MC^2 = BC^2 \Leftrightarrow r^2 + 4\left(r^2 - \frac{x^2}{4}\right) = x^2 \Leftrightarrow x = \frac{r\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \Rightarrow IK = \frac{r\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra $\tan\widehat{HKI} = \dfrac{IH}{IK} = \dfrac{r}{\frac{r\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Một ngôi biệt thự có 10 cây cột nhà hình trụ tròn, tất cả đều có chiều cao 4,2 m. Trong đó 4 cây cột trước đại sảnh có đường kính 40 cm và 6 cây cột còn lại bên thân nhà có đường kính 26

cm. Chủ nhà dùng loại sơn giả đá để sơn 10 cây cột đó. Nếu giá của một loại sơn giả đá là 380 000 đồng/m^2 thì người chủ phải chi ít nhất bao nhiêu tiền để sơn 10 cây cột đó?.

(A) 13 627 000. (B) 15 844 000. (C) 16 459 000. (D) 14 647 000.

Lời giải.

Diện tích cần sơn chính là tổng diện tích xung quanh của các cây cột có dạng hình trụ.

Gọi S_1, S_2 lần lượt là tổng diện tích xung quanh của 4 cây cột nhà hình trụ có đường kính 40 cm và 6 cây cột nhà hình trụ có đường kính 26 cm.

Gọi r_1, l_1 lần lượt là bán kính, độ dài đường sinh của 4 cây cột nhà hình trụ có đường kính 40cm và r_2, l_2 lần lượt là bán kính, độ dài đường sinh của 6 cây cột nhà hình trụ có đường kính 26 cm.

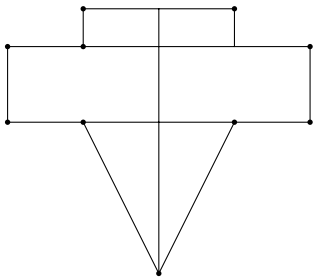
Khi đó $r_1 = 20\,\text{cm} = 0{,}2\,\text{m}$, $l_1 = 4{,}2\text{m}$ nên $S_1 = 4 \cdot 2\pi r_1 l_1 = 8\pi \cdot 0{,}2 \cdot 4{,}2 = \dfrac{168\pi}{25}\text{m}^2$.

Lại có: $r_2 = 13\,\text{cm} = 0,13\,\text{m}$, $l_2 = 4{,}2\,\text{m}$ nên $S_2 = 6 \cdot 2\pi r_2 l_2 = 12\pi \cdot 0{,}13 \cdot 4{,}2 = \dfrac{819\pi}{125}\,\text{m}^2$.

Vậy số tiền người chủ biệt thự phải trả để sơn 10 cây cột nhà là $\left(\dfrac{168\pi}{25} + \dfrac{819\pi}{125}\right) \cdot 380\,000 \approx 15\,844\,000$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Một con xoay được thiết kế gồm hai khối trụ (T_1), (T_2) chồng lên khối nón (N). Khối trụ (T_1) có bán kính đáy $r(\text{cm})$, chiều cao $h_1(\text{cm})$. Khối trụ (T_2) có bán kính đáy $2r(\text{cm})$, chiều cao $h_2 = 2h_1(\text{cm})$. Khối nón (N) có bán kính đáy $r(\text{cm})$, chiều cao $h_n = 4h_1(\text{cm})$. Biết rằng thể tích toàn bộ con xoay bằng $31(\text{cm}^3)$. Thể tích khối nón (N) bằng



(A) $3(\text{cm}^3)$. (B) $4(\text{cm}^3)$. (C) $5(\text{cm}^3)$. (D) $6(\text{cm}^3)$.

Lời giải.

Theo bài ta có $h_n = 4h_1 \Rightarrow h_1 = \dfrac{1}{4}h_n$; $h_2 = 2h_1 = \dfrac{1}{2}h_n$.

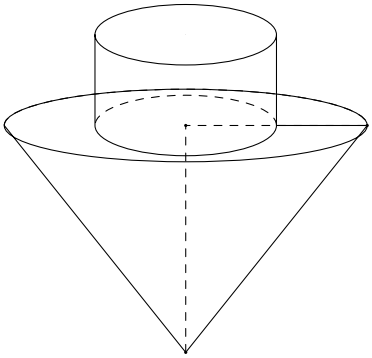
Thể tích toàn bộ con xoay là $V = V_{(T_1)} + V_{(T_2)} + V_{(N)}$

$$\begin{aligned}
&= \pi \cdot r^2.h_1 + \pi \cdot (2r)^2 \cdot h_2 + \frac{1}{3}\pi \cdot r^2.h_n \\
\Leftrightarrow 31 &= \pi \cdot r^2 \cdot \frac{1}{4}h_n + \pi \cdot 4r^2 \cdot \frac{1}{2}h_n + \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h_n \\
\Leftrightarrow 31 &= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h_n\right) + 6\left(\frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h_n\right) + \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h_n \\
\Leftrightarrow 31 &= \frac{31}{4}\left(\frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h_n\right) \\
\Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h_n &= 4.
\end{aligned}$$

Vậy thể tích khối nón (N) là $V_{(N)} = 4(\text{cm}^3)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Một cái "cù"gồm hai khối: khối trụ H_1 và khối nón H_2 như hình bên. Chiều cao và bán kính khối trụ lần lượt bằng h_1, r_1 chiều cao và bán kính đáy của khối nón lần lượt bằng h_2, r_2 thỏa mãn $h_1 = \dfrac{1}{3}h_2$, $r_1 = \dfrac{1}{2}r_2$. Biết thể tích toàn khối là $30\,\text{cm}^3$, thể tích khối H_1 bằng



(A) $6\,\text{cm}^3$. (B) $5\,\text{cm}^3$. (C) $15\,\text{cm}^3$. (D) $\dfrac{30}{13}\,\text{cm}^3$.

Lời giải.

Ta có: $h_1 = \dfrac{1}{3}h_2 \Leftrightarrow h_2 = 3h_1$, $r_1 = \dfrac{1}{2}r_2 \Leftrightarrow r_2 = 2r_1$.

Thể tích khối trụ H_1 là $V_1 = \pi r_1^2 h_1$.

Thể tích khối nón H_2 là $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 = \dfrac{1}{3}\pi(2r_1)^2.3h_1 = 4\pi r_1^2 h_1 = 4V_1$.

Thể tích toàn khối là $V = V_1 + V_2 \Leftrightarrow 30 = V_1 + 4V_1 \Leftrightarrow 30 = 5V_1 \Leftrightarrow V_1 = 6$.

Vậy thể tích khối H_1 bằng $6\,\text{cm}^3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Một nhà máy sản xuất bột trẻ em cần thiết kê bao bì cho một loại sản phẩm mới dạng khối trụ có thể tích 1 dm^3. Hỏi phải thiết kế hộp đựng này với diện tích toàn phần bằng bao nhiêu để tiết kiệm nguyên vật liệu nhất.

(A) $3\sqrt{2\pi}\ \text{dm}^2$. (B) $\sqrt[3]{4\pi}\ \text{dm}^2$. (C) $3\sqrt[3]{\pi}\ \text{dm}^2$. (D) $3\sqrt[3]{2\pi}\ \text{dm}^2$.

Lời giải.

Giả sử hộp trụ có bán kính đáy r, chiều cao là h.

Theo giả thiết có $V = \pi r^2 h = 1 \Rightarrow h = \dfrac{1}{\pi r^2}$.

Để tiết kiệm nguyên vật liệu nhất thì diện tích toàn phần phải nhỏ nhất

$S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + S_{2\text{đáy}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + \dfrac{2}{r} = 2\pi r^2 + \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r} \geq 3\sqrt[3]{2\pi}$.

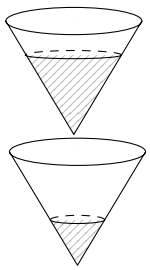
Dấu " = " đạt tại $2\pi r^2 = \dfrac{1}{r} \Leftrightarrow r = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \approx 0{,}54\ \text{dm} \Rightarrow h \approx 1{,}084\ \text{dm}$.

Do đó phải thiết kế một khối trụ có bán kính đáy 0,54 dm và chiều cao 1,084 dm.

Vậy $S_{\text{tp}} = 3\sqrt[3]{2\pi}\ \text{dm}^3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Hai hình nón bằng nhau có chiều cao bằng 2 dm, được đặt như hình vẽ bên. Lúc đầu, hình nón trên chứa đầy nước và hình nón dưới không chứa nước. Sau đó, nước được chảy xuống hình nón dưới thông qua lỗ trống ở đỉnh của hình nón trên. Hãy tính chiều cao của nước trong hình nón dưới tại thời điểm khi mà chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1dm.



(A) $\sqrt[3]{5}$. (B) $\sqrt[3]{7}$. (C) $\dfrac{1}{3}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Gọi bán kính đáy của hình nón là r.

Khi đó thể tích nước trong khối nón phía trên lúc ban đầu là $\dfrac{2\pi r^2}{3}$.

Thể tích nước trong khối nón phía trên sau khi chảy xuống nón dưới tại thời điểm khi mà chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1dm là $\dfrac{\pi \cdot \left(\dfrac{r}{2}\right)^2 \cdot 1}{3} = \dfrac{\pi r^2}{12}$.

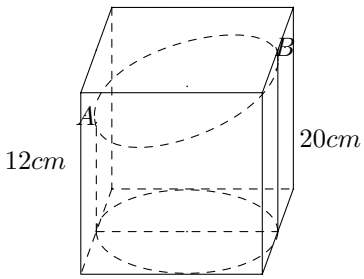
Thể tích nước trong nón phía dưới sau khi nón trên chảy xuống là $\dfrac{2\pi r^2}{3} - \dfrac{\pi r^2}{12} = \dfrac{7\pi r^2}{12}$.

Gọi chiều cao nước trong nón dưới là h, bán kính đáy nước trong nón dưới là r', khi đó $\dfrac{h}{2} = \dfrac{r'}{r} \Leftrightarrow r' = \dfrac{rh}{2}$.

Thể tích nước trong nón phía dưới là $\dfrac{\pi (r')^2 h}{3} = \dfrac{7\pi r^2}{12} \Leftrightarrow \dfrac{\pi \left(\dfrac{rh}{2}\right)^2 \cdot h}{3} = \dfrac{7\pi r^2}{12} \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{7}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Một khúc gỗ hình trụ có bán kính R bị cắt bởi một mặt phẳng không song song với đáy ta được thiết diện là một hình elip. Khoảng cách từ điểm A đến mặt đáy là 12 cm khoảng cách từ điểm B đến mặt đáy là 20 cm. Đặt khúc gỗ đó vào trong hình hộp chữ nhật có chiều cao bằng 20 cm chứa đầy nước sao cho đường tròn đáy của khúc gỗ tiếp xúc với các cạnh đáy của hình hộp chữ nhật. Sau đó, người ta đo lượng nước còn lại trong hình hộp chữ nhật là 2 lít. Tính bán kính của khúc gỗ.



(A) $R = 5{,}2$ cm. (B) $R = 4{,}8$ cm.

(C) $R = 6{,}4$ cm. (D) $R = 8{,}2$ cm.

Lời giải.

Giả sử R có đơn vị là m.

Ta có $2l = 0{,}002\,(\text{m}^3)$.

Thể tích khối hộp bằng $4R^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}8R^2\ (\text{m}^3)$.

Thể tích khúc gỗ bằng $\pi R^2 \left(\dfrac{0{,}12 + 0{,}2}{2}\right) = 0{,}16\pi R^2\ (\text{m}^3)$.

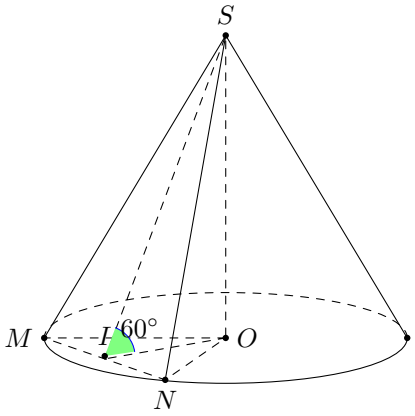
Ta có $0{,}8R^2 - 0{,}16\pi R^2 = 0{,}002 \Rightarrow R \approx 0{,}08201\ (\text{m}) \Rightarrow R \approx 8{,}2$ cm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Một khối nón có bán kính đáy bằng 2 cm, chiều cao bằng $\sqrt{3}$ cm. Một mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với đáy một góc 60° chia khối nón làm 2 phần. Tính thể tích V phần nhỏ hơn.

(A) $V \approx 1{,}42\,\text{cm}^3$. (B) $V \approx 2{,}47\,\text{cm}^3$. (C) $V \approx 1{,}53\,\text{cm}^3$. (D) $V \approx 2{,}36\,\text{cm}^3$.

Lời giải.



Cách 1

Gọi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với đáy một góc 60° cắt khối nón theo thiết diện là tam giác SMN như hình vẽ.

Gọi I là trung điểm MN. Khi đó $OI \perp MN$ và $SI \perp MN$, suy ra góc giữa mặt phẳng (SMN) và mặt đáy là góc $\widehat{SIO} = 60^\circ$.

Xét tam giác SIO, ta có $OI = \dfrac{SO}{\tan \widehat{SIO}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\tan 60^\circ} = 1$.

$IN = \sqrt{ON^2 - OI^2} = \sqrt{3}$, $MN = 2IN = 2\sqrt{3}$.

$S_{\triangle OMN} = \dfrac{1}{2} \cdot OI \cdot MN = \sqrt{3}$.

$V_{S.OMN} = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{\triangle OMN} = 1$.

$V_{\text{k/nón}} = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\pi$.

$\sin \widehat{ION} = \dfrac{IN}{ON} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\widehat{ION} = 60^\circ$, $\widehat{MON} = 2 \cdot \widehat{ION} = 120^\circ$.

Gọi V là thể tích cần tính.

Ta có $V = \dfrac{1}{3}V_{\text{k/nón}} - V_{S.OMN} = \dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi - 1 \approx 1{,}42\,\text{cm}^3$.

Cách 2

Gọi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với đáy một góc 60° cắt khối nón theo thiết diện là $\triangle SMN$.

Gọi I là trung điểm MN.

Khi đó $OI \perp MN$ và $SI \perp MN$, suy ra góc giữa mặt phẳng (SMN) và mặt đáy là góc $\widehat{SIO} = 60^\circ$.

Xét tam giác SIO, ta có $OI = \dfrac{SO}{\tan \widehat{SIO}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\tan 60^\circ} = 1$.

$IN = \sqrt{ON^2 - OI^2} = \sqrt{3} \Rightarrow MN = 2IN = 2\sqrt{3}$; $S_{\triangle OMN} = \dfrac{1}{2}.OI.MN = \sqrt{3}$.

Ta có $\sin \widehat{ION} = \dfrac{IN}{ON} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, suy ra $\widehat{ION} = 60^\circ$, $\widehat{MON} = 2 \cdot \widehat{ION} = 120^\circ$.

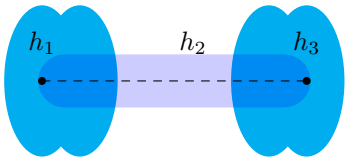
Gọi S_{V} là diện tích hình viên phấn tạo bởi dây MN và cung nhỏ MN.

Ta có $S_{\text{V}} = \dfrac{1}{3}\pi R^2 - S_{\triangle OMN} = \dfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$.

Thể tích phần nhỏ cần tính là $V = \dfrac{1}{3}SO \cdot S_{\text{V}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi - 1 \approx 1{,}42\,\text{cm}^3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Một quả tạ tập tay gồm ba khối trụ (H_1), (H_2), (H_3) gắn liền nhau lần lượt có bán kính và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2, r_3, h_3 thỏa mãn $r_1 = r_3$, $h_1 = h_3$; $r_2 = \dfrac{1}{3}r_1$. Biết thể tích của toàn bộ quả tạ bằng 60π và chiều dài quả tạ bằng 9. Thể tích khối trụ (H_2) bằng?



(A) $\pi\dfrac{16\,(9-2h_1)}{4h_1+9}$.
(B) $\pi\dfrac{60\,(9-2h_1)}{4h_1+9}$.
(C) $\pi\dfrac{46\,(9-2h_1)}{4h_1+9}$.
(D) $\pi\dfrac{36\,(9-2h_1)}{4h_1+9}$.

Lời giải.

Chiều dài quả tạ là $l = h_1 + h_2 + h_3 = 2h_1 + h_2 = 9 \Rightarrow h_2 = 9 - 2h_1$.

Thể tích quả tạ là $V = V_{(H_1)} + V_{(H_2)} + V_{(H_3)}$

$$\begin{aligned}
&= \pi r_1 h_1 + \pi r_2 h_2 + \pi r_3 h_3\\
&= 2\pi r_1 h_1 + \pi r_2 h_2\\
&= 60\pi\\
&\Rightarrow 2r_1 h_1 + r_2 h_2 = 60\\
&\Leftrightarrow 6r_2 h_1 + r_2\,(9-2h_1) = 60\\
&\Leftrightarrow r_2\,(9+4h_1) = 60\\
&\Leftrightarrow r_2 = \frac{60}{9+4h_1}.
\end{aligned}$$

Thể tích $V_{(H_2)} = \pi r_2 h_2 = \pi\dfrac{60}{9+4h_1}\,(9-2h_1) = \pi\dfrac{60\,(9-2h_1)}{9+4h_1}$.

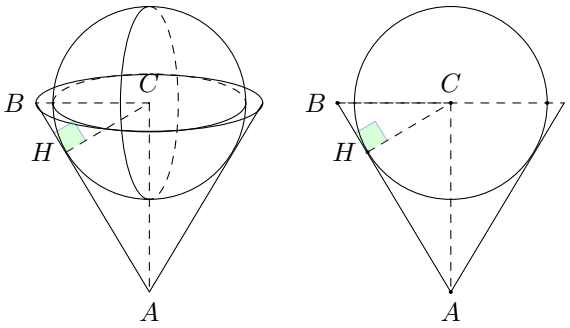
Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Một bình đựng nước dạng hình nón đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $18\pi\,\text{dm}^3$. Biết khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa khối cầu chìm trong nước. Tính thể tích nước còn lại trong bình.

(A) $9\pi\,\text{dm}^3$. (B) $27\pi\,\text{dm}^3$. (C) $6\pi\,\text{dm}^3$. (D) $24\pi\,\text{dm}^3$.

Lời giải.

Vì đúng một nửa khối cầu chìm trong nước nên thể tích khối cầu gấp 2 lần thể tích nước tràn ra ngoài.



Gọi bán kính khối cầu là R.

Khi đó $\dfrac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi \Leftrightarrow R^3 = 27$.

Xét tam giác ABC có AC là chiều cao bình nước nên $AC = 2R$.

Trong tam giác ABC có $\dfrac{1}{CH^2} = \dfrac{1}{CA^2} + \dfrac{1}{CB^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{R^2} = \frac{1}{4R^2} + \frac{1}{CB^2}$$

$$\Leftrightarrow CB^2 = \frac{4R^2}{3}.$$

Thể tích khối nón $V_n = \dfrac{1}{3}\pi \cdot CB^2 \cdot AC = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \dfrac{4R^2}{3} \cdot 2R = \dfrac{8\pi}{9} \cdot R^3 = 24\pi\,\text{dm}^3$.

Vậy thể tích nước còn lại trong bình: $24\pi - 18\pi = 6\pi\,\text{dm}^3$.

Chọn đáp án (C) □

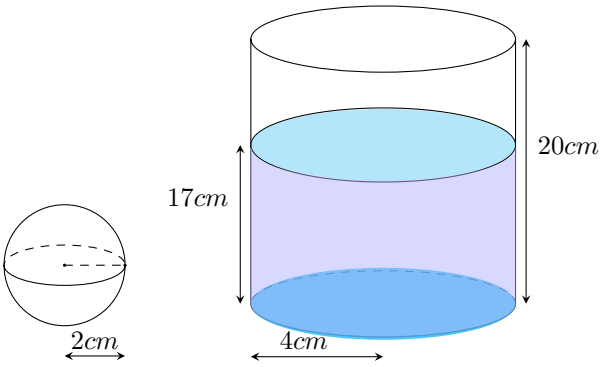
Câu 28. Một ly nước hình trụ có chiều cao 20 cm và bán kính đáy bằng 4 cm. Bạn Nam đổ nước vào ly cho đến khi mực nước cách đáy ly 17 cm thì dừng lại. Sau đó, Nam lấy các viên đá lạnh hình cầu có cùng bán kính 2 cm thả vào ly nước. Bạn Nam cần dùng ít nhất bao nhiêu viên đá để nước trào ra khỏi ly?

(A) 6. (B) 5. (C) 4. (D) 7.

Lời giải.

Ta có thể tích phần không chứa nước $V_1 = 3.\pi.4^2 = 48\pi$.

Như vậy để nước trào ra ngoài thì số bi thả vào cốc có tổng thể tích lớn hơn 48π.



Gọi n là số viên bi tối thiểu thả vào cốc khi đó tổng thể tích của n viên bi là $V_2 = n \cdot \dfrac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \dfrac{32\pi n}{3}$.

Theo bài ra $\dfrac{32\pi n}{3} > 48\pi \Leftrightarrow n > \dfrac{9}{2}$.

Vậy $n = 5$.

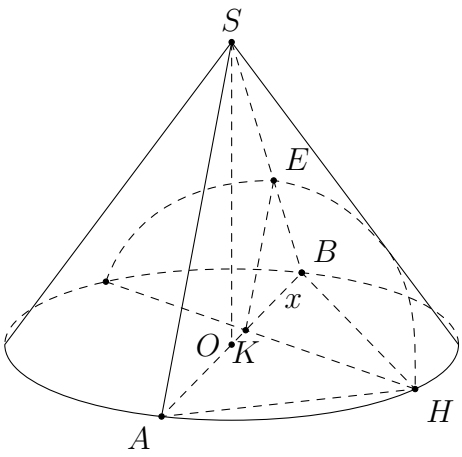
Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Khi cắt hình nón có chiều cao 16 cm và đường kính đáy 24 cm bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện có diện tích lớn nhất gần với giá trị nào sau đây?

(A) 170. (B) 260. (C) 294. (D) 208.

Lời giải.

Cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện là một parabol. Xét dây cung bất kỳ chứa đoạn KH như hình vẽ, suy ra tồn tại đường kính $AB \perp KH$, trong tam giác SAB, $KE \parallel SA$, $E \in SB$. Suy ra Parabol nhận KE làm trục như hình vẽ chính là một thiết diện thỏa yêu cầu bài toán.



Đặt $BK = x$.

Trong tam giác ABH có $HK^2 = BK \cdot AK = x(24 - x)$.

Trong tam giác SAB có
$\dfrac{KE}{SA} = \dfrac{BK}{BA} \Leftrightarrow KE = \dfrac{BK}{BA} \cdot SA \Leftrightarrow KE = \dfrac{5x}{6}$.

Thiết diện thu được là một parabol có diện tích $S = \dfrac{4}{3} KH \cdot KE$.

Ta có $S^2 = \dfrac{16}{6} KH^2 \cdot KE^2 = \dfrac{16}{9} \cdot x(24 - x)\dfrac{25x^2}{36} = \dfrac{100}{81} \cdot (24x^3 - x^4) \Rightarrow S = \dfrac{10}{9} \cdot \sqrt{24x^3 - x^4}$.

Đặt $f(x) = 24x^3 - x^4$, với $0 < x < 24$.

Ta có $f'(x) = 72x^2 - 4x^3$. Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 18. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

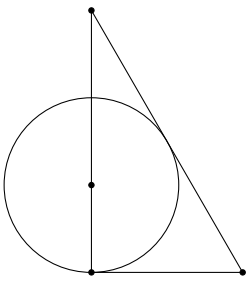
x	0		18		24
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	34992	↘	

Vậy thiết diện có diện tích lớn nhất là $\dfrac{10}{9}\sqrt{34992} \approx 207{,}8$ cm^2.

Chọn đáp án (D) □

Câu 30.

Cho tam giác SAB vuông tại A, $\widehat{ASB} = 60°$. Phân giác của góc $\widehat{ASB}$ cắt SA tại I. Vẽ nửa đường tròn tâm I, bán kính IA. Cho miền tam giác SAB và nửa hình tròn quay xung quanh trục SA tạo nên các khối tròn xoay thể tích tương ứng là V_1, V_2.



Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $V_1 = \dfrac{4}{9}V_2$. (B) $V_1 = \dfrac{3}{2}V_2$. (C) $V_1 = 3V_2$. (D) $V_1 = \dfrac{9}{4}V_2$.

Lời giải.

Đặt $AB = x$ $(x > 0)$. Tam giác SAB vuông tại $A \Rightarrow SA = AB \cdot \tan \widehat{ABS} = x\sqrt{3}$.
IB là phân giác trong góc $\widehat{B} \Rightarrow \widehat{IBA} = 30^\circ \Rightarrow IA = AB \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.
Quay miền tam giác SAB quanh SA ta được khối nón có chiều cao là SA, bán kính đáy là AB.

$$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot AB^2 \cdot SA = \frac{1}{3}\pi \cdot x^2 \cdot x\sqrt{3} = \frac{\pi x^3\sqrt{3}}{3}.$$

Quay nửa hình tròn tâm I quanh SA ta được khối cầu tâm I bán kính IA.

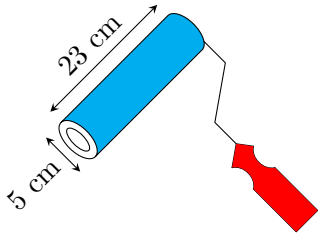
$$\Rightarrow V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot IA^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{x^3}{3\sqrt{3}} = \frac{4\pi x^3\sqrt{3}}{27}.$$

Suy ra $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{9}{4}$ hay $V_1 = \dfrac{9}{4}V_2$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 31.

Một cái trục lăn sơn nước có dạng một hình trụ. Đường kính của đường tròn đáy là 5 cm, chiều dài lăn là 23 cm. Sau khi lăn trọn 10 vòng thì trục lăn tạo nên tường phẳng lớp sơn có diện tích là

(A) 2300π cm^2. (B) 1150π cm^2. (C) $862{,}5\pi$ cm^2. (D) 5230π cm^2.



Lời giải.

Khi lăn trọn một vòng thì trục lăn tạo trên tường phẳng lớp sơn có diện tích bằng diện tích xung quanh của trục lăn là $S = 2\pi Rh = 2\pi \cdot \dfrac{5}{2} \cdot 23 = 115\pi$ cm^2.
Vậy sau khi lăn trọn 10 vòng thì trục lăn tạo nên tường phẳng lớp sơn có diện tích là $10S = 1150\pi$ cm^2.
Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Người ta thiết kế một thùng chứa hình trụ V nhất định. Biết rằng giá của vật liệu làm mặt đáy và nắp của thùng bằng nhau và gấp 1,5 lần so với giá vật liệu để làm mặt xung quanh của thùng. Gọi chiều cao của thùng là h và bán kính đáy là r. Tính tỉ số $\dfrac{h}{r}$ sao cho chi phí vật liệu sản xuất thùng là nhỏ nhất?

(A) $\dfrac{h}{r} = 2$. (B) $\dfrac{h}{r} = \sqrt{3}$. (C) $\dfrac{h}{r} = 3$. (D) $\dfrac{h}{r} = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

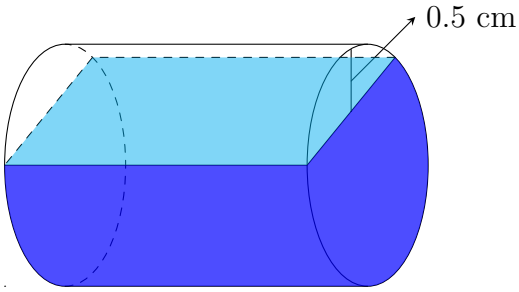
Gọi giá của vật liệu làm mặt xung quanh là x, $(x > 0)$.
Suy ra giá của vật liệu làm đáy và nắp là $1{,}5x$.
Tổng chi phí vật liệu sản xuất thùng

$$T = 3x\pi r^2 + 2x\pi = \pi x\left(3r^2 + \frac{2V}{\pi x}\right) = \pi x\left(3r^2 + \frac{V}{\pi x} + \frac{V}{\pi x}\right) \geq \pi x\sqrt[3]{\pi x \cdot \frac{V}{\pi x} \cdot \frac{V}{\pi x}} = 3\pi x\sqrt[3]{\frac{3V^2}{\pi^2}}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{V}{\pi x} = 3r^2 \Leftrightarrow \dfrac{\pi r^2 h}{\pi r} = 3r^2 \Leftrightarrow h = 3r \Leftrightarrow \dfrac{h}{r} = 3$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 33.

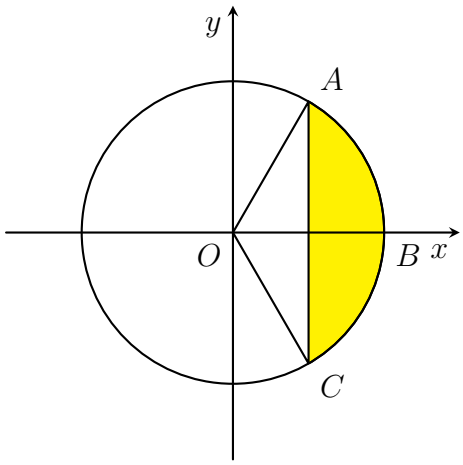
Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5 m, có bán kính đáy 1 m, với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với 0,5 m của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn .



(A) 23,562 m^2.
(B) 12,637 m^2.
(C) 6,319 m^2.
(D) 11,781 m^2.

Lời giải.

Gắn hệ trục tọa độ Oxy vào đáy hình trụ như hình vẽ.



Ta có H là trung điểm OB nên $\triangle AOB$ là tam giác đều.
Suy ra $\widehat{AOB} = 60^\circ$ và $\widehat{AOC} = 120^\circ$ nên hình quạt chứa cung nhỏ $\overset{\frown}{AC}$ có diện tích là $S = \dfrac{1}{3}\pi r^2 = \dfrac{\pi}{3}$.
Khi đó diện tích phần tô đậm trên hình vẽ là

$$S_1 = S - S_{OAC} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

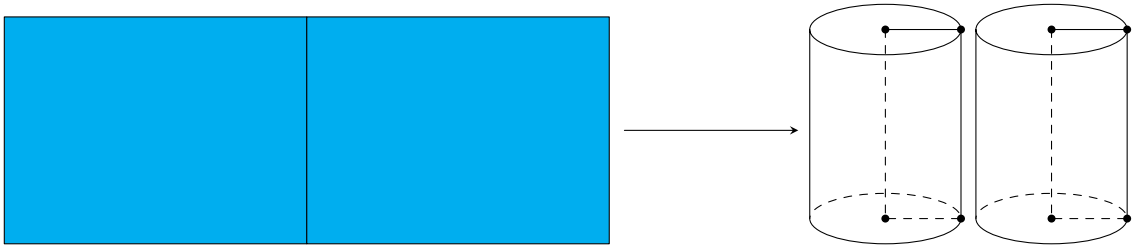
Và thể tích dầu được rút ra là $V_1 = h \cdot S_1 = 5\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.
Thể tích bồn chứa dầu hình trụ là $V = \pi r^2 h = 5\pi$.

Thể tích dầu còn lại trong bồn là $V_2 = V - V_1 = 5\pi - 5\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right) = \dfrac{10\pi}{3} + \dfrac{5\sqrt{3}}{4} \approx 12{,}637$ m^3.

Cách khác: Có thể tính diện tích phần tô đậm bằng tích phân $2\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Từ một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước 5 m $\times$40 m, người ta làm hai thùng nước hình trụ có cùng chiều cao 5 m, bằng cách cắt tấm tôn đó thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.



Tổng thể tích của hai cái thùng hình trụ bằng

(A) 1000π m^3.
(B) 2000π m^3.
(C) $\dfrac{2000}{\pi}$ m^3.
(D) $\dfrac{1000}{\pi}$ m^3.

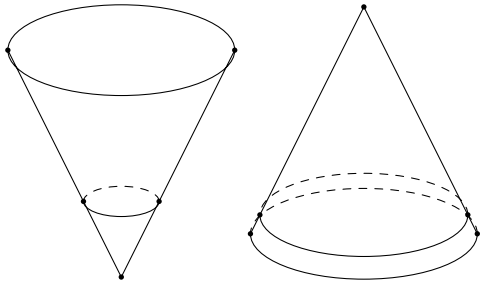
Lời giải.

Hai khối trụ có thể tích bằng nhau nên tổng thể tích bằng hai lần thể tích của một khối trụ.
Do $AE = \dfrac{1}{2}AB = 20$ m bằng chu vi của mặt đáy, suy ra bán kính đáy $R = \dfrac{20}{2\pi} = \dfrac{10}{\pi}$ m.
Diện tích mặt đáy là $S = \pi R^2 = \dfrac{100}{\pi}$ m^2, chiều cao khối trụ là $AD = 5$ m.
Suy ra thể tích một khối trụ là $V = S \cdot h = \dfrac{500}{\pi}$ m^3.
Vậy tổng thể tích là $\dfrac{1000}{\pi}$ m^3.

Chọn đáp án (D) □

Câu 35.

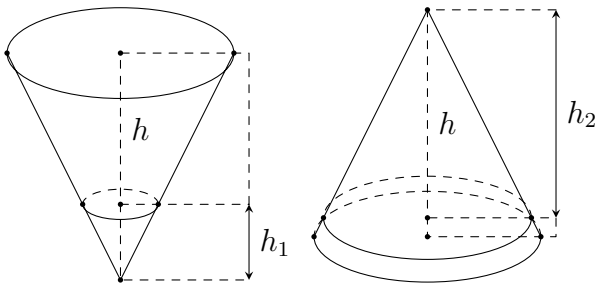
Một cái phễu có dạng hình nón. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của lượng nước trong phễu bằng một phần ba chiều cao của phễu. Hỏi nếu bịt miệng phễu rồi lộn ngược phễu lên thì chiều cao của nước bằng bao nhiêu? Biết chiều cao của phễu là 15 cm.



(A) 0,5 cm. (B) 0,216 cm. (C) 0,3 cm. (D) 0,188 cm.

Lời giải.

Gọi $h = 15$ cm là chiều cao của phễu và V là thể tích của phễu hình nón.
Ký hiệu $h_1 = \dfrac{1}{3}h = 5$ cm là chiều cao và V_1 là thể tích của lượng nước trong phễu.
Gọi h_2, V_2 là chiều cao và thể tích của phần không gian trống trong phễu khi lật ngược phễu lại.
Ta có $V_1 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 V = \dfrac{V}{27}$, $V_2 = \left(\dfrac{h_2}{h}\right)^3 V$ và $V_1 = V - V_2$.



Khi đó

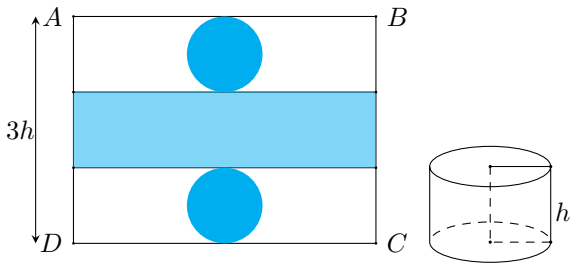
$$V = V - V_2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^3 V = V - \left(\frac{h_2}{h}\right)^3 V \Leftrightarrow \frac{1}{27} = 1 - \left(\frac{h_2}{15}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{h_2}{15} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{27}} \Leftrightarrow h_2 = 5\sqrt[3]{26}.$$

Vậy chiều cao của nước khi lật ngược phễu lại là $h - h_2 = 15 - 5\sqrt[3]{26} \approx 0{,}188$ cm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 36.

Từ một tấm thép phẳng hình chữ nhật, người ta muốn làm một chiếc thùng đựng dầu hình trụ bằng cách cắt ra hai hình tròn bằng nhau và một hình chữ nhật sau đó hàn kín lại, như hình vẽ dưới đây. Hai hình tròn làm hai mặt đáy, hình chữ nhật làm thành mặt xung quanh của thùng đựng dầu. Biết thùng đựng dầu có thể tích bằng 50,24 lít. Tính diện tích của tấm thép hình chữ nhật ban đầu?



(A) 1,8062 m^2. (B) 2,2012 m^2. (C) 1,5072 m^2. (D) 1,2064 m^2.

Lời giải.

Gọi tấm thép hình chữ nhật ban đầu là $ABCD$, r là bán kính của hình tròn đáy.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S = AB \cdot AB$. Ta có $3h = 4r + h \Leftrightarrow h = 2r$.

Thể tích của khối trụ $V = \pi r^2 h = 3{,}14 \cdot r^2 \cdot 2r = 6{,}28r$.

Theo bài ra $V = 50{,}24 \Leftrightarrow 50{,}24 = 6{,}28r^3 \Leftrightarrow r^3 = 8 \Leftrightarrow r = 2$.

Do $r = 2$ dm $= 0{,}2$ m $\Rightarrow AD = 3h = 6r = 1{,}2$ m; $AB = 2\pi r = 1{,}256$ m.

Vậy $S = 1{,}2 \cdot 1{,}256 = 1{,}5072$ m^2.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Người ta xếp ba viên bi có bán kính bằng nhau và bằng $\sqrt{3}$ vào một cái lọ hình trụ sao cho các viên bi đều tiếp xúc với hai đáy của lọ hình trụ và các viên bi này đôi một tiếp xúc nhau và cùng tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ. Tính bán kính đáy của lọ hình trụ.

(A) $1 + 2\sqrt{3}$. (B) $2\sqrt{3}$. (C) $\dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{2}$. (D) $2 + \sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm của ba viên bi và $r_1 = r_2 = r_3 = \sqrt{3}$ là bán kính của ba viên bi đó.

Theo giả thiết thì ba đường tròn lớn của ba viên bi đôi một tiếp xúc với nhau, khi đó ba điểm O_1, O_2, O_3 tạo thành một tam giác đều cạnh $2\sqrt{3}$.

Gọi O là trọng tâm của tam giác $O_1O_2O_3$ thì $OO_1 = OO_2 = OO_3 = \dfrac{2}{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$.

Cũng theo giả thiết thì ba viên bi tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ tại 3 điểm nằm trên một đường tròn bằng đường tròn đáy của lọ hình trụ.

Vậy bán kính đáy của lọ hình trụ là $OM = OO_3 + O_3M = 2 + \sqrt{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ có thể tích là V, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon sữa bò là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ bằng V và diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy bằng bao nhiêu?

(A) $r = \sqrt[3]{\dfrac{V\pi}{2}}$. (B) $r = \sqrt[3]{V}$. (C) $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. (D) $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2}}$.

Lời giải.

Ta có $S_{\text{đáy}} = \pi r^2$; $S_{\text{xq}} = 2\pi rh$.

Thể tích khối trụ $V = S_{\text{đáy}} \cdot h \Leftrightarrow h = \dfrac{V}{S_{\text{đáy}}} = \dfrac{V}{\pi r^2}$.

Ta có $S_{\text{tp}} = 2S_{\text{đáy}} + S_{\text{xq}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \dfrac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \dfrac{V}{r}$.

Xét hàm số $f(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{V}{r}$ có $f'(r) = 4\pi r - \dfrac{2V}{r^2}$.

$$f'(r) = 0 \Leftrightarrow 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số đạt tại $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Vậy khi $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ thì diện tích toàn phần hình trụ đạt giá trị nhỏ nhất.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Nam muốn xây một bình chứa hình trụ có thể tích 72 m^3. Đáy làm bằng bêtông giá 100 nghìn đồng/m^2, thành làm bằng tôn giá 90 nghìn đồng/m^2, nắp bằng nhôm giá 140 nghìn đồng/m^2. Vậy đáy của hình trụ có bán kính bằng bao nhiêu để chi phí xây dựng là thấp nhất?

(A) $\dfrac{3}{2\sqrt[3]{\pi}}$ m. (B) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{\pi}}$ m. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{\pi}}$ m. (D) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$ m.

Lời giải.

Gọi bán kính đáy của hình trụ là R và chiều cao là h. Do thể tích khối trụ là 72 nên $\pi R^2 h = 72 \Leftrightarrow h = \dfrac{72}{\pi R^2}$.

Diện tích đáy là πR^2. Diện tích xung quanh là $2\pi Rh = 2\pi R \cdot \dfrac{72}{\pi R^2} = \dfrac{44}{R}$.

Chi phí làm bình là

$$\begin{aligned} T &= 100\pi R^2 + 90 \cdot \frac{144}{R} + 140 \cdot \pi R^2 \\ &= 240\pi R^2 + \frac{12960}{R} \\ &= 240\pi R^2 + \frac{6480}{R} + \frac{6480}{R} \geq 3\sqrt[3]{240\pi R^2 \cdot \frac{6480}{R} \cdot \frac{6480}{R}} = 6480\sqrt[3]{\pi}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $240\pi R^2 = \dfrac{6480}{R} = \dfrac{6480}{R} \Leftrightarrow R = \dfrac{3}{\sqrt[3]{\pi}}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón không nắp có thể tích 27 cm^3. Với chiều cao h và bán kính đáy là r. Tìm r để lượng giấy tiêu thụ ít nhất.

(A) $r = \sqrt[6]{\dfrac{3^6}{2\pi^2}}$. (B) $r = \sqrt[4]{\dfrac{3^6}{2\pi^2}}$. (C) $r = \sqrt[6]{\dfrac{3^8}{2\pi^2}}$. (D) $r = \sqrt[4]{\dfrac{3^8}{2\pi^2}}$.

Lời giải.

Ta có $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=27\Rightarrow h=\dfrac{3^4}{\pi r^2}$. Độ dài đường sinh là $l=\sqrt{h^2+r^2}=\sqrt{\dfrac{3^8}{\pi^2r^4}+r^2}$.
Lượng giấy tiêu thụ ít nhất khi diện tích xung quanh nhỏ nhất.
Diện tích xung quanh của hình nón là

$$S_{xq}=\pi rl=\pi r\sqrt{\frac{3^8}{\pi^2r^4}+r^2}=\pi\sqrt{\frac{3^8}{\pi^2r^2}+r^4}=\pi\sqrt{\frac{3^8}{2\pi^2r^2}+\frac{3^8}{2\pi^2r^2}+r^4}\geq\pi\sqrt{3\sqrt[3]{\frac{3^{16}}{4\pi^4}}}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{3^8}{2\pi^2r^2}=r^4\Leftrightarrow r=\sqrt[6]{\dfrac{3^8}{2\pi^2}}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 41. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau cắt khối cầu tâm O bán kính R tạo thành hai hình tròn (C_1) và (C_2) cùng bán kính. Xét hình nón có đỉnh trùng với tâm của một trong hai hình tròn, đáy trùng với hình tròn còn lại. Biết diện tích xung quanh của hình nón là lớn nhất, khi đó thể tích khối trụ có hai đáy là hai hình tròn (C_1) và (C_2) bằng

(A) $\dfrac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$. (B) $\dfrac{2\pi R^3\sqrt{3}}{9}$. (C) $\dfrac{\pi R^3\sqrt{3}}{9}$. (D) $\dfrac{4\pi R^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

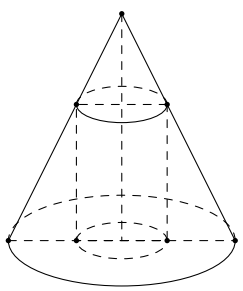
Gọi r, h, l lần lượt là bán kính đáy, chiều cao và đường sinh của hình nón và I_1, I_2, O lần lượt là tâm của hai đường tròn C_1, C_2 và mặt cầu.
Vì hai đường tròn C_1, C_2 có bán kính bằng nhau nên dễ dàng suy ra $OI_1=OI_2=\dfrac{h}{2}$.
Ta có $r=\sqrt{R^2-\dfrac{h^2}{4}}\Rightarrow l=\sqrt{h^2+r^2}=\sqrt{R^2+\dfrac{3h^2}{4}}$.
Diện tích xung quanh hình nón là

$$S_{xq}=\pi rl=\pi\sqrt{R^2-\frac{h^2}{4}}\cdot\sqrt{R^2+\frac{3h^2}{4}}=\frac{\pi}{4\sqrt{3}}\sqrt{(12R^2-3h^2)(4R^2+3h^2)}\leq\frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}.$$

S_{xq} lớn nhất bằng $\dfrac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}$.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $12R^2-3h^2=4R^2+3h^2\Leftrightarrow h=\dfrac{2R}{\sqrt{3}}\Rightarrow r=\dfrac{R\sqrt{6}}{3}$.
Mà bán kính đáy và chiều cao của hình nón cũng chính là bán kính đáy và chiều cao hình trụ.
Vậy thể tích hình trụ $V=\pi r^2h=\pi\cdot\dfrac{6R^2}{9}\cdot\dfrac{2R}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 42.
Cho hình nón có bán kính đáy bằng 3 chiều cao bằng 6, một khối trụ có bán kính đáy thay đổi nội tiếp khối nón đã cho. Thể tích lớn nhất của khối trụ bằng

(A) 6π. (B) 10π. (C) 4π. (D) 8π.



Lời giải.

Gọi bán kính của khối trụ là x $(0 < x < 3)$, chiều cao của khối trụ là $h = OO'$ $(0 < h < 6)$.

Khi đó thể tích khối trụ là $V = \pi x^2 h$.

Ta có $\triangle SO'N$ đồng dạng với $\triangle SOB$ nên có $\dfrac{O'N}{OB} = \dfrac{SO'}{SO} \Leftrightarrow \dfrac{x}{3} = \dfrac{6-h}{6} \Leftrightarrow h = 6 - 2x$.

Suy ra $V = \pi x^2 h = \pi x^2(6 - 2x) = \pi(6x^2 - 2x^3)$.

Xét hàm $f(x) = 6x^2 - 2x^3$, $(0 < x < 3)$.

$f'(x) = 12x - 6x^2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (l)} \\ x = 2 \text{ (n)}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	8	↘	

Do đó V lớn nhất khi hàm $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

Vậy thể tích của khối trụ lớn nhất là $V = 8\pi$ khi bán kính khối trụ bằng 2.

Chọn đáp án (D) □

Câu 43. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, trên đường tròn tâm O' lấy điểm B. Đặt α là góc giữa AB và đáy. Tính $\tan\alpha$ khi thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất.

(A) $\tan\alpha = \sqrt{3}$. (B) $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. (C) $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$. (D) $\tan\alpha = 1$.

Lời giải.

Cách 1. Gọi D là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (O).

Kẻ $AH \perp OD$, $H \in OD$.

Ta có thể tích của khối chóp $OO'AB$

$$V_{OO'AB} = \frac{1}{3} AH \cdot S_{\triangle OO'B} = \frac{2a^2}{3} \cdot AH \leq \frac{2a^2}{3} \cdot AO = \frac{4a^3}{3}.$$

Thể tích $OO'AB$ lớn nhất khi O trùng với H.

Suy ra $AD = 2\sqrt{2}a$.

Vậy $\tan\alpha = \tan\widehat{BAD} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Cách 2. Nhận xét: Nên thêm giả thiết AB chéo với OO' để tứ diện $OO'AB$ tồn tại.

Gọi D là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng chứa đường tròn (O).

Gọi C là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng chứa đường tròn (O').

Ta có $O'CB.OAD$ là một hình lăng trụ đứng.

Ta có thể tích của khối chóp $OO'AB$

$$V_{OO'AB} = V_{O'CB.OAD} = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot S_{\triangle OAD} = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \sin \widehat{AOD} \leq \frac{4a^3}{3}.$$

Thể tích $O'.ABCD$ lớn nhất $\Leftrightarrow \widehat{AOD} = 90^\circ \Leftrightarrow AD = 2\sqrt{2}a$.

Suy ra $\tan \alpha = \tan \widehat{BAD} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, D sao cho $AD = 2\sqrt{3}a$. Gọi C là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng chứa đường tròn (O'). Trên đường tròn tâm (O') lấy điểm B (AB chéo với CD). Đặt α là góc giữa AB và đáy. Tính $\tan \alpha$ khi thể tích khối tứ diện $CDAB$ đạt giá trị lớn nhất.

(A) $\tan \alpha = \sqrt{3}$. (B) $\tan \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. (C) $\tan \alpha = 1$. (D) $\tan \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng chứa đường tròn (O).

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng chứa đường tròn (O').

Ta có $HAD.BKC$ là một hình lăng trụ đứng.

Ta có thể tích của tứ diện $CDAB$ là

$$V_{OABCD} = V_{HAD.BKC} = \frac{1}{3}2a \cdot S_{\triangle HAD} = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \mathrm{d}(H, AD) = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{3} \cdot \mathrm{d}(H, AD).$$

Thể tích $O'.ABCD$ lớn nhất $\Leftrightarrow \mathrm{d}(H, AD)$ lớn nhất $\Leftrightarrow H$ là điểm chính giữa cung lớn $\widehat{AD}$ của đường tròn (O).

Theo định lý sin ta có $\dfrac{AD}{\sin \widehat{AHD}} = 2 \cdot 2a \Leftrightarrow \sin \widehat{AHD} = \dfrac{AD}{4a} = \dfrac{2\sqrt{3}a}{4a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ nên $\widehat{AHD} = 60^\circ$.

Do đó xảy ra khi $\triangle AHD$ đều $\Leftrightarrow AH = AD = 2\sqrt{3}$.

Suy ra $\tan \alpha = \tan \widehat{BAH} = \dfrac{BH}{AH} = \dfrac{2a}{2a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, D; trên đường tròn tâm O' lấy điểm B, C sao cho $AB \parallel CD$ và AB không cắt OO'. Tính AD để thể tích khối chóp $O'.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

(A) $AD = 2\sqrt{2}a$. (B) $AD = 4a$. (C) $AD = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}a$. (D) $AD = \sqrt{2}a$.

Lời giải.

Kẻ đường thẳng qua O' song song với AB cắt mặt phẳng chứa đường tròn (O) tại O_1.

Lúc đó $AO_1D.BO'C$ là một hình lăng trụ chiều cao bằng $2a$.

Vì $AD = BC$ nên $S_{\triangle BO'C} = S_{\triangle OAD}$.

Ta có thể tích của khối chóp $O'.ABCD$

$$V_{O'.ABCD} = \frac{1}{3}V_{AO_1D.BO'C} = \frac{2}{3}\cdot 2a \cdot S_{\triangle BO'C} = \frac{2}{3}\cdot 2a \cdot S_{\triangle OAD} = \frac{2}{3}\cdot 2a \cdot \frac{1}{2}\cdot 2a \cdot 2a \cdot \sin\widehat{AOD} \le \frac{8a^3}{3}.$$

Thể tích $O'.ABCD$ lớn nhất $\Leftrightarrow \widehat{AOD} = 90^\circ \Leftrightarrow AD = 2\sqrt{2}a$.

Chọn đáp án (A) □