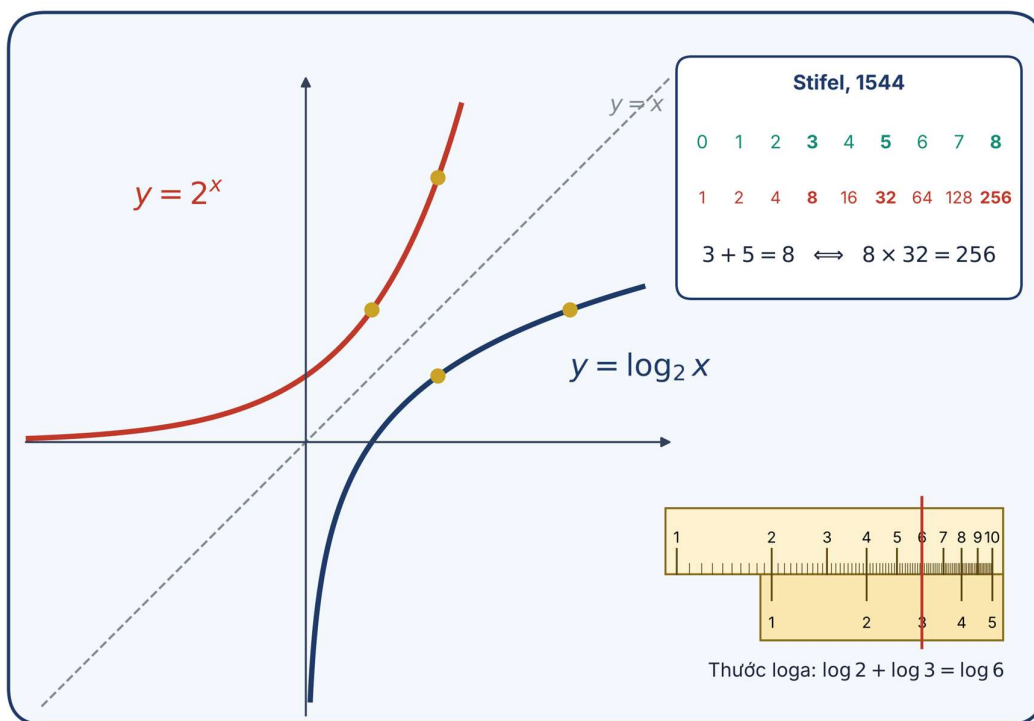




Chuyên đề Toán THPT – Giải tích 11 – 12

LOGARIT

TỪ BẢNG SỐ CỦA NAPIER ĐẾN ĐỀ THI THPT



MỤC LỤC

MỞ ĐẦU – HAI MƯƠI NĂM ĐỂ ĐỔI NHÂN THÀNH CỘNG	4
Mục tiêu của chuyên đề	4
Đối tượng và cách sử dụng	5
PHẦN I. CÂU CHUYỆN LỊCH SỬ – LOGARIT ĐÃ RA ĐỜI NHƯ THẾ NÀO?6	6
1. Mầm mống: hai dãy số song song (Archimedes, Stifel).....	6
2. Một cách nhân bằng lượng giác (khoảng 1580–1590)	7
3. John Napier và hai điểm chuyển động (1614)	7
4. Jost Bürgi: người phát minh độc lập (1588–1620)	8
5. Henry Briggs và logarit thập phân (1615–1624)	8
6. Thước loga: ba thể kỉ trong túi áo kĩ sư (1620–1972)	9
7. Logarit là diện tích: hypebol và chuỗi lũy thừa (1647–1668)	10
8. Euler: logarit là số mũ (1748)	11
9. Thế kỉ XX – XXI: logarit trong đo lường, tin học và phòng thi.....	11
PHẦN II. TỪ TÌNH HUỐNG ĐẾN KHÁI NIỆM	12
Tình huống 1. Gấp giấy lên Mặt Trăng.....	12
Tình huống 2. Bảng nhân không cần nhân.....	12
Tình huống 3. Bao giờ tiền gấp đôi?.....	12
1. Định nghĩa và các tính chất cơ bản	13
2. Hàm số mũ và hàm số logarit.....	14
3. So sánh hai logarit – “thước đo” cơ sở.....	15
4. Quy trình giải phương trình, bất phương trình mũ – logarit.....	16
PHẦN III. CÁC DẠNG TOÁN VÀ VÍ DỤ PHÂN TÍCH.....	17
Dạng 1. Biến đổi và tính giá trị biểu thức logarit	17
Dạng 2. So sánh, ước lượng và đếm chữ số.....	19
Dạng 3. Hàm số mũ, hàm số logarit: tập xác định, đồ thị, đạo hàm	20
Dạng 4. Phương trình mũ và logarit: bốn công cụ cơ bản	23
Dạng 5. Bất phương trình mũ và logarit	24
Dạng 6. Phương pháp hàm đặc trưng.....	25
Dạng 7. Cực trị và đánh giá với biểu thức logarit.....	27
Dạng 8. Phương trình chứa tham số.....	28
Dạng 9. Đếm số nguyên, cặp số nguyên	30
Dạng 10. Bài toán thực tế: tăng trưởng, suy giảm, thang đo	32
Dạng 11. Nâng cao – những ý tưởng Olympic	43
Dạng 12. Bồi dưỡng học sinh giỏi: bất đẳng thức, giới hạn, cực trị.....	45
PHẦN IV. LOGARIT QUANH TA	49
1. Thang độ Richter và độ lớn động đất.....	49
2. Độ pH: logarit trong cốc nước chanh.....	49

3. Decibel: logarit trong tai ta	49
4. Cấp sao: logarit trên bầu trời.....	50
5. Luật Benford và kiểm toán.....	50
6. Biểu đồ thang logarit.....	50
7. Logarit trong tin học	50
PHẦN V. HỆ THỐNG BÀI TẬP	52
Mức 1 – Nhận biết.....	52
Mức 2 – Thông hiểu.....	52
Mức 3 – Vận dụng.....	53
Mức 4 – Vận dụng cao	53
Mức 5 – Thử thách (Olympic)	54
Mức 6 – Bài toán thực tế bổ sung	54
PHẦN VI. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN	57
Mức 1 – Nhận biết.....	57
Mức 2 – Thông hiểu.....	57
Mức 3 – Vận dụng.....	57
Mức 4 – Vận dụng cao	58
Mức 5 – Thử thách	59
Lời giải chi tiết Bài 28	59
Mức 6 – Bài toán thực tế bổ sung	60
PHẦN VII. THIẾT KẾ BUỔI DẠY ÔN THI VÀ ĐỀ LUYỆN TẬP.....	62
1. Kế hoạch buổi dạy (120 phút).....	62
2. Đề luyện tập số 1 (mức độ cơ bản – thông hiểu, 45 phút)	63
3. Đề luyện tập số 2 (mức độ vận dụng – vận dụng cao, 60 phút).....	64
4. Đề luyện tập số 3 – Đề luyện thi học sinh giỏi (tự luận, 150 phút)	66
5. Đáp án và hướng dẫn giải các đề luyện tập	67
6. Phiếu học tập dùng trong buổi dạy.....	69
7. Đề luyện tập số 4 – Đề tổng hợp theo cấu trúc đề thi TN THPT (90 phút).....	69
LỜI KẾT.....	73
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	74

MỞ ĐẦU – HAI MƯƠI NĂM ĐỂ ĐỔI NHÂN THÀNH CỘNG

Hãy tưởng tượng bạn là một nhà thiên văn cuối thế kỉ XVI. Mỗi đêm bạn ghi lại vị trí các hành tinh, mỗi ngày bạn phải nhân, chia, khai căn những con số có bảy, tám chữ số để tính quỹ đạo. Không máy tính, không bảng số, chỉ có giấy, bút lông và sự kiên nhẫn. Một phép nhân hai số bảy chữ số cần khoảng bốn mươi chín phép nhân nhỏ, rồi cộng dồn, và chỉ cần nhằm một chữ số là cả tuần làm việc đổ sông đổ biển.

Năm 1614, một nhà quý tộc Scotland tên là John Napier công bố cuốn sách mỏng *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Mô tả bảng logarit kì diệu). Đó là kết quả của khoảng hai mươi năm tính toán [1, 2]. Món quà ông tặng cho nhân loại rất đơn giản để phát biểu:

Muốn nhân hai số, hãy cộng logarit của chúng.

Phép cộng nhanh hơn phép nhân rất nhiều, nên chỉ trong vài năm, bảng logarit lan khắp châu Âu. Johannes Kepler dùng nó để hoàn thành *Bảng Rudolphine* (1627). Hơn một thế kỉ rưỡi sau, Pierre-Simon Laplace còn nhận xét rằng phát minh logarit, nhờ rút ngắn công việc tính toán, đã “nhân đôi cuộc đời của các nhà thiên văn” [3].

Ngày nay máy tính bỏ túi đã thay bảng số, nhưng logarit không hề biến mất. Nó nằm trong thang độ Richter của các trận động đất, trong độ pH của cốc nước chanh, trong decibel của tiếng ồn ngoài phố, trong thuật toán tìm kiếm của điện thoại, và đương nhiên, trong đề thi tốt nghiệp THPT năm nào cũng có.

Trước khi đọc tiếp, hãy thử sức với ba câu hỏi:

- Một tờ giấy dày 0,1 mm. Mỗi lần gấp đôi, độ dày tăng gấp đôi. Phải gấp bao nhiêu lần để độ dày vượt khoảng cách từ Trái Đất tới Mặt Trăng (khoảng 384 400 km)?
- Số 2^{2026} có bao nhiêu chữ số, và chữ số đầu tiên của nó là gì? (Không được dùng máy tính để tính thẳng 2^{2026} !)
- Trong 1000 số $2^1, 2^2, \dots, 2^{1000}$, có bao nhiêu số bắt đầu bằng chữ số 1?

Ba câu hỏi nghe như ba trò đố khác nhau, nhưng cả ba đều được giải bằng cùng một công cụ, và câu trả lời (42 lần; 610 chữ số, bắt đầu bằng 7; đúng 301 số) sẽ lần lượt xuất hiện trong chuyên đề.

Mục tiêu của chuyên đề

- **Về kiến thức:** hiểu logarit từ ba góc nhìn: *công cụ tính toán* (biến tích thành tổng), *phép toán ngược của lũy thừa và diện tích dưới hypebol*; nắm vững tính chất, công thức đổi cơ số, hàm số mũ, hàm số logarit cùng đồ thị và đạo hàm của chúng.
- **Về kĩ năng:** giải thành thạo phương trình, bất phương trình mũ và logarit bằng bốn công cụ: đưa về cùng cơ số, đặt ẩn phụ, logarit hóa, hàm đặc trưng; xử lí được các câu vận dụng cao như bài toán chứa tham số, đếm cặp số nguyên, cực trị nhiều biến; làm quen các dạng câu Đúng/Sai và Trả lời ngắn trong cấu trúc đề thi mới.

- **Về tư duy:** biết nhận ra “dấu vết logarit” trong các hiện tượng tăng trưởng, suy giảm và đo lường ngoài đời sống; biết ước lượng nhanh những con số rất lớn hoặc rất nhỏ.

Đối tượng và cách sử dụng

Chuyên đề dành cho học sinh lớp 11, 12 ôn thi tốt nghiệp THPT và đánh giá năng lực, học sinh ôn thi học sinh giỏi, giáo viên dạy chương *Hàm số mũ và hàm số logarit* (Toán 11, Chương trình GDPT 2018), và bất kì ai yêu toán muốn biết logarit từ đâu mà có.

Bảng. Cấu trúc chuyên đề

Phần	Nội dung	Mức độ
I	Câu chuyện lịch sử: từ Archimedes, Stifel, Napier, Briggs đến Euler	Đọc hiểu
II	Từ tình huống đến khái niệm; tính chất; hàm số mũ và logarit	Cơ bản
III	12 dạng toán, hơn 60 ví dụ phân tích chi tiết	Cơ bản → Olympic
IV	Logarit quanh ta: thước loga, Richter, pH, decibel, Benford, tin học	Mở rộng
V	52 bài tập chia 6 mức độ (có 12 bài thực tế bổ sung)	Luyện tập
VI	Đáp số và hướng dẫn giải	Tự kiểm tra
VII	Kế hoạch buổi dạy ôn thi 120 phút, phiếu học tập, 4 đề luyện tập có đáp án	Dạy học

★ Kí hiệu trong chuyên đề.

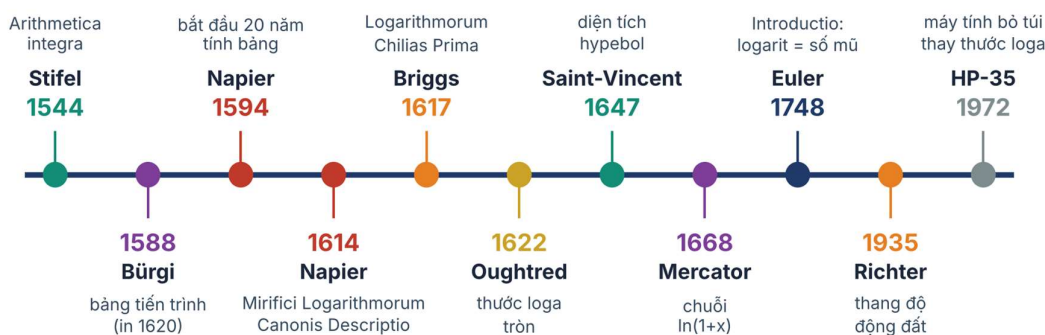
Theo sách giáo khoa hiện hành, $\log x$ (hoặc $\lg x$) là logarit thập phân (cơ số 10), $\ln x$ là logarit tự nhiên (cơ số $e \approx 2,71828$).

Các con số trong ngoặc vuông như chỉ tài liệu tham khảo ở cuối chuyên đề.

Những ví dụ ghi *phát triển* là bài do người biên soạn xây dựng dựa trên ý tưởng của đề thi.

PHẦN I. CÂU CHUYỆN LỊCH SỬ – LOGARIT ĐÃ RA ĐỜI NHƯ THẾ NÀO?

Trong sách giáo khoa, logarit xuất hiện *sau* lũy thừa, như một phép toán ngược: $\log_a b$ là số mũ mà ta phải nâng a lên để được b . Thế nhưng lịch sử lại đi theo thứ tự ngược hẳn. Logarit ra đời *trước* khi người ta có khái niệm lũy thừa với số mũ thực, và phải hơn một thế kỉ sau Euler mới nhận ra rằng logarit chính là số mũ [1, 3]. Hiểu câu chuyện này sẽ giúp ta hiểu vì sao logarit có những tính chất “kì lạ” như $\log(xy) = \log x + \log y$.



Dòng thời gian: hơn bốn thế kỉ của logarit, từ ý tưởng của Stifel đến khi máy tính bỏ túi thay thế thước loga.

1. Mầm mống: hai dãy số song song (Archimedes, Stifel)

Ý tưởng cốt lõi của logarit đã có từ thời cổ đại. Trong tác phẩm *Người đếm cát*, Archimedes (thế kỉ III TCN) nhận xét rằng khi nhân các số trong dãy 1, 10, 10^2 , ... thì “bậc” của chúng cộng lại với nhau, điều mà ngày nay ta viết là $10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}$.

Năm 1544, nhà toán học Đức Michael Stifel viết điều đó tường minh hơn trong cuốn *Arithmetica integra*. Ông đặt dãy cấp số cộng 0, 1, 2, 3, ... ngay trên dãy cấp số nhân 1, 2, 4, 8, ... và chỉ ra rằng: *phép nhân ở dòng dưới tương ứng với phép cộng ở dòng trên, phép chia tương ứng với phép trừ, phép khai căn tương ứng với phép chia* [3, 7].



Bảng của Stifel: muốn tính 8×32 , ta cộng hai số phía trên $3 + 5 = 8$, rồi tra xuống được 256.

Bảng của Stifel có một nhược điểm chết người: các số ở dòng dưới cách nhau quá xa. Muốn nhân 7×13 , bảng chịu thua. Muốn bảng “dày” hơn, ta cần một cấp số nhân có công bội rất gần 1.

Đó chính là bước đi thiên tài của Napier.

2. Một cách nhân bằng lượng giác (khoảng 1580–1590)

Trước Napier, các nhà thiên văn đã có một mẹo đổi nhân thành cộng, gọi là *prosthaphaeresis* (tiếng Hi Lạp: “cộng và trừ”). Nó dựa trên công thức biến đổi tích thành tổng:

$$\sin A \cos B = 1/2 [\sin(A + B) + \sin(A - B)].$$

Muốn nhân hai số, ta tra bảng sin và cos để tìm các góc A, B , cộng trừ góc, rồi tra ngược lại.

Phương pháp này được dùng nhiều ở đài thiên văn của Tycho Brahe (Đan Mạch).

Ví dụ trong [2]: để tính $0,17365 \times 0,99027$ ta thấy $0,17365 = \sin 10^\circ$, $0,99027 = \cos 8^\circ$, nên tích bằng $1/2 (\sin 18^\circ + \sin 2^\circ) = 1/2 (0,30902 + 0,03490) = 0,17196$. Cách làm này khá tốn công và rất bất tiện khi chia hay khai căn, nên Napier muốn tìm một công cụ tốt hơn [1].

3. John Napier và hai điểm chuyển động (1614)

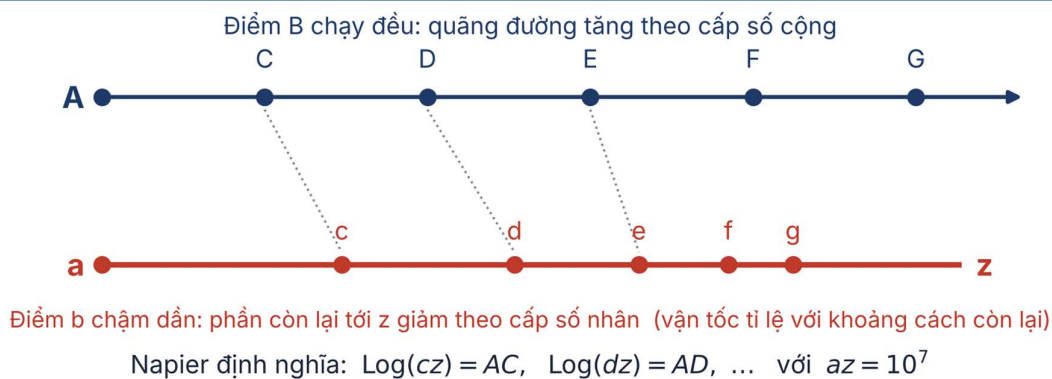
John Napier (1550–1617), lãnh chúa vùng Merchiston gần Edinburgh, là một nhà thần học, nhà phát minh và nhà toán học nghiệp dư. Ông không có khái niệm hàm số mũ. Thay vào đó, ông hình dung hai điểm chuyển động (hình minh họa):

- Điểm B chạy đều trên một tia vô hạn, xuất phát từ A .
Sau những khoảng thời gian bằng nhau, B vạch ra các điểm $C, D, E, \dots$ cách đều nhau, tức là quãng đường lập thành *cấp số cộng*.
- Điểm b chạy trên đoạn az có độ dài 10^7 , cùng vận tốc ban đầu với B , nhưng vận tốc ở mỗi thời điểm *tỉ lệ với quãng đường còn lại* đến z . Vì vậy phần còn lại $cz, dz, ez, \dots$ giảm theo *cấp số nhân*.

Napier định nghĩa: quãng đường AC là “logarit” của độ dài cz . Theo ngôn ngữ ngày nay, logarit của Napier là

$$\text{NapLog}(x) = 10^7 \ln \frac{10^7}{x},$$

và nó có tính chất $\text{NapLog}(x) + \text{NapLog}(y) = \text{NapLog}(xy/10^7)$, tức là đổi nhân thành cộng, chỉ sai khác một phép dời dấu phẩy [1, 2].



Mô hình hai điểm chuyển động của Napier: chuyển động đều sinh ra cấp số cộng, chuyển động chậm dần sinh ra cấp số nhân.

Chữ *logarithm* do chính Napier đặt, ghép từ hai từ Hi Lạp *logos* (tỉ số) và *arithmos* (con số): “con số đếm các tỉ số”. Bảng của ông lấy công bội $1 - 10^{-7} = 0,9999999$, rất gần 1, nên các số trong bảng “dày đặc” và có thể dùng để tính với bảy chữ số. Trong cuốn sách năm 1614, Napier đã minh họa ưu điểm này: để tìm trung bình nhân của 10 000 000 và 5 000 000, ông lấy trung bình cộng các logarit $(0 + 6\,931\,470) : 2 = 3\,465\,735$ rồi tra bảng, được 7 071 068 [1].

❖ Góc lịch sử.

Napier còn nổi tiếng với *những chiếc que Napier* (Napier’s bones, 1617), một bộ que khắc bảng cửu chương giúp nhân nhanh, và là một trong những người phổ biến dấu thập phân ở châu Âu. Hằng số e đôi khi được gọi là “số Napier”, dù ông chưa bao giờ viết ra nó: số e chỉ ẩn trong cách ông xây dựng bảng [3].

4. Jost Bürgi: người phát minh độc lập (1588–1620)

Ở Prague, người thợ làm đồng hồ Thụy Sĩ Jost Bürgi (1552–1632), cộng sự của Kepler, cũng xây dựng một bảng tương tự với công bội 1,0001. Ông có thể đã có ý tưởng từ khoảng 1588, nhưng mãi đến 1620 mới in *Arithmetische und Geometrische Progress Tabulen*, khi bảng của Napier đã nổi tiếng khắp châu Âu [3, 7]. Đây là một ví dụ điển hình của hiện tượng “phát minh đồng thời” trong lịch sử khoa học: khi nhu cầu đã chín muồi, nhiều người cùng tìm ra một ý tưởng.

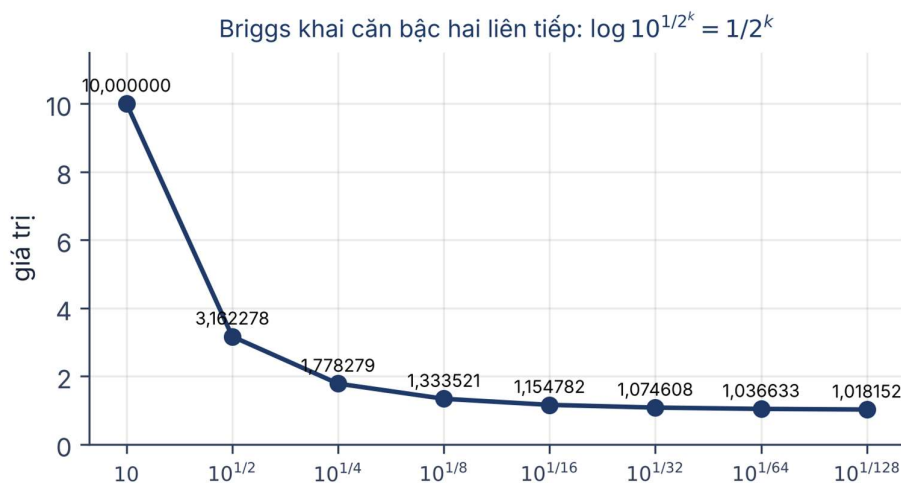
5. Henry Briggs và logarit thập phân (1615–1624)

Logarit của Napier dùng rất bất tiện vì $\text{NapLog}(1) \neq 0$. Henry Briggs (1561–1630), giáo sư hình học ở Gresham College (London), đọc cuốn sách năm 1614 và say mê đến mức vượt hàng trăm dặm lên Edinburgh gặp Napier vào mùa hè năm 1615. Tương truyền khi gặp nhau, hai người lặng nhìn nhau gần mười lăm phút rồi Briggs mới cất lời. Họ thống nhất một cải tiến quan trọng: chọn $\log 1 = 0$ và $\log 10 = 1$. Đó chính là *logarit thập phân* mà ta dùng ngày nay [2, 3].

Briggs tính bảng bằng một phương pháp đơn giản nhưng cực kì kiên nhẫn: khai căn bậc hai liên tiếp. Vì $\log 10 = 1$ nên $\log \sqrt{10} = 1/2$, $\log \sqrt[4]{10} = 1/4$, ... Khai căn đủ nhiều lần, ta được những số rất gần 1 với logarit đã biết, rồi ghép lại bằng tính chất $\log(xy) = \log x + \log y$.

Ví dụ [2]: $\sqrt{10} = 3,162277$ nên $\log 3,162277 = 0,5$; $10^{3/4} = 5,623413$

nên $\log 5,623413 = 0,75$.



Phương pháp của Briggs: các căn bậc 2^k của 10 tiến rất nhanh về 1; logarit của chúng là $1/2^k$.

Năm 1617 Briggs in bảng logarit của các số từ 1 đến 1000 với 14 chữ số thập phân; năm 1624 cuốn *Arithmetica Logarithmica* mở rộng cho các số từ 1 đến 20 000 và từ 90 000 đến 100 000.

Khoảng trống còn lại được nhà xuất bản Hà Lan Adriaan Vlacq lấp đầy năm 1628 [3, 5]. Briggs cũng đặt ra hai thuật ngữ *characteristic* (phần nguyên) và *mantissa* (phần thập phân) của logarit

★ Một mẹo của Briggs mà học sinh có thể dùng ngay.

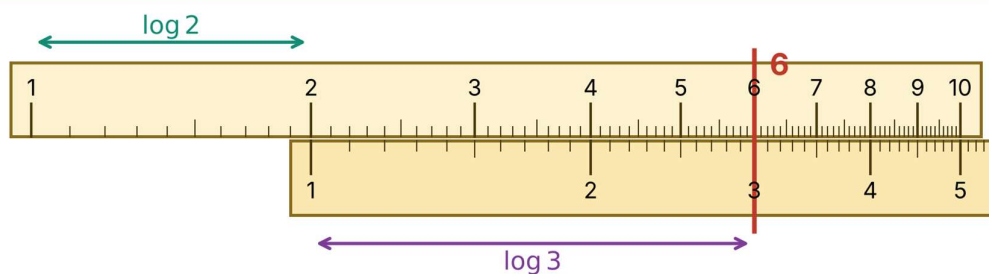
Vì $2^{10} = 1024 \approx 10^3$ nên $10 \log 2 \approx 3$, tức $\log 2 \approx 0,3$.

Chính xác hơn, $\log 2 = 0,3 + 1/10 \log 1,024 \approx 0,30103$.

Từ đó $\log 5 = 1 - \log 2 \approx 0,69897$, $\log 8 \approx 0,90309$. Chỉ bằng vài phép tính, ta đã có một “bảng logarit mini”!

6. Thước loga: ba thế kỉ trong túi áo kĩ sư (1620–1972)

Năm 1620, Edmund Gunter khắc logarit lên một cây thước: khoảng cách từ vạch 1 đến vạch x tỉ lệ với $\log x$. Vài năm sau, William Oughtred đặt hai thước như thế trượt lên nhau và tạo ra *thước loga* (slide rule). Muốn nhân 2×3 , ta đặt vạch 1 của thước dưới thẳng vạch 2 của thước trên, rồi đọc giá trị phía trên vạch 3 của thước dưới: được 6, vì hai đoạn $\log 2$ và $\log 3$ nối tiếp nhau thành đoạn $\log 6$ (hình minh họa).



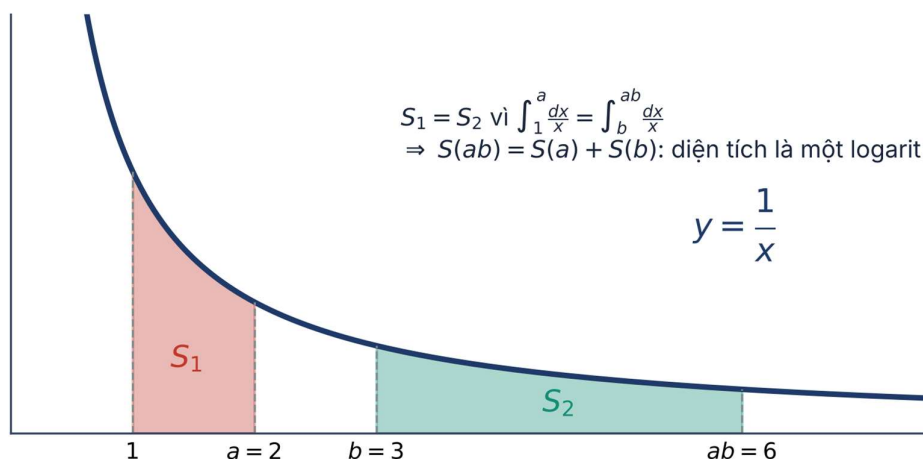
Nguyên lý thước loga: cộng hai độ dài $\log 2 + \log 3$ để đọc ra tích 6.

Từ thế kỉ XVII đến những năm 1970, thước loga là công cụ không thể thiếu của kĩ sư: cầu, tàu thủy, máy bay và cả các chương trình không gian đều được tính bằng nó. Chỉ khi máy tính khoa học bỏ túi HP-35 ra đời năm 1972, thước loga mới dần lui vào bảo tàng. Ở Việt Nam, nhiều thế hệ học sinh trước khi có máy tính bỏ túi đã quen tra *Bảng số với 4 chữ số thập phân* để tính logarit.

7. Logarit là diện tích: hypebol và chuỗi lũy thừa (1647–1668)

Một bất ngờ lớn đến từ hình học. Năm 1647, Grégoire de Saint-Vincent chứng minh rằng diện tích dưới hypebol $y = 1/x$ có một tính chất đặc biệt: diện tích từ 1 đến a bằng diện tích từ b đến ab . Năm 1649, học trò của ông là Alphonse Antonio de Sarasa nhận ra điều đó có nghĩa là *diện tích ấy là một logarit*: $S(ab) = S(a) + S(b)$ [3, 8]. Ngày nay ta viết

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$



Hai miền tô màu có diện tích bằng nhau: diện tích dưới hypebol biến phép nhân thành phép cộng.

Năm 1668, Nicolaus Mercator công bố chuỗi

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (-1 < x \leq 1),$$

cho phép tính logarit với độ chính xác tùy ý mà không cần khai căn hàng nghìn lần như Briggs.

Từ đây, logarit rời khỏi bàn tính để bước vào giải tích.

8. Euler: logarit là số mũ (1748)

Năm 1683, Jacob Bernoulli nghiên cứu bài toán lãi kép: gửi 1 đồng với lãi suất 100%/năm, nếu nhập lãi n lần mỗi năm thì cuối năm có $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ đồng. Khi n tăng vô hạn, số tiền tiến tới một giới hạn, mà sau này Euler kí hiệu là $e \approx 2,71828$ [3].

Trong cuốn *Introductio in analysin infinitorum* (1748), Leonhard Euler lần đầu tiên định nghĩa logarit theo cách của sách giáo khoa hiện nay: nếu $a^y = x$ thì y là logarit cơ số a của x [6]. Ông cũng chứng minh hàm e^x và $\ln x$ là hai hàm ngược của nhau và tìm ra các chuỗi

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Như vậy, sau hơn 130 năm, ba ý tưởng tưởng như rời rạc (bảng số của Napier, diện tích dưới hypebol, lãi kép) đã được thống nhất thành một.

Bảng. Ba gương mặt của logarit

Góc nhìn	Phát biểu	Người khởi xướng
Công cụ tính toán	biến tích thành tổng: $\log(xy) = \log x + \log y$	Stifel, Napier, Briggs, Bürgi
Diện tích	$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$	Saint-Vincent, de Sarasa, Mercator
Phép toán ngược	$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$	Euler

9. Thế kỉ XX – XXI: logarit trong đo lường, tin học và phòng thí

Khi không còn dùng để tính toán thủ công, logarit tìm được vai trò mới: *nén những đại lượng trải dài nhiều bậc độ lớn* vào một thang đo dễ hiểu. Năm 1856, Norman Pogson chuẩn hóa thang cấp sao trong thiên văn; năm 1909, Søren Sørensen đưa ra độ pH; năm 1935, Charles Richter đưa ra thang độ lớn động đất [17]. Năm 1938, Frank Benford công bố quy luật chữ số đầu tiên mang tên ông [16]. Trong tin học, độ phức tạp $O(\log n)$ của tìm kiếm nhị phân cho phép tìm một tên trong danh bạ một tỉ người chỉ với khoảng 30 phép so sánh.

Ở Việt Nam, logarit là nội dung trọng tâm của giải tích phổ thông và có mặt trong mọi đề thi đại học, tốt nghiệp THPT. Theo Chương trình GDPT 2018, chủ đề *Hàm số mũ và hàm số logarit* được học ở lớp 11 [18]. Từ năm 2025, đề thi tốt nghiệp có thêm các câu hỏi *Đúng/Sai* và *Trả lời ngắn*, nhiều câu gắn với bối cảnh thực tế như lãi suất, tăng trưởng dân số, phân rã thuốc, cường độ ánh sáng. Phần III sẽ đi qua tất cả những dạng toán ấy.

Logarit trả lời câu hỏi: “phải nhân bao nhiêu lần?”

PHẦN II. TỪ TÌNH HUỐNG ĐẾN KHÁI NIỆM

Trước khi định nghĩa, hãy để ba tình huống dẫn ta đến cùng một câu hỏi: *biết kết quả của phép lũy thừa, làm sao tìm lại số mũ?*

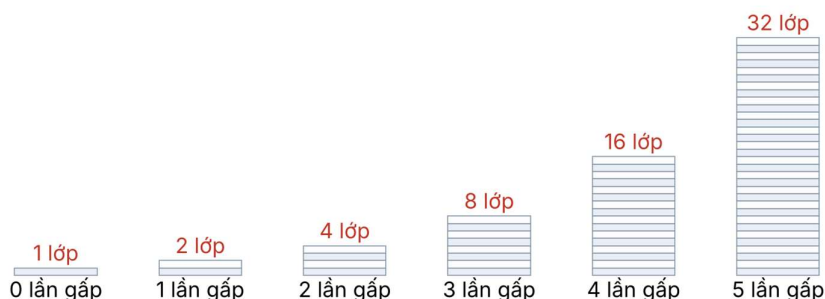
Tình huống 1. Gấp giấy lên Mặt Trăng

Một tờ giấy dày 0,1 mm. Sau n lần gấp đôi (giả sử gấp được mãi), độ dày là $0,1 \cdot 2^n$ mm. Khoảng cách Trái Đất – Mặt Trăng khoảng $384\,400 \text{ km} = 3,844 \cdot 10^{11} \text{ mm}$. Ta cần

$$0,1 \cdot 2^n \geq 3,844 \cdot 10^{11} \Leftrightarrow 2^n \geq 3,844 \cdot 10^{12}.$$

Thử từng giá trị n thì rất mệt. Ta cần một phép toán “đảo ngược” phép lũy thừa: số mũ n sao cho $2^n = 3,844 \cdot 10^{12}$. Số mũ đó được kí hiệu là $\log_2(3,844 \cdot 10^{12}) \approx 41,8$. Vậy chỉ cần **42 lần gấp!** Trực giác của chúng ta thường đánh giá rất thấp tốc độ của hàm mũ.

Gấp đôi tờ giấy dày 0,1 mm: sau n lần dày $0,1 \cdot 2^n$ mm. Cần bao nhiêu lần để chạm Mặt Trăng?



Mỗi lần gấp, số lớp tăng gấp đôi: tăng trưởng theo cấp số nhân.

Tình huống 2. Bảng nhân không cần nhân

Dùng bảng của Stifel (hình minh họa), hãy tính 16×64 và $1024 : 32$ mà không nhân chia: 16 ứng với 4, 64 ứng với 6, $4 + 6 = 10$ ứng với 1024. Còn $1024 : 32$ ứng với $10 - 5 = 5$, tức 32.

Phép nhân trở thành phép cộng của “số mũ”.

Tình huống 3. Bao giờ tiền gấp đôi?

Gửi tiết kiệm với lãi suất 7,2%/năm theo hình thức lãi kép. Sau n năm, số tiền gấp $(1,072)^n$ lần vốn. Hỏi sau bao nhiêu năm thì tiền gấp đôi? Ta cần số mũ n sao cho $1,072^n = 2$, tức $n = \log_{1,072} 2 \approx 9,97$. Vậy sau 10 năm.

★ Nhận xét.

Cả ba tình huống đều dẫn đến phương trình dạng $a^x = b$. Khi b không phải là một lũy thừa “đẹp” của a , ta không thể nhẩm ra x ; ta cần một tên gọi và một kí hiệu cho nghiệm ấy.

Đó là logarit.

1. Định nghĩa và các tính chất cơ bản

■ Định nghĩa logarit.

Cho hai số thực dương a, b với $a \neq 1$. Số thực α thỏa mãn $a^\alpha = b$ được gọi là *logarit cơ số a của b* , kí hiệu $\log_a b$:

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b \quad (0 < a \neq 1, b > 0).$$

Đặc biệt: $\log b = \lg b = \log_{10} b$ (logarit thập phân); $\ln b = \log_e b$ (logarit tự nhiên).

△ Ba điều kiện không được quên.

Cơ số dương và khác 1; biểu thức dưới dấu logarit phải dương. Không có $\log_1 5$, không có $\log_{-2} 4$, không có $\log_3 0$ hay $\log_3(-9)$. Hầu hết lỗi sai trong giải phương trình logarit bắt nguồn từ việc quên điều kiện.

Từ định nghĩa suy ra ngay: $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, $a^{\log_a b} = b$, $\log_a a^\alpha = \alpha$.

Bảng. Các quy tắc tính logarit (với $0 < a \neq 1$, $0 < c \neq 1$, $b, b_1, b_2 > 0$)

Quy tắc	Công thức	Ghi chú
Logarit của tích	$\log_a(b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$	nhân thành cộng (Napier)
Logarit của thương	$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$	chia thành trừ
Logarit của lũy thừa	$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$	lũy thừa thành nhân
Đổi cơ số	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$	mọi logarit quy về ln hoặc log
Hệ quả 1	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$	“dây chuyền” ($b \neq 1$)
Hệ quả 2	$\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \log_a b$, $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$	$\beta \neq 0$

■ Chứng minh quy tắc logarit của tích, chỉ trong một dòng.

Đặt $x = \log_a b_1$, $y = \log_a b_2$ thì $a^x = b_1$, $a^y = b_2$, nên $b_1 b_2 = a^x a^y = a^{x+y}$. Theo định nghĩa, $\log_a(b_1 b_2) = x + y$.

Quy tắc nhân của lũy thừa $a^x a^y = a^{x+y}$ và quy tắc cộng của logarit là một, nhìn từ hai phía.

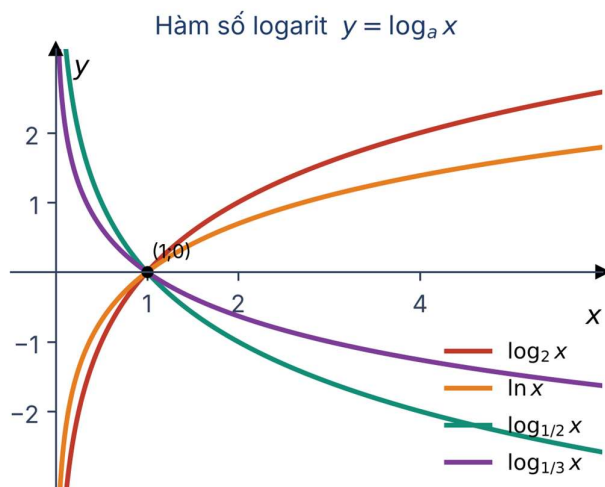
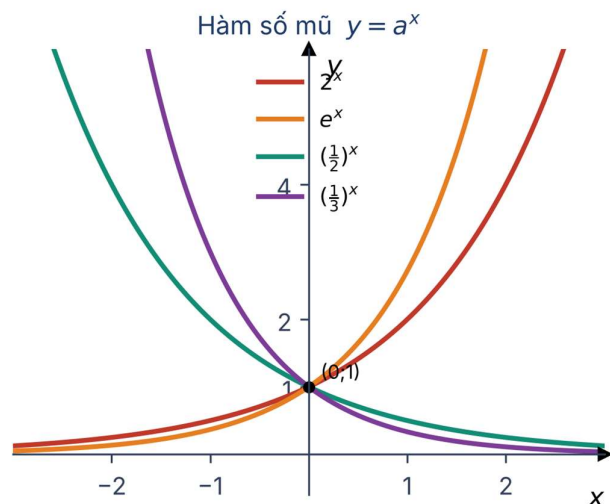
⚠ Bẫy thường gặp.

$$\log_a(b_1 + b_2) \neq \log_a b_1 + \log_a b_2 \text{ và } \log_a(b_1 b_2) \neq \log_a b_1 \cdot \log_a b_2.$$

Đặc biệt, $\log_a x^2 = 2\log_a |x|$ (với $x \neq 0$), chứ không phải $2\log_a x$ khi x có thể âm. Chính dấu giá trị tuyệt đối này làm nhiều bạn mất nghiệm hoặc thừa nghiệm.

2. Hàm số mũ và hàm số logarit**Bảng. So sánh hai hàm số ngược nhau**

	Hàm số mũ $y = a^x$	Hàm số logarit $y = \log_a x$
Tập xác định	$\mathbb{R}$	$(0; +\infty)$
Tập giá trị	$(0; +\infty)$	$\mathbb{R}$
Đạo hàm	$(a^x)' = a^x \ln a, (e^x)' = e^x$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, (\ln x)' = \frac{1}{x}$
Hàm hợp	$(a^u)' = u' a^u \ln a$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}, (\ln u)' = \frac{u'}{u}$
Đơn điệu	$a > 1$: đồng biến; $0 < a < 1$: nghịch biến	$a > 1$: đồng biến; $0 < a < 1$: nghịch biến
Điểm đặc biệt	đi qua $(0; 1)$ và $(1; a)$	đi qua $(1; 0)$ và $(a; 1)$
Tiệm cận	tiệm cận ngang $y = 0$	tiệm cận đứng $x = 0$



Đồ thị hàm số mũ và hàm số logarit với các cơ số khác nhau.

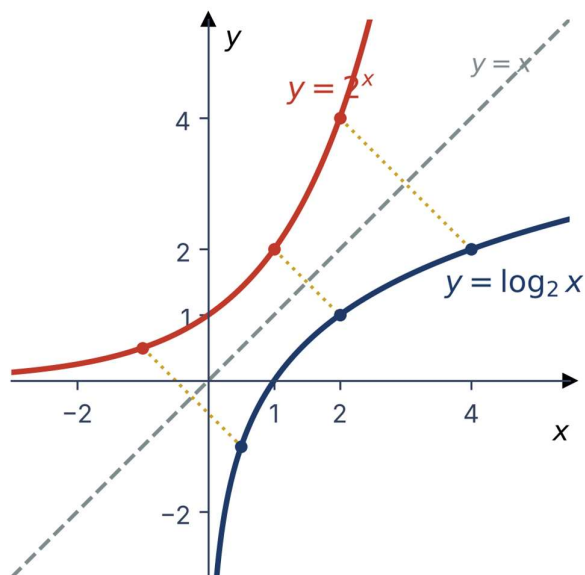
Vì $y = a^x$ và $y = \log_a x$ là hai hàm ngược nhau, đồ thị của chúng *đối xứng qua đường thẳng* $y = x$: điểm $(1; 2)$ trên đồ thị $y = 2^x$ ứng với điểm $(2; 1)$ trên đồ thị $y = \log_2 x$.

Tính chất đối xứng này là chìa khóa cho nhiều bài toán vận dụng cao, chẳng hạn phương trình

$a^x + m = \log_a(x - m)$ ở Dạng 8: hai vế là hai hàm ngược nhau, nên nghiệm (nếu có) nằm trên đường $y = x$.

Hai giới hạn nền tảng:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$



Đồ thị $y = 2^x$ và $y = \log_2 x$ đối xứng qua $y = x$.

3. So sánh hai logarit – “thước đo” cơ số

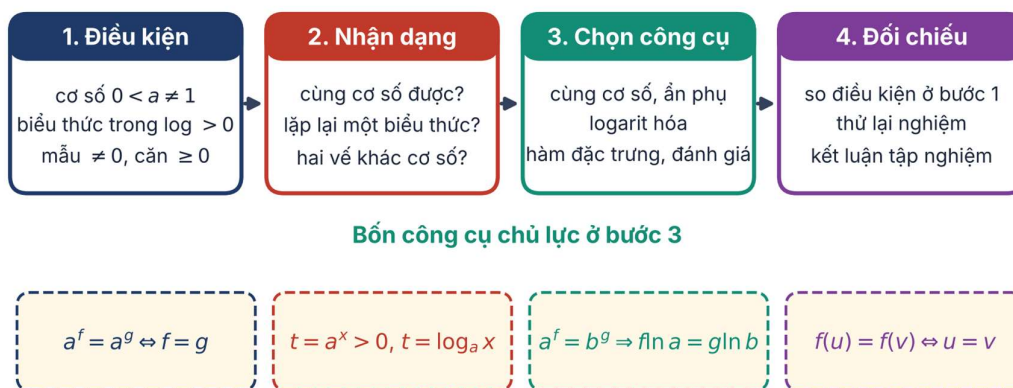
■ Quy tắc so sánh.

- Nếu $a > 1$: $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c > 0$ (cùng chiều).
- Nếu $0 < a < 1$: $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow 0 < b < c$ (đảo chiều).
- $\log_a b > 0 \Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) > 0$: cơ số và biểu thức cùng phía so với 1 thì logarit dương.

Quy tắc cuối cùng rất hay dùng để xét dấu nhanh: $\log_{0,3} 0,7 > 0$ (cả hai nhỏ hơn 1),

còn $\log_5 0,2 < 0$.

4. Quy trình giải phương trình, bất phương trình mũ – logarit



Sai lầm hay gặp nhất: quên điều kiện, chia hai vế cho biểu thức có thể bằng 0, dùng $\log_a x^2 = 2\log_a x$ khi $x < 0$.

Quy trình 4 bước và bốn công cụ chủ lực khi giải phương trình, bất phương trình mũ – logarit.

1. **Đặt điều kiện** cho cơ số và biểu thức dưới dấu logarit, mẫu số, căn thức.
2. **Nhận dạng**: có đưa về cùng một cơ số được không? có một biểu thức lặp đi lặp lại không? hai vế có “cùng hình dạng” $f(u) = f(v)$ không?
3. **Chọn công cụ**: đưa về cùng cơ số; đặt ẩn phụ; logarit hóa (lấy logarit hai vế); hàm đặc trưng hoặc đánh giá (đơn điệu, bất đẳng thức).
4. **Đối chiếu** nghiệm với điều kiện, kết luận.

★ Bảng tra nhanh: phương trình cơ bản.

$a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$ (cần $b > 0$); $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$;
 $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$; $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) > 0$.
 Với bất phương trình: $a > 1$ giữ chiều, $0 < a < 1$ đổi chiều.

PHẦN III. CÁC DẠNG TOÁN VÀ VÍ DỤ PHÂN TÍCH

Phần này gồm 12 dạng toán, đi từ mức nhận biết đến vận dụng cao và Olympic. Mỗi dạng có phần tóm tắt phương pháp, các ví dụ có *phân tích* (tại sao nghĩ như vậy) trước *lời giải* (viết thế nào), và *nhận xét* (rút ra điều gì, phát triển bài toán ra sao). Nguồn của mỗi ví dụ ghi trong ngoặc.

Dạng 1. Biến đổi và tính giá trị biểu thức logarit

★ Phương pháp.

Đưa mọi logarit về cùng một cơ số (thường là cơ số nhỏ nhất xuất hiện, hoặc $\ln$); dùng ba quy tắc tích – thương – lũy thừa; khi đề cho $\log_a b = m$, hãy biểu diễn mọi thứ theo các “logarit nguyên tố” như $\log_2 3$, $\log_2 5$.

◆ Ví dụ 1. (Đề thi thử TN THPT 2026)

Với mọi số thực dương a , $\log_3(27a) - \log_3 a$ bằng

A. $\log_3(26a)$.

B. 9.

C. 3.

D. $3 - 2\log_3 a$.

Lời giải. $\log_3(27a) - \log_3 a = \log_3 \frac{27a}{a} = \log_3 27 = 3$. Chọn C.

⚠ Bẫy thường gặp.

Phương án A là “bẫy” dành cho ai nghĩ $\log(x) - \log(y) = \log(x - y)$. Phương án B dành cho ai nhầm $\log_3 27$ với $27:3$.

◆ Ví dụ 2. (Biểu diễn logarit)

Cho $\log_2 3 = a$ và $\log_3 5 = b$. Biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b .

Phân tích. Ta có hai “viên gạch” $\log_2 3$ và $\log_3 5$. Hãy chuyển mọi thứ về cơ số 2 vì $\log_2 5 = \log_2 3 \cdot \log_3 5 = ab$ (quy tắc dây chuyền).

Lời giải.

$$\log_6 45 = \frac{\log_2 45}{\log_2 6} = \frac{\log_2 9 + \log_2 5}{\log_2 2 + \log_2 3} = \frac{2a + ab}{1 + a} = \frac{a(b + 2)}{1 + a}.$$

◆ Ví dụ 3. (Đề thi TN THPT 2020)

Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $4^{\log_2(a^2b)} = 3a^3$. Giá trị của ab^2 bằng

- A. 3. B. 6. C. 12. D. 2.

Phân tích. Cơ số 4 của lũy thừa và cơ số 2 của logarit “ăn khớp” nhau vì $4 = 2^2$. Nhớ công thức $a^{\log_a X} = X$.

Lời giải. $4^{\log_2(a^2b)} = (2^{\log_2(a^2b)})^2 = (a^2b)^2 = a^4b^2$. Do đó $a^4b^2 = 3a^3 \Leftrightarrow ab^2 = 3$.

Chọn A.

◆ Ví dụ 4. (Đề thi TN THPT 2020)

Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(2x + y)$. Tính $\frac{x}{y}$.

Phân tích. Ba logarit bằng nhau: hãy đặt chúng bằng một ẩn t và “mở” logarit thành lũy thừa. Ba cơ số 9, 6, 4 là $3^2, 2 \cdot 3, 2^2$: bóng dáng của một phương trình đẳng cấp bậc hai.

Lời giải. Đặt $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(2x + y) = t$, ta có $x = 9^t, y = 6^t, 2x + y = 4^t$. Suy ra $2 \cdot 9^t + 6^t = 4^t$. Chia hai vế cho 4^t và đặt $u = (3/2)^t > 0$:

$$2u^2 + u - 1 = 0 \Leftrightarrow u = 1/2 \text{ (nhận) hoặc } u = -1 \text{ (loại)}.$$

$$\text{Vậy } \frac{x}{y} = \left(\frac{9}{6}\right)^t = \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{1}{2}.$$

◆ Ví dụ 5. (AIME 1983)

Cho x, y, z lớn hơn 1 và w dương thỏa mãn $\log_x w = 24, \log_y w = 40, \log_{xyz} w = 12$.

Tìm $\log_z w$.

Phân tích. Logarit “cơ số thay đổi” rất khó cộng. Lật ngược lại bằng $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ để mọi thứ có cùng cơ số w , khi đó tích xyz biến thành tổng.

Lời giải. Ta có $\log_w x = \frac{1}{24}, \log_w y = \frac{1}{40}, \log_w(xyz) = \frac{1}{12}$.

Vì $\log_w(xyz) = \log_w x + \log_w y + \log_w z$ nên

$$\log_w z = \frac{1}{12} - \frac{1}{24} - \frac{1}{40} = \frac{10 - 5 - 3}{120} = \frac{1}{60} \Rightarrow \log_z w = 60.$$

Dạng 2. So sánh, ước lượng và đếm chữ số**★ Phương pháp.**

So sánh hai logarit khác cơ số: tìm một *số trung gian* (thường là phân số đơn giản như $\frac{3}{2}$); hoặc khảo sát hàm số. Số chữ số của số nguyên dương N là $[\log N] + 1$; chữ số đầu tiên được quyết định bởi *phần lẻ* của $\log N$.

◆ Ví dụ 6. (So sánh không dùng máy tính)

So sánh $\log_2 3$ và $\log_3 5$.

Phân tích. Cả hai đều nằm giữa 1 và 2. Thử số ở giữa $\frac{3}{2}$: ta cần so sánh 3 với $2^{3/2} = \sqrt{8}$ và 5 với $3^{3/2} = \sqrt{27}$.

Lời giải. Vì $2^{3/2} = \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3$ nên $\log_2 3 > \frac{3}{2}$. Vì $3^{3/2} = \sqrt{27} > \sqrt{25} = 5$ nên $\log_3 5 < \frac{3}{2}$. Vậy $\log_2 3 > \log_3 5$.

◆ Ví dụ 7. (Kinh điển)

Chứng minh $\log_2 3$ là số vô tỉ.

Lời giải. Giả sử $\log_2 3 = \frac{p}{q}$ với p, q nguyên dương. Khi đó $2^{p/q} = 3$, tức $2^p = 3^q$. Vế trái là số chẵn, vế phải là số lẻ: vô lí. Vậy $\log_2 3$ vô tỉ.

★ Nhận xét.

Chứng minh ngắn đến bất ngờ nhưng hệ quả rất sâu: vì $\log 2$ vô tỉ, các phần lẻ của $n \log 2$ rải đều trên $[0; 1)$ (định lý Weyl). Đó là lí do có lũy thừa của 2 bắt đầu bằng bất kì dãy chữ số nào, kể cả 2026 ... (Bài 40).

◆ Ví dụ 8. (Đếm chữ số – trả lời ngắn)

Biết $\log 2 \approx 0,30103$. Số 2^{2026} có bao nhiêu chữ số? Chữ số đầu tiên của nó là gì?

Phân tích. Một số có k chữ số thì nằm trong $[10^{k-1}; 10^k)$, nên logarit của nó nằm trong $[k-1; k)$.

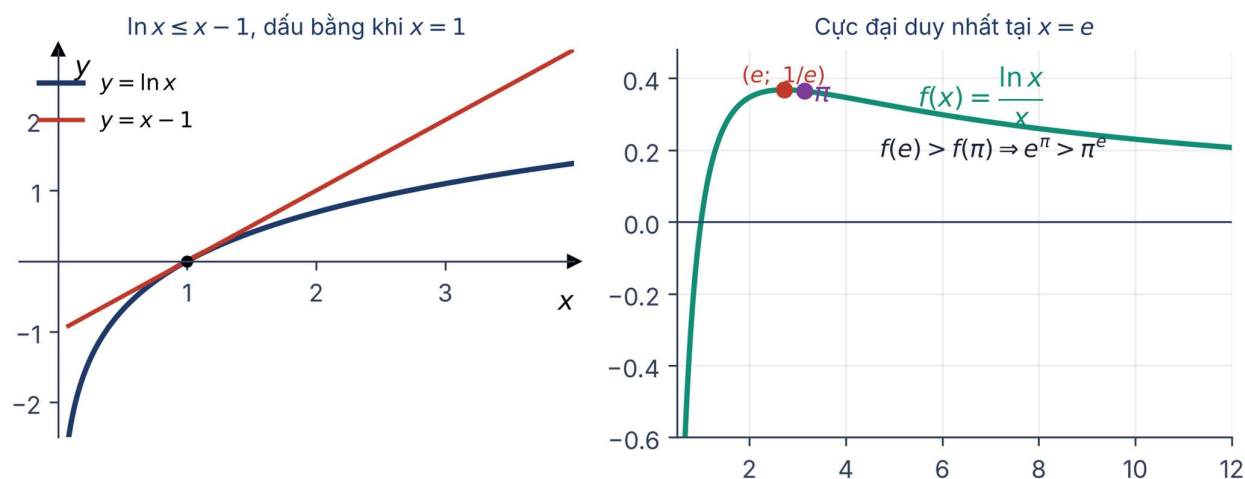
Lời giải. $\log 2^{2026} = 2026 \log 2 \approx 609,8868$. Do đó $10^{609} < 2^{2026} < 10^{610}$: số 2^{2026} có **610** chữ số. Hơn nữa $2^{2026} = 10^{609} \cdot 10^{0,8868}$ và $10^{0,8868} \approx 7,70$, nên chữ số đầu tiên là **7**.
(Kiểm tra bằng máy tính: $2^{2026} = 77049 \dots$, đúng 610 chữ số.)

◆ Ví dụ 9. (Câu hỏi nổi tiếng)

Số nào lớn hơn: e^π hay π^e ?

Phân tích. Lấy ln hai số: so sánh π với $e \ln \pi$, tức so sánh $\frac{\ln e}{e}$ với $\frac{\ln \pi}{\pi}$. Hai vế có cùng dạng $f(x) = \frac{\ln x}{x}$!

Lời giải. Xét $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ trên $(0; +\infty)$: $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ đổi dấu từ dương sang âm tại $x = e$, nên f đạt giá trị lớn nhất duy nhất tại e . Do $\pi \neq e$: $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{1}{e} \Leftrightarrow e \ln \pi < \pi \Leftrightarrow \pi^e < e^\pi$.



Trái: bất đẳng thức $\ln x \leq x - 1$. Phải: hàm $\frac{\ln x}{x}$ đạt cực đại tại e , từ đó $e^\pi > \pi^e$.

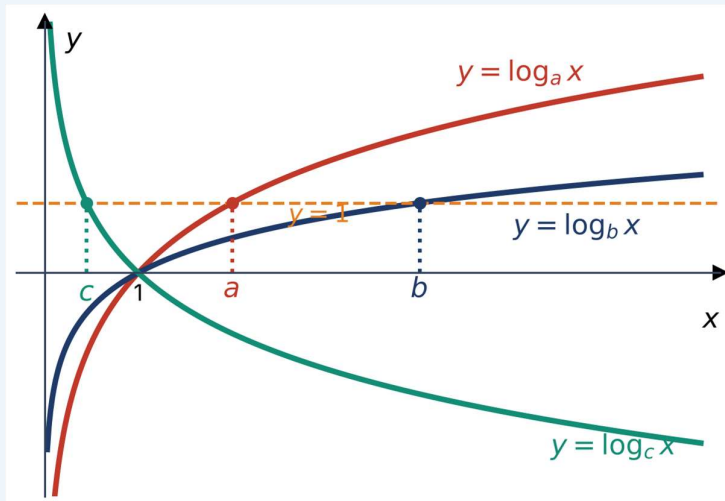
Dạng 3. Hàm số mũ, hàm số logarit: tập xác định, đồ thị, đạo hàm

★ Phương pháp.

Tập xác định: biểu thức dưới logarit dương, cơ số dương khác 1. Đọc đồ thị: kẻ đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị $y = \log_a x$ tại điểm có hoành độ đúng bằng a (vì $\log_a a = 1$); với $y = a^x$ thì kẻ $x = 1$. Đạo hàm của hàm dạng u^v hoặc tích nhiều thừa số: lấy ln rồi đạo hàm (logarit hóa).

◆ Ví dụ 10. (Câu Đúng/Sai, theo)

Cho các hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ với a, b, c là ba số thực dương khác 1 có đồ thị như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các mệnh đề:



	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm số $y = \log_c x$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.		
b)	Đường thẳng $y = 3$ cắt hai đồ thị $y = \log_a x$, $y = \log_b x$ tại các điểm có hoành độ x_1, x_2 thỏa $x_2 = 2x_1$. Khi đó $\frac{a}{b} = \sqrt[3]{2}$.		
c)	Từ đồ thị ta có $0 < c < 1 < a < b$.		
d)	Đồ thị các hàm số trên đều đi qua điểm $A(1; 0)$.		

Lời giải. a) **Sai:** đồ thị $y = \log_c x$ đi xuống nên hàm nghịch biến, $0 < c < 1$.

b) **Sai:** $\log_a x_1 = 3 \Rightarrow x_1 = a^3$; $\log_b x_2 = 3 \Rightarrow x_2 = b^3$. Từ $b^3 = 2a^3$ suy ra $\frac{b}{a} = \sqrt[3]{2}$, không phải $\frac{a}{b}$.

c) **Đúng:** đường thẳng $y = 1$ cắt hai đồ thị đồng biến tại $x = a$ và $x = b$,

từ hình vẽ $1 < a < b$; còn $0 < c < 1$.

d) **Đúng:** $\log_a 1 = 0$ với mọi cơ số.

★ Nhận xét.

Đồ thị $y = \log_a x$ ($a > 1$) càng “đốc” thì cơ số càng *nhỏ*, ngược với trực giác. Mẹo đường thẳng $y = 1$ giúp ta khỏi phải nhớ điều này.

◆ Ví dụ 11. (Tập xác định chứa tham số)

Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2mx + 4)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?

Lời giải. Cần $x^2 - 2mx + 4 > 0$ với mọi x , tức $\Delta' = m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$. Có 3 số nguyên $m \in \{-1; 0; 1\}$.

◆ **Ví dụ 12.** (Logarit hóa để đạo hàm [1])

Tính đạo hàm của hàm số $y = x^x$ với $x > 0$.

Phân tích. Cả cơ số lẫn số mũ đều thay đổi: không áp dụng được $(x^a)'$ hay $(a^x)'$. Logarit sẽ “kéo” số mũ xuống.

Lời giải. $\ln y = x \ln x$. Đạo hàm hai vế theo x : $\frac{y'}{y} = \ln x + 1$. Vậy $y' = x^x (\ln x + 1)$.

◆ **Ví dụ 13.** (Câu Đúng/Sai – Sở GD&ĐT Cao Bằng, thi thử TN THPT 2026)

Trong sản xuất giấy, gọi $y(x)$ là nồng độ chất gây bột (mol/L) tại thời điểm x giây, $y(x) > 0$. Sau khi thêm chất chống bột, $y'(x) = -7 \cdot 10^{-4} y(x)$ với $x \geq 0$; lúc đầu $y(0) = 0,05$ mol/L. Xét $f(x) = \ln y(x)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$f'(x) = -7 \cdot 10^{-4}$.		
b)	$f(x) = -7 \cdot 10^{-4}x + \ln 0,05$.		
c)	$y(30) - y(15) \approx 5,7 \cdot 10^{-4}$.		
d)	Nồng độ trung bình $\frac{1}{30-20} \int_{20}^{30} y(x) dx$ bằng 0,03 mol/L.		

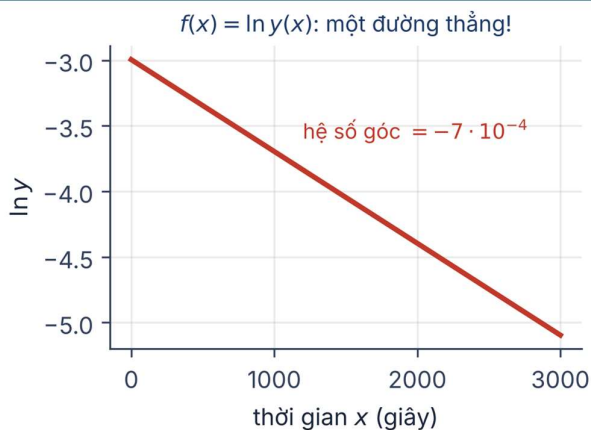
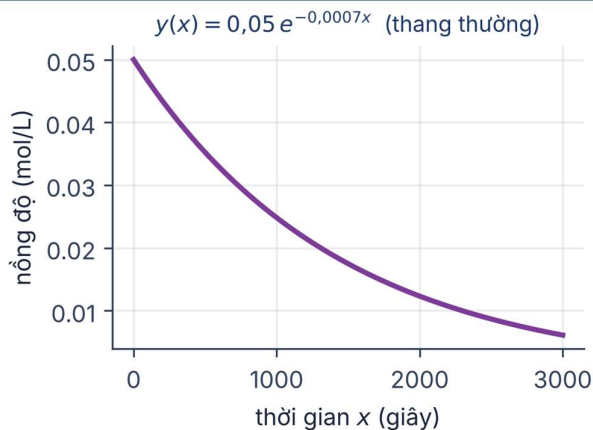
Lời giải.

a) **Đúng:** $f'(x) = \frac{y'(x)}{y(x)} = -7 \cdot 10^{-4}$.

b) **Đúng:** $f(x) = -7 \cdot 10^{-4}x + C$, $f(0) = \ln 0,05$, nên $y(x) = 0,05 e^{-0,0007x}$.

c) **Sai:** $y(30) - y(15) = 0,05(e^{-0,021} - e^{-0,0105}) \approx -5,17 \cdot 10^{-4}$ (âm, vì nồng độ giảm).

d) **Sai:** trung bình $= \frac{0,05}{10 \cdot 0,0007} (e^{-0,014} - e^{-0,021}) \approx 0,0491$ mol/L.



Hàm mũ $y(x)$ trở thành đường thẳng khi lấy logarit: ý tưởng của các biểu đồ “thang logarit”.

Dạng 4. Phương trình mũ và logarit: bốn công cụ cơ bản

◆ Ví dụ 14. (Đặt ẩn phụ)

Giải phương trình $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$.

Lời giải. Đặt $t = 3^x > 0$, phương trình thành $t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 3$. Suy ra $x = 0$ hoặc $x = 1$. Tập nghiệm $\{0; 1\}$.

◆ Ví dụ 15. (Logarit hóa)

Giải phương trình $2^{x^2-4} = 3^{x-2}$.

Phân tích. Hai cơ số 2 và 3 “không chịu” quy về nhau. Lấy logarit cơ số 2 hai vế để số mũ rơi xuống.

Lời giải. $x^2 - 4 = (x - 2)\log_2 3 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2 - \log_2 3) = 0 \Leftrightarrow x = 2$
hoặc $x = \log_2 3 - 2$.

⚠ Bẫy thường gặp.

Đừng chia hai vế cho $x - 2$! Làm vậy sẽ mất nghiệm $x = 2$. Hãy luôn đặt nhân tử chung.

◆ Ví dụ 16. (Đưa về cùng cơ số, chú ý điều kiện)

Giải phương trình $\log_2 x + \log_2(x - 2) = 3$.

Lời giải. Điều kiện $x > 2$. Phương trình $\Leftrightarrow \log_2[x(x-2)] = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 4$ hoặc $x = -2$. Đối chiếu điều kiện: $x = 4$.

◆ **Ví dụ 17.** (Đoán nghiệm và chứng minh duy nhất)

Giải phương trình $3^x + 4^x = 5^x$.

Phân tích. Bộ ba Pythagore 3,4,5 gợi ý $x = 2$. Nhưng làm sao biết không còn nghiệm khác?

Lời giải. Chia hai vế cho 5^x : $(3/5)^x + (4/5)^x = 1$. Vế trái là tổng hai hàm nghịch biến nên nghịch biến trên $\mathbb{R}$, do đó phương trình có nhiều nhất một nghiệm.

Mà $x = 2$ thỏa mãn ($\frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$). Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất.

◆ **Ví dụ 18.** (Đề thi Đại học khối D năm 2010)

Giải phương trình $4^{2x+\sqrt{x+2}} + 2^{x^3} = 4^{2+\sqrt{x+2}} + 2^{x^3+4x-4}$.

Phân tích. Số mũ rất phức tạp, nhưng chú ý $(2x + \sqrt{x+2}) - (2 + \sqrt{x+2}) = 2x - 2$ và $4^{2x-2} = 2^{4x-4}$; cùng một đại lượng 2^{4x-4} xuất hiện ở cả hai bên. Hãy nhóm để đặt nhân tử chung.

Lời giải. Điều kiện $x \geq -2$. Chuyển vế:

$$4^{2+\sqrt{x+2}}(4^{2x-2} - 1) - 2^{x^3}(2^{4x-4} - 1) = 0 \Leftrightarrow (2^{4x-4} - 1)(4^{2+\sqrt{x+2}} - 2^{x^3}) = 0.$$

Trường hợp 1: $2^{4x-4} = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Trường hợp 2: $2^{4+2\sqrt{x+2}} = 2^{x^3} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+2} = x^3 - 4 \Leftrightarrow 2(\sqrt{x+2} - 2) = x^3 - 8$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-2)}{\sqrt{x+2}+2} = (x-2)(x^2+2x+4).$$

Hoặc $x = 2$; hoặc $\frac{2}{\sqrt{x+2}+2} = (x+1)^2 + 3$, vô nghiệm vì vế trái ≤ 1 , vế phải ≥ 3 .

Vậy tập nghiệm $\{1; 2\}$.

Dạng 5. Bất phương trình mũ và logarit

★ Phương pháp.

Như phương trình, cộng thêm một quy tắc vàng: cơ số lớn hơn 1 giữ chiều, cơ số trong $(0; 1)$ đổi chiều. Với bất phương trình dạng tích có chứa căn, xét riêng trường hợp căn bằng 0.

◆ Ví dụ 19. (Đề thi thử TN THPT 2026)

Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{6}}(x - 2) > -1$.

Lời giải. Điều kiện $x > 2$. Vì cơ số $\frac{1}{6} < 1$ nên đổi chiều: $x - 2 < (1/6)^{-1} = 6 \Leftrightarrow x < 8$.

Tập nghiệm $(2; 8)$.

◆ Ví dụ 20. (Phát triển theo đề TN THPT 2022)

Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(4^x - 5 \cdot 2^{x+2} + 64)\sqrt{2 - \log(4x)} \geq 0$?

Phân tích. Tích “không âm” với một thừa số là căn: hoặc căn bằng 0, hoặc căn dương và thừa số kia không âm.

Lời giải. Điều kiện: $x > 0$ và $2 - \log(4x) \geq 0 \Leftrightarrow 4x \leq 100 \Leftrightarrow 0 < x \leq 25$.

- Căn bằng 0 khi $x = 25$: thỏa mãn.
- Với $0 < x < 25$: cần $4^x - 20 \cdot 2^x + 64 \geq 0$. Đặt $t = 2^x$: $(t - 4)(t - 16) \geq 0$
 $\Leftrightarrow t \leq 4$ hoặc $t \geq 16 \Leftrightarrow x \leq 2$ hoặc $x \geq 4$.

Các số nguyên thỏa mãn: $x \in \{1; 2\} \cup \{4; 5; \dots; 25\}$. Có $2 + 22 = \mathbf{24}$ số.

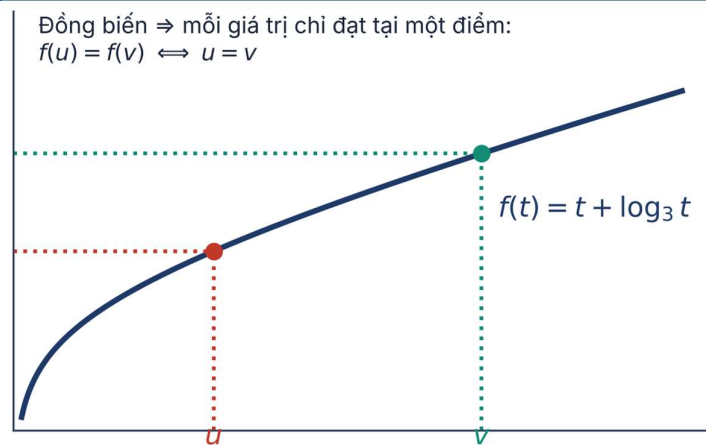
⚠ Bẫy thường gặp.

Lỗi phổ biến là quên $x = 3$ bị loại (vì $t = 8$ cho tích âm), hoặc ngược lại quên rằng $x = 25$ luôn thỏa mãn nhờ căn bằng 0 dù thừa số đầu dương hay âm.

Dạng 6. Phương pháp hàm đặc trưng

■ Nguyên lí hàm đặc trưng.

Nếu f đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng D và $u, v \in D$ thì $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.



Hàm đơn điệu không nhận một giá trị hai lần.

Dấu hiệu nhận biết: phương trình chứa *cả* biểu thức mũ (hoặc logarit) *lẫn* biểu thức đa thức của cùng các đại lượng, kiểu $\log_3 X + X = \log_3 Y + Y$.

Hàm hay gặp: $f(t) = t + \log_a t$, $f(t) = a^t + t$, $f(t) = t \cdot a^t$ (với $t > 0$), $f(t) = t^3 + t$.

♦ Ví dụ 21. (Đề thi TN THPT 2020)

Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_3(3x + 3) + x = 2y + 9^y$?

A. 2019.

B. 6.

C. 2020.

D. 4.

Phân tích. Vế phải có $9^y = 3^{2y}$ và $2y = \log_3 3^{2y}$: đó là “ $\log_3 Y + Y$ ” với $Y = 9^y$.

Vế trái $\log_3(3x + 3) + x = 1 + \log_3(x + 1) + x = \log_3(x + 1) + (x + 1)$: cũng cùng dạng!

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow \log_3(x + 1) + (x + 1) = \log_3 9^y + 9^y$. Hàm $f(t) = \log_3 t + t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên $x + 1 = 9^y$.

Từ $0 \leq x \leq 2020$: $1 \leq 9^y \leq 2021 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \log_9 2021 \approx 3,46$.

Vậy $y \in \{0; 1; 2; 3\}$, tương ứng $x \in \{0; 8; 80; 728\}$. Có 4 cặp. Chọn **D**.

♦ Ví dụ 22. (Đề thi THPT Quốc gia 2017)

Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x + y$.

Phân tích. Vế phải có $3xy$; muốn ghép với $\log_3(1 - xy)$ ta cần “ $3(1 - xy)$ ”. Thêm $1 = \log_3 3$ vào vế trái để biến $1 - xy$ thành $3(1 - xy)$.

Lời giải. Điều kiện $xy < 1$. Phương trình tương đương

$$\log_3(3(1 - xy)) + 3(1 - xy) = \log_3(x + 2y) + (x + 2y).$$

Do $f(t) = \log_3 t + t$ đồng biến nên $3 - 3xy = x + 2y$, suy ra $y = \frac{3-x}{3x+2}$ với $0 < x < 3$. Khi đó

$$P = x + \frac{3-x}{3x+2}, \quad P' = 1 - \frac{11}{(3x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow 3x+2 = \sqrt{11}.$$

Lập bảng biến thiên, P đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{\sqrt{11}-2}{3}$, và $P_{\min} = \frac{\sqrt{11}-2}{3} + \frac{\sqrt{11}-1}{3} = \frac{2\sqrt{11}-3}{3}$.

★ Phát triển.

Thay $\log_3$ bởi $\log_2$, $3xy + x + 2y - 4$ bởi $2ab + a + b - 3$ ta được bài toán cùng họ:

cho $a, b > 0$ thỏa $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$, tìm min $P = a + 2b$ (đáp số $\frac{2\sqrt{10}-3}{2}$).

Giáo viên có thể “sản xuất” vô số bài tương tự bằng cách chọn trước hàm đặc trưng rồi viết ngược.

Dạng 7. Cực trị và đánh giá với biểu thức logarit

◆ Ví dụ 23. (THPT Trần Phú – Hoàn Kiếm, thi thử TN THPT 2026 lần 3)

Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x > y > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \log_x(x^3) + 27\log_y \frac{x}{y}$.

Phân tích. Hai cơ số $\frac{x}{y}$ và y khác nhau; hãy quy về một ẩn $t = \log_y x$.

Lời giải. Đặt $t = \log_y x > 1$. Ta có $\log_y \frac{x}{y} = t - 1$ và $\log_x x = \frac{\log_y x}{\log_y x} = \frac{t}{t-1}$. Do đó

$$P = \frac{3t}{t-1} + 27(t-1) = 3 + \frac{3}{t-1} + 27(t-1) \geq 3 + 2\sqrt{81} = 21.$$

Dấu bằng khi $(t-1)^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow t = \frac{4}{3}$, tức $x^3 = y^4$. Vậy $P_{\min} = 21$.

◆ Ví dụ 24. (Đề thi TN THPT)

Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) + \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) = 2$.

Tính $a + 2b$.

Phân tích. Một phương trình hai ẩn mà lại hỏi một giá trị cụ thể: dấu hiệu của đánh giá, tức là vế trái luôn ≥ 2 và dấu bằng xảy ra tại một điểm duy nhất.

Lời giải. Vì $9a^2 + b^2 \geq 6ab$ và cơ số $3a + 2b + 1 > 1$ nên $\log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) \geq \log_{3a+2b+1}(6ab + 1)$. Đặt $X = \log_{3a+2b+1}(6ab + 1) > 0$, vế trái $\geq X + \frac{1}{X} \geq 2$.

Dấu bằng khi $b = 3a$ và $X = 1 \Leftrightarrow 3a + 2b + 1 = 6ab + 1 \Leftrightarrow 9a = 18a^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$.
 Vậy $a + 2b = \frac{7}{2}$.

Dạng 8. Phương trình chứa tham số

♦ Ví dụ 25. (Đề thi THPT Quốc gia 2018)

Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-20; 20)$ để phương trình có nghiệm?

A. 20.

B. 19.

C. 9.

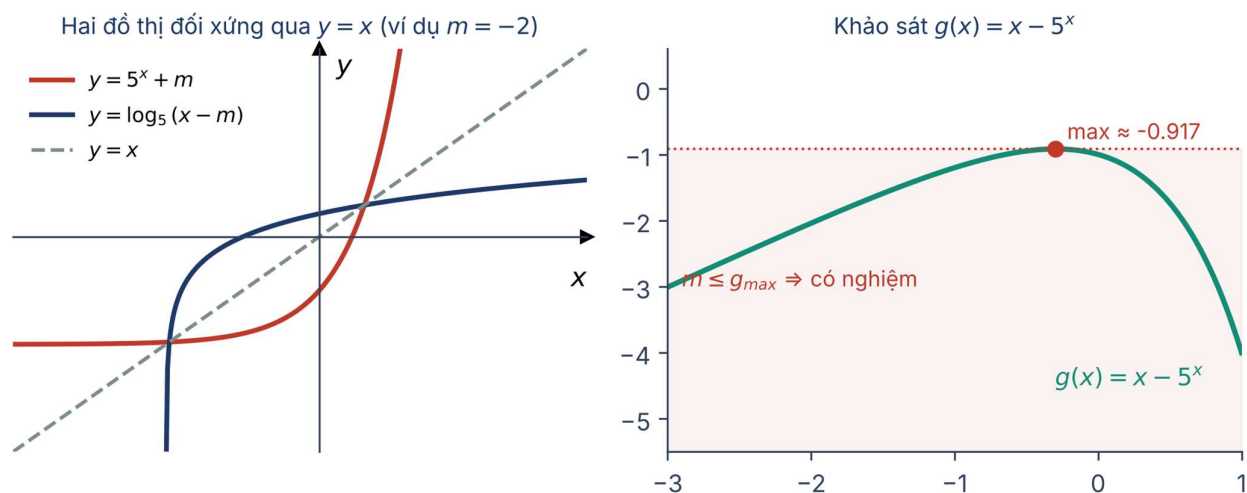
D. 21.

Phân tích. Hàm $y = 5^x + m$ và $y = \log_5(x - m)$ là hai hàm ngược nhau. Đồ thị hai hàm ngược nhau (đồng biến) chỉ có thể cắt nhau trên đường $y = x$.

Lời giải. Điều kiện $x > m$. Đặt $t = \log_5(x - m)$, ta có hệ $\begin{cases} 5^x + m = t \\ 5^t + m = x \end{cases}$. Trừ vế: $5^x + x = 5^t + t$. Hàm $f(u) = 5^u + u$ đồng biến nên $x = t$, dẫn tới

$$m = x - 5^x = g(x).$$

Ta có $g'(x) = 1 - 5^x \ln 5 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\log_5(\ln 5) \approx -0,2075$, và $g(x_0) \approx -0,917$ là giá trị lớn nhất của g ($g \rightarrow -\infty$ ở hai đầu). Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \leq g(x_0) \approx -0,917$. Với m nguyên thuộc $(-20; 20)$: $m \in \{-19; \dots; -1\}$, có 19 giá trị. Chọn **B**.



Trái: đồ thị hai hàm ngược nhau đối xứng qua $y = x$.

Phải: khảo sát $g(x) = x - 5^x$.

◆ Ví dụ 26. (Đề thi THPT Quốc gia 2019)

Cho phương trình $(4\log_2^2 x + \log_2 x - 5)\sqrt{7^x - m} = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 49.

B. 47.

C. Vô số.

D. 48.

Phân tích. Phương trình tích có ba “ứng viên” nghiệm: $x = 2$, $x = 2^{-5/4}$ (từ thừa số đầu) và $x = \log_7 m$ (từ căn). Điều kiện $7^x \geq m$ sẽ “lọc” bớt các ứng viên; ta phải đếm số nghiệm còn lại theo vị trí của $\log_7 m$.

Lời giải. Điều kiện $x > 0$, $7^x \geq m$. Thừa số đầu bằng 0 khi $\log_2 x = 1$ hoặc $\log_2 x = -\frac{5}{4}$, tức $x = 2$ hoặc $x = 2^{-5/4} \approx 0,42$.

- $m = 1$: $7^x \geq 1$ luôn đúng với $x > 0$; $x = \log_{71} = 0$ bị loại. Có đúng 2 nghiệm 2 và $2^{-5/4}$. **Thỏa mãn.**
- $m \geq 2$: đặt $x_0 = \log_7 m > 0$, điều kiện là $x \geq x_0$.
 - $x_0 \leq 2^{-5/4} \Leftrightarrow m \leq 7^{2^{-5/4}} \approx 2,27$, tức $m = 2$: có 3 nghiệm. Loại.
 - $2^{-5/4} < x_0 < 2 \Leftrightarrow 3 \leq m \leq 48$: nghiệm là x_0 và 2. **Thỏa mãn**: 46 giá trị.
 - $m = 49$: $x_0 = 2$ trùng nghiệm, chỉ còn 1 nghiệm. Loại. $m \geq 50$: chỉ có nghiệm x_0 . Loại.

Tổng cộng $1 + 46 = 47$ giá trị. Chọn **B**.

⚠ Bẫy thường gặp.

Hai “bẫy” của bài: quên $m = 1$ (khi $x_0 = 0$ không thuộc điều kiện $x > 0$) và quên $m = 49$ (nghiệm trùng). Chính hai bẫy này tạo ra các phương án nhiễu 48 và 49.

◆ Ví dụ 27. (Định lí Vi-ét cho phương trình mũ)

Tìm m để phương trình $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa $x_1 + x_2 = 1$.

Lời giải. Đặt $t = 3^x > 0$: $t^2 - 6t + m = 0$. Cần hai nghiệm dương phân biệt: $\Delta' = 9 - m > 0$, $m > 0$. Khi đó $t_1 t_2 = 3^{x_1} 3^{x_2} = 3^{x_1+x_2} = 3$, mà $t_1 t_2 = m$, nên $m = 3$ (thỏa mãn).

Dạng 9. Đếm số nguyên, cặp số nguyên**★ Phương pháp.**

Đây là dạng “đặc sản” của đề thi tốt nghiệp từ 2020. Ba hướng chính: (1) đặt logarit chung bằng t rồi dùng bất đẳng thức để chặn t ; (2) chứng minh một hàm theo y đơn điệu để tập nghiệm là một đoạn liên tiếp, rồi đếm; (3) biến đổi về một miền hình học (hình tròn, đường thẳng) rồi đếm điểm nguyên.

♦ Ví dụ 28. (Đề thi TN THPT 2020)

Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y) = \log_4(x^2+y^2)$?

A. 3.**B. 2.****C. 1.****D. Vô số.**

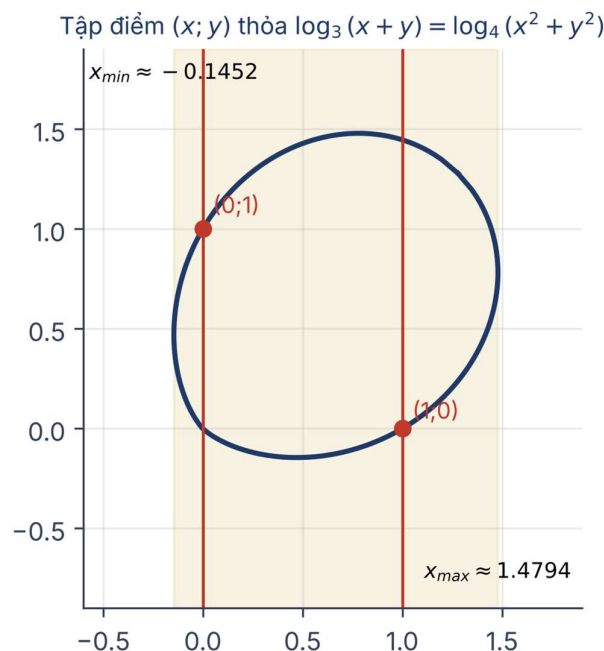
Phân tích. Đặt t bằng giá trị chung: $x+y=3^t, x^2+y^2=4^t$. Tổng và tổng bình phương liên hệ với nhau qua bất đẳng thức $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$: đây là “cái phanh” chặn t .

Lời giải. Ta có $9^t = (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2) = 2 \cdot 4^t \Leftrightarrow (9/4)^t \leq 2 \Leftrightarrow t \leq \log_{\frac{9}{4}} 2 \approx 0,855$.

Khi đó $x^2 \leq x^2+y^2 = 4^t \leq 4^{0,855} \approx 3,27$, nên $x \in \{-1; 0; 1\}$.

- $x=0$: chọn $y=1$ ($\log_{31} = \log_{41} = 0$). Thỏa mãn. $x=1$: chọn $y=0$. Thỏa mãn.
- $x=-1$: $y=3^t+1$, phương trình $1+(3^t+1)^2=4^t \Leftrightarrow 9^t+2 \cdot 3^t+2=4^t$ vô nghiệm vì $9^t \geq 4^t$ khi $t \geq 0$, còn khi $t < 0$ thì vế trái $> 2 > 4^t$.

Vậy có 2 số nguyên x . Chọn **B**.



Tập các điểm $(x; y)$ thỏa mãn là một đường cong kín; hoành độ của nó chỉ chạy trong khoảng $[-0,145; 1,479]$.

◆ Ví dụ 29. (Đề thi TN THPT 2020)

Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $\log_4(x^2 + y) \geq \log_3(x + y)$?

A. 59.

B. 58.

C. 116.

D. 115.

Phân tích. Cố định x , coi bất phương trình là một bất phương trình ẩn y . Nếu hàm $F(y) = \log_3(x + y) - \log_4(x^2 + y)$ đồng biến thì tập nghiệm là các số nguyên liên tiếp bắt đầu từ $y = 1 - x$.

Lời giải. Điều kiện $x + y > 0$ (khi đó $x^2 + y \geq x + y > 0$ vì $x^2 \geq x$ với x nguyên). Xét

$$F(y) = \log_3(x + y) - \log_4(x^2 + y), \quad F'(y) = \frac{1}{(x + y)\ln 3} - \frac{1}{(x^2 + y)\ln 4} > 0,$$

do $x + y \leq x^2 + y$ và $\ln 3 < \ln 4$. Bất phương trình là $F(y) \leq 0$. Vì F đồng biến và $F(1 - x) = -\log_4(x^2 - x + 1) \leq 0$, tập nghiệm nguyên là $\{1 - x; 2 - x; \dots; y_{\max}\}$.

Có không quá 728 số $\Leftrightarrow$ số thứ 729, tức $y = 729 - x$, không thỏa mãn:

$$\begin{aligned} F(729 - x) > 0 &\Leftrightarrow \log_{3729} > \log_4(x^2 - x + 729) \Leftrightarrow x^2 - x + 729 < 4^6 = 4096 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 3367 < 0. \end{aligned}$$

Suy ra $-57,5 < x < 58,5$, tức $x \in \{-57; \dots; 58\}$; có 116 số nguyên. Chọn C.

◆ Ví dụ 30. (Đề thi TN THPT 2023)

Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn:

$$\log_3(x^2 + y^2 + x) + \log_2(x^2 + y^2) \leq \log_3 x + \log_2(x^2 + y^2 + 24x)?$$

Phân tích. Gom các logarit cùng cơ số, ta thấy xuất hiện các tỉ số $\frac{x^2+y^2+x}{x}$ và $\frac{x^2+y^2+24x}{x^2+y^2}$.

Cả hai chỉ phụ thuộc vào một đại lượng $u = \frac{x^2+y^2}{x}$.

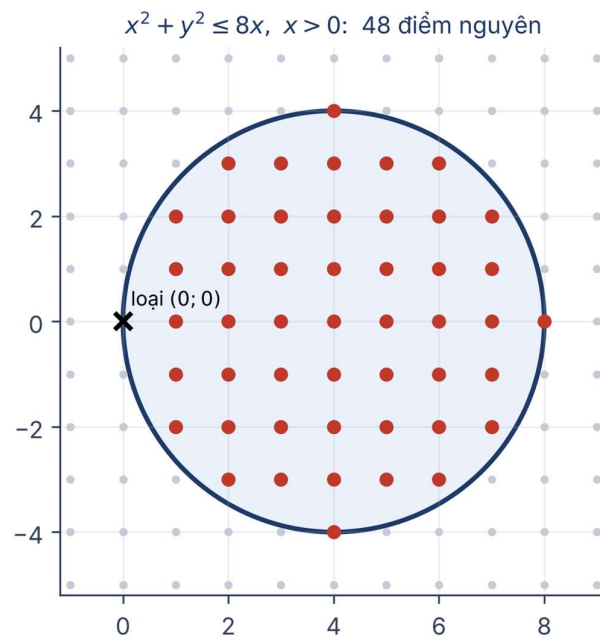
Lời giải. Điều kiện $x > 0$. Đặt $s = x^2 + y^2 > 0$ và $u = \frac{s}{x} > 0$. Bất phương trình $\Leftrightarrow \log_3 \frac{s+x}{x} \leq \log_2 \frac{s+24x}{s} \Leftrightarrow \log_3(u+1) \leq \log_2\left(1 + \frac{24}{u}\right)$.

Vế trái đồng biến, vế phải nghịch biến theo u , và tại $u = 8$ hai vế cùng bằng 2 ($\log_{39} = \log_{24}$). Do đó bất phương trình $\Leftrightarrow u \leq 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 8x \Leftrightarrow (x - 4)^2 + y^2 \leq 16$, với $x > 0$.

Đếm điểm nguyên trong hình tròn tâm $(4; 0)$, bán kính 4, bỏ gốc tọa độ:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$y^2 \leq 8x - x^2$	$y^2 \leq 7$	$y^2 \leq 12$	$y^2 \leq 15$	$y^2 \leq 16$	$y^2 \leq 15$	$y^2 \leq 12$	$y^2 \leq 7$	$y^2 \leq 0$
số giá trị y	5	7	7	9	7	7	5	1

Tổng cộng $5 + 7 + 7 + 9 + 7 + 7 + 5 + 1 = 48$ cặp.



48 điểm nguyên trong hình tròn $(x - 4)^2 + y^2 \leq 16, x > 0$.

Dạng 10. Bài toán thực tế: tăng trưởng, suy giảm, thang đo

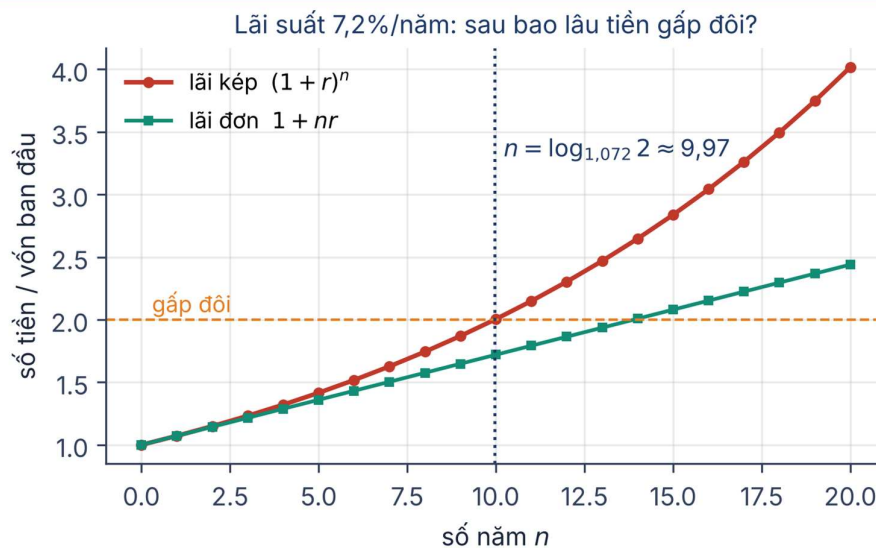
★ Ba mô hình cần thuộc.

Lãi kép: $T_n = A(1 + r)^n$. **Tăng trưởng/suy giảm liên tục:** $S(t) = S_0 e^{rt}$ ($r > 0$ tăng, $r < 0$ giảm). **Chu kỳ bán rã T :** $m(t) = m_0(1/2)^{t/T}$. Câu hỏi “sau bao lâu” luôn dẫn tới một logarit.

◆ Ví dụ 31. (Đề thi THPT Quốc gia 2017)

Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 7,2%/năm, lãi hằng năm được nhập vào vốn. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được số tiền gấp đôi số tiền gửi ban đầu?

Lời giải. $(1,072)^n \geq 2 \Leftrightarrow n \geq \log_{1,072} 2 \approx 9,97$. Vậy sau ít nhất 10 năm.



Lãi kép vượt xa lãi đơn: đường cong cấp số nhân so với đường thẳng.

★ Quy tắc 72.

Giới ngân hàng có mẹo nhảm: thời gian gấp đôi $\approx \frac{72}{r(\%)}$. Với $r = 7,2\%$: $72:7,2 = 10$ năm, khờ tuyệt vời! Lí do: $n = \frac{\ln 2}{\ln(1+r)} \approx \frac{0,693}{r}$, và 72 được chọn vì dễ chia hơn 69.

◆ Ví dụ 32. (Sở GD&ĐT Hà Nội, thi thử TN THPT 2026 lần 1)

Nồng độ thuốc kháng sinh trong máu sau t giờ là $C(t) = C_0 e^{-rt}$ (mg/L). Ngay sau khi tiêm, nồng độ là 15 mg/L; sau 4 giờ còn 10 mg/L. Bác sĩ tiêm liều mới khi nồng độ giảm còn ít nhất 6 mg/L. Hỏi khoảng thời gian nhiều nhất giữa hai lần tiêm là bao nhiêu giờ (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Lời giải. Từ $15e^{-4r} = 10$ suy ra $r = \frac{\ln 1,5}{4}$. Cần $15e^{-rt} \geq 6 \Leftrightarrow t \leq \frac{\ln 2,5}{r} = \frac{4\ln 2,5}{\ln 1,5} \approx 9,04$.

Đáp số: 9 giờ

◆ Ví dụ 33. (Cụm trường THPT số 1 Hà Nội, thi thử TN THPT)

Cường độ ánh sáng dưới mặt nước biển giảm theo độ sâu d (mét) theo công thức $I = I_0 \cdot a^d$. Ở độ sâu 1 m, cường độ bằng 95% cường độ trên mặt nước. Tính tỉ số cường độ ánh sáng ở độ sâu 20 m so với ở độ sâu 10 m (làm tròn đến hàng phần mười).

Lời giải. $I_0 a = 0,95 I_0 \Rightarrow a = 0,95$. Tỉ số $\frac{I(20)}{I(10)} = a^{10} = 0,95^{10} \approx 0,5987$.

Đáp số: 0,6

◆ Ví dụ 34. (THPT Lê Hồng Phong – Thái Nguyên, thi thử TN THPT)

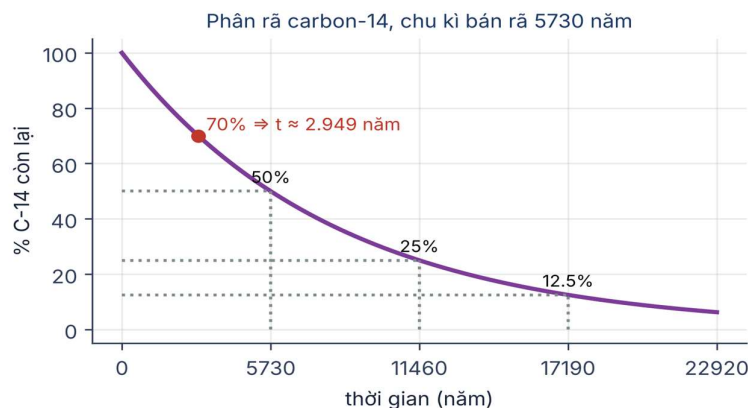
Chi phí hao mòn của dây chuyền sau khi sản xuất x sản phẩm là $C(x) = 20\ln x + 50$ (triệu đồng); mỗi sản phẩm thu về 5 triệu đồng. Mỗi chu kì cần sản xuất ít nhất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận không nhỏ hơn 500 triệu đồng?

Lời giải. Lợi nhuận $L(x) = 5x - 20\ln x - 50$ đồng biến khi $x > 4$. Cần $5x - 20\ln x \geq 550$. Thử: $L(129) \approx 497,8 < 500$, $L(130) \approx 502,6 \geq 500$. **Đáp số: 130**

◆ Ví dụ 35. (Định tuổi bằng carbon phóng xạ)

Carbon-14 có chu kì bán rã khoảng 5730 năm. Một mẫu gỗ cổ còn 70% lượng C-14 so với gỗ tươi. Ước tính tuổi mẫu gỗ.

Lời giải. $(1/2)^{t/5730} = 0,7 \Leftrightarrow t = 5730 \log_2 \frac{1}{0,7} \approx 2949$ năm.



Đường cong phân rã C-14: cứ 5730 năm lượng C-14 giảm một nửa.

◆ Ví dụ 36. (Thang độ Richter)

Độ lớn động đất theo Richter là $M = \log \frac{A}{A_0}$, với A là biên độ ghi được và A_0 là biên độ chuẩn. Năng lượng giải phóng E (jun) thỏa $\log E \approx 4,8 + 1,5M$ (hệ thức Gutenberg – Richter). So sánh trận động đất 9,0 độ với trận 7,0 độ.

Lời giải. Biên độ: $\frac{A_1}{A_2} = 10^{9-7} = 100$ lần. Năng lượng: $\frac{E_1}{E_2} = 10^{1,5(9-7)} = 10^3 = 1000$ lần.

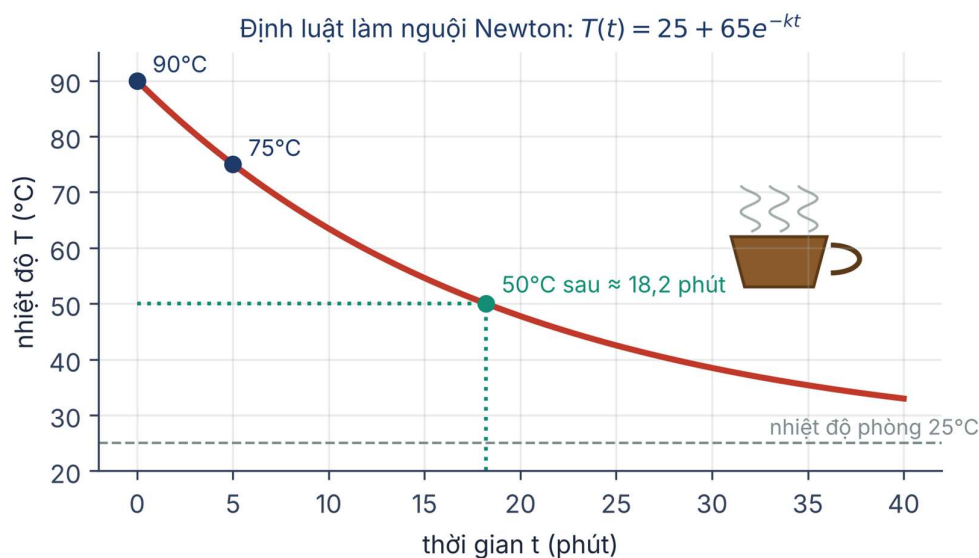
Trận 9,0 độ mạnh gấp khoảng một nghìn trận 7,0 độ, dù con số chỉ hơn “2 đơn vị”.

Dạng 10. Mười bài toán thực tế có hình minh họa**★ Quy trình 3 bước cho bài toán thực tế.**

- (1) *Đọc mô hình*: nhận ra dạng $y = A \cdot a^t$, $y = Ae^{rt}$, $y = 10\log \frac{I}{I_0}$, ... (2) *Tìm tham số* từ hai dữ kiện (thường là giá trị ban đầu và một giá trị sau một khoảng thời gian), dùng logarit để giải. (3) *Trả lời câu hỏi*: chú ý đơn vị, cách làm tròn và chữ “ít nhất”, “sau bao lâu”.

◆ Ví dụ 37. (Định luật làm nguội Newton)

Một cốc cà phê vừa pha có nhiệt độ 90°C , đặt trong phòng có nhiệt độ 25°C . Nhiệt độ cà phê sau t phút là $T(t) = 25 + 65e^{-kt}$. Sau 5 phút, nhiệt độ còn 75°C . Hỏi sau bao nhiêu phút (làm tròn đến hàng phần mười) thì cà phê nguội tới 50°C , nhiệt độ “uống ngon” theo nhiều người?



Định luật làm nguội Newton: nhiệt độ cà phê giảm theo hàm mũ về nhiệt độ phòng.

Lời giải. Từ $T(5) = 75$: $65e^{-5k} = 50 \Rightarrow k = \frac{1}{5} \ln \frac{65}{50} = \frac{1}{5} \ln 1,3$. Cần $25 + 65e^{-kt} = 50 \Leftrightarrow e^{-kt} = \frac{5}{13} \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2,6}{k} = \frac{5 \ln 2,6}{\ln 1,3} \approx 18,2$ phút. **Đáp số: 18,2**

★ Nhận xét.

Chú ý mô hình **không** phải $T = 90e^{-kt}$: nhiệt độ tiến về nhiệt độ phòng chứ không về 0°C . Phần “chênh lệch” $T - 25$ mới giảm theo hàm mũ. Đây là lỗi mô hình hóa học sinh rất hay mắc.

◆ Ví dụ 38. (Đề kiểm tra theo bài học – Hàm số mũ và hàm số logarit)

Biết rằng năm 2001 dân số Việt Nam là 78 685 800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Dân số được ước tính theo công thức $S = A \cdot e^{Nr}$, trong đó A là dân số năm lấy làm mốc, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người?

Lời giải. $78,6858 e^{0,017N} = 120 \Leftrightarrow N = \frac{1}{0,017} \ln \frac{120}{78,6858} \approx 24,8$.

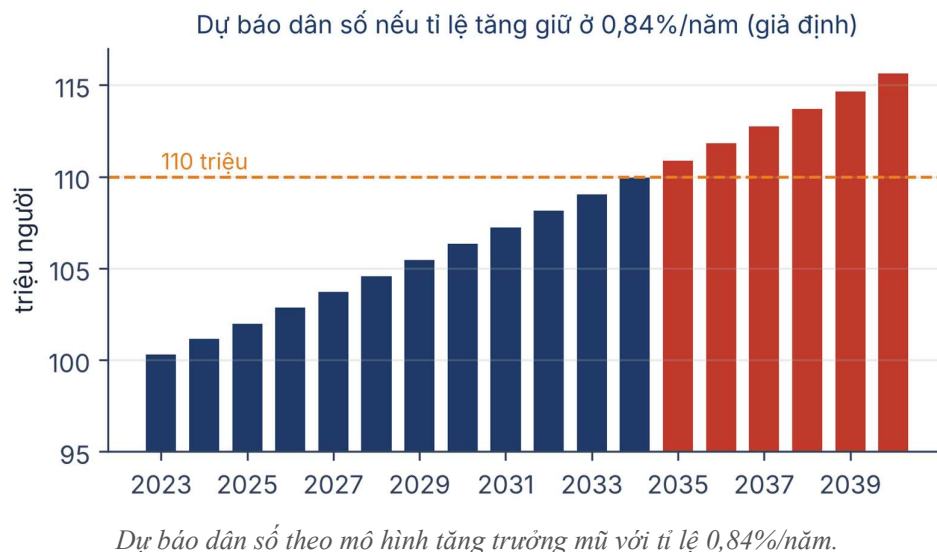
Vậy đến năm $2001 + 25 = 2026$.

△ Bẫy thường gặp.

Mô hình chỉ là giả định “tỉ lệ không đổi”. Thực tế, theo Tổng cục Thống kê [29], dân số Việt Nam vượt mốc 100 triệu năm 2023 và tỉ lệ tăng đã giảm xuống dưới 1%/năm. Khi dạy, giáo viên nên cho học sinh so sánh mô hình với số liệu thật để thấy giới hạn của mô hình hàm mũ.

◆ Ví dụ 39. (Số liệu dân số 2023 của Tổng cục Thống kê)

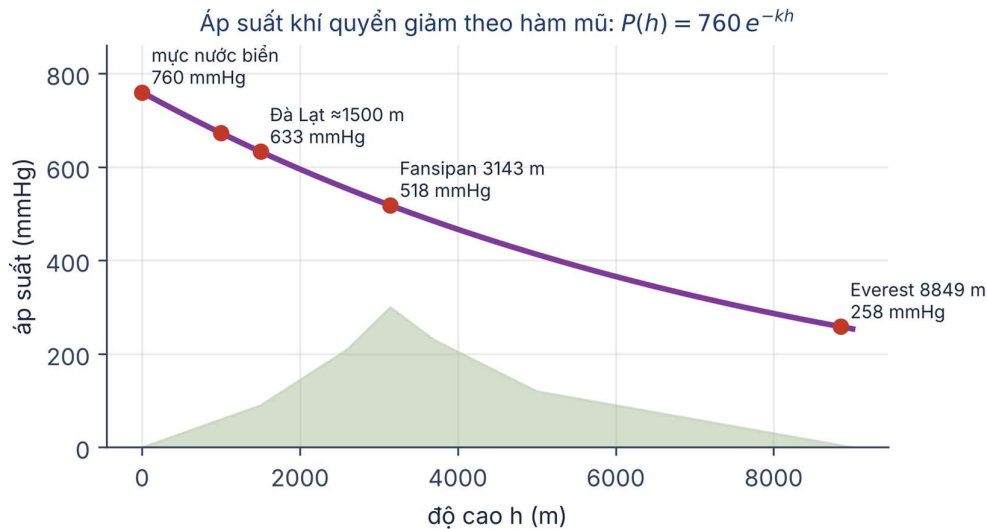
Năm 2023 dân số Việt Nam khoảng 100,3 triệu người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số giữ ổn định ở mức 0,84%/năm theo mô hình $P_n = 100,3 \cdot 1,0084^n$. Hỏi năm đầu tiên dân số vượt 110 triệu người là năm nào?



Lời giải. $1,0084^n > \frac{110}{100,3} \Leftrightarrow n > \log_{1,0084} \frac{110}{100,3} \approx 11,04$, nên $n = 12$: năm **2035**.

◆ Ví dụ 40. (Áp suất khí quyển – phát triển từ bài tập SGK)

Áp suất khí quyển ở độ cao h (mét) so với mực nước biển là $P(h) = 760 e^{-kh}$ (mmHg). Ở độ cao 1000 m áp suất là 672,71 mmHg. Tính áp suất trên đỉnh Fansipan (3143 m), làm tròn đến hàng đơn vị.



Áp suất khí quyển giảm theo hàm mũ khi lên cao: vì thế leo núi cao dễ bị thiếu ô-xi.

Lời giải. $k = \frac{1}{1000} \ln \frac{760}{672,71} \approx 1,2200 \cdot 10^{-4}$. $P(3143) = 760 e^{-3143k} \approx 518$ mmHg, chỉ còn khoảng 68% áp suất ở mặt biển.

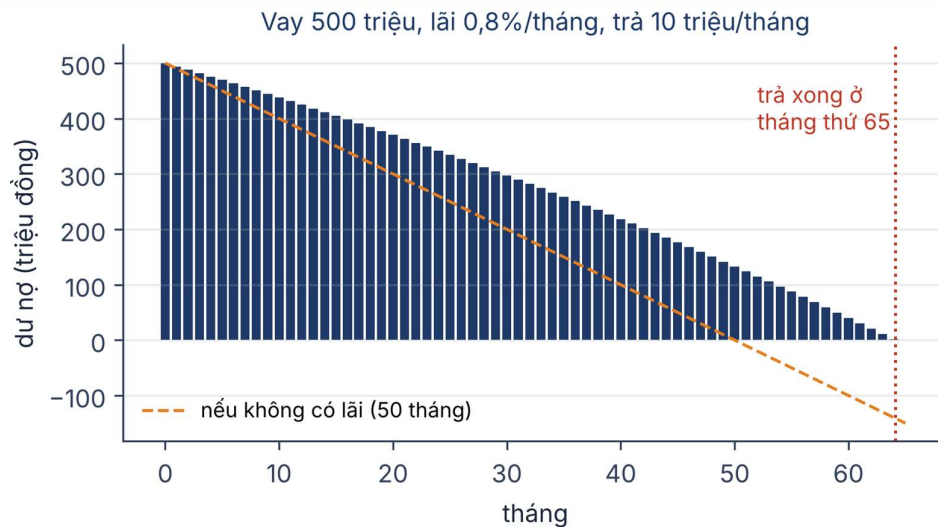
◆ Ví dụ 41. (Vay trả góp – bài do người biên soạn xây dựng)

Anh Minh vay ngân hàng 500 triệu đồng mua nhà với lãi suất 0,8%/tháng. Cuối mỗi tháng (bắt đầu từ tháng thứ nhất), anh trả cố định 10 triệu đồng. Hỏi sau bao nhiêu tháng anh trả hết nợ (tháng cuối có thể trả ít hơn 10 triệu)?

Phân tích. Sau mỗi tháng, dư nợ nhân với $1 + r$ rồi trừ đi a . Dư nợ sau n tháng là một tổng cấp số nhân: $D_n = A(1 + r)^n - a \frac{(1+r)^n - 1}{r}$.

Lời giải. $D_n \leq 0 \Leftrightarrow (1 + r)^n(a - Ar) \geq a \Leftrightarrow n \geq \log_{1+r} \frac{a}{a - Ar} = \log_{1,008} \frac{10}{10 - 4} \approx 64,1$.

Vậy sau **65 tháng**. Tổng tiền phải trả khoảng 641 triệu, tức tiền lãi hơn 140 triệu đồng!

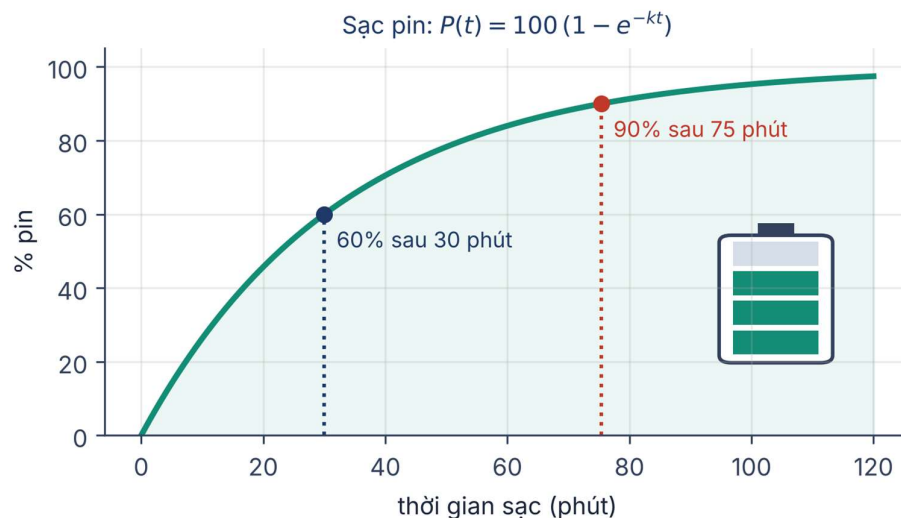


Dư nợ giảm chậm hơn nhiều so với “không có lãi” (đường cam).

◆ Ví dụ 42. (Sạc pin điện thoại – bài do người biên soạn xây dựng)

Phần trăm pin sau t phút sạc (từ lúc cạn) được mô hình hóa bởi $P(t) = 100(1 - e^{-kt})$. Sau 30 phút pin đạt 60%. Hỏi sau bao nhiêu phút pin đạt 90% (làm tròn đến phút)?

Lời giải. $e^{-30k} = 0,4 \Rightarrow k = -\frac{\ln 0,4}{30}$. Cần $e^{-kt} = 0,1 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 10}{k} = 30 \cdot \frac{\ln 10}{\ln 2,5} \approx 75$ phút. 30 phút đầu sạc được 60%, nhưng 30% tiếp theo mất thêm 45 phút: đó là lí do các hãng điện thoại hay quảng cáo “sạc nhanh 0 – 50%”.

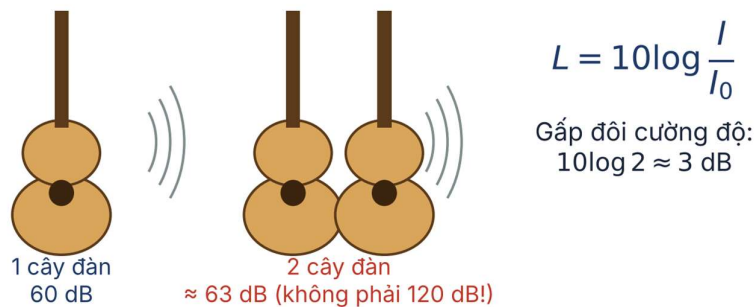


Đường cong sạc pin: càng gần đầy, càng sạc chậm.

◆ Ví dụ 43. (Câu Đúng/Sai, theo)

Mức cường độ âm $L = 10\log \frac{I}{I_0}$ (dB), $I_0 = 10^{-12}$ W/m². Xét tính đúng sai:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hai cây đàn ghi-ta giống nhau, mỗi cây phát ra âm 60 dB. Cả hai cùng chơi cho mức cường độ âm xấp xỉ 63 dB.		
b)	Cả hai cùng chơi cho mức cường độ âm 120 dB.		
c)	Xưởng cửa có 7 máy cửa giống nhau chạy cùng lúc gây ra 93 dB. Nếu 3 máy ngừng chạy thì mức cường độ âm nhỏ hơn 90 dB.		
d)	Khi cường độ âm tăng 100 lần thì mức cường độ âm tăng 20 dB.		



Cường độ cộng lại, nhưng decibel thì không: hai nguồn bằng nhau chỉ thêm khoảng 3 dB.

Lời giải.

a) **Đúng:** I gấp đôi nên $L = 60 + 10\log 2 \approx 63,0$ dB.

b) **Sai.**

c) **Sai:** còn 4 máy nên $L = 93 - 10\log \frac{7}{4} \approx 90,6$ dB, vẫn lớn hơn 90 dB.

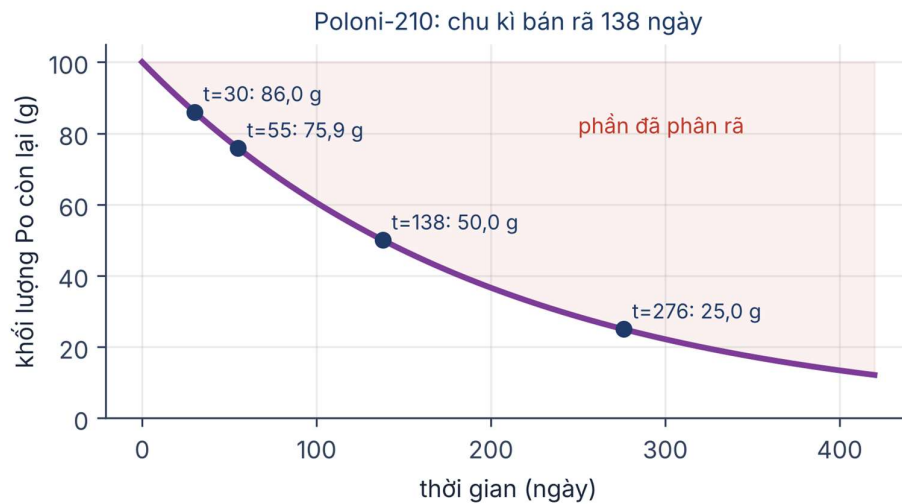
d) **Đúng:** $10\log 100 = 20$.

◆ Ví dụ 44. (Câu Đúng/Sai, theo]

Poloni-210 có chu kì bán rã 138 ngày; khối lượng còn lại sau t ngày là $m(t) = m_0(1/2)^{t/T}$. Lúc đầu có 100 gam.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Sau 138 ngày khối lượng Poloni còn lại là 50 gam.		
b)	Khối lượng còn lại sau 30 ngày nhiều hơn 85 gam.		
c)	Kể từ ngày thứ 55 trở đi thì khối lượng còn lại ít hơn 75 gam.		

d) Sau 276 ngày khối lượng đã phân rã gấp ba lần khối lượng còn lại.



Phân rã Poloni-210: mỗi 138 ngày khối lượng giảm một nửa.

Lời giải.

a) Đúng.

b) Đúng: $m(30) = 100 \cdot 2^{-30/138} \approx 86,0$ g.

c) Sai: $m(55) \approx 75,9 > 75$; $m(t) < 75 \Leftrightarrow t > 138 \log_2 \frac{4}{3} \approx 57,3$, tức từ ngày thứ 58.

d) Đúng: $m(276) = 25$ g, đã phân rã 75 g.

◆ **Ví dụ 45.** (Trả lời ngắn – Sở GD&ĐT Quảng Ninh, thi thử TN THPT 2024 – 2025)

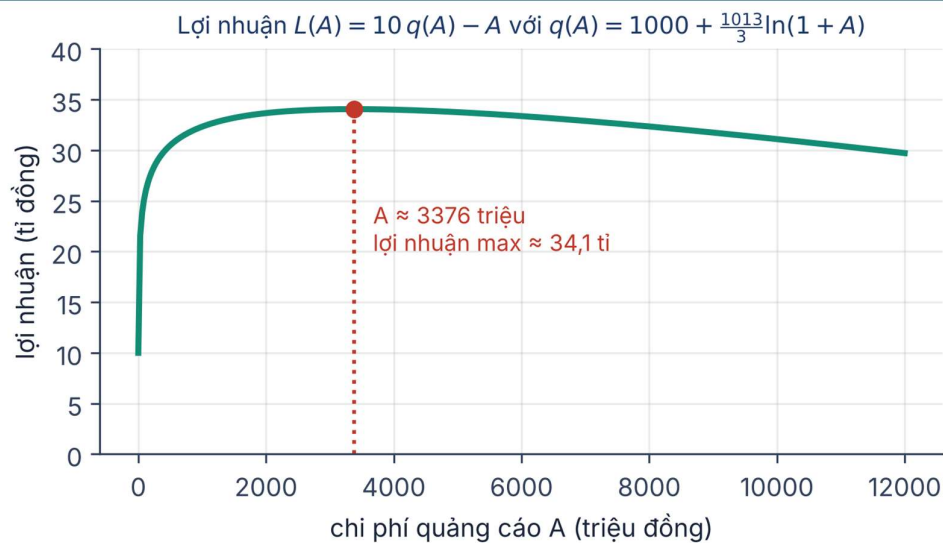
Một công ty chi A (triệu đồng) cho quảng cáo. Số sản phẩm bán ra là

$q(A) = 1000 + \frac{1013}{3} \ln(1 + A)$. Chi phí sản xuất mỗi sản phẩm là 10 triệu đồng, giá bán mỗi sản phẩm là 20 triệu đồng. Lợi nhuận tối đa công ty có thể đạt được là bao nhiêu tỉ đồng (làm tròn đến hàng phần mười)?

Lời giải. Lợi nhuận $L(A) = (20 - 10) q(A) - A = 10000 + \frac{10130}{3} \ln(1 + A) - A$.

$$L'(A) = \frac{10130}{3(1+A)} - 1 = 0 \Leftrightarrow A = \frac{10130}{3} - 1 \approx 3375,7.$$

Đây là điểm cực đại, $L_{\max} \approx 34\,058,5$ triệu đồng. **Đáp số: 34,1**



Lợi nhuận tăng rất nhanh rồi giảm dần: quảng cáo quá nhiều cũng không có lợi.

◆ Ví dụ 46. (Trả lời ngắn – theo)

Nhiệt độ không khí quanh một bóng đèn được mô phỏng bởi $T(x) = a + b \cdot 2^{kx}$ ($^{\circ}\text{C}$), với x là khoảng cách tới bề mặt bóng đèn (mm). Trên bề mặt bóng đèn nhiệt độ là 125°C ; cách bề mặt 3 mm và 9 mm, nhiệt độ lần lượt là 75°C và $37,5^{\circ}\text{C}$. Tính nhiệt độ cách bề mặt bóng đèn 1 cm (làm tròn đến hàng phần mười).

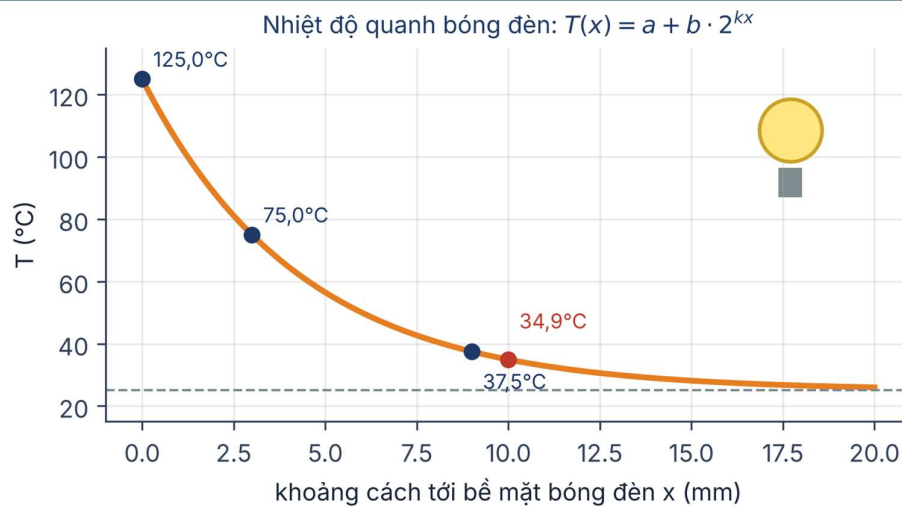
Phân tích. Ba ẩn a, b, k , ba dữ kiện.

Đặt $u = 2^{3k}$ thì $2^{9k} = u^3$: hệ trở thành phương trình đại số.

Lời giải. $a + b = 125$; $b(u - 1) = -50$; $b(u^3 - 1) = -87,5$.

Chia vế: $u^2 + u + 1 = 1,75 \Leftrightarrow u = \frac{1}{2}$ (loại $u = -\frac{3}{2}$). Suy ra $b = 100$, $a = 25$, $2^k = 2^{-1/3}$.

Vậy $T(10) = 25 + 100 \cdot 2^{-10/3} \approx 34,9^{\circ}\text{C}$.



Nhiệt độ quanh bóng đèn giảm nhanh theo khoảng cách.

◆ Ví dụ 47. (Trả lời ngắn – THPT Chuyên ĐH KHTN Hà Nội, thi thử TN THPT 2026)

Độ lớn động đất Richter là $M = \log A - \log A_0$. Ngày 11/3/2011 trận siêu động đất ở Tōhoku (Nhật Bản) có độ lớn 9,1; ngày 21/5/2003 trận động đất ở Bắc Algeria có độ lớn 6,8.

Biên độ rung chấn tối đa của trận ở Nhật Bản gấp bao nhiêu lần trận ở Algeria (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Lời giải. $\frac{A_1}{A_2} = 10^{9,1-6,8} = 10^{2,3} \approx 200$ lần.

◆ Ví dụ 48.

Đầu tháng 1 năm 2026, anh Nam gửi tiết kiệm X triệu đồng. Từ tháng thứ 2, mỗi tháng anh gửi thêm một số tiền lớn hơn tháng liền trước 5%. Ngân hàng tính lãi kép kì hạn 1 tháng, lãi suất 1%/tháng; anh luôn gửi vào ngày đầu tháng và không rút. Tìm X (làm tròn đến hàng phần mười) để cuối tháng 12/2026 anh có đúng 200 triệu đồng.

Lời giải. Khoản gửi tháng thứ i là $X \cdot 1,05^{i-1}$, sinh lãi 13 – i tháng. Tổng

$$T = X \sum_{i=1}^{12} 1,05^{i-1} \cdot 1,01^{13-i} = 1,01X \cdot \frac{1,05^{12} - 1,01^{12}}{0,04} = 200 \Rightarrow X \approx 11,8.$$

Đáp số: 11,8

Dạng 11. Nâng cao – những ý tưởng Olympic**◆ Ví dụ 49. (AIME 1988)**

Tìm $(\log_2 x)^2$ biết $\log_2(\log_8 x) = \log_8(\log_2 x)$.

Lời giải. Đặt $t = \log_2 x > 0$, thì $\log_8 x = \frac{t}{3}$.

Phương trình thành $\log_2 \frac{t}{3} = \frac{1}{3} \log_2 t \Leftrightarrow \frac{2}{3} \log_2 t = \log_{23} t \Leftrightarrow t = 3^{3/2}$.

Vậy $(\log_2 x)^2 = t^2 = 27$.

◆ Ví dụ 50. (AIME 2020 I)

Có duy nhất một số thực dương x sao cho ba số $\log_8(2x)$, $\log_4 x$, $\log_2 x$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội dương. Biết $x = \frac{m}{n}$ tối giản, tìm $m + n$.

Lời giải. Đặt $t = \log_2 x$. Ba số là $\frac{1+t}{3}$, $\frac{t}{2}$, t . Điều kiện cấp số nhân: $\frac{t^2}{4} = \frac{(1+t)t}{3}$.

Với $t \neq 0$: $3t = 4 + 4t \Leftrightarrow t = -4$. Ba số là $-1, -2, -4$, công bội $2 > 0$ (thỏa mãn).

Vậy $x = 2^{-4} = \frac{1}{16}$, $m + n = 17$.

◆ Ví dụ 51. (AIME 2020 II)

Nghiệm của phương trình $\log_2 x 3^{20} = \log_{2x+3} 3^{2020}$ có dạng $\frac{m}{n}$ tối giản. Tìm $m + n$.

Lời giải. Đổi về cơ số 2: $\frac{20 \log_{23} x}{x} = \frac{2020 \log_{23} 3}{x+3} \Leftrightarrow 20(x+3) = 2020x \Leftrightarrow x = \frac{3}{100}$.

Vậy $m + n = 103$.

◆ Ví dụ 52. (Chứng minh bất đẳng thức AM-GM bằng logarit (G. Pólya))

Chứng minh rằng với các số dương $x_1, \dots, x_n$: $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$.

Phân tích. Bất đẳng thức $\ln x \leq x - 1$ (hình minh họa, trái) biến tích thành tổng: chính là ý tưởng của Napier, dùng để chứng minh bất đẳng thức!

Lời giải. Gọi A là trung bình cộng. Áp dụng $\ln t \leq t - 1$ cho $t = \frac{x_i}{A}$ rồi cộng lại:

$$\sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{A} \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{A} - 1 \right) = \frac{nA}{A} - n = 0 \Rightarrow \ln \frac{x_1 \cdots x_n}{A^n} \leq 0 \Rightarrow x_1 \cdots x_n \leq A^n.$$

Dấu bằng khi mọi $\frac{x_i}{A} = 1$, tức các số bằng nhau. Theo truyền thuyết, Pólya kể rằng chứng minh này đến với ông trong một giấc mơ, và gọi nó là “chứng minh đẹp nhất mà tôi từng mơ thấy”.

◆ **Ví dụ 53.** (Chuỗi điều hòa phân kì)

Chứng minh $\frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n}$ với mọi $n \geq 1$. Suy ra $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$, và do đó tổng H_n lớn tùy ý.

Lời giải. Theo định nghĩa diện tích, $\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \int_n^{n+1} \frac{dt}{t}$, mà $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{t} < \frac{1}{n}$ trên $(n; n+1)$, nên có bất đẳng thức kép. Cộng các bất đẳng thức bên phải với $k = 1, \dots, n$:

$\ln(n+1) = \sum_{k=1}^n \ln \frac{k+1}{k} < H_n$. Vì $\ln(n+1) \rightarrow +\infty$, tổng điều hòa phân kì, dù tăng chậm đến kinh ngạc: phải cộng hơn $1,5 \cdot 10^{43}$ số hạng mới vượt 100!

◆ **Ví dụ 54.** (Chữ số đầu của lũy thừa – một bài toán đẹp)

Biết 2^{1000} có 302 chữ số. Trong các số $2^1, 2^2, \dots, 2^{1000}$, có bao nhiêu số có chữ số đầu tiên là 1?

Phân tích. Khi nhân đôi một số, số chữ số tăng thêm nhiều nhất là 1. Số chữ số tăng đúng khi nào?

Lời giải. Nếu 2^{n-1} có k chữ số thì $2^n = 2 \cdot 2^{n-1} < 2 \cdot 10^k$.

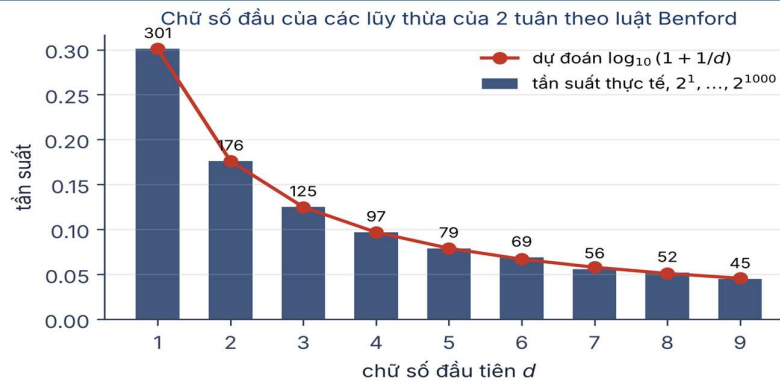
Nếu 2^n có $k+1$ chữ số thì $10^k \leq 2^n < 2 \cdot 10^k$: chữ số đầu là 1.

Ngược lại, nếu 2^n bắt đầu bằng 1 thì $2^{n-1} = 2^n/2$ bắt đầu bằng 5, 6, 7, 8 hoặc 9 và có ít hơn một chữ số.

Vậy 2^n bắt đầu bằng 1 khi và chỉ khi số chữ số tăng thêm 1.

Từ $2^0 = 1$ (1 chữ số) đến 2^{1000} (302 chữ số), số chữ số tăng đúng 301 lần.

Đáp số: **301** số.



Tần suất chữ số đầu của $2^1, \dots, 2^{1000}$: 301 số bắt đầu bằng 1, chỉ 45 số bắt đầu bằng 9. Đường đỏ là luật Benford $\log\left(1 + \frac{1}{d}\right)$.

★ Nhận xét.

Tỉ lệ $\frac{301}{1000} \approx \log 2$ không phải ngẫu nhiên: 2^n bắt đầu bằng chữ số d khi phần lẻ của $n \log 2$ thuộc $[\log d; \log(d+1))$, một khoảng có độ dài $\log\left(1 + \frac{1}{d}\right)$.

Đây là *luật Benford*, sẽ gặp lại ở Phần IV.

Dạng 12. Bồi dưỡng học sinh giỏi: bất đẳng thức, giới hạn, cực trị

★ Ba kĩ thuật cốt lõi.

- (1) **Logarit hóa** để biến lũy thừa có số mũ biến thiên (u^v) thành tích $v \ln u$.
- (2) **So sánh qua hàm** $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ hoặc $\frac{x}{\ln x}$ để so sánh a^b với b^a .
- (3) **Bất đẳng thức tiếp tuyến** $e^x \geq 1 + x$, $\ln x \leq x - 1$ và đơn điệu của hàm số.

◆ Ví dụ 55. (Chuyên đề bồi dưỡng HSG Toán 12)

Chứng minh rằng $n^{n+1} > (n+1)^n$ với mọi số tự nhiên $n \geq 3$.

Phân tích. Lấy logarit hai vế: $(n+1)\ln n > n \ln(n+1) \Leftrightarrow \frac{n+1}{\ln(n+1)} > \frac{n}{\ln n}$.

Hai vế là giá trị của cùng một hàm $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ tại $n+1$ và n .

Lời giải. Xét $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ trên $(e; +\infty)$: $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} > 0$, nên f đồng biến.

Với $n \geq 3 > e$: $f(n+1) > f(n)$, suy ra điều phải chứng minh.

★ Nhận xét.

Với $n = 2$ bất đẳng thức sai ($2^3 = 8 < 9 = 3^2$). Hệ quả đẹp: dãy $\sqrt[n]{n}$ giảm từ $n = 3$ trở đi, nên $\sqrt[3]{3}$ là số lớn nhất trong dãy $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \dots$

◆ Ví dụ 56. (Chuyên đề bồi dưỡng HSG Toán 12 [20], Bài toán 4.46)

Cho $0 < x < 1, 0 < y < 1$ và $x \neq y$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{y-x} \left(\ln \frac{y}{1-y} - \ln \frac{x}{1-x} \right) > 4.$$

Phân tích. Vế trái có dạng “tỉ sai phân” $\frac{g(y)-g(x)}{y-x}$ với $g(t) = \ln \frac{t}{1-t}$.

Muốn nó lớn hơn 4, ta chứng minh $g(t) - 4t$ đồng biến.

Lời giải. Giả sử $y > x$. Xét $f(t) = \ln \frac{t}{1-t} - 4t$ trên $(0; 1)$: $f'(t) = \frac{1}{t(1-t)} - 4 = \frac{(2t-1)^2}{t(1-t)} \geq 0$, dấu bằng chỉ tại $t = \frac{1}{2}$, nên f đồng biến. Do đó $f(y) > f(x)$, tức $\ln \frac{y}{1-y} - \ln \frac{x}{1-x} > 4(y-x)$.

Chia cho $y-x > 0$ ta được điều phải chứng minh.

◆ Ví dụ 57. (Chuyên đề bồi dưỡng HSG Toán 12 [20], Bài toán 4.47)

Cho $a > b > 0$. Chứng minh $\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^b \leq \left(2^b + \frac{1}{2^b}\right)^a$.

Lời giải. Vì $2^a + 2^{-a} = \frac{4^a+1}{2^a}$, bất đẳng thức tương đương $(4^a + 1)^b \leq (4^b + 1)^a$

$\Leftrightarrow \frac{\ln(1+4^a)}{a} \leq \frac{\ln(1+4^b)}{b}$. Xét $f(x) = \frac{\ln(1+4^x)}{x}, x > 0$:

$$f'(x) = \frac{4^x \ln 4^x - (1+4^x) \ln(1+4^x)}{x^2(1+4^x)} < 0,$$

vì hàm $\ln t$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ và $4^x < 1+4^x$.

Vậy f nghịch biến, $a > b \Rightarrow f(a) < f(b)$.

◆ Ví dụ 58. (Chuyên đề bồi dưỡng HSG Toán 12 [20], Bài toán 4.23)

Cho a, b là hai số dương khác 1. Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$.

Phân tích. Dạng vô định 1^∞ : logarit hóa để đưa về dạng $\frac{0}{0}$.

Lời giải. Đặt $y = \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$, ta có $\ln y = \frac{\ln \frac{a^x+b^x}{2}}{x}$.

Vì $\frac{a^x+b^x}{2} - 1 = \frac{1}{2}[(a^x - 1) + (b^x - 1)] \sim \frac{x(\ln a + \ln b)}{2}$ khi $x \rightarrow 0$, và $\ln(1+u) \sim u$,

nên $\ln y \rightarrow \frac{\ln a + \ln b}{2} = \ln \sqrt{ab}$.

Vậy giới hạn bằng $\sqrt{ab}$: trung bình lũy thừa bậc x tiến tới trung bình nhân!

◆ Ví dụ 59.

Chứng minh rằng với mọi số dương a, b : $a^b + b^a > 1$.

Phân tích. Nếu $a \geq 1$ hoặc $b \geq 1$ thì hiển nhiên. Khó là khi cả hai thuộc $(0; 1)$: cần một chặn dưới cho a^b .

Lời giải. Giả sử $0 < a, b < 1$. Với $0 < \alpha < 1$ và $x > 0$, hàm $h(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x$ có $h'(x) = \alpha[(1+x)^{\alpha-1} - 1] < 0$, nên $(1+x)^\alpha < 1 + \alpha x$ (bất đẳng thức Bernoulli). Viết $a = \frac{1}{1+x}$ thì $a^b = \frac{1}{(1+x)^b} > \frac{1}{1+bx} = \frac{a}{a+b-ab} > \frac{a}{a+b}$. Tương tự $b^a > \frac{b}{a+b}$. Cộng lại: $a^b + b^a > 1$.

◆ Ví dụ 60.

Xét các số thực a, b, c lớn hơn 1 (với $a > b$) thỏa mãn $4(\log_a c + \log_b c) = 25 \log_{ab} c$. Giá trị nhỏ nhất của $P = \log_b a + \log_a c + \log_c b$ bằng

A. $\frac{17}{4}$.

B. 5.

C. 3.

D. 8.

Lời giải. Đặt $x = \log_c a$, $y = \log_c b$ ($x > y > 0$). Điều kiện $\Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{25}{x+y} \Leftrightarrow 4x^2 - 17xy + 4y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4y$ (vì $x > y$). Khi đó $\log_b a = \frac{x}{y} = 4$ và $P = 4 + \frac{1}{x} + y = 4 + \frac{1}{4y} + y \geq 4 + 2\sqrt{1/4} = 5$, dấu bằng khi $y = \frac{1}{2}$. Chọn B.

◆ Ví dụ 61.

Với a, b, c thỏa $\frac{3}{8} < a < 1$, $\frac{1}{3} < b < 1$, $\frac{1}{8} < c < 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = 4\log_a \left(\frac{3b}{4} - \frac{1}{4}\right) + 3\log_b \left(\frac{c}{2} - \frac{1}{16}\right) + 6\log_c \left(\frac{a}{2} - \frac{3}{16}\right).$$

Phân tích. Các cơ số đều nhỏ hơn 1, nên muốn chặn dưới logarit ta cần chặn **trên** biểu thức bên trong bằng một lũy thừa của cơ số “kế tiếp”: $\frac{3b-1}{4} \leq b^3$, $\frac{c}{2} - \frac{1}{16} \leq c^2$, $\frac{a}{2} - \frac{3}{16} \leq a^4$.

Lời giải. $b^3 - \frac{3b-1}{4} = \frac{(2b-1)^2(b+1)}{4} \geq 0$; $c^2 - \frac{c}{2} + \frac{1}{16} = \left(c - \frac{1}{4}\right)^2 \geq 0$;

$a^4 - \frac{a}{2} + \frac{3}{16} = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \left(a^2 + a + \frac{3}{4}\right) \geq 0$. Vì các cơ số nhỏ hơn 1:

$$P \geq 12\log_a b + 6\log_b c + 24\log_c a \geq 3\sqrt[3]{12 \cdot 6 \cdot 24 \cdot \log_a b \log_b c \log_c a} = 3\sqrt[3]{1728} = 36.$$

Dấu bằng tại $a = b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{4}$ (khi đó $12\log_a b = 12$, $6\log_b c = 12$, $24\log_c a = 12$).

Đáp số: 36

◆ Ví dụ 62.

Có bao nhiêu số nguyên dương b sao cho ứng với mỗi b có đúng 3 số nguyên dương a thỏa mãn $\log_2 \frac{2^a + a}{ab} + 2^a \leq a(b - 1)$?

Lời giải. Bất phương trình $\Leftrightarrow \log_2(2^a + a) + (2^a + a) \leq \log_2(ab) + ab$.

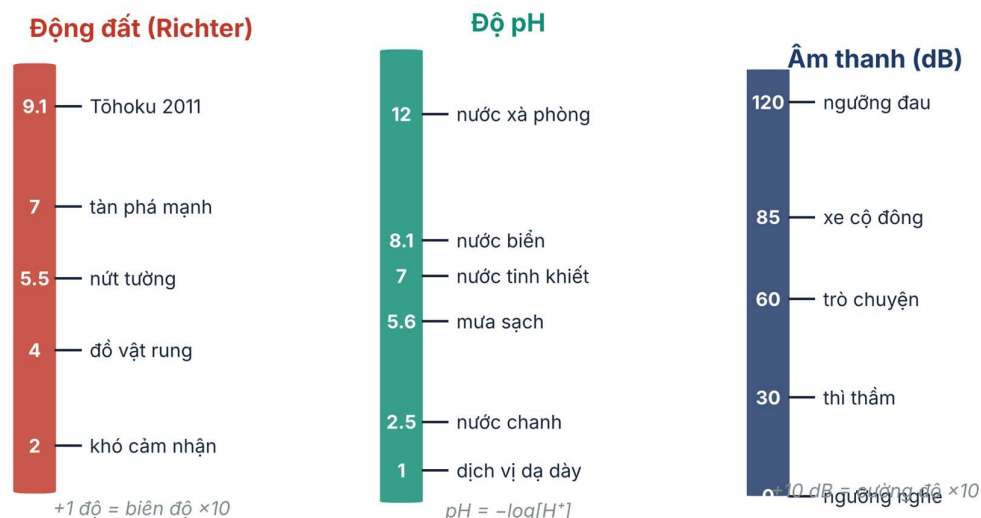
Hàm $\log_2 t + t$ đồng biến nên $\Leftrightarrow 2^a + a \leq ab \Leftrightarrow b \geq f(a) = \frac{2^a}{a} + 1$.

Ta có $f(1) = 3$, $f(2) = 3$, $f(3) = \frac{11}{3}$, $f(4) = 5$, $f(5) = 7,4$ và f tăng khi $a \geq 2$.

Có đúng ba số a khi $\frac{11}{3} \leq b < 5$, tức $b = 4$ (khi đó $a \in \{1; 2; 3\}$). **Đáp số: 1**

PHẦN IV. LOGARIT QUANH TA

Khi máy tính đã làm thay phép nhân, logarit chuyển sang một nghề mới: *đo những thứ trải dài trên nhiều bậc độ lớn*. Tai người nghe được từ tiếng lá rơi đến tiếng máy bay, chênh nhau hàng nghìn tỉ lần về cường độ; mắt người nhìn được từ ánh sao mờ đến ánh nắng chói. Một thang đo tuyến tính không thể chứa nổi những khoảng cách ấy, nhưng thang logarit thì có.



Ba thang đo logarit quen thuộc: mỗi vạch là một phép nhân, không phải một phép cộng.

1. Thang độ Richter và độ lớn động đất

Năm 1935, Charles Richter định nghĩa độ lớn động đất bằng logarit thập phân của biên độ sóng ghi trên địa chấn kế [17]. Tăng 1 độ Richter nghĩa là biên độ tăng 10 lần và năng lượng tăng khoảng $10^{1.5} \approx 31,6$ lần. Trận động đất Tōhoku (Nhật Bản, 2011) có độ lớn khoảng 9,0–9,1; năng lượng của nó gấp khoảng một nghìn lần một trận 7 độ (Ví dụ ở Dạng 10).

Ngày nay các nhà địa chấn dùng thang độ lớn mô-men M_w , nhưng vẫn là một thang logarit.

2. Độ pH: logarit trong cốc nước chanh

Năm 1909, nhà hóa học Đan Mạch Søren Sørensen định nghĩa $pH = -\log[H^+]$, với $[H^+]$ là nồng độ ion hiđrô (mol/L). Nước tinh khiết có $[H^+] = 10^{-7}$, nên $pH = 7$. Nước chanh có pH khoảng 2,5, tức *chua gấp khoảng $10^{4.5} \approx 30\,000$ lần* nước tinh khiết về nồng độ ion H^+ . Dấu trừ trong định nghĩa giúp pH là số dương dễ dùng.

3. Decibel: logarit trong tai ta

Mức cường độ âm $L = 10\log \frac{I}{I_0}$ (dB), với $I_0 = 10^{-12}$ W/m² là ngưỡng nghe. Cứ thêm 10 dB, cường độ âm tăng 10 lần. Cuộc trò chuyện bình thường khoảng 60 dB, đường phố đông xe khoảng

85 dB (cường độ gấp khoảng 300 lần), ngưỡng đau khoảng 120 dB (gấp một triệu lần trò chuyện). Đây là bài toán quen thuộc trong cả Vật lý 12 lẫn đề thi Toán.

★ Định luật Weber – Fechner.

Không phải ngẫu nhiên mà decibel dùng logarit: cảm giác của con người (âm lượng, độ sáng, cả cảm nhận về giá cả) thường tỉ lệ với *logarit* của kích thích. Tăng gấp đôi cường độ âm, ta chỉ thấy to hơn “một chút” (khoảng 3 dB).

4. Cấp sao: logarit trên bầu trời

Từ thời Hipparchus, các ngôi sao được xếp từ cấp 1 (sáng nhất) đến cấp 6 (mờ nhất mắt thường thấy được). Năm 1856, Norman Pogson chuẩn hóa: chênh 5 cấp ứng với độ sáng gấp đúng 100 lần, tức $m_1 - m_2 = -2,5 \log \frac{F_1}{F_2}$. Mỗi cấp sao chênh nhau $\sqrt[5]{100} \approx 2,512$ lần.

5. Luật Benford và kiểm toán

Năm 1881 Simon Newcomb, rồi năm 1938 Frank Benford [16], nhận thấy trong rất nhiều bộ số liệu thực tế (dân số các thành phố, diện tích sông hồ, giá cổ phiếu, số liệu kế toán), chữ số đầu tiên là d với xác suất xấp xỉ

$$P(d) = \log \left(1 + \frac{1}{d} \right): \quad P(1) \approx 30,1\%, \quad P(2) \approx 17,6\%, \quad \dots, \quad P(9) \approx 4,6\%.$$

Các lũy thừa của 2 tuân theo luật này một cách gần như hoàn hảo (hình minh họa). Ngày nay các kiểm toán viên dùng luật Benford để phát hiện số liệu bị “bịa”: người bịa số thường dùng các chữ số đầu đều nhau, trái với luật logarit.

6. Biểu đồ thang logarit

Khi một đại lượng tăng theo hàm mũ (số ca bệnh giai đoạn đầu dịch, số transistor trong chip theo định luật Moore, dân số vi khuẩn), biểu đồ thông thường sẽ “dừng đứng” và che mất các giai đoạn đầu. Nếu trục tung chia theo logarit, đường cong mũ $y = Ce^{kt}$ trở thành đường thẳng $\ln y = \ln C + kt$ với hệ số góc k chính là tốc độ tăng trưởng (hình minh họa). Đọc được biểu đồ thang log là một kỹ năng quan trọng của công dân hiện đại.

7. Logarit trong tin học

- **Tìm kiếm nhị phân:** mỗi lần so sánh loại được một nửa danh sách, nên tìm một phần tử trong danh sách n phần tử chỉ cần khoảng $\log_2 n$ bước. Với $n = 10^9$: khoảng 30 bước.
- **Số bit:** để biểu diễn số nguyên N trong hệ nhị phân cần $\lceil \log_2 N \rceil + 1$ bit. Một byte (8 bit) mã hóa được $2^8 = 256$ giá trị.

- **Thông tin:** năm 1948, Claude Shannon định nghĩa lượng thông tin của một sự kiện có xác suất p là $-\log_2 p$ bit. Tung một đồng xu cân đối cho 1 bit thông tin; trò chơi “hai mươi câu hỏi có/không” phân biệt được tới $2^{20} \approx$ một triệu đối tượng.

❖ Logarit và âm nhạc.

Các nốt nhạc cách nhau một quãng tám có tần số gấp đôi nhau; hệ bình quân 12 cung chia quãng tám thành 12 nửa cung có tỉ số tần số bằng nhau $\sqrt[12]{2} \approx 1,0595$. Như vậy, bàn phím đàn piano chính là một *trục logarit* của tần số: các phím cách đều nhau, nhưng tần số tăng theo cấp số nhân, đúng như bảng của Stifel!

PHẦN V. HỆ THỐNG BÀI TẬP

Bài tập được chia làm 5 mức độ. Các câu đánh dấu [TLN] là câu trả lời ngắn, [Đ/S] là câu Đúng/Sai theo cấu trúc đề thi tốt nghiệp.

Mức 1 – Nhận biết

Bài 1. Tính $\log_{264} - \log_3 \frac{1}{27}$.

Bài 2. Tính $9^{\log_{32}} + 10^{\log 5}$.

Bài 3. Giải phương trình $2^{x-1} = 16$.

Bài 4. Giải phương trình $\log_3(2x - 1) = 2$.

Bài 5. Tìm tập xác định của hàm số $y = \log_2(4 - x^2)$.

Bài 6. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_3(2x + 1)$.

Bài 7. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$. B. $y = \left(\frac{e}{2}\right)^x$. C. $y = (\sqrt{3} - 1)^x$. D. $y = 2025^x$.

Bài 8. Giải bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 9$.

Mức 2 – Thông hiểu

Bài 9. Cho $\log_{23} = a$. Biểu diễn $\log_{18} 24$ theo a .

Bài 10. [TLN] Tính tổng các nghiệm của phương trình $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$.

Bài 11. [TLN] Giải phương trình $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$.

Bài 12. Giải bất phương trình $\log_{0,5}(x^2 - 5x + 7) > 0$.

Bài 13. [TLN] Biết $\log 3 \approx 0,4771$. Số 3^{100} có bao nhiêu chữ số?

Bài 14. [Đ/S] Cho hàm số $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Tập xác định của f là $\mathbb{R}$.		
b)	$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.		
c)	Hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$.		
d)	$f(x) \geq 0$ với mọi x và giá trị nhỏ nhất của f bằng 0.		

Bài 15. Một người gửi 100 triệu đồng với lãi suất 0,4%/tháng, lãi nhập vốn hằng tháng. Sau đúng 6 tháng người đó lĩnh được bao nhiêu (làm tròn đến nghìn đồng)?

Bài 16. [TLN] Số lượng vi khuẩn $s(t) = s(0) \cdot 2^t$ (t tính bằng phút). Sau 3 phút có 625 nghìn con. Hỏi sau bao nhiêu phút có 10 triệu con?

Mức 3 – Vận dụng

Bài 17. Giải phương trình $2^{x^2-x} + x^2 - x = 2^{2x-2} + 2x - 2$.

Bài 18. [TLN] Tính tổng các nghiệm của phương trình $\log_2 \frac{x^2+x+1}{2x^2-2x+3} = x^2 - 3x + 2$.

Bài 19. Tìm m để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 + x_2 = 3$.

Bài 20. [TLN] Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-10; 10]$ để phương trình $\log(mx) = 2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất? (Phát triển từ .)

Bài 21. Cho $a > 1, b > 1$ và các số dương x, y thỏa $a^x = b^y = \sqrt{ab}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x + 2y$.

Bài 22. [TLN] Dân số một tỉnh năm 2025 là 1,5 triệu người, tăng đều 1,2%/năm. Hỏi năm đầu tiên dân số vượt 2 triệu người là năm nào?

Bài 23. [TLN] Một mẫu than củi trong hàng động cổ còn 70% lượng C-14. Biết chu kì bán rã C-14 là 5730 năm, ước tính tuổi mẫu than (làm tròn đến hàng chục năm).

Bài 24. [Đ/S] Hai trận động đất có độ lớn Richter lần lượt 7,0 và 5,0.

Biết $M = \log \frac{A}{A_0}$ và $\log E \approx 4,8 + 1,5M$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Biên độ của trận 7,0 độ gấp 2 lần trận 5,0 độ.		
b)	Biên độ của trận 7,0 độ gấp 100 lần trận 5,0 độ.		
c)	Năng lượng của trận 7,0 độ gấp 1000 lần trận 5,0 độ.		
d)	Một trận động đất có năng lượng gấp đôi trận 5,0 độ thì có độ lớn khoảng 5,2 độ.		

Mức 4 – Vận dụng cao

Bài 25. [TLN] Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn $\log_4(x^2 + y) \geq \log_3(x + y)$?

Bài 26. [TLN] Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 127 số nguyên y thỏa mãn $\log_3(x^2 + y) \geq \log_2(x + y)$?

Bài 27. Cho $a > 0, b > 0$ thỏa $\log_{10a+3b+1}(25a^2 + b^2 + 1) + \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) = 2$. Tính $a + 2b$.

Bài 28. Xét các số thực không âm x, y thỏa $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 + 6x + 4y$.

Bài 29. Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5 \log^2 x + b \log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = 2a + 3b$.

Bài 30. Trong các cặp số thực $(x; y)$ thỏa $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1$, tìm giá trị lớn nhất của $T = 2x + y$.

Bài 31. [TLN] (Phát triển từ đề TN THPT 2023) Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $\log_2(x^2 + y^2 + x) + \log_3(x^2 + y^2) \leq \log_2 x + \log_3(x^2 + y^2 + 24x)$?

Bài 32. [TLN] Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-15; 15)$ để phương trình $3^x + m = \log_3(x - m)$ có nghiệm?

Mức 5 – Thử thách (Olympic)

Bài 33. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 2$: $\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$.

Bài 34. Tính $S = \frac{1}{\log_2(2025!)} + \frac{1}{\log_3(2025!)} + \dots + \frac{1}{\log_{2025}(2025!)}.$

Bài 35. Không dùng máy tính, so sánh 2025^{2026} và 2026^{2025} .

Bài 36. Giải phương trình $x^{\log x} = 100x$.

Bài 37. Chứng minh rằng với mọi $a, b, c > 1$: $\log_a(bc) + \log_b(ca) + \log_c(ab) \geq 6$.

Bài 38. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2. \end{cases}$$

Bài 39. Chứng minh rằng phương trình $2^x = x^2$ có đúng ba nghiệm thực, và tìm chúng hoặc chỉ ra khoảng chứa chúng.

Bài 40. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương n sao cho 2^n bắt đầu bằng các chữ số 2026 (tức là có dạng 2026 ...).

Mức 6 – Bài toán thực tế bổ sung

Bài 41. [TLN] Năm 2025 dân số một quốc gia là 19 triệu người; người ta ước tính dân số tăng gấp đôi sau 30 năm, theo công thức $A = 19 \cdot 2^{t/30}$ (triệu người, t tính từ 2025). Hỏi 20 năm sau dân số khoảng bao nhiêu triệu người (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Bài 42. [TLN] Bác An gửi 300 triệu đồng kì hạn 12 tháng, lãi kép 5%/năm. Sau ba năm bác rút ra 100 triệu, phần còn lại tiếp tục gửi. Hết bốn năm tiếp theo bác rút toàn bộ. Hỏi bác nhận được bao nhiêu triệu đồng (làm tròn đến hàng phần mười)?

Bài 43. [Đ/S] Một người gửi 100 triệu đồng với lãi suất 0,6%/tháng theo thể thức lãi kép.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Sau 1 tháng, số tiền cả vốn lẫn lãi là 106 triệu đồng.		
b)	Sau 2 tháng, số tiền lãi thu được là 1.203.600 đồng.		
c)	Sau n tháng, số tiền cả vốn lẫn lãi là $100(1 + 0,6\%)^{n-1}$ triệu đồng.		
d)	Để thu được nhiều hơn 10 triệu đồng tiền lãi, cần gửi ít nhất 16 tháng.		

Bài 44. [Đ/S] Tỉ lệ lạm phát trung bình $r\%/năm$ làm sức mua của số tiền P sau n năm chỉ còn $A = P(1 - r\%)^n$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Với lạm phát $7\%/năm$, sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm còn 86 490 000 đồng.		
b)	Nếu sau ba năm sức mua của 100 triệu đồng chỉ còn 80 triệu thì tỉ lệ lạm phát trung bình là $9,17\%/năm$.		
c)	Với lạm phát $6\%/năm$, sau 12 năm sức mua còn không quá một nửa.		
d)	Với lạm phát $6\%/năm$, sau 11 năm sức mua còn không quá một nửa.		

Bài 45. [Đ/S] Độ pH của dung dịch là $pH = -\log[H^+]$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Dung dịch có $[H^+] = 0,001 \text{ mol/L}$ thì $pH = 3$.		
b)	Dung dịch có $pH = 8$ thì $[H^+] = 10^8 \text{ mol/L}$.		
c)	Khi pH tăng 1 đơn vị thì nồng độ ion H^+ giảm 10 lần.		
d)	Để nồng độ ion H^+ tăng 100 lần thì pH giảm 2 đơn vị.		

Bài 46. [Đ/S] Giá trị còn lại (triệu đồng) của một chiếc máy sau t năm sử dụng là

$$P(t) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/3}.$$

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Giá trị còn lại sau 2 năm khoảng 314,98 triệu đồng.		
b)	Giá trị còn lại sau 2 năm 3 tháng khoảng 297,3 triệu đồng.		
c)	Sau 1 năm, giá trị còn lại bằng khoảng 79,37% giá trị ban đầu.		
d)	Máy mất một nửa giá trị sau 6 năm.		

Bài 47. [TLN] Một khoảng nhạc tính bằng cent giữa hai nốt có tần số $a > b$ là $n = 1200\log_2 \frac{a}{b}$.
Tính khoảng cách (cent) giữa hai nốt 443 Hz và 415 Hz, làm tròn đến hàng đơn vị.

Bài 48. [TLN] Vi khuẩn tăng theo $S = Ae^{rt}$. Ban đầu có 100 con, sau 5 giờ có 300 con. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu giờ (số nguyên) thì có hơn 10000 con?

Bài 49. [TLN] Thả một cốc trà 95°C vào phòng 28°C ; nhiệt độ sau t phút là $T = 28 + 67e^{-kt}$. Sau 10 phút trà còn 70°C . Hỏi sau bao nhiêu phút (làm tròn đến hàng đơn vị) trà còn 40°C ?

Bài 50. [TLN] Chị Lan vay 300 triệu đồng, lãi suất 1%/tháng, cuối mỗi tháng trả cố định a triệu đồng, trả hết sau đúng 24 tháng. Tìm a (làm tròn đến hàng phần mười).

Bài 51. [TLN] Trên đỉnh núi Bà Đen (Tây Ninh, cao khoảng 986 m), áp suất khí quyển là bao nhiêu mmHg (làm tròn đến hàng đơn vị), nếu dùng mô hình $P(h) = 760e^{-kh}$

với $P(1000) = 672,71$?

Bài 52. [TLN] Một sinh viên bắt đầu đi làm, mỗi tháng gửi tiết kiệm 3 triệu đồng vào đầu tháng, lãi kép 0,5%/tháng.

Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng số tiền tích lũy (cả gốc và lãi) vượt 200 triệu đồng?

PHẦN VI. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN

Mức 1 – Nhận biết

Bài 1. $6 - (-3) = 9$.

Bài 2. $9^{\log_{32}} = (3^{\log_{32}})^2 = 4$; $10^{\log 5} = 5$. Tổng 9.

Bài 3. $2^{x-1} = 2^4 \Rightarrow x = 5$.

Bài 4. $2x - 1 = 9 \Rightarrow x = 5$.

Bài 5. $4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 2)$.

Bài 6. $y' = \frac{2}{(2x+1)\ln}$.

Bài 7. C, vì $0 < \sqrt{3} - 1 \approx 0,73 < 1$.

Bài 8. $3^{-x} > 3^2 \Leftrightarrow x < -2$.

Mức 2 – Thông hiểu

Bài 9. $\log_{18} 24 = \frac{\log_2(8 \cdot 3)}{\log_2(2 \cdot 9)} = \frac{3+a}{1+2a}$.

Bài 10. $t = 2^x$: $t^2 - 6t + 8 = 0 \Rightarrow t \in \{2; 4\} \Rightarrow x \in \{1; 2\}$. Tổng 3.

Bài 11. $t = \log_2 x$: $t \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 11 \Rightarrow t = 6 \Rightarrow x = 64$.

Bài 12. Cơ số $0,5 < 1$: $0 < x^2 - 5x + 7 < 1$. Vế trái luôn đúng ($\Delta < 0$); $x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow x \in (2; 3)$.

Bài 13. $100\log 3 \approx 47,71 \Rightarrow$ có **48** chữ số.

Bài 14.

a) Đúng.

b) Đúng.

c) Sai ($f' < 0$ khi $x < 0$: f nghịch biến trên $(-\infty; 0)$).

d) Đúng ($x^2 + 1 \geq 1$).

Bài 15. $100 \cdot 1,004^6 \approx 102,424128$ triệu $\approx$ **102 424 000** đồng.

Bài 16. $s(0) = 625\,000 : 8 = 78\,125$; $2^t = 10^7 : 78\,125 = 128 \Rightarrow t = 7$ phút.

Mức 3 – Vận dụng

Bài 17. $f(t) = 2^t + t$ đồng biến, $f(x^2 - x) = f(2x - 2) \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x \in \{1; 2\}$.

Bài 18. Viết lại $\log_2(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = \log_2(2x^2 - 2x + 3) + (2x^2 - 2x + 3)$ (kiểm tra: hiệu hai biểu thức bằng $x^2 - 3x + 2$). Hàm $\log_2 t + t$ đồng biến nên $x^2 + x + 1 = 2x^2 - 2x + 3 \Leftrightarrow x \in \{1; 2\}$. Tổng **3**.

Bài 19. $t = 2^x$: $t^2 - 2mt + 2m = 0$, cần hai nghiệm dương phân biệt và $t_1 t_2 = 2^{x_1 + x_2} = 8 \Rightarrow 2m = 8 \Rightarrow m = 4$ (kiểm tra $\Delta' = 16 - 8 > 0$, $S = 8 > 0$). $m = 4$.

Bài 20. $mx = (x + 1)^2$, $x > -1$, $mx > 0$. Khảo sát $m = \frac{(x+1)^2}{x}$: với $m < 0$ luôn có đúng một nghiệm $x \in (-1; 0)$; với $m > 0$ chỉ $m = 4$ cho nghiệm kép $x = 1$. Có $10 + 1 = 11$ giá trị.

Bài 21. Đặt $t = \log_a b > 0$: $x = \frac{1+t}{2}$, $y = \frac{1+1/t}{2}$, $P = \frac{3}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1}{t} \geq \frac{3}{2} + \sqrt{2}$. $P_{\min} = \frac{3}{2} + \sqrt{2} \approx 2,91$ khi $t = \sqrt{2}$.

Bài 22. $1,5 \cdot 1,012^n > 2 \Leftrightarrow n > \log_{1,012} \frac{4}{3} \approx 24,1 \Rightarrow n = 25$: năm **2050**.

Bài 23. $t = 5730 \log_2 \frac{1}{0,7} \approx 2948,5 \approx 2950$ năm.

Bài 24.

a) Sai.

b) Đúng (10^2).

c) Đúng ($10^{1,5 \cdot 2}$).

d) Đúng: $\Delta M = \frac{\log 2}{1,5} \approx 0,2$.

Mức 4 – Vận dụng cao

Bài 25. Làm như Ví dụ ở Dạng 9 với $243 = 3^5$: $x^2 - x + 243 < 4^5 = 1024 \Leftrightarrow x^2 - x - 781 < 0 \Leftrightarrow -27,4 < x < 28,4$. Có **56** số.

Bài 26. Với $128 = 2^7$: $x^2 - x + 128 < 3^7 = 2187 \Leftrightarrow x^2 - x - 2059 < 0 \Leftrightarrow -44,9 < x < 45,9$. Có **90** số.

Bài 27. $25a^2 + b^2 \geq 10ab$; vế trái $\geq X + \frac{1}{X} \geq 2$. Dấu bằng: $b = 5a$ và $10a + 3b + 1 = 10ab + 1 \Rightarrow 25a = 50a^2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{5}{2}$. $a + 2b = \frac{11}{2}$.

Bài 28. Điều kiện $\Leftrightarrow y \cdot 4^y \geq \left(\frac{3}{2} - x\right) 4^{\frac{3}{2}-x}$; hàm $t \cdot 4^t$ đồng biến nên miền chấp nhận được là $x + y \geq \frac{3}{2}$, $x, y \geq 0$. $P_{\min} = \frac{65}{8}$ tại $x = \frac{1}{4}, y = \frac{5}{4}$ (xem lời giải chi tiết bên dưới).

Bài 29. Hai phương trình bậc hai theo $\ln x$, $\log x$: $x_1 x_2 = e^{-b/a}$, $x_3 x_4 = 10^{-b/5}$. Điều kiện $-\frac{b}{a} > -\frac{b \ln 10}{5} \Leftrightarrow a > \frac{5}{\ln 10} \approx 2,17 \Rightarrow a \geq 3$; thêm $b^2 > 20a$. Với $a = 3$: $b \geq 8$, $S = 6 + 24 = 30$.

Bài 30. Xét $x^2 + 2y^2 > 1$ (trường hợp cơ sở nhỏ hơn 1 cho $2x + y < 1$): $2x + y \geq x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 2(y-\frac{1}{4})^2 \leq \frac{9}{8}$. Theo Bu-nhi-a-cốp-xki, $2(x-1) + (y-\frac{1}{4}) \leq \sqrt{(4+\frac{1}{2}) \cdot \frac{9}{8}} = \frac{9}{4} \Rightarrow T \leq \frac{9}{2}$ (đạt tại $x=2, y=\frac{1}{2}$).

Bài 31. Như Ví dụ Dạng 9 (TN 2023) với $u = \frac{x^2+y^2}{x}$: $\log_2(u+1) \leq \log_3(1+\frac{24}{u}) \Leftrightarrow u \leq 3$ (tại $u=3$ hai vế bằng 2). Miền $x^2 + y^2 \leq 3x, x > 0$: $x=1: 3$ giá trị y ; $x=2: 3$; $x=3: 1$. Tổng 7.

Bài 32. $m = x - 3^x \leq \max = -\log_3(\ln 3) - \frac{1}{\ln 3} \approx -0,996$. $m \in \{-14; \dots; -1\}$: 14 giá trị.

Mức 5 – Thử thách

Bài 33. Cần chứng minh $\log_{n+1}n \cdot \log_{n+1}(n+2) < 1$. Theo AM-GM: $\log_{n+1}n \cdot \log_{n+1}(n+2) \leq (\frac{\log_{n+1}[n(n+2)]}{2})^2 < (\frac{\log_{n+1}(n+1)^2}{2})^2 = 1$. Vì $\log_n(n+1) = \frac{1}{\log_{n+1}n}$, ta có điều phải chứng minh.

Bài 34. $\frac{1}{\log_k(N!)} = \log_{N!}k$. Tổng $= \log_{N!}(2 \cdot 3 \cdots 2025) = \log_{N!}N! = 1$.

Bài 35. So sánh $\frac{\ln 2025}{2025}$ và $\frac{\ln 2026}{2026}$: hàm $\frac{\ln x}{x}$ nghịch biến trên $(e; +\infty)$ nên $\frac{\ln 2025}{2025} > \frac{\ln 2026}{2026} \Leftrightarrow 2026 \ln 2025 > 2025 \ln 2026$. Vậy $2025^{2026} > 2026^{2025}$.

Bài 36. Lấy log: $(\log x)^2 = 2 + \log x \Rightarrow \log x \in \{2; -1\} \Rightarrow x \in \{100; \frac{1}{10}\}$.

Bài 37. Đặt $p = \ln a, q = \ln b, r = \ln c > 0$. Biểu thức $= \frac{q+r}{p} + \frac{r+p}{q} + \frac{p+q}{r} = (\frac{q}{p} + \frac{p}{q}) + (\frac{r}{p} + \frac{p}{r}) + (\frac{r}{q} + \frac{q}{r}) \geq 6$.

Bài 38. Hệ $\Leftrightarrow x^2yz = 16, y^2zx = 81, z^2xy = 256$. Nhân lại: $(xyz)^4 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 2^8 \Rightarrow xyz = 24$. Suy ra $x = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}, y = \frac{81}{24} = \frac{27}{8}, z = \frac{256}{24} = \frac{32}{3}$.

Bài 39. Với $x > 0$: $2^x = x^2 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{2}$. Vì $0 < \frac{\ln 2}{2} < \frac{1}{e}$, hàm $\frac{\ln x}{x}$ (tăng trên $(0; e)$, giảm trên $(e; +\infty)$) nhận giá trị này đúng hai lần: $x=2$ và $x=4$. Với $x \leq 0$: $g(x) = 2^x - x^2$ có $g'(x) = 2^x \ln 2 - 2x > 0, g(-1) < 0 < g(0)$, nên có đúng một nghiệm $x_0 \in (-1; 0)$ ($x_0 \approx -0,767$).

Bài 40. 2^n bắt đầu bằng 2026 $\Leftrightarrow$ phần lẻ của $n \log 2$ thuộc $[\log 2, 026; \log 2, 027)$. Vì $\log 2$ vô tỉ, theo nguyên lý Dirichlet tồn tại k sao cho phần lẻ δ của $k \log 2$ dương và nhỏ hơn độ dài khoảng ấy (hoặc gần 1 tùy chiều); các bội $k, 2k, 3k, \dots$ có phần lẻ tiến từng bước δ nên không thể “nhảy qua” khoảng đã cho. Vậy tồn tại n .

Lời giải chi tiết Bài 28

Với $x, y \geq 0$: điều kiện là $y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3 - 2x$. Viết $3 - 2x = 2(\frac{3}{2} - x)$ và $4^{x+y-1} = \frac{4^y}{4^{1-x}}$; bất đẳng thức tương đương

$$y \cdot 4^y \geq (3/2 - x) \cdot 2 \cdot 4^{1-x} = (3/2 - x)4^{\frac{3}{2}-x} \quad \left(\text{vì } 2 \cdot 4^{1-x} = 4^{\frac{3}{2}-x} \right).$$

Hàm $h(t) = t \cdot 4^t$ đồng biến trên $[0; +\infty)$ và $h(t) \leq 0$ khi $t \leq 0$. Nếu $\frac{3}{2} - x \leq 0$ thì điều kiện luôn đúng; nếu $\frac{3}{2} - x > 0$ thì điều kiện $\Leftrightarrow y \geq \frac{3}{2} - x$. Trong mọi trường hợp, miền chấp nhận được là $x + y \geq \frac{3}{2}, x, y \geq 0$.

$P = (x + 3)^2 + (y + 2)^2 - 13$ là bình phương khoảng cách từ $(x; y)$ đến $I(-3; -2)$, trừ 13. Điểm gần I nhất trên miền là hình chiếu của I lên đường thẳng $x + y = \frac{3}{2}$: đi từ I theo vectơ $(1; 1)$ một đoạn t với $-5 + 2t = \frac{3}{2}$, tức $t = \frac{13}{4}$, được điểm $\left(\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right)$ (thuộc miền). Khi đó

$$P_{\min} = \left(\frac{13}{4}\right)^2 + \left(\frac{13}{4}\right)^2 - 13 = \frac{338 - 208}{16} = \frac{130}{16} = \frac{65}{8}.$$

Mức 6 – Bài toán thực tế bổ sung

Bài 41. $A(20) = 19 \cdot 2^{2/3} \approx 30,16$: khoảng **30 triệu người**.

Bài 42. $(300 \cdot 1,05^3 - 100) \cdot 1,05^4 \approx 300,6$ triệu đồng.

Bài 43.

- a) Sai (là 100,6 triệu).
- b) Đúng: $100(1,006^2 - 1) = 1,2036$ triệu.
- c) Sai (đúng là $100 \cdot 1,006^n$).
- d) Đúng: $1,006^n > 1,1 \Leftrightarrow n > 15,9$.

Bài 44.

- a) Đúng: $100 \cdot 0,93^2 = 86,49$.
- b) Sai: $r = 1 - \sqrt[3]{0,8} \approx 7,17\%$.
- c) Đúng: $0,94^{12} \approx 0,476$.
- d) Sai: $0,94^{11} \approx 0,506 > 0,5$.

Bài 45.

- a) Đúng.
- b) Sai ($[H^+] = 10^{-8}$).
- c) Đúng.
- d) Đúng.

Bài 46.

- a) Đúng.
- b) Đúng.

c) Đúng: $2^{-1/3} \approx 0,7937$.

d) Sai: mất một nửa sau 3 năm (chu kì “bán giá trị”).

Bài 47. $1200 \log_2 \frac{443}{415} \approx 113$ cent.

Bài 48. $r = \frac{\ln 3}{5}$; $100e^{rt} > 10^4 \Leftrightarrow t > \frac{5 \ln 10}{\ln 3} \approx 20,96$: ít nhất **21** giờ.

Bài 49. $k = \frac{1}{10} \ln \frac{67}{42}$; $67e^{-k} = 12 \Leftrightarrow t = \frac{\ln(67/12)}{k} \approx 37$ phút.

Bài 50. $a = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} = \frac{300 \cdot 0,01 \cdot 1,01^{24}}{1,01^{24} - 1} \approx 14,1$ triệu đồng.

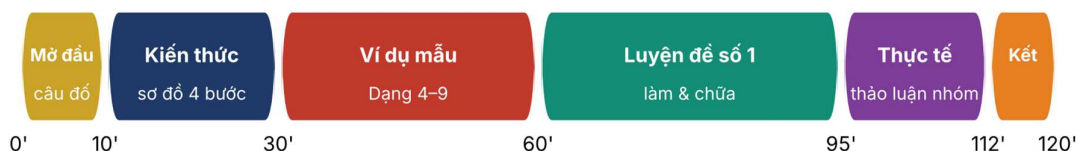
Bài 51. $P(986) = 760e^{-986k} \approx 674$ mmHg.

Bài 52. Sau n tháng: $3 \cdot 1,005 \cdot \frac{1,005^n - 1}{0,005} > 200 \Leftrightarrow n > 57,2$: ít nhất **58** tháng.

PHẦN VII. THIẾT KẾ BUỔI DẠY ÔN THI VÀ ĐỀ LUYỆN TẬP

1. Kế hoạch buổi dạy (120 phút)

Tiến trình một buổi dạy ôn thi 120 phút



Tiến trình buổi dạy ôn thi 120 phút.

Mục tiêu. Sau buổi học, học sinh: (1) hệ thống được các công thức, tính chất và quy trình 4 bước; (2) giải thành thạo 6 dạng toán trọng tâm của đề thi (Dạng 1, 4, 5, 6, 8, 10); (3) làm được đề luyện số 1 trong 45 phút với độ chính xác từ 80% trở lên; (4) biết mô hình hóa bài toán thực tế bằng hàm mũ – logarit.

Chuẩn bị. Giáo viên: máy chiếu (dùng các hình trong chuyên đề), phiếu học tập in Đề luyện số 1, bảng phụ sơ đồ 4 bước (Hình ở Phần II). Học sinh: máy tính cầm tay, ôn lại bảng công thức ở Phần II.

Thời gian	Hoạt động của giáo viên	Hoạt động của học sinh	Tư liệu trong chuyên đề
0' – 10'	Kể chuyện Napier, nêu ba câu đố (gấp giấy, 2^{2026} , chữ số đầu)	Dự đoán, thảo luận nhanh	Mở đầu; Hình gấp giấy
10' – 30'	Hệ thống kiến thức bằng sơ đồ: định nghĩa, 6 quy tắc, hàm số, quy trình 4 bước	Điền khuyết bảng công thức	Phần II, Bảng quy tắc
30' – 60'	Chữa 6 ví dụ mẫu: một ví dụ mỗi dạng 4, 5, 6, 8, 9, 10	Làm theo nhóm đôi, lên bảng trình bày	Ví dụ ở Phần III
60' – 95'	Phát Đề luyện số 1, bấm giờ 30 phút; chữa nhanh 5 phút	Làm bài cá nhân, tự chấm chéo	Đề luyện số 1
95' – 112'	Chia 4 nhóm, mỗi nhóm một bài thực tế (cà phê, vay trả góp, sạc pin, áp suất)	Mô hình hóa, trình bày 2 phút/nhóm	Dạng 10 (tiếp theo)
112' – 120'	Tổng kết sai lầm hay gặp, giao bài về nhà	Ghi chép, nhận nhiệm vụ	Đề luyện số 2; Bài 41 – 52

★ Gợi ý phân hóa.

Nhóm học sinh khá giỏi làm thêm Phần III của Đề luyện số 2 thay cho phần bài thực tế; nhóm học sinh trung bình tập trung vào Phần I – II của Đề luyện số 1. Học sinh dự thi HSG làm Đề luyện số 3 ở nhà (150 phút). Đề luyện số 4 (90 phút) dùng làm bài kiểm tra ở buổi học sau.

2. Đề luyện tập số 1 (mức độ cơ bản – thông hiểu, 45 phút)

Phần I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn (8 câu)

Câu 1. (Sở GD&ĐT Quảng Ninh, thi thử TN THPT 2024 – 2025) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5}(x - 7) + 2 > 0$ là

- A. $(11; +\infty)$. B. $(7; 11)$. C. $(-\infty; 11)$. D. $[7; 11]$.

Câu 2. (Đề thi thử TN THPT 2026) Nghiệm của phương trình $3^{x+1} = 27$ là

- A. $x = 3$. B. $x = 2$. C. $x = 5$. D. $x = 4$.

Câu 3. Với mọi số thực dương a , $\ln(e^2 a) - \ln a$ bằng

- A. 2. B. e^2 . C. $2\ln a$. D. $\ln 2$.

Câu 4. (Đề thi thử TN THPT 2026) Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A. $y = \ln x$. B. $y = \log_3 x$. C. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. D. $y = \log x$.

Câu 5. Tập xác định của hàm số $y = \log_3(x^2 - 4x + 3)$ là

- A. $(1; 3)$. B. $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. C. $\mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$. D. $[1; 3]$.

Câu 6. Đạo hàm của hàm số $y = 2^{x^2}$ là

- A. $y' = x^2 \cdot 2^{x^2-1}$. B. $y' = 2x \cdot 2^{x^2} \ln 2$. C. $y' = 2^{x^2} \ln 2$. D. $y' = \frac{2x \cdot 2^{x^2}}{\ln 2}$.

Câu 7. Số nghiệm của phương trình $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 8. (Đề thi THPT Quốc gia 2017) Đầu năm 2016, ông A thành lập công ty. Tổng tiền lương ông trả cho nhân viên năm 2016 là 1 tỷ đồng; mỗi năm sau tổng tiền lương tăng 15% so với năm trước. Năm đầu tiên tổng tiền lương cả năm lớn hơn 2 tỷ đồng là

- A. Năm 2023. B. Năm 2022. C. Năm 2021. D. Năm 2020.

Phần II. Trắc nghiệm Đúng/Sai (2 câu)

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \log_2(x + 1)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Tập xác định của hàm số là $(-1; +\infty)$.		
b)	$f(7) = 4$.		

	Mệnh đề	Đúng	Sai
c)	$f'(x) = \frac{1}{(x+1)\ln 2}$.		
d)	Bất phương trình $f(x) \leq 3$ có đúng 8 nghiệm nguyên.		

Câu 2. (Theo và Cụm trường THPT số 1 Hà Nội) Cường độ ánh sáng dưới mặt biển giảm theo độ sâu d (mét): $I = I_0 \cdot a^d$. Ở độ sâu 1 m, cường độ bằng 95% cường độ trên mặt nước.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$a = 0,95$.		
b)	Ở độ sâu 10 m, cường độ ánh sáng còn khoảng 59,9% so với trên mặt nước.		
c)	Ở độ sâu 15 m, cường độ ánh sáng còn 15% so với trên mặt nước.		
d)	Muốn đo được cường độ bằng 15% cường độ trên mặt nước, cần lặn sâu khoảng 9,96 m.		

Phần III. Trả lời ngắn (4 câu)

Câu 1. (Đề thi thử TN THPT 2026) Tính tổng các nghiệm của phương trình

$$\log_3(x^2 - 3x + 5) = 1.$$

Câu 2. (Sở GD&ĐT Hà Nội, thi thử TN THPT 2026) Nồng độ thuốc trong máu sau t giờ là

$C(t) = C_0 e^{-rt}$ (mg/L). Ngay sau khi tiêm nồng độ là 15 mg/L, sau 4 giờ còn 10 mg/L. Bác sĩ tiêm liều mới khi nồng độ giảm còn 6 mg/L. Khoảng thời gian nhiều nhất giữa hai lần tiêm là bao nhiêu giờ (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Câu 3. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $3^{x^2-2x} \leq 27$?

Câu 4. (Đề thi THPT Quốc gia 2017) Gửi tiết kiệm với lãi suất 7,2%/năm theo thể thức lãi kép. Sau ít nhất bao nhiêu năm số tiền (cả gốc lẫn lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu?

3. Đề luyện tập số 2 (mức độ vận dụng – vận dụng cao, 60 phút)

Phần I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn (8 câu)

Câu 1. (Đề thi THPT Quốc gia 2018) Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m để phương trình $16^x - m \cdot 4^{x+1} + 5m^2 - 45 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Số phần tử của S là

- A. 13. B. 3. C. 6. D. 4.

Câu 2. (Theo) Giá trị thực của m để phương trình $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 + x_2 = 1$ là

- A. $m = 6$. B. $m = -3$. C. $m = 3$. D. $m = 1$.

Câu 3. (Đề thi TN THPT 2020) Các số thực dương a, b, x, y thỏa $a > 1, b > 1$ và $a^x = b^y = \sqrt{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của $P = x + 2y$ thuộc tập hợp nào?

- A. $(1; 2)$. B. $\left[2; \frac{5}{2}\right)$. C. $[3; 4)$. D. $\left[\frac{5}{2}; 3\right)$.

Câu 4. (Đề thi THPT Quốc gia 2018) Cho phương trình $3^x + m = \log_3(x - m)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-15; 15)$ để phương trình có nghiệm?

- A. 16. B. 9. C. 14. D. 15.

Câu 5. (Đề thi TN THPT 2020) Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn $\log_4(x^2 + y) \geq \log_3(x + y)$?

- A. 55. B. 28. C. 29. D. 56.

Câu 6. (Đề thi THPT Quốc gia 2019) Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn

$$\log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) + \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) = 2. \text{ Giá trị của } a + 2b \text{ bằng}$$

- A. 6. B. 9. C. $\frac{7}{2}$. D. $\frac{5}{2}$.

Câu 7. (Đề thi TN THPT 2020) Xét các số thực không âm x, y thỏa $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 + 6x + 4y$ bằng

- A. $\frac{65}{8}$. B. $\frac{33}{4}$. C. $\frac{49}{8}$. D. $\frac{57}{8}$.

Câu 8. Trong các nghiệm $(x; y)$ của bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x + y) \geq 1$, giá trị lớn nhất của $T = 2x + y$ bằng

- A. $\frac{9}{2}$. B. $\frac{9}{4}$. C. 9. D. $\frac{9}{8}$.

Phần II. Trắc nghiệm Đúng/Sai (2 câu)

Câu 1. (Phát triển từ) Cho phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ (*) với m là tham số.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Với $m = 1$, phương trình (*) vô nghiệm.		
b)	Với $m = 4$, phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1 + x_2 = 3$.		
c)	Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m > 2$.		
d)	Có đúng 3 giá trị nguyên $m \in [-5; 5]$ để phương trình có nghiệm.		

Câu 2. Chi phí quảng cáo A (triệu đồng) làm số sản phẩm bán ra là $q(A) = 1000 + \frac{1013}{3} \ln(1 + A)$; mỗi sản phẩm có chi phí sản xuất 10 triệu đồng và giá bán 20 triệu đồng.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Nếu không quảng cáo thì công ty bán được 1000 sản phẩm.		
b)	Lợi nhuận là $L(A) = 10q(A) - A$ (triệu đồng).		
c)	Lợi nhuận lớn nhất khi chi phí quảng cáo khoảng 3375,7 triệu đồng.		
d)	Lợi nhuận tối đa lớn hơn 35 tỉ đồng.		

Phần III. Trả lời ngắn (4 câu)

Câu 1. (Đề thi TN THPT 2023) Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn

$$\log_3(x^2 + y^2 + x) + \log_2(x^2 + y^2) \leq \log_3 x + \log_2(x^2 + y^2 + 24x)?$$

Câu 2. (Đề thi TN THPT 2020) Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_3(3x + 3) + x = 2y + 9^y$?

Câu 3. (THPT Đào Duy Từ – Thanh Hóa, thi thử TN THPT 2026) Đầu tháng 1 anh Huy gửi 1 tỉ đồng, lãi suất 0,5%/tháng. Từ đầu tháng thứ hai, mỗi tháng anh rút 30 triệu đồng để chi tiêu. Hỏi sau bao nhiêu tháng anh rút hết tiền (tháng cuối có thể rút ít hơn 30 triệu)?

Câu 4. Gọi S là tập các số nguyên y sao cho với mỗi $y \in S$ có đúng 10 số nguyên x thỏa mãn $2^{y-x} \geq \log_3(x + y^2)$. Tính tổng các phần tử của S .

4. Đề luyện tập số 3 – Đề luyện thi học sinh giỏi (tự luận, 150 phút)

Câu 1. (4,0 điểm) Giải phương trình $\log_2 \frac{x^2+x+3}{2x^2+4x+5} = x^2 + 3x + 2$.

Câu 2. (4,0 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2^x - 2^y = y - x \\ x^2 + xy + y^2 = 3. \end{cases}$

Câu 3. (4,0 điểm) Tìm m để phương trình $\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} = m(\log_4 x^2 - 3)$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $[32; +\infty)$.

Câu 4. (4,0 điểm) (Theo [20], Bài toán 4.45) Chứng minh rằng $e^x - e^{-x} \geq 2\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ với mọi $x \geq 0$.

Câu 5. (4,0 điểm)

a) Chứng minh $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ với mọi số nguyên dương n .

b) Suy ra $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ và tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

5. Đáp án và hướng dẫn giải các đề luyện tập**Đề số 1**

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
Đáp án	B	B	A	C	B	B	C	C

Phần II.**Câu 1.**

- a) Đúng
b) Sai ($f(7) = 3$)
c) Đúng
d) Đúng ($-1 < x \leq 7: x \in \{0; \dots; 7\}$).

Câu 2.

- a) Đúng
b) Đúng ($0,95^{10} \approx 0,599$)
c) Sai ($0,95^{15} \approx 0,463$)
d) Sai ($d = \log_{0,95} 0,15 \approx 37$ m).

Phần III.**Câu 1. 3.****Câu 2. 9.**

Câu 3. $x^2 - 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$: 5 số.

Câu 4. 10.

Hướng dẫn Câu 8 (Phần I): $1,15^n > 2 \Leftrightarrow n > \log_{1,15} 2 \approx 4,96$, nên $n = 5$: năm $2016 + 5 = 2021$.

Đề số 2

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
Đáp án	B	C	D	C	D	C	A	A

Hướng dẫn Phần I.

Câu 1. $t = 4^x > 0$: $t^2 - 4mt + 5m^2 - 45 = 0$ cần hai nghiệm dương phân biệt: $45 - m^2 > 0$, $m > 0$, $5m^2 > 45 \Rightarrow m \in \{4; 5; 6\}$.

Câu 3. xem Bài 21 (Phần VI), $P_{\min} = \frac{3}{2} + \sqrt{2} \approx 2,91$.

Câu 4. $m = x - 3^x \leq -0,996$.

Câu 5. xem Bài 25.

Câu 6. xem Ví dụ ở Dạng 7.

Câu 7. xem Bài 28.

Câu 8. xem Bài 30.

Phần II.

Câu 1.

a) Đúng ($t^2 - 2t + 2 = 0$ vô nghiệm)

b) Đúng ($t_1 t_2 = 8$)

c) Đúng ($\Delta' = m^2 - 2m > 0, S = 2m > 0, P = 2m > 0$)

d) Sai: phương trình có nghiệm khi $m < 0$ (tích hai nghiệm âm, luôn có một nghiệm dương) hoặc $m \geq 2$, nên có 9 giá trị.

Câu 2.

a) Đúng

b) Đúng

c) Đúng

d) Sai ($L_{\max} \approx 34,06$ tỉ).

Phần III.

Câu 1. 48.

Câu 2. 4.

Câu 3. $n = \log_{1,005} \frac{30}{30-5} \approx 36,6$: 37.

Câu 4. hàm $f(x) = 2^{y-x} - \log_3(x + y^2)$ nghịch biến theo x ; có đúng 10 số nguyên x khi $f(-y^2 + 10) \geq 0 > f(-y^2 + 11)$, dẫn tới $y \in \{-4; 3\}$: tổng -1.

Đề số 3 (thang điểm 20)

Câu 1. Nhận xét $(2x^2 + 4x + 5) - (x^2 + x + 3) = x^2 + 3x + 2$, nên phương trình

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 + x + 3) + (x^2 + x + 3) = \log_2(2x^2 + 4x + 5) + (2x^2 + 4x + 5).$$

Hàm $g(t) = \log_2 t + t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

nên $x^2 + x + 3 = 2x^2 + 4x + 5 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; -2\}$ (cả hai biểu thức dưới logarit luôn dương).

Câu 2. Phương trình đầu $\Leftrightarrow 2^x + x = 2^y + y$. Hàm $h(t) = 2^t + t$ đồng biến nên $x = y$.

Thay vào: $3x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Nghiệm $(1; 1), (-1; -1)$.

Câu 3. Đặt $t = \log_2 x \geq 5$. Phương trình thành $\sqrt{t^2 - 2t - 3} = m(t - 3) \Leftrightarrow \sqrt{(t - 3)(t + 1)} = m(t - 3)$. Vì $t - 3 > 0$: $m = \sqrt{\frac{t+1}{t-3}} = \sqrt{1 + \frac{4}{t-3}}$. Khi $t \in [5; +\infty)$, $1 + \frac{4}{t-3} \in (1; 3]$. Vậy $m \in (1; \sqrt{3}]$.

Câu 4. Xét $f(x) = e^x - e^{-x} - 2\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ trên $[0; +\infty)$: $f'(x) = e^x + e^{-x} - \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$. Vì $e^x + e^{-x} \geq 2 \geq \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$ nên $f'(x) \geq 0$, f đồng biến, $f(x) \geq f(0) = 0$.

Câu 5. a) $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \int_n^{n+1} \frac{dt}{t}$ và $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{t} < \frac{1}{n}$ trên $(n; n+1)$. (Có thể chứng minh bằng khảo sát hàm $\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$ và $x - \ln(1+x)$.) b) Nhân bất đẳng thức bên phải với n : $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$; nhân bất đẳng thức bên trái với $n+1$: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > e$. Do đó $e\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$; theo nguyên lí kẹp, giới hạn bằng e .

6. Phiếu học tập dùng trong buổi dạy

Giáo viên in phiếu này phát cho học sinh ở phút thứ 10 – 30 (hệ thống kiến thức). Học sinh điền vào chỗ trống, sau đó đối chiếu với bảng quy tắc ở Phần II.

STT	Nội dung cần điền	Học sinh điền
1	$\log_a b = \alpha \Leftrightarrow \dots\dots\dots$ (điều kiện: $\dots\dots\dots$)	
2	$\log_a(b_1 b_2) = \dots\dots\dots$; $\log_a \frac{b_1}{b_2} = \dots\dots\dots$	
3	$\log_a b^\alpha = \dots\dots\dots$; $\log_{a^\beta} b = \dots\dots\dots$	
4	Công thức đổi cơ số: $\log_a b = \dots\dots\dots$	
5	$(a^x)' = \dots\dots\dots$; $(\log_a x)' = \dots\dots\dots$; $(\ln u)' = \dots\dots\dots$	
6	$y = a^x$ đồng biến khi $\dots\dots\dots$, nghịch biến khi $\dots\dots\dots$	
7	$\log_a f(x) > \log_a g(x)$ với $0 < a < 1 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$	
8	Bốn công cụ giải phương trình mũ – logarit: $\dots\dots\dots$	
9	Lãi kép: $T_n = \dots\dots\dots$; chu kì bán rã: $m(t) = \dots\dots\dots$	
10	Số chữ số của số nguyên dương N là $\dots\dots\dots$	

7. Đề luyện tập số 4 – Đề tổng hợp theo cấu trúc đề thi TN THPT (90 phút)

Đề gồm 12 câu trắc nghiệm nhiều phương án, 4 câu Đúng/Sai và 6 câu trả lời ngắn, đúng cấu trúc đề thi tốt nghiệp THPT môn Toán từ năm 2025, nhưng giới hạn trong chủ đề mũ – logarit. Đề do người biên soạn soạn mới để giáo viên dùng kiểm tra sau buổi ôn tập.

Phần I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn (12 câu)**Câu 1.** Với mọi số thực dương a , $\log_2(4a) - \log_2 a$ bằng

- A. 2. B. 4. C. $\log_2(3a)$. D. $2a$.

Câu 2. Nghiệm của phương trình $5^{x-2} = 25$ là

- A. $x = 2$. B. $x = 3$. C. $x = 4$. D. $x = 5$.

Câu 3. Tập xác định của hàm số $y = \ln(2 - x)$ là

- A. $(2; +\infty)$. B. $(-\infty; 2)$. C. $(-\infty; 2]$. D. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Câu 4. Đạo hàm của hàm số $y = e^{3x}$ là

- A. $y' = e^{3x}$. B. $y' = 3e^{3x}$. C. $y' = \frac{1}{3}e^{3x}$. D. $y' = 3xe^{3x-1}$.

Câu 5. Cho $a > 0$, $a \neq 1$ và $\log_a b = 2$. Giá trị của $\log_a(a^2 b^3)$ bằng

- A. 8. B. 12. C. 6. D. 7.

Câu 6. Tập nghiệm của bất phương trình $2^x < 8$ là

- A. $(3; +\infty)$. B. $(-\infty; 3)$. C. $(0; 3)$. D. $(-\infty; 3]$.

Câu 7. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = 0,9^x$. B. $y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$. C. $y = (\sqrt{2})^x$. D. $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$.

Câu 8. Nghiệm của phương trình $\log_3(x+2) = \log_3(2x-1)$ là

- A. $x = 1$. B. $x = 3$. C. $x = -3$. D. $x = 5$.

Câu 9. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x - \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; e\right]$ là

- A. 1. B. $e - 1$. C. $\frac{1}{2} + \ln 2$. D. 0.

Câu 10. Phương trình $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tích $x_1 x_2$ bằng

- A. 6. B. 8. C. 3. D. 2.

Câu 11. Biết $\log 5 \approx 0,69897$. Số 5^{2026} có bao nhiêu chữ số?

- A. 1416. B. 1417. C. 1418. D. 2026.

Câu 12. Một người gửi 200 triệu đồng với lãi suất 6%/năm theo thể thức lãi kép. Sau ít nhất bao nhiêu năm người đó có nhiều hơn 300 triệu đồng?

- A. 6. B. 7. C. 8. D. 9.

Phần II. Trắc nghiệm Đúng/Sai (4 câu)**Câu 1.** Cho hai hàm số $f(x) = 3^x$ và $g(x) = \log_3 x$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Đồ thị hai hàm số đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.		
b)	$f(2) + g(9) = 11$.		

	Mệnh đề	Đúng	Sai
c)	Phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm.		
d)	$f'(0) = \ln 3$.		

Câu 2. Cho phương trình $4^x - (m + 1) \cdot 2^x + m = 0$ (*), m là tham số.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Với $m = 2$, phương trình có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 1$.		
b)	$x = 0$ là nghiệm của (*) với mọi m .		
c)	Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m > 0$ và $m \neq 1$.		
d)	Với $m = 8$, tổng hai nghiệm của phương trình bằng 4.		

Câu 3. Nồng độ một loại thuốc trong máu sau t giờ kể từ khi uống là $C(t) = 20 \cdot 0,8^t$ (mg/L).

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Nồng độ thuốc ban đầu là 20 mg/L.		
b)	Sau 2 giờ, nồng độ thuốc là 12,8 mg/L.		
c)	Mỗi giờ nồng độ thuốc giảm 20% so với giờ trước.		
d)	Sau 8 giờ, nồng độ thuốc đã xuống dưới 3 mg/L.		

Câu 4. Mức cường độ âm $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$ (dB), với $I_0 = 10^{-12}$ W/m².

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Âm có cường độ $I = 10^{-6}$ W/m ² thì có mức cường độ 60 dB.		
b)	Mức cường độ âm tăng 10 dB thì cường độ âm tăng 10 lần.		
c)	Hai loa giống nhau, mỗi loa 80 dB, cùng phát thì mức cường độ âm là 160 dB.		
d)	Muốn giảm mức cường độ âm từ 90 dB xuống 80 dB thì phải giảm cường độ âm đi 90%.		

Phần III. Trả lời ngắn (6 câu)

Câu 1. Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) \geq -3$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

Câu 2. Tính tích các nghiệm của phương trình $3^{x^2-4x+5} = 9$.

Câu 3. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-10; 10)$ để phương trình $4^x - 2^{x+1} + m = 0$ có nghiệm?

Câu 4. Bà Mai gửi 500 triệu đồng, lãi suất 0,5%/tháng, lãi nhập vốn hằng tháng. Cuối mỗi tháng (sau khi tính lãi) bà rút 5 triệu đồng. Sau 12 tháng, trong tài khoản còn bao nhiêu triệu đồng (làm tròn đến hàng phần mười)?

Câu 5. Dung dịch A có pH bằng 3,2, dung dịch B có pH bằng 5,5. Nồng độ ion H^+ của dung dịch A gấp bao nhiêu lần dung dịch B (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Câu 6. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $1 \leq x \leq 100$ và $2^y + y = x + \log_2 x$?

Đáp án Đề số 4

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	A	C	B	B	A	B	C	B	A	B	B	B

Phần II.**Câu 1.**

- a) Đúng
b) Đúng ($9 + 2$)
c) Sai (vì $3^x > x > \log_3 x$ với mọi $x > 0$)
d) Đúng.

Câu 2.

- a) Đúng
b) Đúng ($1 - (m + 1) + m = 0$)
c) Đúng (hai nghiệm $2^x = 1$ và $2^x = m$)
d) Sai (hai nghiệm 0 và 3, tổng bằng 3).

Câu 3.

- a) Đúng
b) Đúng
c) Đúng
d) Sai ($C(8) \approx 3,36$; cần $t > \log_{0,8} 0,15 \approx 8,5$, tức sau 9 giờ).

Câu 4.

- a) Đúng
b) Đúng
c) Sai (≈ 83 dB)
d) Đúng (cường độ còn $\frac{1}{10}$).

Phần III.

Câu 1. $0 < x - 1 \leq 8 \Leftrightarrow 1 < x \leq 9$: **8**.

Câu 2. $x^2 - 4x + 3 = 0$: tích **3**.

Câu 3. $t^2 - 2t + m = 0$ có nghiệm dương $\Leftrightarrow m \leq 1$: $m \in \{-9; \dots; 1\}$, có **11** giá trị.

Câu 4. $500 \cdot 1,005^{12} - 5 \cdot \frac{1,005^{12} - 1}{0,005} \approx$ **469,2**.

Câu 5. $10^{5,5-3,2} = 10^{2,3} \approx$ **200**.

Câu 6. vế phải $= 2^{\log_2 x} + \log_2 x$; hàm $2^t + t$ đồng biến nên $y = \log_2 x$, $x = 2^y \in [1; 100]$:
 $y \in \{0; \dots; 6\}$, có **7** cặp.

LỜI KẾT

Từ chiếc bảng hai dòng của Stifel, qua hai mươi năm tính toán của Napier, những đêm khai căn của Briggs, đến định nghĩa gọn gàng của Euler, logarit đã đi một hành trình dài để trở thành dòng chữ ngắn ngủi trong sách giáo khoa: $\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b$.

Đằng sau dòng chữ ấy là một ý tưởng đã thay đổi khoa học: *biến phép nhân thành phép cộng, biến tăng trưởng thành đường thẳng, biến những con số khổng lồ thành những con số vừa tầm tay.*

Khi gặp một bài toán mũ – logarit, hãy nhớ bốn câu hỏi: *Điều kiện là gì? Có đưa về cùng cơ số được không? Có biểu thức nào lặp lại để đặt ẩn phụ? Hai vế có cùng “hình dạng” để dùng hàm đặc trưng không?* Và khi gặp một hiện tượng ngoài đời tăng hay giảm “theo tỉ lệ”, từ cốc cà phê nguội dần, khoản vay trả góp, đến viên pin đang sặc, hãy hỏi thêm câu hỏi của chính logarit: *phải nhân bao nhiêu lần?*

Chúc các em học sinh tìm thấy niềm vui trong từng con số, và chúc quý thầy cô có thêm tư liệu để kể cho học trò nghe câu chuyện đẹp này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Nguyễn Viết Hiếu (2013), *Vấn đề dạy học logarit trong chương trình Toán phổ thông và những điều cần biết về logarit*, Tạp chí Khoa học ĐHSP TP. Hồ Chí Minh, số 50.
- [2] The Math Doctors, *Where Do Logarithms Come From?*, themathdoctors.org/where-do-logarithms-come-from/.
- [3] E. Maor (1994), *e: The Story of a Number*, Princeton University Press.
- [4] J. Napier (1614), *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, Edinburgh.
- [5] H. Briggs (1624), *Arithmetica Logarithmica*, London.
- [6] L. Euler (1748), *Introductio in analysin infinitorum*, Lausanne.
- [7] V. J. Katz (2009), *A History of Mathematics: An Introduction*, 3rd ed., Addison-Wesley.
- [8] J. Stillwell (2010), *Mathematics and Its History*, 3rd ed., Springer.
- [15] Art of Problem Solving, *AIME Problems and Solutions*: 1983 Problem 1; 1988 Problem 3; 2020 I Problem 2; 2020 II Problem 3, artofproblemsolving.com/wiki.
- [16] F. Benford (1938), *The law of anomalous numbers*, Proceedings of the American Philosophical Society 78(4), 551–572.
- [17] C. F. Richter (1935), *An instrumental earthquake magnitude scale*, Bulletin of the Seismological Society of America 25(1), 1–32.
- [19] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya (1934), *Inequalities*, Cambridge University Press.
- [19] *Mũ và logarit trong các đề thi tốt nghiệp THPT Quốc gia và các đề thi thử từ năm*
- [20] *Tuyển chọn câu hỏi phương trình hàm mũ, logarit trích từ đề thi thử TN THPT 2026 các trường*, Sở giáo dục.