

HÀM SỐ

TÓM TẮT LÝ THUYẾT VÀ CÔNG THỨC HỖ TRỢ

Tiến Nhanh biên soạn và sưu tầm
Bản demo soạn bằng LATEX

1. Nhắc lại kiến thức

1.1. Quy tắc và công thức tính đạo hàm.

Cho $u = u(x); v = v(x)$; k là hằng số.

- Tổng, hiệu:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

- Tích:

$$(u.v)' = u'.v + u.v'$$

- Thương:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}; (v \neq 0) \Rightarrow \left(\frac{k}{v}\right)' = -\frac{k}{v^2}$$

- Hàm hợp: Nếu $y = y(u); u = u(x) \Rightarrow y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

- Bảng công thức đạo hàm.

Đạo hàm của hàm sơ cấp	Đạo hàm của hàm hợp
$C' = 0$ (C là hằng số)	
$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\left(\frac{1}{x^2}\right), (x \neq 0)$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\left(\frac{u'}{u^2}\right), (u \neq 0)$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(\cot^2 x + 1)$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$ $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$ $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ $(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$	$(e^u)' = u' \cdot e^u$ $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln(a)$ $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln(a)}$

- **Đạo hàm cấp 2:** $f''(x) = [f'(x)]'$.

Ý nghĩa: Gia tốc tức thời của chuyển động $s = f(t)$ tại thời điểm t_0 là $a(t_0) = f''(t_0)$

- **Công thức tính nhanh đạo hàm của hàm phân thức**

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}; \left(\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}\right)' = \frac{(ae-bd).x^2 + 2(af-dc).x + (bf-ce)}{(dx^2+ex+f)^2}$$

1.2. Dấu của tam thức bậc 2.

Cho tam thức bậc 2: $y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$. Ta cần nhớ các kết quả sau:

1. $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

2. $f(x) > 0, \forall x \in (\alpha; +\infty)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \begin{cases} f(x) = 0 \text{ vô nghiệm} \\ f(x) = 0 \text{ có nghiệm } x_1 \leq x_2 \leq \alpha \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) \geq 0 \\ S/2 \leq \alpha \end{cases}$$

3. $f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; \alpha)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \begin{cases} f(x) = 0 \text{ vô nghiệm} \\ f(x) = 0 \text{ có nghiệm } \alpha \leq x_1 \leq x_2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) \geq 0 \\ S/2 \geq \alpha \end{cases}$$

Tương tự cho điều kiện $f(x) < 0, f(x) \geq 0, \dots$

2. Tính đơn điệu của hàm số.

2.1. Định nghĩa

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$

- $y = f(x)$ đồng biến (tăng) trên $(a; b) \Leftrightarrow \forall x_1 < x_2 \in (a; b) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- $y = f(x)$ nghịch biến (giảm) trên $(a; b) \Leftrightarrow \forall x_1 < x_2 \in (a; b) \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

2.2. Định lí

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$

- $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in (a; b)$. Dấu " $=$ " xảy ra tại một số hữu hạn điểm $\in (a; b)$.
- $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a; b) \Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in (a; b)$. Dấu " $=$ " xảy ra tại một số hữu hạn điểm $\in (a; b)$.
- Nếu $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì $\underset{[a; b]}{\text{Min}} f(x) = f(a)$ và $\underset{[a; b]}{\text{Max}} f(x) = f(b)$.
- Nếu $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì $\underset{[a; b]}{\text{Min}} f(x) = f(b)$ và $\underset{[a; b]}{\text{Max}} f(x) = f(a)$.

2.3. Chú ý:

Dấu của đa thức bậc n :

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

- Mỗi đa thức chỉ đổi dấu tại nghiệm đơn và bội lẻ. Tại các nghiệm bội chẵn đa thức **không** đổi dấu.
- Dấu vùng cuối cùng (là vùng từ nghiệm lớn nhất đến $+\infty$) luôn cùng dấu với hệ số bậc cao nhất a_n .

2.4. Bài toán: Tìm điều kiện tham số để hàm số đơn điệu.

∇. Tìm m để hàm số đồng biến (tương tự nghịch biến) trên $(a; b)$.

Ta có: hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b) \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (a; b) \\ \text{Dấu "=" xảy ra tại hữu hạn điểm.} \end{cases}$

Đối với hàm đa thức bậc n liên tục trên $(a; b)$

- Bỏ điều kiện dấu " $=$ "
- Giải điều kiện $y' \geq 0$
 - Dùng tam thức bậc 2, (*)
 - Hoặc giải bất phương trình nghiệm
 - Hoặc rút m về một vế, xét hàm số (áp dụng cho tất cả các loại hàm số mà có m đồng bậc)...

Hàm số bậc 3

Hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0) \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$	
Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$	Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

Tìm m để hàm số bậc ba đơn điệu trên một khoảng có độ dài l xác định:

- Bước 1: Tính $y' = f'(x; m) = 3ax^2 + bx + c$
- Bước 2: Hàm số đơn điệu trên khoảng $(x_1; x_2) \Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases} (*)$
- Bước 3: Hàm số đơn điệu trên khoảng có độ dài $l: \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = l \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = l^2 \Leftrightarrow S^2 + 4P = l^2 (**).$
- Bước 4: Giải $(*)$ và $(**)$ ta được giá trị m cần tìm.

3. Cực trị của hàm số.

3.1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{K}$ và $x_o \in \mathbb{K}$.

- Nếu có $(a; b) \in \mathbb{K}$ và $x_o \in (a; b)$ sao cho $\forall x \in (a; b) : x \neq x_o \Rightarrow f(x) < f(x_o)$ thì hàm f đạt cực đại tại x_o . Lúc đó:
 - + x_o gọi là **điểm cực đại** của hàm f .
 - + $f(x_o)$ gọi là **giá trị cực đại** của hàm f . Kí hiệu $f(x_o) = y_{\max} (\neq \text{Max } y)$
 - + Điểm $(x_o; f(x_o))$ gọi là **điểm cực đại** của **đồ thị hàm số**.
- Nếu thay $f(x) < f(x_o)$ thành $f(x) > f(x_o)$ thì ta có khái niệm **cực tiểu**.
- Điểm cực đại, điểm cực tiểu gọi chung là điểm cực trị của hàm số.

- **Nhắc lại:**

- Ta có: $f'(x_o)$ là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số f tại điểm có hoành độ x_o .
- Đồ thị của hàm f bị đứt tại điểm nào thì hàm f gián đoạn tại hoành độ của điểm đó.
- Đồ thị của hàm f bị gãy tại điểm nào thì hàm f không có đạo hàm tại hoành độ của điểm đó.

Suy ra:

Nếu hàm f đạt cực trị tại x_o thì $\begin{cases} f'(x_o) = 0 \\ f'(x_o) \text{ không tồn tại} \end{cases}$

3.2. Định lí 1:

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_o . Nếu hàm f đạt cực trị tại x_o thì $f'(x_o) = 0$.

Nếu $f'(x_o) = 0$ thì chưa chắc hàm f đạt cực trị tại x_o .

3.3. Định lí 2:

Cho hàm $y = f(x)$ liên tục trong $(a; b)$ và $x_o \in (a; b)$:

- Khi x qua x_o hàm f đổi dấu từ dương sang âm thì hàm f đạt cực đại tại x_o .
- Khi x qua x_o hàm f đổi dấu từ âm sang dương thì hàm f đạt cực tiểu tại x_o .

3.4. Cực trị của hàm đa thức bậc ba

Hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0) \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$	
Nếu $\Delta' = b^2 - 3ac > 0$ thì hàm số có hai điểm cực trị	Nếu $\Delta' = b^2 - 3ac \leq 0$ thì hàm số không có cực trị.
Hàm số có hai cực trị trái dấu: $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu $\Leftrightarrow$ $ac < 0$	Hàm số có hai cực trị cùng dấu: $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \Delta'_{y'} = b^2 - 3ac > 0 \\ P = x_1x_2 = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$
Hàm số có hai cực trị cùng dấu dương: $\Leftrightarrow$ phương trình y' có hai nghiệm phân biệt cùng dấu dương $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \Delta'_{y'} = b^2 - 3ac > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \\ P = x_1x_2 = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$	Hàm số có hai cực trị cùng dấu âm: $\Leftrightarrow$ phương trình y' có hai nghiệm phân biệt cùng dấu âm $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \Delta'_{y'} = b^2 - 3ac > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0 \\ P = x_1x_2 = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$
Hàm số có hai cực trị $x_1; x_2$ thỏa $\alpha < x_1 < x_2$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \\ x_1 + x_2 > 2\alpha \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 2\alpha \end{cases}$	Hàm số có hai cực trị $x_1; x_2$ thỏa $x_1 < x_2 < \alpha$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \\ x_1 + x_2 < 2\alpha \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 2\alpha \end{cases}$
Hàm số có hai cực trị $x_1; x_2$ thỏa $x_1 < \alpha < x_2$ $\Leftrightarrow (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0$ $\Leftrightarrow x_1x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 < 0$	Phương trình bậc 3 có ba nghiệm lập thành 1 cấp số cộng khi có 1 nghiệm $x = \frac{-b}{3a}$, có 3 nghiệm lập thành 1 cấp số nhân khi $x = -\sqrt[3]{\frac{d}{a}}$

- Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số bậc ba:

$$g(x) = \left(\frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a} \right)x + d - \frac{bc}{9a}$$

- Đồ thị hàm số luôn cắt trục hoành ít nhất tại 1 điểm và nhận điểm uốn $(x_o; y(x_o))$ làm tâm đối xứng, với $y''(x_o) = 0$
- Điều kiện để đồ thị hàm số bậc ba có hai điểm cực trị nằm cùng phía, khác phía với một đường thẳng.

Tổng quát: Cho đường thẳng $d : ax + by + c = 0$ hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$.	
• Nếu $(ax_A + by_A + c)(ax_B + by_B + c) > 0$ thì hai điểm A, B nằm cùng phía so với d. • Nếu $(ax_A + by_A + c)(ax_B + by_B + c) < 0$ thì hai điểm A, B nằm hai phía so với d...	
• Hai điểm cực trị nằm một phía đối với Oy $\Leftrightarrow$ Hàm số có hai cực trị cùng dấu.	• Hai điểm cực trị nằm hai phía đối với Oy $\Leftrightarrow$ Hàm số có hai cực trị trái dấu.
• Hai điểm cực trị nằm một phía đối với Ox $\Leftrightarrow$ Hàm số có hai cực trị và $y_{CD} \cdot y_{CT} > 0$.	• Hai điểm cực trị nằm hai phía đối với Ox $\Leftrightarrow$ Hàm số có hai cực trị và $y_{CD} \cdot y_{CT} < 0$
• Hai điểm cực trị cùng nằm phía trên của trục Ox $\Leftrightarrow$ Hàm số có hai cực trị và $\begin{cases} y_{CD} \cdot y_{CT} > 0 \\ y_{CD} + y_{CT} > 0 \end{cases}$	• Hai điểm cực trị cùng nằm phía dưới của trục Ox $\Leftrightarrow$ Hàm số có hai cực trị và $\begin{cases} y_{CD} \cdot y_{CT} > 0 \\ y_{CD} + y_{CT} < 0 \end{cases}$

3.5. Cực trị của hàm bậc bốn trùng phương.

Hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0) \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 2bx$	
• Hàm số có 1 cực trị $\Leftrightarrow ab \geq 0$	• Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$
• Hàm số có 1 cực trị và cực trị là cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$	• Hàm số có 1 cực tiểu và 2 cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$
• Hàm số có 1 cực trị và cực trị là cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$	• Hàm số có 2 cực tiểu và 1 cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$
Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số và $A \in Oy$, (Với $ab < 0$. Tam giác ABC luôn cân tại A .) Với $A(0; c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$	
• Gọi $\widehat{BAC} = \alpha$, ta có $\cos \alpha = \frac{b^3 - 8a}{b^3 + 8a}$	• Diện tích tam giác ABC là $S = \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}$
• Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = \frac{b^3 - 8a}{8 a b}$	• Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác tam giác ABC là $r = \frac{b^2}{4 a \left(1 + \sqrt{a - \frac{b^3}{8a}}\right)}$
• $B, C \in Ox$ dùng công thức $b^2 - 4ac = 0$	• $BC = m_0$ dùng công thức $am_0^2 + 2b = 0$
• $AB = AC = n_0$ dùng công thức: $16a^2n_0^2 - b^4 + 8ab = 0$	• $BC = kAB = kAC$ dùng công thức: $b^3k^2 - 8a(k^2 - 4) = 0$

3.6. Cực trị của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

▽ Bài toán: Tìm cực trị hàm số

Để tìm cực trị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối ta thực hiện theo các bước sau:

- * **Bước 1:** Tìm miền xác định của hàm số
- * **Bước 2:** Biến đổi hàm số về dạng:

$$y = \begin{cases} f_1(x) & \text{với } x \in D_1 \\ \dots \\ f_k(x) & \text{với } x \in D_k \end{cases}$$

* **Bước 3:** Đạo hàm:

$$y' = \begin{cases} f'_1(x) & \text{với } x \in D_1 \setminus \{x | f_1(x) = 0\} \\ \dots \\ f'_k(x) & \text{với } x \in D_k \setminus \{x | f_k(x) = 0\} \end{cases}, y' = 0 \Rightarrow \text{Nghịệm (nếu có)}.$$

* **Bước 4:** Lập BBT rồi kết luận.

▽ Bài toán: Điều kiện để hàm số có cực trị

Thực hiện phép xét dấu các biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối đưa bài toán về các trường hợp riêng.

3.7. Cực trị của hàm lượng giác

▽ Bài toán: Tìm cực trị hàm số

Để tìm cực trị hàm số lượng giác ta thực hiện theo các bước sau:

* **Bước 1:** Tìm miền xác định của hàm số

* **Bước 2:** Tính y' , giải phương trình $y' = 0$, giả sử có nghiệm $x = x_0$

* **Bước 3:** Ta xác định:

- Tính đạo hàm y''
- Tính $y''(x_0)$ rồi đưa ra kết luận

▽ Bài toán: Điều kiện để hàm số có cực trị

Để thực hiện các yêu cầu về điều kiện có cực trị của hàm số lượng giác, ta thực hiện theo các bước sau:

* **Bước 1:** Ta có:

- Miền xác định D
- Đạo hàm y' và y''

* **Bước 2:** Với các yêu cầu:

- a. Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow$ hệ sau có nghiệm thuộc D : $\begin{cases} y' = 0 \\ y'' \neq 0 \end{cases}$
- b. Hàm số có cực tiểu $\Leftrightarrow$ hệ sau có nghiệm thuộc D : $\begin{cases} y' = 0 \\ y'' > 0 \end{cases}$
- c. Hàm số có cực đại $\Leftrightarrow$ hệ sau có nghiệm thuộc D : $\begin{cases} y' = 0 \\ y'' < 0 \end{cases}$

Chú ý: Nếu xét được dấu y' , ta nên sử dụng điều kiện có cực trị dựa trên sự thay đổi dấu của y'

4. Giá trị lớn nhất-Giá trị nhỏ nhất của hàm số

4.1. Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D

- Nếu $\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D \text{ sao cho } f(x_0) = M \end{cases}$ thì $\text{Max}_{x \in D} f(x) = M(\text{GTLN})$
- Nếu $\begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D \text{ sao cho } f(x_0) = m \end{cases}$ thì $\text{Min}_{x \in D} f(x) = m(\text{GTNN})$

4.2. Định lý

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trong $[a; b]$:

- $\text{Max}_{[a; b]} f(x) = \text{Max}\{f(a), f(b), f(x_0)\}$ với $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ x_0 \in [a; b] \end{cases}$
- $\text{Min}_{[a; b]} f(x) = \text{Min}\{f(a), f(b), f(x_0)\}$ với $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ x_0 \in [a; b] \end{cases}$

4.3. Chú ý

- Với yêu cầu **tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số** thì ta lập BBT rồi kết luận.
- Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ xét trên $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ thì **không** tồn tại GTLN-GTNN.
- Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$ xét trên $\mathbb{R}$ thì **không** tồn tại GTLN-GTNN.
- Hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ trên $\mathbb{R}$:
 - Khi $a < 0$ thì hàm số đạt GTLN bằng Giá trị cực đại của hàm số.
 - Khi $a > 0$ thì hàm số đạt GTNN bằng Giá trị cực tiểu của hàm số.

5. Tiệm cận của đồ thị hàm số

5.1. Định nghĩa

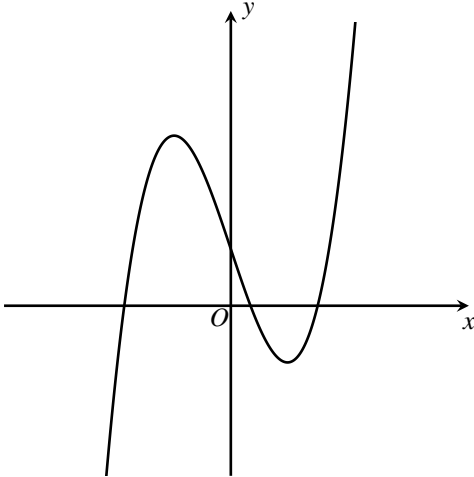
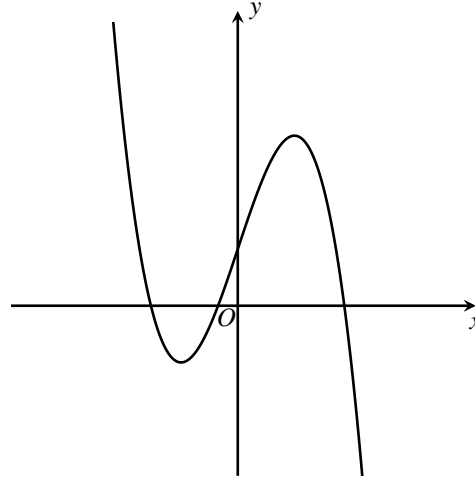
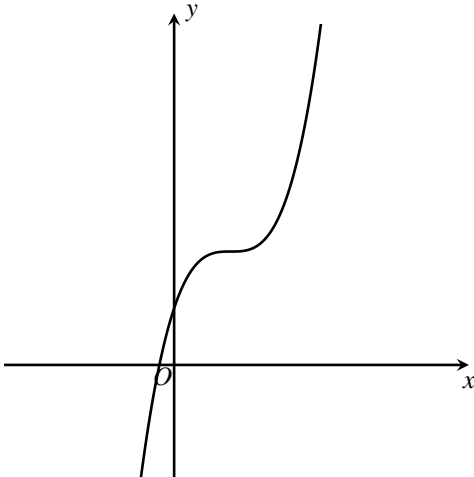
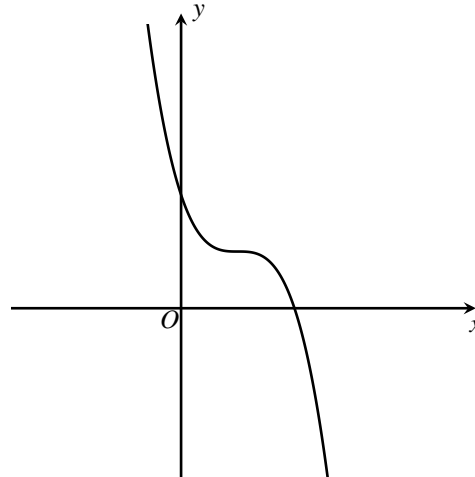
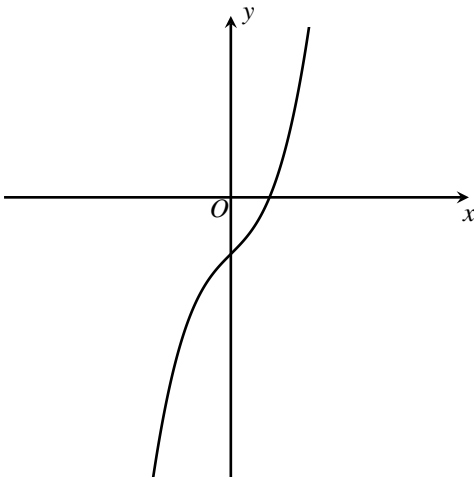
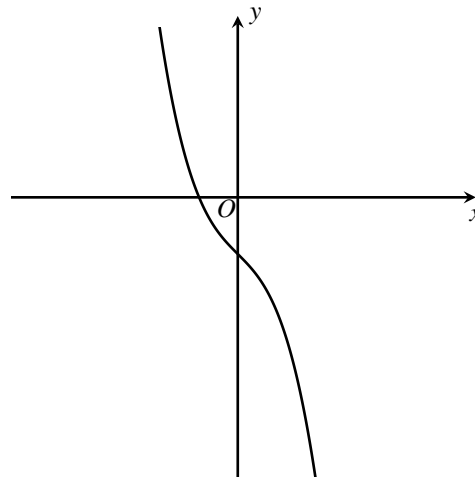
- Đường thẳng $x = a$ là TCD của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu một trong các điều kiện sau được thỏa mãn: $\lim_{x \rightarrow a^+} y = \pm\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow a^-} y = \pm\infty$.
- Đường thẳng $y = b$ là TCN của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu một trong các điều kiện sau thỏa mãn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = b$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = b$

5.2. Chú ý

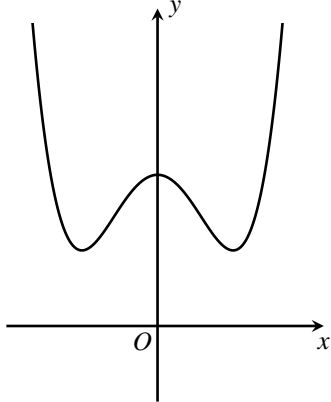
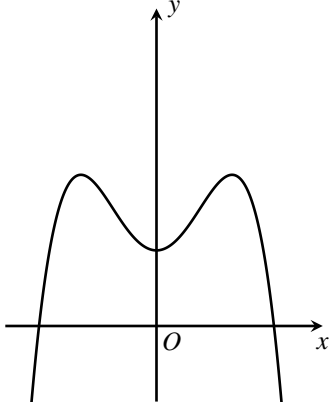
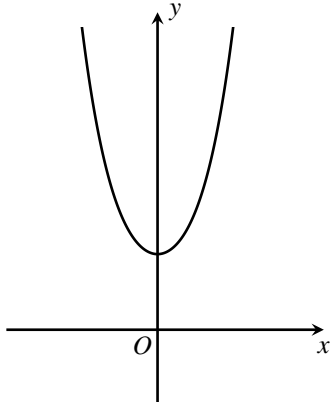
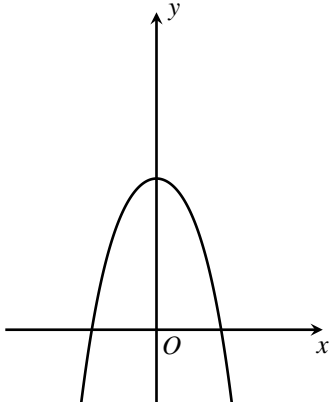
- Đối với hàm phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ luôn có TCD $x = -\frac{d}{c}$ và TCN $y = \frac{a}{c}$.
- Hàm phân thức có bậc tử nhỏ hơn hoặc bằng bậc mẫu thì có TCN.
- Hàm phân thức có nghiệm của mẫu không là nghiệm của tử thì có TCD.
- Hàm căn thức dạng: $y = \sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$ hoặc $y = \sqrt{f(x)} - g(x)$.. có TCN. (Dùng liên hợp)

6. Khảo sát hàm số

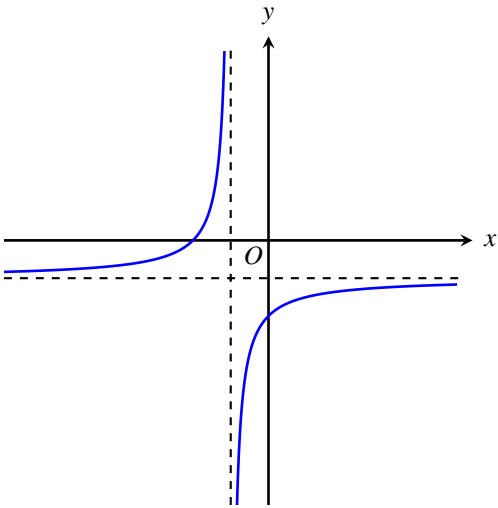
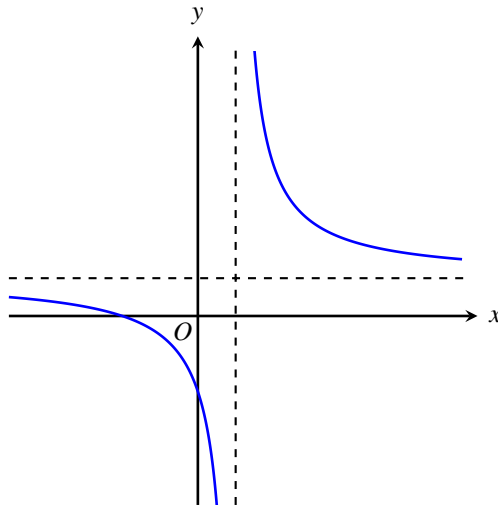
6.1. Hàm số bậc ba

Hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$		
Trường hợp	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép		
Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm		
Nhận xét: Đồ thị hàm số luôn có một điểm uốn và nhận điểm uốn làm tâm đối xứng.		

6.2. Hàm số bậc bốn trùng phương

Hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$		
Trường hợp	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có một nghiệm		
Nhận xét: Đồ thị hàm số luôn nhận Oy làm trục đối xứng.		

6.3. Hàm số bất biến

Hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, (c \neq 0, ad-bc \neq 0)$	
$ad-bc > 0$	$ad-bc < 0$
	
Nhận xét: Đồ thị của hàm số là một hyperbol nhận giao điểm của hai tiệm cận làm tâm đối xứng.	

6.4. Hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

- **Dạng 1:** Từ đồ thị $(C) : y = f(x)$ vẽ đồ thị $(C') : y = |f(x)|$.

Ta có:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}$$

Cách vẽ đồ thị (C') từ đồ thị (C) :

- Giữ nguyên phần đồ thị phía trên Ox của $(C) : y = f(x)$
- Lấy đối xứng phần đồ thị phía dưới Ox qua Ox , bỏ phần đồ thị phía dưới Ox của (C)

- **Dạng 2:** Từ đồ thị $(C) : y = f(x)$ vẽ đồ thị $(C') : y = f(|x|)$.

Ta có:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Cách vẽ đồ thị (C') từ đồ thị (C) :

- Giữ nguyên phần đồ thị phía bên phải Oy của $(C) : y = f(x)$
- Bỏ phần đồ thị phía bên trái Oy của (C) , lấy đối xứng phần đồ thị phía bên phải Oy qua Oy ,

7. Tương giao đồ thị

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) và $g(x)$ có đồ thị (C_2) . Phương trình $f(x) = g(x)$ (*) được gọi là phương trình hoành độ giao điểm của C_1 và C_2 .

Ta có:

- Số giao điểm của (C_1) và (C_2) bằng với số nghiệm phương trình (*).
 - Phương trình (*) vô nghiệm $\Rightarrow (C)$ không cắt (C') .
 - Phương trình (*) có n nghiệm (đơn phân biệt) $\Rightarrow (C)$ cắt (C') tại n điểm.
 - Phương trình (*) có nghiệm kép $\Rightarrow (C)$ tiếp xúc (C') tại điểm có hoành độ x_o
- Nghiệm x_o của phương trình (*) là hoành độ x_o của giao điểm.
- Tung độ y_o của giao điểm là $f(x_o)$ hoặc $g(x_o)$.
- Điểm $M(x_o; y_o)$ là giao điểm của (C_1) và (C_2)

7.1. Chú ý

∇. Giao điểm của hàm bậc ba:

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$ chứa tham số m có đồ thị (C) . (C) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, (1)$ có 3 nghiệm phân biệt.

- Tìm nghiệm đặc biệt x_o của phương trình. Khi đó phương trình có dạng $(x - x_o)(Ax^2 + Bx + C) = 0$ (*)

(*) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow Ax^2 + Bx + C = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\neq x_o$

- (1) **không** có nghiệm đặc biệt mà có m đồng bậc thì rút m để đưa (1) về dạng $m = g(x)$.

Lập BBT $\Rightarrow$ điều kiện để $y = m$ cắt $g(x)$ tại 3 điểm phân biệt.

- (1) **không** có nghiệm đặc biệt và **không** có m đồng bậc. (Hàm số bậc 3 không đầy đủ)

(1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} y \text{ có hai cực trị} \\ y_{Max} \cdot y_{Min} < 0 \end{cases}$

∇. Giao điểm của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

Giả sử $d : y = kx + m$ cắt đồ thị $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ tại hai điểm M, N . Với $kx + b = \frac{ax+b}{cx+d}$ cho ta phương trình có dạng $Ax^2 + Bx + C = 0, (cx + d \neq 0)$ có $\Delta = B^2 - 4AC$

$$* MN = \sqrt{\frac{k^2 + 1}{A^2}} \cdot \Delta, MN \text{ ngắn nhất khi tồn tại } Min\Delta \text{ và } k = const$$

$$* \triangle OMN \text{ cân tại } O: (x_1 + x_2)(1 + k^2) + 2km = 0$$

8. Sự tiếp xúc của hai đồ thị

8.1. Điều kiện tiếp xúc

Cho hai đồ thị hàm số $(C) : y = f(x)$ và $(C') : y = g(x)$.

- Đồ thị (C) và (C') tiếp xúc $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$
- (C) và (C') tiếp xúc tại $M \Rightarrow M$ là tiếp điểm.
- Nghiệm của hệ là hoành độ tiếp điểm.
- Số nghiệm của hệ là số tiếp điểm.

8.2. Các dạng tiếp tuyến

- Tiếp tuyến tại 1 điểm $M(x_o; y_o)$

$$y = f'(x_o)(x - x_o) + y_o$$

- Tiếp tuyến đi qua 1 điểm:

$$y = k(x - x_o) + y_o, \quad (k \text{ ẩn})$$

- Tiếp tuyến tiếp xúc với (C)

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_o) + y_o \\ f'(x) = k \end{cases} \quad \text{Có nghiệm}$$

Với $k = f'(x_o)$ là **hệ số góc** của tiếp tuyến. Các dạng biểu diễn của hệ số góc k :

- Dạng trực tiếp $k = \pm 1, \pm 2, \dots \pm \frac{1}{2}, \dots$
- Tiếp tuyến tạo với chiều dương Ox góc $\alpha \Rightarrow k = \tan \alpha$
- Tiếp tuyến song song với đường thẳng $\delta : y = ax + b \Rightarrow k = a$
- Tiếp tuyến tạo với đường thẳng $\delta : y = ax + b$ góc $\alpha \Rightarrow \left| \frac{k - a}{1 + ka} \right| = \tan \alpha$

9. Bài toán tìm điểm cố định.

∇. **Bài toán:** Tìm điều kiện để đồ thị $(C_m) : y = f(x; m)$ đi qua một điểm $A(x_o; y_o)$ cho trước.

- Giả sử (C_m) đi qua $A(x_o; y_o) \Leftrightarrow y_o = f(x_o; m)$ (1)
- Để (C_m) đi qua A thì (1) phải có nghiệm. Từ đó suy ra điều kiện cần tìm.

∇. **Bài toán:** Cho (C_m) là đồ thị của hàm số $y = f(x; m)$. Hãy tìm điểm cố định của họ đường (C_m)

- Giả sử $A(x_o; y_o)$ là một điểm cố định của (C_m) :
- Ta có: $y = f(x; m) \Leftrightarrow y_o = f(x_o; m), \forall m$

$$\Leftrightarrow \alpha m + \beta = 0, \forall m \text{ (hoặc } \alpha m^2 + \beta m + \gamma = 0, \forall m)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} (*) \text{ hoặc } \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} (*)$$

- Giải hệ (*) tìm ra điểm cố định của (C_m) .

10. Tâm và trục đối xứng

- **Đối xứng qua trục tung:** Đồ thị (C) nhận trục tung làm trục đối xứng khi và chỉ khi trên miền xác định của nó, hàm $f(x)$ là một hàm chẵn $f(-x) = f(x)$
- **Đối xứng qua trục hoành:** Hàm số chẵn theo y thì đồ thị đối xứng qua trục hoành,
- **Đối xứng qua gốc tọa độ:** Đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ đối xứng qua gốc tọa độ O khi và chỉ khi trên miền xác định của nó, $f(x)$ là một hàm lẻ: $f(-x) = -f(x)$