

**HỆ THỐNG LÝ THUYẾT THPT
THEO CHƯƠNG TRÌNH 2018
LỚP 11**

Vũ Quang Trường

Ngày 17 tháng 9 năm 2026

Mục lục

1	Lượng giác	5
1.1	Đơn Vị Đo Góc & Khái Niệm Góc Lượng Giác	6
1.2	Đường Tròn Lượng Giác & Giá Trị Lượng Giác	7
1.3	Công Thức Lượng Giác	10
1.4	Hàm số lượng giác cơ bản	11
1.5	Phương Trình Lượng Giác Cơ Bản	14
2	Dãy số	17
2.1	Dãy số	18
2.2	Cấp số cộng	19
2.3	Cấp số nhân	20
3	Mẫu số liệu ghép nhóm	21
3.1	Mẫu số liệu ghép nhóm	22
3.2	Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm	23
4	Hình không gian	25
4.1	Định nghĩa và tính chất cơ bản của hình không gian	26
4.2	Quan hệ song song trong không gian	29
4.3	Quan hệ vuông góc trong không gian	36
5	GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC	45
5.1	Giới hạn	46
5.2	Hàm số liên tục	49
6	HÀM SỐ MŨ - HÀM SỐ LOGARIT	51
6.1	Lũy thừa - Logarit	52
6.2	Hàm số mũ và hàm số logarit	55
6.3	Bất phương trình Mũ và Logarit	56
7	XÁC SUẤT	59
7.1	Biến cố hợp - Biến cố giao - Biến cố độc lập - Biến cố xung khắc	60
7.2	Công thức cộng, Công thức nhân	61
8	ĐẠO HÀM	65
8.1	Định nghĩa và ý nghĩa của đạo hàm	66
8.2	Đạo hàm của các hàm sơ cấp	66
8.3	Đạo hàm trong thực tiễn	68

Chương 1

Lượng giác

Chương lượng giác gồm rất nhiều công thức. Đây là 1 trong số các chương học sinh hay quên trong chương trình lớp 11. Do đó để học tốt phần này các bạn hãy chăm chỉ thực hành!

1.1 Đơn Vị Đo Góc & Khái Niệm Góc Lượng Giác

1.1.1: Đơn vị đo góc: Độ và Radian

- **Độ ($^{\circ}$):** Góc ở tâm chắn $\frac{1}{360}$ đường tròn có số đo 1° .
- **Radian (rad):** Góc ở tâm chắn một cung có độ dài bằng bán kính R của đường tròn đó có số đo 1 rad.
- **Mối liên hệ:** $180^{\circ} = \pi \text{ rad}$.

Công thức chuyển đổi:

$$\alpha \text{ (rad)} = a \times \frac{\pi}{180}, \quad a^{\circ} = \left(\alpha \times \frac{180}{\pi} \right)^{\circ}$$

Công thức độ dài cung tròn: Cung tròn bán kính R , số đo α rad có độ dài:

$$l = R \cdot \alpha$$

Lưu ý: Khi viết góc α mà không ghi đơn vị thì mặc định là đơn vị radian.

1.1.2: Khái niệm Góc Lượng Giác

Trong mặt phẳng, cho hai tia Ou, Ov . Khi tia Ou quay xung quanh gốc O đến vị trí tia Ov theo một chiều xác định, ta nói nó quét nên một **góc lượng giác** có tia đầu là Ou và tia cuối là Ov . Ký hiệu là (Ou, Ov) .

Số đo góc lượng giác:

$$\text{sđ}(Ou, Ov) = \alpha + k2\pi \text{ (rad)} \quad \text{hoặc} \quad \alpha + k \cdot 360^{\circ} \text{ (độ)}, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

1.1.3: Hệ thức Chasles (Sắc lờ)

Với 3 tia Ou, Ov, Ow tùy ý cùng gốc O , ta luôn có:

$$\text{sđ}(Ou, Ov) + \text{sđ}(Ov, Ow) = \text{sđ}(Ou, Ow) + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

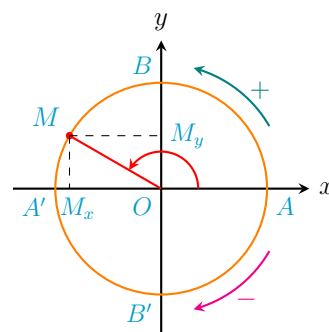
1.2 Đường Tròn Lượng Giác & Giá Trị Lượng Giác

1.2.1: Khái niệm Đường tròn lượng giác

Đường tròn tâm O bán kính $R = 1$ trong hệ tọa độ Oxy , chọn điểm gốc $A(1; 0)$ làm điểm đầu cho mọi góc lượng giác.

Quy ước chiều quay:

- **Chiều dương (+):** Ngược chiều quay của kim đồng hồ.
- **Chiều âm (-):** Cùng chiều quay của kim đồng hồ.

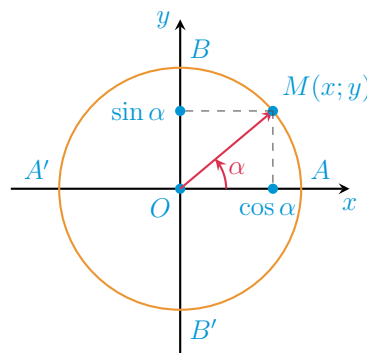


Chú ý: Ta còn gọi trục tung (Oy) là **trục sin**, trục hoành (Ox) là **trục cosin**.

1.2.2: Giá trị lượng giác của góc α

Cho điểm $M(x; y)$ trên đường tròn lượng giác sao cho $sđ(OA, OM) = \alpha$:

- $\cos \alpha = x$
- $\sin \alpha = y$
- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$
- $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$



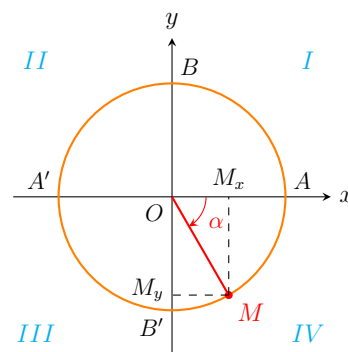
Chú ý:

- $\sin \alpha, \cos \alpha$ xác định với mọi giá trị của α và ta có:
 - +) $-1 \leq \sin \alpha \leq 1; \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1;$
 - +) $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha; \quad \cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha \quad (k \in \mathbb{Z}).$
- $\tan \alpha$ xác định khi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$
- $\cot \alpha$ xác định khi $\alpha \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

1.2.3: Dấu của các giá trị lượng giác

Dấu của các giá trị lượng giác của một góc lượng giác phụ thuộc vào vị trí điểm biểu diễn M trên đường tròn lượng giác.

Góc phần tư GTLG	I	II	III	IV
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-



1.2.4: Hằng đẳng thức lượng giác cơ bản

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (\forall \alpha)$
- $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$
- $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\alpha \neq k\pi)$
- $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \quad \left(\alpha \neq k\frac{\pi}{2} \right)$

1.2.5: Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

Góc α	$0^\circ (0)$	$30^\circ \left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45^\circ \left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60^\circ \left(\frac{\pi}{3}\right)$	$90^\circ \left(\frac{\pi}{2}\right)$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định
$\cot \alpha$	Không xác định	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

1.2.6: Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt (Cung liên kết)

1. Góc đối nhau ($-\alpha$ và α):

- $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
- $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
- $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
- $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$

2. Góc bù nhau ($\pi - \alpha$ và α):

- $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$
- $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$

3. Góc phụ nhau $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ và α :

- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$

$$\bullet \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\bullet \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

4. Góc hơn kém π ($\pi + \alpha$ và α):

$$\bullet \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\bullet \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\bullet \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\bullet \cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

5. Góc hơn kém $\frac{\pi}{2}$ ($\frac{\pi}{2} + \alpha$ và α):

$$\bullet \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\bullet \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\bullet \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

$$\bullet \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

Bảng tổng kết

Góc GTLG	Góc đối ($-\alpha$)	Góc bù ($\pi - \alpha$)	Góc phụ ($\frac{\pi}{2} - \alpha$)	Hơn kém π ($\pi + \alpha$)	Hơn kém $\frac{\pi}{2}$ ($\frac{\pi}{2} + \alpha$)
sin	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$
cos	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
tan	$-\tan \alpha$	$-\tan \alpha$	$\cot \alpha$	$\tan \alpha$	$-\cot \alpha$
cot	$-\cot \alpha$	$-\cot \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$	$-\tan \alpha$

Thần chú ghi nhớ:

**"Cos-đối, Sin-bù, Phụ-chéo,
Khác π Tan, Khác $\frac{\pi}{2}$ Chéo-sin"**

Giải nghĩa câu thần chú:

- **Cos-đối:** Hai góc đối nhau ($-\alpha$ và α) thì chỉ có cos bằng nhau, còn lại đều đổi dấu.
- **Sin-bù:** Hai góc bù nhau ($\pi - \alpha$ và α) thì chỉ có sin bằng nhau, còn lại đều đổi dấu.
- **Phụ-chéo:** Hai góc phụ nhau ($\frac{\pi}{2} - \alpha$ và α) thì giá trị lượng giác "chéo" nhau (sin thành cos, cos thành sin, tan thành cot, cot thành tan).
- **Khác π Tan (và Cot):** Hai góc hơn kém nhau π ($\pi + \alpha$ và α) thì tan và cot giữ nguyên, sin và cos mang dấu âm.
- **Khác $\frac{\pi}{2}$ Chéo-sin:** Hai góc hơn kém nhau $\frac{\pi}{2}$ ($\frac{\pi}{2} + \alpha$ và α) thì chéo nhau, riêng $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = +\cos \alpha$ (mang dấu dương), các giá trị còn lại mang dấu âm.

1.3 Công Thức Lượng Giác

1.3.1: Công thức cộng

- $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$
- $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$
- $\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$

Thần chú ghi nhớ: *Cos cùng loài khác dấu, Sin cùng dấu khác loài.*

1.3.2: Công thức nhân đôi & Hạ bậc

Nhân đôi:

- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$
- $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

Hạ bậc:

- $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$
- $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$

1.3.3: Công thức biến đổi Tích thành Tổng

- $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$
- $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$
- $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)]$

1.3.4: Công thức biến đổi Tổng thành Tích

- $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$
- $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$
- $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$
- $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

1.4 Hàm số lượng giác cơ bản

1.4.1: Hàm số chẵn, Hàm số lẻ và Hàm số tuần hoàn

a) **Hàm số chẵn, hàm số lẻ:** Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathcal{D}$ (thỏa mãn $\mathcal{D}$ là tập đối xứng).

- $\mathcal{D}$ gọi là **tập đối xứng** khi và chỉ khi $\forall x \in \mathcal{D} \implies -x \in \mathcal{D}$.
- **Hàm số chẵn:** nếu $f(-x) = f(x)$ với mọi $x \in \mathcal{D}$. Đồ thị đối xứng qua trục tung Oy .
- **Hàm số lẻ:** nếu $f(-x) = -f(x)$ với mọi $x \in \mathcal{D}$. Đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O .

b) **Hàm số tuần hoàn:** Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathcal{D}$.

- Hàm số $f(x)$ gọi là **tuần hoàn** nếu tồn tại số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in \mathcal{D}$:

$$x + T \in \mathcal{D}, \quad x - T \in \mathcal{D} \quad \text{và} \quad f(x + T) = f(x)$$

- Số dương T "nhỏ nhất" thỏa mãn điều kiện trên được gọi là "chu kỳ" của hàm số tuần hoàn.
- Các hàm số lượng giác $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$ đều là các hàm số tuần hoàn.

Công thức xác định nhanh chu kỳ T_0 của hàm số lượng giác:

a) **Dạng $\sin(ax + b)$ và $\cos(ax + b)$:**

$$T_0 = \frac{2\pi}{|a|} \quad (a \neq 0)$$

$$\text{Ví dụ: } y = \cos(2x + 1) \implies T_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

b) **Dạng $\tan(ax + b)$ và $\cot(ax + b)$:**

$$T_0 = \frac{\pi}{|a|} \quad (a \neq 0)$$

$$\text{Ví dụ: } y = \tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \implies T_0 = \frac{\pi}{3}.$$

Tìm chu kỳ hàm số tổng/hiệu: Nếu hàm số $y = f(x) \pm g(x)$ có $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ T_1 và $g(x)$ tuần hoàn với chu kỳ T_2 , thì chu kỳ T_0 của hàm số tổng/hiệu là **bội chung nhỏ nhất** của T_1 và T_2 .

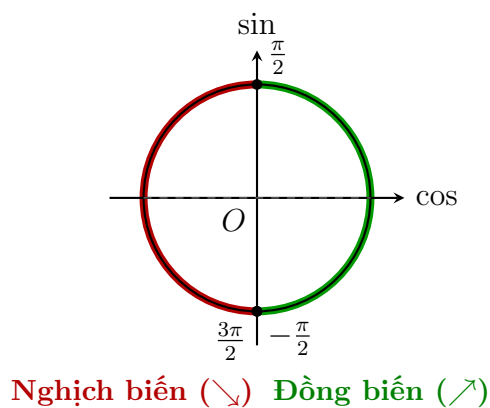
1.4.2: Hàm số $y = \sin x$

a) Tập xác định & Giá trị:

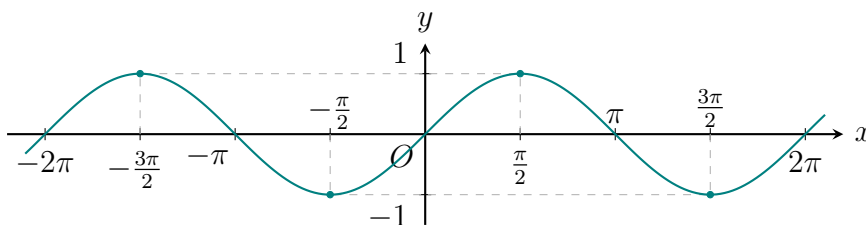
- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $[-1; 1]$ (nghĩa là $-1 \leq \sin x \leq 1$).

b) Tính chất & Sự biến thiên:

- Hàm số **lẻ** (đối xứng qua O), chu kỳ $T = 2\pi$.
- Đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$.
- Nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$.



Đồ thị hàm số $y = \sin x$:



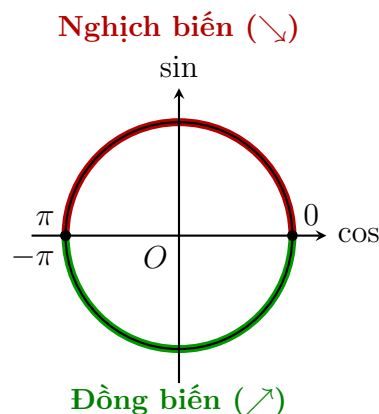
1.4.3: Hàm số $y = \cos x$

a) Tập xác định & Giá trị:

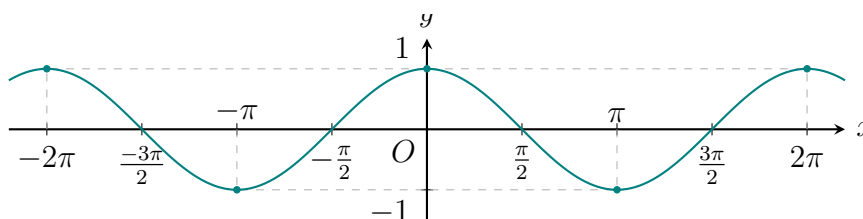
- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $T = [-1; 1]$ (nghĩa là $-1 \leq \cos x \leq 1$).

b) Tính chất & Sự biến thiên:

- Hàm số **chẵn** (đối xứng qua Oy), chu kỳ $T = 2\pi$.
- Đồng biến trên $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$.
- Nghịch biến trên $(k2\pi; \pi + k2\pi)$.



Đồ thị hàm số $y = \cos x$:



1.4.4: Hàm số $y = \tan x$

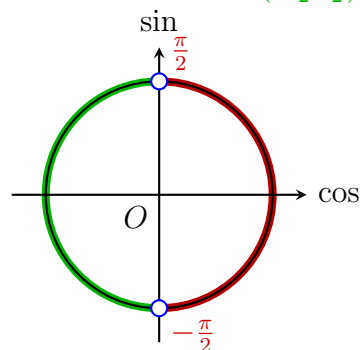
a) Tập xác định & Giá trị:

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.
- Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$.

b) Tính chất & Sự biến thiên:

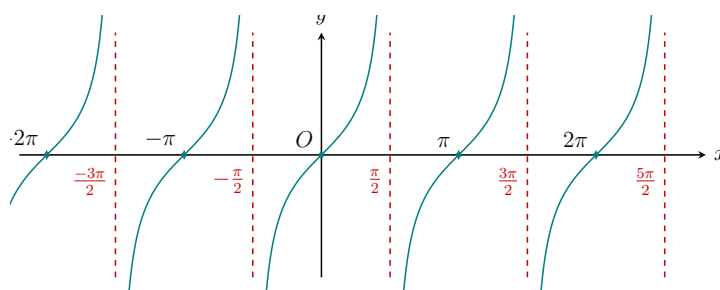
- Hàm số lẻ (đối xứng qua O), chu kỳ $T = \pi$.
- Luôn **đồng biến** trên từng khoảng xác định $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$.

Đồng biến ($\nearrow$) trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$



Đồng biến ($\nearrow$) trên $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right)$

Đồ thị hàm số $y = \tan x$:



1.4.5: Hàm số $y = \cot x$

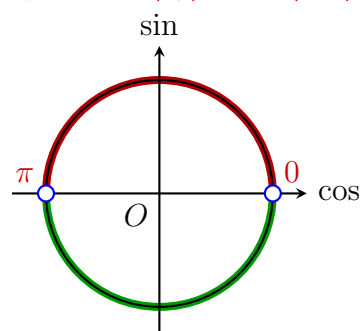
a) Tập xác định & Giá trị:

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$.
- Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$.

b) Tính chất & Sự biến thiên:

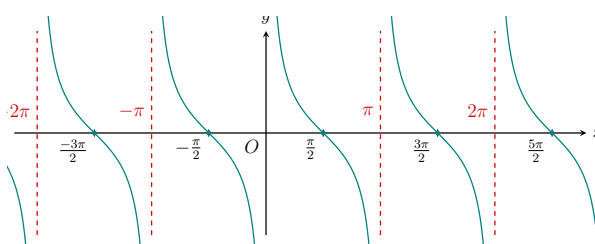
- Hàm số lẻ (đối xứng qua O), chu kỳ $T = \pi$.
- Luôn **nghịch biến** trên từng khoảng xác định $(k\pi; \pi + k\pi)$.

Nghịch biến ($\searrow$) trên $(0; \pi)$



Nghịch biến ($\searrow$) trên $(-\pi; 0)$

Đồ thị hàm số $y = \cot x$:



1.5 Phương Trình Lượng Giác Cơ Bản

1.5.1: Các phương trình lượng giác cơ bản

1. $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$
2. $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \pm \alpha + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
3. $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
4. $\cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

1.5.2: Phương trình lượng giác cơ bản (Tự tính góc)

a) Phương trình $\sin x = m$:

- Phương trình $\sin x = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $|m| \leq 1$.
- Khi $|m| \leq 1$, sẽ tồn tại duy nhất $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ thoả mãn $\sin \alpha = m$. Khi đó:

$$\sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

b) Phương trình $\cos x = m$:

- Phương trình $\cos x = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $|m| \leq 1$.
- Khi $|m| \leq 1$, sẽ tồn tại duy nhất $\alpha \in [0; \pi]$ thoả mãn $\cos \alpha = m$. Khi đó:

$$\cos x = m \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

c) Phương trình $\tan x = m$:

- Phương trình $\tan x = m$ luôn có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.
- Với mỗi $m \in \mathbb{R}$, sẽ tồn tại duy nhất $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thoả mãn $\tan \alpha = m$. Khi đó:

$$\tan x = m \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

d) Phương trình $\cot x = m$:

- Phương trình $\cot x = m$ luôn có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.
- Với mỗi $m \in \mathbb{R}$, sẽ tồn tại duy nhất $\alpha \in (0; \pi)$ thoả mãn $\cot \alpha = m$. Khi đó:

$$\cot x = m \Leftrightarrow \cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Các trường hợp đặc biệt (1 họ nghiệm):

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$	$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$	$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$
$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$	$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$	$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

1.5.3: Phương trình lượng giác biến đổi về cùng loại

Để giải các phương trình lượng giác chưa cùng loại (khác hàm hoặc chứa dấu trừ), ta áp dụng các công thức góc liên quan (góc đối, góc bù, góc phụ) để biến đổi về phương trình cơ bản cùng tên.

1. Xử lý dấu trừ (khử dấu trừ):

- $\sin f(x) = -\sin g(x) \Leftrightarrow \sin f(x) = \sin(-g(x))$
- $\cos f(x) = -\cos g(x) \Leftrightarrow \cos f(x) = \cos(\pi - g(x))$
- $\tan f(x) = -\tan g(x) \Leftrightarrow \tan f(x) = \tan(-g(x))$
- $\cot f(x) = -\cot g(x) \Leftrightarrow \cot f(x) = \cot(-g(x))$

2. Chuyển đổi khác tên hàm (dùng góc phụ):

- $\sin f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow \sin f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - g(x)\right)$
- $\cos f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow \cos f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - g(x)\right)$
- $\tan f(x) = \cot g(x) \Leftrightarrow \tan f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - g(x)\right)$
- $\cot f(x) = \tan g(x) \Leftrightarrow \cot f(x) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - g(x)\right)$

3. Kết hợp vừa khác tên vừa chứa dấu trừ:

- $\sin f(x) = -\cos g(x) \Leftrightarrow \sin f(x) = \sin\left(g(x) - \frac{\pi}{2}\right)$
- $\cos f(x) = -\sin g(x) \Leftrightarrow \cos f(x) = \cos\left(g(x) + \frac{\pi}{2}\right)$
- $\tan f(x) = -\cot g(x) \Leftrightarrow \tan f(x) = \tan\left(g(x) + \frac{\pi}{2}\right)$
- $\cot f(x) = -\tan g(x) \Leftrightarrow \cot f(x) = \cot\left(g(x) + \frac{\pi}{2}\right)$

Chương 2

Dãy số

Chương dãy số có khá ít công thức, yêu cầu tập chung ở một số dạng cơ bản.

2.1 Dãy số

2.1.1: Dãy số và các tính chất cơ bản

1. Định nghĩa dãy số:

- Dãy số vô hạn:

- +) Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một **dãy số vô hạn** (gọi tắt là dãy số), ký hiệu là $u = u(n)$.
- +) Ta thường viết u_n thay cho $u(n)$ và ký hiệu dãy số $u = u(n)$ bởi (u_n) .
- +) Dạng khai triển: $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$
- +) Số u_1 gọi là **số hạng đầu**, u_n là số hạng thứ n và gọi là **số hạng tổng quát** của dãy số.

- Dãy số hữu hạn:

- +) Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1; 2; 3; \dots; m\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một **dãy số hữu hạn**.
- +) Dạng khai triển của dãy số hữu hạn là $u_1, u_2, \dots, u_m$.
- +) Số u_1 gọi là **số hạng đầu**, số u_m gọi là **số hạng cuối**.

- **Chú ý:** Nếu $u_n = c, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (c là hằng số) thì (u_n) được gọi là **dãy số không đổi**.

2. Các cách cho một dãy số:

- Một dãy số có thể cho bằng các cách sau:

- +) Liệt kê các số hạng (chỉ dùng cho các dãy số hữu hạn và có ít số hạng).
- +) Công thức của số hạng tổng quát.
- +) Phương pháp mô tả.
- +) Phương pháp truy hồi.

3. Dãy số tăng, dãy số giảm và dãy số bị chặn:

- Dãy số tăng, dãy số giảm:

- +) Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số tăng** nếu ta có $u_{n+1} \geq u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- +) Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số giảm** nếu ta có $u_{n+1} \leq u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- +) Dãy số tăng hoặc dãy số giảm gọi chung là dãy đơn điệu.

- Dãy số bị chặn:

- +) Dãy số (u_n) được gọi là **bị chặn trên** nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- +) Dãy số (u_n) được gọi là **bị chặn dưới** nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \geq m$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- +) Dãy số (u_n) được gọi là **bị chặn** nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m, M sao cho $m \leq u_n \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

2.2 Cấp số cộng

2.2.1: Cấp số cộng

1. Định nghĩa:

- **Cấp số cộng** là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d .
- Số d được gọi là **công sai** của cấp số cộng.
- Cấp số cộng (u_n) với công sai d được cho bởi hệ thức truy hồi:

$$u_n = u_{n-1} + d \quad \text{với } n \geq 2$$

2. Số hạng tổng quát:

- Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì **số hạng tổng quát** u_n của nó được xác định theo công thức:

$$u_n = u_1 + (n - 1)d$$

3. Tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng:

- Cho cấp số cộng (u_n) với công sai d . Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Khi đó:

$$S_n = \frac{n}{2} [2u_1 + (n - 1)d]$$

- **Chú ý:** Sử dụng công thức $u_n = u_1 + (n - 1)d$, ta có thể viết tổng S_n dưới dạng:

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

2.3 Cấp số nhân

2.3.1: Cấp số nhân

1. Định nghĩa:

- **Cấp số nhân** là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q .
- Số q được gọi là **công bội** của cấp số nhân.
- Cấp số nhân (u_n) với công bội q được cho bởi hệ thức truy hồi:

$$u_n = u_{n-1} \cdot q \quad \text{với } n \geq 2$$

2. Số hạng tổng quát:

- Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q thì **số hạng tổng quát** u_n của nó được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{với } n \geq 2$$

3. Tổng n số hạng đầu của một cấp số nhân:

- Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Khi đó:

$$S_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Chương 3

Mẫu số liệu ghép nhóm

Đây là chương dễ nhất trong các chương lớp 11.

3.1 Mẫu số liệu ghép nhóm

3.1.1: Mẫu số liệu ghép nhóm và các dạng Bảng Tần Số

1. Giới thiệu về mẫu số liệu ghép nhóm:

- **Khái niệm:** Mẫu số liệu ghép nhóm là mẫu số liệu cho dưới dạng bảng tần số của các nhóm số liệu. Mỗi nhóm số liệu là tập hợp gồm các giá trị của số liệu được ghép nhóm theo một tiêu chí xác định. Nhóm số liệu thường được cho dưới dạng $[a; b)$, trong đó a là đầu mút trái, b là đầu mút phải.
- **Nhận xét:**
 - +) Mẫu số liệu ghép nhóm được dùng khi ta không thể thu thập được số liệu chính xác hoặc do yêu cầu của bài toán mà ta phải biểu diễn mẫu số liệu dưới dạng ghép nhóm để thuận lợi cho việc tổ chức, đọc và phân tích số liệu.
 - +) Trong một số trường hợp, nhóm số liệu cuối cùng có thể lấy đầu mút bên phải $[a; b]$.

2. Cách ghép nhóm mẫu số liệu:

- **Quy trình chuyển từ mẫu số liệu không ghép nhóm sang ghép nhóm:**
 - +) **Bước 1:** Chia miền giá trị của mẫu số liệu thành một số nhóm theo tiêu chí cho trước.
 - +) **Bước 2:** Đếm số giá trị của mẫu số liệu thuộc mỗi nhóm (tần số) và lập bảng thống kê cho mẫu số liệu ghép nhóm.
- **Độ dài của nhóm:** Độ dài của nhóm $[a; b)$ là $b - a$.
- **Lưu ý khi ghép nhóm:**
 - +) Không nên chia thành quá nhiều nhóm hoặc quá ít nhóm.
 - +) Các nhóm không giao nhau.
 - +) Các nhóm nên có độ dài như nhau và tổng độ dài các nhóm lớn hơn khoảng biến thiên.

3. Bảng tần số mẫu số liệu ghép nhóm

Nhóm	$[a_1; a_2)$	$[a_2; a_3)$	$\dots$	$[a_k; a_{k+1}]$	Tổng
Tần số	n_1	n_2	$\dots$	n_k	n

4. Bảng tóm tắt các đại lượng

Nhóm (Khoảng)	Giá trị đại diện (x_i)	Tần số (n_i)	Tần số tích lũy (cf_i)
$[a_1; a_2)$	$x_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}$	n_1	$cf_1 = n_1$
$[a_2; a_3)$	$x_2 = \frac{a_2 + a_3}{2}$	n_2	$cf_2 = n_1 + n_2$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$[a_i; a_{i+1})$	$x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$	n_i	$cf_i = n_1 + \dots + n_i$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$[a_k; a_{k+1}]$	$x_k = \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$	n_k	$cf_k = n$
Tổng	—	n	—

3.2 Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm

3.2.1: Các số đặc trưng đo xu hướng trung tâm

1. Số trung bình ($\bar{x}$):

- Công thức tính:

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_kx_k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i$$

- **Ý nghĩa:** Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho số trung bình của mẫu số liệu gốc, nó cho biết vị trí trung tâm của mẫu số liệu và có thể dùng để đại diện cho mẫu số liệu.

2. Trung vị (M_e):

- **Nhóm chứa trung vị:** Là nhóm $[a_p; a_{p+1})$ đầu tiên có tần số tích lũy $cf_p \geq \frac{n}{2}$.

- Công thức tính:

$$M_e = a_p + \frac{\frac{n}{2} - cf_{p-1}}{n_p} \cdot (a_{p+1} - a_p)$$

- **Ý nghĩa:** Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho trung vị của mẫu số liệu gốc, nó chia mẫu số liệu thành hai phần, mỗi phần chứa 50% giá trị.

3. Tứ phân vị (Q_1, Q_2, Q_3):

- Công thức tổng quát xác định Tứ phân vị thứ r (Q_r với $r \in \{1; 2; 3\}$):

+) Tứ phân vị thứ r được xác định nhờ tính chất: có khoảng $\left(\frac{r \cdot n}{4}\right)$ giá trị nhỏ hơn tứ phân vị này.

+) Nhóm chứa Q_r là nhóm $[a_m; a_{m+1})$ đầu tiên có tần số tích lũy $cf_m \geq \frac{r \cdot n}{4}$.

+) Công thức tính tổng quát:

$$Q_r = a_m + \frac{\frac{r \cdot n}{4} - cf_{m-1}}{n_m} \cdot (a_{m+1} - a_m)$$

- Các trường hợp cụ thể:

+) **Tứ phân vị thứ nhất Q_1 ($r = 1$):** Nhóm chứa Q_1 là nhóm $[a_p; a_{p+1})$ đầu tiên có $cf_p \geq \frac{n}{4}$.

$$Q_1 = a_p + \frac{\frac{n}{4} - cf_{p-1}}{n_p} \cdot (a_{p+1} - a_p)$$

+) **Tứ phân vị thứ hai Q_2 ($r = 2$):** $Q_2 = M_e$.

+) **Tứ phân vị thứ ba Q_3 ($r = 3$):** Nhóm chứa Q_3 là nhóm $[a_r; a_{r+1})$ đầu tiên có $cf_r \geq \frac{3n}{4}$.

$$Q_3 = a_r + \frac{\frac{3n}{4} - cf_{r-1}}{n_r} \cdot (a_{r+1} - a_r)$$

- **Ý nghĩa:** Các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho các tứ phân vị của mẫu số liệu gốc, chúng chia mẫu số liệu thành 4 phần, mỗi phần chứa 25% giá trị.

4. Một (M_o):

- **Nhóm chứa một:** Là nhóm $[a_j; a_{j+1})$ có tần số lớn nhất n_j (hoặc ký hiệu m_j).
- **Công thức tính:**

$$M_o = a_j + \frac{n_j - n_{j-1}}{(n_j - n_{j-1}) + (n_j - n_{j+1})} \cdot (a_{j+1} - a_j)$$

- **Quy ước nhóm vượt quá giới hạn:**

+) Nếu nhóm chứa một là nhóm đầu tiên ($j = 1$) thì quy ước $n_0 = 0$.
 +) Nếu nhóm chứa một là nhóm cuối cùng ($j = k$) thì quy ước $n_{k+1} = 0$.

- **Ý nghĩa:** Một của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho một của mẫu số liệu gốc, nó được dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.

- **Lưu ý:**

+) Người ta chỉ định nghĩa một cho mẫu số liệu ghép nhóm có độ dài các nhóm bằng nhau.
 +) Một mẫu số liệu có thể không có một hoặc có nhiều hơn một một.
 +) Khi tần số của tất cả các nhóm số liệu bằng nhau thì mẫu số liệu ghép nhóm không có một.

3.2.2: Bảng Tổng Kết Công Thức Các Số Đặc Trưng Đo Xu Hướng Trung Tâm

Dại lượng	Công thức	Điều kiện xác định nhóm
Số trung bình ($\bar{x}$)	$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_kx_k}{n}$	
Trung vị (M_e)	$M_e = a_p + \frac{\frac{n}{2} - cf_{p-1}}{n_p} \cdot h$	$[a_p; a_{p+1})$ là nhóm đầu tiên có $cf_p \geq \frac{n}{2}$
Tứ phân vị (Q_r)	$Q_r = a_m + \frac{\frac{r \cdot n}{4} - cf_{m-1}}{n_m} \cdot h$	$[a_m; a_{m+1})$ là nhóm đầu tiên có $cf_m \geq \frac{r \cdot n}{4}$
Một (M_o)	$M_o = a_j + \frac{n_j - n_{j-1}}{(n_j - n_{j-1}) + (n_j - n_{j+1})} \cdot h$	$[a_j; a_{j+1})$ là nhóm có n_j lớn nhất

Chương 4

Hình không gian

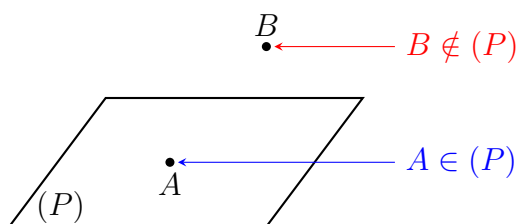
Đây là chương khó cả về kiến thức lẫn tư duy. Đưa người học vào không gian 3D huyền bí.

4.1 Định nghĩa và tính chất cơ bản của hình không gian

4.1.1: Điểm, đường thẳng và mặt phẳng trong không gian

1. Mặt phẳng trong không gian

- Mặt phẳng là một khái niệm cơ bản của hình học không gian, không có bề dày và không có giới hạn.
- Ký hiệu:** Mặt phẳng thường được ký hiệu bằng các chữ cái hoa đặt trong dấu ngoặc đơn: (P) , (Q) , (R) , ... hoặc (α) , (β) , ...
- Điểm thuộc mặt phẳng:** Nếu điểm A thuộc mặt phẳng (P) , ta viết $A \in (P)$. Nếu điểm B không thuộc mặt phẳng (P) , ta viết $B \notin (P)$.

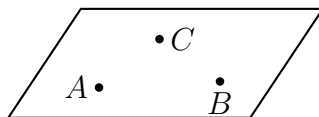


2. Các tính chất thừa nhận

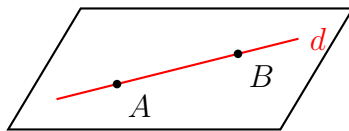
- Tính chất 1:** Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.



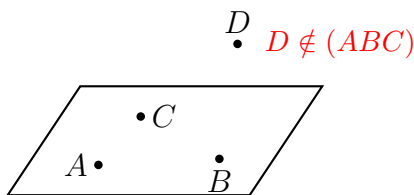
- Tính chất 2:** Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.



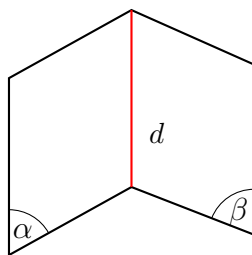
- Tính chất 3:** Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cùng thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.



- Tính chất 4:** Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.



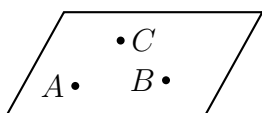
- Tính chất 5:** Nếu hai mặt phẳng phân biệt có điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó (đường thẳng chung đó gọi là **giao tuyến** của hai mặt phẳng).



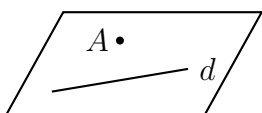
- **Tính chất 6:** Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.

3. Cách xác định một mặt phẳng

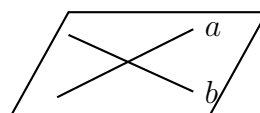
- Ba điểm không thẳng hàng A, B, C xác định duy nhất một mặt phẳng, ký hiệu là (ABC) .
- Một đường thẳng d và một điểm $A \notin d$ xác định duy nhất một mặt phẳng, ký hiệu là (A, d) hoặc $\text{mp}(A, d)$.
- Hai đường thẳng cắt nhau a và b xác định duy nhất một mặt phẳng, ký hiệu là (a, b) hoặc $\text{mp}(a, b)$.



Qua 3 điểm



Điểm và đường thẳng

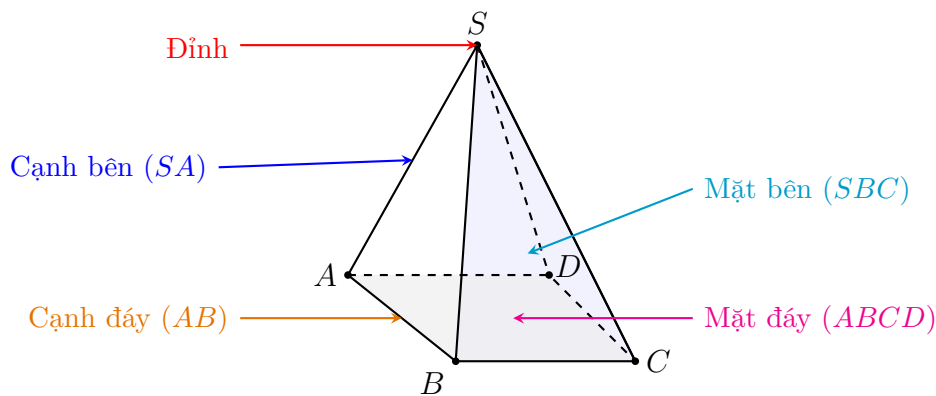


Hai đường cắt nhau

4. Hình chóp và Hình tứ diện

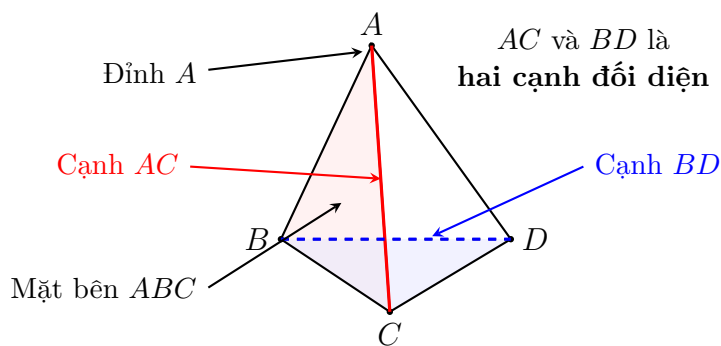
• Hình chóp:

- +) **Định nghĩa:** Cho đa giác lồi $A_1A_2 \dots A_n$ và điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác đó. Nối S với các đỉnh $A_1, A_2, \dots, A_n$ để được n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1$. Hình gồm n tam giác đó và đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ được gọi là **hình chóp**, ký hiệu là $S.A_1A_2 \dots A_n$.
- +) **Thành phần:**
 - Điểm S là *đỉnh*.
 - Đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ là *mặt đáy*.
 - Các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1$ là các *mặt bên*.
 - Các đoạn thẳng $SA_1, SA_2, \dots, SA_n$ là các *cạnh bên*.
 - Các cạnh của đa giác đáy $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ là các *cạnh đáy*.
- +) **Tên gọi:** Tên của hình chóp được gọi dựa theo tên của đa giác đáy (ví dụ: hình chóp có đáy là tứ giác gọi là hình chóp tứ giác).

Hình chóp tứ giác $S.ABCD$

• **Hình tứ diện:**

- +) **Định nghĩa:** Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD và BCD được gọi là **hình tứ diện**, ký hiệu là $ABCD$.
- +) **Thành phần:**
 - Các điểm A, B, C, D là các *đỉnh*.
 - Các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, AC, BD là các *cạnh*.
 - Các tam giác ABC, ACD, ABD, BCD là các *mặt*.
- +) **Các khái niệm liên quan:**
 - Hai cạnh không có đỉnh chung gọi là *hai cạnh đối diện*.
 - Đỉnh không nằm trên một mặt gọi là *đỉnh đối diện* với mặt đó.
 - Hình tứ diện có 4 mặt là các tam giác đều gọi là *hình tứ diện đều*.
- +) **Nhận xét:** Hình tứ diện là một hình chóp tam giác mà mặt nào của hình tứ diện cũng có thể được coi là mặt đáy.

Hình tứ diện $ABCD$

4.2 Quan hệ song song trong không gian

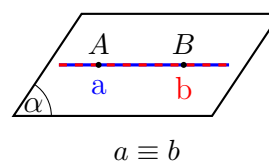
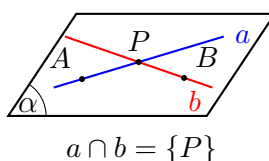
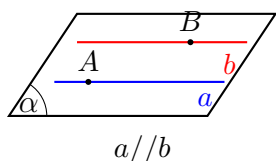
4.2.1: Hai đường thẳng song song trong không gian

1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian.

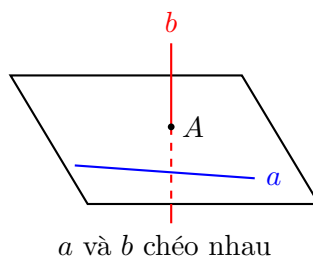
• Trường hợp 1: Cùng nằm trong một mặt phẳng (Đồng phẳng)

- +) a và b không có điểm chung $\Rightarrow a // b$ (Song song).
- +) a và b có duy nhất một điểm chung $P \Rightarrow a \cap b = \{P\}$ (Cắt nhau).
- +) a và b có vô số điểm chung $\Rightarrow a \equiv b$ (Trùng nhau).



• Trường hợp 2: Không cùng nằm trong bất kỳ mặt phẳng nào (Không đồng phẳng)

- +) a và b không cùng nằm trong bất kỳ mặt phẳng nào $\Rightarrow a$ và b chéo nhau.



2. Tính chất của hai đường thẳng song song

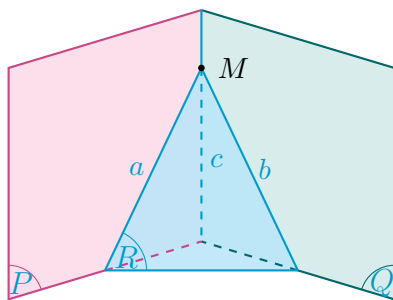
- Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.
- Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau:

$$\begin{cases} a // c \\ b // c \end{cases} \Rightarrow a // b$$

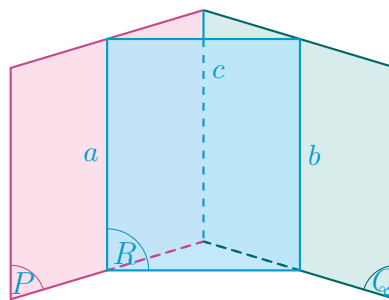
3. Tính chất về giao tuyến của ba mặt phẳng

- Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó hoặc đồng quy, hoặc đôi một song song.

$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = c \\ (Q) \cap (R) = b \\ (R) \cap (P) = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a, b, c \text{ đồng quy} \\ a // b // c \end{cases}$$



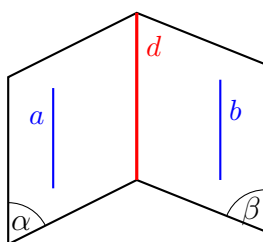
Ba giao tuyến đồng quy



Ba giao tuyến song song

- **Hệ quả:** Nếu hai mặt phẳng lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó (hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó).

$$\begin{cases} a \subset (\alpha), b \subset (\beta) \\ a // b \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d // a // b \\ d \equiv a \\ d \equiv b \end{cases}$$



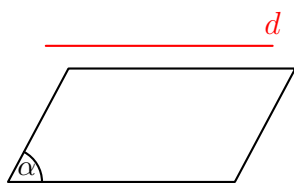
Giao tuyến $d // a // b$

4.2.2: Đường thẳng và mặt phẳng song song

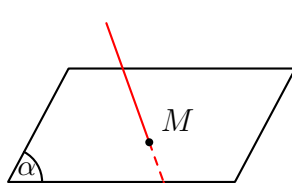
1. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) . Có 3 vị trí tương đối giữa a và (α) :

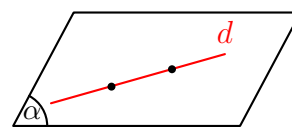
- **a cắt (α) :** Đường thẳng a và mặt phẳng (α) có duy nhất 1 điểm chung, ký hiệu $a \cap (\alpha) = M$ hay $a \cap (\alpha) = M$.
- **a nằm trong (α) :** Đường thẳng a và mặt phẳng (α) có nhiều hơn một điểm chung (khi đó điểm thuộc a đều thuộc (α)), ký hiệu $a \subset (\alpha)$.
- **a song song với (α) :** Đường thẳng a và mặt phẳng (α) không có điểm chung, ký hiệu $a // (\alpha)$. Ta có: $a // (\alpha) \iff a \cap (\alpha) = \emptyset$.



$d // (\alpha)$



$d \cap (\alpha) = \{M\}$

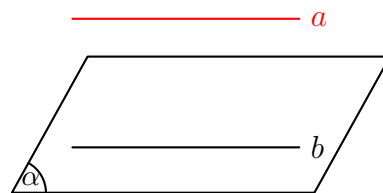


$d \subset (\alpha)$

2. Dấu hiệu nhận biết đường thẳng song song với mặt phẳng

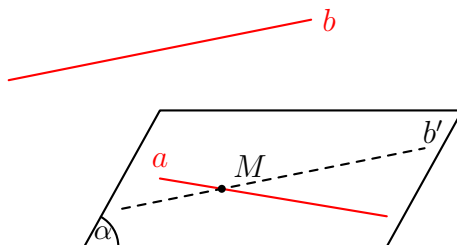
- Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (α) và song song với một đường thẳng b nằm trong (α) thì đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) .

$$\begin{cases} a \not\subset (\alpha) \\ b \subset (\alpha) \\ a // b \end{cases} \Rightarrow a // (\alpha)$$



- Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Khi đó, tồn tại duy nhất một mặt phẳng (α) chứa a và song song với b .

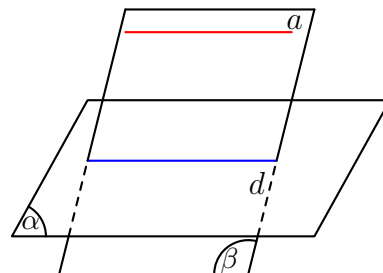
$$\begin{cases} a, b \text{ chéo nhau} \\ b' // b \quad (b' \cap a = \{M\}) \\ (\alpha) = (a, b') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \subset (\alpha) \\ b // (\alpha) \end{cases} \quad (\text{mặt phẳng } (\alpha) \text{ là duy nhất})$$



3. Tính chất với giao tuyến

- Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) . Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến d thì d song song với a .

$$\begin{cases} a // (\alpha) \\ a \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \end{cases} \Rightarrow a // d$$

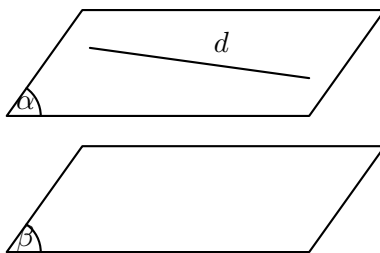


4.2.3: Hai mặt phẳng song song

1. Định nghĩa hai mặt phẳng song song

Hai mặt phẳng (α) và (β) được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung. Kí hiệu $(\alpha) // (\beta)$.

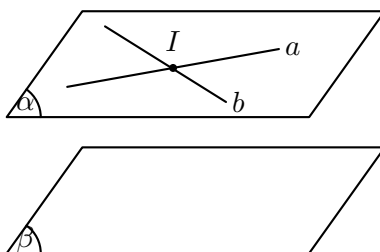
$$(\alpha) // (\beta) \iff (\alpha) \cap (\beta) = \emptyset$$



2. Dấu hiệu nhận biết hai mặt phẳng song song

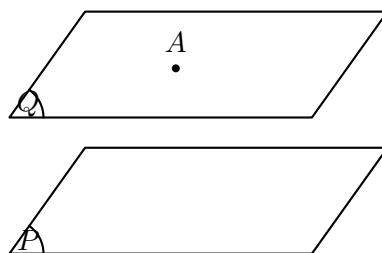
- Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và cùng song song với mặt phẳng (β) thì mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β) .

$$\begin{cases} a \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \\ a \cap b = \{I\} \\ a // (\beta) \\ b // (\beta) \end{cases} \implies (\alpha) // (\beta)$$



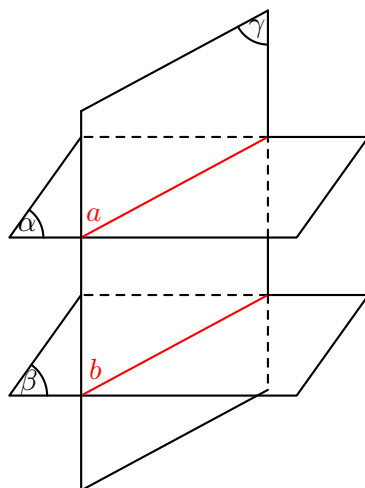
3. Tính chất của hai mặt phẳng song song

- **(Qua một điểm):** Qua một điểm A nằm ngoài mặt phẳng (P) , có một và chỉ một mặt phẳng song song với (P) .



- **(Giao tuyến với mặt phẳng thứ ba):** Cho hai mặt phẳng song song (α) và (β) . Nếu mặt phẳng (γ) cắt (α) theo giao tuyến a và cắt (β) theo giao tuyến b thì a song song với b .

$$\begin{cases} (\alpha) // (\beta) \\ (\gamma) \cap (\alpha) = a \\ (\gamma) \cap (\beta) = b \end{cases} \implies a // b$$



- **Bắc cầu:** Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

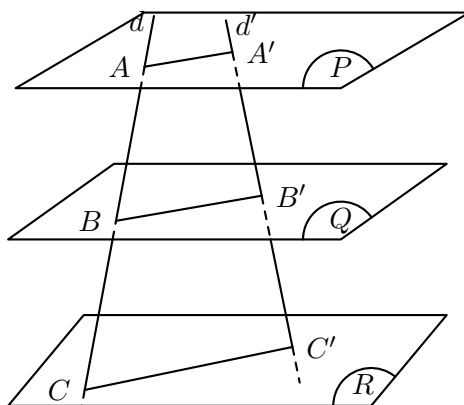
$$\begin{cases} (\alpha) // (\gamma) \\ (\beta) // (\gamma) \\ (\alpha) \neq (\beta) \end{cases} \implies (\alpha) // (\beta)$$

- **Đường thẳng trong mặt phẳng:** Cho hai mặt phẳng song song (α) và (β) , đường thẳng $d \subset (\alpha)$ thì $d // (\beta)$ (Hiểu rằng nếu một đường thẳng nằm trong một trong hai mặt phẳng song song thì đường thẳng đó song song với mặt phẳng còn lại).

4. Định lý Thales trong không gian

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến phân biệt bất kỳ những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

$$\begin{cases} (P) // (Q) // (R) \\ d_1 \cap (P) = A_1, d_1 \cap (Q) = B_1, d_1 \cap (R) = C_1 \\ d_2 \cap (P) = A_2, d_2 \cap (Q) = B_2, d_2 \cap (R) = C_2 \end{cases} \implies \frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2}$$



5. Hình lăng trụ

- **Định nghĩa:** Cho hai mặt phẳng song song (α) và (α') . Trên (α) cho đa giác lồi $A_1A_2 \dots A_n$. Qua các đỉnh $A_1, A_2, \dots, A_n$ vẽ các đường thẳng đôi một song song và

cắt mặt phẳng (α') tại $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$. Hình gồm hai đa giác $A_1A_2 \dots A_n, A'_1A'_2 \dots A'_n$ và các tứ giác $A_1A'_1A'_2A_2, A_2A'_2A'_3A_3, \dots, A_nA'_nA'_1A_1$ được gọi là **hình lăng trụ** và ký hiệu là $A_1A_2 \dots A_n.A'_1A'_2 \dots A'_n$.

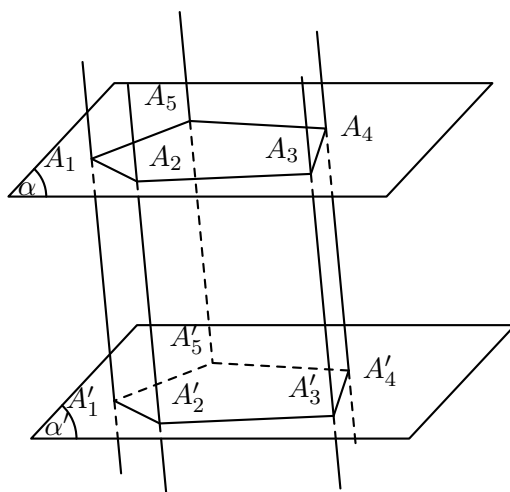
• **Các yếu tố của hình lăng trụ:**

- + **Đỉnh:** Các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$.
- + **Cạnh bên:** Các đoạn thẳng $A_1A'_1, A_2A'_2, \dots, A_nA'_n$.
- + **Cạnh đáy:** Các đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ và $A'_1A'_2, A'_2A'_3, \dots, A'_nA'_1$.
- + **Mặt đáy:** Hai đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ và $A'_1A'_2 \dots A'_n$.
- + **Mặt bên:** Các tứ giác $A_1A'_1A'_2A_2, A_2A'_2A'_3A_3, \dots, A_nA'_nA'_1A_1$.

• **Tính chất:**

- + Các mặt bên của hình lăng trụ đều là các hình bình hành.
- + Các cạnh bên đôi một song song và có độ dài bằng nhau.
- + Hai mặt đáy là hai đa giác bằng nhau và nằm trên hai mặt phẳng song song.

• **Chú ý:** Tên của hình lăng trụ được gọi dựa theo tên của đa giác đáy (ví dụ: lăng trụ tam giác, lăng trụ tứ giác,...).



6. Hình hộp

• **Định nghĩa:** Hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ có hai đáy là hình bình hành được gọi là **hình hộp**.

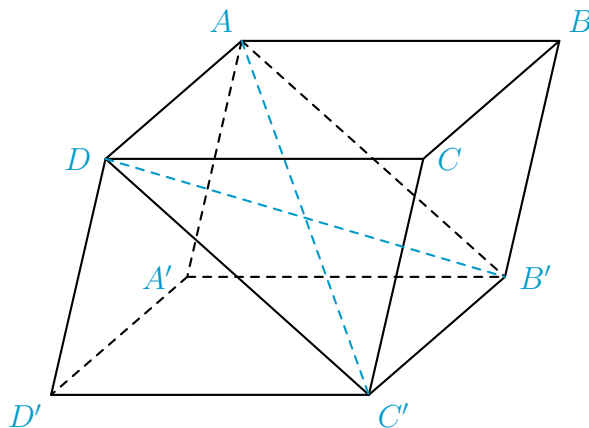
• **Các yếu tố của hình hộp:**

- + **Đỉnh đối diện:** Hai đỉnh không cùng thuộc bất kỳ mặt nào của hình hộp (các cặp điểm A và C' , B và D' , C và A' , D và B').
- + **Đường chéo:** Các đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gồm AC', BD', CA' và DB' .
- + **Mặt đối diện:** Hai mặt không có điểm chung (các cặp tứ giác $ABCD$ và $A'B'C'D'$, $ADD'A'$ và $BCC'B'$, $ABB'A'$ và $DCC'D'$).

• **Tính chất:**

- + Tất cả 6 mặt của hình hộp đều là các hình bình hành.

- +) Các mặt đối diện của hình hộp song song với nhau, bằng nhau và có thể coi là hai đáy của hình hộp.
- +) Các đường chéo của hình hộp cùng đi qua trung điểm của mỗi đường (đồng quy tại trung điểm của mỗi đường).



4.2.4: Phép Chiếu Song Song

1. Phép chiếu song song

Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ cắt (α) .

- Với mỗi điểm M trong không gian:
 - Nếu $M \in \Delta$ thì hình chiếu M' là giao điểm của (α) và Δ .
 - Nếu $M \notin \Delta$ thì hình chiếu M' là giao điểm của (α) và đường thẳng qua M song song với Δ .
- Điểm M' được gọi là **hình chiếu song song** của điểm M trên mặt phẳng (α) theo phương Δ .
- Mặt phẳng (α) gọi là **mặt phẳng chiếu**, đường thẳng Δ gọi là **phương chiếu**.
- Cho hình $\mathcal{H}$. Tập hợp $\mathcal{H}'$ gồm các hình chiếu M' của mọi điểm $M \in \mathcal{H}$ qua phép chiếu song song được gọi là **hình chiếu** của $\mathcal{H}$ qua phép chiếu song song đó.

2. Tính Chất Của Phép Chiếu Song Song

Đối tượng	Tính chất bảo toàn qua phép chiếu song song
Điểm	Biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của 3 điểm đó.
Đường thẳng, tia, đoạn thẳng	Biến đường thẳng thành đường thẳng, tia thành tia, đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
Song song	Biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau .
Tỉ số độ dài	Giữ nguyên tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng cùng nằm trên một đường thẳng hoặc nằm trên hai đường thẳng song song.

3. Hình biểu diễn của một hình trong không gian

- **Khái niệm:** Hình biểu diễn của một hình trong không gian là hình chiếu song song của hình đó trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.
- **Quy tắc vẽ hình biểu diễn:**
 - a) Biểu diễn đường thẳng bằng đường thẳng, đoạn thẳng bằng đoạn thẳng.
 - b) Biểu diễn hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau) bằng hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau).
 - c) Giữ nguyên tỉ số độ dài của các đoạn thẳng nằm trên các đường thẳng song song hoặc trùng nhau.
 - d) Dùng nét liền để biểu diễn cho đường nhìn thấy và nét đứt cho đường bị che khuất.

4.3 Quan hệ vuông góc trong không gian

4.3.1: Hai đường thẳng vuông góc

1. Góc giữa hai đường thẳng

- **Định nghĩa:** Góc giữa hai đường thẳng m và n trong không gian, kí hiệu (m, n) , là góc giữa hai đường thẳng a và b cùng đi qua một điểm và tương ứng song song với m và n .
- **Chú ý:**
 - +) Để xác định góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b , ta có thể lấy một điểm O thuộc đường thẳng a và qua đó kẻ đường thẳng b' song song với b . Khi đó $(a, b) = (a, b')$.
 - +) Với hai đường thẳng a, b bất kì: $0^\circ \leq (a, b) \leq 90^\circ$.
 - +) Nếu a song song hoặc trùng với a' và b song song hoặc trùng với b' thì $(a, b) = (a', b')$.

2. Hai đường thẳng vuông góc

- **Định nghĩa:** Hai đường thẳng a, b được gọi là **vuông góc với nhau**, kí hiệu $a \perp b$, nếu góc giữa chúng bằng 90° .
- **Tính chất**
 - +) Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b thì a cũng vuông góc với mọi đường thẳng song song với b :

$$\left. \begin{array}{l} a \perp b \\ c // b \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp c.$$

4.3.2: Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

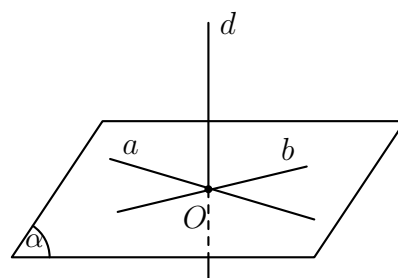
1. Định nghĩa

- **Định nghĩa:** Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) .
- **Kí hiệu:** $d \perp (\alpha)$ hoặc $(\alpha) \perp d$.

2. Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

- Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng đó.

$$\left. \begin{array}{l} d \perp a \\ d \perp b \\ a, b \subset (\alpha) \\ a \cap b = \{O\} \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp (\alpha).$$



3. Tính chất

- Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- Nếu ba đường thẳng đôi một phân biệt a, b, c cùng đi qua điểm O và cùng vuông góc với đường thẳng Δ thì a, b, c cùng nằm trong mặt phẳng đi qua O và vuông góc với Δ .
- **Mặt phẳng trung trực:** Mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB được gọi là **mặt phẳng trung trực** của đoạn thẳng AB . Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là tập hợp các điểm cách đều hai điểm A, B .
- Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

4. Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc

- Giữa hai đường thẳng song song và mặt phẳng:

- +) Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì các đường thẳng song song với a cũng vuông góc với (P) :

$$\left. \begin{array}{l} a \perp (P) \\ b // a \end{array} \right\} \Rightarrow b \perp (P)$$

- +) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau:

$$\left. \begin{array}{l} a \perp (P) \\ b \perp (P) \\ a \neq b \end{array} \right\} \Rightarrow a // b$$

• **Giữa đường thẳng và hai mặt phẳng song song:**

- +) Nếu đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) thì Δ cũng vuông góc với các mặt phẳng song song với (P) :

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \perp (P) \\ (Q) // (P) \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta \perp (Q)$$

- +) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau:

$$\left. \begin{array}{l} (P) \perp \Delta \\ (Q) \perp \Delta \\ (P) \neq (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) // (Q)$$

• **Giữa đường thẳng song song với mặt phẳng và đường thẳng vuông góc:**

- +) Nếu đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) thì Δ vuông góc với mọi đường thẳng song song với (P) :

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \perp (P) \\ a // (P) \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta \perp a$$

- +) Nếu đường thẳng a và mặt phẳng (P) cùng vuông góc với một đường thẳng Δ thì a nằm trong (P) hoặc song song với (P) :

$$\left. \begin{array}{l} a \perp \Delta \\ (P) \perp \Delta \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \subset (P) \\ a // (P) \end{array} \right]$$

4.3.3: Phép chiếu vuông góc. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

1. Phép chiếu vuông góc

- **Định nghĩa:** Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương Δ vuông góc với (P) được gọi là **phép chiếu vuông góc** lên mặt phẳng (P) .
- **Nhận xét:**
 - +) Vì phép chiếu vuông góc lên một mặt phẳng là một trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song nên nó có mọi tính chất của phép chiếu song song.
 - +) Phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P) còn được gọi đơn giản là **phép chiếu** lên mặt phẳng (P) . Hình chiếu vuông góc $\mathcal{H}'$ của hình $\mathcal{H}$ trên mặt phẳng (P)

còn được gọi là **hình chiếu** của $\mathcal{H}$ trên mặt phẳng (P) .

- +) Nếu $A \notin (P)$ và A' là hình chiếu của A trên (P) thì đường thẳng $AA' \perp (P)$.
- +) Nếu đường thẳng $a \perp (P)$ thì hình chiếu của a trên (P) là một điểm (chính là giao điểm $a \cap (P)$).

• **Định lí ba đường vuông góc**

- +) Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) không vuông góc với nhau. Khi đó, một đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng a khi và chỉ khi b vuông góc với hình chiếu vuông góc a' của a trên (P) :

$$\left. \begin{array}{l} a \not\perp (P) \\ b \subset (P) \\ a' = \text{hình chiếu của } a \text{ lên } (P) \end{array} \right\} \Rightarrow (b \perp a \Leftrightarrow b \perp a')$$

2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

• **Định nghĩa:**

- +) Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90° .
- +) Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì **góc giữa đường thẳng a và hình chiếu a' của nó trên (P) được gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) .**

• **Chú ý**

- +) Nếu α là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) thì $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.
- +) Cho điểm A có hình chiếu H trên mặt phẳng (P) . Lấy điểm $O \in (P)$ ($O \neq H$). Khi đó góc giữa đường thẳng AO và mặt phẳng (P) bằng góc $\widehat{AOH}$.

4.3.4: Hai mặt phẳng vuông góc

1. Góc giữa hai mặt phẳng, hai mặt phẳng vuông góc

• **Góc giữa hai mặt phẳng:**

- +) Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) . Lấy các đường thẳng a, b tương ứng vuông góc với $(P), (Q)$. Khi đó, góc giữa a và b không phụ thuộc vào vị trí của a, b và được gọi là **góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .**
- +) **Kí hiệu:** $((P), (Q))$ hoặc $(\widehat{(P), (Q)})$.
- +) **Chú ý:** Nếu φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) thì $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

• **Hai mặt phẳng vuông góc**

- +) **Định nghĩa:** Hai mặt phẳng (P) và (Q) được gọi là **vuông góc với nhau** nếu góc giữa chúng bằng 90° .
- +) **Kí hiệu:** $(P) \perp (Q)$ hoặc $(Q) \perp (P)$.

• **Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau**

- +) Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ . Lấy hai đường thẳng m, n tương ứng thuộc $(P), (Q)$ và cùng vuông góc với Δ tại một điểm O (nói

cách khác, lấy một mặt phẳng vuông góc với Δ , cắt $(P), (Q)$ tương ứng theo các giao tuyến m, n).

+) Khi đó, góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa m và n :

$$((P), (Q)) = (m, n)$$

+) **Đặc biệt:** (P) vuông góc với (Q) khi và chỉ khi m vuông góc với n ($m \perp n$).

2. Điều kiện hai mặt phẳng vuông góc

- Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

+) Để chứng minh $(P) \perp (Q)$, ta chỉ cần chứng minh:

$$\left. \begin{array}{l} b \subset (P) \\ b \perp (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) \perp (Q)$$

3. Tính chất hai mặt phẳng vuông góc

- Với hai mặt phẳng vuông góc với nhau, bất kì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này mà vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia:

$$\left. \begin{array}{l} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = \Delta \\ a \subset (P), a \perp \Delta \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (Q)$$

- Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. Mỗi đường thẳng qua điểm O thuộc (P) và vuông góc với mặt phẳng (Q) thì đường thẳng đó thuộc mặt phẳng (P) .
- Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó:

$$\left. \begin{array}{l} (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \\ (P) \cap (Q) = a \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (R)$$

4. Góc nhị diện

- Định nghĩa góc nhị diện:**

- +) Hình gồm hai nửa mặt phẳng $(P), (Q)$ có chung bờ a được gọi là một **góc nhị diện**, kí hiệu là $[P, a, Q]$.
- +) Đường thẳng a gọi là **cạnh** và các nửa mặt phẳng $(P), (Q)$ gọi là các **mặt** của góc nhị diện đó.
- +) Nếu hai điểm M, N không thuộc đường thẳng a , ta kí hiệu $[M, a, N]$ là góc nhị diện có cạnh a và các mặt tương ứng chứa M, N .

- Góc phẳng của góc nhị diện:**

- +) Từ một điểm O bất kì thuộc cạnh a của góc nhị diện $[P, a, Q]$, vẽ các tia Ox, Oy tương ứng thuộc $(P), (Q)$ và vuông góc với a .

- +) Góc $\widehat{xOy}$ được gọi là **góc phẳng của góc nhị diện** $[P, a, Q]$ (gọi tắt là góc phẳng nhị diện).
- +) Số đo của góc $\widehat{xOy}$ không phụ thuộc vào vị trí của O trên a , được gọi là **số đo của góc nhị diện** $[P, a, Q]$.

• **Chú ý:**

- +) Số đo của góc nhị diện có thể nhận giá trị từ 0° đến 180° . Góc nhị diện được gọi là vuông, nhọn, tù nếu nó có số đo tương ứng bằng, nhỏ hơn, lớn hơn 90° .
- +) Mặt phẳng chứa góc phẳng nhị diện $\widehat{xOy}$ của $[P, a, Q]$ vuông góc với cạnh a .
- +) Hai mặt phẳng cắt nhau tạo thành bốn góc nhị diện. Nếu một trong bốn góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì các góc nhị diện còn lại cũng là góc nhị diện vuông.

4.3.5: Một số hình lăng trụ đặc biệt

1. Hình lăng trụ đứng

- **Định nghĩa:** Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
- **Tính chất:** Hình lăng trụ đứng có các mặt bên là các hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.

2. Hình lăng trụ đều

- **Định nghĩa:** Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.
- **Tính chất:** Hình lăng trụ đều có các mặt bên là các hình chữ nhật có cùng kích thước.

3. Hình hộp đứng

- **Định nghĩa:** Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.
- **Tính chất:** Hình hộp đứng có các mặt bên là các hình chữ nhật.

4. Hình hộp chữ nhật

- **Định nghĩa:** Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.
- **Tính chất:**
 - +) Hình hộp chữ nhật có các mặt bên là hình chữ nhật (cả 6 mặt đều là hình chữ nhật).
 - +) Các đường chéo của hình hộp chữ nhật có độ dài bằng nhau và chúng cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

5. Hình lập phương

- **Định nghĩa:** Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.
- **Tính chất:** Hình lập phương có các mặt là các hình vuông.

6. Chú ý

- Khi đáy của hình lăng trụ đứng (đều) là tam giác, tứ giác, ngũ giác,... đôi khi ta cũng tương ứng gọi rõ là hình lăng trụ đứng (đều) tam giác, tứ giác, ngũ giác,...

4.3.6: Hình chóp đều và hình chóp cụt đều

1. Hình chóp đều

- **Định nghĩa:** Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.
- **Điều kiện cần và đủ:** Một hình chóp là đều khi và chỉ khi đáy của nó là một hình đa giác đều và hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đáy trùng với tâm của mặt đáy.
- **Chú ý:**
 - +) Khi đáy của hình chóp đều là tam giác đều, hình vuông, ngũ giác đều,... đôi khi ta cũng gọi rõ tương ứng là hình chóp tam giác đều, hình chóp tứ giác đều, hình chóp ngũ giác đều,...

2. Hình chóp cụt đều

- **Định nghĩa:**
 - +) Hình chóp cụt đều $A_1A_2 \dots A_n.B_1B_2 \dots B_n$ là phần còn lại của hình chóp đều $S.A_1A_2 \dots A_n$ sau khi cắt bỏ đi hình chóp đều nhỏ $S.B_1B_2 \dots B_n$ bởi một mặt phẳng song song với mặt phẳng đáy $(A_1A_2 \dots A_n)$.
 - +) Hình này được giới hạn bởi hai đa giác đều $A_1A_2 \dots A_n, B_1B_2 \dots B_n$ và các hình thang cân $A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2, \dots, A_nA_1B_1B_n$.
- **Các thành phần của hình chóp cụt đều**
 - +) **Mặt đáy:** Hai đa giác đều $A_1A_2 \dots A_n$ và $B_1B_2 \dots B_n$.
 - +) **Mặt bên:** Các hình thang cân $A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2, \dots, A_nA_1B_1B_n$.
 - +) **Cạnh bên:** Các đoạn thẳng $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ (chúng có độ dài bằng nhau).
 - +) **Cạnh đáy:** Các cạnh của hai mặt đa giác đáy.
 - +) **Đường cao và chiều cao:** Đoạn thẳng HK nối tâm của hai đa giác đáy được gọi là đường cao; độ dài của đoạn thẳng HK được gọi là chiều cao của hình chóp cụt đều.

4.3.7: Khoảng cách

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng

- **Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng**
 - +) Khoảng cách từ một điểm M đến một đường thẳng a , kí hiệu $d(M, a)$, là khoảng cách giữa M và hình chiếu H của M trên a .
- **Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng**
 - +) Khoảng cách từ một điểm M đến một mặt phẳng (P) , kí hiệu $d(M, (P))$, là khoảng cách giữa M và hình chiếu H của M trên (P) .
- **Nhận xét:** Khoảng cách từ M đến đường thẳng a (mặt phẳng (P)) là khoảng cách nhỏ nhất giữa M và một điểm thuộc a (thuộc (P)).
- **Chú ý:**
 - +) $d(M, a) = 0 \Leftrightarrow M \in a; \quad d(M, (P)) = 0 \Leftrightarrow M \in (P)$.

- +) Khoảng cách từ đỉnh đến mặt phẳng chứa mặt đáy của một hình chóp được gọi là **chiều cao** của hình chóp đó.

2. Khoảng cách giữa các đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song

• Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

- +) Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a , kí hiệu $d(a, (P))$, là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến (P) .

• Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

- +) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) , kí hiệu $d((P), (Q))$, là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

• Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

- +) Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song m và n , kí hiệu $d(m, n)$, là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

- **Chú ý:** Khoảng cách giữa hai đáy của một hình lăng trụ được gọi là **chiều cao** của hình lăng trụ đó.

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

• Đoạn vuông góc chung và khoảng cách

- +) Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b và vuông góc với cả hai đường thẳng đó được gọi là **đường vuông góc chung** của a và b .
 +) Nếu đường vuông góc chung Δ cắt a, b tương ứng tại M, N thì độ dài đoạn thẳng MN được gọi là **khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau** a, b , kí hiệu $d(a, b)$.

• Nhận xét

- +) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại:

$$d(a, b) = d(a, (P)) \quad (b \subset (P), a // (P))$$

- +) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song, tương ứng chứa hai đường thẳng đó:

$$d(a, b) = d((P), (Q)) \quad (a \subset (P), b \subset (Q), (P) // (Q))$$

4.3.8: Thể tích

1. Khái niệm về khối đa diện

- Phần không gian được giới hạn bởi hình chóp, hình chóp cắt đều, hình lăng trụ, hình hộp tương ứng được gọi là **khối chóp**, **khối chóp cắt đều**, **khối lăng trụ**, **khối hộp**.
- Đỉnh, mặt, cạnh, đường cao của các khối hình đó lần lượt là đỉnh, mặt, cạnh, đường cao của hình chóp, hình chóp cắt đều, hình lăng trụ, hình hộp tương ứng.

2. Công thức tính thể tích các khối hình

- **Thể tích khối chóp:** Thể tích V của khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là:

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S$$

- **Thể tích khối chóp cắt đều:** Thể tích V của khối chóp cắt đều có diện tích đáy lớn S , diện tích đáy bé S' và chiều cao h là:

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (S + S' + \sqrt{S \cdot S'})$$

- **Thể tích khối lăng trụ:** Thể tích V của khối lăng trụ có diện tích đáy S và chiều cao h là:

$$V = h \cdot S$$

3. Nhận xét

- Thể tích khối tứ diện bằng một phần ba tích của chiều cao từ một đỉnh và diện tích mặt đối diện với đỉnh đó.
- Thể tích của khối hộp bằng tích của diện tích một mặt và chiều cao của khối hộp ứng với mặt đó.

Chương 5

GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

Thách thức giới hạn. Đòi hỏi bạn nhớ kiến thức chuẩn chỉ.

5.1 Giới hạn

5.1.1: Giới Hạn Của Dãy Số

1. Giới Hạn Hữu Hạn Của Dãy Số

- **Định nghĩa:** Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n tiến tới dương vô cực nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \quad \text{hoặc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

- Dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn là số thực a nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - a) = 0$, ký hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ hay $u_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow +\infty$.

- **Một số giới hạn đặc biệt:**

$$+) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad (\text{với } k \text{ là số nguyên dương}).$$

$$+) \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 \quad (\text{với } |q| < 1).$$

$$+) \text{ Nếu } |u_n| \leq v_n \text{ với mọi } n \geq 1 \text{ và } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \text{ thì } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

$$+) \lim_{n \rightarrow +\infty} c = c \quad (\text{với } c \text{ là hằng số}).$$

2. Các Phép Toán Về Giới Hạn Hữu Hạn

- Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = b$ thì

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = a + b;$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = a - b;$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \cdot v_n) = a \cdot b;$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} \quad (\text{nếu } b \neq 0).$$

- Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ thì

$$a \geq 0 \quad \text{và} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{a}.$$

3. Tổng Của Cấp Số Nhân Lũì Vô Hạn

- Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q thỏa mãn $|q| < 1$ được gọi là **cấp số nhân lùi vô hạn**.
- **Công thức tính tổng:**

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \frac{u_1}{1 - q} \quad (|q| < 1)$$

4. Giới Hạn Vô Cực Của Dãy Số

- **Định nghĩa:**

+) Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kỳ, kể từ một số hạng nào đó trở đi, ký hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ hay $u_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

+) Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty$, ký hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ hay $u_n \rightarrow -\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

• **Một số giới hạn đặc biệt:**

+) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$, với k là số nguyên dương;

+) $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$, với $q > 1$.

• **Một số quy tắc tính giới hạn vô cực:**

+) Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ (hoặc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$) thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

+) Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.

+) Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a > 0$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = +\infty$.

5.1.2: Bảng Tổng Kết Lý Thuyết Giới Hạn Của Hàm Số

1. Giới Hạn Hữu Hạn Của Hàm Số Tại Một Điểm

• **Định nghĩa:** Giả sử $(a; b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$, có thể trừ điểm x_0 . Ta nói hàm số $f(x)$ có **giới hạn** là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kỳ, $x_n \in (a; b)$, $x_n \neq x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Ký hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$.

• **Một số giới hạn đặc biệt:**

+) $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ (với c là hằng số);

+) $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$ (với $n \in \mathbb{N}$).

• **Các quy tắc tính giới hạn của hàm số tại một điểm:**

a) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$ thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad (\text{nếu } M \neq 0).$$

b) Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì

$$L \geq 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$$

• **Giới hạn một bên:**

- +) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$. Ta nói số L là **giới hạn bên phải** của $f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì thoả mãn $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$, ký hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.
- +) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$. Ta nói số L là **giới hạn bên trái** của $f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì thoả mãn $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$, ký hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

- **Mối liên hệ:** $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

2. Giới Hạn Hữu Hạn Của Hàm Số Tại Vô Cực

• **Định nghĩa:**

- +) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$, ký hiệu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow +\infty$.
- +) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; b)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < b$ và $x_n \rightarrow -\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$, ký hiệu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow -\infty$.

• **Các quy tắc và giới hạn đặc biệt:**

- +) Các quy tắc tính giới hạn hữu hạn tại một điểm cũng đúng cho giới hạn hữu hạn tại vô cực.
- +) Với c là hằng số: $\lim_{x \rightarrow +\infty} c = c$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} c = c$.
- +) Với k là một số nguyên dương: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^k} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$.

3. Giới Hạn Vô Cực Của Hàm Số

• **Định nghĩa giới hạn $+\infty$ và $-\infty$:**

- +) Giả sử khoảng $(a; b)$ chứa x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b) \setminus \{x_0\}$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn $+\infty$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in (a; b) \setminus \{x_0\}$, $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow +\infty$, ký hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.
- +) Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn $-\infty$ khi $x \rightarrow x_0$, ký hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} [-f(x)] = +\infty$.
- +) Giới hạn một bên $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$ cũng như $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$ và các giới hạn tại vô cực $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty$ được định nghĩa tương tự.

• **Một số giới hạn đặc biệt tại vô cực:**

- +) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương;

+) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$ với k là số nguyên dương chẵn;

+) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$ với k là số nguyên dương lẻ.

• Một số quy tắc tính giới hạn vô cực:

+) **Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x)g(x)$:** Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ (hoặc $-\infty$).

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

+) **Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{f(x)}{g(x)}$:**

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	$+$	$+\infty$
		$-$	$-\infty$
$L < 0$	0	$+$	$-\infty$
		$-$	$+\infty$

(Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$, $x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$).

5.2 Hàm số liên tục

5.2.1: Bảng Tổng Kết Lý Thuyết Hàm Số Liên Tục

1. Hàm Số Liên Tục Tại Một Điểm

- **Định nghĩa:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 . Hàm số $f(x)$ được gọi là **liên tục tại điểm** x_0 nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

- **Hàm số gián đoạn:** Hàm số $f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là **gián đoạn** tại điểm đó.

2. Hàm Số Liên Tục Trên Một Khoảng

- **Liên tục trên khoảng:** Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên khoảng** $(a; b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng này.

- **Liên tục trên đoạn:** Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên đoạn** $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

- *Chú ý:* Các khái niệm hàm số liên tục trên nửa khoảng như $(a; b]$, $[a; +\infty)$, ... được định nghĩa theo cách tương tự. Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một đường liền trên khoảng đó.
- **Tính liên tục của các hàm số sơ cấp cơ bản:**
 - +) Hàm số đa thức và các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
 - +) Các hàm số $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sqrt{x}$ và hàm phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) liên tục trên tập xác định của chúng.

3. Một Số Tính Chất Cơ Bản

- **Phép toán trên hàm số liên tục:** Giả sử hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục tại điểm x_0 . Khi đó:
 - +) Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x)g(x)$ liên tục tại x_0 ;
 - +) Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.
- **Sự tồn tại nghiệm**
 - +) Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Chương 6

HÀM SỐ MŨ - HÀM SỐ LOGARIT

Chương này mở ra hai hàm số mới gắn liền với nhiều vấn đề thực tiễn.

6.1 Lũy thừa - Logarit

6.1.1: Bảng Tổng Kết Lý Thuyết Lũy Thừa Với Số Mũ Thực

1. Lũy Thừa Với Số Mũ Nguyên

- **Định nghĩa:**

+) Cho n là một số nguyên dương. Với a là số thực tùy ý:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ thừa số}}$$

+) Với a là số thực khác 0:

$$a^0 = 1; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

+) Trong biểu thức a^m , a gọi là **cơ số**, m gọi là **số mũ**.

+) *Chú ý:* 0^0 và 0^{-n} (với $n \in \mathbb{N}^*$) không có nghĩa.

- **Tính chất của lũy thừa với số mũ nguyên:**

+) Với $a \neq 0, b \neq 0$ và m, n là các số nguyên, ta có:

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^{m+n}; & \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n}; & (a^m)^n &= a^{mn}; \\ (ab)^m &= a^m b^m; & \left(\frac{a}{b}\right)^m &= \frac{a^m}{b^m}. \end{aligned}$$

+) **So sánh lũy thừa với số mũ nguyên:**

* Nếu $a > 1$ thì $a^m > a^n \iff m > n$.

* Nếu $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n \iff m < n$.

2. Lũy Thừa Với Số Mũ Hữu Tỉ

- **Khái niệm căn bậc n :**

+) Cho số thực a và số nguyên dương n . Số b được gọi là **căn bậc n** của số a nếu $b^n = a$.

+) **Nhận xét:**

* Khi n là số lẻ, mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n và kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$. (Căn bậc 1 của số a chính là a).

* Khi n là số chẵn, mỗi số thực dương có đúng hai căn bậc n là hai số đối nhau, giá trị dương kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$ (gọi là **căn số học bậc n của a**), giá trị âm kí hiệu là $-\sqrt[n]{a}$.

* $\sqrt[n]{0} = 0$ (với $n \in \mathbb{N}^*$).

* Số âm không có căn bậc chẵn.

- +) **Tính chất của căn bậc n :** Giả sử n, k là các số nguyên dương, m là số nguyên (giả thiết các biểu thức đều có nghĩa):

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab}; & \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; \\ (\sqrt[n]{a})^m &= \sqrt[n]{a^m}; & \sqrt[n]{a^n} &= \begin{cases} a & \text{khi } n \text{ lẻ} \\ |a| & \text{khi } n \text{ chẵn} \end{cases}; \\ \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[kn]{a}; & (\sqrt[n]{a})^n &= a.\end{aligned}$$

• **Khái niệm lũy thừa với số mũ hữu tỉ:**

- +) Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$, trong đó m là một số nguyên và n là số nguyên dương. Lũy thừa của a với số mũ r , kí hiệu là a^r , xác định bởi:

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

- +) *Chú ý:* Lũy thừa với số mũ hữu tỉ (của một số thực dương) có đầy đủ các tính chất như lũy thừa với số mũ nguyên.

3. Lũy Thừa Với Số Mũ Thực

• **Khái niệm lũy thừa với số mũ thực:**

- +) Cho a là số thực dương và α là một số vô tỉ. Xét dãy số hữu tỉ (r_n) mà $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \alpha$. Khi đó, dãy số (a^{r_n}) có giới hạn xác định và không phụ thuộc vào dãy số hữu tỉ (r_n) đã chọn.
- +) Giới hạn đó gọi là **lũy thừa của a với số mũ α** , kí hiệu là a^α :

$$a^\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n}$$

- **Tính chất:** Lũy thừa với số mũ thực (của một số dương) có đầy đủ các tính chất như lũy thừa với số mũ nguyên đã nêu.

6.1.2: Bảng Tổng Kết Lý Thuyết Lôgarit

1. Khái Niệm Lôgarit

- **Định nghĩa:** Cho a là một số thực dương khác 1 và M là một số thực dương. Số thực α để $a^\alpha = M$ được gọi là **lôgarit cơ số a của M** và kí hiệu là $\log_a M$.

$$\alpha = \log_a M \iff a^\alpha = M$$

- **Chú ý:** Không có lôgarit của số âm và số 0. Cơ số của lôgarit phải dương và khác 1.

- **Tính chất:** Với $0 < a \neq 1$, $M > 0$ và α là số thực tùy ý, ta có:

$$\begin{aligned}\log_a 1 &= 0; & \log_a a &= 1; \\ a^{\log_a M} &= M; & \log_a a^\alpha &= \alpha.\end{aligned}$$

2. Tính Chất Của Lôgarit

- **Quy tắc tính lôgarit:** Giả sử a là số thực dương khác 1, M và N là các số thực dương, α là số thực tùy ý. Khi đó:

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N;$$

$$\log_a \left(\frac{M}{N} \right) = \log_a M - \log_a N;$$

$$\log_a M^\alpha = \alpha \log_a M;$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (a, b \neq 1);$$

$$\log_{a^\alpha} M = \frac{1}{\alpha} \log_a M \quad (\alpha \neq 0).$$

- **Đổi cơ số của lôgarit:** Với các cơ số lôgarit a và b bất kì ($0 < a \neq 1$, $0 < b \neq 1$) và M là số thực dương tùy ý, ta luôn có:

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$$

3. Lôgarit Thập Phân Và Lôgarit Tự Nhiên

- **Lôgarit thập phân:** Lôgarit cơ số 10 của một số dương M gọi là **lôgarit thập phân** của M , kí hiệu là $\log M$ hoặc $\lg M$.
- **Số e và Lôgarit tự nhiên:**

+) **Số e :** Số e được định nghĩa qua giới hạn:

$$e = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \approx 2,7183$$

+) **Công thức lãi kép liên tục:** Với số vốn ban đầu là P , theo thể thức lãi kép liên tục, lãi suất hằng năm không đổi là r thì sau t năm, số tiền thu được cả vốn lẫn lãi sẽ là:

$$A = Pe^{rt}$$

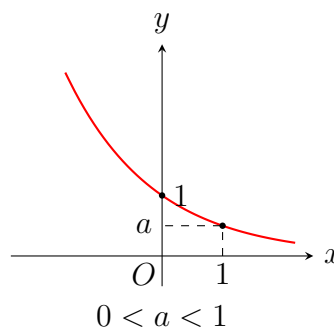
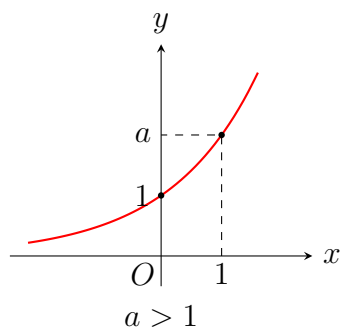
+) **Lôgarit tự nhiên:** Lôgarit cơ số e của một số dương M gọi là **lôgarit tự nhiên** của M , kí hiệu là $\ln M$.

6.2 Hàm số mũ và hàm số logarit

6.2.1: Bảng Tổng Kết Lý Thuyết Hàm Số Mũ Và Hàm Số Lôgarit

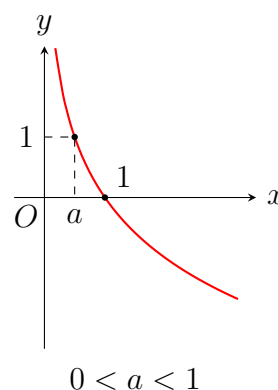
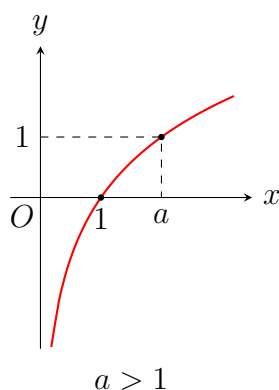
1. Hàm Số Mũ

- **Định nghĩa:** Cho a là số thực dương khác 1. Hàm số $y = a^x$ được gọi là **hàm số mũ** cơ số a .
- **Tính chất của hàm số mũ $y = a^x$:**
 - +) Có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $(0; +\infty)$.
 - +) Đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 1$ và nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $0 < a < 1$.
 - +) Liên tục trên $\mathbb{R}$.
 - +) Có đồ thị đi qua các điểm $(0; 1)$, $(1; a)$ và luôn nằm phía trên trục hoành.
- **Dạng đồ thị của hàm số mũ $y = a^x$:**



2. Hàm Số Lôgarit

- **Định nghĩa:** Cho a là số thực dương khác 1. Hàm số $y = \log_a x$ được gọi là **hàm số lôgarit** cơ số a .
- **Tính chất của hàm số lôgarit $y = \log_a x$:**
 - +) Có tập xác định là $(0; +\infty)$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$.
 - +) Đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi $a > 1$ và nghịch biến trên $(0; +\infty)$ khi $0 < a < 1$.
 - +) Liên tục trên $(0; +\infty)$.
 - +) Có đồ thị đi qua các điểm $(1; 0)$, $(a; 1)$ và luôn nằm bên phải trục tung.
- **Dạng đồ thị của hàm số lôgarit $y = \log_a x$:**



3. Bảng Tóm Tắt Và So Sánh Tính Chất

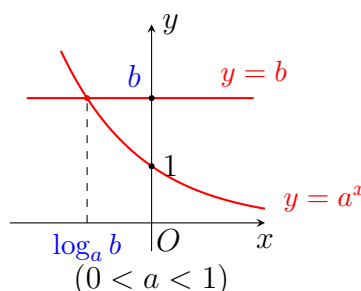
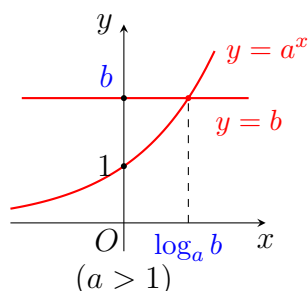
Đặc điểm	Hàm số mũ $y = a^x$	Hàm số lôgarit $y = \log_a x$
Tập xác định	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$\mathbb{D} = (0; +\infty)$
Tập giá trị	$T = (0; +\infty)$	$T = \mathbb{R}$
Tính biến thiên	Đồng biến khi $a > 1$, Nghịch biến khi $0 < a < 1$	
Điểm thuộc đồ thị	$(0; 1)$ và $(1; a)$	$(1; 0)$ và $(a; 1)$
Vị trí đồ thị	Nằm phía trên trục hoành (Ox)	Nằm bên phải trục tung (Oy)

6.3 Bất phương trình Mũ và Lôgarit

6.3.1: Bảng Tổng Kết Lý Thuyết Phương Trình, Bất Phương Trình Mũ Và Lôgarit

1. Phương Trình Mũ

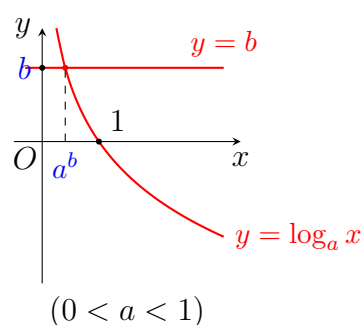
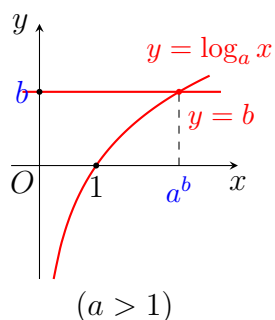
- **Phương trình mũ cơ bản** có dạng $a^x = b$ (với $0 < a \neq 1$).
 - +) Nếu $b > 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.
 - +) Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.
- Minh họa bằng đồ thị minh họa giao điểm của $y = a^x$ và $y = b$ ($b > 0$):



- **Đưa về cùng cơ số:** Nếu $0 < a \neq 1$ thì $a^u = a^v \iff u = v$.

2. Phương Trình Lôgarit

- **Phương trình lôgarit cơ bản** có dạng $\log_a x = b$ ($0 < a \neq 1$).
- Phương trình lôgarit cơ bản $\log_a x = b$ luôn có nghiệm duy nhất $x = a^b$.
- Minh họa bằng đồ thị giao điểm của $y = \log_a x$ và $y = b$:



- **Đưa về cùng cơ số:** Nếu $u, v > 0$ và $0 < a \neq 1$ thì $\log_a u = \log_a v \iff u = v$.

3. Bất Phương Trình Mũ

- **Bất phương trình mũ cơ bản** có dạng $a^x > b$ (hoặc $a^x \geq b, a^x < b, a^x \leq b$) với $a > 0, a \neq 1$.
- **Xét bất phương trình dạng $a^x > b$:**
 - +) Nếu $b \leq 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.
 - +) Nếu $b > 0$ thì bất phương trình tương đương với $a^x > a^{\log_a b}$:
 - * Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$.
 - * Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$.
- **Đưa về cùng cơ số:**
 - +) Nếu $a > 1$ thì $a^u > a^v \iff u > v$.
 - +) Nếu $0 < a < 1$ thì $a^u > a^v \iff u < v$.

4. Bất Phương Trình Lôgarit

- **Bất phương trình lôgarit cơ bản** có dạng $\log_a x > b$ (hoặc $\log_a x \geq b, \log_a x < b, \log_a x \leq b$) với $a > 0, a \neq 1$.
- **Xét bất phương trình dạng $\log_a x > b$:**
 - +) Nếu $a > 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $x > a^b$.
 - +) Nếu $0 < a < 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $0 < x < a^b$.
- **Đưa về cùng cơ số:**
 - +) Nếu $a > 1$ thì $\log_a u > \log_a v \iff u > v > 0$.
 - +) Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a u > \log_a v \iff 0 < u < v$.

Chương 7

XÁC SUẤT

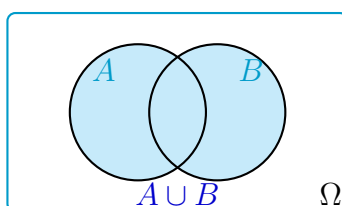
Đây là chương đòi hỏi học sinh tinh thông đọc hiểu, nắm vững kiến thức căn bản.

7.1 Biến cố hợp - Biến cố giao - Biến cố độc lập - Biến cố xung khắc

7.1.1: Bảng Tổng Kết Lý Thuyết Biến Cố Hợp, Biến Cố Giao, Biến Cố Xung Khắc, Biến Cố Đôi Và Biến Cố Độc Lập

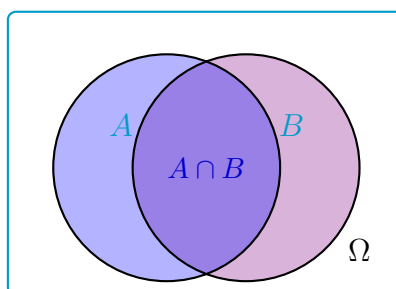
1. Biến Cố Hợp

- **Định nghĩa:** Cho A và B là hai biến cố. Biến cố: “ A hoặc B xảy ra” được gọi là **biến cố hợp** của A và B , kí hiệu là $A \cup B$.
- **Tính chất tập hợp:** Biến cố hợp của A và B là tập con $A \cup B$ của không gian mẫu Ω .
- Minh họa bằng sơ đồ Ven (Hình 8.1):



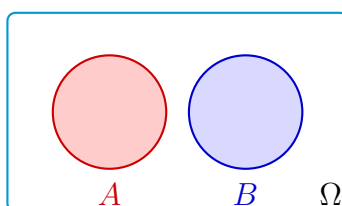
2. Biến Cố Giao

- **Định nghĩa:** Cho A và B là hai biến cố. Biến cố: “Cả A và B đều xảy ra” được gọi là **biến cố giao** của A và B , kí hiệu là AB .
- **Tính chất tập hợp:** Biến cố giao của A và B là tập con $A \cap B$ của không gian mẫu Ω .
- Minh họa bằng sơ đồ Ven (Hình 8.2):



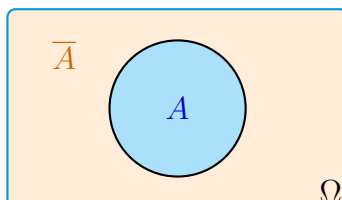
3. Biến Cố Xung Khắc

- **Định nghĩa:** Biến cố A và biến cố B được gọi là **xung khắc** nếu A và B không đồng thời xảy ra.
- **Điều kiện tập hợp:** Hai biến cố A và B xung khắc khi và chỉ khi $A \cap B = \emptyset$.
- Minh họa bằng sơ đồ Ven (Hình 8.3):



4. Biến Cố Đối

- **Định nghĩa:** Cho biến cố A . Biến cố “Không xảy ra A ”, kí hiệu là $\overline{A}$, được gọi là **biến cố đối** của A .
- **Tính chất tập hợp:** $\overline{\overline{A}} = A$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
- **Mối quan hệ:** A và $\overline{A}$ là hai biến cố xung khắc, đồng thời $A \cup \overline{A} = \Omega$.
- **Minh họa bằng sơ đồ Ven:**



5. Biến Cố Độc Lập

- **Định nghĩa:** Cặp biến cố A và B được gọi là **độc lập** nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.
- **Chú ý:** Nếu A và B độc lập thì các cặp: A và $\overline{B}$; $\overline{A}$ và B ; $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng độc lập.

6. Bảng Tóm Tắt Khái Niệm Và Mối Quan Hệ Tập Hợp

Biến cố	Ký hiệu	Điều kiện
Biến cố Hợp	$A \cup B$	Có ít nhất một trong hai biến cố A hoặc B xảy ra.
Biến cố Giao	AB (hoặc $A \cap B$)	Cả hai biến cố A và B cùng xảy ra.
Biến cố Xung khắc	$A \cap B = \emptyset$	A và B không thể đồng thời xảy ra.
Biến cố Đối	$\overline{A} = \Omega \setminus A$	Biến cố "Không xảy ra A " ($A \cap \overline{A} = \emptyset$; $A \cup \overline{A} = \Omega$).
Biến cố Độc lập	Biến cố A độc lập với biến cố B	Sự xảy ra của A không ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của B .

7.2 Công thức cộng, Công thức nhân

7.2.1: Công Thức Cộng Xác Suất

1. Định Lý Công Thức Cộng Xác Suất

- **Hai biến cố xung khắc:** Nếu A và B là hai biến cố xung khắc ($A \cap B = \emptyset$)

thì xác suất để A hoặc B xảy ra bằng tổng xác suất của A và B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- **Trường hợp tổng quát (Hai biến cố bất kỳ):** Với hai biến cố A và B tùy ý, ta luôn có công thức cộng tổng quát:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

2. Hệ Quả (Xác Suất Của Biến Cố Đối)

- Do A và $\bar{A}$ là hai biến cố xung khắc và $A \cup \bar{A} = \Omega$, ta có:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \iff P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

3. Bảng Tổng Kết Các Công Thức Tính Xác Suất

Mối quan hệ	Công thức xác suất	Ghi chú / Điều kiện
Hai biến cố xung khắc	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	$A \cap B = \emptyset$ (không đồng thời xảy ra)
Hai biến cố đối nhau	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$	$\bar{A} = \Omega \setminus A$
Hai biến cố bất kỳ	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$	Áp dụng cho mọi cặp biến cố A, B bất kỳ
Hai biến cố độc lập	$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$	Sự xảy ra của A không ảnh hưởng tới B

7.2.2: Công Thức Nhân Xác Suất Cho Hai Biến Cố Độc Lập

1. Định Lý Công Thức Nhân Xác Suất

- Nếu hai biến cố A và B **độc lập** với nhau thì xác suất để cả A và B cùng xảy ra bằng tích xác suất của A và B :

$$P(AB) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- **Mở rộng cho nhiều biến cố:** Nếu các biến cố $A_1, A_2, \dots, A_n$ độc lập với nhau thì:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \dots P(A_n)$$

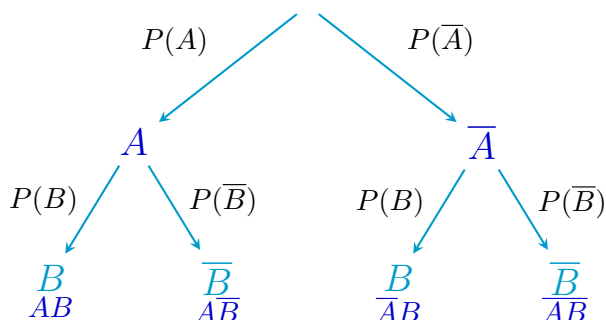
2. Hệ Quả Cho Các Biến Cố Đối

- Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì các cặp biến cố sau cũng độc lập với nhau:
 - A và $\bar{B} \implies P(A\bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B})$
 - $\bar{A}$ và $B \implies P(\bar{A}B) = P(\bar{A}) \cdot P(B)$

$$- \bar{A} \text{ và } \bar{B} \implies P(\overline{AB}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$$

3. Sơ Đồ Cây Cho Hai Biến Cố Độc Lập

Xét hai biến cố độc lập A và B với $P(A) = p$ và $P(B) = q$. Khi đó $P(\bar{A}) = 1 - p$ và $P(\bar{B}) = 1 - q$.



Quy Tắc Nhân Trên Sơ Đồ Cây

- **Quy tắc tích (Tính theo đường đi):** Xác suất của biến cố kết quả ở cuối mỗi nhánh bằng tích các xác suất trên các nhánh thành phần tạo nên đường đi đó.
- **Quy tắc tổng (Tính theo các nhánh):** Xác suất của một biến cố phức hợp bằng tổng xác suất của các kết quả thuận lợi cho biến cố đó ở cuối các nhánh tương ứng.

Bảng Tổng Kết Xác Suất Các Nhánh Sơ Đồ Cây

Kết quả cuối nhánh	Công thức tích các nhánh	Ý nghĩa biến cố
AB	$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$	Cả A và B cùng xảy ra
$A\bar{B}$	$P(A\bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B})$	A xảy ra và B không xảy ra
$\bar{A}B$	$P(\bar{A}B) = P(\bar{A}) \cdot P(B)$	A không xảy ra và B xảy ra
$\bar{A}\bar{B}$	$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$	Cả A và B đều không xảy ra

Chương 8

ĐẠO HÀM

Chương này rất quan trọng, cần chúng ta nhớ công thức, cách tính.

8.1 Định nghĩa và ý nghĩa của đạo hàm

8.1.1: Đạo Hàm Của Hàm Số

1. Đạo Hàm Của Hàm Số Tại Một Điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

thì giới hạn đó được gọi là **đạo hàm của hàm số** $y = f(x)$ tại điểm x_0 , kí hiệu là $f'(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$), tức là:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2. Quy tắc tính đạo hàm bằng định nghĩa

- Bước 1: Tính $f(x) - f(x_0)$.
- Bước 2: Lập và rút gọn tỉ số $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ với $x \in (a; b), x \neq x_0$.
- Bước 3: Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
- Cách tính theo số gia $h = x - x_0$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

3. Đạo Hàm Của Hàm Số Trên Một Khoảng

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ nếu nó có đạo hàm $f'(x)$ tại mọi điểm x thuộc khoảng đó, kí hiệu là $y' = f'(x)$.

4. Ý Nghĩa Hình Học Của Đạo Hàm

- **Hệ số góc của tiếp tuyến:** Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $P(x_0; f(x_0))$ là đạo hàm $f'(x_0)$.
- **Phương trình tiếp tuyến:** Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $P(x_0; y_0)$ là:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{trong đó } y_0 = f(x_0)$$

8.2 Đạo hàm của các hàm sơ cấp

8.2.1: Tóm Tắt Quy Tắc Và Bảng Tính Đạo Hàm Của Các Hàm Sơ Cấp

1. Các Quy Tắc Tính Đạo Hàm (Tổng, Hiệu, Tích, Thương)

Giả sử các hàm số $u = u(x)$, $v = v(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$.

- **Tổng và hiệu:** $(u + v)' = u' + v'$; $(u - v)' = u' - v'$.
- **Tích:** $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.
- **Thương:** $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ ($v = v(x) \neq 0$).
- **Hằng số nhân:** $(k \cdot u)' = k \cdot u'$ ($k \in \mathbb{R}$).
- **Nghịch đảo:** $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ ($v = v(x) \neq 0$).

2. Quy Tắc Đạo Hàm Hàm Số Hợp

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm u'_x tại x và $y = f(u)$ có đạo hàm y'_u tại u thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm y'_x tính theo công thức:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

3. Bảng Điều Kiện Xác Định Và Khoảng Tồn Tại Đạo Hàm Của Hàm Số Sơ Cấp

Hàm số	Tập xác định (D)	Khoảng tồn tại đạo hàm
$y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$y = x^\alpha$ ($\alpha \notin \mathbb{Z}$)	$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0; +\infty)$	$(0; +\infty)$
$y = \sin x, y = \cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$y = \tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$y = \cot x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$y = a^x$ ($0 < a \neq 1$)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$y = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$)	$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$

4. Bảng Đạo Hàm Các Hàm Số Cơ Bản Và Hàm Hợp

Đạo hàm của hàm số sơ cấp	Đạo hàm của hàm số hợp $u = u(x)$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad (u > 0)$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u' \cdot e^u$
$(a^x)' = a^x \ln a \quad (0 < a \neq 1)$	$(a^u)' = u' \cdot a^u \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad (u > 0)$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (x > 0, 0 < a \neq 1)$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (u > 0)$
$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\forall x \neq 0)$	
$(c)' = 0$ với c là hằng số	

5. Khái Niệm Đạo Hàm Cấp Hai

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mỗi điểm $x \in (a; b)$.

Nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là **đạo hàm cấp hai** của hàm số $y = f(x)$ tại x , ký hiệu là y'' hoặc $f''(x)$.

$$y'' = (y')' \quad \text{hay} \quad f''(x) = [f'(x)]'$$

8.3 Đạo hàm trong thực tiễn

8.3.1: Đạo hàm trong phương trình chuyển động

Một chuyển động có phương trình quỹ đạo $s = f(t)$ biểu diễn theo thời gian t :

- **Vận tốc tức thời** của chuyển động tại thời điểm t là đạo hàm cấp một của quỹ đạo:

$$v(t) = s'(t) = f'(t)$$

- **Gia tốc tức thời** của chuyển động tại thời điểm t là đạo hàm cấp một của vận tốc, tương ứng là đạo hàm cấp hai của quãng đường:

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = f''(t)$$