

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. (2,0 điểm). Cho hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ (C).

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số
b) Tìm tọa độ điểm M thuộc (C), biết rằng tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng đi qua điểm M và điểm I(1; 1).

Câu 2. (1,0 điểm).

- a. Giải phương trình $\sin 2x + 1 = 6 \sin x + \cos 2x$.
b) Tìm số phức z thỏa mãn: $|z|^2 + 2z\bar{z} + |\bar{z}|^2 = 8$ và $z + \bar{z} = 2$.

Câu 3. (0,5 điểm). Giải phương trình $7^{2x+1} - 6 \cdot 7^x + 1 = 0$.

Câu 4. (1,0 điểm). Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - (x+y)^3} \sqrt{x-y} = y \\ 2(x^2 + y^2) - 3\sqrt{2x-1} = 11 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 5. (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x^3 - 2 \ln x}{x^2} dx$.

Câu 6. (1,0 điểm) Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông tại A, $AB = AC = a$, I là trung điểm của SC, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, mặt phẳng (SAB) tạo với đáy 1 góc bằng 60° . Tính thể tích khối chóp S.ABC và tính khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SAB) theo a.

Câu 7. (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có A(1; 4), tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt BC tại D, đường phân giác trong của $\widehat{ADB}$ có phương trình $x - y + 2 = 0$, điểm M(-4; 1) thuộc cạnh AC. Viết phương trình đường thẳng AB.

Câu 8. (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(-4; 1; 3) và đường thẳng $d: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{3}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng d. Tìm tọa độ điểm B thuộc d sao cho $AB = \sqrt{5}$.

Câu 9. (0,5 điểm). Một hộp đựng 10 viên bi đỏ, 8 viên bi vàng và 6 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi. Tính xác suất để các viên bi lấy được đủ cả 3 màu.

Câu 10. (1,0 điểm). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab \geq 1$; $c(a+b+c) \geq 3$.

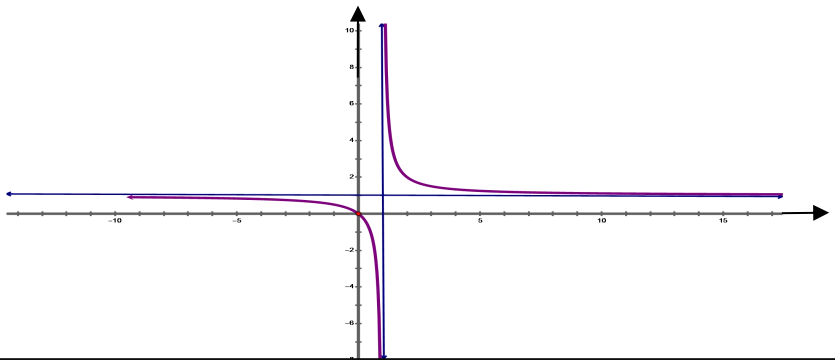
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{b+2c}{1+a} + \frac{a+2c}{1+b} + 6 \ln(a+b+2c)$.

-----**Hết**-----

Họ và tên thí sinh **SBD:**
(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA NĂM 2015

Bản hướng dẫn chấm có 6 trang

Câu	NỘI DUNG	Điểm
1.a	Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x}{x-1}$.	1.0
	TXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $y' = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ nên $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ nên $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số	0.5
	Bảng biến thiên	
	Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$, Hàm số không có cực trị	0.25
	Đồ thị : Nhận xét : Đồ thị nhận giao điểm của 2 đường tiệm cận $I(1; 1)$ làm tâm đối xứng 	0.25
1.b	Tìm tọa độ điểm M thuộc (C), biết rằng tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng đi qua điểm M và điểm $I(1; 1)$.	1.0
	Với $x_0 \neq 1$, tiếp tuyến (d) với (C) tại $M(x_0; \frac{x_0}{x_0-1})$ có phương trình : $y = -\frac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{x_0}{x_0-1} \Leftrightarrow \frac{1}{(x_0-1)^2}x + y - \frac{x_0^2}{(x_0-1)^2} = 0$	0.5

Câu 4:1 điểm

Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} \sqrt{x^2 - (x+y)}\sqrt[3]{x-y} = y(1) \\ 2(x^2 + y^2) - 3\sqrt{2x-1} = 11(2) \end{cases}$	
Từ (1) suy ra $y \geq 0$, vì nếu $y < 0$ thì $x-y > 0$, do đó VT(1) > VP(1)	0.25
$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - (x+y)}(\sqrt[3]{x-y} - 1) + (\sqrt{x^2 - (x+y)} - y) = 0$ $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - (x+y)} \frac{x-y-1}{\sqrt[3]{(x-y)^2} + \sqrt[3]{x-y} + 1} + \frac{x^2 - x - y - y^2}{\sqrt{x^2 - x - y + y}} = 0$ $\Leftrightarrow (x-y-1) \left[\frac{\sqrt{x^2 - (x+y)}}{\sqrt[3]{(x-y)^2} + \sqrt[3]{x-y} + 1} + \frac{x+y}{\sqrt{x^2 - x - y + y}} \right] = 0 \Leftrightarrow x-y-1 = 0$	0.25
Thế $y = x-1$ vào phương trình (2) ta được:	0.25
$4x^2 - 4x + 2 - 3\sqrt{2x-1} = 11 \Leftrightarrow (2x-1)^2 - 3\sqrt{2x-1} - 10 = 0$	0.25
Đặt $t = \sqrt{2x-1}$, $t \geq 0$, ta có $t^4 - 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^3 + 2t^2 + 4t + 5) = 0 \Leftrightarrow t = 2$	0.25
Khi đó $\sqrt{2x-1} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}$. Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$.	

Câu 5:1 điểm

$I = \int_1^2 x dx - 2 \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{x^2}{2} \Big _1^2 - 2 \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{3}{2} - 2 \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$	0.25
Tính $J = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$ Đặt $u = \ln x, dv = \frac{1}{x^2} dx$. Khi đó $du = \frac{1}{x} dx, v = -\frac{1}{x}$ Do đó $J = -\frac{1}{x} \ln x \Big _1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$	0.25
$J = -\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{x} \Big _1^2 = -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2}$	0.25
Vậy $I = \frac{1}{2} + \ln 2$	0.25

Câu 6:1 điểm		
	Gọi K là trung điểm của AB $\Rightarrow HK \perp AB$ (1) Vì $SH \perp (ABC)$ nên $SH \perp AB$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $\Rightarrow AB \perp SK$ Do đó góc giữa (SAB) với đáy bằng góc giữa SK và HK và bằng $\widehat{SKH} = 60^\circ$ Ta có $SH = HK \tan \widehat{SKH} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	0,25
Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} . SH = \frac{1}{3} . \frac{1}{2} AB . AC . SH = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$		0,25
Vì $IH // SB$ nên $IH // (SAB)$. Do đó $d(I, (SAB)) = d(H, (SAB))$ Từ H kẻ $HM \perp SK$ tại M $\Rightarrow HM \perp (SAB) \Rightarrow d(H, (SAB)) = HM$		0,25
Ta có $\frac{1}{HM^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow HM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Vậy $d(I, (SAB)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$		0,25
Câu 7:1 điểm		
	Gọi AI là phân giác trong của $\widehat{BAC}$ Ta có : $\widehat{AID} = \widehat{ABC} + \widehat{BAI}$ $\widehat{IAD} = \widehat{CAD} + \widehat{CAI}$ Mà $\widehat{BAI} = \widehat{CAI}$, $\widehat{ABC} = \widehat{CAD}$ nên $\widehat{AID} = \widehat{IAD}$ $\Rightarrow \triangle DAI$ cân tại D $\Rightarrow DE \perp AI$	0,25
PT đường thẳng AI là : $x + y - 5 = 0$		0,25
Gọi M' là điểm đối xứng của M qua AI $\Rightarrow$ PT đường thẳng MM' : $x - y + 5 = 0$ Gọi $K = AI \cap MM' \Rightarrow K(0;5) \Rightarrow M'(4;9)$		0,25
VTCP của đường thẳng AB là $\overrightarrow{AM'} = (3;5) \Rightarrow$ VTPT của đường thẳng AB là $\vec{n} = (5;-3)$ Vậy PT đường thẳng AB là: $5(x-1) - 3(y-4) = 0 \Leftrightarrow 5x - 3y + 7 = 0$		0,25

Câu 8:1 điểm

(1,0 điểm)	
Đường thẳng d có VTCP là $\vec{u_d} = (-2; 1; 3)$ Vì $(P) \perp d$ nên (P) nhận $\vec{u_d} = (-2; 1; 3)$ làm VTPT	0.25
Vậy PT mặt phẳng (P) là : $-2(x+4)+1(y-1)+3(z-3)=0$ $\Leftrightarrow -2x+y+3z-18=0$	0.25
Vì $B \in d$ nên $B(-1-2t; 1+t; -3+3t)$ $AB = \sqrt{5} \Leftrightarrow AB^2 = 5 \Leftrightarrow (3-2t)^2 + t^2 + (-6+3t)^2 = 5 \Leftrightarrow 7t^2 - 24t + 20 = 0$	0.25
$\Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=\frac{10}{7} \end{cases}$ Vậy $B(-5; 3; 3)$ hoặc $B\left(-\frac{27}{7}; \frac{17}{7}; \frac{9}{7}\right)$	0.25

Câu 9:0,5 điểm

Tổng số viên bi trong hộp là 24. Gọi Ω là không gian mẫu. Lấy ngẫu nhiên 4 viên trong hộp ta có C_{24}^4 cách lấy hay $n(\Omega) = C_{24}^4$. Gọi A là biến cố lấy được các viên bi có đủ cả 3 màu. Ta có các trường hợp sau: +) 2 bi đỏ, 1 bi vàng và 1 bi xanh: có $C_{10}^2 C_8^1 C_6^1 = 2160$ cách +) 1 bi đỏ, 2 bi vàng và 1 bi xanh: có $C_{10}^1 C_8^2 C_6^1 = 1680$ cách +) 1 bi đỏ, 1 bi vàng và 2 bi xanh: có $C_{10}^1 C_8^1 C_6^2 = 1200$ cách Do đó, $n(A) = 5040$	0.25
Vậy, xác suất biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{5040}{10626} \approx 47,4\%$	0.25

Câu 10:1 điểm

$P+2 = \frac{a+b+2c+1}{1+a} + \frac{a+b+2c+1}{1+b} + 6\ln(a+b+2c)$ $= (a+b+2c+1) \left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \right) + 6\ln(a+b+2c)$ Ta chứng minh được các BĐT quen thuộc sau: $+) \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \quad (1) \qquad \qquad \qquad +) \sqrt{ab} \leq \frac{ab+1}{2} \quad (2)$ Thật vậy, $+) \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \Leftrightarrow (2+a+b)(1+\sqrt{ab}) \geq 2(1+a)(1+b)$ $\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 (\sqrt{ab}-1) \geq 0 \text{ luôn đúng vì } ab \geq 1. \text{ Dấu "=" khi } a=b \text{ hoặc } ab=1$	0.25
--	-------------

$+)\sqrt{ab} \leq \frac{ab+1}{2} \Leftrightarrow (\sqrt{ab}-1)^2 \geq 0. \text{ Dấu “=” khi } ab=1.$ $\text{Do đó, } \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \geq \frac{2}{1+\frac{ab+1}{2}} = \frac{4}{3+ab}$ $\geq \frac{4}{ab+bc+ca+c^2} = \frac{4}{(a+c)(b+c)} \geq \frac{16}{(a+b+2c)^2}$ Đặt $t = a+b+2c, t > 0$ ta có: $P+2 \geq f(t) = \frac{16(t+1)}{t^2} + 6\ln t, t > 0;$ $f'(t) = \frac{6}{t} - \frac{16(t+2)}{t^3} = \frac{6t^2 - 16t - 32}{t^3} = \frac{(t-4)(6t+8)}{t^3}$	0.5
--	-----

t	0	4	$+\infty$
f'(t)	-	0	+
f(t)	$5+6\ln 4$		
Vậy, GTNN của P là $3+6\ln 4$ khi $a=b=c=1$.			

-----**Hết**-----

Chú ý : Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa !!!

