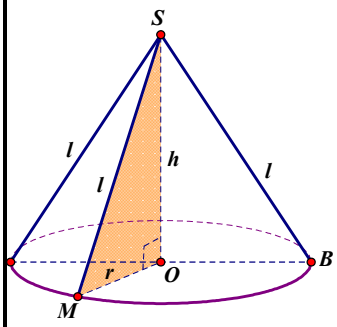
Chuyên đề 21 KHỐI NÓN

Lý thuyết – phương pháp chung

MẶT NÓN	Các yếu tố mặt nón:	Một số công thức:
 **h thành:** Quay Δ vuông SOM quanh trục SO, ta được mặt nón như hình bên với: $\begin{cases} h = SO \\ r = OM \end{cases}$.	**Đường cao**: $\boxed{h = SO}$. (SO cũng được gọi là **trục** của hình nón). **Bán kính đáy**: $\boxed{r = OA = OB = OM}$. **Đường sinh**: $\boxed{l = SA = SB = SM}$. **Góc ở đỉnh**: $\boxed{\widehat{ASB}}$ **Thiết diện qua trục**: ΔSAB cân tại S. **Góc giữa đường sinh và mặt đáy**: $\boxed{\widehat{SAO} = \widehat{SBO} = \widehat{SMO}}$.	**Chu vi đáy**: $\boxed{p = 2\pi r}$. **Diện tích đáy**: $\boxed{S_đ = \pi r^2}$. **Thể tích**: $\boxed{V = \frac{1}{3}h.S_đ = \frac{1}{3}h.\pi r^2}$. *rỡng đến thể tích khối chóp).* **Diện tích xung quanh**: $\boxed{S_{xq} = \pi rl}$. **Diện tích toàn phần**: $\boxed{S_{tp} = S_{xq} + S_đ = \pi rl + \pi r^2}$.

Dạng 1. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, chiều cao, bán kính đáy, thiết diện

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh l và bán kính đáy r bằng

A. $4\pi rl$. **B.** $2\pi rl$. **C.** πrl. **D.** $\frac{1}{3}\pi rl$.

Câu 2. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hình nón có bán kính đáy $r = 2$ và độ dài đường sinh $l = 7$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. 28π. **B.** 14π. **C.** $\frac{14\pi}{3}$. **D.** $\frac{98\pi}{3}$.

Câu 3. **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Cho hình nón có bán kính đáy $r = 2$ và độ dài đường sinh $l = 5$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. 20π. **B.** $\frac{20\pi}{3}$ **C.** 10π. **D.** $\frac{10\pi}{3}$.

Câu 4. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hình nón có bán kính đáy $r = 2$ và độ dài đường sinh $l = 7$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $\frac{28\pi}{3}$. **B.** 14π. **C.** 28π. **D.** $\frac{14\pi}{3}$.

Câu 5. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Gọi l, h, r lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính mặt đáy của hình nón. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón là:

A. $S_{xq} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. **B.** $S_{xq} = \pi rl$. **C.** $S_{xq} = \pi rh$. **D.** $S_{xq} = 2\pi rl$.

Câu 6. **(Chuyên Thái Bình 2019)** Cho hình nón có bán kính đáy bằng a, đường cao là $2a$. Tính diện tích xung quanh hình nón?

A. $2\sqrt{5}\pi a^2$. **B.** $\sqrt{5}\pi a^2$. **C.** $2a^2$. **D.** $5a^2$.

Câu 7. **(Mã 104 2017)** Cho hình nón có bán kính đáy $r=\sqrt{3}$ và độ dài đường sinh $l=4$. Tính diện tích xung quanh của hình nón đã cho.

A. $S_{xq}=8\sqrt{3}\pi$ **B.** $S_{xq}=12\pi$ **C.** $S_{xq}=4\sqrt{3}\pi$ **D.** $S_{xq}=\sqrt{39}\pi$

Câu 8. **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Tính độ dài đường sinh l của hình nón đã cho.

A. $l=3a$. **B.** $l=2\sqrt{2}a$. **C.** $l=\dfrac{3a}{2}$. **D.** $l=\dfrac{\sqrt{5}a}{2}$.

Câu 9. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và có bán kính đáy bằng a. Độ dài đường sinh của hình nón đã cho bằng:

A. $3a$ **B.** $2a$ **C.** $\dfrac{3a}{2}$ **D.** $2\sqrt{2}a$

Câu 10. **(Đề Minh Họa 2017)** Trong không gian, cho tam giác vuông ABC tại A, $AB=a$ và $AC=a\sqrt{3}$. Tính độ dài đường sinh l của hình nón, nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB.

A. $l=a\sqrt{3}$ **B.** $l=2a$ **C.** $l=a$ **D.** $l=a\sqrt{2}$

Câu 11. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Một hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a. Tính diện tích xung quanh của hình nón.

A. $\dfrac{2\pi a^2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\pi a^2\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$.

Câu 12. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hình nón có bán kính đáy bằng a và độ dài đường sinh bằng $2a$. Diện tích xung quanh của hình nón đó bằng

A. $4\pi a^2$. **B.** $3\pi a^2$. **C.** $2\pi a^2$. **D.** $2a^2$.

Câu 13. **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$, bán kính đáy bằng a. Tính độ dài đường sinh của hình nón đó

A. $2a\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{3a}{2}$. **C.** $2a$. **D.** $3a$.

Câu 14. **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Cho khối nón (N) có thể tích bằng 4π và chiều cao là 3. Tính bán kính đường tròn đáy của khối nón (N).

A. 2. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Câu 15. **(THPT Trần Nhân Tông - QN -2018)** Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại cân A, gọi I là trung điểm của BC, $BC=2$. Tính diện tích xung quanh của hình nón, nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AI.

A. $S_{xq}=\sqrt{2}\pi$. **B.** $S_{xq}=2\pi$. **C.** $S_{xq}=2\sqrt{2}\pi$. **D.** $S_{xq}=4\pi$.

Câu 16. **(Đồng Tháp - 2018)** Một hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

A. $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{2\pi a^2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\pi a^2\sqrt{2}$.

Câu 17. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên - 2018)** Cho hình hình nón có độ dài đường sinh bằng 4, diện tích xung quanh bằng 8π. Khi đó hình nón có bán kính hình tròn đáy bằng

A. 8. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 18. **(Chuyên Quốc Học Huế - 2018)** Cho hình nón có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao bằng 4. Tính diện tích xung quanh của hình nón.

A. 12π. **B.** 9π. **C.** 30π. **D.** 15π.

Câu 19. **(THPT Hậu Lộc 2 - TH - 2018)** Cho hình nón có đường sinh $l=5$, bán kính đáy $r=3$. Diện tích toàn phần của hình nón đó là:

A. $S_{tp}=15\pi$. **B.** $S_{tp}=20\pi$. **C.** $S_{tp}=22\pi$. **D.** $S_{tp}=24\pi$.

Câu 20. **(Chuyên Lương Thế Vinh - Đồng Nai - 2018)** Cho hình nón (N) có đường kính đáy bằng $4a$, đường sinh bằng $5a$. Tính diện tích xung quanh S của hình nón (N).

A. $S=10\pi a^2$. **B.** $S=14\pi a^2$. **C.** $S=36\pi a^2$. **D.** $S=20\pi a^2$.

Câu 21. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)** Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $5\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Tính độ dài đường sinh của hình nón đã cho?

A. $a\sqrt{5}$. **B.** $3a\sqrt{2}$. **C.** $3a$. **D.** $5a$.

Câu 22. **(Thanh Hóa - 2018)** Mặt phẳng chứa trục của một hình nón cắt hình nón theo thiết diện là:

A. một hình chữ nhật. **B.** một tam giác cân. **C.** một đường elip. **D.** một đường tròn.

Câu 23. **(Chuyên Bắc Ninh - 2018)** Cho hình nón có bán kính đáy $r=\sqrt{3}$ và độ dài đường sinh $l=4$. Tính diện tích xung quanh S của hình nón đã cho.

A. $S=8\sqrt{3}\pi$. **B.** $S=24\pi$. **C.** $S=16\sqrt{3}\pi$. **D.** $S=4\sqrt{3}\pi$.

Dạng 2. Thể tích

Câu 1. **(Mã 103 - 2019)** Thể tích của khối nón có chiều cao h và có bán kính đáy r là

A. $2\pi r^2h$. **B.** $\frac{1}{3}\pi r^2h$. **C.** πr^2h. **D.** $\frac{4}{3}\pi r^2h$.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho khối nón có chiều cao $h=3$ và bán kính đáy $r=4$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. 16π. **B.** 48π. **C.** 36π. **D.** 4π.

Câu 3. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho khối nón có bán kính đáy $r=5$ và chiều cao $h=2$. Thể tích khối nón đã cho bằng:

A. $\frac{10\pi}{3}$. **B.** 10π. **C.** $\frac{50\pi}{3}$. **D.** 50π.

Câu 4. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho khối nón có bán kính đáy $r=4$ và chiều cao $h=2$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\frac{8\pi}{3}$. **B.** 8π. **C.** $\frac{32\pi}{3}$. **D.** 32π.

Câu 5. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho khối nón có bán kính $r=2$ chiều cao $h=5$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\frac{20\pi}{3}$. **B.** 20π. **C.** $\frac{10\pi}{3}$. **D.** 10π.

Câu 6. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho khối nón có bán kính đáy $r=2$ và chiều cao $h=4$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. 8π. **B.** $\frac{8\pi}{3}$. **C.** $\frac{16\pi}{3}$. **D.** 16π.

Câu 7. **(Mã 110 2017)** Cho khối nón có bán kính đáy $r=\sqrt{3}$ và chiều cao $h=4$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

A. $V=12\pi$ **B.** $V=4\pi$ **C.** $V=16\pi\sqrt{3}$ **D.** $V=\frac{16\pi\sqrt{3}}{3}$

Câu 8. **(Mã 101 - 2019)** Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là

Nguyễn Bảo Vương

A. $\frac{4}{3}\pi r^2 h$. **B.** $2\pi r^2 h$. **C.** $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. **D.** $\pi r^2 h$.

Câu 9. **(Mã 104 2019)** Thể tích khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là

A. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. **B.** $\frac{4}{3}\pi r^2 h$. **C.** $2\pi r^2 h$. **D.** $\pi r^2 h$.

Câu 10. **(Mã 102 - 2019)** Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là

A. $\frac{4}{3}\pi r^2 h$. **B.** $\pi r^2 h$. **C.** $2\pi r^2 h$. **D.** $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Câu 11. **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Cho khối nón có bán kính đáy $r=3$, chiều cao $h=\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối nón.

A. $V=\frac{3\pi\sqrt{2}}{3}$ **B.** $V=3\pi\sqrt{11}$ **C.** $V=\frac{9\pi\sqrt{2}}{3}$ **D.** $V=9\pi\sqrt{2}$

Câu 12. **(Chuyên ĐHSP Hà Nội 2019)** Cho tam giác ABC vuông tại $A, AB=c, AC=b$. Quay tam giác ABC xung quanh đường thẳng chứa cạnh AB ta được một hình nón có thể tích bằng

A. $\frac{1}{3}\pi bc^2$. **B.** $\frac{1}{3}bc^2$. **C.** $\frac{1}{3}b^2c$. **D.** $\frac{1}{3}\pi b^2 c$.

Câu 13. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Cho hình nón có độ dài đường sinh bằng 25 và bán kính đường tròn đáy bằng 15. Tính thể tích của khối nón đó.

A. 1500π. **B.** 4500π. **C.** 375π. **D.** 1875π.

Câu 14. **(Mã 105 2017)** Trong không gian cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=a$ và $\widehat{ACB}=30^o$. Tính thể tích V của khối nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC.

A. $V=\pi a^3$ **B.** $V=\sqrt{3}\pi a^3$ **C.** $V=\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{9}$ **D.** $V=\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$

Câu 15. **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và bán kính đáy bằng a. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. **C.** $\frac{2\pi a^3}{3}$. **D.** $\frac{\pi a^3}{3}$

Câu 16. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho khối nón có bán kính đáy $r=2$, chiều cao $h=\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón là

A. $\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{4\pi}{3}$. **C.** $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$. **D.** $4\pi\sqrt{3}$.

Câu 17. **(KTNL Gia Bình 2019)** Cho khối nón tròn xoay có chiều cao và bán kính đáy cùng bằng a. Khi đó thể tích khối nón là

A. $\frac{4}{3}\pi a^3$. **B.** $\frac{2}{3}\pi a^3$. **C.** πa^3. **D.** $\frac{1}{3}\pi a^3$.

Câu 18. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho khối nón có bán kính đáy $r=\sqrt{3}$ và chiều cao $h=4$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

A. $V=16\pi\sqrt{3}$ **B.** $V=\frac{16\pi\sqrt{3}}{3}$ **C.** $V=12\pi$ **D.** $V=4\pi$

Câu 19. **(THPT Đông Sơn 1 - Thanh Hóa - 2019)** Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và đường cao bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\frac{2\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **D.** $\frac{\pi a^3}{3}$.

Câu 20. **(Chuyên Hà Tĩnh 2019)** Cho khối nón có thiết diện qua trục là một tam giác cân có một góc $120°$ và cạnh bên bằng a. Tính thể tích khối nón.

A. $\frac{\pi a^3}{8}$. **B.** $\frac{3\pi a^3}{8}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $\frac{\pi a^3}{4}$.

Câu 21. Nếu giữ nguyên bán kính đáy của một khối nón và giảm chiều cao của nó 2 lần thì thể tích của khối nón này thay đổi như thế nào?

A. Giảm 4 lần. **B.** Giảm 2lần. **C.** Tăng 2 lần. **D.** Không đổi.

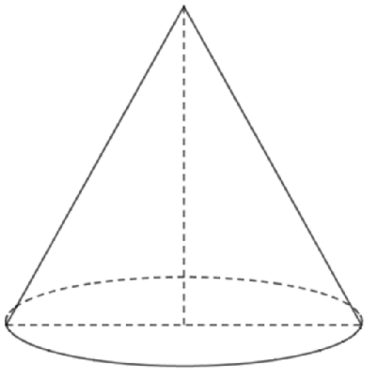
Câu 22. **(THPT Mai Anh Tuấn_Thanh Hóa -2019)** Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng đường kính đáy bằng a. Thể tích khối nón là.

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{16}$. **B.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{48}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 23. **(Chuyên An Giang - 2018)** Cho khối nón có bán kính $r=\sqrt{5}$ và chiều cao $h=3$. Tính thể tích V của khối nón.

A. $V=9\pi\sqrt{5}$. **B.** $V=3\pi\sqrt{5}$. **C.** $V=\pi\sqrt{5}$. **D.** $V=5\pi$.

Câu 24. **(Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2018)** Cho khối nón có bán kính đáy $r=2$, chiều cao $h=\sqrt{3}$ (hình vẽ). Thể tích của khối nón là:



A. $\frac{4\pi}{3}$. **B.** $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$. **C.** $4\pi\sqrt{3}$. **D.** $\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$.

Câu 25. **(THPT Lê Xoay - 2018)** Cho hình nón có bán kính đáy bằng $2\,(\text{cm})$, góc ở đỉnh bằng 60°. Thể tích khối nón là

A. $V=\frac{8\pi\sqrt{3}}{9}\left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $V=\frac{8\pi\sqrt{3}}{2}\left(\text{cm}^3\right)$. **C.** $V=8\pi\sqrt{3}\left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $V=\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 26. **(Cụm 5 Trường Chuyên - ĐBSH - 2018)** Cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua trục ta được thiết diện là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{6}$. Tính thể tích V của khối nón đó.

A. $V=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{4}$. **B.** $V=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $V=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{6}$. **D.** $V=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{3}$.

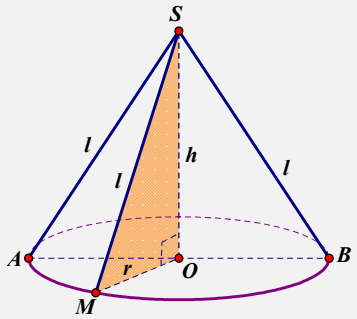
Câu 27. **(THPT Cầu Giấy - 2018)** Cho khối nón tròn xoay có đường cao $h=15\,cm$ và đường sinh $l=25\,cm$. Thể tích V của khối nón là:

A. $V=1500\pi\left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $V=500\pi\left(\text{cm}^3\right)$. **C.** $V=240\pi\left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $V=2000\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

Chuyên đề 21 KHỐI NÓN

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM

Lý thuyết chung

MẶT NÓN	Các yếu tố mặt nón:	Một số công thức:
 ☞**Hình thành:** Quay Δ vuông SOM quanh trục SO, ta được mặt nón như hình bên với: $\begin{cases} h = SO \\ r = OM \end{cases}$.	**Đường cao**: $\boxed{h = SO}$. (SO cũng được gọi là **trục** của hình nón). **Bán kính đáy**: $\boxed{r = OA = OB = OM}$. **Đường sinh**: $\boxed{l = SA = SB = SM}$. **Góc ở đỉnh**: $\boxed{\widehat{ASB}}$ **Thiết diện qua trục**: ΔSAB cân tại S. **Góc giữa đường sinh và mặt đáy**: $\boxed{\widehat{SAO} = \widehat{SBO} = \widehat{SMO}}$.	**Chu vi đáy**: $\boxed{p = 2\pi r}$. **Diện tích đáy**: $\boxed{S_đ = \pi r^2}$. **Thể tích**: $\boxed{V = \frac{1}{3}h.S_đ = \frac{1}{3}h.\pi r^2}$. *(liên tưởng đến thể tích khối chóp).* **Diện tích xung quanh**: $\boxed{S_{xq} = \pi rl}$. **Diện tích toàn phần**: $\boxed{S_{tp} = S_{xq} + S_đ = \pi rl + \pi r^2}$.

Dạng 1. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, chiều cao, bán kính đáy, thiết diện

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$ và $AC = 2a$. Khi quay tam giác ABC quanh cạnh góc vuông AB thì đường gấp khúc ACB tạo thành một hình nón. Diện tích xung quanh hình nón đó bằng

A. $5\pi a^2$. **B.** $\sqrt{5}\pi a^2$. **C.** $2\sqrt{5}\pi a^2$. **D.** $10\pi a^2$.

Câu 2. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hình nón có bán kính đáy bằng 2 và góc ở đỉnh bằng $60°$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. 8π. **B.** $\frac{16\sqrt{3}\pi}{3}$. **C.** $\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$. **D.** 16π.

Câu 3. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hình nón có bán kính bằng 5 và góc ở đỉnh bằng $60°$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. 50π. **B.** $\frac{100\sqrt{3}\pi}{3}$. **C.** $\frac{50\sqrt{3}\pi}{3}$. **D.** 100π.

Câu 4. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hình nón có bán kính bằng 3 và góc ở đỉnh bằng 60^0. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. 18π. **B.** 36π. **C.** $6\sqrt{3}\pi$. **D.** $12\sqrt{3}\pi$.

Câu 5. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hình nón có bán kính đáy bằng 4 và góc ở đỉnh bằng 60^0. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $\frac{64\sqrt{3}\pi}{3}$. **B.** 32π. **C.** 64π. **D.** $\frac{32\sqrt{3}\pi}{3}$.

Câu 6. **(Mã 123 2017)** Cho một hình nón có chiều cao $h=a$ và bán kính đáy $r=2a$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB=2\sqrt{3}a$. Tính khoảng cách d từ tâm của đường tròn đáy đến (P).

A. $d=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$ **B.** $d=\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$ **C.** $d=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$ **D.** $d=a$

Câu 7. **(KSCL THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến (SAB) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{SAO}=30^0, \widehat{SAB}=60^0$. Độ dài đường sinh của hình nón theo a bằng

A. $a\sqrt{2}$ **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** $2a\sqrt{3}$ **D.** $a\sqrt{5}$

Câu 8. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Cho một hình nón có bán kính đáy bằng a và góc ở đỉnh bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh của hình nón đó.

A. $S_{xq}=4\pi a^2$. **B.** $S_{xq}=\dfrac{2\sqrt{3}\pi a^2}{3}$. **C.** $S_{xq}=\dfrac{4\sqrt{3}\pi a^2}{3}$. **D.** $S_{xq}=2\pi a^2$.

Câu 9. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng $2a$, vẽ tia Ax về phía điểm B sao cho điểm B luôn cách tia Ax một đoạn bằng a. Gọi H là hình chiếu của B lên tia Ax, khi tam giác AHB quay quanh trục AB thì đường gấp khúc AHB vẽ thành mặt tròn xoay có diện tích xung quanh bằng:

A. $\dfrac{3\sqrt{2}\pi a^2}{2}$. **B.** $\dfrac{\left(3+\sqrt{3}\right)\pi a^2}{2}$. **C.** $\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)\pi a^2}{2}$. **D.** $\dfrac{\left(2+\sqrt{2}\right)\pi a^2}{2}$.

Câu 10. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hình nón có chiều cao $h=20$, bán kính đáy $r=25$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12. Tính diện tích S của thiết diện đó.

A. $S=500$ **B.** $S=400$ **C.** $S=300$ **D.** $S=406$

Câu 11. **(Liên Trường THPT TP Vinh Nghệ An 2019)** Cắt hình nón (N) đỉnh S cho trước bởi mặt phẳng qua trục của nó, ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $2a\sqrt{2}$. Biết BC là một dây cung đường tròn của đáy hình nón sao cho mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy của hình nón một góc 60^0. Tính diện tích tam giác SBC.

A. $\dfrac{4a^2\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\dfrac{4a^2\sqrt{2}}{9}$ **C.** $\dfrac{2a^2\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\dfrac{2a^2\sqrt{2}}{9}$

Câu 12. **(Sở Hà Nội 2019)** Cho hình nón tròn xoay có chiều cao bằng 4 và bán kính bằng 3. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác có độ dài cạnh đáy bằng 2. Diện tích của thiết diện bằng.

A. $\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{19}$. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 13. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Cắt hình nón bằng một mặt phẳng qua trục của nó, ta được một thiết diện là một tam giác vuông cân cạnh bên $a\sqrt{2}$. Tính diện tích toàn phần của hình nón.

A. $4a^2\pi$ (đvdt). **B.** $4\sqrt{2}a^2\pi$ (đvdt). **C.** $a^2\pi\left(\sqrt{2}+1\right)$ (đvdt). **D.** $2\sqrt{2}a^2\pi$ (đvdt).

Câu 14. **(Chuyên KHTN 2019)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính diện tích toàn phần của vật tròn xoay thu được khi quay tam giác $AA'C$ quanh trục AA'.

A. $\pi\left(\sqrt{3}+2\right)a^2$. **B.** $2\pi\left(\sqrt{2}+1\right)a^2$. **C.** $2\pi\left(\sqrt{6}+1\right)a^2$. **D.** $\pi\left(\sqrt{6}+2\right)a^2$.

Câu 15. Cho hình nón có chiều cao và bán kính đáy đều bằng 1. Mặt phẳng (P) qua đỉnh của hình nón và cắt đáy theo dây cung có độ dài bằng 1. Khoảng cách từ tâm của đáy tới mặt phẳng (P) bằng

A. $\frac{\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$

Câu 16. Cho hình nón đỉnh S, đáy là đường tròn $(O;5)$.Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón cắt đường tròn đáy tại hai điểm A và B sao cho $SA=AB=8$. Tính khoảng cách từ O đến (SAB).

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{7}$. **D.** $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Câu 17. **(Chuyên ĐHSPHN - 2018)** Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O, bán kính, $R=3cm$, góc ở đỉnh hình nón là $\varphi=120°$. Cắt hình nón bởi mặt phẳng qua đỉnh S tạo thành tam giác đều SAB, trong đó A, B thuộc đường tròn đáy. Diện tích tam giác SAB bằng

A. $3\sqrt{3}$ cm^2. **B.** $6\sqrt{3}$ cm^2. **C.** 6 cm^2. **D.** 3 cm^2.

Câu 18. **(Chuyên Nguyễn Quang Diêu - Đồng Tháp - 2018)** Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác vuông có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đó.

A. $S_{xq}=\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $S_{xq}=\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$. **C.** $S_{xq}=\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{6}$. **D.** $S_{xq}=\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 19. **(Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O, bán kính R. Dựng hai đường sinh SA và SB, biết AB chắn trên đường tròn đáy một cung có số đo bằng $60°$, khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{R}{2}$. Đường cao h của hình nón bằng

Nguyễn Bảo Vương

A. $h=R\sqrt{3}$. **B.** $h=R\sqrt{2}$. **C.** $h=\frac{R\sqrt{3}}{2}$. **D.** $h=\frac{R\sqrt{6}}{4}$.

Câu 20. **(Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Cho hình nón tròn xoay có chiều cao bằng $2a$, bán kính đáy bằng $3a$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện bằng $\frac{3a}{2}$. Diện tích của thiết diện đó bằng

A. $\frac{2a^2\sqrt{3}}{7}$. **B.** $12a^2\sqrt{3}$. **C.** $\frac{12a^2}{7}$. **D.** $\frac{24a^2\sqrt{3}}{7}$.

Câu 21. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O. Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác vuông SAB có diện tích bằng $4a^2$. Góc giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) bằng $30°$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $4\sqrt{10}\pi a^2$. **B.** $2\sqrt{10}\pi a^2$. **C.** $\sqrt{10}\pi a^2$. **D.** $8\sqrt{10}\pi a^2$.

Câu 22. **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020)** Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Một thiết diện qua đỉnh tạo với đáy một góc $60°$. Diện tích của thiết diện này bằng

A. $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **C.** $2a^2$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

Dạng 2. Thể tích

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hình nón có chiều cao bằng $2\sqrt{5}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều có diện tích bằng $9\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\frac{32\sqrt{5}\pi}{3}$. **B.** 32π. **C.** $32\sqrt{5}\pi$. **D.** 96π.

Câu 2. **(KSCL THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Tính thể tích của hình nón có góc ở đỉnh bằng 60° và diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$.

A. $V=\frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{4}$ **B.** $V=3\pi a^3$ **C.** $V=\frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{4}$ **D.** $V=\pi a^3$

Câu 3. **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh $AB=6$, $AC=8$ và M là trung điểm của cạnh AC. Khi đó thể tích của khối tròn xoay do tam giác BMC quanh quanh AB là

A. 86π **B.** 106π **C.** 96π **D.** 98π

Câu 4. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho hình nón có bán kính đáy bằng $2\,\text{cm}$, góc ở đỉnh bằng $60°$. Tính thể tích của khối nón đó.

A. $\frac{8\sqrt{3}\pi}{9}\text{cm}^3$. **B.** $8\sqrt{3}\pi\,\text{cm}^3$. **C.** $\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}\text{cm}^3$. **D.** $\frac{8\pi}{3}\text{cm}^3$.

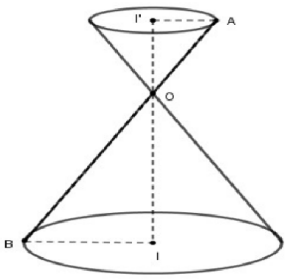
Câu 5. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=6cm, AC=8cm$. Gọi V_1 là thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB và V_2 là thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC. Khi đó, tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{16}{9}$. **D.** $\frac{9}{16}$.

Câu 6. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho hình nón N_1 đỉnh S đáy là đường tròn $C(O;R)$, đường cao $SO=40\,\text{cm}$. Người ta cắt nón bằng mặt phẳng vuông góc với trục để được nón nhỏ N_2 có đỉnh S và đáy là đường tròn $C'(O';R')$. Biết rằng tỷ số thể tích $\frac{V_{N_2}}{V_{N_1}}=\frac{1}{8}$. Tính độ dài đường cao nón N_2.

A. $20\,\text{cm}$. **B.** $5\,\text{cm}$. **C.** $10\,\text{cm}$. **D.** $49\,\text{cm}$.

Câu 7. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Cho một đồng hồ cát như bên dưới (gồm hai hình nón chung đỉnh ghép lại), trong đó đường sinh bất kỳ của hình nón tạo với đáy một góc 60°. Biết rằng chiều cao của đồng hồ là $30\,cm$ và tổng thể tích của đồng hồ là $1000\pi\,cm^3$. Hỏi nếu cho đầy lượng cát vào phần bên trên thì khi chảy hết xuống dưới, tỷ số thể tích lượng cát chiếm chỗ và thể tích phần phía dưới là bao nhiêu?



A. $\frac{1}{64}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{27}$. **D.** $\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

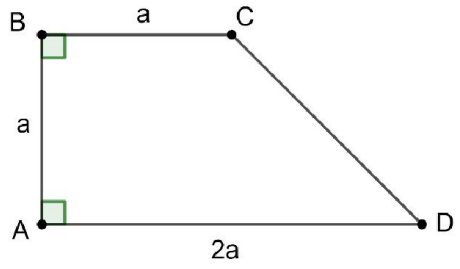
Câu 8. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2, AD=2\sqrt{3}$ và nằm trong mặt phẳng (P). Quay (P) một vòng quanh đường thẳng BD. Khối tròn xoay được tạo thành có thể tích bằng

A. $\frac{28\pi}{9}$ **B.** $\frac{28\pi}{3}$ **C.** $\frac{56\pi}{9}$ **D.** $\frac{56\pi}{3}$

Câu 9. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2$, $AD=2\sqrt{3}$ và nằm trong mặt phẳng (P). Quay (P) một vòng quanh đường thẳng BD. Khối tròn xoay được tạo thành có thể tích bằng

A. $\frac{28\pi}{9}$. **B.** $\frac{28\pi}{3}$. **C.** $\frac{56\pi}{9}$. **D.** $\frac{56\pi}{3}$.

Câu 10. **(Cụm 8 Trường Chuyên 2019)** Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A}=\widehat{B}=90^\circ$, $AB=BC=a$, $AD=2a$. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình thang $ABCD$ xung quanh trục CD.



A. $\frac{7\sqrt{2}\pi a^3}{6}$. **B.** $\frac{7\sqrt{2}\pi a^3}{12}$. **C.** $\frac{7\pi a^3}{6}$. **D.** $\frac{7\pi a^3}{12}$.

Câu 11. **(KTNL GV Thpt Lý Thái Tổ 2019)** Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AD\perp(ABC)$, ABC là tam giác vuông tại B. Biết $BC=2(cm)$, $AB=2\sqrt{3}(cm), AD=6(cm)$. Quay các tam giác ABC và ABD (bao gồm cả điểm bên trong 2 tam giác) xung quanh đường thẳng AB ta được 2 khối tròn xoay. Thể tích phần chung của 2 khối tròn xoay đó bằng

A. $\sqrt{3}\pi(cm^3)$ **B.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}\pi(cm^3)$ **C.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi(cm^3)$. **D.** $\frac{64\sqrt{3}}{3}\pi(cm^3)$.

Câu 12. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng 60°, diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

A. $V=\frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V=\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $V=3\pi a^3$. **D.** $V=\pi a^3$.

Câu 13. **(Xuân Trường - Nam Định - 2018)** Cho hình nón tròn xoay có đỉnh là S, O là tâm của đường tròn đáy, đường sinh bằng $a\sqrt{2}$ và góc giữa đường sinh và mặt phẳng đáy bằng 60°. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón và thể tích V của khối nón tương ứng là

A. $S_{xq}=\pi a^2$, $V=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{12}$. **B.** $S_{xq}=\frac{\pi a^2}{2}$, $V=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$.

C. $S_{xq}=\pi a^2\sqrt{2}$, $V=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{4}$. **D.** $S_{xq}=\pi a^2$, $V=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 14. **(Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Cho hình nón có chiều cao $6a$. Một mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón và có khoảng cách đến tâm là $3a$, thiết diện thu được là một tam giác vuông cân. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $150\pi a^3$. **B.** $96\pi a^3$. **C.** $108\pi a^3$. **D.** $120\pi a^3$.

Câu 15. **(Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Cho hình nón có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao bằng 10. Mặt phẳng (α) vuông góc với trục và cách đỉnh của hình nón một khoảng bằng 4, chia hình nón thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của phần chứa đỉnh của hình nón đã cho, V_2 là thể tích của phần còn lại. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$?

A. $\dfrac{4}{25}$. **B.** $\dfrac{21}{25}$. **C.** $\dfrac{8}{117}$. **D.** $\dfrac{4}{21}$.

Câu 16. **(Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Cho một hình nón có bán kính đáy bằng $2a$. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh (S) của hình nón, cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB=2a\sqrt{3}$, khoảng cách từ tâm đường tròn đáy đến mặt phẳng (P) bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Thể tích khối nón đã cho bằng

A. $\dfrac{8\pi a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{2\pi a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$.

Dạng 3. Khối tròn xoay nội, ngoại tiếp khối đa diện

Câu 1. **(Mã 123 2017)** Trong hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đều bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối nón đỉnh S và đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$

A. $V=\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{2}$ **B.** $V=\dfrac{\pi a^3}{2}$ **C.** $V=\dfrac{\pi a^3}{6}$ **D.** $V=\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{6}$

Câu 2. **(Mã 110 2017)** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $3a$. Hình nón (N) có đỉnh A có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của (N).

A. $S_{xq}=12\pi a^2$ **B.** $S_{xq}=6\pi a^2$ **C.** $S_{xq}=3\sqrt{3}\pi a^2$ **D.** $S_{xq}=6\sqrt{3}\pi a^2$

Câu 3. **(Chuyên ĐHSPHN - 2018)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Hình nón có đỉnh S và có đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC gọi là hình nón nội tiếp hình chóp $S.ABC$, hình nón có đỉnh S và có đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC gọi là hình nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Tỉ số thể tích của hình nón nội tiếp và hình nón ngoại tiếp hình chóp đã cho là

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 4. **(Hồng Bàng - Hải Phòng - 2018)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và đáy bằng 60°. Diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S, có đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

A. $\dfrac{\pi a^2\sqrt{10}}{8}$. **B.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{4}$. **D.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$.

Câu 5. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Một khối nón có đỉnh là tâm của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$. Diện tích toàn phần của khối nón đó là

A. $S_{tp}=\dfrac{\pi a^2}{2}\left(\sqrt{3}+2\right)$. **B.** $S_{tp}=\dfrac{\pi a^2}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)$. **C.** $S_{tp}=\dfrac{\pi a^2}{4}\left(\sqrt{5}+2\right)$. **D.** $S_{tp}=\dfrac{\pi a^2}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Câu 6. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60°. Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$ **C.** $\frac{\pi a^2\sqrt{7}}{4}$ **D.** $\frac{\pi a^2\sqrt{10}}{8}$

Câu 7. **(Mã 105 2017)** Cho hình nón (N) có đường sinh tạo với đáy một góc $60°$. Mặt phẳng qua trục của (N) cắt (N) được thiết diện là một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Tính thể tích V của khối nón giới hạn bởi (N).

A. $V=9\pi$ **B.** $V=3\sqrt{3}\pi$ **C.** $V=9\sqrt{3}\pi$ **D.** $V=3\pi$

Câu 8. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$ **C.** $\frac{\pi a^2\sqrt{7}}{4}$ **D.** $\frac{\pi a^2\sqrt{10}}{8}$

Câu 9. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy là a và (N) là hình nón có đỉnh là S với đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$. Tỉ số thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khối nón (N) là

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

Câu 10. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên tạo với đáy góc $45°$. Thể tích khối nón ngoại tiếp hình chóp trên là:

A. $\frac{8}{3}\pi a^3\sqrt{3}$ **B.** $\frac{2}{3}\pi a^3\sqrt{3}$ **C.** $2\pi a^3\sqrt{2}$ **D.** $\frac{2}{3}\pi a^3\sqrt{2}$

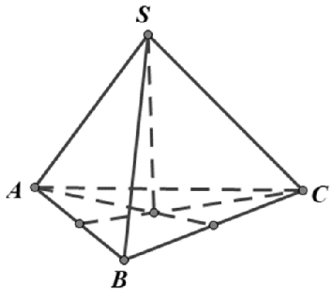
Câu 11. **(THPT Lương Thế Vinh - HN - 2018)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Tam giác SAB có diện tích bằng $2a^2$. Thể tích của khối nón có đỉnh S và đường tròn đáy nội tiếp tứ giác $ABCD$.

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{7}}{8}$. **B.** $\frac{\pi a^3\sqrt{7}}{7}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{7}}{4}$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{15}}{24}$.

Câu 12. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Một khối nón có đỉnh là tâm của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$. Kết quả tính diện tích toàn phần S_{tp} của khối nón đó có dạng bằng $\frac{\pi a^2}{4}\left(\sqrt{b}+c\right)$ với b và c là hai số nguyên dương và $b>1$. Tính bc.

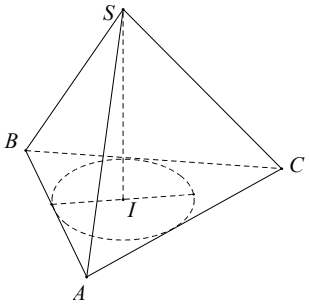
A. $bc=5$. **B.** $bc=8$. **C.** $bc=15$. **D.** $bc=7$.

Câu 13. **(Chuyên Đh Vinh -2018)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh $AB=a$, góc tạo bởi (SAB) và (ABC) bằng $60°$. Diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và có đường tròn đáy ngoại tiếp tam giác ABC bằng



A. $\frac{\sqrt{7}\pi a^2}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{7}\pi a^2}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^2}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^2}{6}$.

Câu 14. **(Nam Định - 2018)** Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn nội tiếp tam giác ABC. Biết rằng $AB = BC = 10a$, $AC = 12a$, góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng $45°$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.



A. $V = 3\pi a^3$. **B.** $V = 9\pi a^3$.

C. $V = 27\pi a^3$. **D.** $V = 12\pi a^3$.

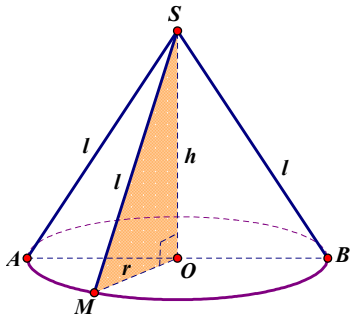
Câu 15. **(Chuyên Trần Phú - Hải Phòng 2018)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a và cạnh bên bằng $2a$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón có đỉnh là tâm O của hình vuông $A'B'C'D'$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$.

A. $S_{xq} = \pi a^2\sqrt{17}$. **B.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{2}$. **C.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{4}$. **D.** $S_{xq} = 2\pi a^2\sqrt{17}$.

Nguyễn Bảo Vương

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM
MỘT SỐ BÀI TOÁN VD – VDC LIÊN QUAN ĐẾN KHỐI NÓN (CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ - CỰC TRỊ)

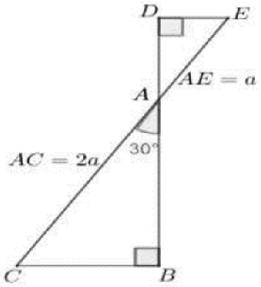
Lý thuyết – phương pháp chung

MẶT NÓN	Các yếu tố mặt nón:	Một số công thức:
 ☛**Hình thành:** Quay Δ vuông SOM quanh trục SO, ta được mặt nón như hình bên với: $\begin{cases} h = SO \\ r = OM \end{cases}$.	☐ **Đường cao:** $\boxed{h = SO}$. (SO cũng được gọi là **trục** của hình nón). ☐ **Bán kính đáy:** $\boxed{r = OA = OB = OM}$. ☐ **Đường sinh:** $\boxed{l = SA = SB = SM}$. ☐ **Góc ở đỉnh:** $\boxed{\widehat{ASB}}$ ☐ **Thiết diện qua trục:** ΔSAB cân tại S. ☐ **Góc giữa đường sinh và mặt đáy:** $\boxed{\widehat{SAO} = \widehat{SBO} = \widehat{SMO}}$.	☐ **Chu vi đáy:** $\boxed{p = 2\pi r}$. ☐ **Diện tích đáy:** $\boxed{S_đ = \pi r^2}$. ☐ **Thể tích:** $\boxed{V = \frac{1}{3}h.S_đ = \frac{1}{3}h.\pi r^2}$. *(liên tưởng đến thể tích khối chóp).* ☐ **Diện tích xung quanh:** $\boxed{S_{xq} = \pi rl}$. ☐ **Diện tích toàn phần:** $\boxed{S_{tp} = S_{xq} + S_đ = \pi rl + \pi r^2}$.

Câu 1. **(Sở Ninh Bình 2020)** Cho hai khối nón có chung trục $SS' = 3r$. Khối nón thứ nhất có đỉnh S, đáy là hình tròn tâm S' bán kính $2r$. Khối nón thứ hai có đỉnh S', đáy là hình tròn tâm S bán kính r. Thể tích phần chung của hai khối nón đã cho bằng

A. $\frac{4\pi r^3}{27}$. **B.** $\frac{\pi r^3}{9}$. **C.** $\frac{4\pi r^3}{9}$. **D.** $\frac{4\pi r^3}{3}$.

Câu 2. **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020)** Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay mô hình (như hình vẽ bên) quanh trục DB.



A. $\frac{9\pi a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $\frac{3\pi a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$.

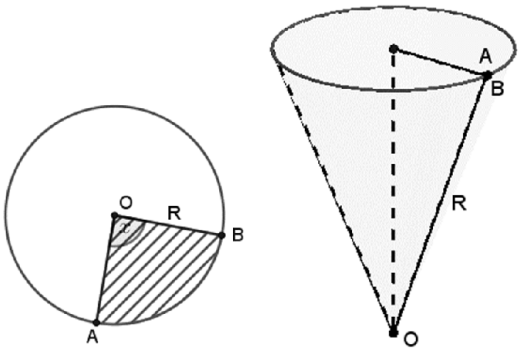
Câu 3. **(Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Cho tam giác ABC vuông tại A, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $b < c$. Khi quay tam giác vuông ABC một vòng quanh cạnh BC, quay cạnh AC, quanh cạnh AB, ta thu được các hình có diện tích toàn phần theo thứ tự bằng S_a, S_b, S_c. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S_b > S_c > S_a$. **B.** $S_b > S_a > S_c$. **C.** $S_c > S_a > S_b$. **D.** $S_a > S_c > S_b$.

Câu 4. Cho tam giác ABC cân tại A, góc $\widehat{BAC}=120^\circ$ và $AB=4\text{cm}$. Tính thể tích khối tròn xoay lớn nhất có thể khi ta quay tam giác ABC quanh đường thẳng chứa một cạnh của tam giác ABC.

A. $16\sqrt{3}\pi\left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $16\pi\left(\text{cm}^3\right)$. **C.** $\dfrac{16\pi}{\sqrt{3}}\left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $\dfrac{16\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 5. **(Cụm liên trường Hải Phòng- 2019)** Huyền có một tấm bìa hình tròn như hình vẽ, Huyền muốn biến hình tròn đó thành một cái phễu hình nón. Khi đó Huyền phải cắt bỏ hình quạt tròn AOB rồi dán hai bán kính OA và OB lại với nhau. Gọi x là góc ở tâm hình quạt tròn dùng làm phễu. Tìm x để thể tích phễu là lớn nhất?



A. $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$. **B.** $\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi}{2}$. **D.** $\dfrac{\pi}{4}$.

Câu 6. Một khối nón có thể tích bằng $9a^3\pi\sqrt{2}$. Tính bán kính R đáy khối nón khi diện tích xung quanh nhỏ nhất.

A. $R=3a$. **B.** $R=\dfrac{3a}{\sqrt[6]{2}}$. **C.** $R=\sqrt[3]{9}a$. **D.** $R=\dfrac{3a}{\sqrt[3]{2}}$.

Câu 7. **(HSG Sở Nam Định 2019)** Cho hai mặt phẳng $(P),(Q)$ song song với nhau và cùng cắt khối cầu tâm O, bán kính R thành hai hình tròn cùng bán kính. Xét hình nón có đỉnh trùng với tâm của một trong hai hình tròn này và có đáy là hình tròn còn lại. Tính khoảng cách h giữa hai mặt phẳng $(P),(Q)$ để diện tích xung quanh của hình nón là lớn nhất.

A. $h=R$. **B.** $h=R\sqrt{2}$. **C.** $h=\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2R\sqrt{3}$.

Câu 8. **(Bạc Liêu – Ninh Bình 2019)** Cho tam giác OAB vuông cân tại O, có $OA=4$. Lấy điểm M thuộc cạnh AB (M không trùng với A, B) và gọi H là hình chiếu của M trên OA. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay tam giác OMH quanh OA.

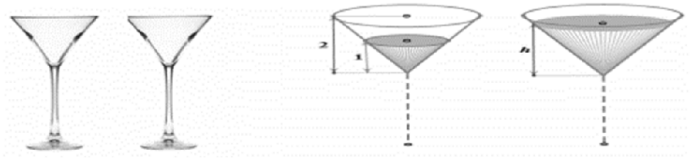
A. $\dfrac{128\pi}{81}$. **B.** $\dfrac{81\pi}{256}$. **C.** $\dfrac{256\pi}{81}$. **D.** $\dfrac{64\pi}{81}$.

Câu 9. **(THPT Thăng Long-Hà Nội- 2019)** Lượng nguyên liệu cần dùng để làm ra một chiếc nón lá được ước lượng qua phép tính diện tích xung quanh của mặt nón. Cứ $1kg$ lá dùng để làm nón có thể làm ra số nón có tổng diện tích xung quanh là $6,13m^2$. Hỏi nếu muốn làm ra 1000 chiếc nón lá giống nhau có đường trình vành nón $50cm$, chiều cao $30cm$ thì cần khối lượng lá gần nhất với con số nào dưới đây? (coi mỗi chiếc nón có hình dạng là một hình nón)

A. $50kg$. **B.** $76kg$. **C.** $48kg$. **D.** $38kg$.

Câu 10. Hai chiếc ly đựng chất lỏng giống hệt nhau, mỗi chiếc có phần chứa chất lỏng là một khối nón có chiều cao $2dm$ (mô tả như hình vẽ). Ban đầu chiếc ly thứ nhất chứa đầy chất lỏng, chiếc ly thứ hai để rỗng. Người ta chuyển chất lỏng từ ly thứ nhất sang ly thứ hai sao cho độ cao của cột chất lỏng trong ly thứ nhất còn $1dm$. Tính chiều cao h của cột chất lỏng trong ly thứ hai sau khi

chuyển (độ cao của cột chất lỏng tính từ đỉnh của khối nón đến mặt phẳng của chất lỏng – lượng chất lỏng coi như không hao hụt khi chuyển. Tính gần đúng h với sai số không quá $0,01dm$).



A. $h \approx 1,41dm$. **B.** $h \approx 1,89dm$. **C.** $h \approx 1,91dm$. **D.** $h \approx 1,73dm$.

Câu 11. Cho một miếng tôn hình tròn có bán kính $50\,\text{cm}$. Biết hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích miếng tôn ở trên. Khi đó hình nón có bán kính đáy là:

A. $10\sqrt{2}(\text{cm})$. **B.** $50\sqrt{2}(\text{cm})$. **C.** $20(\text{cm})$. **D.** $25(\text{cm})$.

Câu 12. **(Phan Đăng Lưu - Huế - 2018)** Cho hình nón (N) có đường cao $SO = h$ và bán kính đáy bằng R, gọi M là điểm trên đoạn SO, đặt $OM = x$, $0 < x < h$. (C) là thiết diện của mặt phẳng (P) vuông góc với trục SO tại M, với hình nón (N). Tìm x để thể tích khối nón đỉnh O đáy là (C) lớn nhất.

A. $\frac{h}{2}$. **B.** $\frac{h\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{h\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{h}{3}$.

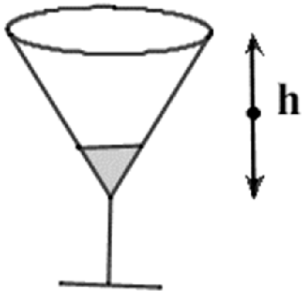
Câu 13. **(THPT Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2018)** Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$, ABC là tam giác vuông tại B. Biết $BC = a$, $AB = a\sqrt{3}$, $AD = 3a$. Quay các tam giác ABC và ABD (Bao gồm cả điểm bên trong 2 tam giác) xung quanh đường thẳng AB ta được 2 khối tròn xoay. Thể tích phần chung của 2 khối tròn xoay đó bằng

A. $\frac{3\sqrt{3}\pi a^3}{16}$. **B.** $\frac{8\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **C.** $\frac{5\sqrt{3}\pi a^3}{16}$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{16}$.

Câu 14. **(THPT Can Lộc - Hà Tĩnh - 2018)** Cho tam giác nhọn ABC, biết rằng khi quay tam giác này quanh các cạnh AB, BC, CA ta lần lượt được các hình tròn xoay có thể tích là 672π, $\frac{3136\pi}{5}$, $\frac{9408\pi}{13}$.Tính diện tích tam giác ABC.

A. $S = 1979$. **B.** $S = 364$. **C.** $S = 84$. **D.** $S = 96$.

Câu 15. **(THPT Nam Trực - Nam Định - 2018)** Một chiếc ly dạng hình nón (như hình vẽ với chiều cao ly là h). Người ta đổ một lượng nước vào ly sao cho chiều cao của lượng nước trong ly bằng $\frac{1}{4}$ chiều cao của ly. Hỏi nếu bịt kín miệng ly rồi úp ngược ly lại thì tỷ lệ chiều cao của mực nước và chiều cao của ly nước bây giờ bằng bao nhiêu?

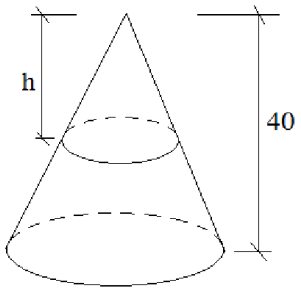


A. $\frac{4-\sqrt[3]{63}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt[3]{63}}{4}$. **C.** $\frac{4-\sqrt{63}}{4}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 16. **(Nam Định - 2018)** Cho tam giác ABC có $A=120°$, $AB=AC=a$. Quay tam giác ABC (bao gồm cả điểm trong tam giác) quanh đường thẳng AB ta được một khối tròn xoay. Thể tích khối tròn xoay đó bằng:

A. $\frac{\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{\pi a^3}{4}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 17. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Một vật N_1 có dạng hình nón có chiều cao bằng $40cm$. Người ta cắt vật N_1 bằng một mặt cắt song song với mặt đáy của nó để được một hình nón nhỏ N_2 có thể tích bằng $\frac{1}{8}$



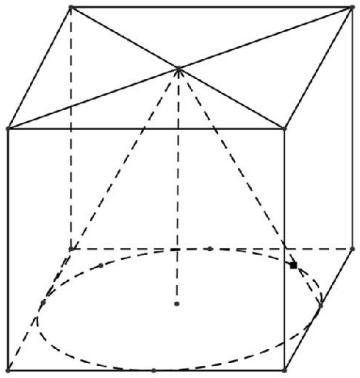
thể tích N_1.Tính chiều cao h của hình nón N_2?

A. $10cm$ **B.** $20cm$ **C.** $40cm$ **D.** $5cm$

Câu 18. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Cho một tấm bìa hình dạng tam giác vuông, biết b và c là độ dài cạnh tam giác vuông của tấm một khối tròn xoay. Hỏi thể tích V của khối tròn xoay sinh ra bởi tấm bìa bằng bao nhiêu?

A. $V=\frac{b^2c^2}{3\sqrt{b^2+c^2}}$. **B.** $V=\frac{\pi b^2c^2}{3\sqrt{b^2+c^2}}$. **C.** $V=\frac{2\pi b^2c^2}{3\sqrt{b^2+c^2}}$. **D.** $V=\frac{\pi b^2c^2}{3\sqrt{2(b^2+c^2)}}$.

Câu 19. Một chiếc thùng chứa đầy nước có hình một khối lập phương. Đặt vào trong thùng đó một khối nón sao cho đỉnh khối nón trùng với tâm một mặt của khối lập phương, đáy khối nón tiếp xúc với các cạnh của mặt đối diện. Tính tỉ số thể tích của lượng nước trào ra ngoài và lượng nước còn lại ở trong thùng.



A. $\frac{\pi}{12-\pi}$. **B.** $\frac{1}{11}$. **C.** $\frac{\pi}{12}$. **D.** $\frac{11}{12}$.

Câu 20. **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Một cái phễu có dạng hình nón. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của lượng nước trong phễu bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao của phễu. Hỏi nếu bịt kín miệng phễu rồi lộn ngược phễu lên thì chiều cao của mực nước xấp xỉ bằng bao nhiêu? Biết rằng chiều cao của phễu là 15cm.

A. $0,501(\text{cm})$. **B.** $0,302(\text{cm})$. **C.** $0,216(\text{cm})$. **D.** $0,188(\text{cm})$.

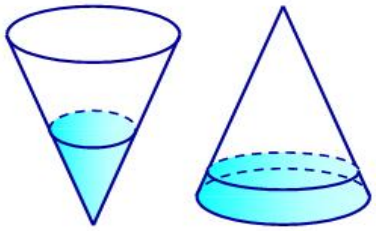
Câu 21. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Hai hình nón bằng nhau có chiều cao bằng 2 dm được đặt như hình vẽ bên (mỗi hình đều đặt thẳng đứng với đỉnh nằm phía dưới). Lúc đầu, hình nón trên chứa đầy nước và hình nón dưới không chứa nước. Sau đó, nước được chảy xuống hình nón dưới thông qua lỗ trống ở đỉnh của hình nón trên. Hãy tính chiều cao của nước trong hình nón dưới tại thời điểm khi mà chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm.

A. $\sqrt[3]{7}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\sqrt[3]{5}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 22. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Tại trung tâm thành phố người ta tạo điểm nhấn bằng cột trang trí hình nón có kích thước như sau: chiều dài đường sinh $l=10\,\text{m}$, bán kính đáy $R=5\,\text{m}$. Biết rằng tam giác SAB là thiết diện qua trục của hình nón và C là trung điểm của SB. Trang trí một hệ thống đèn điện tử chạy từ A đến C trên mặt nón. Xác định giá trị ngắn nhất của chiều dài dây đèn điện tử.

A. 15 m. **B.** 10 m. **C.** $5\sqrt{3}\,\text{m}$. **D.** $5\sqrt{5}\,\text{m}$.

Câu 23. Một cái phễu có dạng hình nón, chiều cao của phễu là $20cm$. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của cột nước trong phễu là $10cm$. Nếu bịt kím miêng phễu rồi lật ngược lên chiều cao của cột nước trong phễu gần nhất với giá trị nào sau đây.



A. $1,07cm$. **B.** $0,97cm$. **C.** $0,67cm$. **D.** $0,87cm$.

Câu 24. Giả sử đồ thị hàm số $y=\left(m^2+1\right)x^4-2mx^2+m^2+1$ có 3 điểm cực trị là A,B,C mà $x_A<x_B<x_C$. Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC ta được một khối tròn xoay. Giá trị của m để thể tích của khối tròn xoay đó lớn nhất thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây:

A. $(4;6)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(0;2)$.

Câu 25. Khi cắt hình nón có chiều cao 16 cm và đường kính đáy 24 cm bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện có diện tích lớn nhất gần với giá trị nào sau đây?

A. 170. **B.** 260. **C.** 294. **D.** 208.

Câu 26. Một hình nón tròn xoay có đường sinh $2a$. Thể tích lớn nhất của khối nón đó là

A. $\frac{16\pi a^3}{3\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{16\pi a^3}{9\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{8\pi a^3}{3\sqrt{3}}$.

Câu 27. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Huyền có một tấm bìa như hình vẽ, Huyền muốn biến đường tròn đó thành một cái phễu hình nón. Khi đó Huyền phải cắt bỏ hình quạt tròn AOB rồi dán OA, OB lại với nhau. Gọi x là góc ở tâm hình quạt tròn dùng làm phễu. Tìm x để thể tích phễu lớn nhất?

A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ **B.** $\frac{\pi}{3}$ **C.** $\frac{\pi}{2}$ **D.** $\frac{\pi}{4}$

Câu 28. **(Chuyên Phan Bội Châu 2019)** Tại trung tâm một thành phố người ta tạo điểm nhấn bằng cột trang trí hình nón có kích thước như sau: đường sinh $l=10m$, bán kính đáy $R=5m$. Biết rằng

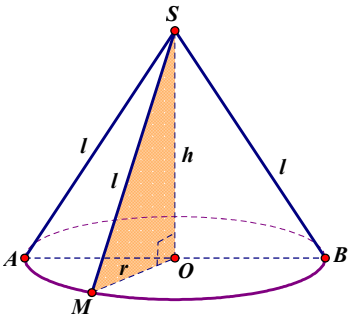
tam giác SAB là thiết diện qua trục của hình nón và C là trung điểm của SB. Trang trí một hệ thống đèn điện tử chạy từ A đến C trên mặt nón. Định giá trị ngắn nhất của chiều dài dây đèn điện tử.

A. $15\,m$. **B.** $10\,m$. **C.** $5\sqrt{3}\,m$. **D.** $5\sqrt{5}\,m$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 21 KHỐI NÓN

Lý thuyết – phương pháp chung

MẶT NÓN	Các yếu tố mặt nón:	Một số công thức:
 ☛**Hình thành:** Quay Δ vuông SOM quanh trục SO, ta được mặt nón như hình bên với: $\begin{cases} h = SO \\ r = OM \end{cases}$.	☐ **Đường cao**: $\boxed{h = SO}$. (SO cũng được gọi là **trục** của hình nón). ☐ **Bán kính đáy**: $\boxed{r = OA = OB = OM}$. ☐ **Đường sinh**: $\boxed{l = SA = SB = SM}$. ☐ **Góc ở đỉnh**: $\boxed{\widehat{ASB}}$ ☐ **Thiết diện qua trục**: ΔSAB cân tại S. ☐ **Góc giữa đường sinh và mặt đáy**: $\boxed{\widehat{SAO} = \widehat{SBO} = \widehat{SMO}}$.	☐ **Chu vi đáy**: $\boxed{p = 2\pi r}$. ☐ **Diện tích đáy**: $\boxed{S_đ = \pi r^2}$. ☐ **Thể tích**: $\boxed{V = \frac{1}{3}h.S_đ = \frac{1}{3}h.\pi r^2}$. *(liên tưởng đến thể tích khối chóp).* ☐ **Diện tích xung quanh**: $\boxed{S_{xq} = \pi rl}$. ☐ **Diện tích toàn phần**: $\boxed{S_{tp} = S_{xq} + S_đ = \pi rl + \pi r^2}$.

Dạng 1. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, chiều cao, bán kính đáy, thiết diện

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh l và bán kính đáy r bằng

A. $4\pi rl$. **B.** $2\pi rl$. **C.** πrl. **D.** $\frac{1}{3}\pi rl$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức diện tích xung quanh hình nón.

Câu 2. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hình nón có bán kính đáy $r = 2$ và độ dài đường sinh $l = 7$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. 28π. **B.** 14π. **C.** $\frac{14\pi}{3}$. **D.** $\frac{98\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Có $S_{xq} = \pi rl = \pi.7.12 = 14\pi$.

Câu 3. **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Cho hình nón có bán kính đáy $r = 2$ và độ dài đường sinh $l = 5$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. 20π. **B.** $\frac{20\pi}{3}$ **C.** 10π. **D.** $\frac{10\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có diện tích xung quanh của hình nón đã cho là: $S_{xq} = \pi rl = \pi.2.5 = 10\pi$.

Câu 4. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hình nón có bán kính đáy $r = 2$ và độ dài đường sinh $l = 7$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $\frac{28\pi}{3}$. **B.** 14π. **C.** 28π. **D.** $\frac{14\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$S_{xq} = \pi rl = 2.7.\pi = 14\pi$.

Câu 5. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Gọi l, h, r lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính mặt đáy của hình nón. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón là:

A. $S_{xq} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. **B.** $S_{xq} = \pi rl$. **C.** $S_{xq} = \pi rh$. **D.** $S_{xq} = 2\pi rl$.

Lời giải

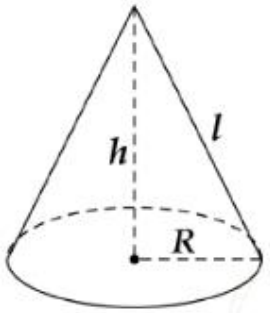
Chọn B

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi rl$.

Câu 6. **(Chuyên Thái Bình 2019)** Cho hình nón có bán kính đáy bằng a, đường cao là $2a$. Tính diện tích xung quanh hình nón?

A. $2\sqrt{5}\pi a^2$. **B.** $\sqrt{5}\pi a^2$. **C.** $2a^2$. **D.** $5a^2$.

Lời giải



Ta có $S_{xq} = \pi Rl = \pi a\sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{5}\pi a^2$ (đvdt).

Câu 7. **(Mã 104 2017)** Cho hình nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và độ dài đường sinh $l = 4$. Tính diện tích xung quanh của hình nón đã cho.

A. $S_{xq} = 8\sqrt{3}\pi$ **B.** $S_{xq} = 12\pi$ **C.** $S_{xq} = 4\sqrt{3}\pi$ **D.** $S_{xq} = \sqrt{39}\pi$

Lời giải

Chọn C

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq} = \pi rl = 4\sqrt{3}\pi$.

Câu 8. **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Tính độ dài đường sinh l của hình nón đã cho.

A. $l = 3a$. **B.** $l = 2\sqrt{2}a$. **C.** $l = \frac{3a}{2}$. **D.** $l = \frac{\sqrt{5}a}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq} = \pi rl = \pi al = 3\pi a^2 \Rightarrow l = 3a$.

Câu 9. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và có bán kính đáy bằng a. Độ dài đường sinh của hình nón đã cho bằng:

A. $3a$ **B.** $2a$ **C.** $\frac{3a}{2}$ **D.** $2\sqrt{2}a$

Lời giải

Chọn A

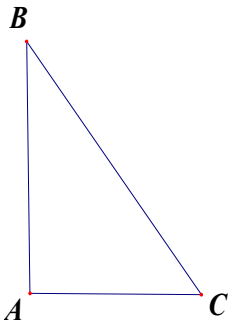
Diện tích xung quanh hình nón: $S_{xq} = \pi rl$ với $r = a \Rightarrow \pi.a.l = 3\pi a^2 \Rightarrow l = 3a$.

Câu 10. **(Đề Minh Họa 2017)** Trong không gian, cho tam giác vuông ABC tại A, $AB = a$ và $AC = a\sqrt{3}$. Tính độ dài đường sinh l của hình nón, nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB.

A. $l = a\sqrt{3}$ **B.** $l = 2a$ **C.** $l = a$ **D.** $l = a\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn B



Xét tam giác ABC vuông tại A ta có $BC^2 = AC^2 + AB^2 = 4a^2 \Leftrightarrow BC = 2a$

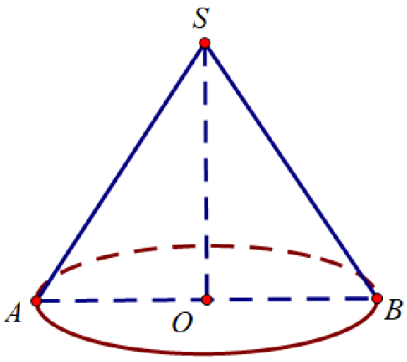
Đường sinh của hình nón cũng chính là cạnh huyền của tam giác $\Leftrightarrow l = BC = 2a$.

Câu 11. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Một hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a. Tính diện tích xung quanh của hình nón.

A. $\frac{2\pi a^2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\pi a^2\sqrt{2}$. **D.** $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



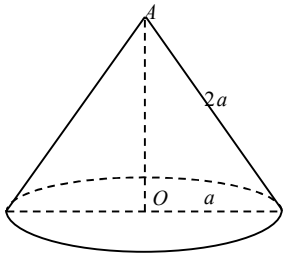
Ta có tam giác SAB vuông cân tại S có $SA = a$.

Khi đó: $R = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $l = SA = a$. Nên $S_{xq} = \pi Rl = \pi.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$.

Câu 12. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hình nón có bán kính đáy bằng a và độ dài đường sinh bằng $2a$. Diện tích xung quanh của hình nón đó bằng

A. $4\pi a^2$. **B.** $3\pi a^2$. **C.** $2\pi a^2$. **D.** $2a^2$.

Lời giải



Ta có: $S_{xq}=\pi rl=\pi.a.2a=2\pi a^2$.

Câu 13. **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$, bán kính đáy bằng a. Tính độ dài đường sinh của hình nón đó

A. $2a\sqrt{2}$. **B.** $\frac{3a}{2}$. **C.** $2a$. **D.** $3a$.

Lời giải

$S_{xq}=\pi Rl\Rightarrow l=\frac{S_{xq}}{\pi R}=\frac{3\pi a^2}{\pi a}=3a$.

Câu 14. **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Cho khối nón (N) có thể tích bằng 4π và chiều cao là 3.Tính bán kính đường tròn đáy của khối nón (N).

A. 2. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** 1. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Thể tích của khối nón được tính bởi công thức $V=\frac{1}{3}\pi R^2h$ (R là bán kính đáy, h là độ dài đường cao của khối chóp).

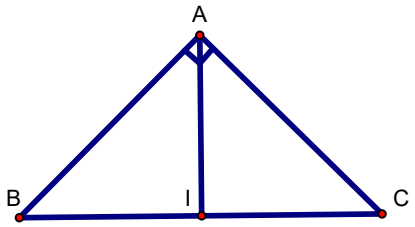
Theo bài ra: $V=4\pi,h=3$ nên ta có $4\pi=\frac{1}{3}\pi R^2.3\Leftrightarrow R^2=4\Leftrightarrow R=2$.

Vậy $R=2$.

Câu 15. **(THPT Trần Nhân Tông - QN -2018)** Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại cân A, gọi I là trung điểm của BC, $BC=2$.Tính diện tích xung quanh của hình nón, nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AI.

A. $S_{xq}=\sqrt{2}\pi$. **B.** $S_{xq}=2\pi$. **C.** $S_{xq}=2\sqrt{2}\pi$. **D.** $S_{xq}=4\pi$.

Lời giải



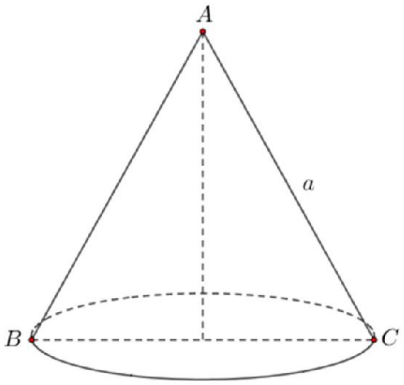
$R=\frac{BC}{2}=1$, $l=AB=AC=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$

$S_{xq}=\pi R=\sqrt{2}\pi$

Câu 16. **(Đồng Tháp - 2018)** Một hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

A. $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{2\pi a^2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\pi a^2\sqrt{2}$.

Lời giải



Ta có $l = AB = a$, $r = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $S_{xq} = \pi rl = \pi.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$.

Câu 17. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên - 2018)** Cho hình hình nón có độ dài đường sinh bằng 4, diện tích xung quanh bằng 8π. Khi đó hình nón có bán kính hình tròn đáy bằng

A. 8. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Ta có diện tích xung quanh của hình nón là:

$S_{xq} = \pi Rl = \pi.R.4 = 8\pi \Rightarrow R = 2$.

Vậy bán kính hình tròn đáy là $R = 2$.

Câu 18. **(Chuyên Quốc Học Huế - 2018)** Cho hình nón có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao bằng 4. Tính diện tích xung quanh của hình nón.

A. 12π. **B.** 9π. **C.** 30π. **D.** 15π.

Lời giải

Ta có $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Diện tích xung quanh của hình nón đã cho là $S_{xq} = \pi rl = \pi.3.5 = 15\pi$.

Câu 19. **(THPT Hậu Lộc 2 - TH - 2018)** Cho hình nón có đường sinh $l = 5$, bán kính đáy $r = 3$. Diện tích toàn phần của hình nón đó là:

A. $S_{tp} = 15\pi$. **B.** $S_{tp} = 20\pi$. **C.** $S_{tp} = 22\pi$. **D.** $S_{tp} = 24\pi$.

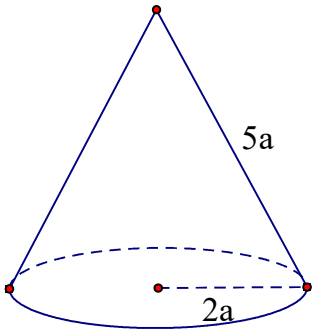
Lời giải

Áp dụng công thức tính diện tích toàn phần của hình nón ta có $S_{tp} = \pi rl + \pi r^2 = 15\pi + 9\pi = 24\pi$.

Câu 20. **(Chuyên Lương Thế Vinh - Đồng Nai - 2018)** Cho hình nón (N) có đường kính đáy bằng $4a$, đường sinh bằng $5a$. Tính diện tích xung quanh S của hình nón (N).

A. $S = 10\pi a^2$. **B.** $S = 14\pi a^2$. **C.** $S = 36\pi a^2$. **D.** $S = 20\pi a^2$.

Lời giải



Diện tích xung quanh của hình nón (N) là: $S = \pi rl = \pi.2a.5a = 10\pi a^2$.

Câu 21. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)** Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $5\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Tính độ dài đường sinh của hình nón đã cho?

A. $a\sqrt{5}$. **B.** $3a\sqrt{2}$. **C.** $3a$. **D.** $5a$.

Lời giải

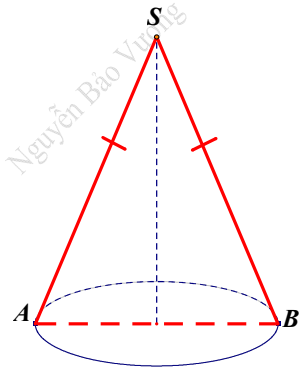
Áp dụng công thức tính diện tích xung quanh của hình nón $S_{xq} = \pi Rl$, nên ta có:

$$l = \frac{S_{xq}}{\pi R} = \frac{5\pi a^2}{\pi a} = 5a.$$

Câu 22. **(Thanh Hóa - 2018)** Mặt phẳng chứa trục của một hình nón cắt hình nón theo thiết diện là:

A. một hình chữ nhật. **B.** một tam giác cân. **C.** một đường elip. **D.** một đường tròn.

Lời giải



Mặt phẳng chứa trục của một hình nón cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác cân.

Câu 23. **(Chuyên Bắc Ninh - 2018)** Cho hình nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và độ dài đường sinh $l = 4$. Tính diện tích xung quanh S của hình nón đã cho.

A. $S = 8\sqrt{3}\pi$. **B.** $S = 24\pi$. **C.** $S = 16\sqrt{3}\pi$. **D.** $S = 4\sqrt{3}\pi$.

Lời giải

Ta có $S = \pi rl = 4\sqrt{3}\pi$.

Dạng 2. Thể tích

Câu 1. **(Mã 103 - 2019)** Thể tích của khối nón có chiều cao h và có bán kính đáy r là

A. $2\pi r^2 h$. **B.** $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. **C.** $\pi r^2 h$. **D.** $\frac{4}{3}\pi r^2 h$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích của khối nón có chiều cao h và có bán kính đáy r là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho khối nón có chiều cao $h=3$ và bán kính đáy $r=4$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. 16π. **B.** 48π. **C.** 36π. **D.** 4π.

Lời giải

Chọn A

Ta có công thức thể tích khối nón $V=\frac{1}{3}.\pi.r^2.h=\frac{1}{3}.\pi.16.3=16\pi$.

Câu 3. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho khối nón có bán kính đáy $r=5$ và chiều cao $h=2$. Thể tích khối nón đã cho bằng:

A. $\frac{10\pi}{3}$. **B.** 10π. **C.** $\frac{50\pi}{3}$. **D.** 50π.

Lời giải

Chọn C.

Thể tích khối nón $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{50\pi}{3}$

Câu 4. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho khối nón có bán kính đáy $r=4$ và chiều cao $h=2$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\frac{8\pi}{3}$. **B.** 8π. **C.** $\frac{32\pi}{3}$. **D.** 32π.

Lời giải

Chọn C

Thể tích của khối nón đã cho là $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi.4^2.2=\frac{32\pi}{3}$.

Câu 5. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho khối nón có bán kính $r=2$ chiều cao $h=5$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\frac{20\pi}{3}$. **B.** 20π. **C.** $\frac{10\pi}{3}$. **D.** 10π.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức thể tích khối nón ta được: $V=\frac{\pi r^2h}{3}=\frac{\pi.2^2.5}{3}=\frac{20\pi}{3}$.

Câu 6. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho khối nón có bán kính đáy $r=2$ và chiều cao $h=4$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. 8π. **B.** $\frac{8\pi}{3}$. **C.** $\frac{16\pi}{3}$. **D.** 16π.

Lời giải

Chọn C

Ta có $V=\frac{1}{3}.r^2.\pi.h=\frac{1}{3}.2^2.\pi.4=\frac{16\pi}{3}$.

Câu 7. **(Mã 110 2017)** Cho khối nón có bán kính đáy $r=\sqrt{3}$ và chiều cao $h=4$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

A. $V=12\pi$ **B.** $V=4\pi$ **C.** $V=16\pi\sqrt{3}$ **D.** $V=\frac{16\pi\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $V=\frac{1}{3}\pi.r^2.h=\frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{3}\right)^2.4=4\pi$.

Câu 8. **(Mã 101 - 2019)** Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là

A. $\frac{4}{3}\pi r^2h$. **B.** $2\pi r^2h$. **C.** $\frac{1}{3}\pi r^2h$. **D.** πr^2h.

Lời giải

Chọn C

Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là: $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$.

Câu 9. **(Mã 104 2019)** Thể tích khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là

A. $\frac{1}{3}\pi r^2h$. **B.** $\frac{4}{3}\pi r^2h$. **C.** $2\pi r^2h$. **D.** πr^2h.

Lời giải

Chọn A

Lý thuyết thể tích khối nón.

Câu 10. **(Mã 102 - 2019)** Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là

A. $\frac{4}{3}\pi r^2h$. **B.** πr^2h. **C.** $2\pi r^2h$. **D.** $\frac{1}{3}\pi r^2h$.

Lời giải

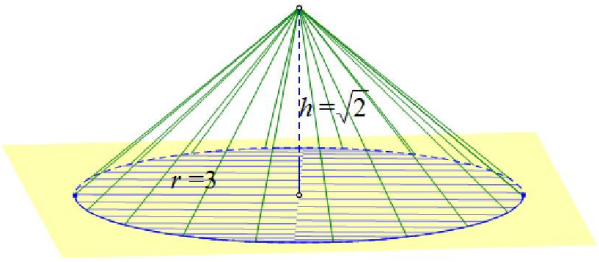
Chọn D

Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$

Câu 11. **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Cho khối nón có bán kính đáy $r=3$, chiều cao $h=\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối nón.

A. $V=\frac{3\pi\sqrt{2}}{3}$ **B.** $V=3\pi\sqrt{11}$ **C.** $V=\frac{9\pi\sqrt{2}}{3}$ **D.** $V=9\pi\sqrt{2}$

Lời giải

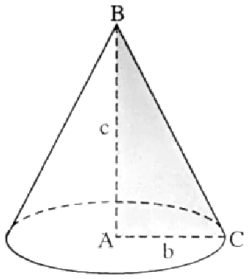


Thể tích khối nón: $V=\frac{1}{3}\pi.r^2.h=\frac{9\pi\sqrt{2}}{3}$

Câu 12. **(Chuyên ĐHSP Hà Nội 2019)** Cho tam giác ABC vuông tại $A, AB=c, AC=b$. Quay tam giác ABC xung quanh đường thẳng chứa cạnh AB ta được một hình nón có thể tích bằng

A. $\frac{1}{3}\pi bc^2$. **B.** $\frac{1}{3}bc^2$. **C.** $\frac{1}{3}b^2c$. **D.** $\frac{1}{3}\pi b^2c$.

Lời giải

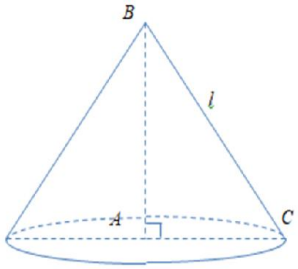


$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi b^2 c$.

Câu 13. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Cho hình nón có độ dài đường sinh bằng 25 và bán kính đường tròn đáy bằng 15. Tính thể tích của khối nón đó.

A. 1500π. **B.** 4500π. **C.** 375π. **D.** 1875π.

Lời giải



Gọi h là chiều cao khối nón $\Rightarrow h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$.

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}.\pi.15^2.20 = 1500\pi$.

Câu 14. **(Mã 105 2017)** Trong không gian cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$ và $\widehat{ACB} = 30^o$. Tính thể tích V của khối nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC.

A. $V = \pi a^3$ **B.** $V = \sqrt{3}\pi a^3$ **C.** $V = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{9}$ **D.** $V = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $AC = AB.\cot 30^o = a\sqrt{3}$. Vậy thể tích khối nón là : $V = \frac{1}{3}\pi a^2.a\sqrt{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 15. **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và bán kính đáy bằng a. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. **C.** $\frac{2\pi a^3}{3}$. **D.** $\frac{\pi a^3}{3}$

Lời giải

Chọn A

Chiều cao khối nón đã cho là $h = \sqrt{l^2 - r^2} = a\sqrt{3}$

Thể tích khối nón đã cho là: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi a^2.a\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$.

Câu 16. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho khối nón có bán kính đáy $r = 2$, chiều cao $h = \sqrt{3}$. Thể tích của khối nón là

A. $\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{4\pi}{3}$. **C.** $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$. **D.** $4\pi\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Khối nón có thể tích là $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$

Câu 17. **(KTNL Gia Bình 2019)** Cho khối nón tròn xoay có chiều cao và bán kính đáy cùng bằng a. Khi đó thể tích khối nón là

A. $\frac{4}{3}\pi a^3$. B. $\frac{2}{3}\pi a^3$. C. πa^3. D. $\frac{1}{3}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D

Khối nón có bán kính đáy $R=a$. Diện tích đáy $S=\pi a^2$. Thể tích khối nón là $V=\frac{1}{3}\pi a^3$.

Câu 18. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho khối nón có bán kính đáy $r=\sqrt{3}$ và chiều cao $h=4$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

A. $V=16\pi\sqrt{3}$ **B.** $V=\frac{16\pi\sqrt{3}}{3}$ **C.** $V=12\pi$ **D.** $V=4\pi$

Lời giải

Chọn D

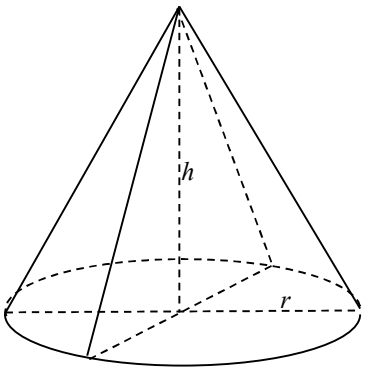
$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi.3.4=4\pi$.

Câu 19. **(THPT Đông Sơn 1 - Thanh Hóa - 2019)** Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và đường cao bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\frac{2\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **D.** $\frac{\pi a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $l=2a, h=a\sqrt{3}$.

$r^2=l^2-h^2=4a^2-3a^2=a^2\Rightarrow r=a$

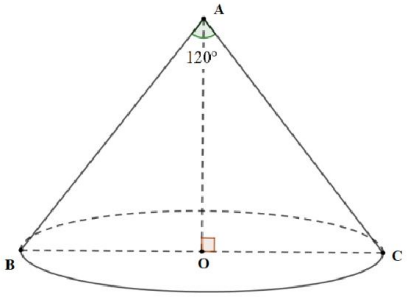
Thể tích khối nón là $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi a^2 a\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$.

Câu 20. **(Chuyên Hà Tĩnh 2019)** Cho khối nón có thiết diện qua trục là một tam giác cân có một góc $120°$ và cạnh bên bằng a. Tính thể tích khối nón.

A. $\frac{\pi a^3}{8}$. **B.** $\frac{3\pi a^3}{8}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $\frac{\pi a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi thiết diện qua trục là tam giác ABC (Hình vẽ) có $\widehat{BAC}=120°$ và $AB=AC=a$. Gọi O là trung điểm của đường kính BC của đường tròn đáy khi đó ta có $r=BO=AB\sin 60°=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $h=AO=AB\cos 60°=\frac{a}{2}$. Vậy thể tích khối nón là $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\frac{a}{2}=\frac{\pi a^3}{8}$.

Câu 21. Nếu giữ nguyên bán kính đáy của một khối nón và giảm chiều cao của nó 2 lần thì thể tích của khối nón này thay đổi như thế nào?

A. Giảm 4 lần. **B.** Giảm 2 lần. **C.** Tăng 2 lần. **D.** Không đổi.

Lời giải

Chọn B

Gọi R,h lần lượt là bán kính đường tròn đáy và chiều cao của hình nón ban đầu.

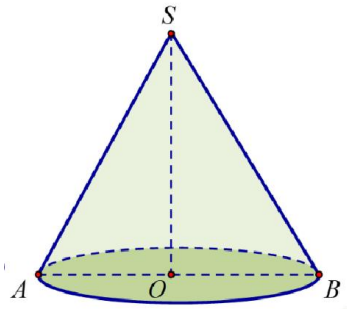
Thể tích khối nón ban đầu là $V_1=\frac{1}{3}\pi R^2h$. Giữ nguyên bán kính đáy của khối nón và giảm chiều cao của nó 2 lần thì thể tích của khối nón này là $V_2=\frac{1}{3}\pi.R^2.\frac{h}{2}=\frac{1}{2}V_1$.

Câu 22. **(THPT Mai Anh Tuấn_Thanh Hóa -2019)** Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng đường kính đáy bằng a. Thể tích khối nón là.

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{16}$. **B.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{48}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải

Chọn C



Khối nón có độ dài đường sinh bằng đường kính đáy bằng a.

$\Rightarrow \Delta SAB$ đều cạnh $a\Rightarrow SO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$V_{kn}=\frac{1}{3}.SO.S_d=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\pi.\frac{a^2}{4}=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$.

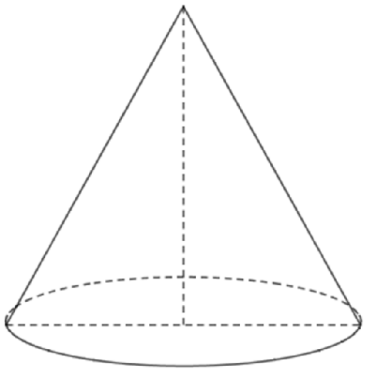
Câu 23. **(Chuyên An Giang - 2018)** Cho khối nón có bán kính $r=\sqrt{5}$ và chiều cao $h=3$. Tính thể tích V của khối nón.

A. $V=9\pi\sqrt{5}$. **B.** $V=3\pi\sqrt{5}$. **C.** $V=\pi\sqrt{5}$. **D.** $V=5\pi$.

Lời giải

Thể tích V của khối nón là: $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi 5.3=5\pi$.

Câu 24. **(Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2018)** Cho khối nón có bán kính đáy $r=2$, chiều cao $h=\sqrt{3}$ (hình vẽ). Thể tích của khối nón là:



A. $\frac{4\pi}{3}$. **B.** $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$. **C.** $4\pi\sqrt{3}$. **D.** $\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$.

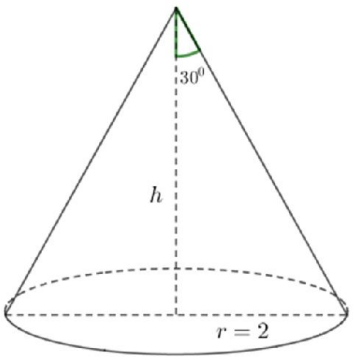
Lời giải

Ta có $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi.2^2.\sqrt{3}=\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$.

Câu 25. **(THPT Lê Xoay - 2018)** Cho hình nón có bán kính đáy bằng 2 (cm), góc ở đỉnh bằng 60°. Thể tích khối nón là

A. $V=\frac{8\pi\sqrt{3}}{9}\left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $V=\frac{8\pi\sqrt{3}}{2}\left(\text{cm}^3\right)$. **C.** $V=8\pi\sqrt{3}\left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $V=\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}\left(\text{cm}^3\right)$.

Lời giải



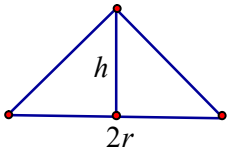
Ta có bán kính đáy $r=2$, đường cao $h=\frac{r}{\tan 30^o}\Rightarrow h=2\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối nón $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi.4.2\sqrt{3}=\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 26. **(Cụm 5 Trường Chuyên - ĐBSH - 2018)** Cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua trục ta được thiết diện là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{6}$. Tính thể tích V của khối nón đó.

A. $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{4}$. **B.** $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{6}$. **D.** $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải



Khối nón có $2r=a\sqrt{6}\Leftrightarrow r=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ và $h=r$ suy ra thể tích $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 27. **(THPT Cầu Giấy - 2018)** Cho khối nón tròn xoay có đường cao $h=15\ cm$ và đường sinh $l=25\,cm$. Thể tích V của khối nón là:

A. $V=1500\pi\left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $V=500\pi\left(\text{cm}^3\right)$. **C.** $V=240\pi\left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $V=2000\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

Lời giải

Ta có: $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\pi.\left(l^2-h^2\right).h=2000\pi$.

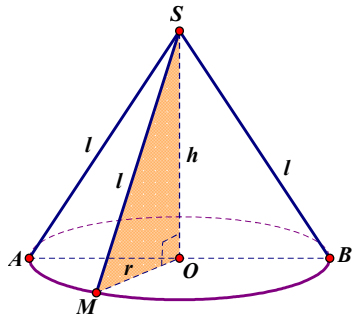
Vậy: $V=2000\pi\ (cm^3)$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 21 KHỐI NÓN

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM

Lý thuyết chung

MẶT NÓN	Các yếu tố mặt nón:	Một số công thức:
 ☛**Hình thành:** Quay Δ vuông SOM quanh trục SO, ta được mặt nón như hình bên với: $\begin{cases} h = SO \\ r = OM \end{cases}$.	☐ **Đường cao**: $\boxed{h = SO}$. (SO cũng được gọi là **trục** của hình nón). ☐ **Bán kính đáy**: $\boxed{r = OA = OB = OM}$. ☐ **Đường sinh**: $\boxed{l = SA = SB = SM}$. ☐ **Góc ở đỉnh**: $\boxed{\widehat{ASB}}$ ☐ **Thiết diện qua trục**: ΔSAB cân tại S. ☐ **Góc giữa đường sinh và mặt đáy**: $\boxed{\widehat{SAO} = \widehat{SBO} = \widehat{SMO}}$.	☐ **Chu vi đáy**: $\boxed{p = 2\pi r}$. ☐ **Diện tích đáy**: $\boxed{S_đ = \pi r^2}$. ☐ **Thể tích**: $\boxed{V = \frac{1}{3}h.S_đ = \frac{1}{3}h.\pi r^2}$. *(liên tưởng đến thể tích khối chóp).* ☐ **Diện tích xung quanh**: $\boxed{S_{xq} = \pi rl}$. ☐ **Diện tích toàn phần**: $\boxed{S_{tp} = S_{xq} + S_đ = \pi rl + \pi r^2}$.

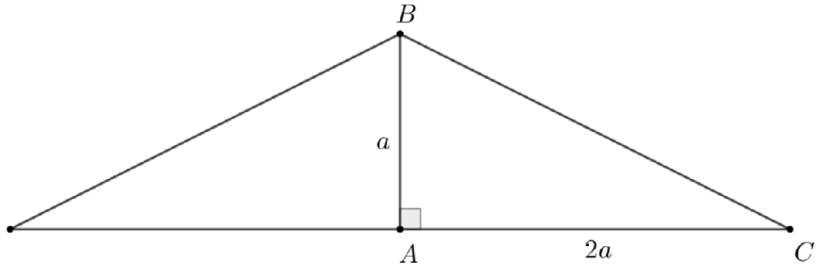
Dạng 1. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, chiều cao, bán kính đáy, thiết diện

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$ và $AC = 2a$. Khi quay tam giác ABC quanh cạnh góc vuông AB thì đường gấp khúc ACB tạo thành một hình nón. Diện tích xung quanh hình nón đó bằng

A. $5\pi a^2$. **B.** $\sqrt{5}\pi a^2$. **C.** $2\sqrt{5}\pi a^2$. **D.** $10\pi a^2$.

Lời giải

Chọn C



$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{5}$.

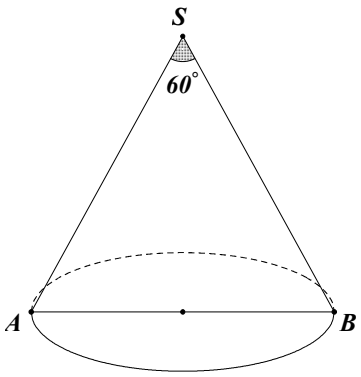
Diện tích xung quanh hình nón cần tìm là $S = \pi.AC.BC = \pi.2a.a\sqrt{5} = 2\sqrt{5}\pi a^2$.

Câu 2. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hình nón có bán kính đáy bằng 2 và góc ở đỉnh bằng $60°$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. 8π. **B.** $\frac{16\sqrt{3}\pi}{3}$. **C.** $\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$. **D.** 16π.

Lời giải

Chọn A



Gọi S là đỉnh của hình nón và AB là một đường kính của đáy.
Theo bài ra, ta có tam giác SAB là tam giác đều $\Rightarrow l = SA = AB = 2r = 4$.
Vậy diện tích xung quanh của hình nón đã cho là $S_{xq} = \pi rl = 8\pi$.

Câu 3. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hình nón có bán kính bằng 5 và góc ở đỉnh bằng $60°$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. 50π. **B.** $\frac{100\sqrt{3}\pi}{3}$. **C.** $\frac{50\sqrt{3}\pi}{3}$. **D.** 100π.

Lời giải

Chọn A

Ta có độ dài đường sinh là $l = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{5}{\sin 30°} = 10$.

Diện tích xung quanh $S_{xq} = \pi rl = 50\pi$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 4. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hình nón có bán kính bằng 3 và góc ở đỉnh bằng 60^0. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. 18π. **B.** 36π. **C.** $6\sqrt{3}\pi$. **D.** $12\sqrt{3}\pi$.

Lời giải

Chọn A

Gọi l là đường sinh, r là bán kính đáy ta có $r = 3$.

Gọi α là góc ở đỉnh. Ta có $\sin\alpha = \frac{r}{l} \Rightarrow l = \frac{r}{\sin\alpha} = \frac{3}{\sin 30^0} = 6$.

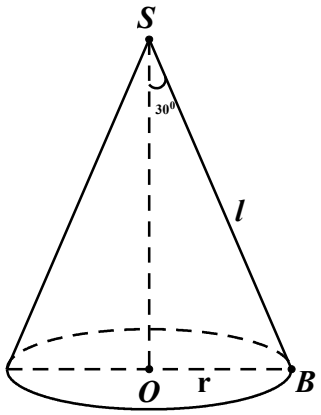
Vậy diện tích xung quanh $S = \pi rl = \pi.3.6 = 18\pi$.

Câu 5. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hình nón có bán kính đáy bằng 4 và góc ở đỉnh bằng 60^0. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $\frac{64\sqrt{3}\pi}{3}$. **B.** 32π. **C.** 64π. **D.** $\frac{32\sqrt{3}\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có Góc ở đỉnh bằng $60^0 \Rightarrow \widehat{OSB} = 30^0$.

Độ dài đường sinh: $l = \dfrac{r}{\sin 30^0} = \dfrac{4}{\dfrac{1}{2}} = 8$.

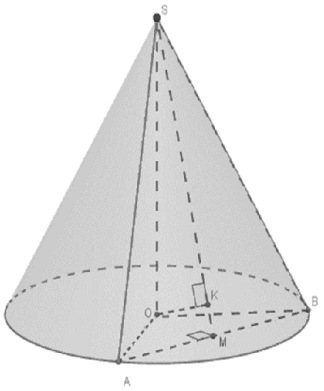
Diện tích xung quanh hình nón: $S_{xq} = \pi rl = \pi.4.8 = 32\pi$.

Câu 6. **(Mã 123 2017)** Cho một hình nón có chiều cao $h = a$ và bán kính đáy $r = 2a$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}a$. Tính khoảng cách d từ tâm của đường tròn đáy đến (P).

A. $d = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$ **B.** $d = \dfrac{\sqrt{5}a}{5}$ **C.** $d = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$ **D.** $d = a$

Lời giải

Chọn C



Có $(P) \equiv (SAB)$.

Ta có $SO = a = h, OA = OB = r = 2a, AB = 2a\sqrt{3}$, gọi M là hình chiếu của O lên AB suy ra M là trung điểm AB, gọi K là hình chiếu của O lên SM suy ra $d\left(O;(SAB)\right) = OK$.

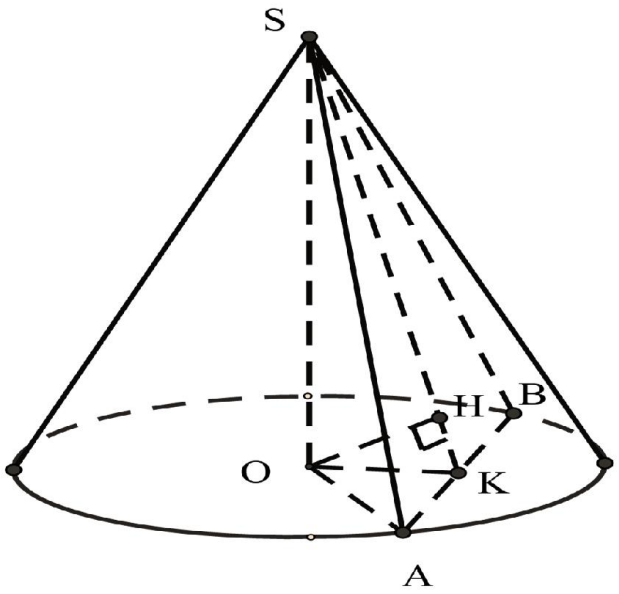
Ta tính được $OM = \sqrt{OA^2 - MA^2} = a$ suy ra SOM là tam giác vuông cân tại O, suy ra K là trung điểm của SM nên $OK = \dfrac{SM}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 7. **(KSCL THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến (SAB) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{SAO} = 30^0, \widehat{SAB} = 60^0$. Độ dài đường sinh của hình nón theo a bằng

A. $a\sqrt{2}$ **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** $2a\sqrt{3}$ **D.** $a\sqrt{5}$

Lời giải

Chọn A



Gọi K là trung điểm của AB ta có $OK \perp AB$ vì tam giác OAB cân tại O

Mà $SO \perp AB$ nên $AB \perp (SOK) \Rightarrow (SOK) \perp (SAB)$ mà $\Rightarrow (SOK) \cap (SAB) = SK$ nên từ O dựng $OH \perp SK$ thì $OH \perp (SAB) \Rightarrow OH = d(O,(SAB))$

Xét tam giác SAO ta có: $\sin \widehat{SAO} = \dfrac{SO}{SA} \Rightarrow SO = \dfrac{SA}{2}$

Xét tam giác SAB ta có: $\sin \widehat{SAB} = \dfrac{SK}{SA} \Rightarrow SK = \dfrac{SA\sqrt{3}}{2}$

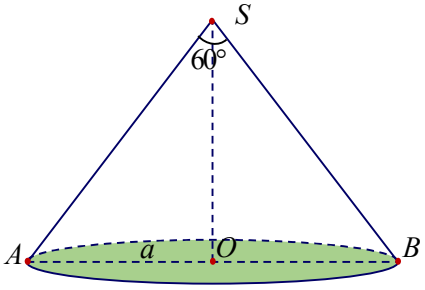
Xét tam giác SOK ta có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OK^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{SK^2 - SO^2} + \dfrac{1}{SO^2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{\frac{SA^2}{4}} + \dfrac{1}{\frac{3SA^2}{4} - \frac{SA^2}{4}} = \dfrac{4}{SA^2} + \dfrac{2}{SA^2} \Rightarrow \dfrac{6}{SA^2} = \dfrac{3}{a^2} \Rightarrow SA = 2a^2 \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$

Câu 8. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Cho một hình nón có bán kính đáy bằng a và góc ở đỉnh bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh của hình nón đó.

A. $S_{xq} = 4\pi a^2$. **B.** $S_{xq} = \dfrac{2\sqrt{3}\pi a^2}{3}$. **C.** $S_{xq} = \dfrac{4\sqrt{3}\pi a^2}{3}$. **D.** $S_{xq} = 2\pi a^2$.

Lời giải



Giả sử hình nón có đỉnh là S, O là tâm của đường tròn đáy và AB là một đường kính của đáy.

$r = OA = a$, $\widehat{ASB} = 60° \Rightarrow \widehat{ASO} = 30°$.

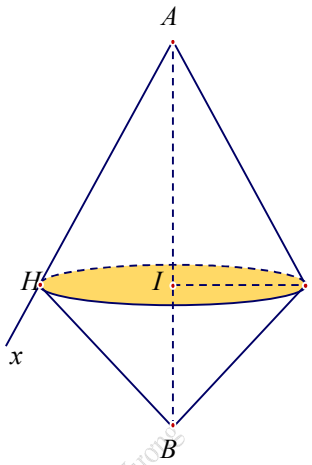
Độ dài đường sinh là $l = SA = \dfrac{OA}{\sin 30^\circ} = 2a$.

Vậy diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi rl = \pi.a.2a = 2\pi a^2$.

Câu 9. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng $2a$, vẽ tia Ax về phía điểm B sao cho điểm B luôn cách tia Ax một đoạn bằng a. Gọi H là hình chiếu của B lên tia Ax, khi tam giác AHB quay quanh trục AB thì đường gấp khúc AHB vẽ thành mặt tròn xoay có diện tích xung quanh bằng:

A. $\dfrac{3\sqrt{2}\pi a^2}{2}$. **B.** $\dfrac{\left(3+\sqrt{3}\right)\pi a^2}{2}$. **C.** $\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)\pi a^2}{2}$. **D.** $\dfrac{\left(2+\sqrt{2}\right)\pi a^2}{2}$.

Lời giải



Xét tam giác AHB vuông tại H. Ta có $AH = \sqrt{AB^2 - HB^2} = a\sqrt{3}$

Xét tam giác AHB vuông tại H, $HI \perp AB$ tại I ta có $HI = \dfrac{AH.HB}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}.a}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Khi tam giác AHB quay quanh trục AB thì đường gấp khúc AHB vẽ thành mặt tròn xoay (có diện tích xung quanh là S) là hợp của hai mặt xung quanh của hình nón (N_1) và (N_2).

Trong đó:

(N_1) là hình nón có được do quay tam giác AHI quanh trục AI có diện tích xung quanh là

$S_1 = \pi.HI.AH = \pi.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3} = \dfrac{3\pi a^2}{2}$

(N_2) là hình nón có được do quay tam giác BHI quanh trục BI có diện tích xung quanh là

$S_2 = \pi.HI.BH = \pi.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^2}{2}$

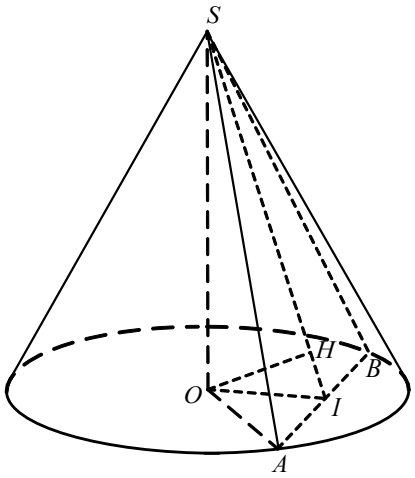
$\Rightarrow S = S_1 + S_2 = \dfrac{3\pi a^2}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\pi a^2}{2} = \dfrac{\left(3+\sqrt{3}\right)\pi a^2}{2}$.

Câu 10. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hình nón có chiều cao $h = 20$, bán kính đáy $r = 25$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12. Tính diện tích S của thiết diện đó.

A. $S = 500$ **B.** $S = 400$ **C.** $S = 300$ **D.** $S = 406$

Lời giải

Giả sử hình nón đỉnh S, tâm đáy O và có thiết diện qua đỉnh thỏa mãn yêu cầu bài toán là ΔSAB (hình vẽ).



Ta có SO là đường cao của hình nón. Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow OI \perp AB$.
Gọi H là hình chiếu của O lên $SI \Rightarrow OH \perp SI$.
Ta chứng minh được $OH \perp (SAB) \Rightarrow OH = 12$.

Xét tam giác vuông SOI có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OI^2} \Rightarrow \dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{OH^2} - \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{12^2} - \dfrac{1}{20^2} = \dfrac{1}{225}$.

$\Rightarrow OI^2 = 225 \Rightarrow OI = 15$.

Xét tam giác vuông SOI có $SI = \sqrt{OS^2 + OI^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$.

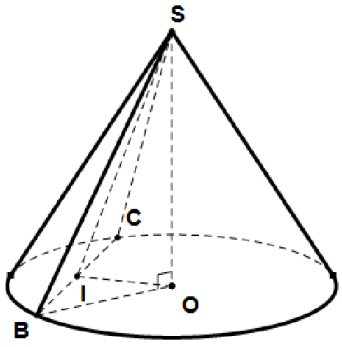
Xét tam giác vuông OIA có $IA = \sqrt{OA^2 - OI^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20 \Rightarrow AB = 40$.

Ta có $S = S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AB.SI = \dfrac{1}{2}.40.25 = 500$.

Câu 11. **(Liên Trường THPT TP Vinh Nghệ An 2019)** Cắt hình nón (N) đỉnh S cho trước bởi mặt phẳng qua trục của nó, ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $2a\sqrt{2}$. Biết BC là một dây cung đường tròn của đáy hình nón sao cho mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy của hình nón một góc 60^0. Tính diện tích tam giác SBC.

A. $\dfrac{4a^2\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\dfrac{4a^2\sqrt{2}}{9}$ **C.** $\dfrac{2a^2\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\dfrac{2a^2\sqrt{2}}{9}$

Lời giải



Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác vuông cân, suy ra $r = SO = a\sqrt{2}$

Ta có góc giữa mặt phẳng (SBC) tạo với đáy bằng góc $\widehat{SIO} = 60^0$

Trong tam giác SIO vuông tại O có $SI = \dfrac{SO}{\sin \widehat{SIO}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$ và $OI = SI.\cos \widehat{SIO} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}a$

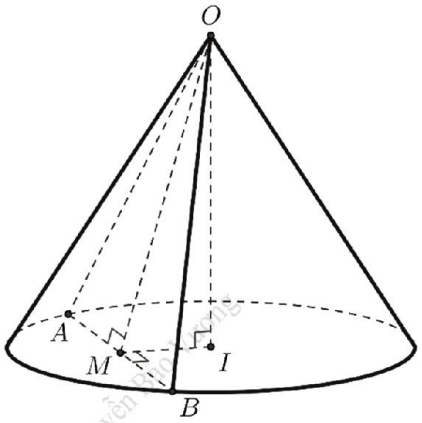
Mà $BC = 2\sqrt{r^2 - OI^2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}a$

Diện tích tam giác SBC là $S = \dfrac{1}{2}SI.BC = \dfrac{4a^2\sqrt{2}}{3}$

Câu 12. **(Sở Hà Nội 2019)** Cho hình nón tròn xoay có chiều cao bằng 4 và bán kính bằng 3. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác có độ dài cạnh đáy bằng 2. Diện tích của thiết diện bằng.

A. $\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{19}$. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải



Ta có: $h = OI = 4, R = IA = IB = 3, AB = 2$.

Gọi M là trung điểm AB $\Rightarrow MI \perp AB \Rightarrow AB \perp (SMI) \Rightarrow AB \perp SM$.

Lại có: $SB = \sqrt{OI^2 + IB^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$; $SM = \sqrt{SB^2 - MB^2} = \sqrt{5^2 - 1^2} = 2\sqrt{6}$.

Vậy: $S_{\Delta SAB} = \dfrac{1}{2}.SM.AB = \dfrac{1}{2}.2\sqrt{6}.2 = 2\sqrt{6}$.

Câu 13. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Cắt hình nón bằng một mặt phẳng qua trục của nó, ta được một thiết diện là một tam giác vuông cân cạnh bên $a\sqrt{2}$. Tính diện tích toàn phần của hình nón.

A. $4a^2\pi$ (đvdt). **B.** $4\sqrt{2}a^2\pi$ (đvdt). **C.** $a^2\pi\left(\sqrt{2}+1\right)$ (đvdt). **D.** $2\sqrt{2}a^2\pi$ (đvdt).

Lời giải

Giả sử hình nón đã cho có độ dài đường sinh l, bán kính đáy là R.

Thiết diện của hình nón qua trục là tam giác OAB vuông cân tại O và $OA = a\sqrt{2}$.

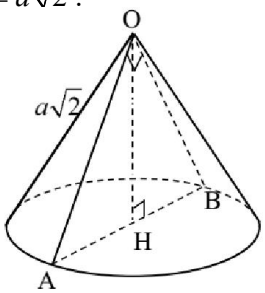
Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông cân OAB ta có:

$AB^2 = OA^2 + OB^2 = 4a^2 \Rightarrow AB = 2a$.

Vậy: $l = a\sqrt{2}, R = a$.

Diện tích toàn phần của hình nón là:

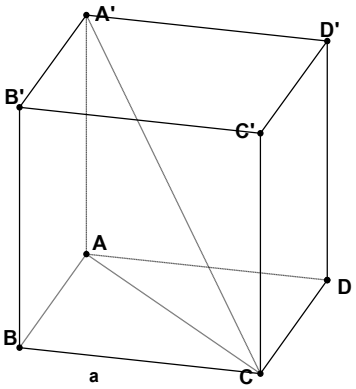
$S_{TP} = S_{xq} + S_{\S.y} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi a^2\left(\sqrt{2}+1\right)$ (đvdt).

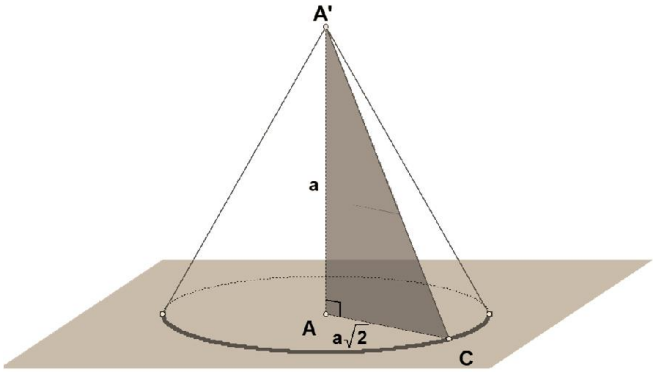


Câu 14. **(Chuyên KHTN 2019)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính diện tích toàn phần của vật tròn xoay thu được khi quay tam giác $AA'C$ quanh trục AA'.

A. $\pi\left(\sqrt{3}+2\right)a^2$. **B.** $2\pi\left(\sqrt{2}+1\right)a^2$. **C.** $2\pi\left(\sqrt{6}+1\right)a^2$. **D.** $\pi\left(\sqrt{6}+2\right)a^2$.

Lời giải





Quay tam giác $AA'C$ một vòng quanh trục AA' tạo thành hình nón có chiều cao $AA'=a$, bán kính đáy $r=AC=a\sqrt{2}$, đường sinh $l=A'C=\sqrt{AA'^2+AC^2}=a\sqrt{3}$.

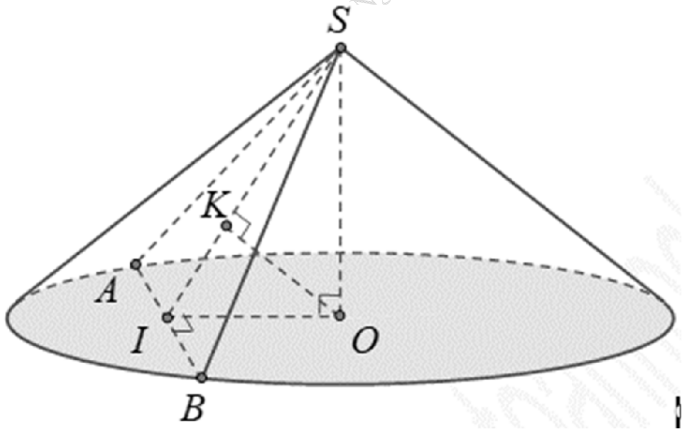
Diện tích toàn phần của hình nón: $S=\pi r\left(r+l\right)=\pi a\sqrt{2}\left(a\sqrt{2}+a\sqrt{3}\right)=\pi\left(\sqrt{6}+2\right)a^2$.

Câu 15. Cho hình nón có chiều cao và bán kính đáy đều bằng 1. Mặt phẳng (P) qua đỉnh của hình nón và cắt đáy theo dây cung có độ dài bằng 1. Khoảng cách từ tâm của đáy tới mặt phẳng (P) bằng

A. $\frac{\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$

Lời giải

Chọn D



Ta có $l=h=1$

Mặt phẳng (P) qua đỉnh của hình nón và cắt đáy theo dây cung AB có độ dài bằng 1. I, K là hình chiếu O lên AB; SI. Ta có $AB\perp(SIO)\Rightarrow OK\perp(SAB)$

ta có $IO=\sqrt{R^2-OA^2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

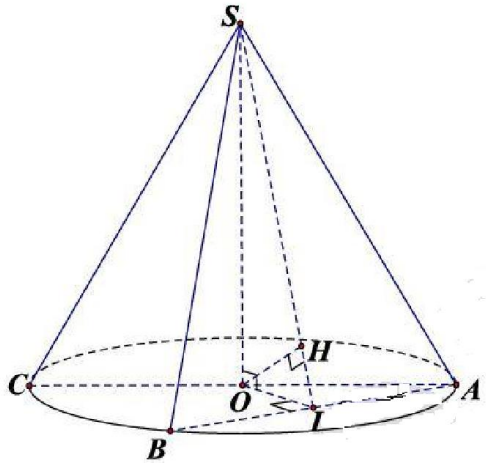
$\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{OI^2}+\frac{1}{OS^2}\Rightarrow OK=\frac{OI.\mathrm{SO}}{\sqrt{OI^2+OS^2}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 16. Cho hình nón đỉnh S, đáy là đường tròn $(O;5)$.Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón cắt đường tròn đáy tại hai điểm A và B sao cho $SA=AB=8$. Tính khoảng cách từ O đến (SAB).

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{7}$. **D.** $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm AB.

Ta có $\begin{cases} AB \perp SO \\ AB \perp OI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow (SAB) \perp (SOI)$.

Trong (SOI), kẻ $OH \perp SI$ thì $OH \perp (SAB)$.

$\Rightarrow d(O;(SAB)) = OH$.

Ta có: $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{\left(\frac{8.5}{5}\right)^2 - 5^2} = \sqrt{39}$.

Ta có: $OI = \sqrt{OA^2 - AI^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{4.5}{5}\right)^2} = 3$.

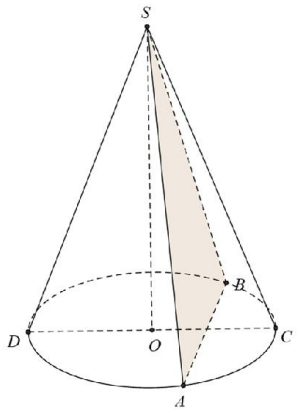
Tam giác vuông SOI có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow OH = \frac{3\sqrt{13}}{4}$.

Vậy $d(O;(SAB)) = OH = \frac{3\sqrt{13}}{4}$.

Câu 17. **(Chuyên ĐHSPHN - 2018)** Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O, bán kính, $R=3cm$, góc ở đỉnh hình nón là $\varphi = 120°$. Cắt hình nón bởi mặt phẳng qua đỉnh S tạo thành tam giác đều SAB, trong đó A, B thuộc đường tròn đáy. Diện tích tam giác SAB bằng

A. $3\sqrt{3}$ cm^2. **B.** $6\sqrt{3}$ cm^2. **C.** 6 cm^2. **D.** 3 cm^2.

Lời giải



Theo đề bài ta có góc ở đỉnh hình nón là $\varphi = 120°$ và khi cắt hình nón bởi mặt phẳng qua đỉnh S tạo thành tam giác đều SAB nên mặt phẳng không chứa trục của hình nón.

Do góc ở đỉnh hình nón là $\varphi = 120°$ nên $\widehat{OSC} = 60°$.

Xét tam giác vuông SOC ta có $\tan\widehat{OSC} = \dfrac{OC}{SO} \Rightarrow SO = \dfrac{OC}{\tan\widehat{OSC}} = \dfrac{3}{\tan 60°} = \sqrt{3}$.

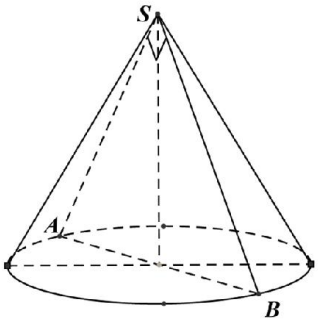
Xét tam giác vuông SOA ta có $SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = 2\sqrt{3}$.

Do tam giác SAB đều nên $S_{\Delta SAB} = \dfrac{1}{2}\left(2\sqrt{3}\right)^2 .\sin 60° = 3\sqrt{3}\ \left(\text{cm}^2\right)$.

Câu 18. **(Chuyên Nguyễn Quang Diêu - Đồng Tháp - 2018)** Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác vuông có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đó.

A. $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$. **C.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{6}$. **D.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải



Gọi S là đỉnh hình nón, thiết diện qua trục là tam giác SAB.

Ta có $AB = a\sqrt{2} \Rightarrow SA = a$, suy ra $l = SA = a$; $r = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $S_{xq} = \pi rl = \pi.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.a = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$.

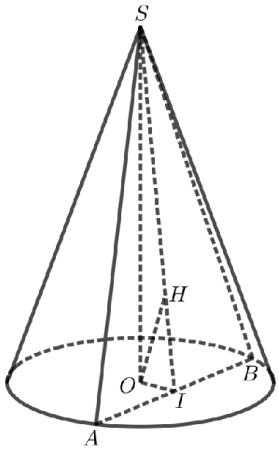
Câu 19. **(Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O, bán kính R. Dựng hai đường sinh SA và SB, biết AB chắn trên đường tròn đáy một

cung có số đo bằng $60°$, khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{R}{2}$. Đường cao h của hình nón bằng

A. $h = R\sqrt{3}$. **B.** $h = R\sqrt{2}$. **C.** $h = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. **D.** $h = \frac{R\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm AB.

Kẻ OH vuông góc với SI.

$d(O,(SAB)) = OH = \frac{R}{2}$.

Nguyễn Bảo Vương

Ta có cung AB bằng $60°$ nên $\widehat{AOB} = 60°$.

Tam giác AOI vuông tại I, ta có $\cos\widehat{IOA} = \frac{OI}{OA} \Leftrightarrow OI = OA.\cos 30° = \frac{\sqrt{3}R}{2}$.

Tam giác SOI vuông tại O, ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} \Leftrightarrow \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{\left(\frac{R}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}R}{2}\right)^2} = \frac{8}{3R^2} \Rightarrow SO = \frac{\sqrt{6}R}{4}.$$

Câu 20. **(Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Cho hình nón tròn xoay có chiều cao bằng $2a$, bán kính đáy bằng $3a$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện bằng $\frac{3a}{2}$. Diện tích của thiết diện đó bằng

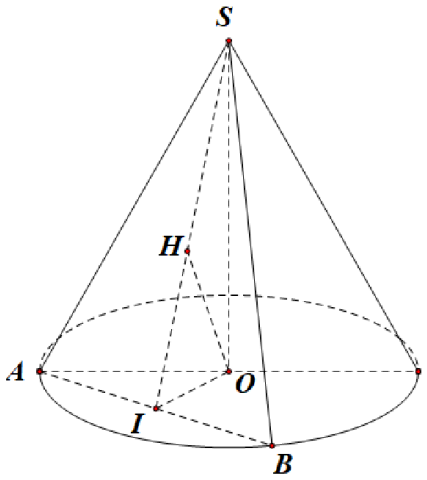
A. $\frac{2a^2\sqrt{3}}{7}$. **B.** $12a^2\sqrt{3}$. **C.** $\frac{12a^2}{7}$. **D.** $\frac{24a^2\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải

Chọn D

Xét hình nón đỉnh S có chiều cao $SO = 2a$, bán kính đáy $OA = 3a$.

Thiết diện đi qua đỉnh của hình nón là tam giác SAB cân tại S.



+ Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Trong tam giác SOI, kẻ $OH \perp SI$, $H \in SI$.

+ $\begin{cases} AB \perp OI \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow AB \perp OH$.

+ $\begin{cases} OH \perp SI \\ OH \perp AB \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SAB) \Rightarrow d(O,(SAB)) = OH = \dfrac{3a}{2}$.

Xét tam giác SOI vuông tại O, ta có $\dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{OH^2} - \dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{4}{9a^2} - \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{7}{36a^2} \Rightarrow OI = \dfrac{6a}{\sqrt{7}}$.

$SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = \sqrt{4a^2 + \dfrac{36a^2}{7}} = \dfrac{8a}{\sqrt{7}}$.

Xét tam giác AOI vuông tại I, $AI = \sqrt{AO^2 - OI^2} = \sqrt{9a^2 - \dfrac{36a^2}{7}} = \dfrac{3\sqrt{3}a}{\sqrt{7}}$

$\Rightarrow AB = 2AI = \dfrac{6\sqrt{3}a}{\sqrt{7}}$.

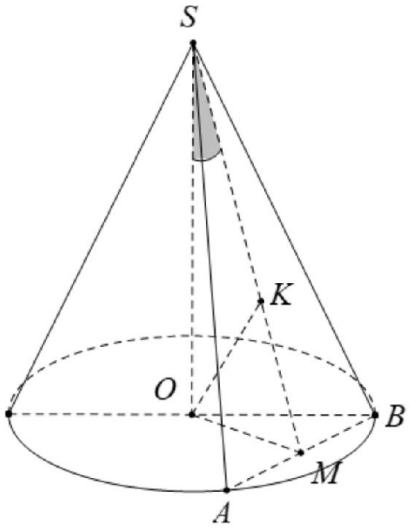
Vậy diện tích của thiết diện là: $S_{\Delta SAB} = \dfrac{1}{2}.SI.AB = \dfrac{1}{2}.\dfrac{8a}{\sqrt{7}}.\dfrac{6\sqrt{3}a}{\sqrt{7}} = \dfrac{24a^2\sqrt{3}}{7}$.

Câu 21. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O. Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác vuông SAB có diện tích bằng $4a^2$. Góc giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) bằng $30°$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $4\sqrt{10}\pi a^2$. **B.** $2\sqrt{10}\pi a^2$. **C.** $\sqrt{10}\pi a^2$. **D.** $8\sqrt{10}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của AB, tam giác OAB cân đỉnh O nên $OM \perp AB$ và $SO \perp AB$ suy ra $AB \perp (SOM)$.

Dựng $OK \perp SM$.

Theo trên có $OK \perp AB$ nên $OK \perp (SAB)$.

Vậy góc tạo bởi giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) là $\widehat{OSM} = 30°$.

Tam giác vuông cân SAB có diện tích bằng $4a^2$ suy ra $\frac{1}{2}SA^2 = 4a^2 \Rightarrow SA = 2a\sqrt{2}$

$\Rightarrow AB = 4a \Rightarrow SM = 2a$.

Xét tam giác vuông SOM có $\cos\widehat{OSM} = \frac{SO}{SM} \Rightarrow SO = \frac{\sqrt{3}}{2}.2a = \sqrt{3}a$.

Cuối cùng $OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = a\sqrt{5}$.

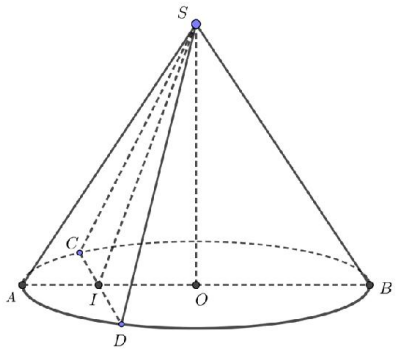
Vậy diện tích xung quanh của hình nón bằng $S_{xq} = \pi rl = \pi.a\sqrt{5}.2a\sqrt{2} = 2a^2\sqrt{10}\pi$.

Câu 22. **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020)** Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Một thiết diện qua đỉnh tạo với đáy một góc $60°$. Diện tích của thiết diện này bằng

A. $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **C.** $2a^2$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử hình nón có đỉnh S, tâm đường tròn đáy là O. Thiết diện qua trục là ΔSAB, thiết diện qua đỉnh là ΔSCD; gọi I là trung điểm của CD.

Theo giả thiết ta có ΔSAB vuông cân tại S, cạnh huyền $AB = a\sqrt{2} \Rightarrow r = OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$SA = SB = l = a \Rightarrow h = SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{2a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta lại có $\widehat{SIO} = 60° \Rightarrow \sin 60° = \dfrac{SO}{SI} \Rightarrow SI = \dfrac{SO}{\sin 60°} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$;

$ID = \sqrt{SD^2 - SI^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{6a^2}{9}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow CD = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Diện tích thiết diện cần tìm là $S_{\Delta SCD} = \dfrac{1}{2}.CD.SI = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

Nguyễn Bảo Vương

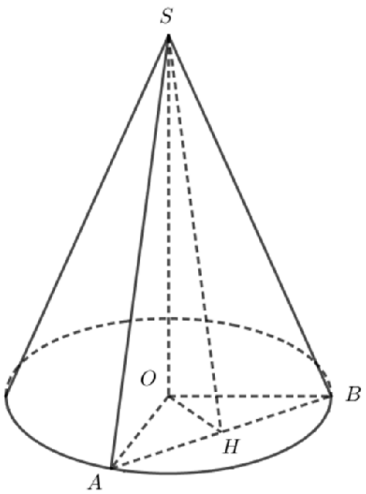
Dạng 2. Thể tích

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hình nón có chiều cao bằng $2\sqrt{5}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều có diện tích bằng $9\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\dfrac{32\sqrt{5}\pi}{3}$. **B.** 32π. **C.** $32\sqrt{5}\pi$. **D.** 96π.

Lời giải

Chọn A



Theo giả thiết tam giác SAB đều, $S_{\Delta SAB}=9\sqrt{3}$ và $SO=2\sqrt{5}$.

$S_{\Delta SAB}=9\sqrt{3}\Leftrightarrow\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3}\Leftrightarrow AB=6$.

ΔSAB đều $SA=AB=6$.

Xét ΔSOA vuông tại O, theo định lý Pytago ta có: $OA=\sqrt{SA^2-SO^2}=\sqrt{6^2-\left(2\sqrt{5}\right)^2}=4$.

Thể tích hình nón bằng $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi.OA^2.SO=\dfrac{1}{3}\pi 4^2.2\sqrt{5}=\dfrac{32\sqrt{5}}{3}\pi$.

Câu 2. **(KSCL THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Tính thể tích của hình nón có góc ở đỉnh bằng 60° và diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$.

A. $V=\dfrac{3\pi a^3\sqrt{2}}{4}$ **B.** $V=3\pi a^3$ **C.** $V=\dfrac{3\pi a^3\sqrt{2}}{4}$ **D.** $V=\pi a^3$

Lời giải

Chọn B

Khối nón có góc ở đỉnh bằng 60° nên góc tạo bởi đường sinh và đáy bằng 60°.

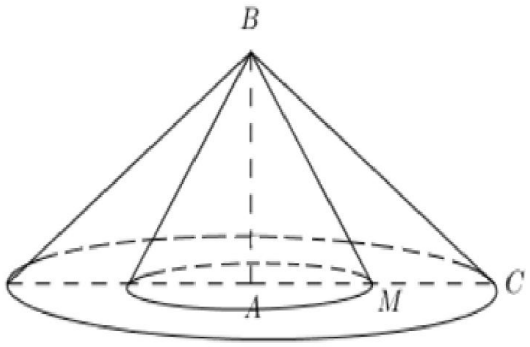
Vậy $R=\dfrac{l}{2}$; lại có $S_{xq}=\pi Rl=\pi R.2R=6\pi a^2$ nên $R=a\sqrt{3}$; vậy $h=\sqrt{l^2-R^2}=R\sqrt{3}=3a$

Vậy $V=\dfrac{1}{3}\pi R^2h=3\pi a^3$.

Câu 3. **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh $AB=6$, $AC=8$ và M là trung điểm của cạnh AC. Khi đó thể tích của khối tròn xoay do tam giác BMC quanh quanh AB là

A. 86π **B.** 106π **C.** 96π **D.** 98π

Lời giải



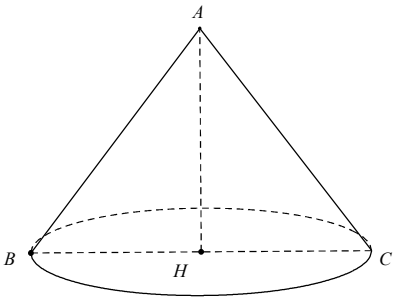
Khi tam giác BMC quanh quanh trục AB thì thể tích khối tròn xoay tạo thành là hiệu của thể tích khối nón có đường cao AB, đường sinh BC và khối nón có đường cao AB, đường sinh BM.

Nên $V=\dfrac{1}{3}AB.\pi.AC^2-\dfrac{1}{3}AB.\pi.AM^2=\dfrac{1}{4}AB.\pi.AC^2=96\pi$. Đáp án C

Câu 4. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho hình nón có bán kính đáy bằng $2\,\text{cm}$, góc ở đỉnh bằng $60°$. Tính thể tích của khối nón đó.

A. $\dfrac{8\sqrt{3}\pi}{9}\text{cm}^3$. **B.** $8\sqrt{3}\pi\,\text{cm}^3$. **C.** $\dfrac{8\sqrt{3}\pi}{3}\text{cm}^3$. **D.** $\dfrac{8\pi}{3}\text{cm}^3$.

Lời giải



Cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua trục, ta được thiết diện là tam giác ABC cân tại đỉnh A của hình nón.

Do góc ở đỉnh của hình nón là $\widehat{BAC}=60°$, suy ra $\widehat{HAC}=30°$. Bán kính đáy $R=HC=2$ cm.

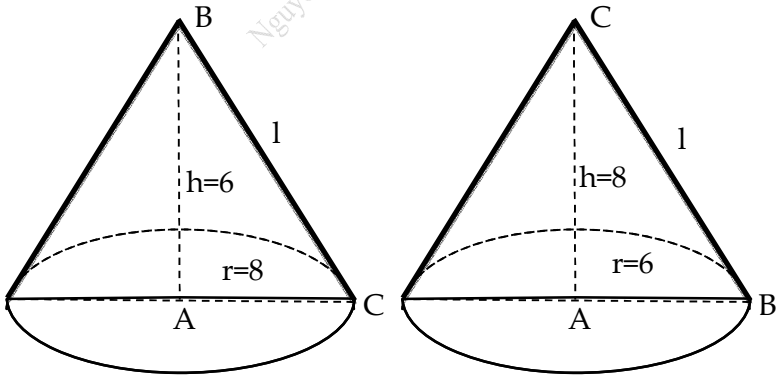
Xét ΔAHC vuông tại H, ta có $AH=\dfrac{HC}{\tan 30°}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=2\sqrt{3}$ cm.

Thể tích của khối nón: $V=\dfrac{1}{3}\pi R^2.AH=\dfrac{8\sqrt{3}\pi}{3}$ cm^3.

Câu 5. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=6cm, AC=8cm$. Gọi V_1 là thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB và V_2 là thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC. Khi đó, tỷ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{16}{9}$. **D.** $\dfrac{9}{16}$.

Lời giải



Ta có công thức tính thể tích khối nón có chiều cao h và bán kính r là $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$

+ Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB thì:

$h=AB=6cm$ và $r=AC=8cm$ thì $V_1=\dfrac{1}{3}\pi.8^2.6=128\pi$

+ Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC thì:

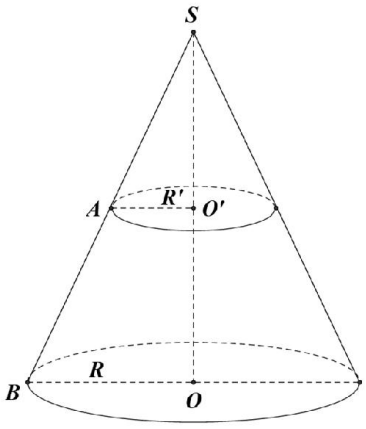
$h=AC=8cm$ và $r=AB=6cm$ thì $V_2=\dfrac{1}{3}\pi.6^2.8=96\pi$

Vậy: $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{4}{3}$ đáp án **B.**

Câu 6. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho hình nón N_1 đỉnh S đáy là đường tròn $C(O;R)$, đường cao $SO=40\,\text{cm}$. Người ta cắt nón bằng mặt phẳng vuông góc với trục để được nón nhỏ N_2 có đỉnh S và đáy là đường tròn $C'(O';R')$. Biết rằng tỷ số thể tích $\dfrac{V_{N_2}}{V_{N_1}}=\dfrac{1}{8}$. Tính độ dài đường cao nón N_2.

A. $20\,\text{cm}$. **B.** $5\,\text{cm}$. **C.** $10\,\text{cm}$. **D.** $49\,\text{cm}$.

Lời giải



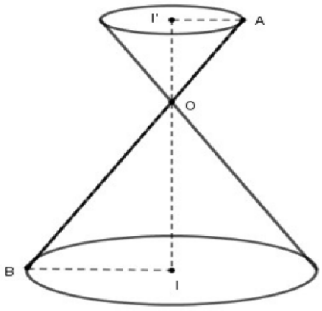
Ta có: $V_{N_1}=\dfrac{1}{3}\pi R^2.SO$, $V_{N_2}=\dfrac{1}{3}\pi R'^2.SO'$.

Mặt khác, $\Delta SO'A$ và ΔSOB đồng dạng nên $\dfrac{R'}{R}=\dfrac{SO'}{SO}$.

Suy ra: $\dfrac{V_{N_2}}{V_{N_1}}==\dfrac{R'^2.SO'}{R^2.SO}=\left(\dfrac{SO'}{SO}\right)^3=\dfrac{1}{8}$

Suy ra $\dfrac{SO'}{SO}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow SO'=\dfrac{1}{2}.40=20\,\text{cm}$. Do đó chọn **A.**

Câu 7. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Cho một đồng hồ cát như bên dưới (gồm hai hình nón chung đỉnh ghép lại), trong đó đường sinh bất kỳ của hình nón tạo với đáy một góc 60°. Biết rằng chiều cao của đồng hồ là $30\,cm$ và tổng thể tích của đồng hồ là $1000\pi\,cm^3$. Hỏi nếu cho đầy lượng cát vào phần bên trên thì khi chảy hết xuống dưới, tỷ số thể tích lượng cát chiếm chỗ và thể tích phần phía dưới là bao nhiêu?



A. $\dfrac{1}{64}$. **B.** $\dfrac{1}{8}$. **C.** $\dfrac{1}{27}$. **D.** $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi r_1,h_1,r_2,h_2 lần lượt là bán kính, đường cao của hình nón trên và hình nón dưới.

Do đường sinh bất kỳ của hình nón tạo với đáy một góc 60°.

Suy ra: $\widehat{OAI'} = \widehat{OBI} = 60^\circ$, khi đó ta có mối liên hệ: $h_1 = \sqrt{3}r_1,\ h_2 = \sqrt{3}r_2$.

Theo đề ta có: $V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi\left(h_1 r_1^2 + h_2 r_2^2\right) = \frac{1}{9}\pi\left(h_1^3 + h_2^3\right) = 1000\pi$.

Mà: $\left(h_1^3 + h_2^3\right) = \left(h_1 + h_2\right)^3 - 3\left(h_1 + h_2\right).h_1 h_2 \Rightarrow h_1.h_2 = 200$.

Kết hợp giả thiết: $h_1 + h_2 = 30$ ta được $\begin{cases} h_1 = 10 \\ h_2 = 20 \end{cases}$.

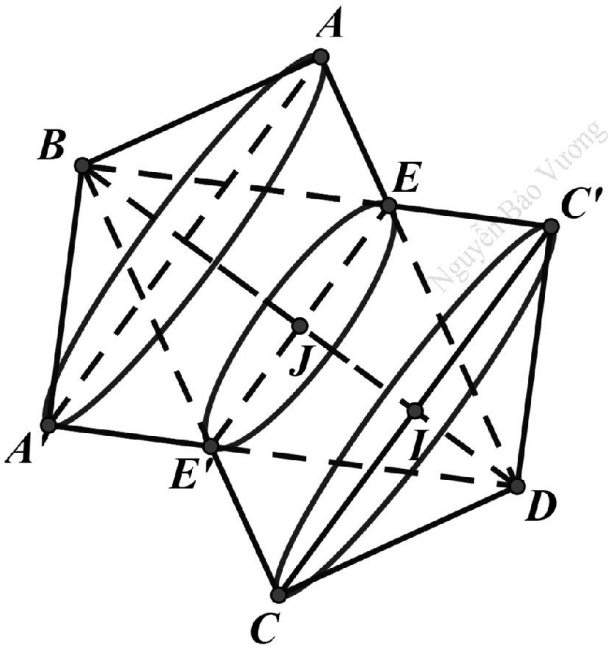
Từ đó tỉ lệ cần tìm là $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\left(10\sqrt{3}\right)^2.h_1}{\left(20\sqrt{3}\right)^2.h_2} = \frac{1}{4}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Câu 8. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2, AD = 2\sqrt{3}$ và nằm trong mặt phẳng (P). Quay (P) một vòng quanh đường thẳng BD. Khối tròn xoay được tạo thành có thể tích bằng

A. $\frac{28\pi}{9}$ **B.** $\frac{28\pi}{3}$ **C.** $\frac{56\pi}{9}$ **D.** $\frac{56\pi}{3}$

Lời giải

Chọn C



Khối nón đỉnh D, tâm đáy I có thể tích V_1

Ta có $BD = 4$ mà $IC'.BD = BC'.C'D \Rightarrow IC' = \sqrt{3}$

$ID = \frac{DC'^2}{BD} = 1$ nên $V_1 = \frac{1}{3}\pi.IC'^2.ID = \pi$

Khối nón cụt có tâm đáy J, I có thể tích V_2

Ta có $DI = 3, DJ = 2$, $\frac{JE}{IC'} = \frac{DJ}{DI} = \frac{2}{3} \Rightarrow JE = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$V_2 = \frac{1}{3}\pi\left(IC'^2.DI - JE^2.DJ\right) = \frac{19\pi}{9}$

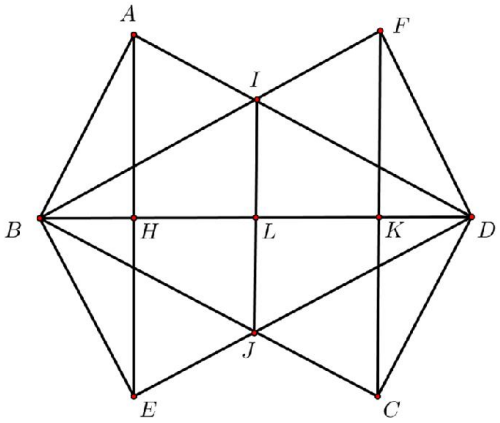
Vậy thể tích cần tìm là $V = 2\left(V_1 + V_2\right) = \frac{56}{9}\pi$. Đáp án **C.**

Câu 9. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2$, $AD=2\sqrt{3}$ và nằm trong mặt phẳng (P). Quay (P) một vòng quanh đường thẳng BD. Khối tròn xoay được tạo thành có thể tích bằng

A. $\frac{28\pi}{9}$. **B.** $\frac{28\pi}{3}$. **C.** $\frac{56\pi}{9}$. **D.** $\frac{56\pi}{3}$.

Lời giải

Gọi điểm như hình vẽ



V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối nón, nón cụt nhận được khi quay tam giác ABH và tứ giác $AHLT$ quay BD.

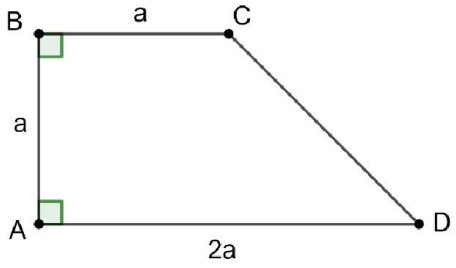
Ta có: $AH=\sqrt{3}, IL=\frac{2}{\sqrt{3}}, BH=HL=1$.

Ta có:

$$V=2(V_1+V_2)=2\left[\frac{1}{3}BH.\pi.AH^2+\frac{1}{3}HL.\pi.\left(IL^2+IL.AH+AH^2\right)\right]$$

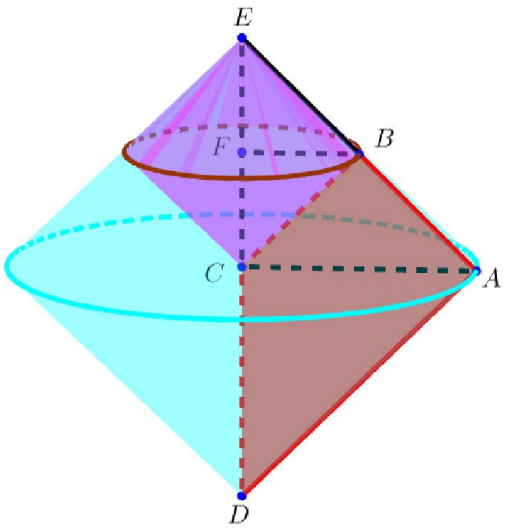
$$=2\left[\frac{1}{3}.1.\pi.3+\frac{1}{3}.1.\pi.\left(\frac{4}{3}+2+3\right)\right]=\frac{56\pi}{9}.$$

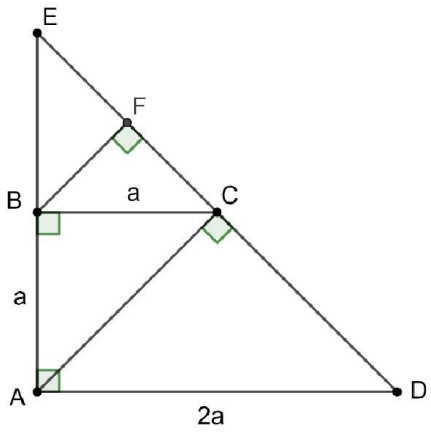
Câu 10. **(Cụm 8 Trường Chuyên 2019)** Cho hình thang $ABCD$ có $\hat{A}=\hat{B}=90°$, $AB=BC=a$, $AD=2a$. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình thang $ABCD$ xung quanh trục CD.



A. $\frac{7\sqrt{2}\pi a^3}{6}$. **B.** $\frac{7\sqrt{2}\pi a^3}{12}$. **C.** $\frac{7\pi a^3}{6}$. **D.** $\frac{7\pi a^3}{12}$.

Lời giải





Gọi E là giao điểm của AB và CD. Gọi F là hình chiếu vuông góc của B trên CE.

Ta có: $\Delta BCF = \Delta BEF$ nên tam giác ΔBCF và ΔBEF quay quanh trục CD tạo thành hai khối nón bằng nhau có thể tích V_1.

$\Delta ADC = \Delta AEC$ nên tam giác ΔADC và ΔAEC quay quanh trục CD tạo thành hai khối nón bằng nhau có thể tích V.

Nên thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình thang $ABCD$ xung quanh trục CD bằng:

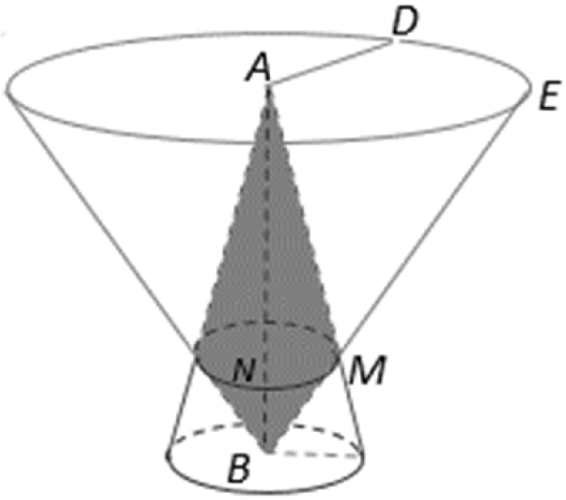
$$2V - 2V_1 = 2.\frac{1}{3}\pi\left(CD.AC^2 - CF.BF^2\right) = \frac{2}{3}\pi\left[\left(a\sqrt{2}\right)^3 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3\right] = \frac{7\sqrt{2}\pi a^3}{6}.$$

Câu 11. **(KTNL GV Thpt Lý Thái Tổ 2019)** Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$, ABC là tam giác vuông tại B. Biết $BC = 2(cm)$, $AB = 2\sqrt{3}(cm)$, $AD = 6(cm)$. Quay các tam giác ABC và ABD (bao gồm cả điểm bên trong 2 tam giác) xung quanh đường thẳng AB ta được 2 khối tròn xoay. Thể tích phần chung của 2 khối tròn xoay đó bằng

A. $\sqrt{3}\pi(cm^3)$ **B.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}\pi(cm^3)$ **C.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi(cm^3)$. **D.** $\frac{64\sqrt{3}}{3}\pi(cm^3)$.

Lời giải

Chọn C



Dễ thấy $AD \perp (ABC) \Rightarrow AD = R_1$

Gọi $\{M\} = BD \cap AC$ và N là hình chiếu của M trên A**B.** Dễ dàng chứng minh được tỉ lệ:

$\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AB}(1)$; và $\frac{MN}{AD} = \frac{BN}{AB}(2) \Rightarrow \frac{(1)}{(2)} = \frac{AD}{BC} = \frac{AN}{BN} = 3 \Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{3}{4}; \frac{BN}{AB} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow AN = \frac{3\sqrt{3}}{2}; BN = \frac{\sqrt{3}}{2}; MN = \frac{3}{2}$

Phần thể tích chung của 2 khối tròn xoay là phần thể tích khi quay tam giác $\triangle AMB$ xung quanh trục A**B.** Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi quay tam giác $\triangle BMN$ xung quanh AB

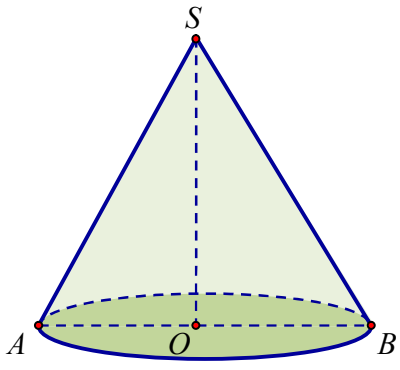
Và V_2 là thể tích khối tròn xoay khi quay tam giác $\triangle AMN$ xung quanh AB

Dễ tính được: $V_1 = \frac{3\sqrt{3}\pi}{8}(dvtt)$ và $V_2 = \frac{9\sqrt{3}\pi}{8}(dvtt) \Rightarrow V_1 + V_2 = \frac{3\sqrt{3}\pi}{2}(dvtt)$. **Chọn C.**

Câu 12. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng $60°$, diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

A. $V = \frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $V = 3\pi a^3$. **D.** $V = \pi a^3$.

Lời giải



Thể tích $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi.OA^2.SO.$

Ta có $\widehat{ASB} = 60° \Rightarrow \widehat{ASO} = 30° \Rightarrow \tan 30° = \frac{OA}{SO} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow SO = OA\sqrt{3}.$

Lại có $S_{xq} = \pi Rl = \pi.OA.SA = \pi.OA\sqrt{OA^2 + SO^2} = 6\pi a^2$

$\Rightarrow OA\sqrt{OA^2+3OA^2}=6a^2 \Rightarrow 2OA^2=6a^2 \Rightarrow OA=a\sqrt{3} \Rightarrow SO=3a \Rightarrow V=\frac{1}{3}\pi.3a^2.3a=3\pi a^3.$

Câu 13. **(Xuân Trường - Nam Định - 2018)** Cho hình nón tròn xoay có đỉnh là S, O là tâm của đường tròn đáy, đường sinh bằng $a\sqrt{2}$ và góc giữa đường sinh và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón và thể tích V của khối nón tương ứng là

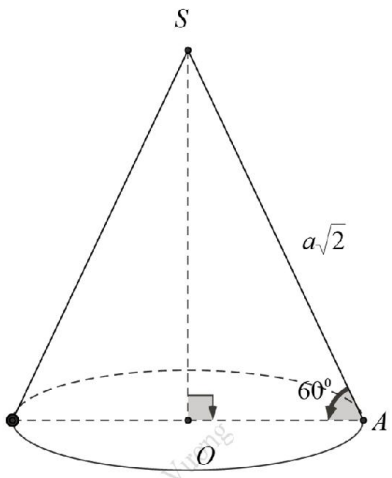
A. $S_{xq}=\pi a^2$, $V=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{12}$.

B. $S_{xq}=\frac{\pi a^2}{2}$, $V=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$.

C. $S_{xq}=\pi a^2\sqrt{2}$, $V=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{4}$.

D. $S_{xq}=\pi a^2$, $V=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải



Dựa vào hình vẽ ta có: góc giữa đường sinh và mặt đáy là $\widehat{SAO}=60°$.

Tam giác SAO vuông tại O:

$R=OA=SA.\cos\widehat{SAO}=a\sqrt{2}.\cos 60°=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$h=SO=SA.\sin\widehat{SAO}=a\sqrt{2}.\sin 60°=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $S_{xq}=\pi Rl=\pi a^2$ và $V=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 14. **(Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Cho hình nón có chiều cao $6a$. Một mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón và có khoảng cách đến tâm là $3a$, thiết diện thu được là một tam giác vuông cân. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $150\pi a^3$.

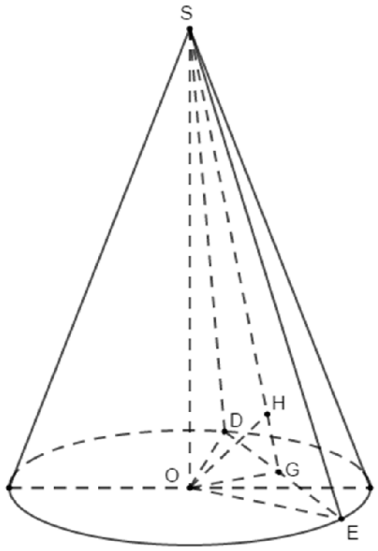
B. $96\pi a^3$.

C. $108\pi a^3$.

D. $120\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D



Mặt phẳng (P) cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SDE. Theo giả thiết, tam giác SDE vuông cân tại đỉnh S. Gọi G là trung điểm DE, kẻ $OH \perp SG \Rightarrow OH = 3a$.

Ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OG^2} \Rightarrow \frac{1}{OG^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{SO^2} \Rightarrow OG = 2a\sqrt{3}$.

Do $SO.OG = OH.SG \Rightarrow SG = \frac{SO.OG}{SG} = \frac{6a.2a\sqrt{3}}{3a} = 4a\sqrt{3} \Rightarrow DE = 8a\sqrt{3}$.

$OD = \sqrt{OG^2 + DG^2} = \sqrt{12a^2 + 48a^2} = 2\sqrt{15}a$.

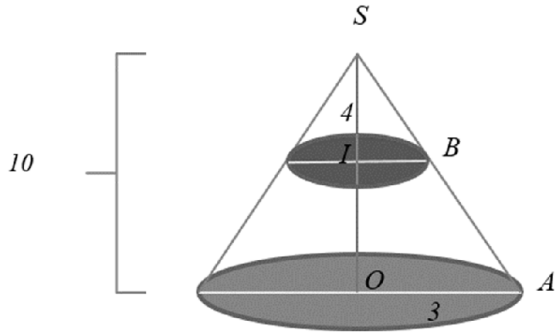
Vậy $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(2\sqrt{15}a\right)^2 \cdot 6a = 120\pi a^3$

Câu 15. **(Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Cho hình nón có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao bằng 10. Mặt phẳng (α) vuông góc với trục và cách đỉnh của hình nón một khoảng bằng 4, chia hình nón thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của phần chứa đỉnh của hình nón đã cho, V_2 là thể tích của phần còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$?

A. $\frac{4}{25}$. **B.** $\frac{21}{25}$. **C.** $\frac{8}{117}$. **D.** $\frac{4}{21}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $IB // OA \Rightarrow \frac{IB}{OA} = \frac{SI}{SO} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Khi đó, $\frac{V_1}{V}=\frac{\frac{1}{3}\pi.IB^2.SI}{\frac{1}{3}\pi.OA^2.SO}=\left(\frac{IB}{OA}\right)^2.\left(\frac{SI}{SO}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}$

Suy ra: $\frac{V_2}{V}=1-\frac{8}{125}=\frac{117}{125}$

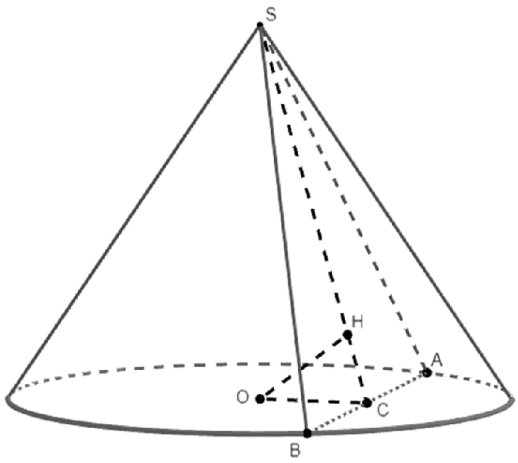
Vậy $\frac{V_1}{V_2}=\frac{V_1}{V}:\frac{V_2}{V}=\frac{8}{125}:\frac{117}{125}=\frac{8}{117}$

Câu 16. **(Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Cho một hình nón có bán kính đáy bằng $2a$. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh (S) của hình nón, cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB=2a\sqrt{3}$, khoảng cách từ tâm đường tròn đáy đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Thể tích khối nón đã cho bằng

A. $\frac{8\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{4\pi a^3}{3}$. **C.** $\frac{2\pi a^3}{3}$. **D.** $\frac{\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

Chọn B



Gọi C là trung điểm của AB, O là tâm của đáy. Khi đó $\begin{cases}SO\perp AB\\OC\perp AB\end{cases}\Rightarrow(SOC)\perp AB$. Gọi H là hình chiếu của O lên SC thì $OH\perp(SAB)$ nên $OH=a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$OB=2a, BC=a\sqrt{3}\Rightarrow OC=a$. Xét tam giác vuông $SOC: \frac{1}{SO^2}=\frac{1}{OH^2}-\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{a^2}\Rightarrow SO=a$.

Vậy thể tích khối nón giới hạn bởi hình nón đã cho là $\frac{1}{3}\pi.(2a)^2.a=\frac{4\pi a^3}{3}$.

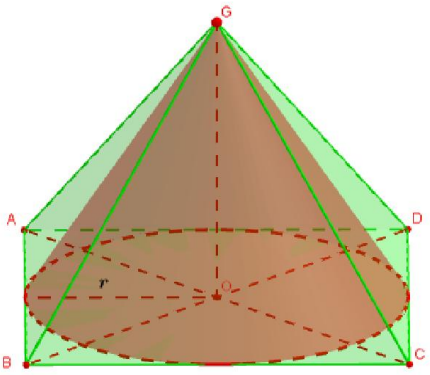
Dạng 3. Khối tròn xoay nội, ngoại tiếp khối đa diện

Câu 1. **(Mã 123 2017)** Trong hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đều bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối nón đỉnh S và đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$

A. $V=\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{2}$ **B.** $V=\frac{\pi a^3}{2}$ **C.** $V=\frac{\pi a^3}{6}$ **D.** $V=\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{6}$

Lời giải

Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$. Lại có

$OC = \dfrac{AC}{2} = a \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OC^2} = a$.

Bán kính $r = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Suy thể tích khối nón là:

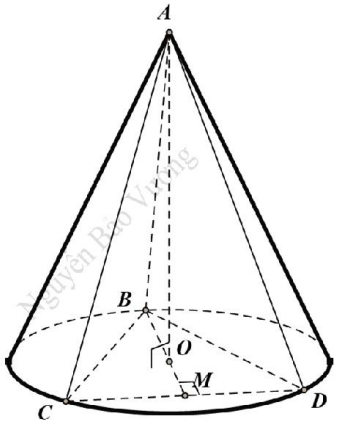
$V = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 .a = \dfrac{\pi a^3}{6}$.

Câu 2. **(Mã 110 2017)** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $3a$. Hình nón (N) có đỉnh A có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của (N).

A. $S_{xq} = 12\pi a^2$ **B.** $S_{xq} = 6\pi a^2$ **C.** $S_{xq} = 3\sqrt{3}\pi a^2$ **D.** $S_{xq} = 6\sqrt{3}\pi a^2$

Lời giải

Chọn C



Gọi r là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

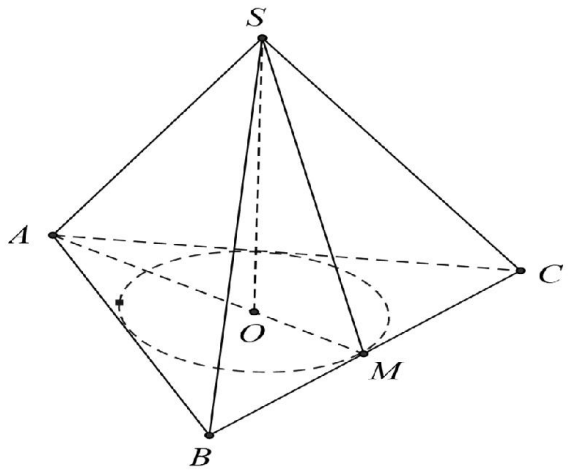
Ta có $BM = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$; $r = \dfrac{2}{3}BM = \dfrac{2}{3}.\dfrac{3a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

$S_{xq} = \pi.r.l = \pi r.AB = \pi a\sqrt{3}.3a = 3\sqrt{3}.\pi a^2$.

Câu 3. **(Chuyên ĐHSPHN - 2018)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Hình nón có đỉnh S và có đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC gọi là hình nón nội tiếp hình chóp $S.ABC$, hình nón có đỉnh S và có đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC gọi là hình nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Tỉ số thể tích của hình nón nội tiếp và hình nón ngoại tiếp hình chóp đã cho là

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC.

Gọi O là trọng tâm của tam giác ABC.

Ta có: $SO \perp (ABC)$ tại O.

Suy ra, O là tâm đường tròn nội tiếp và cũng là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi a là độ dài cạnh của tam giác ABC.

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình nón nội tiếp và hình nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Do $OM = \frac{1}{2}OA$ nên ta có:

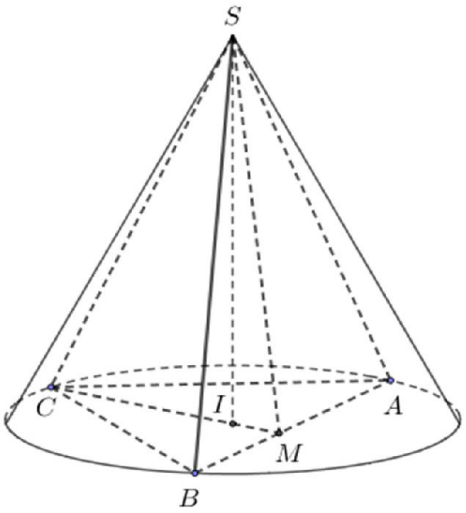
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}.\pi.OM^2.SO}{\frac{1}{3}.\pi.OA^2.SO} = \frac{OM^2}{OA^2} = \left(\frac{OM}{OA}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 4. **(Hồng Bàng - Hải Phòng - 2018)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và đáy bằng 60°. Diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S, có đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

A. $\frac{\pi a^2\sqrt{10}}{8}$. **B.** $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\pi a^2\sqrt{7}}{4}$. **D.** $\frac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$.

Lời giải



Gọi I là tâm đường tròn $(ABC) \Rightarrow IA = r = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow AB \perp (SMC)$

$\Rightarrow$ Góc giữa mặt bên và mặt đáy là góc $\widehat{SMC} = 60^\circ \Rightarrow SM = 2IM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$,

$\Rightarrow SA = \sqrt{SM^2 + MA^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{3} + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$.

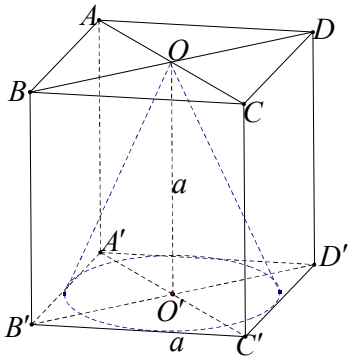
Diện tích xung quanh hình nón $S_{xq} = \pi rl = \pi . \dfrac{a\sqrt{3}}{3} . \dfrac{a\sqrt{21}}{6} = \dfrac{\pi a^2 \sqrt{7}}{6}$.

Câu 5. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Một khối nón có đỉnh là tâm của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$. Diện tích toàn phần của khối nón đó là

A. $S_{tp} = \dfrac{\pi a^2}{2}\left(\sqrt{3}+2\right)$. **B.** $S_{tp} = \dfrac{\pi a^2}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)$. **C.** $S_{tp} = \dfrac{\pi a^2}{4}\left(\sqrt{5}+2\right)$. **D.** $S_{tp} = \dfrac{\pi a^2}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Lời giải

Chọn B



Bán kính của đường tròn đáy là $r = \dfrac{a}{2}$.

Diện tích đáy nón là: $S_1 = \pi r^2 = \dfrac{\pi a^2}{4}$.

Độ dài đường sinh là $l = \sqrt{a^2 + r^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

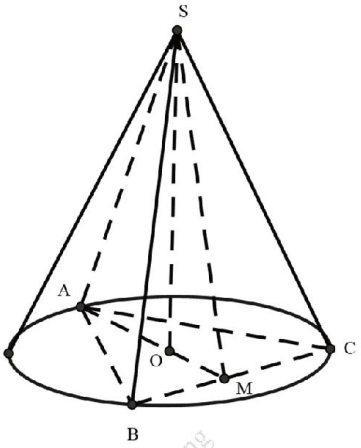
Diện tích xung quanh của khối nón là: $S_2 = \pi rl = \dfrac{\pi a^2\sqrt{5}}{4}$.

Vậy, diện tích toàn phần của khối nón đó là: $S_{tp} = S_1 + S_2 = \dfrac{\pi a^2}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)$.

Câu 6. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$ **C.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{4}$ **D.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{10}}{8}$

Lời giải



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, M là trung điêmt cạnh BC, ta có

$OM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{SMO} = 60^\circ$

Trong tam giác vuông SMO: $SO = OM.\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\sqrt{3} = \dfrac{a}{2} \Rightarrow SA = \sqrt{\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$.

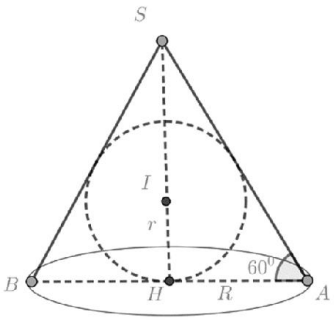
Vậy $S_{xq} = \pi.OA.SA = \pi.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$.

Câu 7. **(Mã 105 2017)** Cho hình nón (N) có đường sinh tạo với đáy một góc $60°$. Mặt phẳng qua trục của (N) cắt (N) được thiết diện là một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Tính thể tích V của khối nón giới hạn bởi (N).

A. $V = 9\pi$ **B.** $V = 3\sqrt{3}\pi$ **C.** $V = 9\sqrt{3}\pi$ **D.** $V = 3\pi$

Lời giải

Chọn D



Hình nón (N) có đường sinh tạo với đáy một góc $60°$ nên $\widehat{SAH} = 60°$

Ta có ΔSAB cân tại S có $\widehat{A} = 60°$ nên ΔSAB đều. Do đó tâm I của đường tròn nội tiếp ΔSAB cũng là trọng tâm của ΔSAB.

Suy ra $SH = 3IH = 3$. Mặt khác $SH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = 2\sqrt{3} \Rightarrow R = \sqrt{3} \Rightarrow S_{Đáy} = \pi R^2 = 3\pi.$

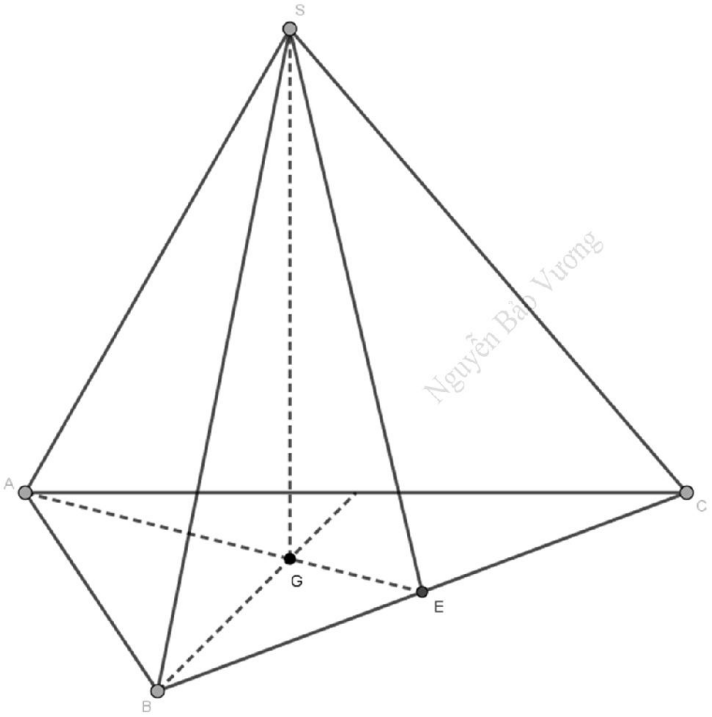
Do đó $V = \dfrac{1}{3}SH.S_{Đáy} = \dfrac{1}{3}3.3\pi = 3\pi.$

Câu 8. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$ **C.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{4}$ **D.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{10}}{8}$

Lời giải

Chọn B



Gọi E là trung điểm BC. Theo giả thiết $\widehat{SEA} = 60^0$.

Suy ra: $SA = \dfrac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = l$.

$S_{xq} = \pi Rl = \pi.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$

Câu 9. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy là a và (N) là hình nón có đỉnh là S với đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$. Tỉ số thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khối nón (N) là

A. $\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{2}{\pi}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

Lời giải

Gọi h là chiều cao của khối chóp và đồng thời là đường cao của khối nón.

Thể tích của khối chóp là $V_1 = \frac{1}{3}a^2h$.

Bán kính của đường tròn ngoại tiếp đáy $ABCD$ là $r = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích của khối nón là $V_2 = \frac{1}{3}\pi.\frac{a^2}{2}.h$.

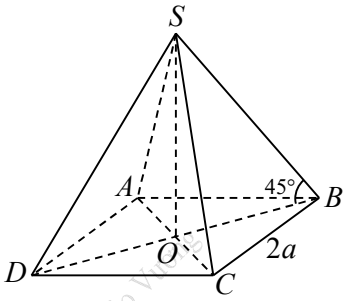
Tỉ số thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khối nón (N) là $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{\pi}$.

Câu 10. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên tạo với đáy góc $45°$. Thể tích khối nón ngoại tiếp hình chóp trên là:

A. $\frac{8}{3}\pi a^3\sqrt{3}$ **B.** $\frac{2}{3}\pi a^3\sqrt{3}$ **C.** $2\pi a^3\sqrt{2}$ **D.** $\frac{2}{3}\pi a^3\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn D



Ta có $S.ABCD$ là hình chóp đều, gọi $O = AC \cap BD$

$\Rightarrow$ Góc giữa cạnh bên với mặt đáy là $\widehat{SBO} = 45°$

$ABCD$ là hình vuông cạnh $2a \Rightarrow BD = 2\sqrt{2a}$

Khối nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có bán kính đường tròn đáy $R = \frac{BD}{2} = a\sqrt{2}$

ΔSOB vuông cân tại O

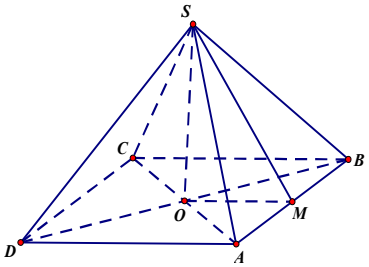
$\Rightarrow$ Chiều cao khối nón $h = SO = OB = \sqrt{2}a$

$\Rightarrow$ Thể tích khối nón là: $V = \frac{1}{3}\pi R^2h = \frac{1}{3}\pi\left(a\sqrt{2}\right)^2.a\sqrt{2} = \frac{2}{3}\pi a^3\sqrt{2}$.

Câu 11. **(THPT Lương Thế Vinh - HN - 2018)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Tam giác SAB có diện tích bằng $2a^2$. Thể tích của khối nón có đỉnh S và đường tròn đáy nội tiếp tứ giác $ABCD$.

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{7}}{8}$. **B.** $\frac{\pi a^3\sqrt{7}}{7}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{7}}{4}$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{15}}{24}$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$ và M là trung điểm AB. Hình nón có đỉnh S và đường tròn đáy nội

tiếp tứ giác $ABCD$ có bán kính đáy là $R = OM = \frac{a}{2}$ và có chiều cao là $h = SO$.

Thể tích khối nón $V = \frac{1}{3}Bh$ trong đó $B = \pi R^2 = \frac{\pi a^2}{4}$.

Diện tích tam giác SAB là $2a^2$ nên $\frac{1}{2}SM.AB = 2a^2 \Leftrightarrow SM = 4a$.

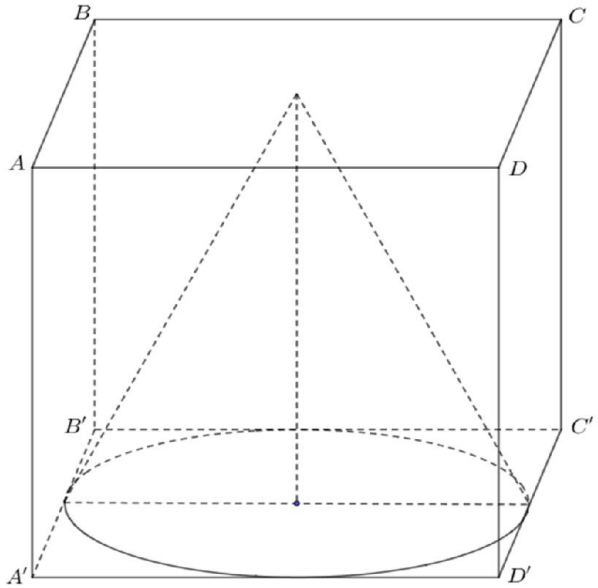
Trong tam giác vuông SOM ta có $SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \sqrt{16a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{3a\sqrt{7}}{2}$ hay $h = \frac{3a\sqrt{7}}{2}$.

Vậy thể tích của khối nón $V = \frac{\pi a^3\sqrt{7}}{8}$.

Câu 12. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Một khối nón có đỉnh là tâm của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$. Kết quả tính diện tích toàn phần S_{tp} của khối nón đó có dạng bằng $\frac{\pi a^2}{4}\left(\sqrt{b}+c\right)$ với b và c là hai số nguyên dương và $b > 1$. Tính bc.

A. $bc = 5$. **B.** $bc = 8$. **C.** $bc = 15$. **D.** $bc = 7$.

Lời giải

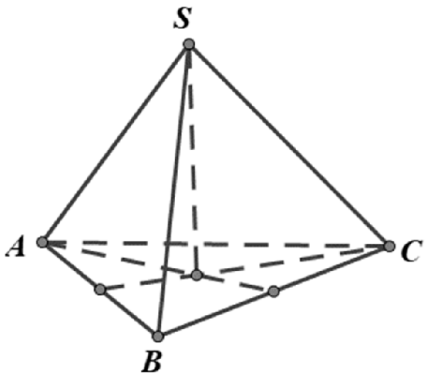


Ta có bán kính hình nón $r = \frac{a}{2}$, đường cao $h = a$, đường sinh $l = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Diện tích toàn phần $S_{tp} = \pi rl + \pi r^2 = \pi\frac{a^2\sqrt{5}}{4} + \pi\frac{a^2}{4} = \frac{\pi a^2}{4}\left(\sqrt{5}+1\right) \Rightarrow b = 5, c = 1$.

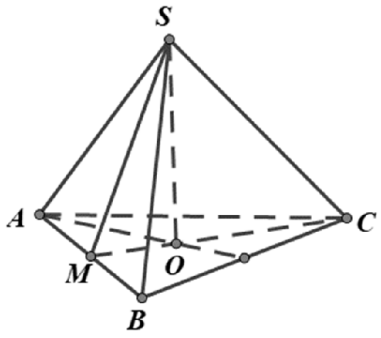
Vậy $bc = 5$.

Câu 13. **(Chuyên Đh Vinh -2018)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh $AB = a$, góc tạo bởi (SAB) và (ABC) bằng $60°$. Diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và có đường tròn đáy ngoại tiếp tam giác ABC bằng



A. $\frac{\sqrt{7}\pi a^2}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{7}\pi a^2}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^2}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^2}{6}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm AB và gọi O là tâm của tam giác ABC ta có :

$\begin{cases} AB \perp CM \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SCM) \Rightarrow AB \perp SM$ và $AB \perp CM$

Do đó góc giữa (SAB) và (ABC) là $\widehat{SMO} = 60°$.

Mặt khác tam giác ABC đều cạnh a nên $CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Suy ra $OM = \frac{1}{3}CM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

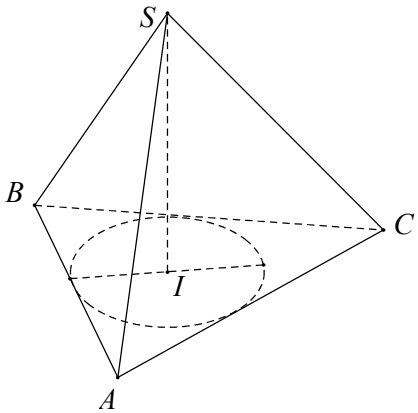
$SO = OM.\tan 60° = \frac{a\sqrt{3}}{6}.\sqrt{3} = \frac{a}{2}$.

Hình nón đã cho có chiều cao $h = SO = \frac{a}{2}$, bán kính đáy $R = OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, độ dài đường sinh

$l = \sqrt{h^2 + R^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$.

Diện tích xung quanh hình nón là: $S_{xq} = \pi.R.l = \pi.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{21}}{6} = \frac{\sqrt{7}\pi a^2}{6}$

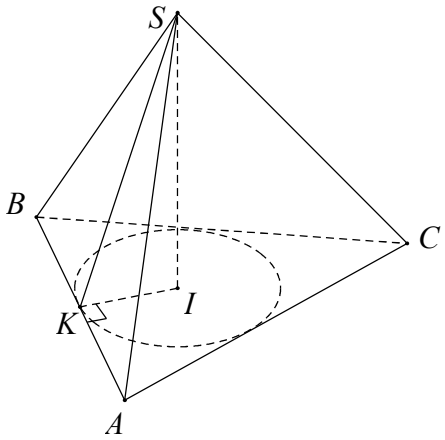
Câu 14. **(Nam Định - 2018)** Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn nội tiếp tam giác ABC. Biết rằng $AB = BC = 10a$, $AC = 12a$, góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng $45°$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.



A. $V = 3\pi a^3$. **B.** $V = 9\pi a^3$.

C. $V = 27\pi a^3$. **D.** $V = 12\pi a^3$.

Lời giải



Dựng $IK \perp AB$ suy ra góc giữa (SAB) và (ABC) là góc $\widehat{SKI} = 45°$.

Xét ΔABC có:

$p = \dfrac{AB + BC + AC}{2} = \dfrac{10a + 10a + 12a}{2} = 16a$.

Suy ra

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$= \sqrt{16a.6a.6a.4a} = 48a^2$.

Bán kính đường tròn nội tiếp $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{48a^2}{16a} = 3a$.

Xét ΔSIK có $SI = IK = r = 3a$.

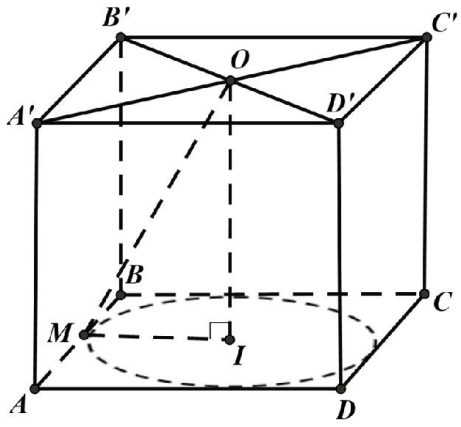
Thể tích khối nón là:

$V = \dfrac{1}{3}h.\pi r^2 = \dfrac{1}{3}.3a.\pi.(3a)^2 = 9\pi a^3$.

Câu 15. **(Chuyên Trần Phú - Hải Phòng 2018)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a và cạnh bên bằng $2a$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón có đỉnh là tâm O của hình vuông $A'B'C'D'$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$.

A. $S_{xq} = \pi a^2\sqrt{17}$. **B.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{2}$. **C.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{4}$. **D.** $S_{xq} = 2\pi a^2\sqrt{17}$.

Lời giải



Bán kính đáy của hình nón: $R=\frac{a}{2}$.

Đường sinh của hình nón: $l=OM \Leftrightarrow l=\sqrt{MI^2+OI^2} \Leftrightarrow l=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+4a^2} \Leftrightarrow l=a\frac{\sqrt{17}}{2}$.

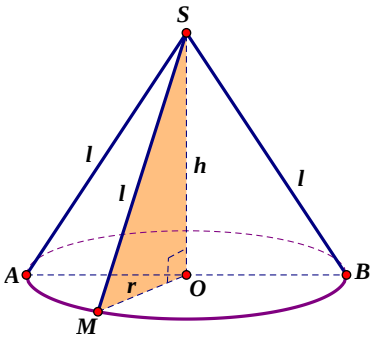
Diện tích xungquanh của hình nón là $S=\pi.R.l \Leftrightarrow S=\pi.\frac{a}{2}.a\frac{\sqrt{17}}{2} \Leftrightarrow S=\frac{\pi a^2\sqrt{17}}{4}$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 21 KHỐI NÓN

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM
MỘT SỐ BÀI TOÁN VD – VDC LIÊN QUAN ĐẾN KHỐI NÓN (CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ - CỰC TRỊ)

Lý thuyết – phương pháp chung

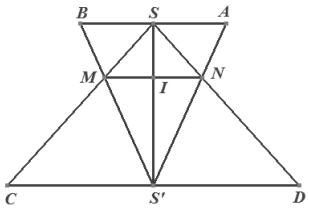
MẶT NÓN	Các yếu tố mặt nón:	Một số công thức:
 ☛**Hình thành:** Quay Δ vuông SOM quanh trục SO, ta được mặt nón như hình bên với: $\begin{cases} h = SO \\ r = OM \end{cases}$.	☐ **Đường cao:** $\boxed{h = SO}$. (SO cũng được gọi là **trục** của hình nón). ☐ **Bán kính đáy:** $\boxed{r = OA = OB = OM}$. ☐ **Đường sinh:** $\boxed{l = SA = SB = SM}$. ☐ **Góc ở đỉnh:** $\boxed{\widehat{ASB}}$ ☐ **Thiết diện qua trục:** ΔSAB cân tại S. ☐ **Góc giữa đường sinh và mặt đáy:** $\boxed{\widehat{SAO} = \widehat{SBO} = \widehat{SMO}}$.	☐ **Chu vi đáy:** $\boxed{p = 2\pi r}$. ☐ **Diện tích đáy:** $\boxed{S_đ = \pi r^2}$. ☐ **Thể tích:** $\boxed{V = \frac{1}{3}h.S_đ = \frac{1}{3}h.\pi r^2}$. *(liên tưởng đến thể tích khối chóp).* ☐ **Diện tích xung quanh:** $\boxed{S_{xq} = \pi rl}$. ☐ **Diện tích toàn phần:** $\boxed{S_{tp} = S_{xq} + S_đ = \pi rl + \pi r^2}$.

Câu 1. **(Sở Ninh Bình 2020)** Cho hai khối nón có chung trục $SS' = 3r$. Khối nón thứ nhất có đỉnh S, đáy là hình tròn tâm S' bán kính $2r$. Khối nón thứ hai có đỉnh S', đáy là hình tròn tâm S bán kính r. Thể tích phần chung của hai khối nón đã cho bằng

A. $\frac{4\pi r^3}{27}$. **B.** $\frac{\pi r^3}{9}$. **C.** $\frac{4\pi r^3}{9}$. **D.** $\frac{4\pi r^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi (P) là mặt phẳng đi qua trục của hai khối nón và lần lượt cắt hai đường tròn (S,r) và $(S',2r)$ theo đường kính AB, CD. Gọi $M = SC \cap S'B, N = SD \cap S'A$. Phần chung của 2 khối nón đã cho gồm 2 khối nón chung đáy là hình tròn đường kính MN và đỉnh lần lượt là S, S'.

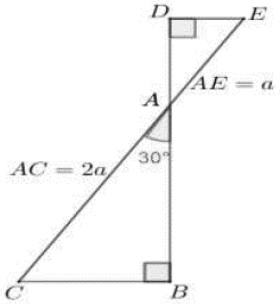
Ta có $\frac{MN}{CD} = \frac{SN}{SD} = \frac{SN}{SN + ND} = \frac{SA}{SA + S'D} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN = \frac{1}{3}CD = \frac{4r}{3}$.

Gọi I là giao điểm của MN và SS'. Ta có $SI = \frac{1}{3}SS' = r, S'I = \frac{2}{3}SS' = 2r$.

Do đó thể tích phần chung là

$$V = \frac{1}{3}\pi SI.\left(\frac{MN}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\pi S'I.\left(\frac{MN}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}\pi.r.\frac{4r^2}{9} + \frac{1}{3}\pi.2r.\frac{4r^2}{9} = \frac{4\pi r^3}{9}.$$

Câu 2. **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020)** Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay mô hình (như hình vẽ bên) quanh trục DB.



A. $\frac{9\pi a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $\frac{3\pi a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích của vật thể tròn xoay gồm hai phần bao gồm thể tích V_1 của hình nón tạo bởi tam giác vuông ABC khi quay quanh cạnh AB và thể tích V_2 của hình nón tạo bởi tam giác vuông ADE khi quay quanh cạnh AD.

*Xét tam giác vuông ABC vuông tại B ta có:

$r_1 = BC = AC.\sin 30^o = a$; $h_1 = AB = AC.\sin 60^o = a\sqrt{3}$

Vậy ta có $V_1 = \frac{1}{3}\pi.r_1^2.h_1 = \frac{1}{3}\pi.a^2.a\sqrt{3} = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{3}$.

*Xét tam giác vuông ADE vuông tại D ta có:

$r_2 = DE = AE.\sin 30^o = \frac{a}{2}$; $h_2 = AD = AE.\sin 60^o = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy ta có $V_2 = \frac{1}{3}\pi.r_2^2.h_2 = \frac{1}{3}\pi.\left(\frac{a}{2}\right)^2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{24}$.

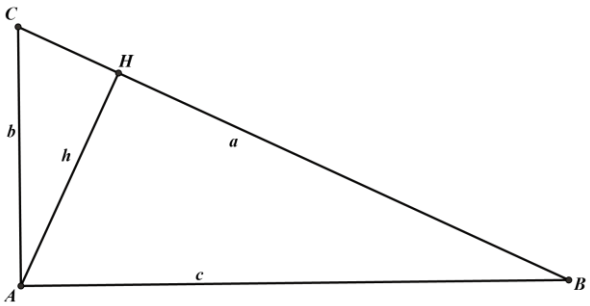
Vậy thể tích của vật thể tròn xoay là $V = V_1 + V_2 = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{24} = \frac{3\pi\sqrt{3}a^3}{8}$.

Câu 3. **(Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Cho tam giác ABC vuông tại A, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $b < c$. Khi quay tam giác vuông ABC một vòng quanh cạnh BC, quay cạnh AC, quanh cạnh AB, ta thu được các hình có diện tích toàn phần theo thứ tự bằng S_a, S_b, S_c. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S_b > S_c > S_a$. **B.** $S_b > S_a > S_c$. **C.** $S_c > S_a > S_b$. **D.** $S_a > S_c > S_b$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là hình chiếu của A lên cạnh $BC, AH = h$.

Khi quay tam giác vuông ABC một vòng quanh cạnh BC ta thu được hình hợp bởi hai hình nón tròn xoay có chung đáy bán kính bằng h, đường sinh lần lượt là b,c. Do đó $S_a=\pi bh+\pi ch$.

Khi quay tam giác vuông ABC một vòng quanh cạnh AC ta thu được hình nón tròn xoay có bán kính đáy bằng c, đường sinh bằng a, $S_b=\pi ac+\pi c^2=\pi c(a+c)$.

Khi quay tam giác vuông ABC một vòng quanh cạnh AB ta thu được hình nón tròn xoay có bán kính đáy bằng b, đường sinh bằng a, $S_c=\pi ab+\pi b^2=\pi b(a+b)$.

Do $b<c$ nên $\begin{cases} ab<ac \\ b^2<c^2 \end{cases} \Rightarrow S_c<S_b$.

Ta có $h=\dfrac{bc}{a} \Rightarrow S_a=\pi b^2.\dfrac{c}{a}+\pi c^2.\dfrac{b}{a}$.

Tam giác ABC vuông nên $\dfrac{c}{a}<1 \Rightarrow \pi b^2\dfrac{c}{a}<\pi b^2$; $\dfrac{c^2}{a^2}<1 \Rightarrow \pi c^2\dfrac{b}{a}<\pi ab$.

$\Rightarrow S_a<\pi b^2+\pi ab=\pi b(a+b)=S_c$. Do đó $S_a<S_c$.

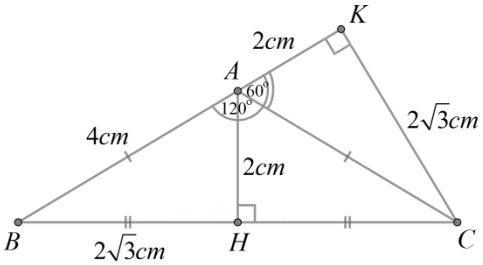
Vậy $S_b>S_c>S_a$.

Câu 4. Cho tam giác ABC cân tại A, góc $BAC=120°$ và $AB=4\text{cm}$. Tính thể tích khối tròn xoay lớn nhất có thể khi ta quay tam giác ABC quanh đường thẳng chứa một cạnh của tam giác ABC.

A. $16\sqrt{3}\pi\ (\text{cm}^3)$. **B.** $16\pi\ (\text{cm}^3)$. **C.** $\dfrac{16\pi}{\sqrt{3}}\ (\text{cm}^3)$. **D.** $\dfrac{16\pi}{3}\ (\text{cm}^3)$.

Lời giải

Chọn B



Trường hợp 1: Khối tròn xoay khi quay ΔABC quanh đường thẳng chứa AB (hoặc AC) có thể tích bằng hiệu thể tích của hai khối nón (N_1) và (N_2).

Dựng $CK\perp BA$ tại $K \Rightarrow \begin{cases} AK=AC.\cos CAK=4.\cos 60°=2\text{cm} \\ BK=BA+AK=4+2=6\text{cm} \\ CK=AC.\sin CAK=4.\sin 60°=2\sqrt{3}\text{cm} \end{cases}$.

+ (N_1) có $h_1=BK=6\text{cm}$, $r_1=CK=2\sqrt{3}\text{cm}$.

+ (N_2) có $h_2=AK=2\text{cm}$, $r_2=CK=2\sqrt{3}\text{cm}$.

Do đó $V=\dfrac{1}{3}\pi.CK^2.(BK-AK)=\dfrac{1}{3}\pi.\left(2\sqrt{3}\right)^2.(6-2)=16\pi\ (\text{cm}^3)$.

Trường hợp 2: Khối tròn xoay khi quay ΔABC quanh đường thẳng chứa BC có thể tích bằng tổng thể tích của hai khối nón (N_3) và (N_4).

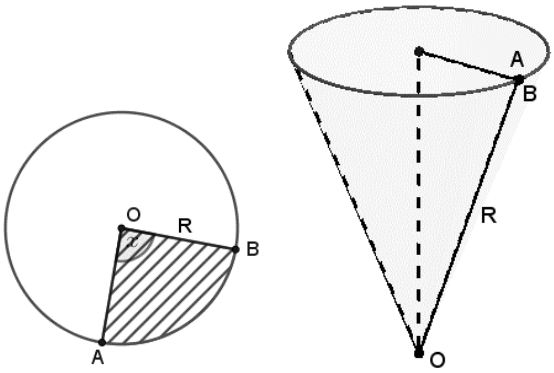
Kẻ đường cao $AH\ (H\in BC) \Rightarrow \begin{cases} AH=AB.\cos BAH=4.\cos 60°=2\text{cm} \\ BH=CH=AB.\sin BAH=4.\sin 60°=2\sqrt{3}\text{cm} \end{cases}$.

(N_3) và (N_4) có $h_3=h_4=BH=CH=2\sqrt{3}\text{cm}$, $r_3=r_4=HA=2\text{cm}$.

Do đó $V = 2.\frac{1}{3}\pi.AH^2.BH = 2.\frac{1}{3}\pi.2^2.2\sqrt{3} = \frac{16\pi}{\sqrt{3}}\left(\text{cm}^3\right)$.

Vậy $V_{\max} = 16\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 5. **(Cụm liên trường Hải Phòng- 2019)** Huyền có một tấm bìa hình tròn như hình vẽ, Huyền muốn biến hình tròn đó thành một cái phễu hình nón. Khi đó Huyền phải cắt bỏ hình quạt tròn AOB rồi dán hai bán kính OA và OB lại với nhau. Gọi x là góc ở tâm hình quạt tròn dùng làm phễu. Tìm x để thể tích phễu là lớn nhất?



A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$. **B.** $\frac{\pi}{3}$. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Góc x chắn cung AB có độ dài $l = R.x$.

Từ giả thiết suy ra bán kính của phễu là $r = \frac{Rx}{2\pi}$ và chiều cao của phễu là $h = \sqrt{R^2 - \left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$.

Khi đó thể tích của phễu là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi.\frac{R^2x^2}{4\pi^2}.\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2} = \frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}$.

Xét hàm số $f(x) = x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}$, $x \in (0;2\pi)$

$f'(x) = 2x\sqrt{4\pi^2 - x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}} = \frac{2x(4\pi^2 - x^2) - x^3}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}} = \frac{x(8\pi^2 - 3x^2)}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}$.

Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

Lập bảng biến thiên, ta có:

x	0		$\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗		↘	0

Vậy thể tích phễu lớn nhất khi $x = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$.

Câu 6. Một khối nón có thể tích bằng $9a^3\pi\sqrt{2}$. Tính bán kính R đáy khối nón khi diện tích xung quanh nhỏ nhất.

A. $R=3a$. **B.** $R=\dfrac{3a}{\sqrt[6]{2}}$. **C.** $R=\sqrt[3]{9}a$. **D.** $R=\dfrac{3a}{\sqrt[3]{2}}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi h,l lần lượt là chiều cao và độ dài đường sinh của khối nón.

$V=\dfrac{1}{3}\pi R^2.h=9a^3\pi\sqrt{2}\Rightarrow h=\dfrac{27a^3\sqrt{2}}{R^2}\Rightarrow l=\sqrt{R^2+h^2}=\sqrt{R^2+2.\dfrac{729a^6}{R^4}}$

$S_{xq}=\pi.R.l=\pi\sqrt{R^4+\dfrac{729a^6}{R^2}+\dfrac{729a^6}{R^2}}\geq\pi\sqrt{\sqrt[3]{R^4.\dfrac{729a^6}{R^2}.\dfrac{729a^6}{R^2}}}$.

$\Rightarrow S_{xq}=9\pi a^2$. Nên $\min S_{xq}=9\pi a^2$ khi $R^4=\dfrac{729a^6}{R^2}\Leftrightarrow R=3a$.

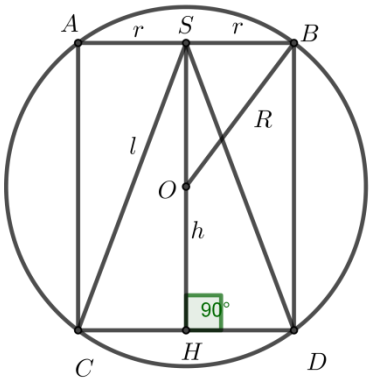
Câu 7. **(HSG Sở Nam Định 2019)** Cho hai mặt phẳng $(P),(Q)$ song song với nhau và cùng cắt khối cầu tâm O, bán kính R thành hai hình tròn cùng bán kính. Xét hình nón có đỉnh trùng với tâm của một trong hai hình tròn này và có đáy là hình tròn còn lại. Tính khoảng cách h giữa hai mặt phẳng $(P),(Q)$ để diện tích xung quanh của hình nón là lớn nhất.

A. $h=R$. **B.** $h=R\sqrt{2}$. **C.** $h=\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2R\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Cắt khối cầu tâm O, bán kính R bằng mặt phẳng (α) đi qua tâm O và vuông góc với hai mặt phẳng $(P),(Q)$ ta được hình như hình vẽ bên dưới.



Trong đó, $AB=(\alpha)\cap(P),CD=(\alpha)\cap(Q)$ với $AB=CD$, $h=SH=AC=BD$, $R=OB$.

Đường sinh $l=SC=SD$.

Bán kính của mỗi hình tròn giao tuyến là $r=\dfrac{AB}{2}$.

Ta có: $l^2=SC^2=AC^2+AS^2=h^2+r^2$ và $r^2=SB^2=OB^2-SO^2=R^2-\dfrac{h^2}{4}$.

Suy ra $l^2=R^2+\dfrac{3h^2}{4}$.

Mà diện tích xung quanh của khối nón được xét là: $S_{xq}=\pi rl$.

Ta có S_{xq} đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow$ rl đạt giá trị lớn nhất.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số $r\sqrt{3}$ và l ta có

$$rl=\frac{1}{2\sqrt{3}}.2.\left(r\sqrt{3}\right)l\le\frac{\sqrt{3}}{6}\left(3r^2+l^2\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}.4R^2=\frac{2R^2\sqrt{3}}{3}.$$

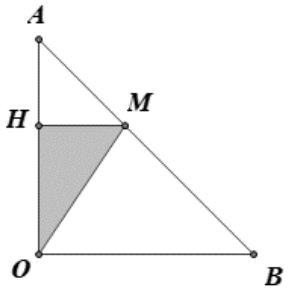
$\square$ rl lớn nhất là $\frac{2R^2\sqrt{3}}{3}$ khi và chỉ khi $3r^2=l^2\Leftrightarrow h^2=\frac{4}{3}R^2\Rightarrow h=\frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Câu 8. **(Bạc Liêu – Ninh Bình 2019)** Cho tam giác OAB vuông cân tại O, có $OA=4$. Lấy điểm M thuộc cạnh AB (M không trùng với A, B) và gọi H là hình chiếu của M trên OA. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay tam giác OMH quanh OA.

A. $\frac{128\pi}{81}$. **B.** $\frac{81\pi}{256}$. **C.** $\frac{256\pi}{81}$. **D.** $\frac{64\pi}{81}$.

Lời giải

Chọn C



Đặt $h=OH$, $0<h<4$.

Khi quay tam giác OMH quanh OA, ta được hình nón đỉnh O chiều cao h bán kính đáy $r=HM$.

Ta có $HM//OB$ nên $\frac{AH}{AO}=\frac{HM}{OB}$ Þ $\frac{4-h}{4}=\frac{r}{4}$ Þ $r=4-h$.

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi(4-h)^2.h=\frac{1}{6}\pi(4-h)(4-h).2h\le\frac{1}{6}\pi\left(\frac{4-h+4-h+2h}{3}\right)^3=\frac{256\pi}{81}.$$

Vậy $V_{\max}=\frac{1}{3}\pi.\frac{256}{27}=\frac{256\pi}{81}$.

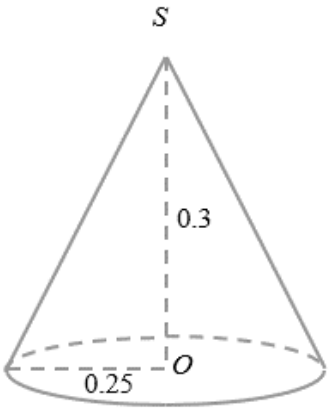
Câu 9. **(THPT Thăng Long-Hà Nội- 2019)** Lượng nguyên liệu cần dùng để làm ra một chiếc nón lá được ước lượng qua phép tính diện tích xung quanh của mặt nón. Cứ $1kg$ lá dùng để làm nón có thể làm ra số nón có tổng diện tích xung quanh là $6,13m^2$. Hỏi nếu muốn làm ra 1000 chiếc nón lá giống nhau có đường trình vành nón $50cm$, chiều cao $30cm$ thì cần khối lượng lá gần nhất với con số nào dưới đây? (coi mỗi chiếc nón có hình dạng là một hình nón)

A. $50kg$. **B.** $76kg$. **C.** $48kg$. **D.** $38kg$.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết mỗi chiếc nón lá là một hình nón có bán kính đáy $R=\frac{50}{2}=25(cm)=0,25(m)$ và đường cao $h=30(cm)=0,3(m)$.



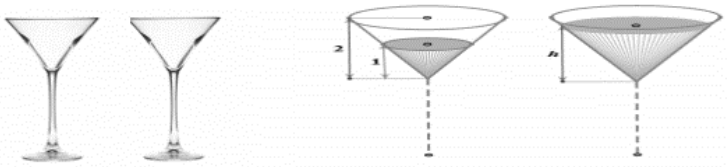
Gọi l là chiều cao của hình nón $\Rightarrow l=\sqrt{R^2+h^2}=\dfrac{\sqrt{61}}{20}\left(m\right)$.

Diện tích xung quanh của 1 chiếc nón lá là $S_{xq}=\pi Rl=\pi.0,25.\dfrac{\sqrt{61}}{20}=\dfrac{\pi\sqrt{61}}{80}\left(m^2\right)$

Tổng diện tích xung quanh của 1000 chiếc nón là $S=1000.\dfrac{\pi\sqrt{61}}{80}=\dfrac{25\pi\sqrt{61}}{2}\left(m^2\right)$

Do đó khối lượng lá cần dùng là $\dfrac{S}{6,13}\approx 50,03\left(kg\right)$.

Câu 10. Hai chiếc ly đựng chất lỏng giống hệt nhau, mỗi chiếc có phần chứa chất lỏng là một khối nón có chiều cao $2\,dm$ (mô tả như hình vẽ). Ban đầu chiếc ly thứ nhất chứa đầy chất lỏng, chiếc ly thứ hai để rỗng. Người ta chuyển chất lỏng từ ly thứ nhất sang ly thứ hai sao cho độ cao của cột chất lỏng trong ly thứ nhất còn $1dm$. Tính chiều cao h của cột chất lỏng trong ly thứ hai sau khi chuyển (độ cao của cột chất lỏng tính từ đỉnh của khối nón đến mặt phẳng của chất lỏng – lượng chất lỏng coi như không hao hụt khi chuyển. Tính gần đúng h với sai số không quá $0,01dm$).



A. $h\approx 1,41dm$. **B.** $h\approx 1,89\,dm$. **C.** $h\approx 1,91dm$. **D.** $h\approx 1,73\,dm$.

Lời giải

Chọn C

Gọi bán kính đáy, thể tích (phần chứa chất lỏng là một khối nón có chiều cao $2\,dm$) của khối nón lần lượt là r; V.

Gọi bán kính đáy, thể tích (tính từ đỉnh của khối nón đến mặt phẳng của chất lỏng của ly thứ nhất sau khi rót sang ly thứ hai) của khối nón lần lượt là r_1; V_1.

Gọi bán kính đáy, chiều cao, thể tích (tính từ đỉnh của khối nón đến mặt phẳng của chất lỏng của ly thứ hai) của khối nón lần lượt là r_2; h; V_2.

Ta có: Thể tích chất lỏng ban đầu là: $V=\dfrac{2}{3}\pi r^2$.

Thể tích chất lỏng còn lại sau khi rót sang ly thứ hai là: $V_1=\dfrac{1}{3}\pi r_1^2$.

mà $\dfrac{r_1}{r}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow r_1=\dfrac{r}{2}\Rightarrow V_1=\dfrac{1}{12}\pi r^2$.

Thể tích chất lỏng ly thứ hai là: $V_2=\frac{1}{3}\pi {r_2}^2h=V-V_1\Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi {r_2}^2h=\frac{7}{12}\pi r^2\Leftrightarrow {r_2}^2h=\frac{7}{4}r^2.$

mà $\frac{r_2}{r}=\frac{h}{2}\Leftrightarrow r_2=\frac{hr}{2}\Rightarrow h^3=7\Rightarrow h\approx 1,91dm.$

Kết luận: $h\approx 1,91dm.$

Câu 11. Cho một miếng tôn hình tròn có bán kính 50 cm. Biết hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích miếng tôn ở trên. Khi đó hình nón có bán kính đáy là:

A. $10\sqrt{2}(\text{cm})$. **B.** $50\sqrt{2}(\text{cm})$. **C.** $20(\text{cm})$. **D.** $25(\text{cm})$.

Lời giải

Ta có diện tích miếng tôn là $S=\pi.2500\ (\text{cm}^2)$.

Diện tích toàn phần của hình nón là: $S_{tp}=\pi R^2+\pi.R.l$.

Thỏa mãn yêu cầu bài toán ta có: $\pi R^2+\pi.R.l=2500\pi\Leftrightarrow R^2+R.l=2500=A\Leftrightarrow l=\frac{A}{R}-R$.

Thể tích khối nón là:

$V=\frac{1}{3}\pi R^2.h\Leftrightarrow V=\frac{1}{3}\pi R^2.\sqrt{l^2-R^2}\Leftrightarrow V=\frac{1}{3}\pi R^2.\sqrt{\left(\frac{A}{R}-R\right)^2-R^2}$

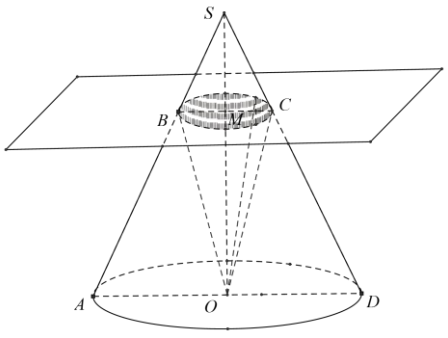
$\Leftrightarrow V=\frac{1}{3}\pi R^2.\sqrt{\frac{A^2}{R^2}-2A}\Leftrightarrow V=\frac{1}{3}\pi.\sqrt{A^2.R^2-2A.R^4}\Leftrightarrow V=\frac{1}{3}\pi.\sqrt{\frac{A^3}{8}-2A\left(R^2-\frac{A}{4}\right)^2}$

$\Leftrightarrow V\le \frac{1}{3}\pi.\frac{A}{2}\sqrt{\frac{A}{2}}$. Dấu bằng xảy ra khi $R=\sqrt{\frac{A}{4}}=25$, vậy V đạt GTLN khi $R=25$.

Câu 12. **(Phan Đăng Lưu - Huế - 2018)** Cho hình nón (N) có đường cao $SO=h$ và bán kính đáy bằng R, gọi M là điểm trên đoạn SO, đặt $OM=x$, $0<x<h$. (C) là thiết diện của mặt phẳng (P) vuông góc với trục SO tại M, với hình nón (N). Tìm x để thể tích khối nón đỉnh O đáy là (C) lớn nhất.

A. $\frac{h}{2}$. **B.** $\frac{h\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{h\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{h}{3}$.

Lời giải



Ta có BM là bán kính đường tròn (C).

Do tam giác $\Delta SBM\backsim\Delta SAO$ nên $\frac{BM}{AO}=\frac{SM}{SO}\Leftrightarrow BM=\frac{AO.SM}{SO}\Leftrightarrow BM=\frac{R(h-x)}{h}$.

Thể tích của khối nón đỉnh O đáy là (C) là:

$V=\frac{1}{3}\pi BM^2.OM=\frac{1}{3}\pi\left[\frac{R(h-x)}{h}\right]^2 x=\frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)^2 x.$

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)^2 x,\ (0<x<h)$ ta có

Ta có $f'(x)=\frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)(h-3x);\ f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)(h-3x)\Leftrightarrow x=\frac{h}{3}.$

Lập bảng biến thiên ta có

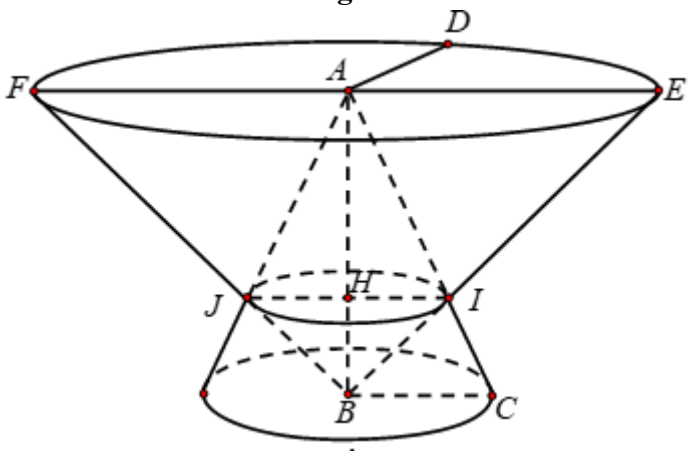
x	0		$\frac{h}{3}$		h
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\frac{4\pi R^2 h}{81}$	↘	

Từ bảng biến ta có thể tích khối nón đỉnh O đáy là (C) lớn nhất khi $x=\frac{h}{3}$.

Câu 13. **(THPT Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2018)** Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AD\perp(ABC)$, ABC là tam giác vuông tại B. Biết $BC=a$, $AB=a\sqrt{3}$, $AD=3a$. Quay các tam giác ABC và ABD (Bao gồm cả điểm bên trong 2 tam giác) xung quanh đường thẳng AB ta được 2 khối tròn xoay. Thể tích phần chung của 2 khối tròn xoay đó bằng

A. $\frac{3\sqrt{3}\pi a^3}{16}$. **B.** $\frac{8\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **C.** $\frac{5\sqrt{3}\pi a^3}{16}$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{16}$.

Lời giải



Khi quay tam giác ABD quanh AB ta được khối nón đỉnh B có đường cao BA, đáy là đường tròn bán kính $AE=3$ cm. Gọi $I=AC\cap BE$, $IH\perp AB$ tại H. Phần chung của 2 khối nón khi quay tam giác ABC và tam giác ABD quanh AB là 2 khối nón đỉnh A và đỉnh B có đáy là đường tròn bán kính IH.

Ta có ΔIBC đồng dạng với $\Delta IEA\Rightarrow\frac{IC}{IA}=\frac{BC}{AE}=\frac{1}{3}\Rightarrow IA=3IC$.

Mặt khác $IH//BC\Rightarrow\frac{AH}{AB}=\frac{IH}{BC}=\frac{AI}{AC}=\frac{3}{4}\Rightarrow IH=\frac{3}{4}BC=\frac{3a}{4}$.

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối nón đỉnh A và B có đáy là hình tròn tâm H

$V_1 = \frac{1}{3}\pi.IH^2.AH$.

$V_2 = \frac{1}{3}\pi.IH^2.BH$.

$\Rightarrow V = V_1 + V_2 \Rightarrow V = \frac{\pi}{3}.IH^2.AB \Rightarrow V = \frac{\pi}{3}.\frac{9a^2}{16}.a\sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{16}$.

Câu 14. **(THPT Can Lộc - Hà Tĩnh - 2018)** Cho tam giác nhọn ABC, biết rằng khi quay tam giác này quanh các cạnh AB, BC, CA ta lần lượt được các hình tròn xoay có thể tích là 672π, $\frac{3136\pi}{5}$, $\frac{9408\pi}{13}$.Tính diện tích tam giác ABC.

A. $S = 1979$. **B.** $S = 364$. **C.** $S = 84$. **D.** $S = 96$.

Lời giải

Vì tam giác ABC nhọn nên các chân đường cao nằm trong tam giác.

Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là đường cao từ đỉnh A, B, C của tam giác ABC, và a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh BC, CA, AB.

Khi đó

+ Thể tích khối tròn xoay khi quay tam giác quanh AB là $\frac{1}{3}.\pi.h_c^2.c = 672\pi$.

+ Thể tích khối tròn xoay khi quay tam giác quanh BC là $\frac{1}{3}.\pi.h_a^2.a = \frac{3136\pi}{5}$.

+ Thể tích khối tròn xoay khi quay tam giác quanh CA là $\frac{1}{3}.\pi.h_b^2.b = \frac{9408\pi}{13}$.

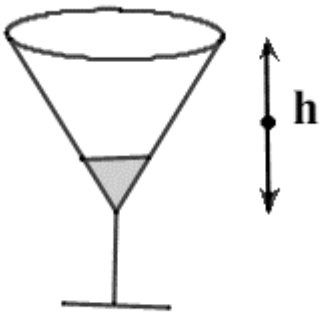
Do đó

$$\begin{cases} \frac{1}{3}c.h_c^2 = 672 \\ \frac{1}{3}a.h_a^2 = \frac{3136}{5} \\ \frac{1}{3}b.h_b^2 = \frac{9408}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}\frac{S^2}{c} = 672 \\ \frac{4}{3}\frac{S^2}{a} = \frac{3136}{5} \\ \frac{4}{3}\frac{S^2}{b} = \frac{9408}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{4S^2}{3.672} \\ a = \frac{20S^2}{3.3136} \\ b = \frac{52S^2}{3.9408} \end{cases}$$

$\Rightarrow (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = S^8.\frac{1}{3^4}.\frac{1}{9408}.\frac{1}{28812} \Leftrightarrow 16S^2 = S^8.\frac{1}{3^4}.\frac{1}{9408}.\frac{1}{28812}$

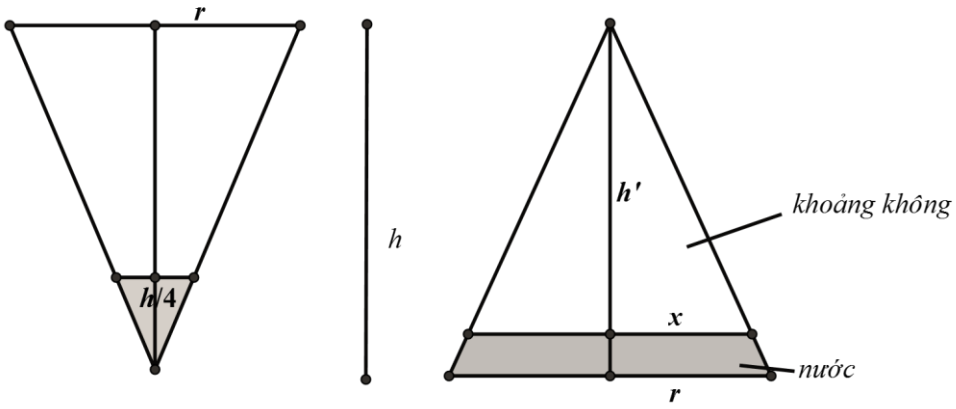
$\Leftrightarrow S^6 = 16.81.9408.28812 \Leftrightarrow S = 84$.

Câu 15. **(THPT Nam Trực - Nam Định - 2018)** Một chiếc ly dạng hình nón (như hình vẽ với chiều cao ly là h). Người ta đổ một lượng nước vào ly sao cho chiều cao của lượng nước trong ly bằng $\frac{1}{4}$ chiều cao của ly. Hỏi nếu bịt kín miệng ly rồi úp ngược ly lại thì tỷ lệ chiều cao của mực nước và chiều cao của ly nước bây giờ bằng bao nhiêu?



A. $\frac{4-\sqrt[3]{63}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt[3]{63}}{4}$. **C.** $\frac{4-\sqrt{63}}{4}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải



Giả sử ly có chiều cao h và đáy là đường tròn có bán kính r, nên có thể tích $V=\frac{1}{3}\pi hr^2$.

Khối nước trong ly có chiều cao bằng $\frac{1}{4}$ chiều cao của ly nên khối nước tạo thành khối nón có chiều cao bằng $\frac{h}{4}$ và bán kính đáy $\frac{r}{4}$ thể tích nước bằng $\frac{1}{3}.\frac{h}{4}\pi\left(\frac{r}{4}\right)^2=\frac{1}{64}.\left(\frac{1}{3}\pi hr^2\right)=\frac{1}{64}V$.

Do đó thể tích khoảng không bằng $V-\frac{1}{64}V=\frac{63}{64}V$.

Nên khi úp ngược ly lại thì ta có các tỉ lệ: $\frac{x}{r}=\frac{h'}{h}\Rightarrow x=\frac{r.h'}{h}$.

Suy ra: thể tích khoảng không bằng: $\frac{1}{3}h'.\pi x^2=\frac{1}{3}.h'.\pi.\left(\frac{r.h'}{h}\right)^2=\frac{1}{3}\pi hr^2.\left(\frac{h'}{h}\right)^3=\left(\frac{h'}{h}\right)^3.V$.

$\Rightarrow\frac{63}{64}V=\left(\frac{h'}{h}\right)^3V\Rightarrow\left(\frac{h'}{h}\right)^3=\frac{63}{64}\Rightarrow\frac{h'}{h}=\sqrt[3]{\frac{63}{64}}=\frac{\sqrt[3]{63}}{4}\Rightarrow h'=\frac{\sqrt[3]{63}}{4}h$.

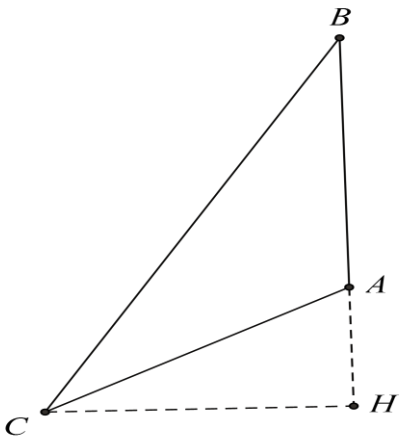
Nên chiều cao mực nước bằng: $h-h'=h-\frac{\sqrt[3]{63}}{4}h=\frac{4-\sqrt[3]{63}}{4}h$.

Vậy tỷ lệ chiều cao của mực nước và chiều cao của ly nước bây giờ bằng $\frac{4-\sqrt[3]{63}}{4}$.

Câu 16. **(Nam Định - 2018)** Cho tam giác ABC có $A=120°$, $AB=AC=a$. Quay tam giác ABC (bao gồm cả điểm trong tam giác) quanh đường thẳng AB ta được một khối tròn xoay. Thể tích khối tròn xoay đó bằng:

A. $\frac{\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{\pi a^3}{4}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải



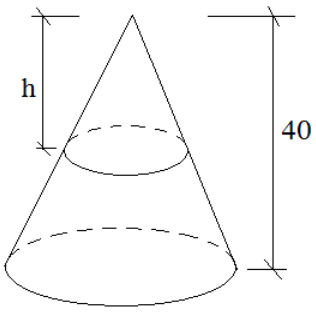
Theo định lý cosin ta có: $BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos A}=a\sqrt{3}$.

Quay tam giác ABC (bao gồm cả điểm trong tam giác) quanh đường thẳng AB ta được một khối tròn xoay có thể tích $V=V_1-V_2$ với V_1,V_2 là thể tích khối tròn xoay khi quay tam giác vuông BCH và tam giác ACH quay xung quanh với HB (H là hình chiếu vuông góc của C lên AB)

Ta tính được $CH=\frac{a\sqrt{3}}{2}; AH=\frac{a}{2}$. Khi đó, ta có:

$$V=\frac{1}{3}\pi.CH^2.BH-\frac{1}{3}\pi.CH^2.AH=\frac{1}{3}\pi.CH^2.AB=\frac{1}{3}\pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2.a=\frac{\pi a^3}{4}$$

Câu 17. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Một vật N_1 có dạng hình nón có chiều cao bằng $40cm$. Người ta cắt vật N_1 bằng một mặt cắt song song với mặt đáy của nó để được một hình nón nhỏ N_2 có thể tích bằng $\frac{1}{8}$

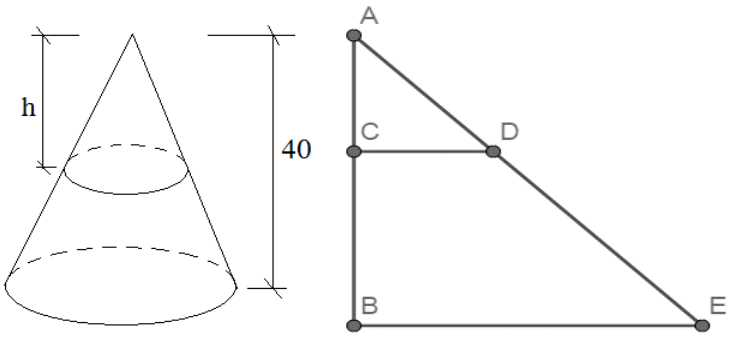


thể tích N_1.Tính chiều cao h của hình nón N_2?

A. $10cm$ **B.** $20cm$ **C.** $40cm$ **D.** $5cm$

Lời giải

Chọn B



Gọi $r_1 = BE$, $h_1 = AB$ lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình nón N_1

Gọi $r_2 = CD$, $h = AC$ lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình nón N_2

Khi đó thể tích của hai khối nón lần lượt là

$V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1$

$V_2 = \frac{1}{3}\pi r_2^2 h$

Theo đề bài ta có

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h}{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 . \frac{h}{h_1} = \frac{1}{8} \quad (1)$$

Xét hai tam giác đồng dạng ACD, ABE có:

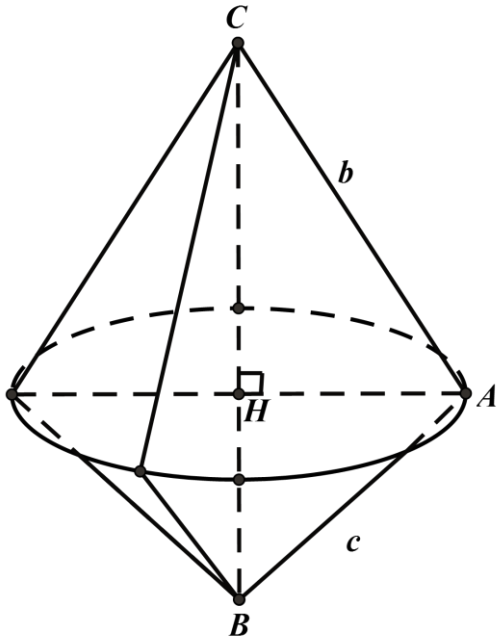
$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BE} \Leftrightarrow \frac{r_2}{r_1} = \frac{h}{h_1} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\left(\frac{h}{h_1}\right)^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{h}{h_1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow h = \frac{1}{2}h_1 = 20$

Câu 18. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Cho một tấm bìa hình dạng tam giác vuông, biết b và c là độ dài cạnh tam giác vuông của tấm một khối tròn xoay. Hỏi thể tích V của khối tròn xoay sinh ra bởi tấm bìa bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{b^2c^2}{3\sqrt{b^2+c^2}}$. **B.** $V = \frac{\pi b^2c^2}{3\sqrt{b^2+c^2}}$. **C.** $V = \frac{2\pi b^2c^2}{3\sqrt{b^2+c^2}}$. **D.** $V = \frac{\pi b^2c^2}{3\sqrt{2(b^2+c^2)}}$.

Lời giải



Gọi tam giác vuông là ABC, kẻ $AH \perp BC$, H là chân đường cao.

Khi đó $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$

Thể tích khối tròn xoay cần tính bằng tổng thể tích 2 khối nón tạo bởi hai tam giác vuông ACH và ABH khi quay quanh trục BC.

Khối nón tạo bởi tam giác vuông ACH khi quay quanh trục BC có thể tích $V_1 = \frac{1}{3}\pi CH.AH^2$

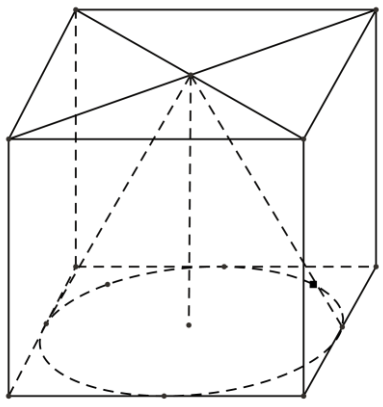
Khối nón tạo bởi tam giác vuông ABH khi quay quanh trục BC có thể tích $V_2 = \frac{1}{3}\pi BH.AH^2$

Thể tích khối tròn xoay cần tính là:

$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi CH.AH^2 + \frac{1}{3}\pi BH.AH^2$

$= \frac{1}{3}\pi BC.AH^2 = \frac{1}{3}\pi\sqrt{b^2 + c^2}.(\frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}})^2 = \frac{\pi b^2c^2}{3\sqrt{b^2 + c^2}}$

Câu 19. Một chiếc thùng chứa đầy nước có hình một khối lập phương. Đặt vào trong thùng đó một khối nón sao cho đỉnh khối nón trùng với tâm một mặt của khối lập phương, đáy khối nón tiếp xúc với các cạnh của mặt đối diện. Tính tỉ số thể tích của lượng nước trào ra ngoài và lượng nước còn lại ở trong thùng.



A. $\frac{\pi}{12-\pi}$. **B.** $\frac{1}{11}$. **C.** $\frac{\pi}{12}$. **D.** $\frac{11}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Coi khối lập phương có cạnh 1. Thể tích khối lập phường là $V=1$.

Từ giả thiết ta suy ra khối nón có chiều cao $h=1$, bán kính đáy $r=\frac{1}{2}$.

Thể tích lượng nước trào ra ngoài là thể tích V_1 của khối nón.

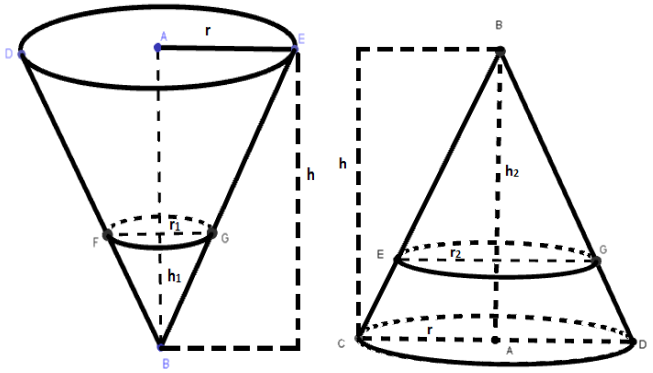
Ta có: $V_1=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi.\frac{1}{4}.1=\frac{\pi}{12}$.

Thể tích lượng nước còn lại trong thùng là: $V_2=V-V_1=1-\frac{\pi}{12}=\frac{12-\pi}{12}$.

Do đó: $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi}{12-\pi}$.

Câu 20. **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Một cái phễu có dạng hình nón. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của lượng nước trong phễu bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao của phễu. Hỏi nếu bịt kín miệng phễu rồi lộn ngược phễu lên thì chiều cao của mực nước xấp xỉ bằng bao nhiêu? Biết rằng chiều cao của phễu là 15cm.

A. $0,501(\text{cm})$. **B.** $0,302(\text{cm})$. **C.** $0,216(\text{cm})$. **D.** $0,188(\text{cm})$.



Lời giải

Gọi h_1 là chiều cao của nước ta có $h_1=\frac{1}{3}h$. Từ hình vẽ ta có: $\frac{h_1}{h}=\frac{r_1}{r}\Rightarrow r_1=\frac{1}{3}r$;

$\frac{h_2}{h}=\frac{r_2}{r}\Leftrightarrow\frac{h_2}{r_2}=\frac{h}{r}\Leftrightarrow\frac{r}{h}h_2=r_2$.

Ta có thể tích của nước trước và sau khi lôn ngược là như nhau:

$h_1.\pi r_1^2=h.\pi r^2-h_2.\pi r_2^2$

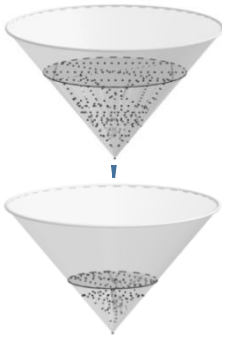
$$\Leftrightarrow h_2=\frac{h\pi r^2-h_1\pi r_1^2}{\pi r_2^2}\Leftrightarrow h_2=\frac{hr^2-h_1.r_1^2}{r_2^2}\Leftrightarrow h_2=\frac{hr^2}{r_2^2}-\frac{h_1.r_1^2}{r_2^2}\Leftrightarrow h_2=\frac{h^3}{h_2^2}-\frac{h_1.\frac{1}{9}r^2}{\frac{r^2}{h^2}h_2^2}$$

$$\Leftrightarrow h_2=\frac{h^3}{h_2^2}-\frac{h_1.\frac{1}{9}}{\frac{1}{h^2}h_2^2}\Leftrightarrow h_2=\frac{15^3}{h_2^2}-\frac{5.\frac{1}{9}.15^2}{h_2^2}\Leftrightarrow h_2^3=15^3-5.\frac{1}{9}.15^2\Leftrightarrow h_2^3=3250\Leftrightarrow h_2=\sqrt[3]{3250}$$ Vậy bịt kín miệng phễu rồi lộn ngược phễu lên thì chiều cao của mực nước xấp xỉ bằng: $0,188(\text{cm})$.

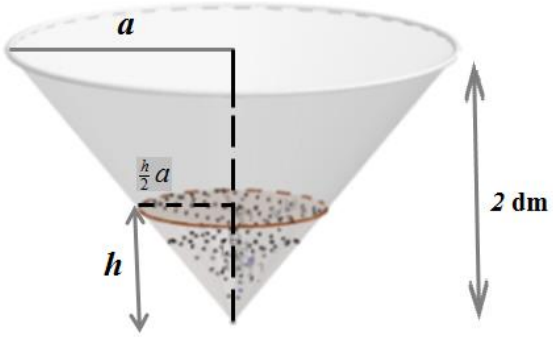
Câu 21. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Hai hình nón bằng nhau có chiều cao bằng 2 dm được đặt như hình vẽ bên (mỗi hình đều đặt thẳng đứng với đỉnh nằm phía dưới). Lúc đầu, hình nón trên chứa đầy nước và hình nón dưới không chứa nước. Sau đó, nước được chảy xuống hình nón dưới

thông qua lỗ trống ở đỉnh của hình nón trên. Hãy tính chiều cao của nước trong hình nón dưới tại thời điểm khi mà chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm.

A. $\sqrt[3]{7}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\sqrt[3]{5}$. **D.** $\frac{1}{2}$.



Lời giải



Gọi a là bán kính đáy hình nón;

V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình nón trên lúc chứa đầy nước và khi chiều cao của nước bằng 1 dm;

h, V_3 lần lượt là chiều cao của nước, thể tích của hình nón dưới khi chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm;

R, r lần lượt là bán kính của hình nón trên của nước, bán kính của hình nón dưới của nước khi chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm.

Ta có: $\frac{R}{a}=\frac{1}{2}\Rightarrow R=\frac{a}{2}$.

Thể tích nước của hình nón trên khi chiều cao bằng 1 là $V_2=\frac{1}{3}.1.\pi\left(\frac{1}{2}a\right)^2=\frac{\pi a^2}{12}$.

Mặt khác: $\frac{r}{a}=\frac{h}{2}\Rightarrow r=\frac{ah}{2}$.

Do đó thể tích nước hình nón dưới $V_3=\frac{1}{3}.h.\pi\left(\frac{h}{2}a\right)^2=\frac{\pi a^2h^3}{12}$.

Thể tích nước của hình nón trên khi đầy nước $V_1=\frac{1}{3}.2.\pi a^2$.

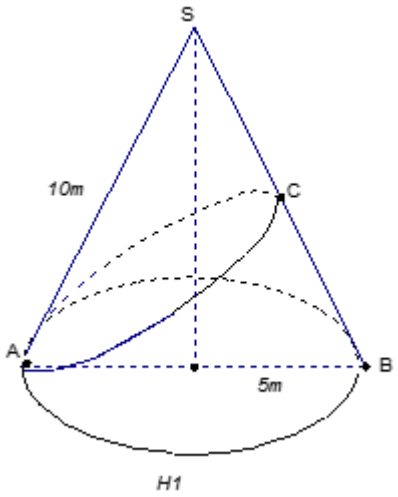
Lại có: $V_3=V_1-V_2\Rightarrow\frac{\pi a^2h^3}{12}=\frac{1}{3}.2.\pi a^2-\frac{\pi a^2}{12}\Leftrightarrow 1+h^3=8\Leftrightarrow h=\sqrt[3]{7}$.

Câu 22. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Tại trung tâm thành phố người ta tạo điểm nhấn bằng cột trang trí hình nón có kích thước như sau: chiều dài đường sinh $l=10\,\text{m}$, bán kính đáy $R=5\,\text{m}$. Biết rằng tam giác SAB là thiết diện qua trục của hình nón và C là trung điểm của SB. Trang trí một hệ thống đèn điện tử chạy từ A đến C trên mặt nón. Xác định giá trị ngắn nhất của chiều dài dây đèn điện tử.

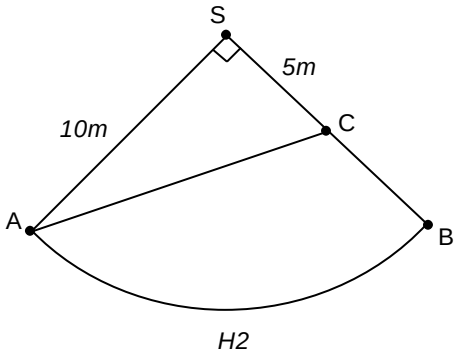
A. 15 m. **B.** 10 m. **C.** $5\sqrt{3}\,\text{m}$. **D.** $5\sqrt{5}\,\text{m}$.

Lời giải

• Cắt hình nón theo hai đường sinh *SA*, *SB* rồi trải ra ta được hình (*H2*) như sau:



H1



H2

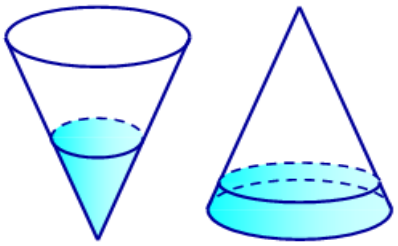
Khi đó, chiều dài dây đèn ngắn nhất là độ dài đoạn thẳng *AC* trên hình *H2*.

• Chu vi cung tròn AB: $C=\frac{1}{2}.2\pi.5=5\pi$.

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S.

$\Rightarrow AC=\sqrt{SA^2+SC^2}=\sqrt{10^2+5^5}=5\sqrt{5}\text{m}$.

Câu 23. Một cái phểu có dạng hình nón, chiều cao của phểu là $20cm$. Người ta đổ một lượng nước vào phểu sao cho chiều cao của cột nước trong phểu là $10cm$. Nếu bịt kím miêng phểu rồi lật ngược lên chiều cao của cột nước trong phểu gần nhất với giá trị nào sau đây.



A. $1,07cm$. **B.** $0,97cm$. **C.** $0,67cm$. **D.** $0,87cm$.

Lời giải

Chọn D

Gọi R là bán kính đáy của cái phểu ta có $\frac{R}{2}$ là bán kính của đáy chứa cột nước

Ta có thể tích phần nón không chứa nước là $V=\frac{1}{3}\pi\left(R\right)^2.20-\frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2.10=\frac{35}{6}\pi R^2$.

Khi lật ngược phểu Gọi h chiều cao của cột nước trong phểu.phần thể tích phần nón không chứa nước là $V=\frac{1}{3}\pi\left(20-h\right)\left(\frac{R\left(20-h\right)}{20}\right)^2=\frac{1}{1200}\pi\left(20-h\right)^3R^2$.

$\frac{1}{1200}\pi\left(20-h\right)^3R^2=\frac{35}{6}\pi R^2\Rightarrow\left(20-h\right)^3=7000\Rightarrow h\approx 0,87$

Câu 24. Giả sử đồ thị hàm số $y=\left(m^2+1\right)x^4-2mx^2+m^2+1$ có 3 điểm cực trị là A,B,C mà $x_A<x_B<x_C$. Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC ta được một khối tròn xoay. Giá trị của m để thể tích của khối tròn xoay đó lớn nhất thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây:

A. $(4;6)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn B

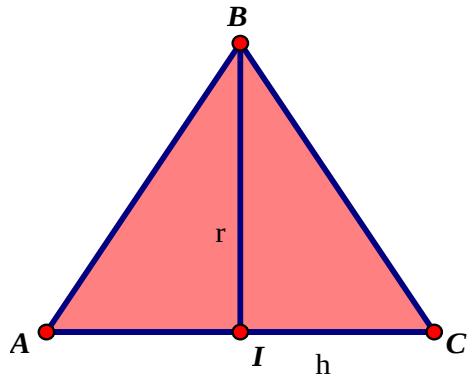
$y'=4(m^2+1)x^3-4mx=4x\left[(m^2+1)x^2-m\right]$

+ $y'=0\Leftrightarrow 4x\left[(m^2+1)x^2-m\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\sqrt{\dfrac{m}{m^2+1}}\end{array}\right.(m>0)$

+ Với $m>0$ thì đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị (với $x_A<x_B<x_C$) là:

$A(-\sqrt{\dfrac{m}{m^2+1}};-\dfrac{m^2}{m^2+1}+m^2+1)$; $B(0;m^2+1)$; $C(\sqrt{\dfrac{m}{m^2+1}};-\dfrac{m^2}{m^2+1}+m^2+1)$.

+ Quay ΔABC quanh AC thì được khối tròn xoay có thể tích là:



$V=2.\dfrac{1}{3}.\pi r^2h=\dfrac{2}{3}\pi BI^2.IC=\dfrac{2}{3}\pi\left(\dfrac{m^2}{m^2+1}\right)^2.\sqrt{\dfrac{m}{m^2+1}}=\dfrac{2}{3}\pi\sqrt{\dfrac{m^9}{\left(m^2+1\right)^5}}$.

+ Xét hàm số $f(x)=\dfrac{m^9}{\left(m^2+1\right)^5}$

Có: $f'(x)=\dfrac{m^8(9-m^2)}{\left(m^2+1\right)^6}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow m=3\ (m>0)$.

Ta có BBT:

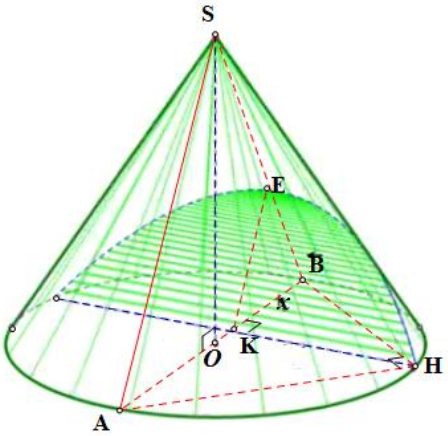
x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	max	↘	0

Vậy thể tích cần tìm lớn nhất khi $m=3$.

Câu 25. Khi cắt hình nón có chiều cao 16 cm và đường kính đáy 24 cm bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện có diện tích lớn nhất gần với giá trị nào sau đây?

A. 170. **B.** 260. **C.** 294. **D.** 208.

Lời giải



Cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện là một parabol.

Xét dây cung bất kỳ chứa đoạn KH như hình vẽ, suy ra tồn tại đường kính $AB \perp KH$, trong tam giác SAB, $KE // SA, E \in SB$, Suy ra Parabol nhận KE làm trục như hình vẽ chính là một thiết diện thỏa yêu cầu bài toán. (Thiết diện này song song với đường sinh SA)

Đặt $BK = x$ (với $0 < x < 24$).

Trong tam giác ABH có: $HK^2 = BK.AK = x(24-x)$.

Trong tam giác SAB có: $\frac{KE}{SA} = \frac{BK}{BA} \Leftrightarrow KE = \frac{BK}{BA}.SA \Leftrightarrow KE = \frac{5x}{6}$.

Thiết diện thu được là một parabol có diện tích: $S = \frac{4}{3}KH.KE$.

Ta có: $S^2 = \frac{16}{9}KH^2.KE^2 = \frac{16}{9}.x(24-x).\frac{25x^2}{36} = \frac{100}{81}.(24x^3 - x^4) \Rightarrow S = \frac{10}{9}.\sqrt{24x^3 - x^4}$

Đặt $f(x) = 24x^3 - x^4$, với $0 < x < 24$.

Ta có: $f'(x) = 72x^2 - 4x^3$. Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 72x^2 - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 18 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		18		24
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	34992	↘	

Vậy thiết diện có diện tích lớn nhất là: $\frac{10}{9}\sqrt{34992} \approx 207,8\ cm^2$

Câu 26. Một hình nón tròn xoay có đường sinh $2a$. Thể tích lớn nhất của khối nón đó là

A. $\frac{16\pi a^3}{3\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{16\pi a^3}{9\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{8\pi a^3}{3\sqrt{3}}$.

Lời giải

Fb: Bi Trần

Gọi hình nón tròn xoay có đường sinh $l = 2a$ có bán kính đáy là R và đường cao là h.

Thể tích khối nón: $V=\frac{1}{3}\pi R^2h$. Ta có: $R^2+h^2=4a^2$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô si: $4a^2=R^2+h^2=\frac{R^2}{2}+\frac{R^2}{2}+h^2\geq 3\sqrt[3]{\frac{R^4h^2}{4}}$.

$\Rightarrow \frac{R^4h^2}{4}\leq \frac{64}{27}a^6\Rightarrow \frac{1}{3}\pi R^2h\leq \frac{16\pi\sqrt{3}}{27}a^3$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\frac{R^2}{2}=h^2\\ h^2+R^2=4a^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}h=\frac{2\sqrt{3}}{3}a\\ R=\frac{2\sqrt{6}}{3}a\end{cases}$.

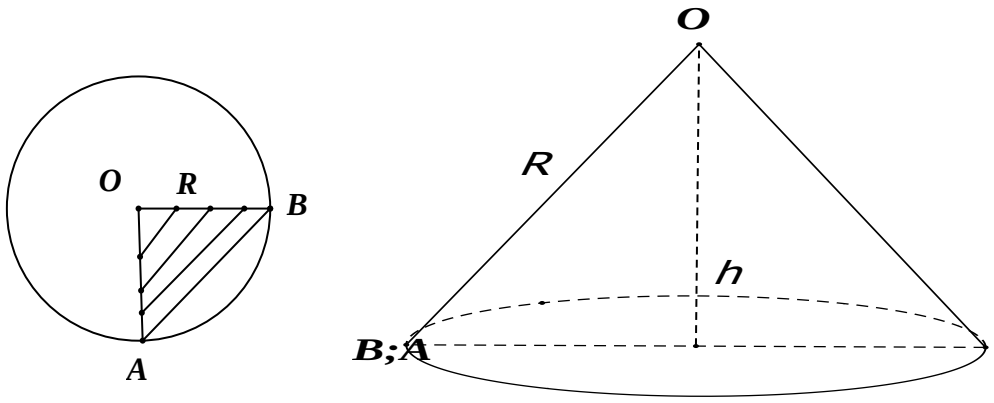
Khi đó $V_{\max}=\frac{16\pi\sqrt{3}}{27}a^3$.

Câu 27. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Huyền có một tấm bìa như hình vẽ, Huyền muốn biến đường tròn đó thành một cái phễu hình nón. Khi đó Huyền phải cắt bỏ hình quạt tròn AOB rồi dán OA, OB lại với nhau. Gọi x là góc ở tâm hình quạt tròn dùng làm phễu. Tìm x để thể tích phễu lớn nhất?

A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ **B.** $\frac{\pi}{3}$ **C.** $\frac{\pi}{2}$ **D.** $\frac{\pi}{4}$

Lời giải

Chọn A



Ta có diện tích của hình phễu $S_{xq}=\frac{R^2x}{2}\Rightarrow r=\frac{xR}{2\pi}$ là bán kính của đáy phễu; $\Rightarrow x=\frac{2\pi r}{R}$

$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{R^2-r^2}=\frac{1}{3}\pi\sqrt{r^4.R^2-r^6}$ là thể tích của phễu

Xét hàm số phụ $y=r^4.R^2-r^6\Rightarrow y'=4r^3.R^2-6r^5$

$y'=0\Leftrightarrow 2.R^2-3r^2=0\Leftrightarrow r=\frac{\sqrt{6}}{3}R$

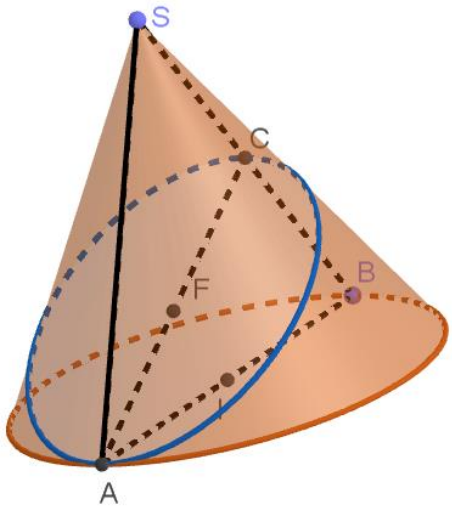
r	0		$\frac{R\sqrt{6}}{3}$		R
$y'(r)$		$+$	0	$-$	
$y(r)$		↗		↘	

Vậy y max thì V và V max khi $r=\frac{R\sqrt{6}}{3}\Leftrightarrow x=\frac{2\pi r}{R}\Leftrightarrow x=\frac{2\pi R\sqrt{6}}{3R}\Leftrightarrow x=\frac{2\pi\sqrt{6}}{3}$

Câu 28. **(Chuyên Phan Bội Châu 2019)** Tại trung tâm một thành phố người ta tạo điểm nhấn bằng cột trang trí hình nón có kích thước như sau: đường sinh $l=10m$, bán kính đáy $R=5m$. Biết rằng tam giác SAB là thiết diện qua trục của hình nón và C là trung điểm của SB. Trang trí một hệ thống đèn điện tử chạy từ A đến C trên mặt nón. Định giá trị ngắn nhất của chiều dài dây đèn điện tử.

A. $15m$. **B.** $10m$. **C.** $5\sqrt{3}m$. **D.** $5\sqrt{5}m$.

Lời giải



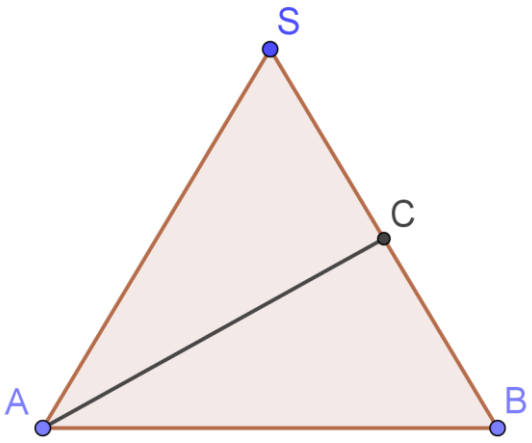
Ta có: ΔSAB cân và $SB=AB\Rightarrow\Delta SAB$ đều

Diện tích xung quanh hình nón là $S_{xq}=\pi Rl=50\pi\left(m^2\right)$

Vẽ (P) đi qua C và vuông góc với AB. Mặt phẳng (P) cắt hình nón theo thiết diện là một Elip

Khi đó, chiều dài dây đèn điện tử ngắn nhất chính là chiều dài dây cung AC trên Elip.

* Ta dùng phương pháp trải hình ra sẽ thấy ngay như sau



Hình trải dài là một hình quạt với AB là độ dài nửa đường tròn và $AB = R.\pi = 5\pi(m)$

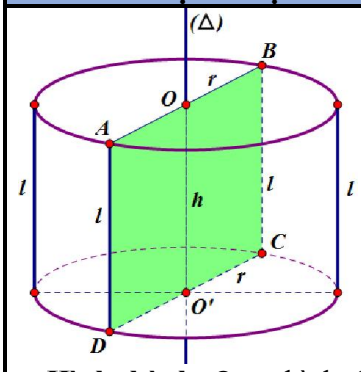
$S_{ABS} = \frac{1}{2}S = 25\pi \Leftrightarrow \frac{ASB.\pi R_1^2}{360} = 25\pi \Leftrightarrow ASB = \frac{360.25\pi}{\pi.10^2} = 90^0$

Vậy ΔSAC vuông tại S và $AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = 5\sqrt{5}.$

Chuyên đề 22 KHỐI TRỤ

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SNH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

Lý thuyết chung

MẶT TRỤ	Các yếu tố mặt trụ:	Một số công thức:
 ☛**Hình thành:** Quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh đường trung bình OO', ta có mặt trụ như hình bên.	▪ **Đường cao**: $\boxed{h = OO'}$. ▪ **Đường sinh**: $\boxed{l = AD = BC}$. Ta có: $\boxed{l = h}$. ▪ **Bán kính đáy**: $\boxed{r = OA = OB = O'C = O'D}$. ▪ **Trục** (Δ) là đường thẳng đi qua hai điểm O, O'. ▪ **Thiết diện qua trục**: Là hình chữ nhật $ABCD$.	▪ **Chu vi đáy**: $\boxed{p = 2\pi r}$. ▪ **Diện tích đáy**: $\boxed{S_đ = \pi r^2}$. ▪ **Thể tích khối trụ**: $\boxed{V = h.S_đ = h.\pi r^2}$. ▪ **Diện tích xung quanh**: $\boxed{S_{xq} = 2\pi r.h}$. ▪ **Diện tích toàn phần**: $\boxed{S_{tp} = S_{xq} + 2S_đ = 2\pi r.h + 2\pi r^2}$.

Dạng 1. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, chiều cao, bán kính đáy, thiết diện

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Diện tích xung quanh của hình trụ có độ dài đường sinh l và bán kính đáy r bằng

A. $4\pi rl$. **B.** πrl. **C.** $\frac{1}{3}\pi rl$. **D.** $2\pi rl$.

Câu 2. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hình trụ có bán kính đáy $R = 8$ và độ dài đường sinh $l = 3$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng:

A. 24π. **B.** 192π. **C.** 48π. **D.** 64π.

Câu 3. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hình trụ có bán kính đáy $r = 4$ và độ dài đường sinh $l = 3$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 48π. **B.** 12π. **C.** 16π. **D.** 24π.

Câu 4. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hình trụ có bán kính đáy $r = 5$ và độ dài đường sinh $l = 3$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 15π **B.** 25π. **C.** 30π. **D.** 75π.

Câu 5. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hình trụ có bán $r = 7$ và độ dài đường sinh $l = 3$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 42π. **B.** 147π. **C.** 49π. **D.** 21π.

Câu 6. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 3. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng qua trục, thiết diện thu được là một hình vuông. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 18π. **B.** 36π. **C.** 54π. **D.** 27π.

Câu 7. **(Đề Minh Họa 2017)** Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$ và $AD = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh trục MN, ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đó.

A. $S_{tp} = 10\pi$ **B.** $S_{tp} = 2\pi$ **C.** $S_{tp} = 6\pi$ **D.** $S_{tp} = 4\pi$

Câu 8. **(Mã 105 2017)** Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng 50π và độ dài đường sinh bằng đường kính của đường tròn đáy. Tính bán kính r của đường tròn đáy.

A. $r=5\sqrt{\pi}$ **B.** $r=5$ **C.** $r=\dfrac{5\sqrt{2\pi}}{2}$ **D.** $r=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

Câu 9. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho khối trụ (T) có bán kính đáy $R=1$, thể tích $V=5\pi$. Tính diện tích toàn phần của hình trụ tương ứng

A. $S=12\pi$ **B.** $S=11\pi$ **C.** $S=10\pi$ **D.** $S=7\pi$

Câu 10. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Tính diện tích xung quanh của hình trụ biết hình trụ có bán kính đáy là a và đường cao là $a\sqrt{3}$.

A. $2\pi a^2$ **B.** πa^2 **C.** $\pi a^2\sqrt{3}$ **D.** $2\pi a^2\sqrt{3}$

Câu 11. **(THPT - YÊN Định Thanh Hóa 2019)** Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $3a$. Tính diện tích toàn phần của khối trụ.

A. $S_{tp}=\dfrac{13a^2\pi}{6}$. **B.** $S_{tp}=a^2\pi\sqrt{3}$. **C.** $S_{tp}=\dfrac{a^2\pi\sqrt{3}}{2}$. **D.** $S_{tp}=\dfrac{27a^2\pi}{2}$.

Câu 12. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng $4\pi a^2$ và bán kính đáy là a. Tính độ dài đường cao của hình trụ đó.

A. a. **B.** $2a$. **C.** $3a$. **D.** $4a$.

Câu 13. **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Một hình trụ có bán kính đáy bằng $2cm$ và có thiết diện qua trục là một hình vuông. Diện tích xung quanh của hình trụ là

A. $8p\ cm^3$ **B.** $4p\ cm^3$ **C.** $32p\ cm^3$ **D.** $16p\ cm^3$

Câu 14. **(THPT Gia Lộc Hải Dương Năm 2019)** Cắt một hình trụ bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $3a$. Tính diện tích toàn phần của hình trụ đã cho.

A. $\dfrac{13\pi a^2}{6}$. **B.** $\dfrac{27\pi a^2}{2}$. **C.** $9\pi a^2$. **D.** $\dfrac{9\pi a^2}{2}$.

Câu 15. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=1, AD=2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đó.

A. $S_{tp}=4\pi$. **B.** $S_{tp}=6\pi$. **C.** $S_{tp}=2\pi$. **D.** $S_{tp}=10\pi$.

Câu 16. **(Đồng Tháp - 2018)** Hình trụ có bán kính đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Khi đó diện tích toàn phần của hình trụ bằng

A. $2\pi a^2\left(\sqrt{3}-1\right)$. **B.** $\pi a^2\left(1+\sqrt{3}\right)$. **C.** $\pi a^2\sqrt{3}$. **D.** $2\pi a^2\left(1+\sqrt{3}\right)$.

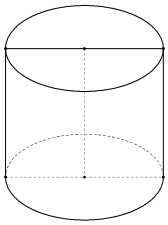
Câu 17. **(THPT Kinh Môn - HD - 2018)** Cho lập phương có cạnh bằng a và một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương. Gọi S_1 là diện tích 6 mặt của hình lập phương, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Hãy tính tỉ số $\dfrac{S_2}{S_1}$.

A. $\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{S_2}{S_1}=\pi$. **D.** $\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{\pi}{6}$.

Câu 18. **(Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2018)** Một hình trụ có bán kính đáy $r=5\text{cm}$, chiều cao $h=7\text{cm}$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

A. $S=35\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **B.** $S=70\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **C.** $S=\dfrac{70}{3}\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **D.** $S=\dfrac{35}{3}\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

Câu 19. **(Chuyên ĐH Vinh - 2018)** Cắt một hình trụ bằng một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông cạnh $2a$. Diện tích xung quanh của hình trụ bằng



A. $2\pi a^2$. **B.** $8\pi a^2$. **C.** $4\pi a^2$. **D.** $16\pi a^2$.

Câu 20. **(THPT Kiến An - Hải Phòng - 2018)** Tính diện tích xung quanh của một hình trụ có chiều cao 20 m, chu vi đáy bằng 5 m.

A. 50 m^2. **B.** $50\pi\text{ m}^2$. **C.** $100\pi\text{ m}^2$. **D.** 100 m^2.

Câu 21. **(THPT Thuận Thành - Bắc Ninh - 2018)** Cho hình trụ có diện tích xung quang bằng $8\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Độ dài đường sinh của hình trụ bằng:

A. $4a$. **B.** $8a$. **C.** $2a$. **D.** $6a$.

Câu 22. **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2018)** Tính diện tích toàn phần của hình trụ có bán kính đáy a và đường cao $a\sqrt{3}$.

A. $2\pi a^2\left(\sqrt{3}-1\right)$. **B.** $\pi a^2\sqrt{3}$. **C.** $\pi a^2\left(\sqrt{3}+1\right)$. **D.** $2\pi a^2\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Câu 23. **(Xuân Trường - Nam Định - 2018)** Một hình trụ có bán kính đáy a, có thiết diện qua trục là một hình vuông. Tính theo a diện tích xung quanh của hình trụ.

A. πa^2. **B.** $2\pi a^2$. **C.** $3\pi a^2$. **D.** $4\pi a^2$.

Câu 24. **(Hồng Quang - Hải Dương - 2018)** Cho hình trụ có thiết diện qua trục là một hình vuông, diện tích mỗi mặt đáy bằng $S=9\pi\left(\text{cm}^2\right)$. Tính diện tích xung quanh hình trụ đó.

A. $S_{xq}=36\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **B.** $S_{xq}=18\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **C.** $S_{xq}=72\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **D.** $S_{xq}=9\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

Câu 25. **(Kim Liên - Hà Nội - 2018) Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng $16\pi a^2$ và độ dài đường sinh bằng $2a$. Tính bán kính r của đường tròn đáy của hình trụ đã cho.**

A. $r=4a$. **B.** $r=6a$. **C.** $r=4\pi$. **D.** $r=8a$.

Câu 26. **(Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - 2018)** Xét hình trụ T có thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông có cạnh bằng a. Tính diện tích toàn phần S của hình trụ.

A. $S=\dfrac{3\pi a^2}{2}$. **B.** $S=\dfrac{\pi a^2}{2}$. **C.** πa^2. **D.** $4\pi a^2$.

Câu 27. Trong không gian cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=a$ và $AD=2a$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật đó quanh trục HK, ta được một hình trụ. Diện tích toàn phần của hình trụ là:

A. $S_{tp}=8\pi$. **B.** $S_{tp}=8a^2\pi$. **C.** $S_{tp}=4a^2\pi$. **D.** $S_{tp}=4\pi$.

Câu 28. **(Lê Quý Đôn - Hải Phòng -2018)** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=a$, $AD=2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AD. Khi quay hình chữ nhật trên (kể cả các điểm bên trong của nó) quanh đường thẳng MN ta nhận được một khối tròn xoay (T). Tính thể tích của (T) theo a.

A. $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$. **C.** πa^3. **D.** $4\pi a^3$.

Câu 29. **(Chuyên Vinh - 2018)** Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R, chiều cao bằng h. Biết rằng hình trụ đó có diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $R=h$. **B.** $R=2h$. **C.** $h=2R$. **D.** $h=\sqrt{2}R$.

Câu 30. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R và chiều cao bằng $\frac{3R}{2}$. Mặt phẳng (α) song song với trục của hình trụ và cách trục một khoảng bằng $\frac{R}{2}$. Tính diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (α).

A. $\frac{2R^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{3R^2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{2R^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 31. **(THPT Can Lộc - Hà Tĩnh - 2018)** Cắt hình trụ (T) bằng một mặt phẳng đi qua trục được thiết diện là một hình chữ nhật có diện tích bằng $20\,\text{cm}^2$ và chu vi bằng $18\,\text{cm}$. Biết chiều dài của hình chữ nhật lớn hơn đường kính mặt đáy của hình trụ (T). Diện tích toàn phần của hình trụ là:

A. $30\pi(\text{cm}^2)$. **B.** $28\pi(\text{cm}^2)$. **C.** $24\pi(\text{cm}^2)$. **D.** $26\pi(\text{cm}^2)$.

Câu 32. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cắt hình trụ (T) bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông cạnh bằng 1. Diện tích xung quanh của (T) bằng.

A. π. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** 2π. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Câu 33. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông cạnh bằng 3. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A. $\frac{9\pi}{4}$. **B.** 18π. **C.** 9π. **D.** $\frac{9\pi}{2}$.

Câu 34. **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Cắt hình trụ (T) bởi một mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết diện là một hình vuông cạnh bằng 7. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A. $\frac{49\pi}{4}$. **B.** $\frac{49\pi}{2}$. **C.** 49π. **D.** 98π.

Câu 35. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cắt hình trụ (T) bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông cạnh bằng 5. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A. $\frac{25\pi}{2}$. **B.** 25π. **C.** 50π. **D.** $\frac{25\pi}{4}$.

Dạng 2. Thể tích

Câu 1. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho khối trụ có bán kính đáy bằng $r=5$ và chiều cao $h=3$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. 5π. **B.** 30π. **C.** 25π. **D.** 75π.

Câu 2. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho khối trụ có bán kính $r=3$ và chiều cao $h=4$. Thể tích khối trụ đã cho bằng

A. 4π. **B.** 12π. **C.** 36π. **D.** 24π.

Câu 3. **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Cho khối trụ có bán kính đáy $r=4$ và chiều cao $h=3$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. 48π. **B.** 4π. **C.** 16π. **D.** 24π.

Câu 4. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho khối trụ có bán kính đáy $r=3$ và chiều cao $h=5$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. 45π. **B.** 5π. **C.** 15π. **D.** 30π.

Câu 5. **(Mã 103 2018)** Thể tích của khối trụ tròn xoay có bán kính đáy r và chiều cao h bằng

A. $\frac{4}{3}\pi r^2 h$ **B.** $\pi r^2 h$ **C.** $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ **D.** $2\pi rh$

Câu 6. **(Mã 123 2017)** Tính thể tích V của khối trụ có bán kính $r=4$ và chiều cao $h=4\sqrt{2}$.

A. $V=32\pi$ **B.** $V=64\sqrt{2}\pi$ **C.** $V=128\pi$ **D.** $V=32\sqrt{2}\pi$

Câu 7. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Thể tích khối trụ có bán kính đáy $r=a$ và chiều cao $h=a\sqrt{2}$ bằng

A. $4\pi a^3\sqrt{2}$. **B.** $\pi a^3\sqrt{2}$. **C.** $2\pi a^3$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 8. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Thiết diện qua trục của một hình trụ là một hình vuông có cạnh bằng $2a$. Tính theo a thể tích khối trụ đó.

A. πa^3. **B.** $2\pi a^3$. **C.** $4\pi a^3$. **D.** $\frac{2}{3}\pi a^3$.

Câu 9. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2BC=2a$. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng $ABCD$ quanh trục AD.

A. $4\pi a^3$. **B.** $2\pi a^3$. **C.** $8\pi a^3$. **D.** πa^3.

Câu 10. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho hình trụ có diện tích toàn phần là 4π và có thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua trục là hình vuông. Tính thể tích khối trụ?

A. $\frac{\pi\sqrt{6}}{12}$ **B.** $\frac{\pi\sqrt{6}}{9}$ **C.** $\frac{4\pi}{9}$ **D.** $\frac{4\pi\sqrt{6}}{9}$

Câu 11. **(Hồng Lĩnh - Hà Tĩnh - 2018)**Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=a$, $AD=2a$. Thể tích của khối trụ tạo thành khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh AB bằng

A. $4\pi a^3$. **B.** πa^3. **C.** $2a^3$. **D.** a^3.

Câu 12. **(Chuyên Bắc Ninh - 2018)** Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=1$ và $AD=2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN, ta được một hình trụ. Tính thể tích V của khối trụ tạo bởi hình trụ đó

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** π. **C.** 2π. **D.** 4π.

Câu 13. **(THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2018)** Cho khối trụ có chu vi đáy bằng $4\pi a$ và độ dài đường cao bằng a. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. πa^2. **B.** $\frac{4}{3}\pi a^3$. **C.** $4\pi a^3$. **D.** $16\pi a^3$.

Câu 14. **(THPT Hà Huy Tập - 2018)** Cho một khối trụ có diện tích xung quanh của khối trụ bằng 80π. Tính thể tích của khối trụ biết khoảng cách giữa hai đáy bằng 10.

A. 160π. **B.** 400π. **C.** 40π. **D.** 64π.

Câu 15. **(Hà Nội - 2018)** Cho khối trụ có bán kính hình tròn đáy bằng r và chiều cao bằng h. Hỏi nếu tăng chiều cao lên 2 lần và tăng bán kính đáy lên 3 lần thì thể tích của khối trụ mới sẽ tăng lên bao nhiêu lần?

A. 18 lần. **B.** 6 lần. **C.** 36 lần. **D.** 12 lần

Câu 16. **(THPT Lương Thế Vinh 2018).** Cho hình trụ có diện tích toàn phần là 4π và có thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua trục là hình vuông. Tính thể tích khối trụ?

A. $\frac{\pi\sqrt{6}}{9}$. **B.** $\frac{4\pi\sqrt{6}}{9}$. **C.** $\frac{\pi\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\frac{4\pi}{9}$.

Câu 17. **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2018)** Mặt phẳng đi qua trục hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh a. Thể tích khối trụ đó bằng

A. πa^3. **B.** $\frac{\pi a^3}{2}$. **C.** $\frac{\pi a^3}{3}$. **D.** $\frac{\pi a^3}{4}$.

Câu 18. **(SGD&ĐT BRVT - 2018)** Thiết diện qua trục của một hình trụ là hình vuông có cạnh là $2a$.Thể tích khối trụ được tạo nên bởi hình trụ này là:

A. $2\pi a^3$. **B.** $\frac{2\pi a^3}{3}$. **C.** $8\pi a^3$. **D.** $\frac{8\pi a^3}{3}$.

Câu 19. **(THPT Kinh Môn - Hải Dương - 2018)** Cho một khối trụ (S) có bán kính đáy bằng a. Biết thiết diện của hình trụ qua trục là hình vuông có chu vi bằng 8. Thể tích của khối trụ sẽ bằng

A. 8π. **B.** 4π. **C.** 2π. **D.** 16π.

Câu 20. **(THPT Gang Thép - 2018)**Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có AB và CD thuộc hai đáy của khối trụ. Biết $AB=4a$, $AC=5a$. Tính thể tích của khối trụ:

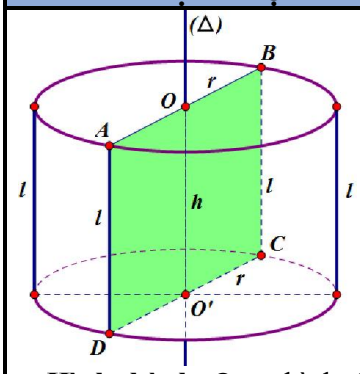
A. $V=12\pi a^3$. **B.** $V=16\pi a^3$. **C.** $V=4\pi a^3$. **D.** $V=8\pi a^3$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 22 KHỐI TRỤ

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SNH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM

Lý thuyết chung

MẶT TRỤ	Các yếu tố mặt trụ:	Một số công thức:
 ☛**Hình thành:** Quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh đường trung bình OO', ta có mặt trụ như hình bên.	▪ **Đường cao**: $\boxed{h = OO'}$. ▪ **Đường sinh**: $\boxed{l = AD = BC}$. Ta có: $\boxed{l = h}$. ▪ **Bán kính đáy**: $\boxed{r = OA = OB = O'C = O'D}$. ▪ **Trục** (Δ) là đường thẳng đi qua hai điểm O, O'. ▪ **Thiết diện qua trục**: Là hình chữ nhật $ABCD$.	▪ **Chu vi đáy**: $\boxed{p = 2\pi r}$. ▪ **Diện tích đáy**: $\boxed{S_đ = \pi r^2}$. ▪ **Thể tích khối trụ**: $\boxed{V = h.S_đ = h.\pi r^2}$. ▪ **Diện tích xung quanh**: $\boxed{S_{xq} = 2\pi r.h}$. ▪ **Diện tích toàn phần**: $\boxed{S_{tp} = S_{xq} + 2S_đ = 2\pi r.h + 2\pi r^2}$.

Dạng 1. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, chiều cao, bán kính đáy, thiết diện

Câu 1. **(Mã 103 - 2019)** Cho hình trụ có chiều cao bằng $3\sqrt{2}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng $12\sqrt{2}$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $6\sqrt{10}\pi$. **B.** $6\sqrt{34}\pi$. **C.** $3\sqrt{10}\pi$. **D.** $3\sqrt{34}\pi$.

Câu 2. **(Mã 101 - 2019)** Cho hình trụ có chiều cao bằng $5\sqrt{3}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 30. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $10\sqrt{3}\pi$. **B.** $5\sqrt{39}\pi$. **C.** $20\sqrt{3}\pi$. **D.** $10\sqrt{39}\pi$.

Câu 3. **(Mã 102 - 2019)** Cho hình trụ có chiều cao bằng $4\sqrt{2}$. Cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $\sqrt{2}$, thiết diện thu được có diện tích bằng 16. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $16\sqrt{2}\pi$. **B.** $8\sqrt{2}\pi$. **C.** $12\sqrt{2}\pi$. **D.** $24\sqrt{2}\pi$.

Câu 4. Cắt hình trụ (T) bằng một mặt phẳng đi qua trục được thiết diện là một hình chữ nhật có diện tích bằng $30cm^2$ và chu vi bằng $26\ cm$. Biết chiều dài của hình chữ nhật lớn hơn đường kính mặt đáy của hình trụ (T). Diện tích toàn phần của (T) là:

A. $23\pi(cm^2)$. **B.** $\frac{23\pi}{2}(cm^2)$. **C.** $\frac{69\pi}{2}(cm^2)$. **D.** $69\pi(cm^2)$.

Câu 5. Một hình trụ có bán kính đáy bằng 50 cm và có chiều cao là 50 cm. Một đoạn thẳng AB có chiều dài là 100 cm và có hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy. Tính khoảng cách d từ đoạn thẳng đó đến trục hình trụ.

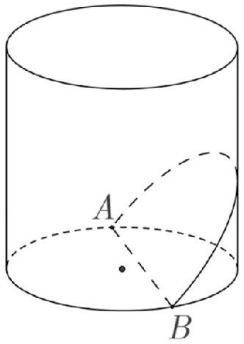
A. $d = 50$ cm. **B.** $d = 50\sqrt{3}$ cm. **C.** $d = 25$ cm. **D.** $d = 25\sqrt{3}$ cm.

Câu 6. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Một hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai đường tròn (O,R) và (O',R). Biết rằng tồn tại dây

cung AB của đường tròn (O,R) sao cho tam giác $O'AB$ đều và góc giữa hai mặt phẳng $(O'AB)$ và mặt phẳng chứa đường tròn (O,R) bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ đã cho.

A. $4\pi R^2$ **B.** $2\sqrt{3}\pi R^2$ **C.** $\frac{3\sqrt{7}}{7}\pi R^2$ **D.** $\frac{6\sqrt{7}}{7}\pi R^2$

Câu 7. **(Chuyên Sơn La 2019)** Cho khối trụ có bán kính đáy bằng $4(cm)$ và chiều cao $5(cm)$. Gọi AB là một dây cung đáy dưới sao cho $AB=4\sqrt{3}(cm)$. Người ta dựng mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B và tạo với mặt phẳng đáy hình trụ một góc 60° như hình vẽ. Tính diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (P).



A. $\frac{8\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{3}\left(cm^2\right)$. **B.** $\frac{4\left(4\pi-\sqrt{3}\right)}{3}\left(cm^2\right)$.

C. $\frac{4\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{3}\left(cm^2\right)$. **D.** $\frac{8\left(4\pi-\sqrt{3}\right)}{3}\left(cm^2\right)$.

Câu 8. **(Toán Học Và Tuổi Trẻ 2018)** Cho hình lập phương có cạnh bằng 40 cm và một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích toàn phần của hình lập phương và diện tích toàn phần của hình trụ. Tính $S=S_1+S_2$ $\left(\text{cm}^2\right)$.

A. $S=4\left(2400+\pi\right)$. **B.** $S=2400\left(4+\pi\right)$. **C.** $S=2400\left(4+3\pi\right)$. **D.** $S=4\left(2400+3\pi\right)$.

Câu 9. **(Chuyên Quốc Học Huế 2018)** Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 4π, thiết diện qua trục là hình vuông. Một mặt phẳng (α) song song với trục, cắt hình trụ theo thiết diện là tứ giác $ABB'A'$, biết một cạnh của thiết diện là một dây cung của đường tròn đáy của hình trụ và căng một cung $120°$. Tính diện tích thiết diện $ABB'A'$.

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 10. **(Chuyên Lương Thế Vinh - Đồng Nai - 2018)** Ba chiếc bình hình trụ cùng chứa 1 lượng nước như nhau, độ cao mực nước trong bình II gấp đôi bình I và trong bình III gấp đôi bình II. Chọn nhận xét đúng về bán kính đáy r_1, r_2, r_3 của ba bình I, Ox, III.

A. r_1, r_2, r_3 theo thứ tự lập thành cấp số nhân công bội 2.

B. r_1, r_2, r_3 theo thứ tự lập thành cấp số nhân công bội $\frac{1}{2}$.

C. r_1, r_2, r_3 theo thứ tự lập thành cấp số nhân công bội $\sqrt{2}$.

D. r_1, r_2, r_3 theo thứ tự lập thành cấp số nhân công bội $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 11. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R và chiều cao bằng $\frac{3R}{2}$. Mặt phẳng (α) song song với trục của hình trụ và cách trục một khoảng bằng $\frac{R}{2}$. Tính diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (α).

A. $\frac{2R^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{3R^2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{2R^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 12. **(THPT Hải An - Hải Phòng - 2018)** Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 5cm và khoảng cách giữa hai đáy là 7cm. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục 3cm. Tính diện tích S của thiết diện được tạo thành.

A. 55cm^2. **B.** 56cm^2. **C.** 53cm^2. **D.** 46cm^2.

Câu 13. **(Chuyên Hạ Long - 2018)** Cho hình trụ có chiều cao bằng $6\sqrt{2}\,cm$. Biết rằng một mặt phẳng không vuông góc với đáy và cắt hai mặt đáy theo hai dây cung song song AB, $A'B'$ mà $AB = A'B' = 6\,cm$, diện tích tứ giác $ABB'A'$ bằng $60\,cm^2$. Tính bán kính đáy của hình trụ.

A. $5\,cm$. **B.** $3\sqrt{2}\,cm$. **C.** $4\,cm$. **D.** $5\sqrt{2}\,cm$.

Câu 14. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Một hình trụ có bán kính đáy $r = 5\text{cm}$ và khoảng cách giữa hai đáy $h = 7\text{cm}$. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục 3cm. Diện tích của thiết diện được tạo thành là:

A. $S = 56\left(\text{cm}^2\right)$. **B.** $S = 55\left(\text{cm}^2\right)$. **C.** $S = 53\left(\text{cm}^2\right)$. **D.** $S = 46\left(\text{cm}^2\right)$.

Câu 15. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), chiều cao $2R$ và bán kính đáy R. Một mặt phẳng (α) đi qua trung điểm của OO' và tạo với OO' một góc $30°$. Hỏi (α) cắt đường tròn đáy theo một dây cung có độ dài bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{4R}{3\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{2R}{3}$. **D.** $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

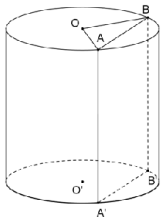
Câu 16. **(THPT Lê Xoay - 2018)** Một cốc nước hình trụ có chiều cao 9cm, đường kính 6cm.Mặt đáy phẳng dày 1cm, thành cốc dày $0{,}2\text{cm}$. Đổ vào cốc 120 ml nước sau đó thả vào cốc 5 viên bi có đường kính 2cm. Mặt nước cách mép cốc gần nhất với giá trị bằng

A. $3{,}67\left(\text{cm}\right)$. **B.** $3{,}08\left(\text{cm}\right)$. **C.** $2{,}28\left(\text{cm}\right)$. **D.** $2{,}62\left(\text{cm}\right)$.

Câu 17. **(Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R và chiều cao bằng $\frac{3R}{2}$. Mặt phẳng (α) song song với trục của hình trụ và cách trục một khoảng bằng $\frac{R}{2}$. Diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (α) là:

A. $\frac{3\sqrt{2}R^2}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}R^2}{3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{2}R^2}{3}$.

Câu 18. **(Sở Bình Phước - 2020)** Một hình trụ có diện tích xung quanh là 4π, thiết diện qua trục là một hình vuông. Một mặt phẳng (α) song song với trục, cắt hình trụ theo thiết diện $ABB'A'$, biết một cạnh của thiết diện là một dây của đường tròn đáy của hình trụ và căng một cung 120^0. Diện tích của thiết diện $ABB'A'$ bằng



A. $2\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

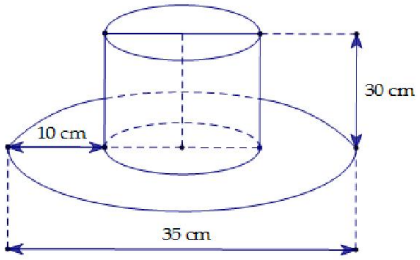
Câu 19. **(Liên trường Nghệ An - 2020)** Một sợi dây (không co giản) được quấn đối xứng đúng 10 vòng quanh một ống trụ tròn đều có bán kính $R=\dfrac{2}{\pi}cm$ (Như hình vẽ)



Biết rằng sợi dây dài $50cm$. Hãy tính diện tích xung quanh của ống trụ đó.

A. $80cm^2$. **B.** $100cm^2$. **C.** $60cm^2$. **D.** $120cm^2$.

Câu 20. **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật với kích thước như hình vẽ. Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không tính viền, mép, phần thừa).



A. $750,25\pi\left(cm^2\right)$. **B.** $756,25\pi\left(cm^2\right)$. **C.** $700\pi\left(cm^2\right)$. **D.** $700\pi\left(cm^2\right)$.

Câu 21. **(Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Một khối trụ có bán kính đáy $r=2a$. O,O' lần lượt là tâm đường tròn đáy. Một mặt phẳng song song với trục và cách trục $\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$, cắt đường tròn $\left(O'\right)$ tại hai điểm A,B. Biết thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ bằng $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{4}$. Độ dài đường cao của hình trụ bằng

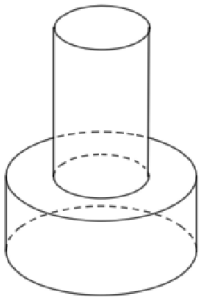
A. a. **B.** $6a$. **C.** $3a$. **D.** $2a$.

Dạng 2. Thể tích

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hình trụ có chiều cao bằng $6a$. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, thiết diện thu được là một hình vuông. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

A. $216\pi a^3$. **B.** $150\pi a^3$. **C.** $54\pi a^3$. **D.** $108\pi a^3$.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2019)** Một khối đồ chơi gồm hai khối trụ $\left(H_1\right),\left(H_2\right)$ xếp chồng lên nhau, lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1,h_1,r_2,h_2 thỏa mãn $r_2=\dfrac{1}{2}r_1,h_2=2h_1$ (tham khảo hình vẽ). Biết rằng thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng $30cm^3$, thể tích khối trụ $\left(H_1\right)$ bằng



A. $24cm^3$ **B.** $15cm^3$ **C.** $20cm^3$ **D.** $10cm^3$

Câu 3. **(Chuyên Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2020)** Cho hình trụ có chiều cao bằng $8a$. Biết hai điểm A,C lần lượt nằm trên hai đáy thỏa $AC=10a$, khoảng cách giữa AC và trục của hình trụ bằng $4a$. Thể tích của khối trụ đã cho là

A. $128\pi a^3$. **B.** $320\pi a^3$. **C.** $80\pi a^3$. **D.** $200\pi a^3$.

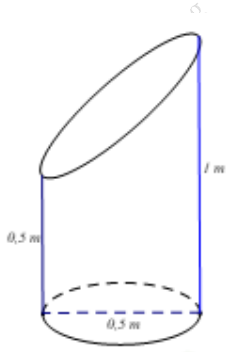
Câu 4. **(Sở Hà Nội 2019)** Hỏi nếu tăng chiều cao của khối trụ lên 2 lần, bán kính của nó lên 3 lần thì thể tích của khối trụ mới sẽ tăng bao nhiêu lần so với khối trụ ban đầu?

A. 36. **B.** 6. **C.** 18. **D.** 12.

Câu 5. **(Chuyên ĐHSPHN - 2018)** Cần đẽo thanh gỗ hình hộp có đáy là hình vuông thành hình trụ có cùng chiều cao. Tỉ lệ thể tích gỗ cần phải đẽo đi ít nhất (tính gần đúng) là

A. 30%. **B.** 50%. **C.** 21%. **D.** 11%.

Câu 6. Một khối gỗ hình trụ có đường kính $0,5\,\text{m}$ và chiều cao $1\,(\text{m})$. Người ta đã cắt khối gỗ, phần còn lại như hình vẽ bên có thể tích là V. Tính V.



A. $\dfrac{3\pi}{16}\,(\text{m}^3)$. **B.** $\dfrac{5\pi}{64}\,(\text{m}^3)$. **C.** $\dfrac{3\pi}{64}\,(\text{m}^3)$. **D.** $\dfrac{\pi}{16}\,(\text{m}^3)$.

Câu 7. **(Sở Hưng Yên - 2020)** Cho hình trụ có O,O' là tâm hai đáy. Xét hình chữ nhật $ABCD$ có A,B cùng thuộc (O) và C,D cùng thuộc (O') sao cho $AB=a\sqrt{3}$, $BC=2a$ đồng thời $(ABCD)$ tạo với mặt phẳng đáy hình trụ góc $60°$. Thể tích khối trụ bằng

A. $\pi a^3\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2\pi a^3\sqrt{3}$.

Câu 8. **(Sở Hà Tĩnh - 2020)** Cho khối trụ có hai đáy là (O) và (O'). AB,CD lần lượt là hai đường kính của (O) và (O'), góc giữa AB và CD bằng $30°$, $AB=6$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng 30. Thể tích khối trụ đã cho bằng

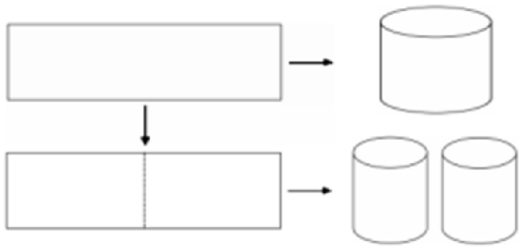
A. 180π. **B.** 90π. **C.** 30π. **D.** 45π.

Câu 9. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $50\,\text{cm}\times 240\,\text{cm}$, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng $50\,\text{cm}$, theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):

• Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.

• Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



A. $\frac{V_1}{V_2}=1$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2}=2$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=4$.

Câu 10. **(Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Cho hình trụ có hai đáy là hình tròn tâm O và O', chiều cao $h=a\sqrt{3}$. Mặt phẳng đi qua tâm O và tạo với OO' một góc $30°$, cắt hai đường tròn tâm O và O' tại bốn điểm là bốn đỉnh của một hình thang có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ và diện tích bằng $3a^2$. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **B.** $\sqrt{3}\pi a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{12}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{4}$.

Câu 11. **(THPT Nguyễn Huệ - Ninh Bình - 2018)** Cho hình trụ và hình vuông $ABCD$ có cạnh a. Hai đỉnh liên tiếp A,B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất và hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thức hai, mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với đáy một góc $45°$. Khi đó thể tích khối trụ là

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{16}$. **D.** $\frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{16}$.

Dạng 3. Khối tròn xoay nội, ngoại tiếp khối đa diện

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 4. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có một đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác BCD và chiều cao bằng chiều cao của tứ diện $ABCD$.

A. $S_{xq}=8\sqrt{3}\pi$ **B.** $S_{xq}=8\sqrt{2}\pi$ **C.** $S_{xq}=\frac{16\sqrt{3}\pi}{3}$ **D.** $S_{xq}=\frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2017)** Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng a.

A. $V=\frac{\pi a^3}{6}$ **B.** $V=\frac{\pi a^3}{2}$ **C.** $V=\frac{\pi a^3}{4}$ **D.** $V=\pi a^3$

Câu 3. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

A. $V=3\pi a^2h$. **B.** $V=\pi a^2h$. **C.** $V=\frac{\pi a^2h}{9}$. **D.** $V=\frac{\pi a^2h}{3}$.

Câu 4. **(Sở Quảng Ninh 2019)** Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng $36\pi a^2$. Tính thể tích V của lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ.

A. $27\sqrt{3}a^3$. **B.** $24\sqrt{3}a^3$. **C.** $36\sqrt{3}a^3$. **D.** $81\sqrt{3}a^3$.

Câu 5. **(Chuyên KHTN 2019)** Cho hình trụ (T) chiều cao bằng $2a$, hai đường tròn đáy của (T) có tâm lần lượt là O và O_1, bán kính bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O_1 lấy điểm B sao cho $AB=\sqrt{5}a$. Thể tích khối tứ diện OO_1AB bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$

Câu 6. **(THPT Ba Đình 2019)** Cho khối trụ có đáy là các đường tròn tâm (O), (O') có bán kính là R và chiều cao $h=R\sqrt{2}$. Gọi A, B lần lượt là các điểm thuộc (O) và (O') sao cho OA vuông góc với $O'B$. Tỉ số thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ với thể tích khối trụ là:

A. $\frac{2}{3\pi}$. **B.** $\frac{1}{3\pi}$. **C.** $\frac{1}{6\pi}$. **D.** $\frac{1}{4\pi}$.

Câu 7. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Một hình trụ có bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Một hình vuông $ABCD$ có đáy AB,CD là hai dây cung của hai đường tròn đáy và $(ABCD)$ không vuông góc với đáy. Diện tích hình vuông đó bằng

A. $\frac{5a^2}{4}$. **B.** $5a^2$. **C.** $\frac{5a^2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{5a^2}{2}$.

Câu 8. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $45°$, diện tích tam giác $A'BC$ bằng $a^2\sqrt{6}$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{4\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $2\pi a^2$. **C.** $4\pi a^2$. **D.** $\frac{8\pi a^2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 9. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương - 2019)** Cho hình trụ có bán kính R và chiều cao $\sqrt{3}R$. Hai điểm A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa AB và trục d của hình trụ bằng $30°$. Tính khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ:

A. $d(AB,d)=\frac{R\sqrt{3}}{2}$. **B.** $d(AB,d)=R$. **C.** $d(AB,d)=R\sqrt{3}$. **D.** $d(AB,d)=\frac{R}{2}$.

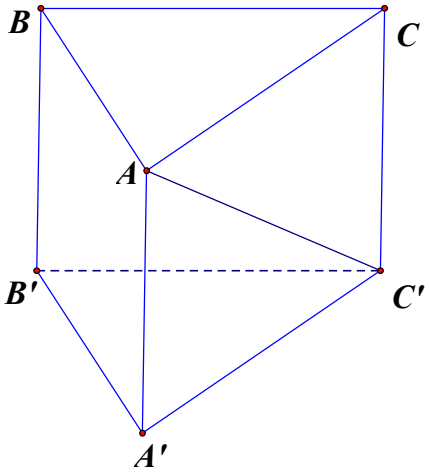
Câu 10. **(THPT Kiến An - Hải Phòng - 2018)** Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $45°$, diện tích tam giác $A'BC$ bằng $a^2\sqrt{6}$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{4\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $2\pi a^2$. **C.** $4\pi a^2$. **D.** $\frac{8\pi a^2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 11. **(Trần Phú - Hà Tĩnh - 2018)** Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng $36\pi a^2$. Tính thể tích V của lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ.

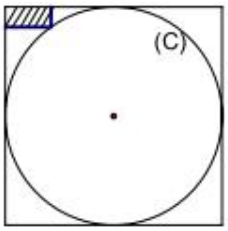
A. $V=27\sqrt{3}a^3$. **B.** $V=81\sqrt{3}a^3$. **C.** $V=24\sqrt{3}a^3$. **D.** $V=36\sqrt{3}a^3$.

Câu 12. **(Phú Thọ - 2018)** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, góc giữa AC' và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 30° (tham khảo hình vẽ). Thể tích của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng



A. πa^3. **B.** $2\pi a^3$. **C.** $4\pi a^3$. **D.** $3\pi a^3$.

Câu 13. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018)** Cho hình trụ (T) có (C) và (C') là hai đường tròn đáy nội tiếp hai mặt đối diện của một hình lập phương. Biết rằng, trong tam giác cong tạo bởi đường tròn (C) và hình vuông ngoại tiếp của (C) có một hình chữ nhật kích thước $a\times 2a$ (như hình vẽ dưới đây). Tính thể tích V của khối trụ (T) theo a.



A. $\dfrac{100\pi a^3}{3}$. **B.** $250\pi a^3$. **C.** $\dfrac{250\pi a^3}{3}$. **D.** $100\pi a^3$.

Câu 14. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Cho hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $2\sqrt{3}(\text{cm})$ với AB là đường kính của đường tròn đáy tâm O. Gọi M là điểm thuộc cung $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn đáy sao cho $\overset{\frown}{ABM}=60°$. Thể tích của khối tứ diện $ACDM$ là:

A. $V=3\left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $V=4\left(\text{cm}^3\right)$. **C.** $V=6\left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $V=7\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 15. **(THPT Lục Ngạn - 2018)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a, chiều cao là h. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp hình lăng trụ.

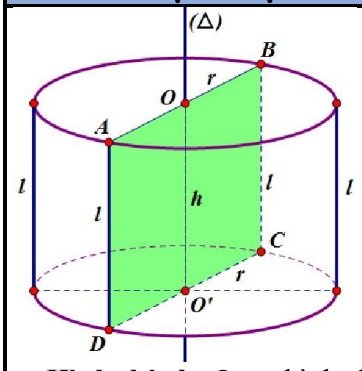
A. $V=\dfrac{\pi a^2 h}{9}$. **B.** $V=\dfrac{\pi a^2 h}{3}$. **C.** $V=3\pi a^2 h$. **D.** $V=\pi a^2 h$.

Câu 16. **(THPT Yên Lạc - 2018)** Cho hình trụ có hai đáy là các hình tròn (O), (O') bán kính bằng a, chiều cao hình trụ gấp hai lần bán kính đáy. Các điểm A, B tương ứng nằm trên hai đường tròn (O), (O') sao cho $AB=a\sqrt{6}$. Tính thể tích khối tứ diện $ABOO'$ theo a.

A. $\dfrac{a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\dfrac{2a^3}{3}$ **D.** $\dfrac{2a^3\sqrt{5}}{3}$.

Chuyên đề 22 KHỐI TRỤ

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SNH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

MẶT TRỤ	Các yếu tố mặt trụ:	Một số công thức:
 ☛**Hình thành:** Quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh đường trung bình OO', ta có mặt trụ như hình bên.	▪ **Đường cao**: $\boxed{h = OO'}$. ▪ **Đường sinh**: $\boxed{l = AD = BC}$. Ta có: $\boxed{l = h}$. ▪ **Bán kính đáy**: $\boxed{r = OA = OB = O'C = O'D}$. ▪ **Trục** (Δ) là đường thẳng đi qua hai điểm O, O'. ▪ **Thiết diện qua trục**: Là hình chữ nhật $ABCD$.	▪ **Chu vi đáy**: $\boxed{p = 2\pi r}$. ▪ **Diện tích đáy**: $\boxed{S_đ = \pi r^2}$. ▪ **Thể tích khối trụ**: $\boxed{V = h.S_đ = h.\pi r^2}$. ▪ **Diện tích xung quanh**: $\boxed{S_{xq} = 2\pi r.h}$. ▪ **Diện tích toàn phần**: $\boxed{S_{tp} = S_{xq} + 2S_đ = 2\pi r.h + 2\pi r^2}$.

MỘT SỐ BÀI TOÁN VD – VDC LIÊN QUAN ĐẾN KHỐI TRỤ (CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ - CỰC TRỊ)

Câu 1. **(Mã 104 - 2019)** Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1 m và 1,5 m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và thể trích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?

A. 1,8 m. **B.** 2,1 m. **C.** 1,6 m. **D.** 2,5 m.

Câu 2. **(Mã 101 2019)** Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng $1m$ và $1,2m$. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $2,2m$. **B.** $1,6m$. **C.** $1,8m$. **D.** $1,4m$.

Câu 3. **(Mã 102 - 2019)** Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng $1m$ và $1,4\ m$. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?

A. $1,7\ m$. **B.** $1,5\ m$. **C.** $1,9\ m$. **D.** $2,4\ m$.

Câu 4. **(Mã 103 - 2019)** Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1m và 1,8m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. 2,8m. **B.** 2,6m. **C.** 2,1m. **D.** 2,3m.

Câu 5. **(Mã 102 2018)** Một chiếc bút chì có dạng khối trụ lục giác đều có cạnh đáy 3 (mm) và chiều cao bằng 200 (mm). Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính 1 (mm). Giả định 1 m^3 gỗ có giá a triệu đồng, 1 m^3 than chì có giá $6a$ triệu đồng. Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $8,45.a$ đồng **B.** $7,82.a$ đồng **C.** $84,5.a$ đồng **D.** $78,2.a$ đồng

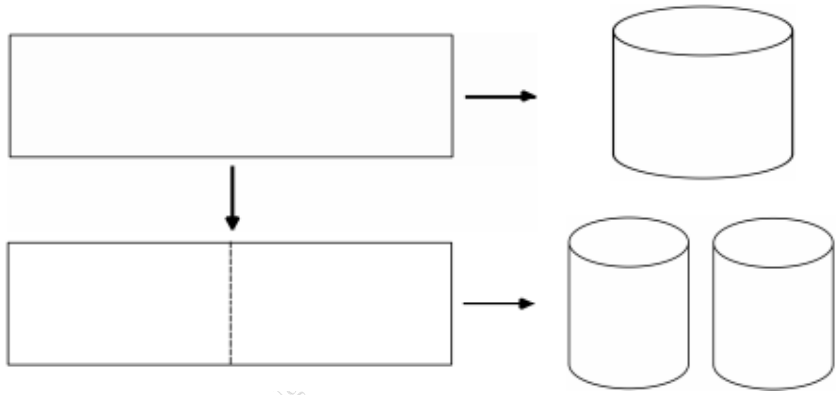
Câu 6. **(Mã 101 2018)** Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy 3 mm và chiều cao bằng 200 mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính đáy 1 mm. Giả định $1\,\text{m}^3$ gỗ có giá a (triệu đồng), $1\,\text{m}^3$ than chì có giá $8a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $9,07a$ (đồng) **B.** $97,03a$ (đồng) **C.** $90,7a$ (đồng) **D.** $9,7a$ (đồng)

Câu 7. **(Đề Minh Họa 2017)** Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $50cm.240cm$, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng $50cm$, theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):.

- Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.
- Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.



A. $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{V_1}{V_2}=1$ **C.** $\dfrac{V_1}{V_2}=2$ **D.** $\dfrac{V_1}{V_2}=4$

Câu 8. **(Mã 104 2018)** Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy 3 *mm* và chiều cao 200 *mm*. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều cao của bút và đáy là hình tròn có bán kính 1 *mm*. Giả định $1\ m^3$ gỗ có giá a (triệu đồng), $1\ m^3$ than chì có giá $7a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $85,5.a$ (đồng) **B.** $9,07.a$ (đồng) **C.** $8,45.a$ (đồng) **D.** $90,07.a$ (đồng)

Câu 9. **(Mã 103 2018)** Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy bằng 3 mm và chiều cao bằng 200 mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 mm. Giả định $1m^3$ gỗ có giá a (triệu đồng). $1m^3$ than chì có giá $9a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $103,3a$ đồng **B.** $97,03a$ đồng **C.** $10,33a$ đồng **D.** $9,7a$ đồng

Câu 10. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Người ta làm tạ tập cơ tay như hình vẽ với hai đầu là hai khối trụ bằng nhau và tay cầm cũng là khối trụ. Biết hai đầu là hai khối trụ đường kính đáy bằng 12, chiều cao bằng 6, chiều dài tạ bằng 30 và bán kính tay cầm là 2. Hãy tính thể tích vật liệu làm nên tạ tay đó.



A. 108π. **B.** 6480π. **C.** 502π. **D.** 504π.

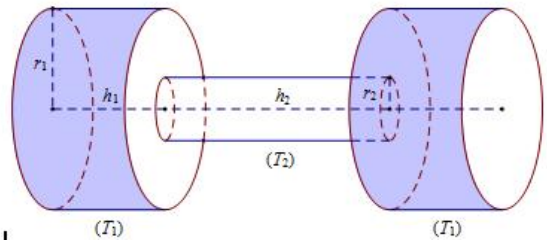
Câu 11. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Một người thợ có một khối đá hình trụ. Kẻ hai đường kính MN, PQ của hai đáy sao cho $MN \perp PQ$. Người thợ đó cắt khối đá theo các mặt đi qua 3 trong 4 điểm M, N, P, Q để khối đá có hình tứ diện $MNPQ$. Biết $MN = 60$ cm và thể tích khối tứ diện $MNPQ = 30$ dm^3. Hãy tính thể tích lượng đá cắt bỏ (làm tròn đến một chữ số thập phân sau dấu phẩy).

A. $101,3\text{dm}^3$ **B.** $111,4\text{dm}^3$ **C.** $121,3\text{dm}^3$ **D.** $141,3\text{dm}^3$

Câu 12. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Công ty X định làm một téc nước hình trụ bằng inox (gồm cả nắp) có dung tích $1m^3$. Để tiết kiệm chi phí công ty X chọn loại téc nước có diện tích toàn phần nhỏ nhất. Hỏi diện tích toàn phần của téc nước nhỏ nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến 2 chữ số sau dấu phẩy)?

A. $5,59\ m^2$ **B.** $5,54\ m^2$ **C.** $5,57\ m^2$ **D.** $5,52\ m^2$

Câu 13. **(Trường VINSCHOOL - 2020)** Một chiếc tạ tay có hình dạng gồm 3 khối trụ, trong đó hai khối trụ ở hai đầu bằng nhau và khối trụ làm tay cầm ở giữa. Gọi khối trụ làm đầu tạ là (T_1) và khối trụ làm tay cầm là (T_2) lần lượt có bán kính và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_1 = 4r_2$, $h_1 = \frac{1}{2}h_2$ (tham khảo hình vẽ).



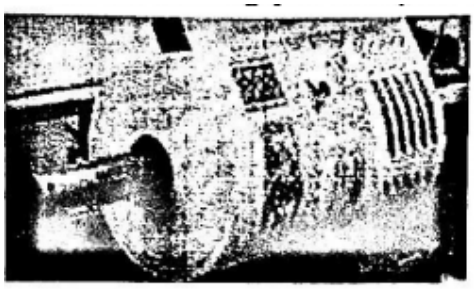
Biết rằng thể tích của khối trụ tay cầm (T_2) bằng 30 (cm^3) và chiếc tạ làm bằng inox có khối lượng riêng là $D = 7,7g/cm^3$. Khối lượng của chiếc tạ tay bằng

A. $3,927(kg)$. **B.** $2,927(kg)$. **C.** $3,279(kg)$. **D.** $2,279(kg)$.

Câu 14. **(Thi thử hội 8 trường chuyên 2019)** Một công ty sản xuất bút chì có dạng hình lăng trụ lục giác đều có chiều cao 18 cm và đáy là hình lục giác nội tiếp đường tròn đường kính 1 cm. Bút chì được cấu tạo từ hai thành phần chính là than chì và bột gỗ ép, than chì là một khối trụ ở trung tâm có đường kính $\frac{1}{4}$ cm, giá thành 540 đồng/cm^3. Bột gỗ ép xung quanh có giá thành 100 đồng/cm^3. Tính giá của một cái bút chì được công ty bán ra biết giá nguyên vật liệu chiếm 15,58% giá thành sản phẩm.

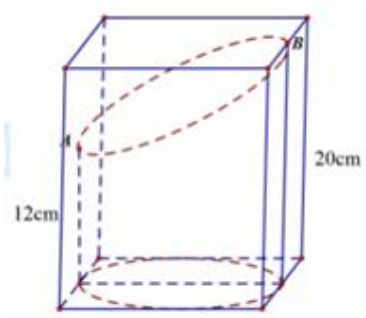
A. 10000 đồng. **B.** 8000 đồng. **C.** 5000 đồng. **D.** 3000 đồng.

Câu 15. **(THPT Hậu Lộc 2 2019)** Một cuộn đề can hình trụ có đường kính 44,9 cm. Trong thời gian diễn ra AFF cup 2018, người ta đã sử dụng để in các băng rôn, khẩu hiệu cổ vũ cho đội tuyển Việt Nam, do đó đường kính của cuộn đề can còn lại là 12,5 cm. Biết độ dày của tấm đề can là 0,06 cm, hãy tính chiều dài L của tấm đề can đã sử dụng?(Làm tròn đến hàng đơn vị).



A. $L=24344cm$ **B.** $L=97377cm$ **C.** $L=848cm$ **D.** $L=7749\,cm$

Câu 16. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh -1819)** Một khúc gỗ hình trụ có bán kính R bị cắt bởi một mặt phẳng không song song với đáy ta được thiết diện là một hình elip. Khoảng cách từ điểm A đến mặt đáy là 12 cm, khoảng cách từ điểm B đến mặt đáy là 20 cm. Đặt khúc gỗ đó vào trong hình hộp chữ nhật có chiều cao bằng 20 cm chứa đầy nước sao cho đường tròn đáy của khúc gỗ tiếp xúc với các cạnh đáy của hình hộp chữ nhật. Sau đó, người ta đo lượng nước còn lại trong hình hộp chữ nhật là 2 lít. Tính bán kính của khúc gỗ (giả sử khúc gỗ không thấm nước và kết quả làm tròn đến phần hàng chục).

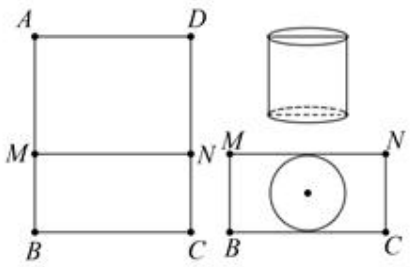


A. $R=5,2$ cm. **B.** $R=4,8$ cm. **C.** $R=6,4$ cm. **D.** $R=8,2$ cm.

Câu 17. **(Ngô Quyền - Hải Phòng 2019)** Một hộp đựng bóng tennis có dạng hình trụ. Biết rằng hộp chứa vừa khít ba quả bóng tennis được xếp theo chiều dọc, các quả bóng tennis có kích thước như nhau. Thể tích phần không gian còn trống chiếm tỉ lệ $a\%$ so với hộp đựng bóng tennis. Số a gần đúng với số nào sau đây?

A. 50. **B.** 66. **C.** 30. **D.** 33.

Câu 18. **(Chuyên Ngữ Hà Nội 2019)** Sử dụng mảnh inox hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng $1\,\text{m}^2$ và cạnh $BC=x\,(\text{m})$ để làm một thùng đựng nước có đáy, không có nắp theo quy trình như sau: Chia hình chữ nhật $ABCD$ thành hai hình chữ nhật $ADNM$ và $BCNM$, trong đó phần hình chữ nhật $ADNM$ được gò thành phần xung quanh hình trụ có chiều cao bằng AM; phần hình chữ nhật $BCNM$ được cắt ra một hình tròn để làm đáy của hình trụ trên (phần inox còn thừa được bỏ đi). Tính gần đúng giá trị x để thùng nước trên có thể tích lớn nhất (coi như các mép nối không đáng kể).



A. $1,37\,\text{m}$. **B.** $1,02\,\text{m}$. **C.** $0,97\,\text{m}$. **D.** $1\,\text{m}$.

Câu 19. Một đại lý xăng dầu cần làm một cái bồn dầu hình trụ bằng tôn có thể tích 16π (m^3). Tìm bán kính đáy r của hình trụ sao cho hình trụ được làm ra ít tốn nguyên vật liệu nhất.

A. 0,8 m. **B.** 1,2 m. **C.** 2 m. **D.** 2,4 m.

Câu 20. **(THPT Cẩm Bình Hà Tĩnh 2019)** Anh H dự định làm một cái thùng đựng dầu hình trụ bằng sắt có nắp đậy thể tích $12m^3$. Chi phí làm mỗi m^2 đáy là 400 ngàn đồng, mỗi m^2 nắp là 200 ngàn đồng, mỗi m^2 mặt xung quanh là 300 ngàn đồng. Để chi phí làm thùng là ít nhất thì anh H cần chọn chiều cao của thùng gần nhất với số nào sau đây? (*Xem độ dày của tấm sắt làm thùng là không đáng kể*).

A. $1,24\,m$. **B.** $1,25\,m$. **C.** $2,50\,m$. **D.** $2,48\,m$.

Câu 21. **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2019)** Người ta cần làm một cái bồn chứa dạng hình trụ có thể tích 1000 lít bằng inox để chứa nước, tính bán kính R của hình trụ đó sao cho diện tích toàn phần của bồn chứa có giá trị nhỏ nhất.

A. $R=\sqrt[3]{\dfrac{2}{\pi}}$. **B.** $R=\sqrt[3]{\dfrac{1}{\pi}}$. **C.** $R=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$. **D.** $R=\sqrt[3]{\dfrac{3}{2\pi}}$.

Câu 22. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Thiết diện của hình trụ và mặt phẳng chứa trục của hình trụ là hình chữ nhật có chu vi bằng 12. Giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ là

A. 16π. **B.** 32π. **C.** 8π. **D.** 64π.

Câu 23. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cần sản xuất một vỏ hộp sữa hình trụ có thể tích V cho trước. Để tiết kiệm vật liệu nhất thì bán kính đáy phải bằng

A. $\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. **B.** $\sqrt[3]{\dfrac{V}{2}}$. **C.** $\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$. **D.** $\sqrt[3]{\dfrac{V}{3\pi}}$.

Câu 24. **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Trong các hình trụ có diện tích toàn phần bằng $1000cm^2$ thì hình trụ có thể tích lớn nhất là bao nhiêu cm^3

A. 2428. **B.** 2532. **C.** 2612. **D.** 2740.

Câu 25. **(Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020)** Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, trên đường tròn tâm O' lấy điểm B. Đặt α là góc giữa AB và đáy. Biết rằng thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\tan\alpha=\sqrt{2}$. **B.** $\tan\alpha=1$. **C.** $\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$.

Câu 26. **(Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019)** Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, trên đường tròn tâm O' lấy điểm B. Đặt α là góc giữa AB và đáy. Tính $\tan\alpha$ khi thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$. **B.** $\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\tan\alpha=1$. **D.** $\tan\alpha=\sqrt{2}$.

Câu 27. **(Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019)** Một xí nghiệp chế biến sữa bò muốn sản xuất lon đựng sữa có dạng hình trụ bằng thiếc có thể tích không đổi. Để giảm giá một lon sữa khi bán ra thị trường người ta cần chế tạo lon sữa có kích thước sao cho ít tốn kém vật liệu. Để thỏa mãn yêu cầu đặt ra (diện tích toàn phần bé nhất), người ta phải thiết kế lon sữa thỏa mãn điều kiện nào trong các điều kiện sau:

A. Chiều cao bằng đường kính của đáy.

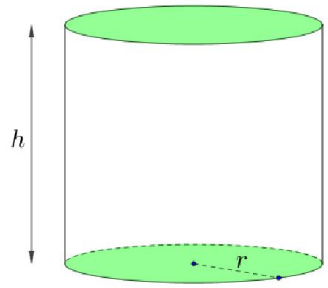
B. Chiều cao bằng bán kính của đáy.

C. Chiều cao bằng 3 lần bán kính của đáy.

D. Chiều cao bằng bình phương bán kính của đáy.

Câu 28. **(SGD Nam Định 2019)** Người ta thiết kế một thùng chứa hình trụ (như hình vẽ) có thể tích V nhất định. Biết rằng giá của vật liệu làm mặt đáy và nắp của thùng bằng nhau và đắt gấp ba lần so

với giá vật liệu để làm mặt xung quanh của thùng (chi phí cho mỗi đơn vị diện tích). Gọi chiều cao của thùng là h và bán kính đáy là r. Tính tỉ số $\frac{h}{r}$ sao cho chi phí vật liệu sản xuất thùng là nhỏ nhất?



A. $\frac{h}{r}=\sqrt{2}.$ **B.** $\frac{h}{r}=2.$ **C.** $\frac{h}{r}=6.$ **D.** $\frac{h}{r}=3\sqrt{2}.$

Câu 29. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Một hình trụ có độ dài đường cao bằng 3, các đường tròn đáy lần lượt là $(O;1)$ và $(O';1)$. Giả sử AB là đường kính cố định của $(O;1)$ và CD là đường kính thay đổi trên $(O';1)$. Tìm giá trị lớn nhất $V_{\max}$ của thể tích khối tứ diện $ABCD$.

A. $V_{\max}=2.$ **B.** $V_{\max}=6.$ **C.** $V_{\max}=\frac{1}{2}.$ **D.** $V_{\max}=1.$

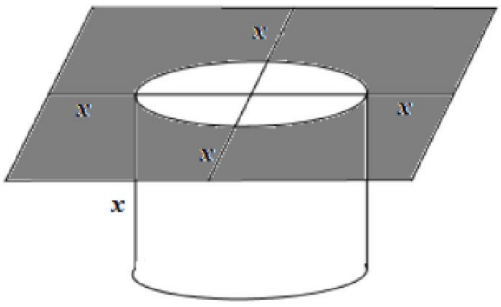
Câu 30. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cần sản xuất một vỏ hộp sữa hình trụ có thể tích V cho trước. Để tiết kiệm vật liệu nhất thì bán kính đáy phải bằng

A. $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. **B.** $\sqrt[3]{\frac{V}{2}}$. **C.** $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. **D.** $\sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}$.

Câu 31. Thiết diện của hình trụ và mặt phẳng chứa trục của hình trụ là hình chữ nhật có chu vi là 12 cm. Giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ là:

A. $64\pi\,\text{cm}^3$. **B.** $16\pi\,\text{cm}^3$. **C.** $8\pi\,\text{cm}^3$. **D.** $32\pi\,\text{cm}^3$.

Câu 32. **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Trên một mảnh đất hình vuông có diện tích $81m^2$ người ta đào một cái ao nuôi cá hình trụ (như hình vẽ) sao cho tâm của hình tròn đáy trùng với tâm của mảnh đất. Ở giữa mép ao và mép mảnh đất người ta để lại một khoảng đất trống để đi lại, biết khoảng cách nhỏ nhất giữa mép ao và mép mảnh đất là $x(m)$. Giả sử chiều sâu của ao cũng là $x(m)$. Tính thể tích lớn nhất V của ao.



A. $V=13,5\pi(m^3)$. **B.** $V=27\pi(m^3)$. **C.** $V=36\pi(m^3)$. **D.** $V=72\pi(m^3)$.

Câu 33. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, trên đường tròn tâm O' lấy điểm B. Đặt α là góc giữa AB và đáy. Tính $\tan\alpha$ khi thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\tan\alpha=\sqrt{2}$ **B.** $\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **C.** $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$ **D.** $\tan\alpha=1$

Câu 34. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, D sao cho $AD=2\sqrt{3}a$; gọi C là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng chứa đường tròn (O'); trên đường tròn tâm O' lấy điểm B (AB chéo với CD). Đặt α là góc giữa AB và đáy. Tính $\tan\alpha$ khi thể tích khối tứ diện $CDAB$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\tan\alpha=\sqrt{3}$ **B.** $\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **C.** $\tan\alpha=1$ **D.** $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 35. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, D trên đường tròn tâm O' lấy điểm B, C sao cho $AB//CD$ và AB không cắt OO'. Tính AD để thể tích khối chóp $O'.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

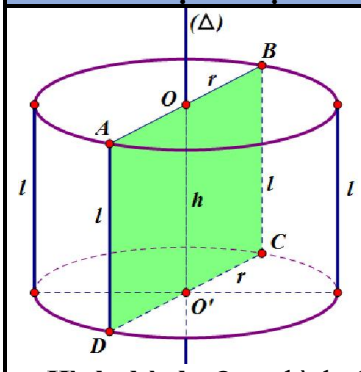
A. $AD=2\sqrt{2}a$ **B.** $AD=4a$ **C.** $AD=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}a$ **D.** $AD=\sqrt{2}a$

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 22 KHỐI TRỤ

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SNH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

Lý thuyết chung

MẶT TRỤ	Các yếu tố mặt trụ:	Một số công thức:
 ☛**Hình thành:** Quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh đường trung bình OO', ta có mặt trụ như hình bên.	▪ **Đường cao**: $\boxed{h = OO'}$. ▪ **Đường sinh**: $\boxed{l = AD = BC}$. Ta có: $\boxed{l = h}$. ▪ **Bán kính đáy**: $\boxed{r = OA = OB = O'C = O'D}$. ▪ **Trục** (Δ) là đường thẳng đi qua hai điểm O, O'. ▪ **Thiết diện qua trục**: Là hình chữ nhật $ABCD$.	▪ **Chu vi đáy**: $\boxed{p = 2\pi r}$. ▪ **Diện tích đáy**: $\boxed{S_đ = \pi r^2}$. ▪ **Thể tích khối trụ**: $\boxed{V = h.S_đ = h.\pi r^2}$. ▪ **Diện tích xung quanh**: $\boxed{S_{xq} = 2\pi r.h}$. ▪ **Diện tích toàn phần**: $\boxed{S_{tp} = S_{xq} + 2S_đ = 2\pi r.h + 2\pi r^2}$.

Dạng 1. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, chiều cao, bán kính đáy, thiết diện

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Diện tích xung quanh của hình trụ có độ dài đường sinh l và bán kính đáy r bằng

A. $4\pi rl$. **B.** πrl. **C.** $\frac{1}{3}\pi rl$. **D.** $2\pi rl$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích xung quanh của hình trụ $S = 2\pi rl$.

Câu 2. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hình trụ có bán kính đáy $R = 8$ và độ dài đường sinh $l = 3$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng:

A. 24π. **B.** 192π. **C.** 48π. **D.** 64π.

Lời giải

Chọn C.

Diện tích xung quanh của hình trụ $S_{xq} = 2\pi rl = 48\pi$

Câu 3. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hình trụ có bán kính đáy $r = 4$ và độ dài đường sinh $l = 3$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 48π. **B.** 12π. **C.** 16π. **D.** 24π.

Lời giải

Chọn D

Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho là $S = 2\pi rl = 2\pi.4.3 = 24\pi$.

Câu 4. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hình trụ có bán kính đáy $r = 5$ và độ dài đường sinh $l = 3$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 15π **B.** 25π. **C.** 30π. **D.** 75π.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức diện tích xung quanh hình trụ ta được: $S_{xq} = 2\pi rl = 30\pi$.

Câu 5. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hình trụ có bán $r=7$ và độ dài đường sinh $l=3$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 42π. **B.** 147π. **C.** 49π. **D.** 21π.

Lời giải

Chọn A

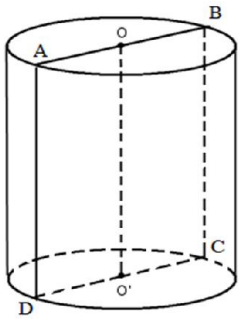
$S_{xq}=2\pi rl=42\pi$.

Câu 6. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 3. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng qua trục, thiết diện thu được là một hình vuông. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 18π. **B.** 36π. **C.** 54π. **D.** 27π.

Lời giải

Chọn B



Giả sử thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông $ABCD$.

Theo giả thiết ta có bán kính đáy của hình trụ $r=3\Rightarrow h=AD=DC=2r=6=l$.

Vậy diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq}=2\pi rl=2\pi.3.6=36\pi$.

Câu 7. **(Đề Minh Họa 2017)** Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=1$ và $AD=2$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh trục MN, ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đó.

A. $S_{tp}=10\pi$ **B.** $S_{tp}=2\pi$ **C.** $S_{tp}=6\pi$ **D.** $S_{tp}=4\pi$

Lời giải

Chọn D

Quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh MN nên hình trụ có bán kính $r=AM=\dfrac{AD}{2}=1$

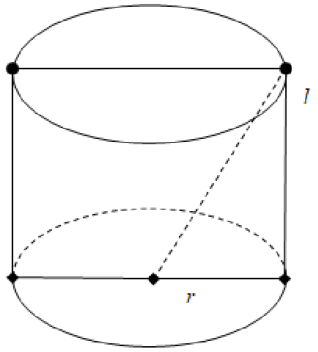
Vậy diện tích toàn phần của hình trụ $S_{tp}=2\pi r.AB+2\pi r^2=2\pi+2\pi=4\pi$.

Câu 8. **(Mã 105 2017)** Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng 50π và độ dài đường sinh bằng đường kính của đường tròn đáy. Tính bán kính r của đường tròn đáy.

A. $r=5\sqrt{\pi}$ **B.** $r=5$ **C.** $r=\dfrac{5\sqrt{2\pi}}{2}$ **D.** $r=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Chọn D



Diện tích xung quanh của hình trụ: $2\pi rl$ (l: độ dài đường sinh) Có $l=2r$

$S_{xq}=2\pi rl \Leftrightarrow 2\pi rl=50\pi \Leftrightarrow 2\pi r2r=50\pi \Leftrightarrow r=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

Câu 9. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho khối trụ (T) có bán kính đáy $R=1$, thể tích $V=5\pi$. Tính diện tích toàn phần của hình trụ tương ứng

A. $S=12\pi$ **B.** $S=11\pi$ **C.** $S=10\pi$ **D.** $S=7\pi$

Lời giải

Chọn A

Ta có $V=S.h$ với $S=\pi r^2=\pi$ nên $h=\dfrac{V}{S}=5$.

Diện tích toàn phần của trụ tương ứng là: $S_{tp}=2\pi Rh+2\pi R^2=2\pi.1.5+2\pi.1^2=12\pi$.

Câu 10. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Tính diện tích xung quanh của hình trụ biết hình trụ có bán kính đáy là a và đường cao là $a\sqrt{3}$.

A. $2\pi a^2$ **B.** πa^2 **C.** $\pi a^2\sqrt{3}$ **D.** $2\pi a^2\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn D

Diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq}=2\pi rl=2\pi rh=2\pi.a.a\sqrt{3}=2\pi a^2\sqrt{3}$.

Câu 11. **(THPT - YÊN Định Thanh Hóa 2019)** Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $3a$. Tính diện tích toàn phần của khối trụ.

A. $S_{tp}=\dfrac{13a^2\pi}{6}$. **B.** $S_{tp}=a^2\pi\sqrt{3}$. **C.** $S_{tp}=\dfrac{a^2\pi\sqrt{3}}{2}$. **D.** $S_{tp}=\dfrac{27a^2\pi}{2}$.

Lời giải

Thiết diện qua trục là một hình vuông có cạnh bằng $3a$ nên ta có độ dài đường sinh $l=3a$ và bán kính đường tròn đáy là $r=\dfrac{3a}{2}$.

Từ đó ta tính được $S_{tp}=2\pi rl+2\pi r^2=2\pi.\dfrac{3a}{2}.3a+2\pi.\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2=\dfrac{27a^2\pi}{2}$.

Câu 12. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng $4\pi a^2$ và bán kính đáy là a. Tính độ dài đường cao của hình trụ đó.

A. a. **B.** $2a$. **C.** $3a$. **D.** $4a$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích xung quanh của hình trụ có bán kính đáy a và chiều cao h là

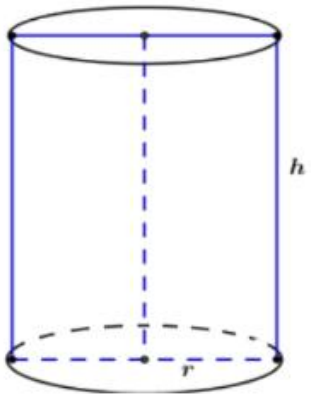
$$S_{xq} = 2\pi ah \Leftrightarrow h = \frac{S_{xq}}{2\pi a} = \frac{4\pi a^2}{2\pi a} = 2a.$$

Vậy độ dài đường cao của hình trụ đó là $h = 2a$.

Câu 13. **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Một hình trụ có bán kính đáy bằng $2cm$ và có thiết diện qua trục là một hình vuông. Diện tích xung quanh của hình trụ là

A. $8p\ cm^3$ **B.** $4p\ cm^3$ **C.** $32p\ cm^3$ **D.** $16p\ cm^3$

Lời giải



Công thức tính diện tích xung quanh hình trụ có bán kính đáy R, chiều cao h là $S_{xq} = 2p\ rh$

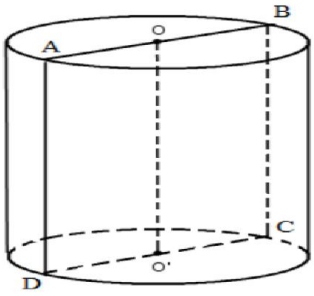
Công thức tính thể tích của khối trụ có bán kính đáy R, chiều cao h là $V = p\ R^2h$

Vì thiết diện qua trục là hình vuông nên ta có $h = 2r = 4cm$. $S_{xq} = 2p\ rh = 2p\ .2.4 = 16p\ cm^3$

Câu 14. **(THPT Gia Lộc Hải Dương Năm 2019)** Cắt một hình trụ bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $3a$. Tính diện tích toàn phần của hình trụ đã cho.

A. $\frac{13\pi a^2}{6}$. **B.** $\frac{27\pi a^2}{2}$. **C.** $9\pi a^2$. **D.** $\frac{9\pi a^2}{2}$.

Lời giải



Gọi thiết diện qua trục là hình vuông $ABCD$. Theo đề thì $AB = AD = 3a$.

Bán kính đáy của hình trụ là $R = \frac{AB}{2} = \frac{3a}{2}$.

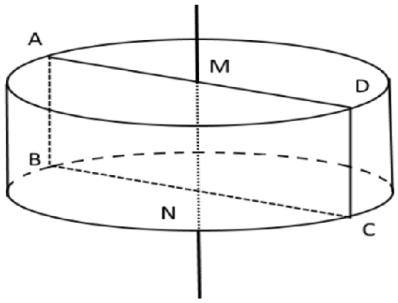
Đường sinh của hình trụ là $l = AD = 3a$.

Áp dụng công thức diện tích toàn phần của hình trụ, ta có

$$S_{tp} = 2\pi Rl + 2\pi R^2 = 2\pi.\frac{3a}{2}.3a + 2\pi\left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{27\pi a^2}{2}.$$

Câu 15. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=1, AD=2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đó.

A. $S_{tp}=4\pi$. **B.** $S_{tp}=6\pi$. **C.** $S_{tp}=2\pi$. **D.** $S_{tp}=10\pi$.



Lời giải

Hình trụ đã cho có chiều cao là AB và đáy là hình tròn tâm N bán kính BN.

Do đó: $S_{tp}=S_{xq}+2S_{đáy}=AB.2\pi.BN+2\pi.BN^2=1.2\pi.1+2\pi.1^2=4\pi$.

Câu 16. **(Đồng Tháp - 2018)** Hình trụ có bán kính đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Khi đó diện tích toàn phần của hình trụ bằng

A. $2\pi a^2\left(\sqrt{3}-1\right)$. **B.** $\pi a^2\left(1+\sqrt{3}\right)$. **C.** $\pi a^2\sqrt{3}$. **D.** $2\pi a^2\left(1+\sqrt{3}\right)$.

Lời giải

Ta có: Diện tích toàn phần của hình trụ = Diện tích xung quanh + 2 lần diện tích đáy.

Suy ra $S_{tp}=2\pi rh+2\pi r^2=2\pi.a.a\sqrt{3}+2\pi a^2=2\pi.a.^2\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Câu 17. **(THPT Kinh Môn - HD - 2018)** Cho lập phương có cạnh bằng a và một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương. Gọi S_1 là diện tích 6 mặt của hình lập phương, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Hãy tính tỉ số $\frac{S_2}{S_1}$.

A. $\frac{S_2}{S_1}=\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{S_2}{S_1}=\frac{\pi}{2}$. **C.** $\frac{S_2}{S_1}=\pi$. **D.** $\frac{S_2}{S_1}=\frac{\pi}{6}$.

Lời giải

Ta có $S_1=6a^2$, $S_2=2\pi rh=\pi a^2$

Vậy $\frac{S_1}{S_2}=\frac{6a^2}{\pi a^2}=\frac{6}{\pi}\Rightarrow\frac{S_2}{S_1}=\frac{\pi}{6}$

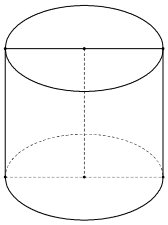
Câu 18. **(Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2018)** Một hình trụ có bán kính đáy $r=5\text{cm}$, chiều cao $h=7\text{cm}$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

A. $S=35\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **B.** $S=70\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **C.** $S=\frac{70}{3}\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **D.** $S=\frac{35}{3}\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

Lời giải

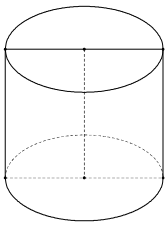
Theo công thức tính diện tích xung quanh ta có $S_{xq}=2\pi rh=70\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

Câu 19. **(Chuyên ĐH Vinh - 2018)** Cắt một hình trụ bằng một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông cạnh $2a$. Diện tích xung quanh của hình trụ bằng



A. $2\pi a^2$. **B.** $8\pi a^2$. **C.** $4\pi a^2$. **D.** $16\pi a^2$.

Lời giải



Dựa vào hình vẽ ta có bán kính và chiều cao của hình trụ lần lượt là a và $2a$.

Do đó, $S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi.a.2a = 4\pi a^2$.

Câu 20. **(THPT Kiến An - Hải Phòng - 2018)** Tính diện tích xung quanh của một hình trụ có chiều cao 20 m, chu vi đáy bằng 5 m.

A. 50 m^2. **B.** 50π m^2. **C.** 100π m^2. **D.** 100 m^2.

Lời giải

Ta có chu vi đáy $C = 2\pi R = 5$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi Rl = 5.20 = 100$ m^2.

Câu 21. **(THPT Thuận Thành - Bắc Ninh - 2018)** Cho hình trụ có diện tích xung quang bằng $8\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Độ dài đường sinh của hình trụ bằng:

A. $4a$. **B.** $8a$. **C.** $2a$. **D.** $6a$.

Lời giải

Ta có: $S_{xq} = 2\pi Rl \Rightarrow l = \dfrac{S_{xq}}{2\pi R} = \dfrac{8\pi a^2}{2\pi a} = 4a$.

Câu 22. **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2018)** Tính diện tích toàn phần của hình trụ có bán kính đáy a và đường cao $a\sqrt{3}$.

A. $2\pi a^2\left(\sqrt{3}-1\right)$. **B.** $\pi a^2\sqrt{3}$. **C.** $\pi a^2\left(\sqrt{3}+1\right)$. **D.** $2\pi a^2\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Lời giải

Ta có diện tích toàn phần của hình trụ là:

$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi a^2\sqrt{3} + 2\pi a^2 = 2\pi a^2\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Câu 23. **(Xuân Trường - Nam Định - 2018)** Một hình trụ có bán kính đáy a, có thiết diện qua trục là một hình vuông. Tính theo a diện tích xung quanh của hình trụ.

A. πa^2. **B.** $2\pi a^2$. **C.** $3\pi a^2$. **D.** $4\pi a^2$.

Lời giải

Vì hình trụ có bán kính đáy a, có thiết diện qua trục là một hình vuông nên có chiều cao $h = 2a$.

Vậy diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi.a.2a = 4\pi a^2$.

Câu 24. **(Hồng Quang - Hải Dương - 2018)** Cho hình trụ có thiết diện qua trục là một hình vuông, diện tích mỗi mặt đáy bằng $S = 9\pi\left(\text{cm}^2\right)$. Tính diện tích xung quanh hình trụ đó.

A. $S_{xq} = 36\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **B.** $S_{xq} = 18\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **C.** $S_{xq} = 72\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **D.** $S_{xq} = 9\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

Lời giải

Thiết diện qua trục là một hình vuông nên $h = 2r$.

Diện tích đáy $S = 9\pi\left(\text{cm}^2\right) \Leftrightarrow r^2\pi = 9\pi \Leftrightarrow r = 3\left(\text{cm}\right) \Rightarrow h = 6\left(\text{cm}\right)$.

Vậy diện tích xung quanh $S_{xq} = 2r\pi h = 36\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

Câu 25. **(Kim Liên - Hà Nội - 2018) Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng $16\pi a^2$ và độ dài đường sinh bằng $2a$. Tính bán kính r của đường tròn đáy của hình trụ đã cho.**

A. $r = 4a$. **B.** $r = 6a$. **C.** $r = 4\pi$. **D.** $r = 8a$.

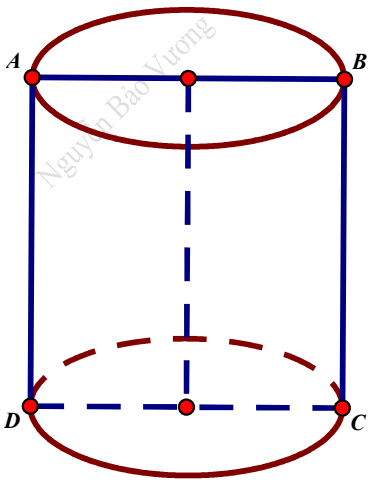
Lời giải

Theo giả thiết ta có $S_{xq} = 2\pi rl \Leftrightarrow r = \dfrac{S_{xq}}{2\pi l} = \dfrac{16\pi a^2}{2\pi.2a} = 4a$.

Câu 26. **(Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - 2018)** Xét hình trụ T có thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông có cạnh bằng a. Tính diện tích toàn phần S của hình trụ.

A. $S = \dfrac{3\pi a^2}{2}$. **B.** $S = \dfrac{\pi a^2}{2}$. **C.** πa^2. **D.** $4\pi a^2$.

Lời giải



Theo bài ra: $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a.

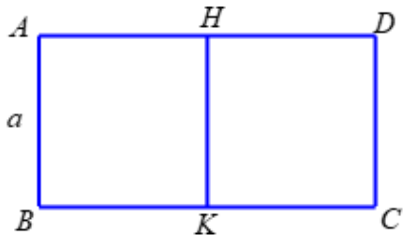
Vậy hình trụ T có bán kính $R = \dfrac{a}{2}$, chiều cao $h = a$.

Diện tích toàn phần S của hình trụ là: $S = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi\dfrac{a}{2}a + 2\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{3\pi a^2}{2}$.

Câu 27. Trong không gian cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = 2a$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật đó quanh trục HK, ta được một hình trụ. Diện tích toàn phần của hình trụ là:

A. $S_{tp} = 8\pi$. **B.** $S_{tp} = 8a^2\pi$. **C.** $S_{tp} = 4a^2\pi$. **D.** $S_{tp} = 4\pi$.

Lời giải



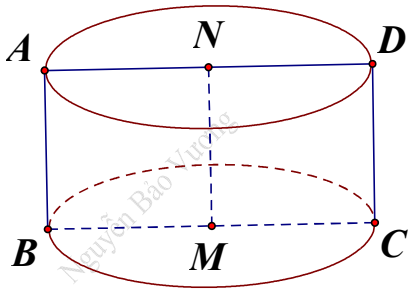
Quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh trục HK ta được hình trụ có đường cao là $h = AB = a$, bán kính đường tròn đáy là $R = BK = \frac{1}{2}BC = a$.

Vậy diện tích toàn phần của hình trụ là: $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 4\pi a^2$.

Câu 28. **(Lê Quý Đôn - Hải Phòng -2018)** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$, $AD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AD. Khi quay hình chữ nhật trên (kể cả các điểm bên trong của nó) quanh đường thẳng MN ta nhận được một khối tròn xoay (T). Tính thể tích của (T) theo a.

A. $\frac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{\pi a^3}{3}$. **C.** πa^3. **D.** $4\pi a^3$.

Lời giải



Thể tích khối tròn xoay (T) là: $V = \pi a^2.a = \pi a^3$.

Câu 29. **(Chuyên Vinh - 2018)** Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R, chiều cao bằng h. Biết rằng hình trụ đó có diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $R = h$. **B.** $R = 2h$. **C.** $h = 2R$. **D.** $h = \sqrt{2}R$.

Lời giải

Ta có: $S_{tp} = 2S_{xq} \Leftrightarrow 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2.2\pi Rh \Leftrightarrow R = h$.

Câu 30. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R và chiều cao bằng $\frac{3R}{2}$. Mặt phẳng (α) song song với trục của hình trụ và cách trục một khoảng bằng $\frac{R}{2}$. Tính diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (α).

A. $\frac{2R^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{3R^2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{2R^2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (α) là hình chữ nhật $ABCD$ với $BC = \frac{3R}{2}$.

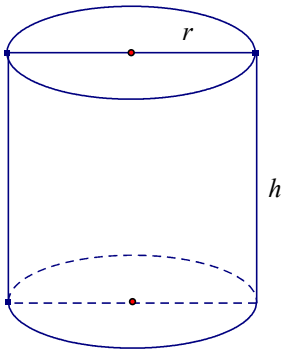
Gọi H là trung điểm AB, ta có $AH = \frac{R}{2} \Rightarrow AB = 2HB = 2\sqrt{R^2 - AH^2} = R\sqrt{3}$.

Vậy diện tích thiết diện là: $S = AB.CD = R\sqrt{3}.\frac{3R}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

Câu 31. **(THPT Can Lộc - Hà Tĩnh - 2018)** Cắt hình trụ (T) bằng một mặt phẳng đi qua trục được thiết diện là một hình chữ nhật có diện tích bằng $20\,\text{cm}^2$ và chu vi bằng $18\,\text{cm}$. Biết chiều dài của hình chữ nhật lớn hơn đường kính mặt đáy của hình trụ (T). Diện tích toàn phần của hình trụ là:

A. $30\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **B.** $28\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **C.** $24\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **D.** $26\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

Lời giải



Gọi h và r là chiều cao và bán kính của hình trụ $h > 2r$. Ta có $\begin{cases} 2rh = 20 \\ 2r + h = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 5 \\ r = 2 \end{cases}$.

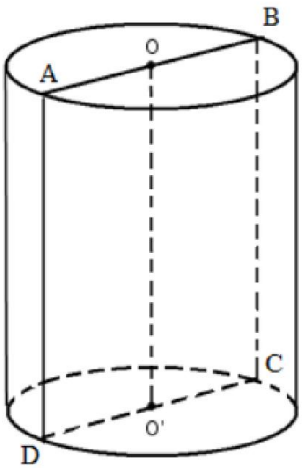
$S_{tp} = 2\pi rh + 2r^2\pi = 20\pi + 8\pi = 28\pi$.

Câu 32. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cắt hình trụ (T) bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông cạnh bằng 1. Diện tích xung quanh của (T) bằng.

A. π. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** 2π. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Thiết diện qua trục là hình vuông $ABCD$ cạnh a

Do đó hình trụ có đường cao $h=1$ và bán kính đáy $r=\frac{CD}{2}=\frac{1}{2}$.

Diện tích xung quanh hình trụ: $S_{xq}=2\pi rh=2\pi.1.\frac{1}{2}=\pi$

Câu 33. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông cạnh bằng 3. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A. $\frac{9\pi}{4}$. **B.** 18π. **C.** 9π. **D.** $\frac{9\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Vì thiết diện qua trục của hình trụ (T) là một hình vuông cạnh bằng 3 nên hình trụ (T) có đường sinh $l=3$, bán kính $r=\frac{l}{2}=\frac{3}{2}$.

Diện tích xung quanh của hình trụ (T) là $S_{xq}=2\pi rl=2\pi.\frac{3}{2}.3=9\pi$

Câu 34. **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Cắt hình trụ (T) bởi một mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết diện là một hình vuông cạnh bằng 7. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A. $\frac{49\pi}{4}$. **B.** $\frac{49\pi}{2}$. **C.** 49π. **D.** 98π.

Lời giải

Chọn C

Bán kính đáy của hình trụ là $r=\frac{7}{2}$.

Đường cao của hình trụ là $h=7$.

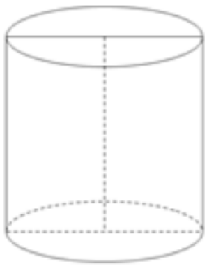
Diện tích xung quanh của hình trụ là $S=2\pi r.h=2\pi.\frac{7}{2}.7=49\pi$.

Câu 35. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cắt hình trụ (T) bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông cạnh bằng 5. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A. $\frac{25\pi}{2}$. **B.** 25π. **C.** 50π. **D.** $\frac{25\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Bán kính của hình trụ (T) bằng $\frac{5}{2}$, độ dài đường sinh $l=5$.

Diện tích xung quanh của $(T): S_{xq} = 2\pi r.l = 2\pi.\frac{5}{2}.5 = 25\pi$.

Dạng 2. Thể tích

Câu 1. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho khối trụ có bán kính đáy bằng $r = 5$ và chiều cao $h = 3$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. 5π. **B.** 30π. **C.** 25π. **D.** 75π.

Lời giải

Chọn D

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2.h = 75\pi$.

Câu 2. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho khối trụ có bán kính $r = 3$ và chiều cao $h = 4$. Thể tích khối trụ đã cho bằng

A. 4π. **B.** 12π. **C.** 36π. **D.** 24π.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $V = \pi r^2 h = \pi.3^2.4 = 36\pi$

Câu 3. **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Cho khối trụ có bán kính đáy $r = 4$ và chiều cao $h = 3$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. 48π. **B.** 4π. **C.** 16π. **D.** 24π.

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi.4^2.3 = 48\pi$.

Câu 4. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho khối trụ có bán kính đáy $r = 3$ và chiều cao $h = 5$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. 45π. **B.** 5π. **C.** 15π. **D.** 30π.

Lời giải

Chọn A

Thể tích của khối trụ đã cho là: $V = B.h = \pi.r^2.h = \pi.3^2.5 = 45\pi$.

Câu 5. **(Mã 103 2018)** Thể tích của khối trụ tròn xoay có bán kính đáy r và chiều cao h bằng

A. $\frac{4}{3}\pi r^2 h$ **B.** $\pi r^2 h$ **C.** $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ **D.** $2\pi rh$

Lời giải

Chọn B

$V_{tru} = \pi r^2 h$.

Câu 6. **(Mã 123 2017)** Tính thể tích V của khối trụ có bán kính $r = 4$ và chiều cao $h = 4\sqrt{2}$.

A. $V = 32\pi$ **B.** $V = 64\sqrt{2}\pi$ **C.** $V = 128\pi$ **D.** $V = 32\sqrt{2}\pi$

Lời giải

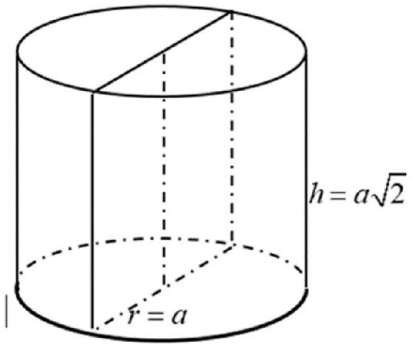
Chọn B

$V = \pi r^2 h = 16.4\sqrt{2}\pi = 64\sqrt{2}\pi$

Câu 7. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Thể tích khối trụ có bán kính đáy $r = a$ và chiều cao $h = a\sqrt{2}$ bằng

A. $4\pi a^3\sqrt{2}$. **B.** $\pi a^3\sqrt{2}$. **C.** $2\pi a^3$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải



Thể tích khối trụ là: $V = \pi r^2 h = \pi.a^2.a\sqrt{2} = \pi a^3\sqrt{2}$.

Câu 8. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Thiết diện qua trục của một hình trụ là một hình vuông có cạnh bằng $2a$. Tính theo a thể tích khối trụ đó.

A. πa^3. **B.** $2\pi a^3$. **C.** $4\pi a^3$. **D.** $\frac{2}{3}\pi a^3$.

Lời giải

Gọi chiều cao và bán kính đáy của hình trụ lần lượt là h, r.

Thiết diện qua trục của hình trụ là một hình vuông có cạnh bằng $2a$ nên $h = 2a, r = a$.

Thể tích của khối trụ đó là $V = \pi r^2 h = \pi a^2.2a = 2\pi a^3$.

Câu 9. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2BC = 2a$. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng $ABCD$ quanh trục AD.

A. $4\pi a^3$. **B.** $2\pi a^3$. **C.** $8\pi a^3$. **D.** πa^3.

Lời giải

Khối tròn xoay tạo thành là khối trụ có bán kính đáy là $AB = 2a$ và đường cao $AD = BC = a$ có thể tích bằng $V = \pi AB^2 AD = 4\pi a^3$

Câu 10. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho hình trụ có diện tích toàn phần là 4π và có thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua trục là hình vuông. Tính thể tích khối trụ?

A. $\frac{\pi\sqrt{6}}{12}$ **B.** $\frac{\pi\sqrt{6}}{9}$ **C.** $\frac{4\pi}{9}$ **D.** $\frac{4\pi\sqrt{6}}{9}$

Lời giải

Chọn D

Hình trụ có thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua trục là hình vuông suy ra: $l = h = 2r$

Hình trụ có diện tích toàn phần là 4π suy ra:

$S_{tp} = 2\pi rl + 2\pi r^2 = 2\pi.2r^2 + 2\pi.r^2 = 6\pi r^2 = 4\pi$

Nên $r = \frac{\sqrt{6}}{3}, l = h = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

Thể tích khối trụ: $V = \pi r^2.h = \frac{4\pi\sqrt{6}}{9}$

Câu 11. **(Hồng Lĩnh - Hà Tĩnh - 2018)**Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$, $AD = 2a$. Thể tích của khối trụ tạo thành khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh AB bằng

A. $4\pi a^3$. **B.** πa^3. **C.** $2a^3$. **D.** a^3.

Lời giải

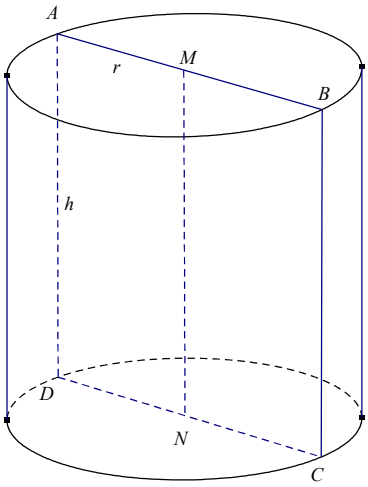
Áp dụng công thức tính thể tích khối trụ tròn xoay ta có

$V = \pi r^2 h = \pi (2a)^2 .a = 4\pi a^3$.

Câu 12. **(Chuyên Bắc Ninh - 2018)** Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$ và $AD = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN, ta được một hình trụ. Tính thể tích V của khối trụ tạo bởi hình trụ đó

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** π. **C.** 2π. **D.** 4π.

Lời giải



Quay hình chữ nhật xung quanh trục MN ta được hình trụ có bán kính đáy $r = AM = \frac{1}{2}$, chiều cao $h = AD = 2$. Thể tích khối trụ tương ứng bằng $V = \pi r^2 h = \pi.\left(\frac{1}{2}\right)^2 .2 = \frac{\pi}{2}$.

Câu 13. **(THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2018)** Cho khối trụ có chu vi đáy bằng $4\pi a$ và độ dài đường cao bằng a. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. πa^2. **B.** $\frac{4}{3}\pi a^3$. **C.** $4\pi a^3$. **D.** $16\pi a^3$.

Lời giải

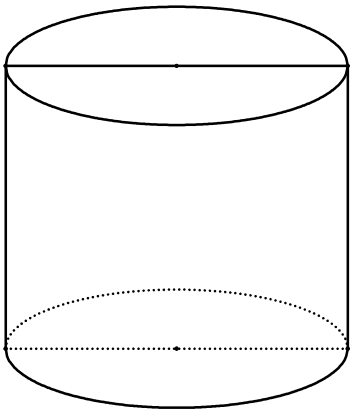
Gọi chu vi đáy là P. Ta có: $P = 2\pi R \Leftrightarrow 4\pi a = 2\pi R \Leftrightarrow R = 2a$.

Khi đó thể tích khối trụ: $V = \pi R^2 h = \pi (2a)^2 .a = 4\pi a^3$.

Câu 14. **(THPT Hà Huy Tập - 2018)** Cho một khối trụ có diện tích xung quanh của khối trụ bằng 80π. Tính thể tích của khối trụ biết khoảng cách giữa hai đáy bằng 10.

A. 160π. **B.** 400π. **C.** 40π. **D.** 64π.

Lời giải



Ta có: khoảng cách giữa hai đáy bằng 10 nên $h=l=10$.

$S_{xq}=80\pi \Leftrightarrow 2\pi rl=80\pi \Leftrightarrow r=4$.

Vậy thể tích của khối trụ bằng $V=\pi.4^2.10=160\pi$.

Câu 15. **(Hà Nội - 2018)** Cho khối trụ có bán kính hình tròn đáy bằng r và chiều cao bằng h. Hỏi nếu tăng chiều cao lên 2 lần và tăng bán kính đáy lên 3 lần thì thể tích của khối trụ mới sẽ tăng lên bao nhiêu lần?

A. 18 lần. **B.** 6 lần. **C.** 36 lần. **D.** 12 lần

Lời giải

$V_1=2h.\pi\left(3r\right)^2=18\left(h.\pi r^2\right)=18V$

Câu 16. **(THPT Lương Thế Vinh 2018).** Cho hình trụ có diện tích toàn phần là 4π và có thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua trục là hình vuông. Tính thể tích khối trụ?

A. $\frac{\pi\sqrt{6}}{9}$. **B.** $\frac{4\pi\sqrt{6}}{9}$. **C.** $\frac{\pi\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\frac{4\pi}{9}$.

Lời giải

Vì thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua trục là hình vuông nên khối trụ có chiều cao bằng $2r$.

Ta có: $S_{tp}=4\pi \Leftrightarrow 2\pi r^2+2\pi rl=4\pi \Leftrightarrow 6\pi r^2=4\pi$.

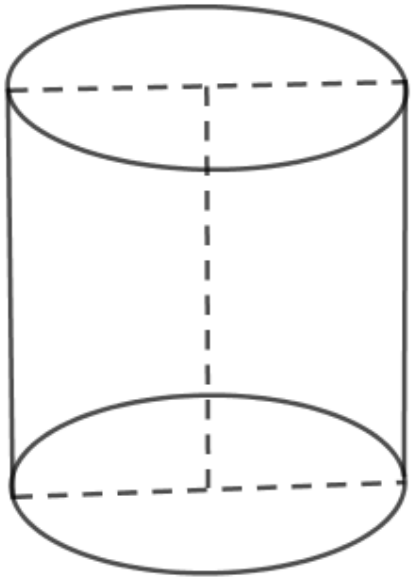
$\Rightarrow r=\sqrt{\frac{2}{3}}$

Tính thể tích khối trụ là: $V=\pi r^2h=2\pi r^3=2\pi\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\frac{4\pi\sqrt{6}}{9}$.

Câu 17. **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2018)** Mặt phẳng đi qua trục hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh a. Thể tích khối trụ đó bằng

A. πa^3. **B.** $\frac{\pi a^3}{2}$. **C.** $\frac{\pi a^3}{3}$. **D.** $\frac{\pi a^3}{4}$.

Lời giải



Ta có bán kính đáy $r=\frac{a}{2}$ và chiều cao $h=a$ nên thể tích khối trụ là

$V = 2\pi r^2 h = 2\pi.\frac{a^2}{4}.a = \frac{\pi a^3}{2}$.

Câu 18. **(SGD&ĐT BRVT - 2018)** Thiết diện qua trục của một hình trụ là hình vuông có cạnh là $2a$.Thể tích khối trụ được tạo nên bởi hình trụ này là:

A. $2\pi a^3$. **B.** $\frac{2\pi a^3}{3}$. **C.** $8\pi a^3$. **D.** $\frac{8\pi a^3}{3}$.

Lời giải

Ta có: $R = a$, $h = 2a$ nên thể tích khối trụ được tạo nên bởi hình trụ này là:

$V = \pi.R^2.h = \pi.a^2.2a = 2\pi.a^3$.

Câu 19. **(THPT Kinh Môn - Hải Dương - 2018)** Cho một khối trụ (S) có bán kính đáy bằng a. Biết thiết diện của hình trụ qua trục là hình vuông có chu vi bằng 8. Thể tích của khối trụ sẽ bằng

A. 8π. **B.** 4π. **C.** 2π. **D.** 16π.

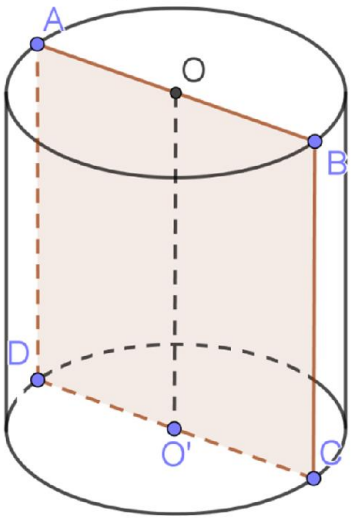
Lời giải

* Ta có chiều cao của khối trụ: $h = 2r = 2a$.
* Theo giả thiết ta có: $4.2a = 8 \Rightarrow a = 1$.
* Thể tích khối trụ: $V = \pi r^2 h = \pi.a^2.2a = 2\pi$.

Câu 20. **(THPT Gang Thép - 2018)**Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có AB và CD thuộc hai đáy của khối trụ. Biết $AB = 4a$, $AC = 5a$. Tính thể tích của khối trụ:

A. $V = 12\pi a^3$. **B.** $V = 16\pi a^3$. **C.** $V = 4\pi a^3$. **D.** $V = 8\pi a^3$.

Lời giải



Ta có bán kính khối trụ: $R = \frac{AB}{2} = 2a$

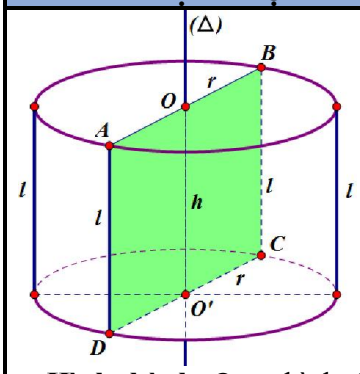
Xét ΔADC vuông tại D: $AD = \sqrt{AC^2 - DC^2} = \sqrt{(5a)^2 - (4a)^2} = 3a$

Thể tích khối trụ là: $V = \pi R^2 h = \pi(2a)^2.3a = 12\pi a^3$

Chuyên đề 22 KHỐI TRỤ

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SNH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM

Lý thuyết chung

MẶT TRỤ	Các yếu tố mặt trụ:	Một số công thức:
 ☛**Hình thành:** Quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh đường trung bình OO', ta có mặt trụ như hình bên.	▪ **Đường cao**: $\boxed{h = OO'}$. ▪ **Đường sinh**: $\boxed{l = AD = BC}$. Ta có: $\boxed{l = h}$. ▪ **Bán kính đáy**: $\boxed{r = OA = OB = O'C = O'D}$. ▪ **Trục** (Δ) là đường thẳng đi qua hai điểm O, O'. ▪ **Thiết diện qua trục**: Là hình chữ nhật $ABCD$.	▪ **Chu vi đáy**: $\boxed{p = 2\pi r}$. ▪ **Diện tích đáy**: $\boxed{S_đ = \pi r^2}$. ▪ **Thể tích khối trụ**: $\boxed{V = h.S_đ = h.\pi r^2}$. ▪ **Diện tích xung quanh**: $\boxed{S_{xq} = 2\pi r.h}$. ▪ **Diện tích toàn phần**: $\boxed{S_{tp} = S_{xq} + 2S_đ = 2\pi r.h + 2\pi r^2}$.

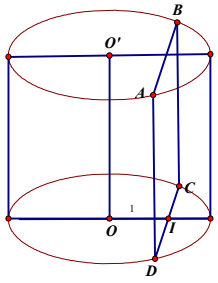
Dạng 1. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, chiều cao, bán kính đáy, thiết diện

Câu 1. **(Mã 103 - 2019)** Cho hình trụ có chiều cao bằng $3\sqrt{2}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng $12\sqrt{2}$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $6\sqrt{10}\pi$. **B.** $6\sqrt{34}\pi$. **C.** $3\sqrt{10}\pi$. **D.** $3\sqrt{34}\pi$.

Lời giải

Chọn A



Ta có:

$S_{ABCD} = 12\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.CD$

$\Rightarrow CD = 4$

$\Rightarrow CI = 2$

$\Rightarrow CO = \sqrt{CI^2 + IO^2} = \sqrt{5} = r$

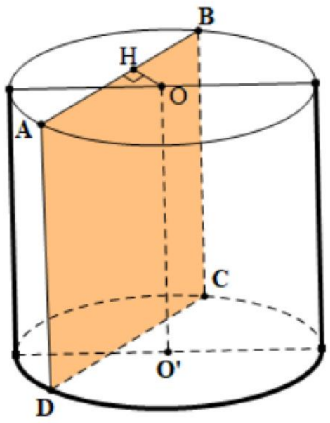
$S_{xq} = 2\pi rl = 6\sqrt{10}\pi$

Câu 2. **(Mã 101 - 2019)** Cho hình trụ có chiều cao bằng $5\sqrt{3}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 30. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $10\sqrt{3}\pi$. **B.** $5\sqrt{39}\pi$. **C.** $20\sqrt{3}\pi$. **D.** $10\sqrt{39}\pi$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai đáy và $ABCD$ là thiết diện song song với trục với $A,B\in(O)$; $C,D\in(O')$. Gọi H là trung điểm của $AB\Rightarrow OH=d\left(OO',(ABCD)\right)=1$.

Vì $S_{ABCD}=30\Leftrightarrow AB.BC=30\Rightarrow AB=\dfrac{30}{5\sqrt{3}}=2\sqrt{3}\Rightarrow HA=HB=\sqrt{3}$.

Bán kính của đáy là $r=\sqrt{OH^2+HA^2}=\sqrt{3+1}=2$.

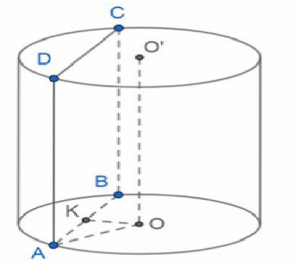
Diện tích xung quanh của hình trụ bằng $S_{xq}=2\pi rh=2\pi.2.5\sqrt{3}=20\sqrt{3}\pi$.

Câu 3. **(Mã 102 - 2019)** Cho hình trụ có chiều cao bằng $4\sqrt{2}$. Cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $\sqrt{2}$, thiết diện thu được có diện tích bằng 16. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $16\sqrt{2}\pi$. **B.** $8\sqrt{2}\pi$. **C.** $12\sqrt{2}\pi$. **D.** $24\sqrt{2}\pi$.

Lời giải

Chọn A



Cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng song song với trục, ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ (với AB là dây cung của hình tròn đáy tâm O).

Do hình trụ có chiều cao là $h=OO'=4\sqrt{2}\Rightarrow$ hình trụ có độ dài đường sinh $l=AD=4\sqrt{2}$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng $AB.CD=16\Rightarrow AB=\dfrac{16}{AD}=\dfrac{16}{4\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

Gọi K là trung điểm đoạn AB thì $OK\perp AB$, lại có mp$(ABCD)$ vuông góc với mặt phẳng đáy của hình trụ $\Rightarrow OK\perp$ mp$(ABCD)\Rightarrow$ khoảng cách giữa OO' và mp$(ABCD)$ là $OK=\sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông AOK $R=OA=\sqrt{OK^2+AK^2}=\sqrt{OK^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=2$.

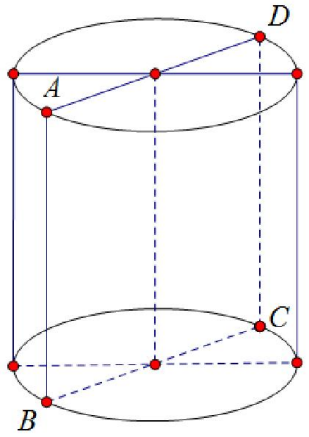
Diện tích xung quanh của hình trụ là $S=2\pi Rl=2\pi.2.4\sqrt{2}=16\pi\sqrt{2}$.

Câu 4. Cắt hình trụ (T) bằng một mặt phẳng đi qua trục được thiết diện là một hình chữ nhật có diện tích bằng $30cm^2$ và chu vi bằng $26\ cm$. Biết chiều dài của hình chữ nhật lớn hơn đường kính mặt đáy của hình trụ (T). Diện tích toàn phần của (T) là:

A. $23\pi\left(cm^2\right)$. **B.** $\frac{23\pi}{2}\left(cm^2\right)$. **C.** $\frac{69\pi}{2}\left(cm^2\right)$. **D.** $69\pi\left(cm^2\right)$.

Lời giải

Chọn C



Gọi h,r lần lượt là đường cao và bán kính đáy của hình trụ (T). Thiết diện của mặt phẳng và hình trụ (T) là hình chữ nhật $ABCD$. Khi đó theo giả thiết ta có

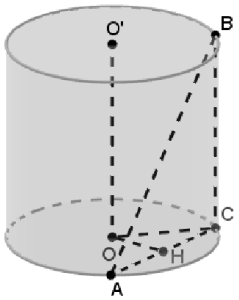
$$\begin{cases} h>2r \\ S_{ABCD}=h.2r=30 \\ C_{ABCD}=2(h+2r)=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h>2r \\ hr=15 \\ h+2r=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h>2r \\ h=13-2r \\ -2r^2+15r-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h>2r \\ h=13-2r \\ \left[\begin{array}{l} r=5\Rightarrow h=3(l) \\ r=\frac{3}{2}\Rightarrow h=10(TM) \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy $S_{TP}=S_{XQ}+2S_{\bullet}=2\pi rh+2\pi r^2=2\pi.\frac{3}{2}.10+2\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{69\pi}{2}\left(cm^2\right)$.

Câu 5. Một hình trụ có bán kính đáy bằng $50\,\text{cm}$ và có chiều cao là $50\,\text{cm}$. Một đoạn thẳng AB có chiều dài là $100\,\text{cm}$ và có hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy. Tính khoảng cách d từ đoạn thẳng đó đến trục hình trụ.

A. $d=50\,\text{cm}$. **B.** $d=50\sqrt{3}\,\text{cm}$. **C.** $d=25\,\text{cm}$. **D.** $d=25\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Lời giải



Qua B kẻ đường thẳng song song với OO' cắt đường tròn đáy tại C.

$OO' // BC \Rightarrow OO' // (ABC) \Rightarrow d(OO', AB) = d(OO', (ABC)) = d(O, (ABC)) = OH = d$. ($H$ là trung điểm của đoạn thẳng AC).

$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 50\sqrt{3}$ cm.

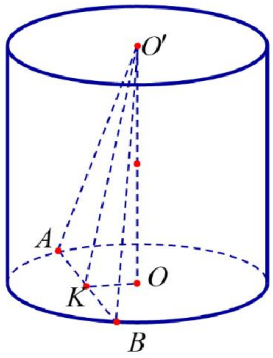
Vậy $d = OH = \sqrt{OC^2 - HC^2} = 25$ cm.

Câu 6. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Một hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai đường tròn (O,R) và (O',R). Biết rằng tồn tại dây cung AB của đường tròn (O,R) sao cho tam giác $O'AB$ đều và góc giữa hai mặt phẳng $(O'AB)$ và mặt phẳng chứa đường tròn (O,R) bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ đã cho.

A. $4\pi R^2$ **B.** $2\sqrt{3}\pi R^2$ **C.** $\frac{3\sqrt{7}}{7}\pi R^2$ **D.** $\frac{6\sqrt{7}}{7}\pi R^2$

Lời giải

Chọn D



Gọi K là trung điểm AB, đặt $AB = 2a$.

Ta có : $AB \perp OK$ và $AB \perp OO'$ nên $\widehat{OKO'} = 60° \Rightarrow O'K = 2OK \Rightarrow O'K^2 = 4OK^2$

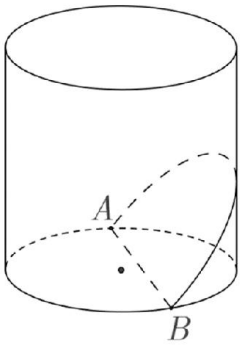
$\Rightarrow 3a^2 = 4(R^2 - a^2) \Rightarrow a^2 = \frac{4R^2}{7}$

Mặt khác : $OO'^2 = O'B^2 - OB^2 = 4a^2 - R^2 = 4.\frac{4R^2}{7} - R^2 = \frac{9R^2}{7} \Rightarrow O'O = \frac{6\sqrt{7}\pi R}{7}$

Vậy diện tích xung quanh hình trụ đã cho là : $S_{xq} = 2\pi Rl = \frac{6\sqrt{7}\pi R^2}{7}$.

Câu 7. **(Chuyên Sơn La 2019)** Cho khối trụ có bán kính đáy bằng $4(cm)$ và chiều cao $5(cm)$. Gọi AB là một dây cung đáy dưới sao cho $AB = 4\sqrt{3}(cm)$. Người ta dựng mặt phẳng (P) đi qua hai điểm

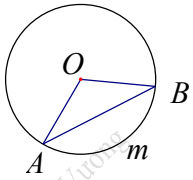
A, B và tạo với mặt phẳng đáy hình trụ một góc 60° như hình vẽ. Tính diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (P).



A. $\dfrac{8\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{3}\left(cm^2\right)$. **B.** $\dfrac{4\left(4\pi-\sqrt{3}\right)}{3}\left(cm^2\right)$.

C. $\dfrac{4\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{3}\left(cm^2\right)$. **D.** $\dfrac{8\left(4\pi-\sqrt{3}\right)}{3}\left(cm^2\right)$.

Lời giải



Gọi S là diện tích thiết diện, S' là diện tích hình chiếu của thiết diện lên mặt phẳng đáy. Khi đó $S'=S.\cos 60°$.

Ta có $AB=4\sqrt{3}\Rightarrow \cos\widehat{AOB}=\dfrac{OA^2+OB^2-AB^2}{2.OA.OB}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow \widehat{AOB}=120°$

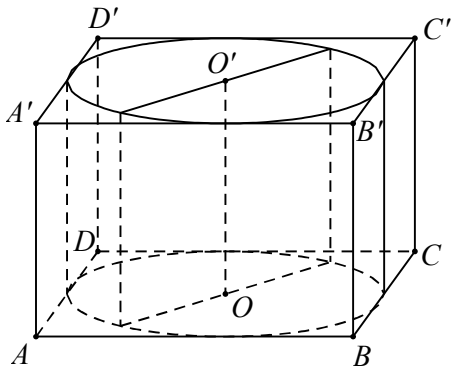
$$\Rightarrow \begin{cases} S_{OAB}=\dfrac{1}{2}OA.OB.\sin 120°=4\sqrt{3} \\ S_{OAmB}=\dfrac{1}{3}\pi.OA^2=\dfrac{16\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow S'=S_{OAmB}-S_{OAB}=\frac{4\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{3}$$

$$\Rightarrow S=\frac{S'}{\cos 60°}=\frac{8\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{3}.$$

Câu 8. **(Toán Học Và Tuổi Trẻ 2018)** Cho hình lập phương có cạnh bằng 40 cm và một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích toàn phần của hình lập phương và diện tích toàn phần của hình trụ. Tính $S=S_1+S_2$ $\left(\text{cm}^2\right)$.

A. $S=4\left(2400+\pi\right)$. **B.** $S=2400\left(4+\pi\right)$. **C.** $S=2400\left(4+3\pi\right)$. **D.** $S=4\left(2400+3\pi\right)$.

Lời giải



Ta có: $S_1 = 6.40^2 = 9600$.

Bán kính đường tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương là: $r = 20$ cm; hình trụ có đường sinh $h = 40$ cm

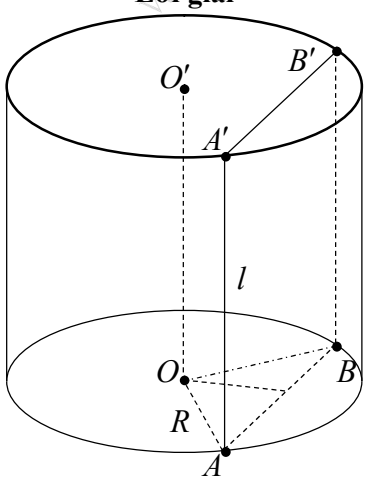
Diện tích toàn phần của hình trụ là: $S_2 = 2.\pi.20^2 + 2\pi.20.40 = 2400\pi$.

Vậy: $S = S_1 + S_2 = 9600 + 2400\pi = 2400(4+\pi)$.

Câu 9. **(Chuyên Quốc Học Huế 2018)** Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 4π, thiết diện qua trục là hình vuông. Một mặt phẳng (α) song song với trục, cắt hình trụ theo thiết diện là tứ giác $ABB'A'$, biết một cạnh của thiết diện là một dây cung của đường tròn đáy của hình trụ và căng một cung $120°$. Tính diện tích thiết diện $ABB'A'$.

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải



Gọi R, h, l lần lượt là bán kính, chiều cao, đường sinh của hình trụ.

Ta có $S_{xq} = 4\pi \Leftrightarrow 2\pi.R.l = 4\pi \Leftrightarrow R.l = 2$.

Giả sử AB là một dây cung của đường tròn đáy của hình trụ và căng một cung $120°$.

Ta có $ABB'A'$ là hình chữ nhật có $AA' = h = l$.

Xét tam giác OAB cân tại O, $OA = OB = R$, $\widehat{AOB} = 120° \Rightarrow AB = R\sqrt{3}$.

$S_{ABB'A'} = AB.AA' = R\sqrt{3}.l = R.l\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

Câu 10. **(Chuyên Lương Thế Vinh - Đồng Nai - 2018)** Ba chiếc bình hình trụ cùng chứa 1 lượng nước như nhau, độ cao mực nước trong bình II gấp đôi bình I và trong bình III gấp đôi bình II. Chọn nhận xét đúng về bán kính đáy r_1, r_2, r_3 của ba bình I, Ox, III.

A. r_1, r_2, r_3 theo thứ tự lập thành cấp số nhân công bội 2.

B. r_1, r_2, r_3 theo thứ tự lập thành cấp số nhân công bội $\frac{1}{2}$.

C. r_1, r_2, r_3 theo thứ tự lập thành cấp số nhân công bội $\sqrt{2}$.

D. r_1, r_2, r_3 theo thứ tự lập thành cấp số nhân công bội $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Gọi V_1, V_2, V_3 lần lượt là thể tích của bình I, II, III.

Ta có $V_1 = V_2 \Leftrightarrow \pi r_1^2 h_1 = \pi r_2^2 h_2 \Leftrightarrow r_1^2 h_1 = r_2^2 2h_1 \Rightarrow r_2 = \frac{r_1}{\sqrt{2}}\ (1)$.

$V_2 = V_3 \Leftrightarrow \pi r_2^2 h_2 = \pi r_3^2 h_3 \Leftrightarrow r_2^2 h_2 = r_3^2 2h_2 \Rightarrow r_3 = \frac{r_2}{\sqrt{2}}\ (2)$.

Từ (1) và (2) ta có r_1, r_2, r_3 theo thứ tự lập thành cấp số nhân công bội $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 11. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R và chiều cao bằng $\frac{3R}{2}$. Mặt phẳng (α) song song với trục của hình trụ và cách trục một khoảng bằng $\frac{R}{2}$. Tính diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (α).

A. $\frac{2R^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{3R^2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{2R^2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Nguyễn Bảo Vương

Thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (α) là hình chữ nhật $ABCD$ với $BC = \frac{3R}{2}$.

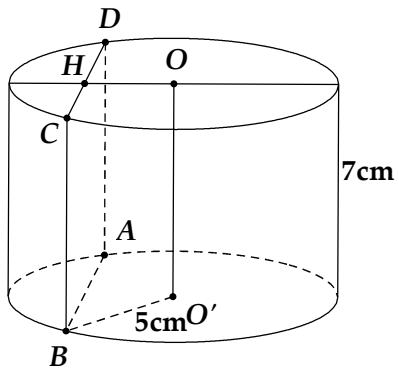
Gọi H là trung điểm AB, ta có $AH = \frac{R}{2} \Rightarrow AB = 2HB = 2\sqrt{R^2 - AH^2} = R\sqrt{3}$.

Vậy diện tích thiết diện là: $S = AB.CD = R\sqrt{3}.\frac{3R}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

Câu 12. **(THPT Hải An - Hải Phòng - 2018)** Cho hình trụ có bán kính đáy bằng $5\,\text{cm}$ và khoảng cách giữa hai đáy là $7\,\text{cm}$. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục $3\,\text{cm}$. Tính diện tích S của thiết diện được tạo thành.

A. $55\,\text{cm}^2$. **B.** $56\,\text{cm}^2$. **C.** $53\,\text{cm}^2$. **D.** $46\,\text{cm}^2$.

Lời giải



Gọi thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$, H là trung điểm CD.

Ta có: $\begin{cases} OH \perp CD \\ OH \perp BC \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABCD) \Rightarrow d\left(OO';(ABCD)\right) = d\left(O;(ABCD)\right) = OH = 3cm$.

$\Rightarrow HC = HD = \sqrt{OC^2 - OH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4\,\text{cm}$.

$\Rightarrow AB = CD = 8\,\text{cm}$.

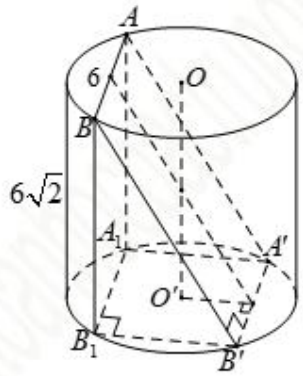
$\Rightarrow S_{ABCD} = AB.BC = 8.7 = 56\,\text{cm}^2$.

Câu 13. **(Chuyên Hạ Long - 2018)** Cho hình trụ có chiều cao bằng $6\sqrt{2}\,cm$. Biết rằng một mặt phẳng không vuông góc với đáy và cắt hai mặt đáy theo hai dây cung song song AB, $A'B'$ mà $AB = A'B' = 6cm$, diện tích tứ giác $ABB'A'$ bằng $60\,cm^2$. Tính bán kính đáy của hình trụ.

A. $5\,cm$. **B.** $3\sqrt{2}\,cm$. **C.** $4\,cm$. **D.** $5\sqrt{2}\,cm$.

Lời giải

Gọi O, O' là tâm các đáy hình trụ (hình vẽ).



Vì $AB = A'B'$ nên $(ABB'A')$ đi qua trung điểm của đoạn OO' và $ABB'A'$ là hình chữ nhật.

Ta có $S_{ABB'A'} = AB.AA' \Leftrightarrow 60 = 6.AA' \Rightarrow AA' = 10(cm)$.

Gọi A_1, B_1 lần lượt là hình chiếu của A, B trên mặt đáy chứa A' và B'

$\Rightarrow A'B'B_1A_1$ là hình chữ nhật có $A'B' = 6(cm)$,

$B_1B' = \sqrt{BB'^2 - BB_1^2} = \sqrt{10^2 - \left(6\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{7}(cm)$

Gọi R là bán kính đáy của hình trụ, ta có $2R = A'B_1 = \sqrt{B_1B'^2 + A'B'^2} = 8 \Rightarrow R = 4(cm)$.

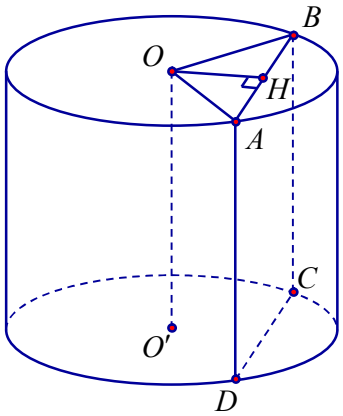
Câu 14. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Một hình trụ có bán kính đáy $r = 5\,\text{cm}$ và khoảng cách giữa hai đáy $h = 7\,\text{cm}$. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục $3\,\text{cm}$. Diện tích của thiết diện được tạo thành là:

A. $S = 56\left(\text{cm}^2\right)$. **B.** $S = 55\left(\text{cm}^2\right)$. **C.** $S = 53\left(\text{cm}^2\right)$. **D.** $S = 46\left(\text{cm}^2\right)$.

Lời giải

Gọi O, O' là tâm của hai đáy của hình trụ và (P) là mặt phẳng song song với trục và cách trục OO' một khoảng $3\,\text{cm}$.

Mp(P) cắt hai hình tròn đáy $(O),(O')$ theo hai dây cung lần lượt là AB, CD và cắt mặt xung quanh theo hai đường sinh là AD, BC. Khi đó $ABCD$ là hình chữ nhật.



Gọi H là trung điểm của AB. Ta có $OH \perp AB; OH \perp AD \Rightarrow OH \perp (ABCD)$

$\Rightarrow d(OO', (P)) = d(O, (ABCD)) = OH = 3\text{cm}$.

Khi đó: $AB = 2AH = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 2\sqrt{5^2 - 3^2} = 8$; $AD = OO' = h = 7\text{cm}$.

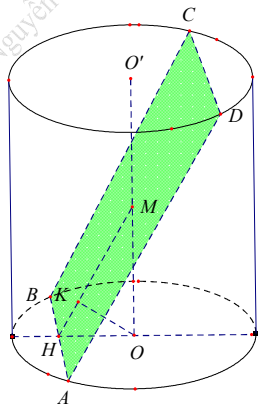
Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là: $S_{ABCD} = AB.AD = 56(cm^2)$.

Câu 15. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), chiều cao $2R$ và bán kính đáy R. Một mặt phẳng (α) đi qua trung điểm của OO' và tạo với OO' một góc $30°$. Hỏi (α) cắt đường tròn đáy theo một dây cung có độ dài bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{4R}{3\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{2R}{3}$. **D.** $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Nguyễn Bảo Vương



Gọi M là trung điểm của OO'. Gọi A, B là giao điểm của mặt phẳng (α) và đường tròn (O) và H là hình chiếu của O trên AB $\Rightarrow AB \perp (MHO)$.

Trong mặt phẳng (MHO) kẻ $OK \perp MH$, $(K \in MH)$ khi đó góc giữa OO' và mặt phẳng (α) là góc $\widehat{OMK} = 30°$.

Xét tam giác vuông MHO ta có $HO = OM \tan 30° = R \tan 30° = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác vuông AHO ta có $AH=\sqrt{OA^2-OH^2}=\sqrt{R^2-\frac{R^2}{3}}=\frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Do H là trung điểm của AB nên $AB=\frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Câu 16. **(THPT Lê Xoay - 2018)** Một cốc nước hình trụ có chiều cao 9cm, đường kính 6cm.Mặt đáy phẳng dày 1cm, thành cốc dày $0,2\text{cm}$. Đổ vào cốc 120 ml nước sau đó thả vào cốc 5 viên bi có đường kính 2cm. Mặt nước cách mép cốc gần nhất với giá trị bằng

A. $3,67(\text{cm})$. **B.** $3,08(\text{cm})$. **C.** $2,28(\text{cm})$. **D.** $2,62(\text{cm})$.

Lời giải

Thể tích của cốc nước là: $V=.\pi.(2,8)^2.8=62,72\pi(\text{cm}^3)$.

Thể tích của 5 viên bi là: $V_1=5.\frac{4}{3}.\pi.1^3=\frac{20}{3}.\pi(\text{cm}^3)$.

Thể tích còn lại sau khi đổ vào cốc 120 ml nước và thả vào cốc 5 viên bi là: $V_2=V-V_1-120=62,72\pi-\frac{20}{3}.\pi-120\approx 56,10(\text{cm}^3)$.

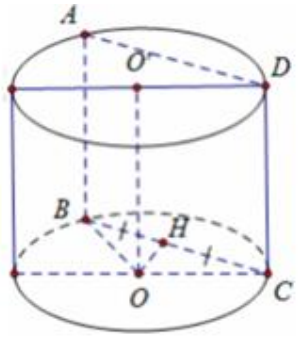
Chiều cao phần còn lại là: $h=\frac{V_2}{\pi.(2,8)^2}\approx\frac{56,10}{\pi.(2,8)^2}\approx 2,28(\text{cm})$.

Câu 17. **(Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R và chiều cao bằng $\frac{3R}{2}$. Mặt phẳng (α) song song với trục của hình trụ và cách trục một khoảng bằng $\frac{R}{2}$. Diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (α) là:

A. $\frac{3\sqrt{2}R^2}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}R^2}{3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{2}R^2}{3}$.

Lời giải

Chọn B



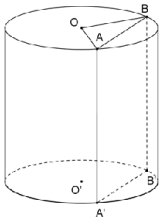
Giả sử thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ như hình vẽ.

Gọi H là trung điểm của BC suy ra $OH\perp BC$ suy ra $d(O;BC)=\frac{R}{2}$

Khi đó $BC=2HB=2\sqrt{OB^2-OH^2}=2\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2}=R\sqrt{3}$

Suy ra $S_{ABCD} = BC.AB = R\sqrt{3}.\dfrac{3R}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{2}$.

Câu 18. **(Sở Bình Phước - 2020)** Một hình trụ có diện tích xung quanh là 4π, thiết diện qua trục là một hình vuông. Một mặt phẳng (α) song song với trục, cắt hình trụ theo thiết diện $ABB'A'$, biết một cạnh của thiết diện là một dây của đường tròn đáy của hình trụ và căng một cung 120^0. Diện tích của thiết diện $ABB'A'$ bằng



A. $2\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình trụ lần lượt là r, h.

Theo đề ra ta có: $2\pi rh = 4\pi \Rightarrow rh = 2\,(1)$.

Không giảm tính tổng quát, ta giả sử AB là dây của đường tròn đáy của hình trụ. Gọi O là tâm của đáy trên của hình trụ. Theo bài ra ta có: $\widehat{AOB} = 120^0$.

Áp dụng định lý côsin trong tam giác OAB, ta có: $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA.OB.\cos\left(\widehat{AOB}\right)$

$\Rightarrow AB^2 = r^2 + r^2 - 2r^2.\cos\left(120^0\right) = 3r^2 \Rightarrow AB = r\sqrt{3}$ (2).

Mặt khác, do mặt phẳng (α) song song với trục nên $ABB'A'$ là hình chữ nhật và $AA' = h\,(3)$.

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra: $S_{ABB'A'} = AB.AA' = r\sqrt{3}.h = rh\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

Câu 19. **(Liên trường Nghệ An - 2020)** Một sợi dây (không co giản) được quấn đối xứng đúng 10 vòng quanh một ống trụ tròn đều có bán kính $R = \dfrac{2}{\pi}cm$ (Như hình vẽ)

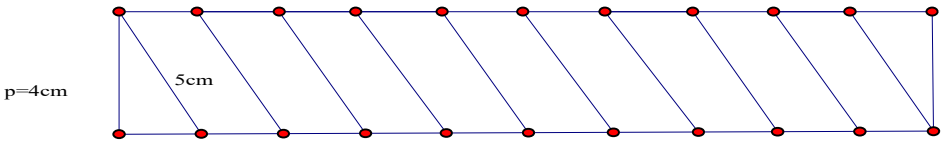


Biết rằng sợi dây dài $50cm$. Hãy tính diện tích xung quanh của ống trụ đó.

A. $80cm^2$. **B.** $100cm^2$. **C.** $60cm^2$. **D.** $120cm^2$.

Lời giải

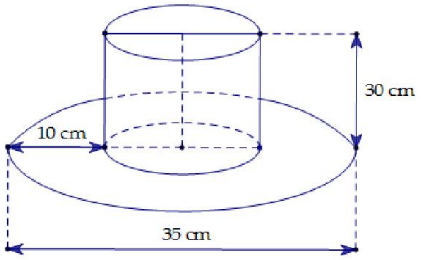
Khi trải phẳng ống trụ tròn đều ta được một hình chữ nhật có chiều rộng là chu vi của mặt đáy còn chiều dài là chiều dài của trụ, mỗi vòng quấn của dây dài $5cm$ là đường chéo của hình chữ nhật có kích thước lần lượt bằng chu vi đáy trụ và $\dfrac{1}{10}$ chiều dài trụ(hình vẽ).



Gọi chiều dài trụ là $l(cm)$,theo định lí Pitago ta có $\sqrt{5^2 - \left(2.\dfrac{2}{\pi}\pi\right)^2} = \dfrac{l}{10} \Leftrightarrow l = 30\,(\text{cm})$.

Vậy diện tích xung quanh của trụ là: $S_{xq} = 2.\dfrac{2}{\pi}.\pi.30 = 120\left(cm^2\right)$.

Câu 20. **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật với kích thước như hình vẽ. Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không tính viền, mép, phần thừa).



A. $750,25\pi\left(cm^2\right)$. **B.** $756,25\pi\left(cm^2\right)$. **C.** $700\pi\left(cm^2\right)$. **D.** $700\pi\left(cm^2\right)$.

Lời giải

Chọn B

Bán kính hình trụ của cái mũ là $r=\dfrac{35-10-10}{2}=\dfrac{15}{2}\left(cm\right)$.

Đường cao hình trụ của cái mũ là $30\ cm$.

Diện tích xung hình trụ là: $S_{xq}=2\pi rl=2.\pi.\dfrac{15}{2}.30=450\pi\left(cm^2\right)$.

Diện tích vành mũ là: $S_v=\pi\left(\dfrac{35}{2}\right)^2-S_d\left(cm^2\right)$.

Vậy tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không tính viền, mép, phần thừa) là:

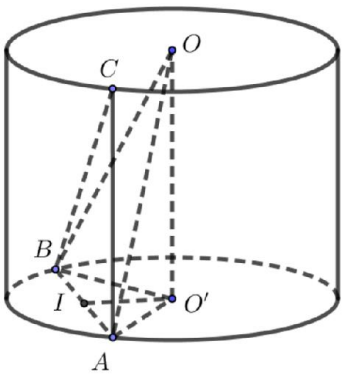
$S=S_{xq}+S_d+S_v=450\pi+\left(\dfrac{35}{2}\right)^2\pi=756,25.\pi\left(cm^2\right)$.

Câu 21. **(Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Một khối trụ có bán kính đáy $r=2a$. O,O' lần lượt là tâm đường tròn đáy. Một mặt phẳng song song với trục và cách trục $\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$, cắt đường tròn $\left(O'\right)$ tại hai điểm A,B. Biết thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ bằng $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{4}$. Độ dài đường cao của hình trụ bằng

A. a. **B.** $6a$. **C.** $3a$. **D.** $2a$.

Lời giải

Chọn C



Vẽ đường sinh AC, khi đó mặt phẳng $\left(ABC\right)$ song song với OO' và cách OO' một khoảng $\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

Gọi I là trung điểm AB, ta có $d\left(OO',\left(ABC\right)\right)=d\left(O',\left(ABC\right)\right)=O'I=\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

Bán kính $O'A=2a$ suy ra $BA=2IA=2\sqrt{O'A^2-O'I^2}=2\sqrt{4a^2-\dfrac{15a^2}{4}}=a$.

Thể tích tứ diện $OO'AB$ bằng $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{4}$ nên ta

có : $\dfrac{1}{6}.OO'.IO'.AB=\dfrac{a^3\sqrt{15}}{4}\Leftrightarrow\dfrac{1}{6}.OO'.\dfrac{a\sqrt{15}}{2}.a=\dfrac{a^3\sqrt{15}}{4}\Leftrightarrow OO'=3a$.

Vậy hình trụ có chiều cao $OO'=3a$.

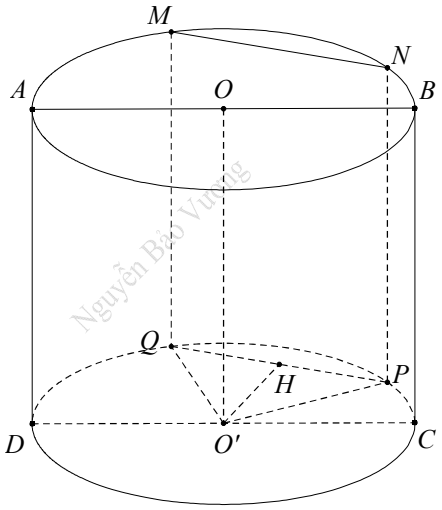
Dạng 2. Thể tích

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hình trụ có chiều cao bằng $6a$. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, thiết diện thu được là một hình vuông. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

A. $216\pi a^3$. **B.** $150\pi a^3$. **C.** $54\pi a^3$. **D.** $108\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D



Lấy 2 điểm M, N lần lượt nằm trên đường tron tâm O sao cho $MN=6a$.

Từ M, N lần lượt kẻ các đường thẳng song song với trục OO', cắt đường tròn tâm O' tại Q, P.

Thiết diện ta thu được là hình vuông $MNPQ$ có cạnh bằng $6a$.

Gọi H là trung điểm của PQ. Suy ra $OH\perp PQ$.

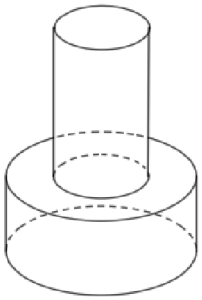
Vì $OO'\parallel\left(MNPQ\right)$ nên ta có $d\left(OO',\left(MNPQ\right)\right)=d\left(O',\left(MNPQ\right)\right)=O'H$.

Từ giả thiết, ta có $O'H=3a$. Do đó $\Delta O'HP$ là tam giác vuông cân tại H.

Suy ra bán kính đường tròn đáy của hình trụ là $O'P=\sqrt{O'H^2+HP^2}=3a\sqrt{2}$.

Vậy thể tích của khối trụ cần tìm là: $V=6a.\pi.\left(3a\sqrt{2}\right)^2=108\pi a^3$.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2019)** Một khối đồ chơi gồm hai khối trụ $\left(H_1\right),\left(H_2\right)$ xếp chồng lên nhau, lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1,h_1,r_2,h_2 thỏa mãn $r_2=\dfrac{1}{2}r_1,h_2=2h_1$ (tham khảo hình vẽ). Biết rằng thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng $30cm^3$, thể tích khối trụ $\left(H_1\right)$ bằng



A. $24cm^3$ **B.** $15cm^3$ **C.** $20cm^3$ **D.** $10cm^3$

Lời giải

Chọn C

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối trụ $(H_1),(H_2)$

$V_2 = \pi r_2^2 h_2 = \pi\left(\frac{1}{2}r_1\right)^2 2h_1 = \frac{V_1}{2}$

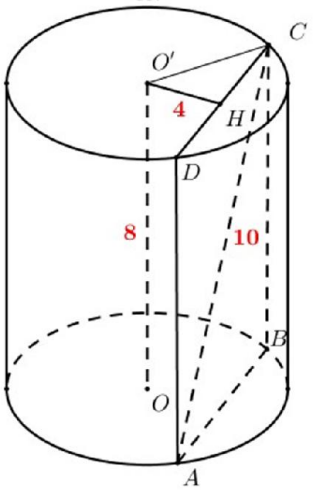
$\Rightarrow V_1 = 2V_2$ mà $V_1 + V_2 = 30 \Rightarrow V_1 = 20$

Câu 3. **(Chuyên Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2020)** Cho hình trụ có chiều cao bằng $8a$. Biết hai điểm A, C lần lượt nằm trên hai đáy thỏa $AC = 10a$, khoảng cách giữa AC và trục của hình trụ bằng $4a$. Thể tích của khối trụ đã cho là

A. $128\pi a^3$. **B.** $320\pi a^3$. **C.** $80\pi a^3$. **D.** $200\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $(O),(O')$ lần lượt là hai đường tròn đáy. $A \in (O), C \in (O')$.

Dựng AD, CB lần lượt song song với OO' ($D \in (O'), B \in (O)$. Dễ dàng có $ABCD$ là hình chữ nhật.

Do $AC = 10a, AD = 8a \Rightarrow DC = 6a$.

Gọi H là trung điểm của DC.

$\begin{cases} O'H \perp DC \\ O'H \perp AD \end{cases} \Rightarrow O'H \perp (ABCD)$.

Ta có $OO' // (ABCD) \Rightarrow d(OO', AC) = d(OO', (ABCD)) = O'H = 4a$.

$O'H = 4a, CH = 3a \Rightarrow R = O'C = 5a$.

Vậy thể tích của khối trụ là $V = \pi R^2 h = \pi(5a)^2 8a = 200\pi a^3$.

Câu 4. **(Sở Hà Nội 2019)** Hỏi nếu tăng chiều cao của khối trụ lên 2 lần, bán kính của nó lên 3 lần thì thể tích của khối trụ mới sẽ tăng bao nhiêu lần so với khối trụ ban đầu?

A. 36. **B.** 6. **C.** 18. **D.** 12.

Lời giải

Giả sử ban đầu khối trụ có chiều cao h_1 và bán kính r_1. Khi đó, khối trụ có thể tích là $V_1 = \pi r_1^2 h$.

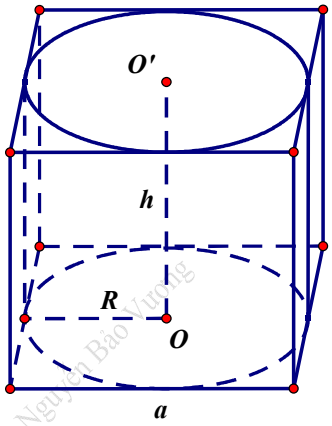
Sau khi tăng chiều cao của khối trụ lên 2 lần, bán kính của nó lên 3 lần thì khối trụ có chiều cao $2h_1$ và bán kính $3r_1$. Khi đó, khối trụ mới có thể tích là $V_2 = \pi (3r_1)^2 .2h_1 = 18\pi r_1 h_1$.

Do vậy $\dfrac{V_2}{V_1} = 18$.

Câu 5. **(Chuyên ĐHSPHN - 2018)** Cần đẽo thanh gỗ hình hộp có đáy là hình vuông thành hình trụ có cùng chiều cao. Tỉ lệ thể tích gỗ cần phải đẽo đi ít nhất (tính gần đúng) là

A. 30%. **B.** 50%. **C.** 21%. **D.** 11%.

Lời giải



Để gỗ bị đẽo ít nhất thì hình hộp đó phải là hình hộp đứng.

Gọi h là chiều cao của hình hộp chữ nhật và R là bán kính đáy của hình trụ.

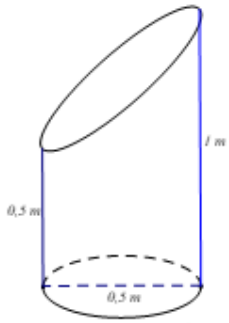
Do hình hộp chữ nhật và hình trụ có cùng chiều cao nên thể tích gỗ đẽo đi ít nhất khi và chỉ khi diện tích đáy của hình trụ lớn nhất (thể tích khối trụ lớn nhất). Suy ra $R = \dfrac{a}{2}$.

Gọi V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của khối hộp và thể tích của khối trụ có đáy lớn nhất.

Ta có: $V_1 = a^2.h$ và $V_2 = \pi R^2.h = \pi.\dfrac{a^2}{4}.h$.

Suy ra: $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{\pi.\dfrac{a^2}{4}.h}{a^2.h} = \dfrac{\pi}{4} \approx 78,54\%$. Vậy thể tích gỗ ít nhất cần đẽo đi là khoảng $21,46\%$.

Câu 6. Một khối gỗ hình trụ có đường kính $0,5\,\text{m}$ và chiều cao $1\,(\text{m})$. Người ta đã cắt khối gỗ, phần còn lại như hình vẽ bên có thể tích là V. Tính V.



A. $\frac{3\pi}{16}\left(\text{m}^3\right)$. **B.** $\frac{5\pi}{64}\left(\text{m}^3\right)$. **C.** $\frac{3\pi}{64}\left(\text{m}^3\right)$. **D.** $\frac{\pi}{16}\left(\text{m}^3\right)$.

Lời giải

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối gỗ ban đầu và thể tích khối gỗ bị cắt.

Thể tích của khối gỗ ban đầu là $V_1=\pi\left(\frac{0,5}{2}\right)^2.1=\frac{\pi}{16}\left(\text{m}^3\right)$.

Thể tích phần gỗ đã bị cắt đi là $V_2=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{0,5}{2}\right)^2.0,5=\frac{\pi}{64}\left(\text{m}^3\right)$.

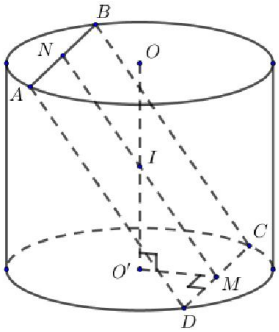
Thể tích khối gỗ còn lại và $V=V_1-V_2=\frac{\pi}{16}-\frac{\pi}{64}=\frac{3\pi}{64}\left(\text{m}^3\right)$.

Câu 7. **(Sở Hưng Yên - 2020)** Cho hình trụ có O,O' là tâm hai đáy. Xét hình chữ nhật $ABCD$ có A,B cùng thuộc (O) và C,D cùng thuộc (O') sao cho $AB=a\sqrt{3}$, $BC=2a$ đồng thời $(ABCD)$ tạo với mặt phẳng đáy hình trụ góc $60°$. Thể tích khối trụ bằng

A. $\pi a^3\sqrt{3}$. **B.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2\pi a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M,N lần lượt là trung điểm của CD,AB và I là trung điểm của OO'.

Suy ra góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt phẳng đáy là $\widehat{IMO'}=60°$.

Ta có $IM=\frac{1}{2}MN=\frac{1}{2}BC=a$.

Xét $\Delta IO'M$ vuông tại O, ta có $IO'=IM.\sin\widehat{IMO'}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow h=OO'=2IO'=a\sqrt{3}$;

$O'M = IM.\cos\widehat{IMO'} = \dfrac{a}{2}$.

Xét $\Delta O'MD$ vuông tại M, có $O'M = \dfrac{a}{2}, MD = \dfrac{1}{2}CD = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow r = O'D = \sqrt{O'M^2 + MD^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Rightarrow r = a$.

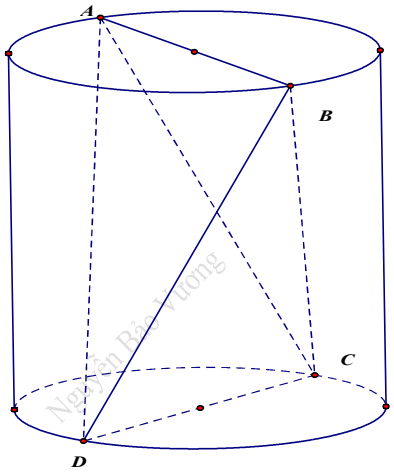
Vậy $V = \pi r^2 h = \pi a^3\sqrt{3}$.

Câu 8. **(Sở Hà Tĩnh - 2020)** Cho khối trụ có hai đáy là (O) và (O'). AB, CD lần lượt là hai đường kính của (O) và (O'), góc giữa AB và CD bằng $30°$, $AB = 6$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng 30. Thể tích khối trụ đã cho bằng

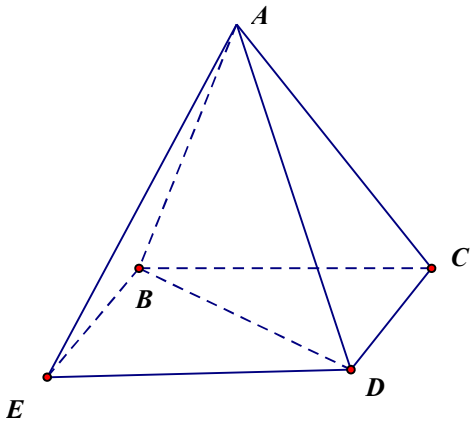
A. 180π. **B.** 90π. **C.** 30π. **D.** 45π.

Lời giải

Chọn B



Ta chứng minh: $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}AB.CD.d(AB,CD).\sin(AB,CD)$.



Lấy điểm E sao cho tứ giác $BCDE$ là hình bình hành.

Khi đó $(AB,CD) = (AB,BE) \Rightarrow \sin(AB,CD) = \sin(AB,BE)$.

$d(D,(ABE)) = d(AB,CD)$.

$V_{ABCD} = V_{ABDE} = \dfrac{1}{3}.d(D,(ABE)).S_{ABE} = \dfrac{1}{6}AB.CD.d(AB,CD).\sin(AB,CD)$

$V_{ABCD}=\frac{1}{6}AB.CD.d\left(AB,CD\right).\sin\left(AB,CD\right)\Rightarrow d\left(AB,CD\right)=\frac{6V_{ABCD}}{AB.CD.\sin 30^\circ}=\frac{180}{6.6.\frac{1}{2}}=10$.

Chiều cao của lăng trụ bằng $h=d\left(AB,CD\right)=10$.

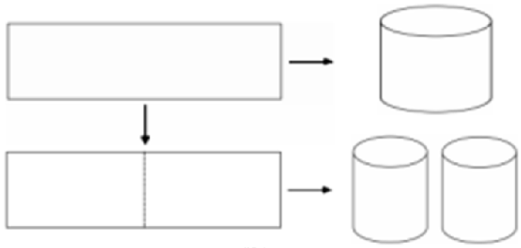
Thể tích lăng trụ: $V=S.h=\pi.3^2.10=90\pi$.

Câu 9. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $50\text{cm}\,\text{x}\,240\text{cm}$, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 50cm, theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):

• Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.

• Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



A. $\frac{V_1}{V_2}=1$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2}=2$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=4$.

Lời giải

Chọn C

Ở cách 1, thùng hình trụ có chiều cao $h=50\text{cm}$, chu vi đáy $C_1=240\text{cm}$ nên bán kính đáy $R_1=\frac{C_1}{2\pi}=\frac{120}{\pi}\text{cm}$. Do đó thể tích của thùng là $V_1=\pi R_1^2h$.

Ở cách 2, hai thùng đều có có chiều cao $h=50\text{cm}$, chu vi đáy $C_2=120\text{cm}$ nên bán kính đáy $R_1=\frac{C_2}{2\pi}=\frac{60}{\pi}\text{cm}$. Do đó tổng thể tích của hai thùng là $V_2=2\pi R_2^2h$.

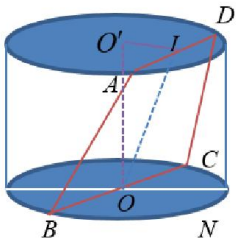
Vậy $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi R_1^2h}{2\pi R_2^2h}=\frac{1}{2}.\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2=\frac{1}{2}.\left(\frac{\frac{120}{\pi}}{\frac{60}{\pi}}\right)^2=2$.

Câu 10. **(Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Cho hình trụ có hai đáy là hình tròn tâm O và O', chiều cao $h=a\sqrt{3}$. Mặt phẳng đi qua tâm O và tạo với OO' một góc 30°, cắt hai đường tròn tâm O và O' tại bốn điểm là bốn đỉnh của một hình thang có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ và diện tích bằng $3a^2$. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **B.** $\sqrt{3}\pi a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{12}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử $ABCD$ là hình thang mà đề bài đề cập (BC đáy lớn, AD đáy nhỏ) và r là bán kính đáy của hình trụ.

Theo đề: $\begin{cases} BC = 2r \\ BC = 2AD \end{cases} \Rightarrow AD = r$

Kẻ $O'I \perp AD \Rightarrow AD \perp (OO'I) \Rightarrow (ABCD) \perp (OO'J)$

Suy ra góc giữa OO' và $(ABCD)$ là góc $\widehat{O'OI}$. Theo đề $\widehat{O'OI} = 30°$

$$\cos\widehat{O'OI} = \frac{OO'}{OI} \Leftrightarrow OI = \frac{OO'}{\cos 30°} = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2a$$

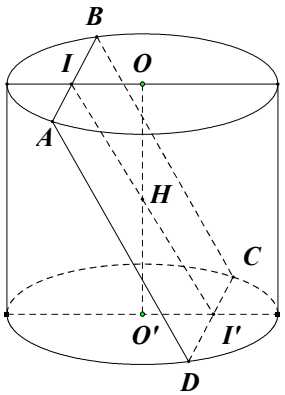
Ta có: $S_{ABCD} = \frac{(AD + BC).IO}{2} \Leftrightarrow 3a^2 = \frac{(r + 2r).2a}{2} \Leftrightarrow r = a$

Thể tích của khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi a^2 .a\sqrt{3} = \pi a^3\sqrt{3}$

Câu 11. **(THPT Nguyễn Huệ - Ninh Bình - 2018)** Cho hình trụ và hình vuông $ABCD$ có cạnh a. Hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất và hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thức hai, mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với đáy một góc $45°$. Khi đó thể tích khối trụ là

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{16}$. **D.** $\frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải



Gọi I, I' lần lượt là trung điểm của AB, CD; O, O' lần lượt là tâm đường tròn đáy của hình trụ (như hình vẽ); H là trung điểm của II'.

Khi đó H là trung điểm của OO' và góc giữa $(ABCD)$ tạo với đáy là $\widehat{HI'O} = 45°$.

Do $I'H = \frac{a}{2} \Rightarrow O'H = O'I' = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Khi đó $h = OO' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có: $r = O'C = \sqrt{O'I'^2 + I'C^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \dfrac{3\pi a^3\sqrt{2}}{16}$.

Dạng 3. Khối tròn xoay nội, ngoại tiếp khối đa diện

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 4. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có một đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác BCD và chiều cao bằng chiều cao của tứ diện $ABCD$.

A. $S_{xq} = 8\sqrt{3}\pi$ **B.** $S_{xq} = 8\sqrt{2}\pi$ **C.** $S_{xq} = \dfrac{16\sqrt{3}\pi}{3}$ **D.** $S_{xq} = \dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$

Lời giải

Chọn D

Bán kính đường tròn đáy hình trụ bằng một phần ba đường cao tam giác BCD

nên $r = \dfrac{1}{3}.\dfrac{4\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Chiều cao hình trụ bằng chiều cao hình chóp: $h = \sqrt{4^2 - \left(\dfrac{2}{3}.\dfrac{4\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{16 - \dfrac{16.3}{9}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

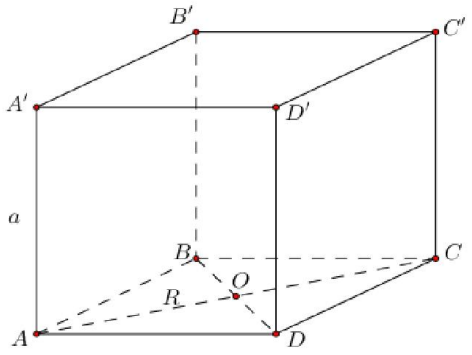
$S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi.\dfrac{2\sqrt{3}}{3}.\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2017)** Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng a.

A. $V = \dfrac{\pi a^3}{6}$ **B.** $V = \dfrac{\pi a^3}{2}$ **C.** $V = \dfrac{\pi a^3}{4}$ **D.** $V = \pi a^3$

Lời giải

Chọn B



Bán kính đường tròn đáy là $R = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; chiều cao $h = a$.

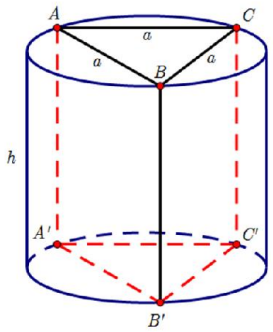
Vậy thể tích khối trụ là: $V = \pi R^2 h = \pi.\dfrac{a^2}{2}.a = \dfrac{\pi a^3}{2}$.

Câu 3. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

A. $V = 3\pi a^2 h$. **B.** $V = \pi a^2 h$. **C.** $V = \dfrac{\pi a^2 h}{9}$. **D.** $V = \dfrac{\pi a^2 h}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Khối trụ ngoại tiếp lăng trụ tam giác đều có hình tròn đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác đáy của lăng trụ, và chiều cao bằng chiều cao lăng trụ.

Tam giác đều cạnh a có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Vậy thể tích của khối trụ cần tìm là $V = h.S = h.\pi.\left(\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2 = \frac{\pi a^2 h}{3}$ (đvtt).

Câu 4. **(Sở Quảng Ninh 2019)** Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng $36\pi a^2$. Tính thể tích V của lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ.

A. $27\sqrt{3}a^3$. **B.** $24\sqrt{3}a^3$. **C.** $36\sqrt{3}a^3$. **D.** $81\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Ta có $S_{xq} = 36\pi a^2 = 2\pi Rh$.

Do thiết diện qua trục là hình vuông nên ta có $2R = h$.

Khi đó $h^2 = 36a^2$ hay $h = 6a$; $R = 3a$.

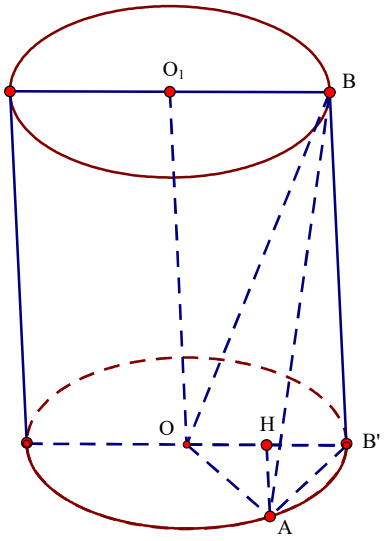
Diện tích của mặt đáy hình lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ là $B = 6.\frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{27a^2\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích V của lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ là $V = B.h = 81a^3\sqrt{3}$.

Câu 5. **(Chuyên KHTN 2019)** Cho hình trụ (T) chiều cao bằng $2a$, hai đường tròn đáy của (T) có tâm lần lượt là O và O_1, bán kính bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O_1 lấy điểm B sao cho $AB = \sqrt{5}a$. Thể tích khối tứ diện OO_1AB bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$

Lời giải



Kẻ đường sinh BB' và gọi H là trung điểm OB'.

Trong tam giác vuông ABB' có $BB' = OO_1 = 2a$ và $AB = a\sqrt{5}$ nên $AB' = \sqrt{AB^2 - BB'^2} = a$.

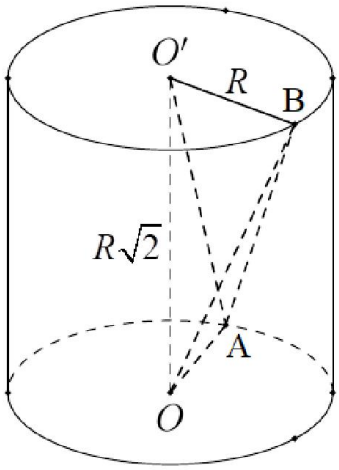
Tam giác OAB' có $OB' = OA = AB' = a$ nên OAB' là tam giác đều $\Rightarrow AH \perp OB'$, $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Ta có $\begin{cases} AH \perp OB' \\ AH \perp OO_1 \end{cases} \Rightarrow AH \perp (O_1OB) \Rightarrow$ Thể tích khối tứ diện $A.O_1OB$ là

$$V_{O_1OAB} = \frac{1}{3}.AH.S_{O_1OB} = \frac{1}{6}AH.O_1O.O_1B = \frac{1}{6}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.2a.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 6. **(THPT Ba Đình 2019)** Cho khối trụ có đáy là các đường tròn tâm (O), (O') có bán kính là R và chiều cao $h = R\sqrt{2}$. Gọi A, B lần lượt là các điểm thuộc (O) và (O') sao cho OA vuông góc với $O'B$. Tỉ số thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ với thể tích khối trụ là:

A. $\dfrac{2}{3\pi}$. **B.** $\dfrac{1}{3\pi}$. **C.** $\dfrac{1}{6\pi}$. **D.** $\dfrac{1}{4\pi}$.

Lời giải



Thể tích khối trụ $V_1 = \pi R^2.h = \pi R^2.R\sqrt{2} = \pi R^3\sqrt{2}$

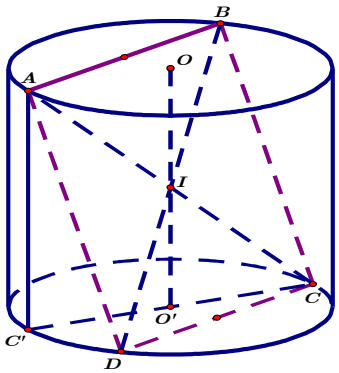
Khối tứ diện $BO'OA$ có BO' là đường cao và đáy là tam giác vuông $O'OA$, do đó thể tích khối tứ diện là $V_2 = \dfrac{1}{3}S_{O'OA}.O'B = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}OA\cdot OO'\cdot O'B = \dfrac{1}{6}R.R\sqrt{2}.R = \dfrac{\sqrt{2}}{6}R^3$

Vậy $\frac{V_2}{V_1}=\frac{R^3\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{1}{\pi R^3\sqrt{2}}=\frac{1}{6\pi}$.

Câu 7. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Một hình trụ có bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Một hình vuông $ABCD$ có đáy AB,CD là hai dây cung của hai đường tròn đáy và $(ABCD)$ không vuông góc với đáy. Diện tích hình vuông đó bằng

A. $\frac{5a^2}{4}$. **B.** $5a^2$. **C.** $\frac{5a^2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{5a^2}{2}$.

Lời giải



+ Gọi O,O' là tâm của 2 đường tròn đáy, I là trung điểm của OO'.

Do tính đối xứng nên I là trung điểm của AC,BD.

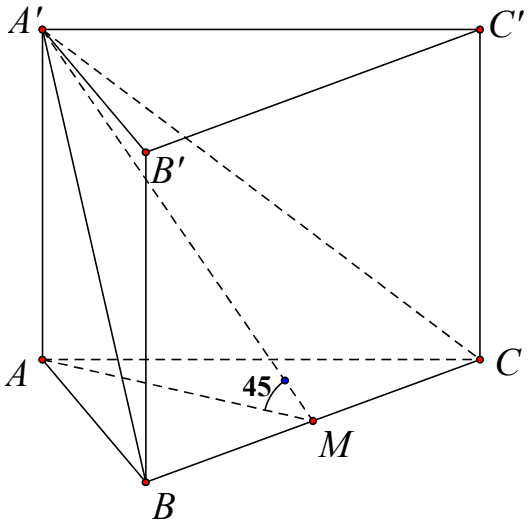
Kẻ đường kính $CC'\Rightarrow AC'=a;CC'=2a\Rightarrow AC=\sqrt{C'A^2+C'C^2}=a\sqrt{5}$.

+ Do đó $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC^2=\frac{5a^2}{2}$.

Câu 8. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $45°$, diện tích tam giác $A'BC$ bằng $a^2\sqrt{6}$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{4\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $2\pi a^2$. **C.** $4\pi a^2$. **D.** $\frac{8\pi a^2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC, khi đó $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp A'M$, do đó góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là $\widehat{A'MA} = 45°$.

Tam giác $A'AM$ vuông cân tại A nên $A'M = AM\sqrt{2} = \dfrac{BC\sqrt{3}}{2}.\sqrt{2} = \dfrac{BC\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích $S_{A'BC} = \dfrac{1}{2}A'M.BC = \dfrac{1}{2}\dfrac{BC\sqrt{6}}{2}.BC = \dfrac{BC^2\sqrt{6}}{4}$.

Theo đề $\dfrac{BC^2\sqrt{6}}{4} = a^2\sqrt{6} \Rightarrow BC = 2a$.

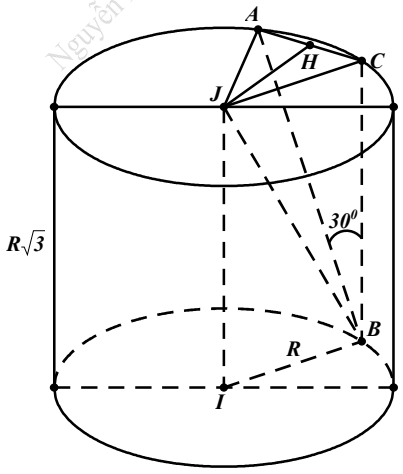
Hình trụ có đáy là đường tròn ngoại tiếp ABC có bán kính $r = \dfrac{BC\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$, đường cao $h = AA' = AM = \dfrac{BC\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Diện tích xung quanh $S = 2\pi rh = 2\pi\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}.a\sqrt{3} = 4\pi a^2$.

Câu 9. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương - 2019)** Cho hình trụ có bán kính R và chiều cao $\sqrt{3}R$. Hai điểm A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa AB và trục d của hình trụ bằng $30°$. Tính khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ:

A. $d(AB,d) = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. **B.** $d(AB,d) = R$. **C.** $d(AB,d) = R\sqrt{3}$. **D.** $d(AB,d) = \dfrac{R}{2}$.

Lời giải



Gọi I, J là tâm của hai đáy (hình vẽ).

Từ B kẻ đường thẳng song song với trục d của hình trụ, cắt đường tròn đáy kia tại C. Khi đó, $(AB,d) = (AB,BC) = \widehat{ABC}$. Suy ra $\widehat{ABC} = 30°$.

Xét tam giác ABC vuông tại C, ta có:

$$\tan\widehat{ABC} = \frac{AC}{CB} \Rightarrow AC = CB.\tan\widehat{ABC} = R\sqrt{3}.\tan 30° = R\sqrt{3}.\frac{1}{\sqrt{3}} = R.$$

Lại có $d // (ABC)$ và $(ABC) \supset AB$ nên $d(d,AB) = d(d,(ABC)) = d(J,(ABC))$.

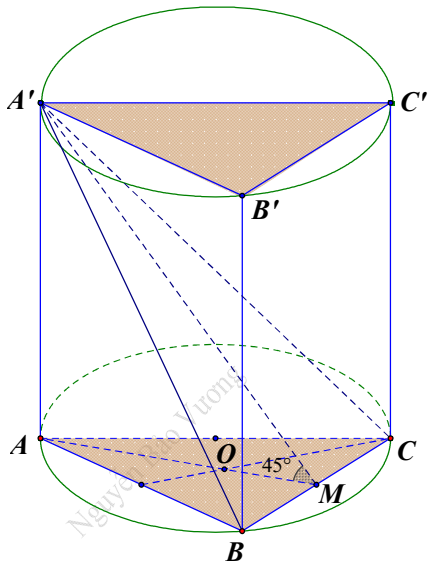
Kẻ $JH \perp AC$, $H \in AC$. Vì $BC \perp JH$ nên $JH \perp (ABC)$. Suy ra $d(J,(ABC)) = JH$.

Xét tam giác JAC ta thấy $JA = JC = AC = R$ nên JAC là tam giác đều cạnh R. Khi đó chiều cao là $JH = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. Vậy $d(d, AB) = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Câu 10. **(THPT Kiến An - Hải Phòng - 2018)** Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $45°$, diện tích tam giác $A'BC$ bằng $a^2\sqrt{6}$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{4\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $2\pi a^2$. **C.** $4\pi a^2$. **D.** $\dfrac{8\pi a^2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC. Khi đó ta có $BC \perp AM$, $BC \perp A'M$

Suy ra: $((A'BC),(ABC)) = \widehat{A'MA} = 45° \Rightarrow A'A = AM$. Gọi O là trọng tâm tam giác ABC.

Đặt $BC = x$, $x > 0$. Ta có $AM = A'A = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'M = \dfrac{x\sqrt{6}}{2}$.

Nên $S_{\Delta A'BC} = \dfrac{1}{2}.A'M.BC = \dfrac{x^2\sqrt{6}}{4} = a^2\sqrt{6} \Rightarrow x = 2a$.

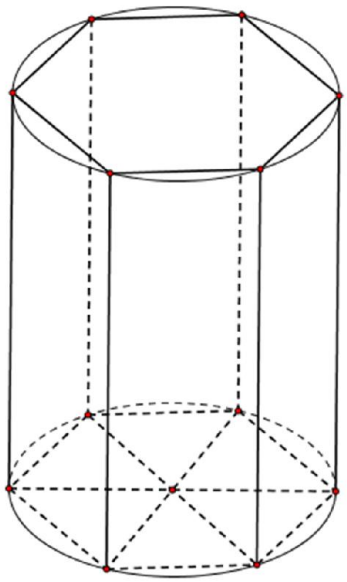
Khi đó: $AO = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3}.\dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ và $A'A = a\sqrt{3}$.

Suy ra diện tích xung quang khối trụ là: $S_{xq} = 2\pi.OA.A'A = 2\pi.\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}.a\sqrt{3} = 4\pi a^2$.

Câu 11. **(Trần Phú - Hà Tĩnh - 2018)** Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng $36\pi a^2$. Tính thể tích V của lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ.

A. $V = 27\sqrt{3}a^3$. **B.** $V = 81\sqrt{3}a^3$. **C.** $V = 24\sqrt{3}a^3$. **D.** $V = 36\sqrt{3}a^3$.

Lời giải



Diện tích xung quanh hình trụ $S_{xq}=2\pi rl=2\pi r.2r=36\pi a^2\Rightarrow r=3a$

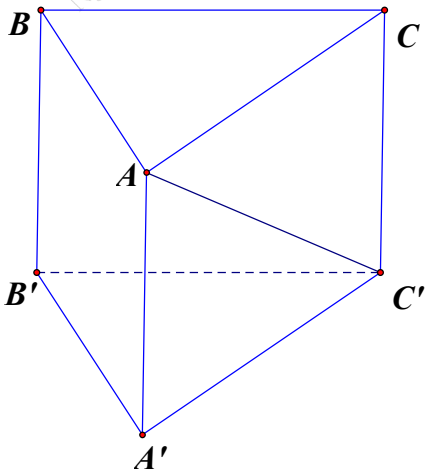
Lăng trụ lục giác đều có đường cao $h=l=6a$

Lục giác đều nội tiếp đường tròn có cạnh bằng bán kính của đường tròn

Suy ra diện tích lục giác đều $S=6.\dfrac{(3a)^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{27a^2\sqrt{3}}{2}$.

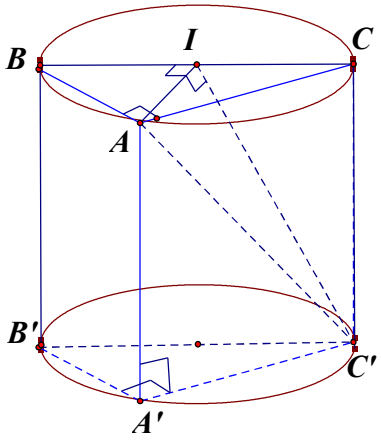
Vậy thể tích $V=S.h=81\sqrt{3}a^3$.

Câu 12. **(Phú Thọ - 2018)** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, góc giữa AC' và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 30° (tham khảo hình vẽ). Thể tích của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng



A. πa^3. **B.** $2\pi a^3$. **C.** $4\pi a^3$. **D.** $3\pi a^3$.

Lời giải



Gọi bán kính của hình trụ là R.

Ta có: $CC' \perp (ABC) \Rightarrow CC' \perp AI$.

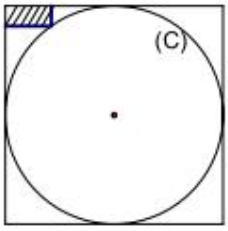
Lại có tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A nên $AI \perp BC$ do đó $AI \perp (BCC'B')$ hay góc giữa AC' và mặt phẳng $(BCC'B')$ là $\widehat{IC'A}$.

Xét tam giác AIC' ta có: $IC' = \dfrac{AI}{\tan \widehat{IC'A}} = R\sqrt{3}$.

Xét tam giác CIC' ta có: $IC'^2 = IC^2 + CC'^2 \Leftrightarrow 3R^2 = R^2 + 4a^2 \Rightarrow R = a\sqrt{2}$.

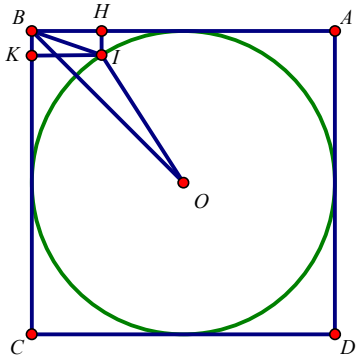
Thể tích khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V = \pi R^2.h = 4\pi a^3$.

Câu 13. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018)** Cho hình trụ (T) có (C) và (C') là hai đường tròn đáy nội tiếp hai mặt đối diện của một hình lập phương. Biết rằng, trong tam giác cong tạo bởi đường tròn (C) và hình vuông ngoại tiếp của (C) có một hình chữ nhật kích thước $a \times 2a$ (như hình vẽ dưới đây). Tính thể tích V của khối trụ (T) theo a.



A. $\dfrac{100\pi a^3}{3}$. **B.** $250\pi a^3$. **C.** $\dfrac{250\pi a^3}{3}$. **D.** $100\pi a^3$.

Lời giải



Ta có $BK=2a$, $KI=a$ nên $BI=a\sqrt{5}\Rightarrow\cos\widehat{KBI}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ và $\sin\widehat{KBI}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Khi đó $\cos\widehat{OBI}=\cos\left(\widehat{KBI}-\widehat{KBO}\right)=\cos\widehat{KBI}.\cos 45^\circ+\sin\widehat{KBI}.\sin 45^\circ$

$=\dfrac{1}{\sqrt{5}}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$.

Kí hiệu $AB=2x$ thì $OI=x, OB=x\sqrt{2}$.

Ta có $OI^2=BO^2+BI^2-2.BO.BI.\cos\widehat{OBI}=2x^2+5a^2-2.x\sqrt{2}.a\sqrt{5}.\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=2x^2+5a^2-6xa$

$\Leftrightarrow x^2=2x^2+5a^2-6xa\Leftrightarrow x^2-6xa+5a^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\\x=5a\end{array}\right.$.

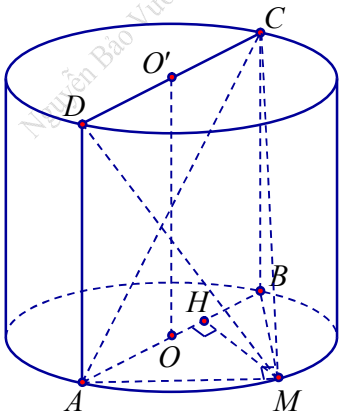
Vì $x>a$ nên $x=5a$ hay $r=OI=5a$.

Vậy thể tích khối trụ (T) là $V=\pi(5a)^2.10a=250\pi a^3$.

Câu 14. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Cho hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $2\sqrt{3}(\text{cm})$ với AB là đường kính của đường tròn đáy tâm O. Gọi M là điểm thuộc cung $\widehat{AB}$ của đường tròn đáy sao cho $\widehat{ABM}=60^\circ$. Thể tích của khối tứ diện $ACDM$ là:

A. $V=3(\text{cm}^3)$. **B.** $V=4(\text{cm}^3)$. **C.** $V=6(\text{cm}^3)$. **D.** $V=7(\text{cm}^3)$.

Lời giải



Ta có: ΔMAB vuông tại M có $\widehat{B}=60^\circ$ nên $MB=\sqrt{3}$; $MA=3$.

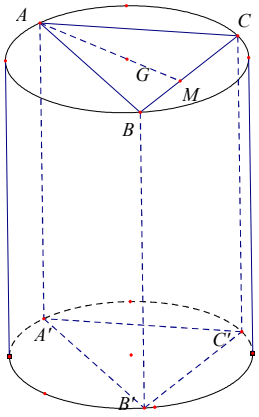
Gọi H là hình chiếu của M lên AB, suy ra $MH\perp(ACD)$ và $MH=\dfrac{MB.MA}{AB}=\dfrac{3}{2}$.

Vậy $V_{M.ACD}=\dfrac{1}{3}MH.S_{ACD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{2}.6=3(\text{cm}^3)$.

Câu 15. **(THPT Lục Ngạn - 2018)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a, chiều cao là h. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp hình lăng trụ.

A. $V=\dfrac{\pi a^2h}{9}$. **B.** $V=\dfrac{\pi a^2h}{3}$. **C.** $V=3\pi a^2h$. **D.** $V=\pi a^2h$.

Lời giải



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Do ABC là tam giác đều nên G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có $AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

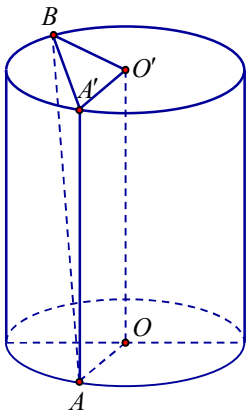
Vậy thể tích của khối trụ ngoại tiếp hình lăng trụ là $V = \pi R^2 h = \frac{\pi a^2 h}{3}$.

Câu 16. **(THPT Yên Lạc - 2018)** Cho hình trụ có hai đáy là các hình tròn (O), (O') bán kính bằng a, chiều cao hình trụ gấp hai lần bán kính đáy. Các điểm A, B tương ứng nằm trên hai đường tròn (O), (O') sao cho $AB = a\sqrt{6}$. Tính thể tích khối tứ diện $ABOO'$ theo a.

A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\frac{2a^3}{3}$ **D.** $\frac{2a^3\sqrt{5}}{3}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải



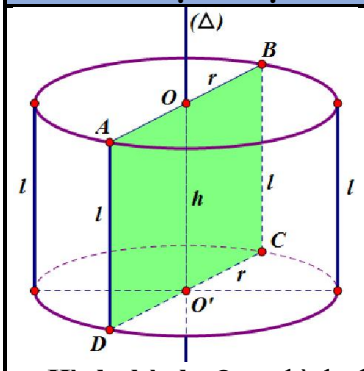
Ta có $OO' = 2a$, $A'B = \sqrt{AB^2 - AA'^2} = \sqrt{6a^2 - 4a^2} = a\sqrt{2}$.

Do đó $A'B^2 = O'B^2 + O'A'^2 = 2a^2$ nên tam giác $O'A'B$ vuông cân tại O' hay $O'A' \perp O'B \Rightarrow OA \perp O'B$.

Khi đó $V_{OO'AB} = \frac{1}{6}OA.O'B.d\left(OA, O'B\right).\sin\left(OA, O'B\right) = \frac{1}{6}a.a.2a.\sin 90° = \frac{a^3}{3}$.

Chuyên đề 22 KHỐI TRỤ

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SNH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

MẶT TRỤ	Các yếu tố mặt trụ:	Một số công thức:
 ☛**Hình thành:** Quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh đường trung bình OO', ta có mặt trụ như hình bên.	▪ **Đường cao**: $\boxed{h = OO'}$. ▪ **Đường sinh**: $\boxed{l = AD = BC}$. Ta có: $\boxed{l = h}$. ▪ **Bán kính đáy**: $\boxed{r = OA = OB = O'C = O'D}$. ▪ **Trục** (Δ) là đường thẳng đi qua hai điểm O, O'. ▪ **Thiết diện qua trục**: Là hình chữ nhật $ABCD$.	▪ **Chu vi đáy**: $\boxed{p = 2\pi r}$. ▪ **Diện tích đáy**: $\boxed{S_đ = \pi r^2}$. ▪ **Thể tích khối trụ**: $\boxed{V = h.S_đ = h.\pi r^2}$. ▪ **Diện tích xung quanh**: $\boxed{S_{xq} = 2\pi r.h}$. ▪ **Diện tích toàn phần**: $\boxed{S_{tp} = S_{xq} + 2S_đ = 2\pi r.h + 2\pi r^2}$.

MỘT SỐ BÀI TOÁN VD – VDC LIÊN QUAN ĐẾN KHỐI TRỤ (CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ - CỰC TRỊ)

Câu 1. **(Mã 104 - 2019)** Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1 m và 1,5 m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và thể trích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?

A. 1,8 m. **B.** 2,1 m. **C.** 1,6 m. **D.** 2,5 m.

Lời giải

Nguyễn Bảo Vương

Chọn A

Gọi h là chiều cao của các bể nước và r là bán kính đáy của bể nước dự định làm.

Theo giả thiết, ta có $\pi r^2 h = \pi.1^2.h + \pi.(1,5)^2.h \Leftrightarrow r^2 = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}$.

Suy ra $r = \frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1,8$.

Câu 2. **(Mã 101 2019)** Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng $1m$ và $1,2m$. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $2,2m$. **B.** $1,6m$. **C.** $1,8m$. **D.** $1,4m$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $R_1; R_2; R$ lần lượt là bán kính của trụ thứ nhất, thứ hai và dự kiến sẽ làm,ta có:

$V = V_1 + V_2 = \pi R^2 h = \pi R_1^{\,2} h + \pi R_2^{\,2} h \Leftrightarrow R^2 = R_1^{\,2} + R_2^{\,2}$.

$\Rightarrow R = \sqrt{R_1^{\,2} + R_2^{\,2}} = \sqrt{1^2 + (1,2)^2} \approx 1,56(m)$.

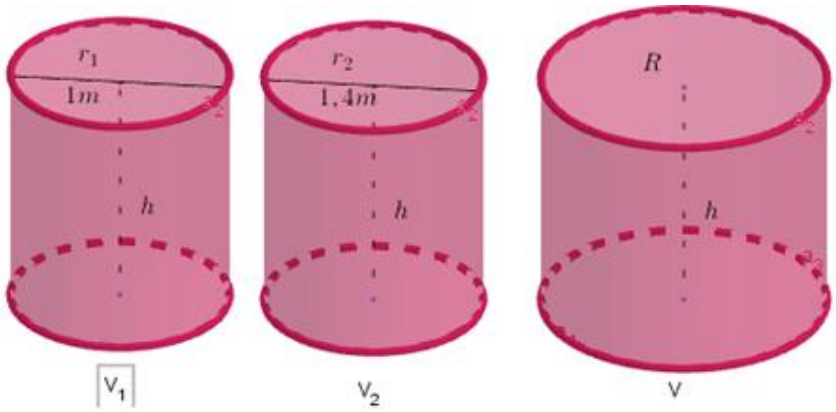
Vậy: Giá trị cần tìm là: $1,6m$.

Câu 3. **(Mã 102 - 2019)** Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng $1m$ và $1,4\ m$. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?

A. $1,7\ m$. **B.** $1,5\ m$. **C.** $1,9\ m$. **D.** $2,4\ m$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $V = V_1 + V_2 \Leftrightarrow h\pi R^2 = h\pi r_1^2 + h\pi r_2^2$.

$\Rightarrow R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \approx 1,72\ m$.

Câu 4. **(Mã 103 - 2019)** Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1m và $1,8\text{m}$. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $2,8\text{m}$. **B.** $2,6\text{m}$. **C.** $2,1\text{m}$. **D.** $2,3\text{m}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi hai bể nước hìnhtrụ ban đầu lần lượt có chiều cao là h, bán kính r_1, r_2, thể tích là V_1, V_2.

Ta có một bể nước mới có chiều cao h, $V = V_1 + V_2$.

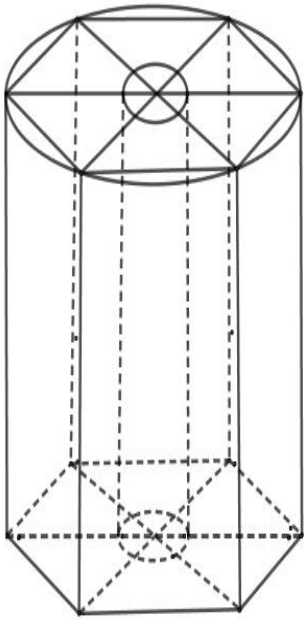
$\Rightarrow \pi r^2 h = \pi r_1^2 h + \pi r_2^2 h \Rightarrow \pi r^2 h = \pi.1^2.h + \pi.1,8^2.h \Leftrightarrow r = \sqrt{\dfrac{106}{25}} \approx 2,1\text{m}$.

Câu 5. **(Mã 102 2018)** Một chiếc bút chì có dạng khối trụ lục giác đều có cạnh đáy $3\ (mm)$ và chiều cao bằng $200\ (mm)$. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính $1\ (mm)$. Giả định $1\ m^3$ gỗ có giá a triệu đồng, $1\ m^3$ than chì có giá $6a$ triệu đồng. Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $8,45.a$ đồng **B.** $7,82.a$ đồng **C.** $84,5.a$ đồng **D.** $78,2.a$ đồng

Lời giải

Chọn B



1 m^3 gỗ có giá a triệu đồng suy ra 1 mm^3 gỗ có giá $\frac{a}{1000}$ đồng.

1 m^3 than chì có giá $6a$ triệu đồng suy ra 1 mm^3 than chì có giá $\frac{6a}{1000}$ đồng.

Phần chì của cái bút có thể tích bằng $V_1 = 200.\pi.1^2 = 200\pi\left(mm^3\right)$.

Phần gỗ của của bút chì có thể tích bằng $V_2 = 200.6.\frac{3^2\sqrt{3}}{4} - 200\pi = 2700\sqrt{3} - 200\pi\left(mm^3\right)$.

Số tiền làm một chiếc bút chì là $\frac{6a.V_1 + a.V_2}{1000} \approx 7,82a$ đồng.

Câu 6. **(Mã 101 2018)** Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy 3 mm và chiều cao bằng 200 mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính đáy 1 mm. Giả định 1 m^3 gỗ có giá a (triệu đồng), 1 m^3 than chì có giá $8a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $9,07a$ (đồng) **B.** $97,03a$ (đồng) **C.** $90,7a$ (đồng) **D.** $9,7a$ (đồng)

Lời giải

Chọn.

D.

Diện tích của khối lăng trụ lục giác đều là $S = 6.\left(\left(3.10^{-3}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ (m^2)

Thể tích của chiếc bút chì là: $V = S.h = 6.\left(\left(3.10^{-3}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}\right).200.10^{-3} = 27\sqrt{3}.10^{-7}$ (m^3).

Thể tích của phần lõi bút chì là $V_1 = \pi r^2 h = \pi.\left(10^{-3}\right)^2.200.10^{-3} = 2\pi.10^{-7}$ (m^3).

Suy ra thể tích phần thân bút chì là $V_2 = V - V_1 = \left(27\sqrt{3} - 2\pi\right).10^{-7}$ (m^3).

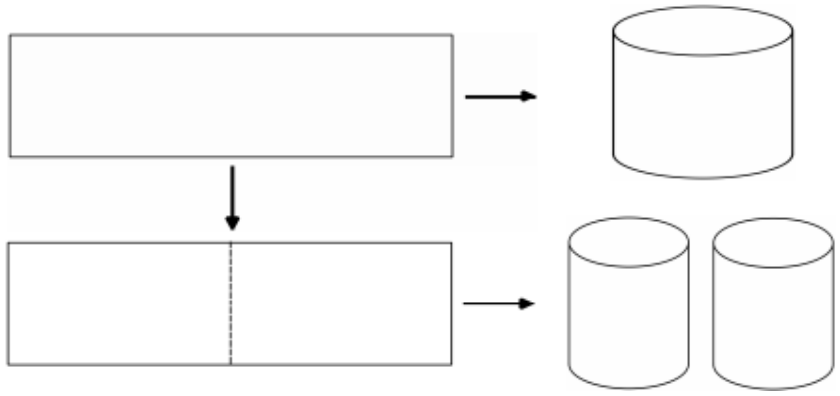
Giá nguyên liệu làm một chiếc bút chì như trên là:

$V_2.a.10^6 + V_1.8a.10^6 = \left(27\sqrt{3} - 2\pi\right).10^{-7}.a.10^6 + 2\pi.10^{-7}.8a.10^6 = \left(2,7\sqrt{3} + 1,4\pi\right)a \simeq 9,07a$ (đồng).

Câu 7. **(Đề Minh Họa 2017)** Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $50cm.240cm$, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng $50cm$, theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):.

- Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.
- Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{V_1}{V_2}=1$ **C.** $\frac{V_1}{V_2}=2$ **D.** $\frac{V_1}{V_2}=4$

Lời giải

Chọn C

Ban đầu bán kính đáy là R, sau khi cắt tấm tôn bán kính đáy là $\frac{R}{2}$

Đường cao của các khối trụ là không đổi

Ta có $V_1=h\pi R^2$, $V_2=2.h\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2=h\pi\frac{R^2}{2}$. Vậy tỉ số $\frac{V_1}{V_2}=2$.

Câu 8. **(Mã 104 2018)** Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy $3\ mm$ và chiều cao $200\ mm$. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều cao của bút và đáy là hình tròn có bán kính $1\ mm$. Giả định $1\ m^3$ gỗ có giá a (triệu đồng), $1\ m^3$ than chì có giá $7a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $85,5.a$ (đồng) **B.** $9,07.a$ (đồng) **C.** $8,45.a$ (đồng) **D.** $90,07.a$ (đồng)

Lời giải

Chọn C

Thể tích phần lõi than chì: $V_1=\pi.0,001^2.0,2=2\pi.10^{-7}\ m^3$.

Số tiền làm lõi than chì $T_1=(2\pi.10^{-7})7a.10^6=1,4\pi a$ (đồng).

Thể tích phần thân bằng gỗ của bút

$V_2=6.\frac{(0,003)^2\sqrt{3}}{4}.0,2-2\pi.10^{-7}=\left[\sqrt{3}.27.10^{-7}-2\pi.10^{-7}\right]m^3$.

Số tiền làm phần thân bằng gỗ của bút

$T_2=\left[27\sqrt{3}.10^{-7}-\pi.2.10^{-7}\right]a.10^6=\left[2,7\sqrt{3}-\pi.0,2\right]a$ (đồng).

Vậy giá vật liệu làm bút chì là: $T=T_1+T_2\approx 8,45.a$ (đồng).

Câu 9. **(Mã 103 2018)** Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy bằng 3 mm và chiều cao bằng 200 mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 mm. Giả định $1m^3$ gỗ có giá a (triệu đồng). $1m^3$ than chì có giá $9a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $103,3a$ đồng **B.** $97,03a$ đồng **C.** $10,33a$ đồng **D.** $9,7a$ đồng

Lời giải

Chọn D

$3mm = 0,003m; 200mm = 0,2m; 1mm = 0,001m$

Diện tích đáy của phần than chì: $S_1 = \pi r^2 = \pi.10^{-6}(m^2)$

Diện tích đáy phần bút bằng gỗ: $S_2 = 6S_{OAB} - S_1 = \left(6.\frac{3^2\sqrt{3}}{4} - \pi\right).10^{-6} = \left(\frac{27\sqrt{3}}{2} - \pi\right).10^{-6}(m^2)$

Thể tích than chì cần dùng: $V_1 = S_1.h = \pi r^2 0,2 = 0,2\pi.10^{-6}(m^3)$

Thể tích gỗ làm bút chì: $V_2 = S_2.h = \left(\frac{27\sqrt{3}}{2} - \pi\right).0,2.10^{-6}(m^3)$

Tiền làm một cây bút:

$V_1.9a + V_2.a = (9V_1 + V_2)a = \left(9.0,2\pi.10^{-6} + \left(\frac{27\sqrt{3}}{2} - \pi\right).0,2.10^{-6}\right)a = 9,7a$ (đồng)

Câu 10. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Người ta làm tạ tập cơ tay như hình vẽ với hai đầu là hai khối trụ bằng nhau và tay cầm cũng là khối trụ. Biết hai đầu là hai khối trụ đường kính đáy bằng 12, chiều cao bằng 6, chiều dài tạ bằng 30 và bán kính tay cầm là 2. Hãy tính thể tích vật liệu làm nên tạ tay đó.



A. 108π. **B.** 6480π. **C.** 502π. **D.** 504π.

Lời giải

Gọi h_1, R_1, V_1 lần lượt là chiều cao, bán kính đáy, thể tích khối trụ nhỏ mỗi đầu.

$V_1 = h_1.\pi.R_1^2 = 6.\pi.6^2 = 216\pi$.

Gọi h_2, R_2, V_2 lần lượt là chiều cao, bán kính đáy, thể tích của tay cầm.

$V_2 = h_2.\pi.R_2^2 = (30-2.6).\pi.2^2 = 72\pi$.

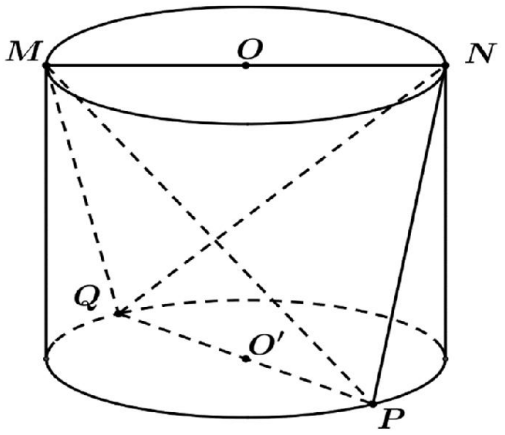
Thể tích vật liệu làm nên tạ tay bằng $V = 2V_1 + V_2 = 504\pi$.

Câu 11. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Một người thợ có một khối đá hình trụ. Kẻ hai đường kính MN, PQ của hai đáy sao cho $MN \perp PQ$. Người thợ đó cắt khối đá theo các mặt đi qua 3 trong 4 điểm M, N, P, Q để khối đá có hình tứ diện $MNPQ$. Biết $MN = 60$ cm và thể tích khối tứ diện $MNPQ = 30$ dm^3. Hãy tính thể tích lượng đá cắt bỏ (làm tròn đến một chữ số thập phân sau dấu phẩy).

A. $101,3\text{dm}^3$ **B.** $111,4\text{dm}^3$ **C.** $121,3\text{dm}^3$ **D.** $141,3\text{dm}^3$

Lời giải

Chọn B



Gọi O và O' lần lượt là trung điểm MN và PQ.

Khi đó OO' là trục của hình trụ và $OO' \perp MN \Rightarrow MN \perp (OPQ)$.

$V_{MNPQ} = \frac{1}{3} MN.S_{OPQ} = \frac{OO'.6^2}{6} = 6OO' \ (\text{dm}^3)$. Theo bài ra ta có $V_{MNPQ} = 30\text{dm}^3 \Rightarrow OO' = 5\text{dm}$.

Thể tích khối trụ là $V_{tru} = \pi.3^2.5 \approx 141,4\text{dm}^3$. Vậy thể tích lượng đá cắt bỏ

$V = V_{tru} - V_{MNPQ} \approx 111,4\text{dm}^3$.

Câu 12. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Công ty X định làm một téc nước hình trụ bằng inox (gồm cả nắp) có dung tích $1m^3$. Để tiết kiệm chi phí công ty X chọn loại téc nước có diện tích toàn phần nhỏ nhất. Hỏi diện tích toàn phần của téc nước nhỏ nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến 2 chữ số sau dấu phẩy)?

A. $5,59 \ m^2$ **B.** $5,54 \ m^2$ **C.** $5,57 \ m^2$ **D.** $5,52 \ m^2$

Lời giải

Ta có: $V = \pi R^2 h = 1 \Rightarrow \begin{cases} \pi Rh = \frac{1}{R} \\ \pi R^2 = \frac{1}{h} \end{cases}$

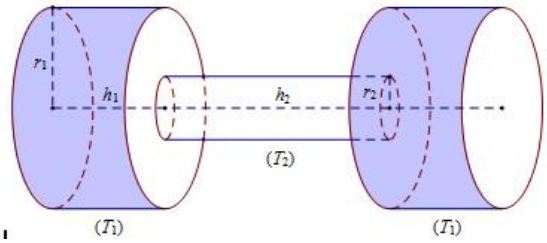
Diện tích toàn phần của téc nước: $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = \frac{2}{R} + 2\pi R^2$

Xét $S' = 4\pi R - \frac{2}{R^2} = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$.

Lập bảng biến thiên ta có S_{tp} đạt giá trị nhỏ nhất tại $R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$

$\Rightarrow S_{(tp)\min} = 2\sqrt[3]{2\pi} + \frac{2\pi}{\sqrt[3]{4\pi^2}} \approx 5,54$

Câu 13. **(Trường VINSCHOOL - 2020)** Một chiếc tạ tay có hình dạng gồm 3 khối trụ, trong đó hai khối trụ ở hai đầu bằng nhau và khối trụ làm tay cầm ở giữa. Gọi khối trụ làm đầu tạ là (T_1) và khối trụ làm tay cầm là (T_2) lần lượt có bán kính và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_1 = 4r_2$, $h_1 = \frac{1}{2} h_2$ (tham khảo hình vẽ).



Biết rằng thể tích của khối trụ tay cầm (T_2) bằng 30 (cm^3) và chiếc tạ làm bằng inox có khối lượng riêng là $D = 7,7g/cm^3$. Khối lượng của chiếc tạ tay bằng

A. $3,927(kg)$. **B.** $2,927(kg)$. **C.** $3,279(kg)$. **D.** $2,279(kg)$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích của hai khối trụ làm đầu tạ (T_1):

$V_1 = 2\pi r_1^2 h_1 = 2\pi(4r_2)^2 \frac{1}{2} h_2 = 16\pi r_2^2 h_2 = 16.30 = 480(cm^3)$.

Tổng thể tích của chiếc tạ tay: $V = V_1 + V_2 = 480 + 30 = 510(cm^3)$.

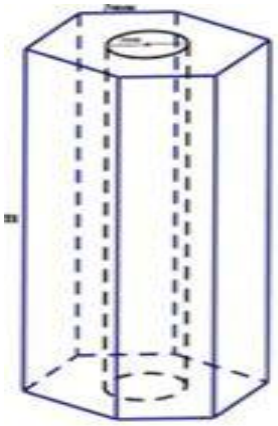
Khối lượng của chiếc tạ: $m = D.V = 7,7.510 = 3927(g) = 3,927(kg)$.

Câu 14. **(Thi thử hội 8 trường chuyên 2019)** Một công ty sản xuất bút chì có dạng hình lăng trụ lục giác đều có chiều cao 18 cm và đáy là hình lục giác nội tiếp đường tròn đường kính 1 cm. Bút chì được cấu tạo từ hai thành phần chính là than chì và bột gỗ ép, than chì là một khối trụ ở trung tâm có đường kính $\frac{1}{4}$ cm, giá thành 540 đồng/cm^3. Bột gỗ ép xung quanh có giá thành 100 đồng/cm^3. Tính giá của một cái bút chì được công ty bán ra biết giá nguyên vật liệu chiếm 15,58% giá thành sản phẩm.

A. 10000 đồng. **B.** 8000 đồng. **C.** 5000 đồng. **D.** 3000 đồng.

Lời giải

Chọn A



Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp lục giác đều và bán kính của lõi than chì.

Ta có $R = \frac{1}{2}$ cm và $r = \frac{1}{8}$ cm.

Suy ra diện tích của lục giác đều là $S = 6.R^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 6.\frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Gọi V là thể tích của khối lăng trụ lục giác đều. V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối than chì và bột gỗ dùng để làm ra một cây bút chì.

Ta có $V = S.h = \frac{3\sqrt{3}}{8}.18 = \frac{27\sqrt{3}}{4}\left(\text{cm}^3\right)$; $V_1 = \pi r^2 h = \pi.\frac{1}{8^2}.18 = \frac{9\pi}{32}\left(\text{cm}^3\right)$.

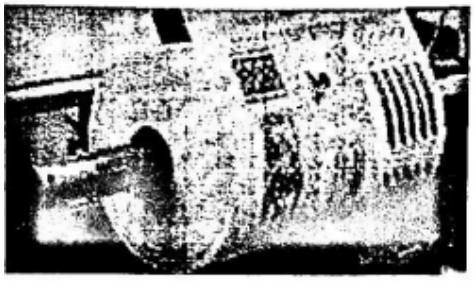
$\Rightarrow V_2 = V - V_1 = \frac{27\sqrt{3}}{4} - \frac{9\pi}{32}\left(\text{cm}^3\right)$.

Do đó, giá nguyên vật liệu dùng để làm một cây bút chì là $540V_1 + 100V_2$ (đồng).

Vậy giá bán ra của cây bút chì là

$$\left(540V_1 + 100V_2\right).\frac{100}{15,58} = \left[540.\frac{9\pi}{32} + 100\left(\frac{27\sqrt{3}}{4} - \frac{9\pi}{32}\right)\right].\frac{100}{15,58} \approx 10000 \text{ (đồng).}$$

Câu 15. **(THPT Hậu Lộc 2 2019)** Một cuộn đề can hình trụ có đường kính 44,9 cm. Trong thời gian diễn ra AFF cup 2018, người ta đã sử dụng để in các băng rôn, khẩu hiệu cổ vũ cho đội tuyển Việt Nam, do đó đường kính của cuộn đề can còn lại là 12,5 cm. Biết độ dày của tấm đề can là 0,06 cm, hãy tính chiều dài L của tấm đề can đã sử dụng?(Làm tròn đến hàng đơn vị).



A. $L = 24344cm$ **B.** $L = 97377cm$ **C.** $L = 848cm$ **D.** $L = 7749\,cm$

Lời giải

Chọn A

Ta có mỗi lần bán đi một vòng đề can thì bán kính của cuộn đề can giảm đi số cm là: $0,06cm$

Bán kính lúc đầu là 22,45 cm, bán kính lúc sau là 6,25 cm. Số vòng đề can đã bán đi là:

$\left(22,45 - 6,25\right);0,06 = 270$

Chu vi một vòng đề can bán kính r là chiều dài của vòng đề can đó. Nó bằng:

$L_r = 2\pi r$

Chiều dài L của tấm đề can đã bán bằng $L = L_1 + L_2 + ... + L_{270}$ với L_1 là độ dài vòng đầu tiên của cuộn đề can, bán kính là $r_1 = 22,45cm$. L_1 cũng chính là chu vi của đường tròn bán kính $r_1 = 22,45cm \Rightarrow L1 = 2\pi.r_1$. Vòng thứ 2, bán kính giảm đi 0,06cm do đó nó sẽ có bán kính bằng $r_2 = 22,45 - 0,06 = 22,39cm$, L_2 cũng chính là chu vi của đường tròn bán kính $r_2 = 22,39cm \Rightarrow L1 = 2\pi.r_1$

Suy ra $L = 2\pi r_1 + 2\pi r_2 + ... + 2\pi r_{270} = 2\pi\left(r_1 + r_2 + ... + r_{270}\right)$

Trong đó $r_1, r_2, ..., r_{270}$ là một cấp số cộng có $u_1 = 22,45; d = -0,06$, suy ra

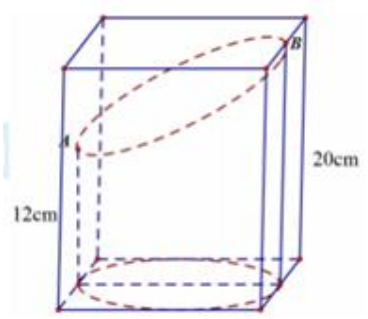
$u_{270} = u_1 + 269d = 22,45 - 269.0,06 = 6,25 + 0,06 = 6,31cm$

Tổng $r_1 + r_2 + ... + r_{270} = \frac{\left(r_1 + r_{270}\right)\times 270}{2} = \frac{\left(22,45 + 6,31\right)270}{2} = 3882,6$ cm

Suy ra L= $2\pi.3882.6 \approx 24382cm$.

Câu 16. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh -1819)** Một khúc gỗ hình trụ có bán kính R bị cắt bởi một mặt phẳng không song song với đáy ta được thiết diện là một hình elip. Khoảng cách từ điểm A đến

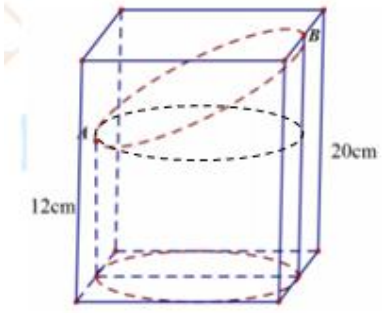
mặt đáy là 12 cm, khoảng cách từ điểm B đến mặt đáy là 20 cm. Đặt khúc gỗ đó vào trong hình hộp chữ nhật có chiều cao bằng 20 cm chứa đầy nước sao cho đường tròn đáy của khúc gỗ tiếp xúc với các cạnh đáy của hình hộp chữ nhật. Sau đó, người ta đo lượng nước còn lại trong hình hộp chữ nhật là 2 lít. Tính bán kính của khúc gỗ (giả sử khúc gỗ không thấm nước và kết quả làm tròn đến phần hàng chục).



A. $R=5,2$ cm. **B.** $R=4,8$ cm. **C.** $R=6,4$ cm. **D.** $R=8,2$ cm.

Lời giải

Chọn D



Gọi bán kính đáy hình trụ là R.

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích hình hộp chữ nhật và khối gỗ.

Ta có $V_1 = B.h = 4\mathrm{R}^2.20 = 80\mathrm{R}^2$

Chia khối gỗ làm hai phần bằng một mặt phẳng qua A và song song đáy.

Ta có $V_2 = \pi \mathrm{R}^2.h_1 + \frac{1}{2}\pi \mathrm{R}^2.(h-h_1) = 16\pi \mathrm{R}^2.$

h_1 là khoảng cách từ điểm A đến mặt đáy, h khoảng cách từ điểm B đến mặt đáy.

Thể tích nước còn lại là

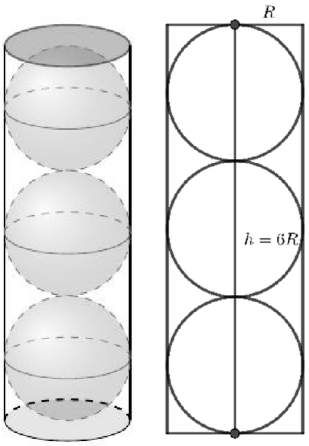
$V = V_1 - V_2 = 16\mathrm{R}^2(5-\pi) = 2000 \Rightarrow R \approx 8,2$.

Câu 17. **(Ngô Quyền - Hải Phòng 2019)** Một hộp đựng bóng tennis có dạng hình trụ. Biết rằng hộp chứa vừa khít ba quả bóng tennis được xếp theo chiều dọc, các quả bóng tennis có kích thước như nhau. Thể tích phần không gian còn trống chiếm tỉ lệ $a\%$ so với hộp đựng bóng tennis. Số a gần đúng với số nào sau đây?

A. 50. **B.** 66. **C.** 30. **D.** 33.

Lời giải

Chọn D



Đặt h, R lần lượt là đường cao và bán kính hình tròn đáy của hộp đựng bóng tennis.

Dễ thấy mỗi quả bóng tennis có cùng bán kính R với hình tròn đáy của hộp đựng bóng tennis và $h=6R$.

Do đó ta có:

Tổng thể tích của ba quả bóng là $V_1=3.\dfrac{4}{3}\pi R^3=4\pi R^3$;

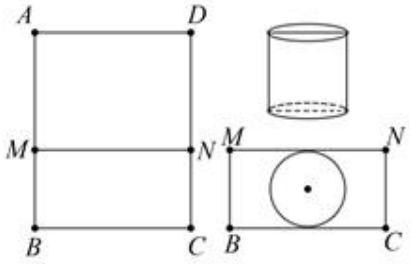
Thể tích của hình trụ (hộp đựng bóng) là $V_0=\pi R^2h=6\pi R^3$;

Thể tích phần còn trống của hộp đựng bóng là $V_2=V_0-V_1=2\pi R^3$.

Khi đó tỉ lệ phần không gian còn trống so với hộp đựng bóng là $\dfrac{V_2}{V_0}=\dfrac{1}{3}\approx 0,33$.

Suy ra $a\approx 33$.

Câu 18. **(Chuyên Ngữ Hà Nội 2019)** Sử dụng mảnh inox hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng $1\,\text{m}^2$ và cạnh $BC=x\,(\text{m})$ để làm một thùng đựng nước có đáy, không có nắp theo quy trình như sau: Chia hình chữ nhật $ABCD$ thành hai hình chữ nhật $ADNM$ và $BCNM$, trong đó phần hình chữ nhật $ADNM$ được gò thành phần xung quanh hình trụ có chiều cao bằng AM; phần hình chữ nhật $BCNM$ được cắt ra một hình tròn để làm đáy của hình trụ trên (phần inox còn thừa được bỏ đi). Tính gần đúng giá trị x để thùng nước trên có thể tích lớn nhất (coi như các mép nối không đáng kể).



A. $1,37\,\text{m}$. **B.** $1,02\,\text{m}$. **C.** $0,97\,\text{m}$. **D.** $1\,\text{m}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $AB.BC=1\Rightarrow AB=\dfrac{1}{BC}=\dfrac{1}{x}\,(\text{m})$.

Gọi $R\,(\text{m})$ là bán kính đáy hình trụ inox gò được, ta có chu vi hình tròn đáy bằng $BC=x\,(\text{m})$.

Do đó $2\pi R=x\Leftrightarrow R=\dfrac{x}{2\pi}\,(\text{m})$; $BM=2R=\dfrac{x}{\pi}\Rightarrow AM=AB-BM=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{\pi}\,(\text{m})$.

Thể tích khối trụ inox gò được là $V=\pi R^2h=\pi.\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2.\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{\pi}\right)=\frac{1}{4\pi^2}x\left(\pi-x^2\right)$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=x\left(\pi-x^2\right)\left(x>0\right)\Rightarrow f'\left(x\right)=\pi-3x^2$.

$f'\left(x\right)=0\Rightarrow x=\sqrt{\frac{\pi}{3}}$; $f'\left(x\right)>0\Leftrightarrow x\in\left(0;\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)$ và $f'\left(x\right)<0\Leftrightarrow x\in\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}};+\infty\right)$.

Vậy $f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}};+\infty\right)$.

Suy ra $\max\limits_{(0;+\infty)}f\left(x\right)=f\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)=\frac{2\pi\sqrt{3\pi}}{9}$.

Từ đó ta có thể tích V lớn nhất khi và chỉ khi $f\left(x\right)$ lớn nhất $\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{\pi}{3}}\approx1,02\left(\text{m}\right)$.

Câu 19. Một đại lý xăng dầu cần làm một cái bồn dầu hình trụ bằng tôn có thể tích 16π (m^3). Tìm bán kính đáy r của hình trụ sao cho hình trụ được làm ra ít tốn nguyên vật liệu nhất.

A. 0,8 m. **B.** 1,2 m. **C.** 2 m. **D.** 2,4 m.

Lời giải

Chọn C

Để ít tốn nguyên vật liệu nhất thì diện tích toàn phần S_{tp} phải nhỏ nhất.

Gọi h $\left(h>0\right)$ là chiều cao của bồn dầu. Ta có: $S_{\text{tp}}=2\pi r^2+2\pi rh$.

Mặt khác, theo giả thiết: $V=16\pi\Leftrightarrow\pi r^2h=16\pi\Leftrightarrow h=\frac{16}{r^2}$.

$\Rightarrow S_{\text{tp}}=2\pi r^2+2\pi r\cdot\frac{16}{r^2}=2\pi\left(r^2+\frac{16}{r}\right)=2\pi\left(r^2+\frac{8}{r}+\frac{8}{r}\right)$.

Áp dụng BĐT *Cauchy* cho 3 số dương: r^2, $\frac{8}{r}$, $\frac{8}{r}$, ta được: $r^2+\frac{8}{r}+\frac{8}{r}\geq3\sqrt[3]{r^2\cdot\frac{8}{r}\cdot\frac{8}{r}}=12$.

$\Rightarrow S_{\text{tp}}\geq24\pi$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow r^2=\frac{8}{r}\Leftrightarrow r^3=8\Leftrightarrow r=2$.

$\Rightarrow\min\left(S_{\text{tp}}\right)=24\pi$.

Vậy để ít tốn nguyên vật liệu nhất thì $r=2$ (m).

Câu 20. **(THPT Cẩm Bình Hà Tĩnh 2019)** Anh H dự định làm một cái thùng đựng dầu hình trụ bằng sắt có nắp đậy thể tích $12m^3$. Chi phí làm mỗi m^2 đáy là 400 ngàn đồng, mỗi m^2 nắp là 200 ngàn đồng, mỗi m^2 mặt xung quanh là 300 ngàn đồng. Để chi phí làm thùng là ít nhất thì anh H cần chọn chiều cao của thùng gần nhất với số nào sau đây? (*Xem độ dày của tấm sắt làm thùng là không đáng kể*).

A. $1,24\,m$. **B.** $1,25\,m$. **C.** $2,50\,m$. **D.** $2,48\,m$.

Lời giải

Chọn D

Gọi bán kính đáy của hình trụ là R. Ta có

$V=\pi R^2 h \Rightarrow h=\dfrac{12}{\pi R^2}$.

Suy ra chi phí (đơn vị ngàn đồng) làm thùng

$C=\pi R^2.400+\pi R^2.200+2\pi Rh.300$

$=600\left(\pi R^2+\dfrac{12}{R}\right)$

$=600\left(\pi R^2+\dfrac{6}{R}+\dfrac{6}{R}\right)\ge 600.3\sqrt[3]{\pi R^2.\dfrac{6}{R}.\dfrac{6}{R}}=1800\sqrt[3]{36\pi}$

Dẫn đến

$\min C=1800\sqrt[3]{36\pi} \Leftrightarrow \pi R^2=\dfrac{6}{R} \Leftrightarrow R=\sqrt[3]{\dfrac{6}{\pi}}$.

Vậy để chi phí nhỏ nhất thì chiều cao của hình trụ là $h=\dfrac{12}{\sqrt[3]{36\pi}}\approx 2,48\,m$.

Câu 21. **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2019)** Người ta cần làm một cái bồn chứa dạng hình trụ có thể tích 1000 lít bằng inox để chứa nước, tính bán kính R của hình trụ đó sao cho diện tích toàn phần của bồn chứa có giá trị nhỏ nhất.

A. $R=\sqrt[3]{\dfrac{2}{\pi}}$. **B.** $R=\sqrt[3]{\dfrac{1}{\pi}}$. **C.** $R=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$. **D.** $R=\sqrt[3]{\dfrac{3}{2\pi}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có 1000 lít = 1m^3.

Gọi h là chiều cao của hình trụ ta có $V=\pi R^2 h=1 \Rightarrow h=\dfrac{1}{\pi R^2}$.

Diện tích toàn phần là: $S_{tp}=2\pi R^2+2\pi Rh=2\pi R^2+2\pi R\dfrac{1}{\pi R^2}=2\pi R^2+\dfrac{2}{R}$

$=2\left(\pi R^2+\dfrac{1}{2R}+\dfrac{1}{2R}\right)\ge 2.3\sqrt[3]{\pi R^2.\dfrac{1}{2R}.\dfrac{1}{2R}}=6\sqrt[3]{\dfrac{\pi}{4}}$.

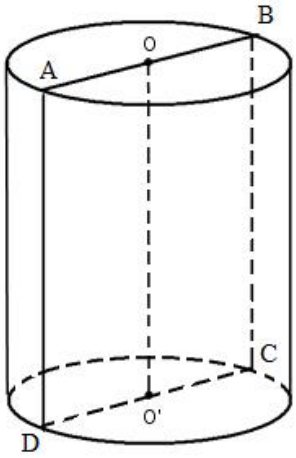
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\pi R^2=\dfrac{1}{2R} \Leftrightarrow R=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$.

Câu 22. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Thiết diện của hình trụ và mặt phẳng chứa trục của hình trụ là hình chữ nhật có chu vi bằng 12. Giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ là

A. 16π. **B.** 32π. **C.** 8π. **D.** 64π.

Lời giải

Chọn C



Từ hình vẽ ta có $ABCD$ là hình chữ nhật, gọi chiều cao của hình trụ là h và bán kính đáy của hình trụ là r, theo giả thiết ta có $2(h+2r)=12 \Leftrightarrow h+2r=6$.

Thể tích của khối trụ tương ứng là $V=\pi r^2 h$, theo bất đẳng thức Cô si ta có

$$r+r+h \geq 3\sqrt[3]{r^2.h} \Leftrightarrow V=\pi r^2 h \leq \pi.\left(\frac{2r+h}{3}\right)^3=8\pi$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $r=h=2$.

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ là 8π.

Câu 23. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cần sản xuất một vỏ hộp sữa hình trụ có thể tích V cho trước. Để tiết kiệm vật liệu nhất thì bán kính đáy phải bằng

A. $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. **B.** $\sqrt[3]{\frac{V}{2}}$. **C.** $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. **D.** $\sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn A

Gọi h,r là chiều cao và bán kính đường tròn đáy của hình trụ.

Ta có $V=\pi r^2 h \Leftrightarrow h=\frac{V}{\pi r^2}$.

Để tiết kiệm vật liệu nhất thì diện tích toàn phần nhỏ nhất.

Ta có $S_{tp}=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+2\pi r\frac{V}{\pi r^2}=2\pi r^2+\frac{2V}{r}=2\pi r^2+\frac{V}{r}+\frac{V}{r}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho ba số $2\pi r^2$, $\frac{V}{r}$, $\frac{V}{r}$ ta có

$S_{tp} \geq 3\sqrt[3]{2\pi r^2.\frac{V}{r}.\frac{V}{r}}=3\sqrt[3]{\frac{2\pi V^2}{r}}$ không đổi

Dấu bằng xảy ra khi $2\pi r^2=\frac{V}{r} \Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ ta có

Câu 24. **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Trong các hình trụ có diện tích toàn phần bằng $1000cm^2$ thì hình trụ có thể tích lớn nhất là bao nhiêu cm^3

A. 2428. **B.** 2532. **C.** 2612. **D.** 2740.

Lời giải

Chọn A

Ta có $S_{tp}=2\pi Rh+2\pi R^2 \Rightarrow Rh+R^2=\frac{S}{2\pi}$

Vậy thể tích khối trụ $V=\pi R^2h=\pi R\left(\frac{S}{2\pi}-R^2\right)=\frac{S}{2}R-\pi R^3=F(R)$

Ta có: $F'(R)=\frac{S}{2}-3\pi R^2=0\Leftrightarrow R=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$

Bảng biến thiên

R	0		$R=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$		$+\infty$
$F'(R)$		$+$	0	$-$	
$F(R)$		↗	$F\left(\sqrt{\frac{S}{6\pi}}\right)$	↘	

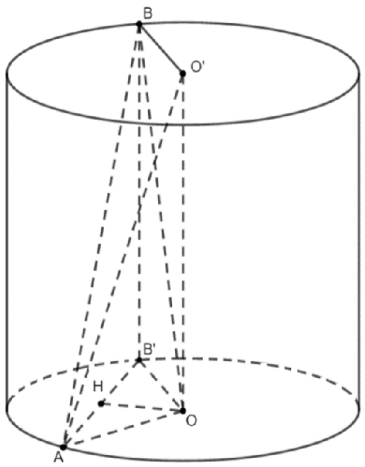
Từ bảng biến thiên ta có $V_{\max}=\frac{S}{2}R-\pi R^3=\frac{1000}{2}\sqrt{\frac{1000}{6\pi}}-\pi\sqrt{\frac{1000}{6\pi}}^3\approx 2428.$

Câu 25. **(Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020)** Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, trên đường tròn tâm O' lấy điểm B. Đặt α là góc giữa AB và đáy. Biết rằng thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\tan\alpha=\sqrt{2}$. **B.** $\tan\alpha=1$. **C.** $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\tan\alpha=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi B' là hình chiếu của B trên mặt phẳng chứa đường tròn (O), khi đó AB' là hình chiếu của AB trên mặt phẳng chứa đường tròn (O).

Suy ra $\left(\widehat{AB,(OAB')}\right)=\left(\widehat{AB,AB'}\right)=\widehat{BAB'}=\alpha$, $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Xét tam giác vuông ABB' vuông tại B' có $\tan\widehat{BAB'}=\frac{BB'}{AB'}\Rightarrow AB'=\frac{BB'}{\tan\alpha}=\frac{2a}{\tan\alpha}$.

Gọi H là trung điểm AB', khi đó $OH\perp AB'$ và

$$OH=\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{R^2-\frac{AB'^2}{4}}=\sqrt{4a^2-\frac{a^2}{\tan^2\alpha}}=a\sqrt{4-\frac{1}{\tan^2\alpha}}$$

Lại có $S_{\Delta OAB'}=\frac{1}{2}OH.AB'=\frac{1}{2}.OB'.d\left(A,OB'\right)$

$$\Rightarrow d\left(A,OB'\right)=\frac{OH.AB'}{OB'}=\frac{a\sqrt{4-\frac{1}{\tan^2\alpha}}.\frac{2a}{\tan\alpha}}{2a}=\frac{a}{\tan\alpha}\sqrt{4-\frac{1}{\tan^2\alpha}}=d\left(A,\left(OO'BB'\right)\right).$$

Vậy $V_{A.OO'B}=\frac{1}{3}d\left(A,\left(OO'BB'\right)\right).S_{\Delta OO'B}=\frac{1}{3}.\frac{a}{\tan\alpha}\sqrt{4-\frac{1}{\tan^2\alpha}}.\frac{1}{2}.2a.2a=\frac{2a^3}{3}.\frac{1}{\tan\alpha}\sqrt{4-\frac{1}{\tan^2\alpha}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có $\frac{1}{\tan\alpha}\sqrt{4-\frac{1}{\tan^2\alpha}}\le\frac{\frac{1}{\tan^2\alpha}+4-\frac{1}{\tan^2\alpha}}{2}=2$

$\Rightarrow V_{A.OO'B}\le\frac{2a^3}{3}.2=\frac{4a^3}{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{\tan\alpha}=\sqrt{4-\frac{1}{\tan^2\alpha}}\Leftrightarrow\frac{1}{\tan^2\alpha}=4-\frac{1}{\tan^2\alpha}\Leftrightarrow\frac{2}{\tan^2\alpha}=4$

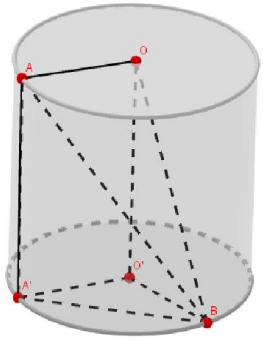
$\Leftrightarrow\tan^2\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ do $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 26. **(Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019)** Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, trên đường tròn tâm O' lấy điểm B. Đặt α là góc giữa AB và đáy. Tính $\tan\alpha$ khi thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\tan\alpha=\frac{1}{2}$. **B.** $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\tan\alpha=1$. **D.** $\tan\alpha=\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi A' là hình chiếu của A trên đường tròn tâm O' khi đó ta có

$V_{OO'AB}=\frac{1}{2}V_{B.OO'A'A}=\frac{1}{6}.S_{OO'A'A}.d\left(B,\left(OO'A'A\right)\right)$ với $d\left(B,\left(OO'A'A\right)\right)=OB.\sin\widehat{BO'A'}$

Do $S_{OO'A'A}$ là hằng số nên để thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất thì

$d\left(B,\left(OO'A'A\right)\right)$ là lớn nhất hay $\widehat{BO'A'}=90^0$

Khi đó ta có $\tan\alpha=\tan\widehat{ABA'}=\frac{AA'}{A'B}=\frac{2a}{2a\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 27. **(Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019)** Một xí nghiệp chế biến sữa bò muốn sản xuất lon đựng sữa có dạng hình trụ bằng thiếc có thể tích không đổi. Để giảm giá một lon sữa khi bán ra thị

trường người ta cần chế tạo lon sữa có kích thước sao cho ít tốn kém vật liệu. Để thỏa mãn yêu cầu đặt ra (diện tích toàn phần bé nhất), người ta phải thiết kế lon sữa thỏa mãn điều kiện nào trong các điều kiện sau:

A. Chiều cao bằng đường kính của đáy.

B. Chiều cao bằng bán kính của đáy.

C. Chiều cao bằng 3 lần bán kính của đáy.

D. Chiều cao bằng bình phương bán kính của đáy.

Lời giải

Chọn A

Gọi V, r, h, l lần lượt là thể tích, bán kính đáy, đường cao, đường sinh của lon sữa.

Ta có: $V=\pi.r^2.h \Rightarrow h=\dfrac{V}{\pi.r^2}$ và $h=l$.

Mặt khác: $V=\pi.r^2.h \Rightarrow h=\dfrac{V}{\pi.r^2}$.

$$S_{tp}=2\pi rl+2\pi r^2=2\pi r\cdot\frac{V}{\pi.r^2}+2\pi r^2=\frac{2V}{r}+2\pi r^2=\frac{V}{r}+\frac{V}{r}+2\pi r^2.$$

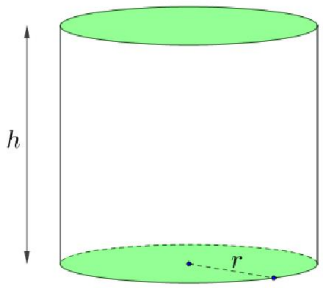
Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta được:

$$S_{tp}\geq 3\sqrt[3]{\frac{V}{r}\cdot\frac{V}{r}\cdot 2\pi r^2}=3\sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{V}{r}=2\pi r^2 \Leftrightarrow \dfrac{V}{\pi}=2r^3$. Do $h=\dfrac{V}{\pi.r^2}$ nên $2r=h$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 28. **(SGD Nam Định 2019)** Người ta thiết kế một thùng chứa hình trụ (như hình vẽ) có thể tích V nhất định. Biết rằng giá của vật liệu làm mặt đáy và nắp của thùng bằng nhau và đắt gấp ba lần so với giá vật liệu để làm mặt xung quanh của thùng (chi phí cho mỗi đơn vị diện tích). Gọi chiều cao của thùng là h và bán kính đáy là r. Tính tỉ số $\dfrac{h}{r}$ sao cho chi phí vật liệu sản xuất thùng là nhỏ nhất?



A. $\dfrac{h}{r}=\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{h}{r}=2$. **C.** $\dfrac{h}{r}=6$. **D.** $\dfrac{h}{r}=3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi x là giá vật liệu làm mặt xung quanh (cho mỗi đơn vị diện tích).

Thể tích của thùng $V=\pi r^2.h$ không đổi. Suy ra $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$. (*)

Khi đó, chi phí để làm thùng bằng $P = S_{xq}.x + 2S_{đ}.3x = 2\pi rh.x + 2\pi r^2.3x = 2\pi x\left(3r^2 + rh\right)$.

$\Rightarrow P = 2\pi x\left(3r^2 + \dfrac{V}{\pi r}\right) = 2\pi x\left(3r^2 + \dfrac{V}{2\pi r} + \dfrac{V}{2\pi r}\right) \ge 6\pi x.\sqrt[3]{\dfrac{3V^2}{4\pi^2}}$.

$P = 6\pi x.\sqrt[3]{\dfrac{3V^2}{4\pi^2}} \Leftrightarrow 3r^2 = \dfrac{V}{2\pi r} \Leftrightarrow r^3 = \dfrac{V}{6\pi}$.

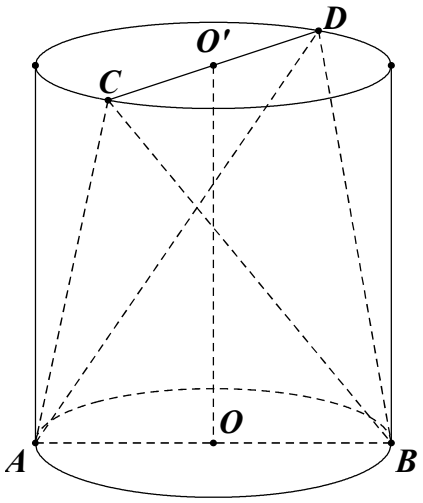
Từ (*) suy ra $\dfrac{h}{r} = \dfrac{V}{\pi r^3} = \dfrac{V}{\pi \dfrac{V}{6\pi}} = 6$.

Câu 29. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Một hình trụ có độ dài đường cao bằng 3, các đường tròn đáy lần lượt là $(O;1)$ và $(O';1)$. Giả sử AB là đường kính cố định của $(O;1)$ và CD là đường kính thay đổi trên $(O';1)$. Tìm giá trị lớn nhất $V_{\max}$ của thể tích khối tứ diện $ABCD$.

A. $V_{\max} = 2$. **B.** $V_{\max} = 6$. **C.** $V_{\max} = \dfrac{1}{2}$. **D.** $V_{\max} = 1$.

Lời giải

Chọn A



Nguyễn Bảo Vương

Gọi α là số đo góc giữa AB và CD.

Ta có $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}AB.CD.d\left(AB;CD\right).\sin\alpha = \dfrac{1}{6}.2.2.3.\sin\alpha = 2\sin\alpha \le 2$.

Do đó V_{ABCD} đạt giá trị lớn nhất là 2, đạt được khi $AB \perp CD$.

Câu 30. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cần sản xuất một vỏ hộp sữa hình trụ có thể tích V cho trước. Để tiết kiệm vật liệu nhất thì bán kính đáy phải bằng

A. $\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. **B.** $\sqrt[3]{\dfrac{V}{2}}$. **C.** $\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$. **D.** $\sqrt[3]{\dfrac{V}{3\pi}}$.

Lời giải

Giả sử vỏ hộp sữa có bán kính đáy là R, chiều cao là h $(R, h > 0)$.

Vì thể tích vỏ hộp là V nên ta có $V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi R^2}$.

Để tiết kiệm vật liệu nhất thì hình trụ vỏ hộp sữa phải có diện tích toàn phần $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = \dfrac{2V}{R} + 2\pi R^2$ nhỏ nhất.

Cách 1:

Ta có $S_{tp}=\frac{2V}{R}+2\pi R^2=\frac{V}{R}+\frac{V}{R}+2\pi R^2\ge 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$.

S_{tp} đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{V}{R}=2\pi R^2\Leftrightarrow R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Cách 2:

Xét hàm số $f(R)=\frac{2V}{R}+2\pi R^2$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(R)=-\frac{2V}{R^2}+4\pi R=\frac{4\pi R^3-2V}{R^2}$. $f'(R)=0\Leftrightarrow R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Bảng biến thiên:

R	0		$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$		$+\infty$
$f'(R)$		$-$	0	$+$	
$f(R)$		↘		↗	

Từ BBT ta thấy $f(R)$ đạt nhỏ nhất khi $R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Vậy để tiết kiệm vật liệu nhất thì bán kính đáy vỏ hộp phải bằng $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Câu 31. Thiết diện của hình trụ và mặt phẳng chứa trục của hình trụ là hình chữ nhật có chu vi là 12 cm. Giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ là:

A. $64\pi\,\text{cm}^3$. **B.** $16\pi\,\text{cm}^3$. **C.** $8\pi\,\text{cm}^3$. **D.** $32\pi\,\text{cm}^3$.

Lời giải

Gọi chiều cao và bán kính đáy của hình trụ lần lượt là x, y $(x,y>0)$.

Khi đó ta có thiết diện của hình trụ và mặt phẳng chứa trục của hình trụ là hình chữ nhật có kích thước lần lượt là x, $2y$

Theo giả thiết ta có $2.(x+2y)=12\Leftrightarrow x+2y=6$.

Cách 1.

Thể tích khối trụ: $V=\pi y^2.x=\pi y^2(6-2y)=2\pi(-y^3+3y^2)$.

Vì $x+2y=6\Rightarrow 0<2y<6\Leftrightarrow 0<y<3$.

Xét hàm số $f(y)=-y^3+3y^2$ trên khoảng $(0;3)$

Ta có $f'(y)=-3y^2+6y\Rightarrow f'(y)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\\y=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

y	0		2		3
$f'(y)$		$+$	0	$-$	
$f(y)$		↗	4	↘	

Suy ra $\max\limits_{(0;3)} f(y) = f(2) = 4.$

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ bằng $2\pi.4 = 8\pi$ cm^3.

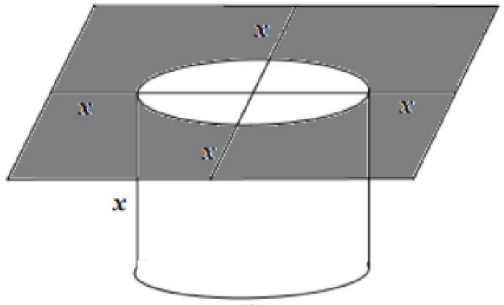
Cách 2.

Thể tích khối trụ: $V = \pi y^2 x = \pi.x.y.y \le \pi\left(\dfrac{x+y+y}{3}\right)^3 = \pi\left(\dfrac{x+2y}{3}\right)^3 = \pi\left(\dfrac{6}{3}\right)^3 = 8\pi$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ bằng $V = 8\pi$ cm^3.

Câu 32. **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Trên một mảnh đất hình vuông có diện tích $81m^2$ người ta đào một cái ao nuôi cá hình trụ (như hình vẽ) sao cho tâm của hình tròn đáy trùng với tâm của mảnh đất. Ở giữa mép ao và mép mảnh đất người ta để lại một khoảng đất trống để đi lại, biết khoảng cách nhỏ nhất giữa mép ao và mép mảnh đất là $x(m)$. Giả sử chiều sâu của ao cũng là $x(m)$. Tính thể tích lớn nhất V của ao.



A. $V = 13,5\pi(m^3)$. **B.** $V = 27\pi(m^3)$. **C.** $V = 36\pi(m^3)$. **D.** $V = 72\pi(m^3)$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn A.

Phương pháp

Xác định bán kính đáy và chiều cao của hình trụ, sử dụng công thức $V = \pi R^2 h$ tính thể tích của hình trụ.

+) Lập BBT tìm GTLN của hàm thể tích.

Cách giải

Ta có: Đường kính đáy của hình trụ là $9-2x \Rightarrow$ Bán kính đáy hình trụ là $\dfrac{9-2x}{2}$.

Khi đó ta có thể tích ao là $V = \pi\left(\dfrac{9-2x}{2}\right)^2 x = \dfrac{\pi}{4}(9-2x)^2 x = \dfrac{\pi}{4} f(x)$

Xét hàm số $f(x) = (9-2x)^2 x = 4x^3 - 36x^2 + 81x$ với $0 < x < \dfrac{9}{2}$ ta có:

$$f'(x) = 12x^2 - 72x + 81 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{9}{2} \\ x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

BBT:

x	0		$\frac{3}{2}$		$\frac{9}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	↗	54	↘	0

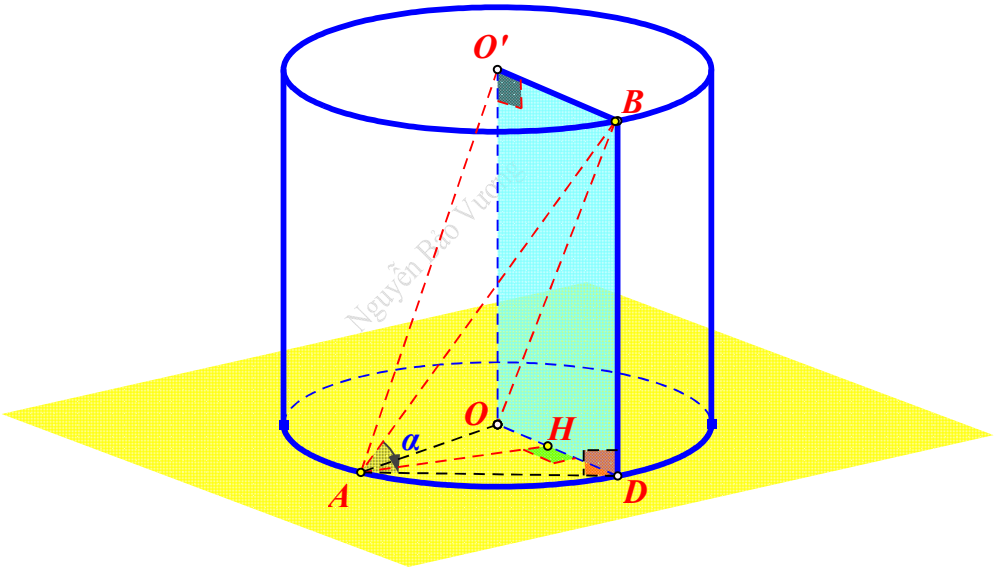
Dựa vào BBT ta thấy $f(x)_{\max}=54\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$. Khi đó $V_{\max}=\frac{\pi}{4}.54=\frac{27\pi}{2}=13,5\pi\left(m^3\right)$.

Câu 33. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, trên đường tròn tâm O' lấy điểm B. Đặt α là góc giữa AB và đáy. Tính $\tan\alpha$ khi thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\tan\alpha=\sqrt{2}$ **B.** $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ **C.** $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ **D.** $\tan\alpha=1$

Lời giải

Cách 1:



Gọi D là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (O).

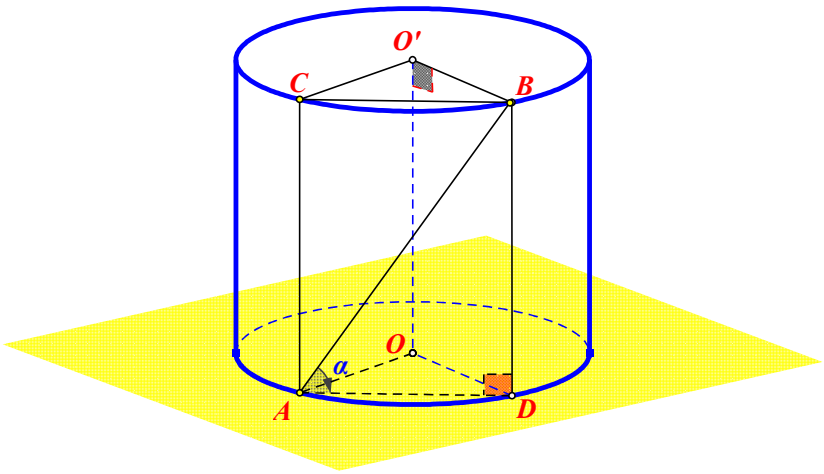
Kẻ $AH\perp OD$, $H\in OD$.

Ta có thể tích của khối chóp $OO'AB$: $V_{OO'AB}=\frac{1}{3}AH.S_{\Delta OO'B}=\frac{2a^2}{3}.AH\le\frac{2a^2}{3}.AO=\frac{4a^3}{3}$.

$\left(V_{OO'AB}\right)_{\max}\Leftrightarrow H\equiv O$. Suy ra $AD=2\sqrt{2}a$.

Suy ra: $\tan\alpha=\tan\widehat{BAD}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Nhận xét: *Nên thêm giả thiết AB chéo với OO' để tứ diện $OO'AB$ tồn tại.*



Gọi D là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng chứa đường tròn (O).

Gọi C là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng chứa đường tròn (O').

Ta có $O'CB.OAD$ là một hình lăng trụ đứng.

Ta có thể tích của khối chóp $OO'AB$:

$$V_{OO'AB} = V_{O'BC.OAD} = \frac{1}{3}2a.S_{\Delta OAD} = \frac{1}{3}.2a.\frac{1}{2}.2a.2a.\sin\widehat{AOD} \le \frac{4a^3}{3}.$$

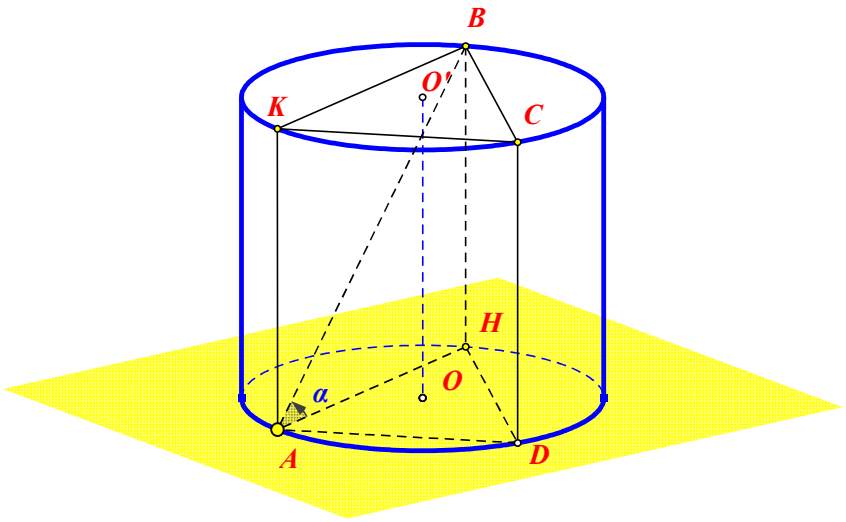
$$\left(V_{O'ABCD}\right)_{\max} \Leftrightarrow \widehat{AOD} = 90^0 \Leftrightarrow AD = 2\sqrt{2}a.$$

Suy ra: $\tan\alpha = \tan\widehat{BAD} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 34. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, D sao cho $AD = 2\sqrt{3}a$; gọi C là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng chứa đường tròn (O'); trên đường tròn tâm O' lấy điểm B (AB chéo với CD). Đặt α là góc giữa AB và đáy. Tính $\tan\alpha$ khi thể tích khối tứ diện $CDAB$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\tan\alpha = \sqrt{3}$ **B.** $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **C.** $\tan\alpha = 1$ **D.** $\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng chứa đường tròn (O).

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng chứa đường tròn (O').

Ta có $HAD.BKC$ là một hình lăng trụ đứng.

Ta có thể tích của tứ diện $CDAB$ là

$V_{ABCD}=\frac{1}{3}V_{HAD.BKC}=\frac{1}{3}.2a.S_{\Delta HAD}=\frac{1}{3}.2a.\frac{1}{2}.AD.d\left(H;AD\right)=\frac{1}{3}.2a.\frac{1}{2}.2a\sqrt{3}.d\left(H;AD\right)$.

$\left(V_{ABCD}\right)_{\max}\Leftrightarrow\left(d\left(H;AD\right)\right)_{\max}\Leftrightarrow H$ là điểm chính giữa cung lớn $\overset{\frown}{AD}$ của đường tròn (O) (1).

Theo định lý sin ta có $\frac{AD}{\sin\overset{\frown}{AHD}}=2.2a\Leftrightarrow\sin\overset{\frown}{AHD}=\frac{AD}{4a}=\frac{2\sqrt{3}a}{4a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ nên $\overset{\frown}{AHD}=60^0$.

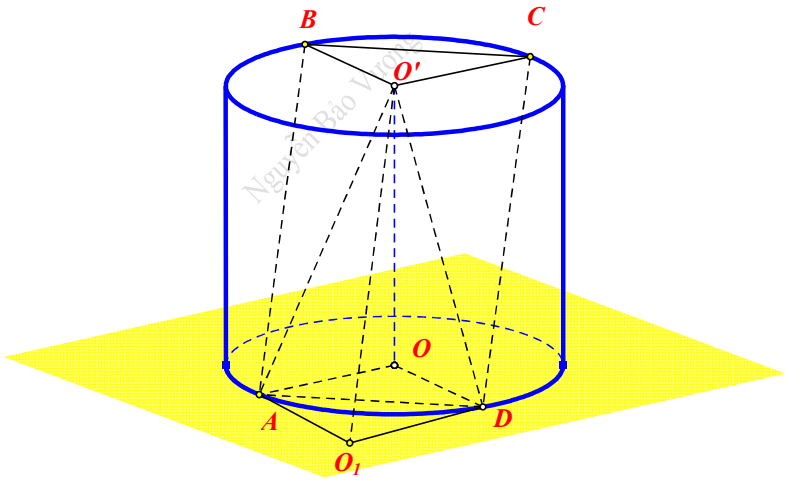
Do đó (1) xảy ra khi ΔAHD đều $\Leftrightarrow AH=AD=2\sqrt{3}a$.

Suy ra: $\tan\alpha=\tan\overset{\frown}{BAH}=\frac{BH}{AH}=\frac{2a}{2a\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 35. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, D trên đường tròn tâm O' lấy điểm B, C sao cho $AB//CD$ và AB không cắt OO'. Tính AD để thể tích khối chóp $O'.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $AD=2\sqrt{2}a$ **B.** $AD=4a$ **C.** $AD=\frac{4\sqrt{3}}{3}a$ **D.** $AD=\sqrt{2}a$

Lời giải



Kẻ đường thẳng qua O' song song với AB cắt mặt phẳng chứa đường tròn (O) tại O_1.

Lúc đó $AO_1D.BO'C$ là một hình lăng trụ chiều cao bằng $2a$.

Vì $AD=BC$ nên $S_{\Delta BO'C}=S_{\Delta OAD}$

Ta có thể tích của khối chóp $O'.ABCD$:

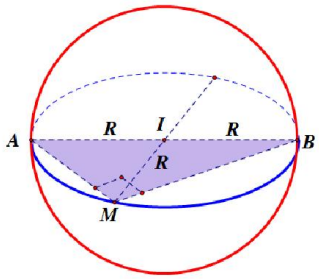
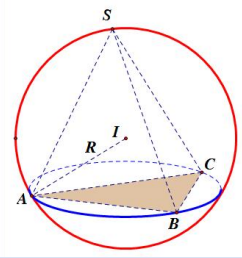
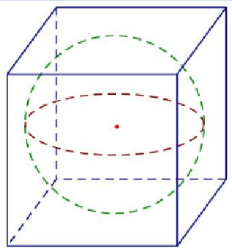
$V_{O'ABCD}=\frac{1}{3}V_{AO_1D.BO'C}=\frac{2}{3}.2a.S_{\Delta BO'C}=\frac{2}{3}.2a.S_{\Delta OAD}=\frac{2}{3}.2a.\frac{1}{2}.2a.2a.\sin\overset{\frown}{AOD}\le\frac{8a^3}{3}$.

$\left(V_{O'ABCD}\right)_{\max}\Leftrightarrow\overset{\frown}{AOD}=90^0\Leftrightarrow AD=2\sqrt{2}a$.

Chuyên đề 23 MẶT CẦU - KHỐI CẦU

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH – MỨC 5-6 ĐIỂM

Lý thuyết chung

MẶT CẦU	Một số công thức:	Mặt cầu ngoại tiếp đa diện Mặt cầu nội tiếp đa diện
 ☛**Hình thành:** Quay đường tròn tâm I, bán kính $R=\dfrac{AB}{2}$ quanh trục AB, ta có mặt cầu như hình vẽ.	▪ **Tâm** I, **bán kính** $R=IA=IB=IM$. ▪ **Đường kính** $AB=2R$. ▪ **Thiết diện qua tâm** mặt cầu: Là đường tròn tâm I, bán kính R. ▪ **Diện tích** mặt cầu: $\boxed{S=4\pi R^2}$. ▪ **Thể tích** khối cầu: $\boxed{V=\dfrac{4\pi R^3}{3}}$.	 **Mặt cầu ngoại tiếp đa diện** là mặt cầu đi qua tất cả đỉnh của đa diện đó.  **Mặt cầu nội tiếp đa diện** là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của đa diện đó.

Dạng 1. Diện tích xung quanh, bán kính

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho mặt cầu có bán kính $R=2$. Diện tích của mặt cầu đã cho bằng

A. $\dfrac{32\pi}{3}$. **B.** 8π. **C.** 16π. **D.** 4π.

Câu 2. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho mặt cầu có bán kính $r=5$. Diện tích mặt cầu đã cho bằng

A. 25π. **B.** $\dfrac{500\pi}{3}$. **C.** 100π. **D.** $\dfrac{100\pi}{3}$.

Câu 3. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho mặt cầu có bán kính $r=4$. Diện tích của mặt cầu đã cho bằng

A. 16π. **B.** 64π. **C.** $\dfrac{64\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{256\pi}{3}$.

Câu 4. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho mặt cầu bán kính $r=5$. Diện tích của mặt cầu đã cho bằng

A. $\dfrac{500\pi}{3}$. **B.** 25π. **C.** $\dfrac{100\pi}{3}$. **D.** 100π.

Câu 5. **(Mã 101 2018)** Diện tích của mặt cầu bán kính R bằng:

A. πR^2 **B.** $\dfrac{4}{3}\pi R^2$ **C.** $2\pi R^2$ **D.** $4\pi R^2$

Câu 6. **(THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019)** Cho mặt cầu có diện tích bằng $16\pi a^2$. Khi đó, bán kính mặt cầu bằng

A. $2\sqrt{2}a$ **B.** $\sqrt{2}a$ **C.** $2a$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 7. **(Chuyên Đhsp Hà Nội 2019)** Diện tích mặt cầu bán kính $2a$ là

A. $4\pi a^2$. **B.** $16\pi a^2$. **C.** $16a^2$. **D.** $\dfrac{4\pi a^2}{3}$.

Câu 8. **(THPT Nghĩa Hưng Nđ- 2019)** Diện tích của một mặt cầu bằng $16\pi\left(cm^2\right)$. Bán kính của mặt cầu đó là.

A. $8cm$. **B.** $2cm$. **C.** $4cm$. **D.** $6cm$.

Câu 9. **(Bình Phước 2019)** Tính diện tích mặt cầu (S) khi biết chu vi đường tròn lớn của nó bằng 4π

A. $S=32\pi$ **B.** $S=16\pi$ **C.** $S=64\pi$ **D.** $S=8\pi$

Câu 10. **(Trường THPT Thăng Long 2019)** Một mặt cầu có diện tích xung quanh là π thì có bán kính bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Câu 11. **(THPT Cẩm Bình 2019)** Diện tích mặt cầu có đường kính bằng $2a$ là

A. $16\pi a^2$. **B.** πa^2. **C.** $\frac{4\pi a^3}{3}$. **D.** $4\pi a^2$.

Câu 12. **(Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định- 2019)** Cho mặt cầu có diện tích bằng $\frac{8\pi a^2}{3}$. Bán kính mặt cầu bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 13. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Quả bóng rổ size 7 có đường kính 24.5 cm. Tính diện tích bề mặt quả bóng rổ đó (làm tròn kết quả đến chữ số hàng đơn vị)

A. 629 cm^2. **B.** 1886 cm^2. **C.** 8171 cm^2. **D.** 7700 cm^2.

Câu 14. **(SGD Bình Phước - 2019)** Tính diện tích mặt cầu (S) khi biết chu vi đường tròn lớn của nó bằng 4π

A. $S=32\pi$. **B.** $S=16\pi$. **C.** $S=64\pi$. **D.** $S=8\pi$.

Nguyễn Bảo Vương

Dạng 2. Thể tích

Câu 1. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho khối cầu có bán kính $r=4$. Thể tích của khối cầu đã cho bằng:

A. $\frac{256\pi}{3}$. **B.** 64π. **C.** $\frac{64\pi}{3}$. **D.** 256π.

Câu 2. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho khối cầu có bán kính $r=4$. Thể tích của khối cầu đã cho bằng

A. 64π. **B.** $\frac{64\pi}{3}$. **C.** 256π. **D.** $\frac{256\pi}{3}$.

Câu 3. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho khối cầu có bán kính $r=2$. Thể tích của khối cầu đã cho bằng

A. 16π. **B.** $\frac{32\pi}{3}$. **C.** 32π. **D.** $\frac{8\pi}{3}$.

Câu 4. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho khối cầu có bán kính r = 2. Thể tích của khối cầu bằng

A. $\frac{32\pi}{3}$. **B.** 16π. **C.** 32π. **D.** $\frac{8\pi}{3}$.

Câu 5. **(Mã 102 2018)** Thể tích của khối cầu bán kính R bằng

A. $\frac{3}{4}\pi R^3$ **B.** $\frac{4}{3}\pi R^3$ **C.** $4\pi R^3$ **D.** $2\pi R^3$

Câu 6. **(Đề Tham Khảo 2019)** Thể tích khối cầu bán kính a bằng :

A. $\frac{\pi a^3}{3}$ **B.** $2\pi a^3$ **C.** $\frac{4\pi a^3}{3}$ **D.** $4\pi a^3$

Câu 7. **(Lômônôxốp - Hà Nội 2019)** Thể tích của khối cầu có bán kính là 1 bằng:

A. 2π. **B.** $\frac{\pi}{3}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** 4π.

Câu 8. **(SP Đồng Nai - 2019)** Thể tích khối cầu có đường kính $2a$ bằng

A. $\frac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $4\pi a^3$. **C.** $\frac{\pi a^3}{3}$. **D.** $2\pi a^3$.

Câu 9. **(THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019)** Thể tích khối cầu bán kính $3\,\text{cm}$ bằng

A. $36\pi\left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $108\pi\left(\text{cm}^3\right)$. **C.** $9\pi\left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $54\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 10. **(THPT Lê Xoay Vĩnh Phúc 2019)** Cho mặt cầu (S) có diện tích $4\pi a^2\left(\text{cm}^2\right)$. Khi đó, thể tích khối cầu (S) là

A. $\frac{4\pi a^3}{3}\left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $\frac{\pi a^3}{3}\left(\text{cm}^3\right)$. **C.** $\frac{64\pi a^3}{3}\left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $\frac{16\pi a^3}{3}\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 11. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Cho mặt cầu có diện tích bằng $36\pi a^2$. Thể tich khối cầu là

A. $18\pi a^3$. **B.** $12\pi a^3$. **C.** $36\pi a^3$. **D.** $9\pi a^3$.

Câu 12. **(THPT Đoàn Thượng – Hải Dương 2019)** Tính diện tích S của mặt cầu và thể tích V của khối cầu có bán kính bằng 3cm.

A. $S=36\pi\left(\text{cm}^2\right)$ và $V=36\pi\left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $S=18\pi\left(\text{cm}^2\right)$ và $V=108\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

C. $S=36\pi\left(\text{cm}^2\right)$ và $V=108\pi\left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $S=18\pi\left(\text{cm}^2\right)$ và $V=36\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 13. **(KSCL Sở Hà Nam - 2019)** Thể tích của khối cầu bán kính $3a$ là

A. $4\pi a^3$. **B.** $12\pi a^3$. **C.** $36\pi a^2$. **D.** $36\pi a^3$.

Câu 14. **(THPT Phan Bội Châu - Nghệ An - 2019)** Cho mặt cầu có diện tích bằng $36\pi a^2$. Thể tich khối cầu là

A. $18\pi a^3$. **B.** $12\pi a^3$. **C.** $36\pi a^3$. **D.** $9\pi a^3$.

Nguyễn Bảo Vương

Dạng 3 Khối cầu nội tiếp, ngoại tiếp khối lăng trụ

Câu 1. **(Mã 123 2017)** Tìm bán kính R mặt cầu ngoại tiếp một hình lập phương có cạnh bằng $2a$.

A. $R=\sqrt{3}a$ **B.** $R=a$ **C.** 100 **D.** $R=2\sqrt{3}a$

Câu 2. **(Mã 110 2017)** Cho mặt cầu bán kính R ngoại tiếp một hình lập phương cạnh a. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a=\frac{\sqrt{3}R}{3}$ **B.** $a=\frac{2\sqrt{3}R}{3}$ **C.** $a=2R$ **D.** $a=2\sqrt{3}R$

Câu 3. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$, $AD=AA'=2a$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp của hình hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $9\pi a^2$ **B.** $\frac{3\pi a^2}{4}$ **C.** $\frac{9\pi a^2}{4}$ **D.** $3\pi a^2$

Câu 4. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật có ba kích thước 1, 2, 3 là

A. 36π. **B.** $\frac{9\pi}{2}$. **C.** $\frac{7\pi\sqrt{14}}{3}$. **D.** $\frac{9\pi}{8}$.

Câu 5. **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình lập phương cạnh $3\,\text{cm}$ là

A. $\frac{27\pi\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^3$. **B.** $\frac{9\pi\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^3$. **C.** $9\pi\sqrt{3}\ \text{cm}^3$. **D.** $\frac{27\pi\sqrt{3}}{8}\ \text{cm}^3$.

Câu 6. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối hộp chữ nhật có kích thước a, $a\sqrt{3}$, $2a$ là

A. $8a^2$. **B.** $4\pi a^2$. **C.** $16\pi a^2$. **D.** $8\pi a^2$.

Câu 7. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình lập phương cạnh bằng $3\,\text{cm}$ là:

A. $\frac{27\sqrt{3}}{2}\pi\ \text{cm}^3$. **B.** $\frac{9\pi\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^3$. **C.** $9\pi\sqrt{3}\ \text{cm}^3$. **D.** $\frac{27\sqrt{3}}{8}\pi\ \text{cm}^3$.

Câu 8. **(Chuyên Nguyễn Huệ- 2019)** Tính đường kính mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng $a\sqrt{3}$.

A. $3a$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $6a$. **D.** $\frac{3a}{2}$.

Câu 9. Tính thể tích V cầu khối cầu nội tiếp hình lập phương cạnh a.

A. $V=\frac{\pi a^3}{6}$. **B.** $V=\frac{4\pi a^3}{3}$. **C.** $V=\frac{\pi a^3}{3}$. **D.** $V=\frac{\pi a^3}{2}$.

Câu 10. Cho khối cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của một hình lập phương. Gọi V_1; V_2 lần lượt là thể tích của khối cầu và khối lập phương đó. Tính $k=\frac{V_1}{V_2}$.

A. $k=\frac{2\pi}{3}$. **B.** $k=\frac{\pi}{6}$. **C.** $k=\frac{\pi}{3}$. **D.** $k=\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$.

Câu 11. Tính thể tích của khối cầu nội tiếp hình lập phương có cạnh bằng 1.

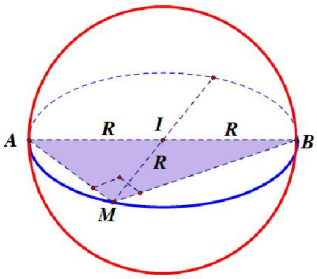
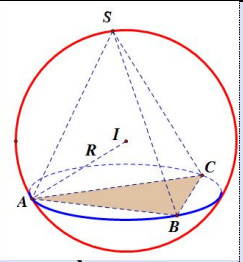
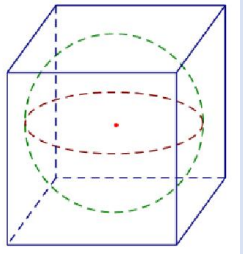
A. $\frac{\pi}{12}$. **B.** $\frac{\pi}{3}$. **C.** $\frac{\pi}{6}$. **D.** $\frac{2\pi}{3}$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 23 MẶT CẦU - KHỐI CẦU

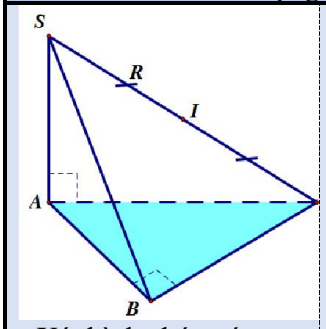
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – GIỎI MỨC 7-8-9-10 ĐIỂM

LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP

MẶT CẦU	**Một số công thức:**	**Mặt cầu ngoại tiếp đa diện** **Mặt cầu nội tiếp đa diện**
 ☞**Hình thành:** Quay đường tròn tâm I, bán kính $R=\frac{AB}{2}$ quanh trục AB, ta có mặt cầu như hình vẽ.	▪ **Tâm** I, **bán kính** $R=IA=IB=IM$. ▪ **Đường kính** $AB=2R$. ▪ **Thiết diện qua tâm** mặt cầu: Là đường tròn tâm I, bán kính R. ▪ **Diện tích** mặt cầu: $\boxed{S=4\pi R^2}$. ▪ **Thể tích** khối cầu: $\boxed{V=\frac{4\pi R^3}{3}}$.	 **Mặt cầu ngoại tiếp đa diện** là mặt cầu đi qua tất cả đỉnh của đa diện đó.  **Mặt cầu nội tiếp đa diện** là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của đa diện đó.

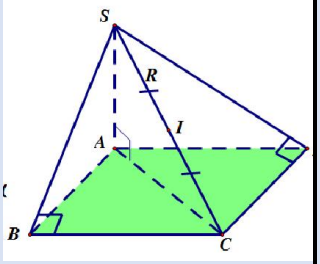
CÁCH TÌM BÁN KÍNH MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH CHÓP THƯỜNG GẶP

1. Hình chóp có các đỉnh nhìn một cạnh dưới một góc vuông.



▪ Xét hình chóp có $SA\perp(ABC)$ và $\widehat{ABC}=90^0$.

▪ Ta có $\widehat{SAC}=\widehat{SBC}=90^0$
$\widehat{SAC}=\widehat{SBC}=90^0$
nên mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có tâm I là trung điểm SC, bán kính $\boxed{R=\frac{SC}{2}}$.

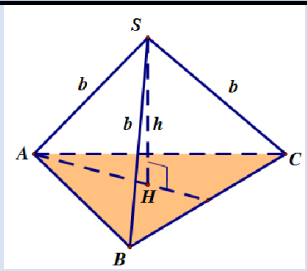


▪ Xét hình chóp có $SA\perp(ABCD)$ và $ABCD$ là hình chữ nhật hoặc hình vuông.

▪ Ta có: $\widehat{SAC}=\widehat{SBC}$
$=\widehat{SDC}=90^0$

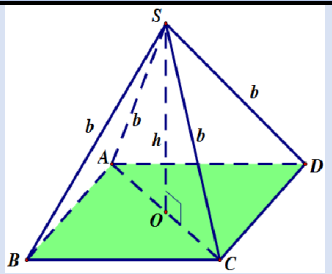
Suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có tâm I là trung điểm SC, bán kính $\boxed{R=\frac{SC}{2}}$.

2. Hình chóp đều.



▪ Xét hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng b và đường cao $SH=h$.

▪ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trên là $\boxed{R=\frac{b^2}{2h}}$.

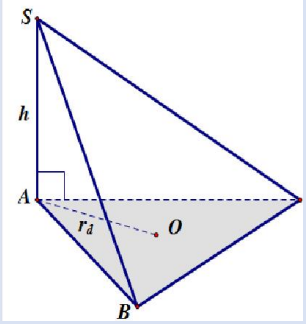


▪ Xét hình chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng b và chiều cao $SO=h$.

▪ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trên là $\boxed{R=\frac{b^2}{2h}}$.

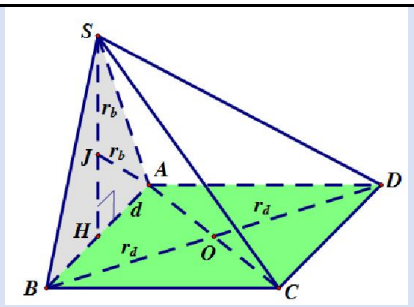
3. Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy.

4. Hình chóp có mặt bên vuông góc với mặt đáy.



- Xét hình chóp có $SA \perp$ (đáy) và $SA = h$; bán kính đường tròn ngoại tiếp của đáy là r_d.

- Khi đó mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có bán kính $R = \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r_d^2}$.
- Nếu đáy là tam giác đều cạnh a thì $r_d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
- Nếu đáy là hình vuông cạnh a thì $r_d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
- Nếu đáy là hình chữ nhật cạnh a, b thì $r_d = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.



- Xét hình chóp có mặt bên $(SAB) \perp$ (đáy), bán kính ngoại tiếp đáy là r_d, bán kính ngoại tiếp ΔSAB là r_b, $d = AB = (SAB) \cap$ (đáy). (đoạn giao tuyến)
- Khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $R = \sqrt{r_d^2 + r_b^2 - \frac{d^2}{4}}$.

Dạng 1. Khối cầu ngoại tiếp khối lăng trụ

Câu 1. **(THPT Ninh Bình-Bạc Liêu-2019)** Một hình hộp chữ nhật có ba kích thước a, b, c nội tiếp một mặt cầu. Tính diện tích S của mặt cầu đó

A. $S = 16\left(a^2+b^2+c^2\right)\pi$. **B.** $S = \left(a^2+b^2+c^2\right)\pi$.

C. $S = 4\left(a^2+b^2+c^2\right)\pi$. **D.** $S = 8\left(a^2+b^2+c^2\right)\pi$.

Câu 2. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Cho lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a cạnh bên bằng b. Tính thể tích của khối cầu đi qua các đỉnh của lăng trụ.

A. $\frac{1}{18\sqrt{3}}\sqrt{\left(4a^2+3b^2\right)^3}$. **B.** $\frac{\pi}{18\sqrt{3}}\sqrt{\left(4a^2+3b^2\right)^3}$.

C. $\frac{\pi}{18\sqrt{3}}\sqrt{\left(4a^2+b^2\right)^3}$. **D.** $\frac{\pi}{18\sqrt{2}}\sqrt{\left(4a^2+3b^2\right)^3}$.

Câu 3. Một mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có kích thước $AB = 4a$, $AD = 5a$, $AA' = 3a$. Mặt cầu trên có bán kính bằng bao nhiêu?

A. $\frac{5\sqrt{2}a}{2}$. **B.** $6a$. **C.** $2\sqrt{3}a$. **D.** $\frac{3\sqrt{2}a}{2}$.

Câu 4. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chữ nhật có ba kích thước $1, 2, 3$ là

A. $\frac{9\pi}{8}$. **B.** $\frac{9\pi}{2}$. **C.** 36π. **D.** $\frac{7\sqrt{14}\pi}{3}$.

Câu 5. **(Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa 2019)** Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp của một hình lập phương có cạnh bằng $2a$

A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $R = a$. **C.** $R = 2a\sqrt{3}$. **D.** $R = a\sqrt{3}$.

Câu 6. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối hộp chữ nhật có kích thước a, $a\sqrt{3}$ và $2a$.

A. $8a^2$. **B.** $4\pi a^2$. **C.** $16\pi a^2$. **D.** $8\pi a^2$.

Câu 7. **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$, $AD=AA'=2a$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp đã cho bằng

A. $9\pi a^2$. **B.** $\frac{3\pi a^2}{4}$. **C.** $\frac{9\pi a^2}{4}$. **D.** $3\pi a^2$.

Câu 8. Cho hình lập phương có cạnh bằng a. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình lập phương đó bằng

A. $V=\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi a^3$. **B.** $V=4\sqrt{3}\pi a^3$. **C.** $V=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 9. **(Nho Quan A - Ninh Bình - 2019)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $3\pi a^2$. **B.** πa^2. **C.** $\frac{4\pi a^2}{3}$. **D.** $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$.

Câu 10. **(Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa 2019)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$.

A. $R=a\sqrt{3}$. **B.** $R=\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $R=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $R=2a$.

Câu 11. **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, $AB=a$, $AA'=a\sqrt{3}$. Tính bán kính R của mặt cầu đi qua tất cả các đỉnh của hình lăng trụ theo a.

A. $R=\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $R=\frac{a}{2}$. **C.** $R=2a$. **D.** $R=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 12. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a.

A. $\frac{7\pi a^2}{3}$. **B.** $\frac{\pi a^3}{8}$. **C.** πa^2. **D.** $\frac{7\pi a^2}{9}$.

Câu 13. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho hình lập phương có cạnh bằng 1. Thể tích mặt cầu đi qua các đỉnh của hình lập phương là

A. $\frac{2\pi}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$. **C.** $\frac{3\pi}{2}$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}$.

Câu 14. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Đường kính của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương là

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

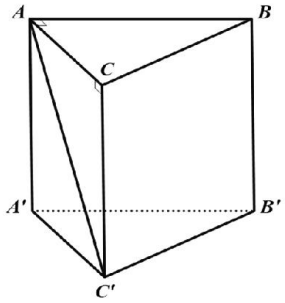
Câu 15. Tỉ số thể tích giữa khối lập phương và khối cầu ngoại tiếp khối lập phương đó bằng

A. $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{2\pi}$. **D.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$.

Câu 16. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$, $AD=2a$, $AA'=3a$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $\frac{28\sqrt{14}\pi a^3}{3}$. **B.** $\sqrt{6}\pi a^3$. **C.** $\frac{7\sqrt{14}\pi a^3}{3}$. **D.** $4\sqrt{6}\pi a^3$.

Câu 17. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a\sqrt{3}$, $BC=2a$, đường thẳng AC' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc $30°$ (tham khảo hình vẽ bên dưới). Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho?



A. $S=24\pi a^2$. **B.** $S=6\pi a^2$. **C.** $S=4\pi a^2$. **D.** $S=3\pi a^2$.

Câu 18. **(Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AA'=2a$, $BC=a$. Gọi M là trung điểm của BB'. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $M.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{3\sqrt{3}a}{8}$. **B.** $\frac{\sqrt{13}a}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{21}a}{6}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

Câu 19. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 4, đáy ABC là tam giác cân tại A với $AB=AC=2$; $\widehat{BAC}=120°$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ trên

A. $\frac{64\pi\sqrt{2}}{3}$. **B.** 16π. **C.** 32π. **D.** $\frac{32\pi\sqrt{2}}{3}$.

Câu 20. **(Chuyên Sơn La - 2020)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có các cạnh đều bằng a. Tính diện tích S của mặt cầu đi qua 6 đỉnh của hình lăng trụ đó.

A. $S=\frac{7\pi a^2}{3}$. **B.** $S=\frac{7a^2}{3}$. **C.** $S=\frac{49\pi a^2}{144}$. **D.** $S=\frac{49a^2}{114}$.

Dạng 2. Khối cầu ngoại tiếp khối chóp

Dạng 2.1 Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

Câu 1. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $4a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{172\pi a^2}{3}$. **B.** $\frac{76\pi a^2}{3}$. **C.** $84\pi a^2$. **D.** $\frac{172\pi a^2}{9}$

Câu 2. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $4a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng $30°$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $52\pi a^2$. **B.** $\frac{172\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{76\pi a^2}{9}$. **D.** $\frac{76\pi a^2}{3}$.

Câu 3. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt (SBC) và mặt phẳng đáy là 60°. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{43\pi a^2}{3}$. **B.** $\frac{19\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{43\pi a^2}{9}$. **D.** $21\pi a^2$.

Câu 4. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng 30^0. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{43\pi a^2}{3}$. **B.** $\frac{19\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{19\pi a^2}{9}$. **D.** $13\pi a^2$.

Câu 5. **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Cho hình chóp $ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D. Biết SA vuông góc với $ABCD$, $AB = BC = a$, $AD = 2a, SA = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của AD. Bán kính mặt cầu đi qua các điểm S, A, B, C, E bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{30}}{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** a.

Câu 6. **(Sở Yên Bái - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có đường chéo bằng $a\sqrt{2}$, cạnh SA có độ dài bằng $2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{12}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 7. **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình vuông cạnh bằng x. Cạnh bên $SA = x\sqrt{6}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính theo x diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

A. $8\pi x^2$. **B.** $x^2\sqrt{2}$. **C.** $2\pi x^2$. **D.** $2x^2$.

Câu 8. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính theo a diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

A. $8\pi a^2$. **B.** $a^2\sqrt{2}$. **C.** $2\pi a^2$. **D.** $2a^2$.

Câu 9. **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Trong không gian, cho hình chóp $S.ABC$ có SA, AB, BC đôi một vuông góc với nhau và $SA = a, AB = b, BC = c$. Mặt cầu đi qua S, A, B, C có bán kính bằng

A. $\frac{2(a+b+c)}{3}$. **B.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **C.** $2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **D.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Câu 10. **(Mã 105 2017)** Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD vuông tại C, AB vuông góc với mặt phẳng (BCD), $AB = 5a$, $BC = 3a$ và $CD = 4a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $R = \frac{5a\sqrt{2}}{3}$ **B.** $R = \frac{5a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $R = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $R = \frac{5a\sqrt{3}}{2}$

Câu 11. **(Mã 104 2017)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 3a$, $BC = 4a$, $SA = 12a$ và SA vuông góc với đáy. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $R = \frac{13a}{2}$ **B.** $R = 6a$ **C.** $R = \frac{5a}{2}$ **D.** $R = \frac{17a}{2}$

Câu 12. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). $SA = 5$, $AB = 3$, $BC = 4$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

A. $R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. **B.** $R = 5$. **C.** $R = \frac{5}{2}$. **D.** $R = 5\sqrt{2}$.

Câu 13. **(KTNL Gia Bình 2019)** Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 8$, $BC = 6$. Biết $SA = 6$ và $SA \perp (ABC)$. Tính thể tích khối cầu có tâm thuộc phần không gian bên trong của hình chóp và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng của hình chóp $SABC$.

A. $\frac{16\pi}{9}$ **B.** $\frac{625\pi}{81}$ **C.** $\frac{256\pi}{81}$ **D.** $\frac{25\pi}{9}$

Câu 14. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao SA, đáy ABC là tam giác vuông tại A. Biết $SA=6a, AB=2a, AC=4a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$?

A. $R=2a\sqrt{7}$. **B.** $R=a\sqrt{14}$. **C.** $R=2a\sqrt{3}$. **D.** $r=2a\sqrt{5}$.

Câu 15. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có đường chéo bằng $\sqrt{2}a$, cạnh SA có độ dài bằng $2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$?

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{12}$.

Câu 16. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BAC}=60°$, $BC=a$, $SA\perp(ABC)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC. Bán kính mặt cầu đi qua các điểm A,B,C,M,N bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ **C.** a **D.** $2a$

Câu 17. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB=a, SA\perp(ABCD)$, SC tạo với mặt đáy một góc 45^0. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có bán kính bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $2a^3$. **B.** $2a^3\sqrt{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 18. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có ABCD là hình vuông cạnh bằng a. $SA\perp(ABCD), SA=a\sqrt{3}$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp?

A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $2a$. **C.** $a\sqrt{5}$. **D.** $a\sqrt{7}$.

Câu 19. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $BC=2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SC, khi đó thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $AHKCB$ là

A. $\sqrt{2}\pi a^3$. **B.** $\frac{\pi a^3}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{2}$. **D.** $\frac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Câu 20. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Cho hình chóp $SABC$, đáy ABC là tam giác đều cạnh a; $SA\perp(ABC)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên $SB; SC$. Diện tích mặt cầu đi qua 5 điểm A,B,C,K,H là

A. $\frac{4\pi a^2}{9}$. **B.** $3\pi a^2$. **C.** $\frac{4\pi a^2}{3}$. **D.** $\frac{\pi a^2}{3}$.

Câu 21. **(Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AB=a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng SC tạo với đáy một góc 60^0. Tính diện tích mặt cầu đi qua bốn đỉnh của hình chóp $SABC$

A. $8a^2\pi$. **B.** $\frac{32a^2}{3}\pi$. **C.** $\frac{8a^2\pi}{3}$ **D.** $4a^2\pi$.

Câu 22. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC vuông tại B. Biết $SA=2a, AB=a, BC=a\sqrt{3}$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

A. a. **B.** $2a\sqrt{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $x=3\,;\ y=\dfrac{1}{2}$.

Câu 23. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết thể tích của khối chóp bằng $\dfrac{a^3}{6}$. Tính bán kính r của mặt cầu nội tiếp của hình chóp $S.ABC$.

A. $r=\dfrac{a}{3+\sqrt{3}}$. **B.** $r=2a$. **C.** $r=\dfrac{a}{3\left(3+2\sqrt{3}\right)}$. **D.** $r=\dfrac{2a}{3\left(3+2\sqrt{3}\right)}$.

Câu 24. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Đường thẳng $SA=a\sqrt{2}$ vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm SC, mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A và M đồng thời song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E, F. Bán kính mặt cầu đi qua năm điểm S, A, E, M, F nhận giá trị nào sau đây?

A. a **B.** $\dfrac{a}{2}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $a\sqrt{2}$

Câu 25. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Trong không gian cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB=BC=1, AD=2$, cạnh bên $SA=1$ và SA vuông góc với đáy. Gọi E là trung điểm AD. Tính diện tích S_{mc} của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDE$.

A. $S_{mc}=11\pi$. **B.** $S_{mc}=5\pi$. **C.** $S_{mc}=2\pi$. **D.** $S_{mc}=3\pi$.

Câu 26. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB=2, AC=4, SA=\sqrt{5}$. Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình chóp $S.ABC$ có bán kính là:

A. $R=\dfrac{25}{2}$. **B.** $R=\dfrac{5}{2}$. **C.** $R=5$. **D.** $R=\dfrac{10}{3}$.

Dạng 2.2 Khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy

Câu 1. **(THPT-Thang-Long-Ha-Noi- 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có các mặt ABC và BCD là các tam giác đều cạnh bằng 2; hai mặt phẳng (ABD) và (ACD) vuông góc với nhau. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 2. **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{5\sqrt{15}\pi}{18}$ **B.** $V=\dfrac{5\sqrt{15}\pi}{54}$ **C.** $V=\dfrac{4\sqrt{3}\pi}{27}$ **D.** $V=\dfrac{5\pi}{3}$

Câu 3. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân, $AB=2a$, $CD=a$, $\widehat{ABC}=60^0$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

A. $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $R=a$ **C.** $R=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $R=\dfrac{2a}{3}$

Câu 4. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=a, AD=2a$. Tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ theo a.

A. $6\pi a^2$. **B.** $10\pi a^2$. **C.** $3\pi a^2$. **D.** $5\pi a^2$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=a, \widehat{ACB}=30^0$. Biết SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABC). Tính diện tích mặt cầu S_{mc} ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $S_{mc}=\dfrac{7\pi a^2}{3}$. **B.** $S_{mc}=\dfrac{13\pi a^2}{3}$. **C.** $S_{mc}=\dfrac{7\pi a^2}{12}$. **D.** $S_{mc}=4\pi a^2$.

Câu 6. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

A. $S=3\pi a^2$. **B.** $S=\dfrac{4\pi a^2}{3}$. **C.** $S=\dfrac{7\pi a^2}{3}$. **D.** $S=7\pi a^2$.

Câu 7. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V=\dfrac{7\sqrt{21}\pi a^3}{54}$. **B.** $V=\dfrac{7\sqrt{21}\pi a^3}{18}$. **C.** $V=\dfrac{4\sqrt{3}\pi a^3}{81}$. **D.** $V=\dfrac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27}$.

Câu 8. **(Sở Phú Thọ 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=BC=AC=BD=2a, AD=a\sqrt{3}$; hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) vuông góc với nhau. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{64\pi a^2}{27}$ **B.** $\dfrac{4\pi a^2}{27}$ **C.** $\dfrac{16\pi a^2}{9}$ **D.** $\dfrac{64\pi a^2}{9}$

Câu 9. **(THPT Nghĩa Hưng NĐ- 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết rằng $AB=a, AD=a\sqrt{3}$ và $\widehat{ASB}=60°$. Tính diện tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $S=\dfrac{13\pi a^2}{2}$. **B.** $S=\dfrac{13\pi a^2}{3}$. **C.** $S=\dfrac{11\pi a^2}{2}$. **D.** $S=\dfrac{11\pi a^2}{3}$.

Câu 10. **(Thi thử hội 8 trường chuyên 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $AB=2a, AD=a.$ Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{57}}{6}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{19}}{4}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{15}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{13}}{3}$.

Câu 11. **(Nam Định 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $\dfrac{5a^2\pi}{12}$. **B.** $\dfrac{5a^2\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{5a^2}{3}$. **D.** $\dfrac{5a^2}{12}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=a$, $AD=2a$. Tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $6\pi a^2$. **B.** $10\pi a^2$. **C.** $3\pi a^2$. **D.** $5\pi a^2$.

Dạng 2.3 Khối chóp đều

Câu 1. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Nếu tứ diện đều có cạnh bằng a thì mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện có bán kính bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}a$, cạnh bên bằng $5a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $R=\sqrt{3}a$. **B.** $R=\sqrt{2}a$. **C.** $R=\frac{25a}{8}$. **D.** $R=2a$.

Câu 3. Hình chóp đều $S.ABCD$ tất cả các cạnh bằng a. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là

A. $4\pi a^2$. **B.** πa^2. **C.** $\sqrt{2}\pi a^2$ **D.** $2\pi a^2$.

Câu 4. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều có góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Biết rằng mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó có bán kính $R=a\sqrt{3}$. Tính độ dài cạnh đáy của hình chóp tứ giác đều nói trên.

A. $\frac{12}{5}a$ **B.** $2a$ **C.** $\frac{3}{2}a$ **D.** $\frac{9}{4}a$

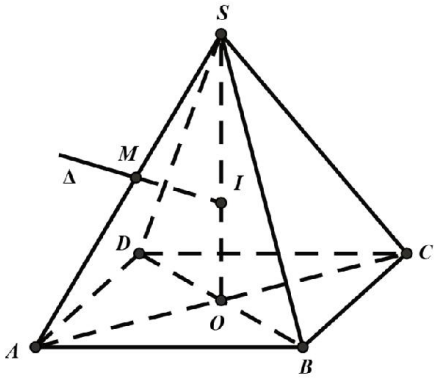
Câu 5. **(Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $AB=a$, góc giữa mặt bên với mặt phẳng đáy bằng 60^0. Tính bán kính mặt cầu đi qua bốn đỉnh của hình chóp $S.ABC$

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{7a}{12}$. **C.** $\frac{7a}{16}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Câu 6. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều có góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Biết rằng mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó có bán kính $R=a\sqrt{3}$. Tính độ dài cạnh đáy của hình chóp tứ giác đều nói trên.

A. $\frac{12}{5}a$. **B.** $2a$. **C.** $\frac{3}{2}a$. **D.** $\frac{9}{4}a$.

Câu 7. **(Gia Lai 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc $60°$ (tham khảo hình vẽ). Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.



A. $\frac{8\pi a^2}{3}$. **B.** $\frac{5\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}\pi a^2}{3}$. **D.** $\frac{7\pi a^2}{3}$.

Câu 8. **(Vũng Tàu - 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. $2\pi a^2$. **B.** πa^2. **C.** $\frac{2}{3}\pi a^2$. **D.** $\frac{1}{2}\pi a^2$.

Câu 9. Cho tứ diện đều có thể tích bằng $\frac{1}{3}$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện

A. $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $R=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $R=\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $R=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 10. Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp.

A. $V=3\pi a^3\sqrt{6}$. **B.** $V=\pi a^3\sqrt{6}$. **C.** $V=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{8}$. **D.** $V=\frac{3\pi a^3\sqrt{6}}{8}$.

Câu 11. **(Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy bằng $45°$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{4\pi a^2}{3}$ **B.** $\frac{3\pi a^2}{4}$ **C.** $\frac{2\pi a^2}{3}$ **D.** $\frac{9\pi a^2}{4}$

Dạng 2.4 Khối chóp khác

Câu 1. **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Cho mặt cầu tâm O và tam giác ABC có ba đỉnh nằm trên mặt cầu với góc $\overset{\frown}{BAC}=30^0$ và $BC=a$. Gọi S là điểm nằm trên mặt cầu, không thuộc mặt phẳng (ABC) và thỏa mãn $SA=SB=SC$, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích V của khối cầu tâm O theo a.

A. $V=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi a^3$ **B.** $V=\frac{32\sqrt{3}}{27}\pi a^3$ **C.** $V=\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi a^3$ **D.** $V=\frac{15\sqrt{3}}{27}\pi a^3$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 2. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, các cạnh còn lại cùng bằng a. Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A. $R=\frac{a\sqrt{13}}{2}$ **B.** $R=\frac{a}{3}$ **C.** $R=\frac{a\sqrt{13}}{3}$ **D.** $R=\frac{a\sqrt{13}}{6}$

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=a$, $\widehat{ASB}=\widehat{ASC}=90°$, $\widehat{BSC}=60°$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

A. $\frac{7\pi a^2}{18}$ **B.** $\frac{7\pi a^2}{12}$ **C.** $\frac{7\pi a^2}{3}$ **D.** $\frac{7\pi a^2}{6}$

Câu 4. **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn AC thoả mãn $AC=4AH$ và $SH=a$. Tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$ (mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt bên của hình chóp)

A. $\frac{4a}{9+\sqrt{13}}$. **B.** $\frac{4a}{5+\sqrt{17}}$. **C.** $\frac{4a}{5+\sqrt{13}}$. **D.** $\frac{4a}{9+\sqrt{17}}$.

Câu 5. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=3, AD=4$ và các cạnh bên của hình chóp tạo với mặt đáy một góc $60°$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V=\frac{250\sqrt{3}}{3}\pi$. **B.** $V=\frac{125\sqrt{3}}{6}\pi$. **C.** $V=\frac{50\sqrt{3}}{3}\pi$. **D.** $V=\frac{500\sqrt{3}}{27}\pi$.

Câu 6. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và tam giác SCD vuông cân tại S. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

A. $\frac{7\pi a^2}{3}$. **B.** $\frac{8\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{5\pi a^2}{3}$. **D.** πa^2

Câu 7. **(Chuyên Hưng Yên 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I cạnh $AB=3a$, $BC=4a$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của ID. Biết rằng SB tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc $45°$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{25\pi}{2}a^2$. **B.** $\frac{125\pi}{4}a^2$. **C.** $\frac{125\pi}{2}a^2$. **D.** $4\pi a^2$.

Câu 8. **(Chuyên Hạ Long -2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=3$, $AD=BC=5$, $AC=BD=6$. Tính thê tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $35\ \pi$ (đvtt). **B.** 35 (đvtt). **C.** $\frac{35\sqrt{35}}{6}\ \pi$ (đvtt). **D.** $35\sqrt{35}\ \pi$ (đvtt).

Câu 9. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Cho đường tròn tâm O có đường kính $AB=2a$ nằm trong mặt phẳng (P). Gọi I là điểm đối xứng với O qua A. Lấy điểm S sao cho SI vuông góc với mặt phẳng (P) và $SI=2a$. Tính bán kính R của mặt cầu qua đường tròn tâm O và điểm S.

A. $R=\frac{a\sqrt{65}}{4}$. **B.** $R=\frac{a\sqrt{65}}{16}$. **C.** $R=a\sqrt{5}$. **D.** $R=\frac{7a}{4}$.

Câu 10. **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB=BC=3a\sqrt{2}$, $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^0$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $2a\sqrt{3}$. Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $72\sqrt{18}\pi a^3$. **B.** $18\sqrt{18}\pi a^3$. **C.** $6\sqrt{18}\pi a^3$. **D.** $24\sqrt{18}\pi a^3$.

Câu 11. **(Chuyên ĐHSP Hà Nội 2019)** Cho hình chóp $O.ABC$ có $OA=OB=OC=a$, $\widehat{AOB}=60°$, $\widehat{BOC}=90°$, $\widehat{AOC}=120°$. Gọi S là trung điểm cạnh OB. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a}{4}$ **B.** $\frac{a\sqrt{7}}{4}$ **C.** $\frac{a\sqrt{7}}{2}$ **D.** $\frac{a}{2}$

Câu 12. **(Hsg Bắc Ninh 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=6a$, $CD=8a$ và các cạnh còn lại bằng $a\sqrt{74}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $S=25\pi a^2$. **B.** $S=100\pi a^2$. **C.** $S=\frac{100}{3}\pi a^2$. **D.** $S=96\pi a^2$.

Câu 13. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a\sqrt{3}$, $BC=2a$, đường thẳng AC' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc $30°$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đã cho bằng:

A. $3\pi a^2$. **B.** $6\pi a^2$. **C.** $4\pi a^2$. **D.** $24\pi a^2$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC), $AB=a, AC=a\sqrt{2}, \widehat{BAC}=45^0$. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC_1B_1$ bằng

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{\pi a^3}{\sqrt{2}}$. **C.** $\pi a^3\sqrt{2}$. **D.** $\frac{4}{3}\pi a^3$.

Câu 15. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BC$. Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $G.ABC$.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{12}$. **B.** a. **C.** $\frac{7a}{12}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Câu 16. **(Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, $AB=a$, $AC=a\sqrt{2}$, $\widehat{BAC}=45°$. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC_1B_1$ bằng

A. $\frac{\pi a^3}{\sqrt{2}}$. **B.** $\pi a^3\sqrt{2}$. **C.** $\frac{4}{3}\pi a^3$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 17. **(Thi thử Lômônôxốp - Hà Nội 2019)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A và $AB=AC=a\sqrt{2}$, $AA'=2a$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình tứ diện $AA'B'C$ là:

A. $\frac{8\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. **C.** $\frac{4\pi a^3}{3}$. **D.** $\frac{4\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác với $AB=2\text{cm}, AC=3\text{cm}$, $\widehat{BAC}=60^0$, $SA\perp(ABC)$. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC. Tính thể tích khối cầu đi qua năm điểm A, B, C, B_1, C_1.

A. $\frac{28\sqrt{21}\pi}{27}\text{cm}^3$. **B.** $\frac{76\sqrt{57}\pi}{27}\text{cm}^3$. **C.** $\frac{7\sqrt{7}\pi}{6}\text{cm}^3$. **D.** $\frac{27\pi}{6}\text{cm}^3$.

Câu 19. **(Trường THPT Thăng Long 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có các mặt ABC và BCD là các tam giác đều cạnh bằng 2, hai mặt phẳng (ABD) và (ACD) vuông góc với nhau. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 20. **(Cụm liên trường Hải Phòng -2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Đường thẳng $SA=a\sqrt{2}$ vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của SC, mặt phẳng (α) đi qua điểm A và M đồng thời song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E, F. Bán kính mặt cầu đi qua năm điểm S, A, E, M, F nhận giá trị nào sau đây?

A. a. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

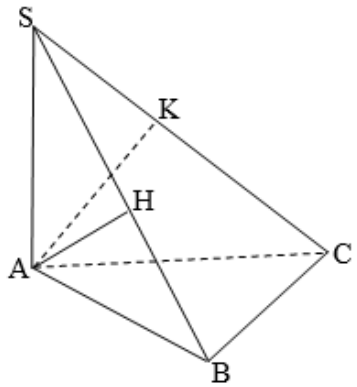
Câu 21. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=3, AD=4$ và các cạnh bên của hình chóp tạo với mặt đáy một góc $60°$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V=\frac{250\sqrt{3}}{3}\pi$. **B.** $V=\frac{125\sqrt{3}}{6}\pi$. **C.** $V=\frac{50\sqrt{3}}{3}\pi$. **D.** $V=\frac{500\sqrt{3}}{27}\pi$.

Câu 22. **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 1. Mặt bên (SAC) là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SA=SC=\frac{3}{2}$. Gọi D là điểm đối xứng với B qua C. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABD$.

A. $\frac{\sqrt{34}}{8}$. **B.** $\frac{3\sqrt{34}}{4}$. **C.** $\frac{3\sqrt{34}}{16}$. **D.** $\frac{3\sqrt{34}}{8}$.

Câu 23. **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020)** Cho hình chóp *S.ABC* có *SA* vuông góc với đáy, đáy là tam giác đều, $SA=a\sqrt{3}$ và góc giữa đường thẳng *SB* và đáy bằng 60^0. Gọi *H*, *K* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *A* lên *SB*, ***SC.*** Tính bán kính mặt cầu đi qua các điểm *A*, *B*, *H*, *K*.



A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a}{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Câu 24. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $BC=a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC). Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC. Thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.HKCB$ bằng

A. $\sqrt{2}\pi a^3$. **B.** $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. **C.** $\frac{\pi a^3}{6}$. **D.** $\frac{\pi a^3}{2}$.

Câu 25. **(Sở Ninh Bình 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, $AB=\sqrt{3}$, $AC=2$ và $\widehat{BAC}=30°$. Gọi M,N lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC. Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$ là

A. $R=2$. **B.** $R=\sqrt{13}$. **C.** $R=1$. **D.** $R=\sqrt{2}$.

Câu 26. **(Kìm Thành - Hải Dương - 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $AB=a, AC=a\sqrt{2}, \widehat{BAC}=45°$. Gọi B_1,C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB,SC. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $ABCC_1B_1$ bằng

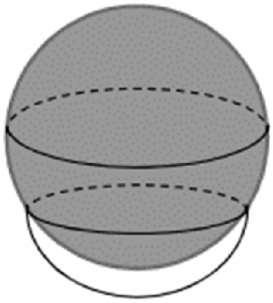
A. $\frac{\pi a^3}{\sqrt{2}}$. **B.** $\pi a^3\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}\pi a^3$.

Chuyên đề 23 MẶT CẦU - KHỐI CẦU

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

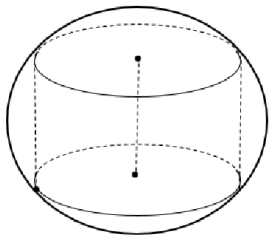
MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TẾ - CỰC TRỊ LIÊN QUAN ĐẾN MẶT CẦU – KHỐI CẦU

Câu 1. Cho một bán cầu đựng đầy nước với bán kính $R=2$. Người ta bỏ vào đó một quả cầu có bán kính bằng $2R$. Tính lượng nước còn lại trong bán cầu ban đầu.



A. $V=\left(24\sqrt{3}-\frac{112}{3}\right)\pi$. **B.** $V=\frac{16\pi}{3}$. **C.** $V=\frac{8}{3}\pi$. **D.** $V=\left(24\sqrt{3}-40\right)\pi$.

Câu 2. Cho khối cầu (S) tâm I, bán kính R không đổi. Một khối trụ thay đổi có chiều cao h và bán kính đáy r nội tiếp khối cầu. Tính chiều cao h theo R sao cho thể tích khối trụ lớn nhất.



A. $h=\frac{R\sqrt{2}}{2}$. **B.** $h=\frac{2R\sqrt{3}}{3}$. **C.** $h=R\sqrt{2}$. **D.** $h=\frac{R\sqrt{3}}{3}$.

Câu 3. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Một cơ sở sản suất đồ gia dụng được đặt hàng làm các chiếc hộp kín hình trụ bằng nhôm để đựng rượu có thể tích là $V=28\pi a^3\ (a>0)$. Để tiết kiệm sản suất và mang lại lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sẽ sản suất những chiếc hộp hình trụ có bán kính là R sao cho diện tích nhôm cần dùng là ít nhất. Tìm R

A. $R=a\sqrt[3]{7}$ **B.** $R=2a\sqrt[3]{7}$ **C.** $R=2a\sqrt[3]{14}$ **D.** $R=a\sqrt[3]{14}$

Câu 4. **(Mã 104 2017)** Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9, tính thể tích V của khối chóp có thể tích lớn nhất.

A. $V=576\sqrt{2}$ **B.** $V=144\sqrt{6}$ **C.** $V=144$ **D.** $V=576$

Câu 5. **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9, khối chóp có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu ?

A. $576\sqrt{2}$. **B.** 144. **C.** 576. **D.** $144\sqrt{6}$.

Câu 6. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Trong không gian $Oxyz$, lấy điểm C trên tia Oz sao cho $OC=1$. Trên hai tia Ox,Oy lần lượt lấy hai điểm A,B thay đổi sao cho $OA+OB=OC$. Tìm giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$?

A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ **B.** $\sqrt{6}$ **C.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **D.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$

Câu 7. **(KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, các cạnh bên của hình chóp bằng $\sqrt{6}\ cm$, $AB=4\ cm$. Khi thể tích khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất, tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp $S.ABCD$.

A. $12\pi\ cm^2$. **B.** $4\pi\ cm^2$. **C.** $9\pi\ cm^2$. **D.** $36\pi\ cm^2$.

Câu 8. Cho mặt cầu (S) có bán kính $R=5$. Khối tứ diện $ABCD$ có tất cả các đỉnh thay đổi và cùng thuộc mặt cầu (S) sao cho tam giác ABC vuông cân tại B và $DA=DB=DC$. Biết thể tích lớn nhất của khối tứ diện $ABCD$ là $\frac{a}{b}$ (a,b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản), tính $a+b$.

A. $a+b=1173$. **B.** $a+b=4081$. **C.** $a+b=128$. **D.** $a+b=5035$.

Câu 9. Trong không gian cho tam giác ABC có $AB=2R, AC=R, \widehat{CAB}=120^0$. Gọi M là điểm thay đổi thuộc mặt cầu tâm B, bán kính R. Giá trị nhỏ nhất của $MA+2MC$ là

A. $4R$. **B.** $6R$. **C.** $R\sqrt{19}$. **D.** $2R\sqrt{7}$.

Câu 10. Cho mặt cầu (S) có bán kính bằng $3(m)$, đường kính AB. Qua A và B dựng các tia At_1, Bt_2 tiếp xúc với mặt cầu và vuông góc với nhau. M và N là hai điểm lần lượt di chuyển trên At_1, Bt_2 sao cho MN cũng tiếp xúc với (S). Biết rằng khối tứ diện $ABMN$ có thể tích $V(m^3)$ không đổi. V thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(17;21)$. **B.** $(15;17)$. **C.** $(25;28)$. **D.** $(23;25)$.

Câu 11. Trên mặt phẳng (P) cho góc $\widehat{xOy}=60°$. Đoạn $SO=a$ và vuông góc với mặt phẳng (α). Các điểm $M;N$ chuyển động trên Ox,Oy sao cho ta luôn có: $OM+ON=a$. Tính diện tích của mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất ngoại tiếp tứ diện $SOMN$.

A. $\frac{4\pi a^2}{3}$. **B.** $\frac{\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{8\pi a^2}{3}$. **D.** $\frac{16\pi a^2}{3}$.

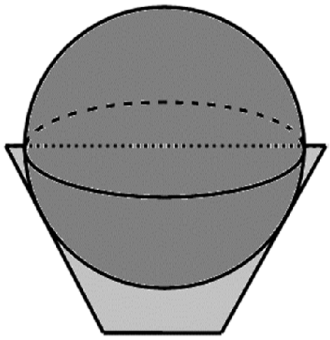
Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$ có hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD) là H nằm trong tam giác BCD. Biết rằng H cũng là tâm của một mặt cầu bán kính $\sqrt{3}$ và tiếp xúc các cạnh AB, AC, AD. Dựng hình bình hành $AHBS$. Tính giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCD$

A. 3. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 13. **(SGD Điện Biên - 2019)** Một vật thể đựng đầy nước hình lập phương không có nắp. Khi thả một khối cầu kim loại đặc vào trong hình lập phương thì thấy khối cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình lập phương đó. Tính bán kính của khối cầu, biết thể tích nước còn lại trong hình lập phương là 10. Giả sử các mặt của hình lập phương có độ dày không đáng kể

A. $\sqrt[3]{\frac{15}{12-2\pi}}$. **B.** $\sqrt[3]{\frac{9}{24-4\pi}}$. **C.** $\sqrt[3]{\frac{15}{24-4\pi}}$. **D.** $\sqrt[3]{\frac{9}{12-2\pi}}$.

Câu 14. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Một cái thùng đựng đầy nước được tạo thành từ việc cắt mặt xung quanh của một hình nón bởi một mặt phẳng vuông góc với trục của hình nón. Miệng thùng là đường tròn có bán kính bằng ba lần bán kính mặt đáy của thùng. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng $\frac{3}{2}$ chiều cao của thùng nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $54\sqrt{3}\pi\ (dm^3)$. Biết rằng khối cầu tiếp xúc với mặt trong của thùng và đúng một nửa của khối cầu đã chìm trong nước (hình vẽ). Thể tích nước còn lại trong thùng có giá trị nào sau đây?



A. $\frac{46}{5}\sqrt{3}\pi\left(dm^3\right)$. **B.** $18\sqrt{3}\pi\left(dm^3\right)$. **C.** $\frac{46}{3}\sqrt{3}\pi\left(dm^3\right)$. **D.** $18\pi\left(dm^3\right)$.

Câu 15. **(THPT Mai Anh Tuấn_Thanh Hóa - 2019)** Cho tứ diện $OABC$ có $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ và đôi một vuông góc với nhau. Gọi r là bán kính mặt cầu tiếp xúc với cả bốn mặt của tứ diện. Giả sử $a\ge b, a\ge c$. Giá trị nhỏ nhất của $\frac{a}{r}$ là

A. $1+\sqrt{3}$. **B.** $2+\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $3+\sqrt{3}$.

Câu 16. Cho hai mặt cầu $\left(S_1\right)$ và $\left(S_2\right)$ đồng tâm O, có bán kính lần lượt là $R_1=2$ và $R_2=\sqrt{10}$. Xét tứ diện $ABCD$ có hai đỉnh A,B nằm trên $\left(S_1\right)$ và hai đỉnh C,D nằm trên $\left(S_2\right)$. Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $ABCD$ bằng

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $7\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $6\sqrt{2}$.

Câu 17. Cho tứ diện đều $ABCD$ có mặt cầu nội tiếp là $\left(S_1\right)$ và mặt cầu ngoại tiếp là $\left(S_2\right)$, hình lập phương ngoại tiếp $\left(S_2\right)$ và nội tiếp trong mặt cầu $\left(S_3\right)$. Gọi r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính các mặt cầu $\left(S_1\right)$, $\left(S_2\right)$, $\left(S_3\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(*Mặt cầu nội tiếp tứ diện là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của tứ diện, mặt cầu nội tiếp hình lập phương là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình lập phương*).

A. $\frac{r_1}{r_2}=\frac{1}{3}$ và $\frac{r_2}{r_3}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{r_1}{r_2}=\frac{2}{3}$ và $\frac{r_2}{r_3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{r_1}{r_2}=\frac{1}{3}$ và $\frac{r_2}{r_3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{r_1}{r_2}=\frac{2}{3}$ và $\frac{r_2}{r_3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 18. **(THPT Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $\widehat{ABC}=\widehat{ADC}=90°$, cạnh bên SA vuông góc với $\left(ABCD\right)$, góc tạo bởi SC và đáy $ABCD$ bằng $60°$, $CD=a$ và tam giác ADC có diện tích bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Diện tích mặt cầu S_{mc} ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

A. $S_{mc}=16\pi a^2$. **B.** $S_{mc}=4\pi a^2$. **C.** $S_{mc}=32\pi a^2$. **D.** $S_{mc}=8\pi a^2$.

Câu 19. **(Yên Phong 1 - 2018)** Cho mặt cầu tâm O bán kính $2a$, mặt phẳng (α) cố định cách O một đoạn là a, (α) cắt mặt cầu theo đường tròn (T). Trên (T) lấy điểm A cố định, một đường thẳng qua A vuông góc với (α) cắt mặt cầu tại điểm B khác A. Trong (α) một góc vuông xAy quay quanh A và cắt (T) tại 2 điểm phân biệt C, D không trùng với A. Khi đó chọn khẳng định đúng:

A. Diện tích tam giác BCD đạt giá trị nhỏ nhất là $a^2\sqrt{21}$

B. Diện tích tam giác BCD đạt giá trị lớn nhất là $a^2\sqrt{21}$

C. Diện tích tam giác BCD đạt giá trị nhỏ nhất là $2a^2\sqrt{21}$

D. Do (α) không đi qua O nên không tồn tại giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của diện tích tam giác

Câu 20. **(THPT Hải An - Hải Phòng - 2018)** Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9, tính thể tích V của khối chóp có thể tích lớn nhất.

A. $V=144$. **B.** $V=576\sqrt{2}$. **C.** $V=576$. **D.** $V=144\sqrt{6}$.

Câu 21. **(THPT Yên Khánh A - 2018)** Cho hình chóp tứ giác đều chiều cao là h nội tiếp trong một mặt cầu bán kính R. Tìm h theo R để thể tích khối chóp là lớn nhất.

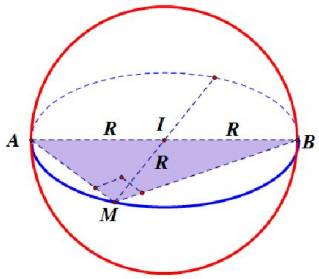
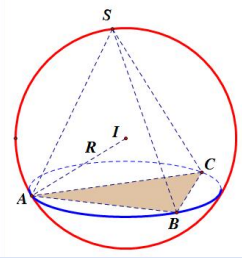
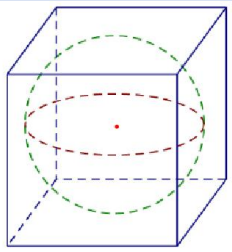
A. $h=\sqrt{3}R$. **B.** $h=\sqrt{2}R$. **C.** $V=\dfrac{4R}{3}$. **D.** $V=\dfrac{3R}{2}$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 23 MẶT CẦU - KHỐI CẦU

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH – MỨC 5-6 ĐIỂM

Lý thuyết chung

MẶT CẦU	Một số công thức:	Mặt cầu ngoại tiếp đa diện Mặt cầu nội tiếp đa diện
 ☛**Hình thành:** Quay đường tròn tâm I, bán kính $R=\dfrac{AB}{2}$ quanh trục AB, ta có mặt cầu như hình vẽ.	▪ **Tâm** I, **bán kính** $R=IA=IB=IM$. ▪ **Đường kính** $AB=2R$. ▪ **Thiết diện qua tâm** mặt cầu: Là đường tròn tâm I, bán kính R. ▪ **Diện tích** mặt cầu: $\boxed{S=4\pi R^2}$. ▪ **Thể tích** khối cầu: $\boxed{V=\dfrac{4\pi R^3}{3}}$.	 **Mặt cầu ngoại tiếp đa diện** là mặt cầu đi qua tất cả đỉnh của đa diện đó.  **Mặt cầu nội tiếp đa diện** là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của đa diện đó.

Dạng 1. Diện tích xung quanh, bán kính

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho mặt cầu có bán kính $R=2$. Diện tích của mặt cầu đã cho bằng

A. $\dfrac{32\pi}{3}$. **B.** 8π. **C.** 16π. **D.** 4π.

Lời giải

Chọn C

$S=4\pi R^2=16\pi$

Câu 2. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho mặt cầu có bán kính $r=5$. Diện tích mặt cầu đã cho bằng

A. 25π. **B.** $\dfrac{500\pi}{3}$. **C.** 100π. **D.** $\dfrac{100\pi}{3}$.

Lời giải.

Chọn C

Diện tích mặt cầu $S=4\pi r^2=4\pi.5^2=100\pi.$

Câu 3. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho mặt cầu có bán kính $r=4$. Diện tích của mặt cầu đã cho bằng

A. 16π. **B.** 64π. **C.** $\dfrac{64\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{256\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích của mặt cầu bằng $4\pi r^2=4.\pi.4^2=64\pi$

Câu 4. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho mặt cầu bán kính $r=5$. Diện tích của mặt cầu đã cho bằng

A. $\dfrac{500\pi}{3}$. **B.** 25π. **C.** $\dfrac{100\pi}{3}$. **D.** 100π.

Lời giải

Chọn D

Diện tích của mặt cầu có bán kính $r=5$ là: $S=4\pi r^2=4\pi.5^2=100\pi$.

Câu 5. **(Mã 101 2018)** Diện tích của mặt cầu bán kính R bằng:

A. πR^2 **B.** $\frac{4}{3}\pi R^2$ **C.** $2\pi R^2$ **D.** $4\pi R^2$

Lời giải

Chọn D

Câu 6. **(THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019)** Cho mặt cầu có diện tích bằng $16\pi a^2$. Khi đó, bán kính mặt cầu bằng

A. $2\sqrt{2}a$ **B.** $\sqrt{2}a$ **C.** $2a$ **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $S=4\pi R^2=16\pi a^2 \Rightarrow R=2a$

Câu 7. **(Chuyên Đhsp Hà Nội 2019)** Diện tích mặt cầu bán kính $2a$ là

A. $4\pi a^2$. **B.** $16\pi a^2$. **C.** $16a^2$. **D.** $\frac{4\pi a^2}{3}$.

Lời giải

Ta có: $S=4\pi R^2=4\pi(2a)^2=16\pi a^2$.

Câu 8. **(THPT Nghĩa Hưng Nđ- 2019)** Diện tích của một mặt cầu bằng $16\pi(cm^2)$. Bán kính của mặt cầu đó là.

A. $8cm$. **B.** $2cm$. **C.** $4cm$. **D.** $6cm$.

Lời giải

Ta có: $4\pi R^2=16\pi \Leftrightarrow R^2=4 \Rightarrow R=2(cm)$.

Câu 9. **(Bình Phước 2019)** Tính diện tích mặt cầu (S) khi biết chu vi đường tròn lớn của nó bằng 4π

A. $S=32\pi$ **B.** $S=16\pi$ **C.** $S=64\pi$ **D.** $S=8\pi$

Lời giải

Chọn B

Nhận xét : Đường tròn lớn của mặt cầu (S) là đường tròn đi qua tâm của mặt cầu (S) nên bán kính của đường tròn lớn cũng là bán kính của mặt cầu (S).

Chu vi đường tròn lớn của mặt cầu (S) bằng $4\pi \Rightarrow 2\pi R=4\pi \Leftrightarrow R=2$.

Vậy diện tích mặt cầu (S) là $S=4\pi R^2=16\pi$.

Câu 10. **(Trường THPT Thăng Long 2019)** Một mặt cầu có diện tích xung quanh là π thì có bán kính bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

$S_{mc}=4\pi R^2=\pi \Rightarrow R=\frac{1}{2}$.

Câu 11. **(THPT Cẩm Bình 2019)** Diện tích mặt cầu có đường kính bằng $2a$ là

A. $16\pi a^2$. **B.** πa^2. **C.** $\frac{4\pi a^3}{3}$. **D.** $4\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D

Bán kính mặt cầu là $R=a \Rightarrow$ Diện tích mặt cầu là $S=4\pi R^2=4\pi a^2$.

Câu 12. **(Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định- 2019)** Cho mặt cầu có diện tích bằng $\frac{8\pi a^2}{3}$. Bán kính mặt cầu bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có diện tích mặt cầu $S=4\pi r^2 \Rightarrow r=\sqrt{\frac{S}{4\pi}}=\sqrt{\frac{8\pi a^2}{3.4\pi}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 13. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Quả bóng rổ size 7 có đường kính 24.5 cm. Tính diện tích bề mặt quả bóng rổ đó (làm tròn kết quả đến chữ số hàng đơn vị)

A. 629 cm^2. **B.** 1886 cm^2. **C.** 8171 cm^2. **D.** 7700 cm^2.

Lời giải

Chọn B

Ta có bán kính quả bóng rổ là $r=\frac{24.5}{2}=12.25(\text{cm})$.

Vậy diện tích bề mặt quả bóng rổ đó là $S=4\pi r^2=4\pi.(12.25)^2\approx 1886(\text{cm}^2)$.

Câu 14. **(SGD Bình Phước - 2019)** Tính diện tích mặt cầu (S) khi biết chu vi đường tròn lớn của nó bằng 4π

A. $S=32\pi$. **B.** $S=16\pi$. **C.** $S=64\pi$. **D.** $S=8\pi$.

Lời giải

Chọn B

Nhận xét : Đường tròn lớn của mặt cầu (S) là đường tròn đi qua tâm của mặt cầu (S) nên bán kính của đường tròn lớn cũng là bán kính của mặt cầu (S).

Chu vi đường tròn lớn của mặt cầu (S) bằng $4\pi \Rightarrow 2\pi R=4\pi \Leftrightarrow R=2$.

Vậy diện tích mặt cầu (S) là $S=4\pi R^2=16\pi$.

Dạng 2. Thể tích

Câu 1. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho khối cầu có bán kính $r=4$. Thể tích của khối cầu đã cho bằng:

A. $\frac{256\pi}{3}$. **B.** 64π. **C.** $\frac{64\pi}{3}$. **D.** 256π.

Lời giải

Chọn A.

Thể tích của khối cầu $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{256\pi}{3}$

Câu 2. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho khối cầu có bán kính $r=4$. Thể tích của khối cầu đã cho bằng

A. 64π. **B.** $\frac{64\pi}{3}$. **C.** 256π. **D.** $\frac{256\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Thể tích của khối cầu đã cho bằng $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi.4^3=\frac{256\pi}{3}$.

Câu 3. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho khối cầu có bán kính $r=2$. Thể tích của khối cầu đã cho bằng

A. 16π. **B.** $\frac{32\pi}{3}$. **C.** 32π. **D.** $\frac{8\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích của khối cầu đã cho : $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi.2^3=\frac{32}{3}\pi$.

Câu 4. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho khối cầu có bán kính r = 2. Thể tích của khối cầu bằng

A. $\frac{32\pi}{3}$. **B.** 16π. **C.** 32π. **D.** $\frac{8\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi 2^3=\frac{32}{3}\pi$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 5. **(Mã 102 2018)** Thể tích của khối cầu bán kính R bằng

A. $\frac{3}{4}\pi R^3$ **B.** $\frac{4}{3}\pi R^3$ **C.** $4\pi R^3$ **D.** $2\pi R^3$

Lời giải

Chọn B

Câu 6. **(Đề Tham Khảo 2019)** Thể tích khối cầu bán kính a bằng :

A. $\frac{\pi a^3}{3}$ **B.** $2\pi a^3$ **C.** $\frac{4\pi a^3}{3}$ **D.** $4\pi a^3$

Lời giải

Chọn C

Câu 7. **(Lômônôxốp - Hà Nội 2019)** Thể tích của khối cầu có bán kính là 1 bằng:

A. 2π. **B.** $\frac{\pi}{3}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** 4π.

Lời giải

Chọn C

Thể tích của khối cầu: $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi$.

Câu 8. **(SP Đồng Nai - 2019)** Thể tích khối cầu có đường kính $2a$ bằng

A. $\frac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $4\pi a^3$. **C.** $\frac{\pi a^3}{3}$. **D.** $2\pi a^3$.

Lời giải

Chọn A

Đường kính của khối cầu là $2a$, nên bán kính của nó là a, thể tích khối cầu là $\frac{4\pi a^3}{3}$.

Câu 9. **(THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019)** Thể tích khối cầu bán kính $3\,\text{cm}$ bằng

A. $36\pi\left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $108\pi\left(\text{cm}^3\right)$. **C.** $9\pi\left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $54\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

Lời giải

Thể tích khối cầu là: $V=\frac{4}{3}.\pi.R^3=\frac{4}{3}.\pi.3^3=36\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 10. **(THPT Lê Xoay Vĩnh Phúc 2019)** Cho mặt cầu (S) có diện tích $4\pi a^2\left(\text{cm}^2\right)$. Khi đó, thể tích khối cầu (S) là

A. $\frac{4\pi a^3}{3}\left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $\frac{\pi a^3}{3}\left(\text{cm}^3\right)$. **C.** $\frac{64\pi a^3}{3}\left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $\frac{16\pi a^3}{3}\left(\text{cm}^3\right)$.

Lời giải

Gọi mặt cầu có bán kính R. Theo đề ta có $4\pi R^2=4\pi a^2$. Vậy $R=a(cm)$.

Khi đó, thể tích khối cầu (S) là: $V=\frac{4\pi R^3}{3}=\frac{4\pi a^3}{3}\left(cm^3\right)$.

Câu 11. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Cho mặt cầu có diện tích bằng $36\pi a^2$. Thể tich khối cầu là

A. $18\pi a^3$. **B.** $12\pi a^3$. **C.** $36\pi a^3$. **D.** $9\pi a^3$.

Lời giải

Gọi R là bán kính mặt cầu.

Mặt cầu có diện tích bằng $36\pi a^2$ nên $4\pi R^2=36\pi a^2\Leftrightarrow R^2=9a^2\Rightarrow R=3a$

Thể tích khối cầu là $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi(3a)^3=36\pi a^3$

Câu 12. **(THPT Đoàn Thượng – Hải Dương 2019)** Tính diện tích S của mặt cầu và thể tích V của khối cầu có bán kính bằng 3cm.

A. $S=36\pi\left(\text{cm}^2\right)$ và $V=36\pi\left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $S=18\pi\left(\text{cm}^2\right)$ và $V=108\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

C. $S=36\pi\left(\text{cm}^2\right)$ và $V=108\pi\left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $S=18\pi\left(\text{cm}^2\right)$ và $V=36\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu bán kính r có diện tích là: $S=4\pi r^2=4\pi.3^2=36\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

Khối cầu bán kính r có thể tích là: $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi.3^3=36\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 13. **(KSCL Sở Hà Nam - 2019)** Thể tích của khối cầu bán kính $3a$ là

A. $4\pi a^3$. **B.** $12\pi a^3$. **C.** $36\pi a^2$. **D.** $36\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D

- Bán kính khối cầu: $R=3a$.

- Thể tích của khối cầu: $V=\frac{4\pi R^3}{3}=\frac{4\pi(3a)^3}{3}=36\pi a^3$.

Câu 14. **(THPT Phan Bội Châu - Nghệ An - 2019)** Cho mặt cầu có diện tích bằng $36\pi a^2$. Thể tich khối cầu là

A. $18\pi a^3$. **B.** $12\pi a^3$. **C.** $36\pi a^3$. **D.** $9\pi a^3$.

Lời giải

Chọn C

Gọi R là bán kính mặt cầu.

Mặt cầu có diện tích bằng $36\pi a^2$ nên $4\pi R^2 = 36\pi a^2 \Leftrightarrow R^2 = 9a^2 \Rightarrow R = 3a$.

Thể tích khối cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(3a)^3 = 36\pi a^3$.

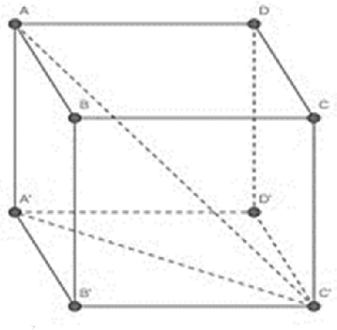
Dạng 3 Khối cầu nội tiếp, ngoại tiếp khối lăng trụ

Câu 1. **(Mã 123 2017)** Tìm bán kính R mặt cầu ngoại tiếp một hình lập phương có cạnh bằng $2a$.

A. $R = \sqrt{3}a$ **B.** $R = a$ **C.** 100 **D.** $R = 2\sqrt{3}a$

Lời giải

Chọn A



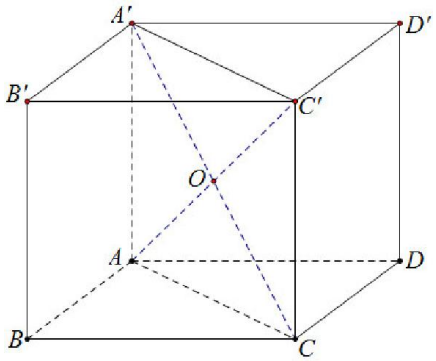
Đường chéo của hình lập phương: $AC' = 2\sqrt{3}a$. Bán kính $R = \frac{AC'}{2} = a\sqrt{3}$.

Câu 2. **(Mã 110 2017)** Cho mặt cầu bán kính R ngoại tiếp một hình lập phương cạnh a. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a = \frac{\sqrt{3}R}{3}$ **B.** $a = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$ **C.** $a = 2R$ **D.** $a = 2\sqrt{3}R$

Lời giải

Chọn B



Gọi $O = AC' \cap A'C \Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương.

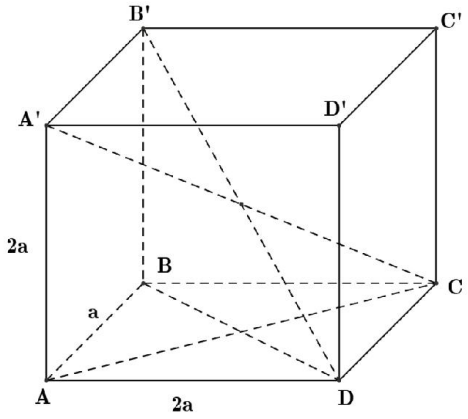
Bán kính mặt cầu: $R = OA = \frac{1}{2}AC' = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$

Câu 3. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$, $AD=AA'=2a$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp của hình hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $9\pi a^2$ **B.** $\dfrac{3\pi a^2}{4}$ **C.** $\dfrac{9\pi a^2}{4}$ **D.** $3\pi a^2$

Lời giải

Chọn A



Bán kính khối cầu là một nửa đường chéo của hình hộp chữ nhật:

$R=\dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2+AD^2+BB'^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+(2a)^2+(2a)^2}=\dfrac{3}{2}a$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật là:

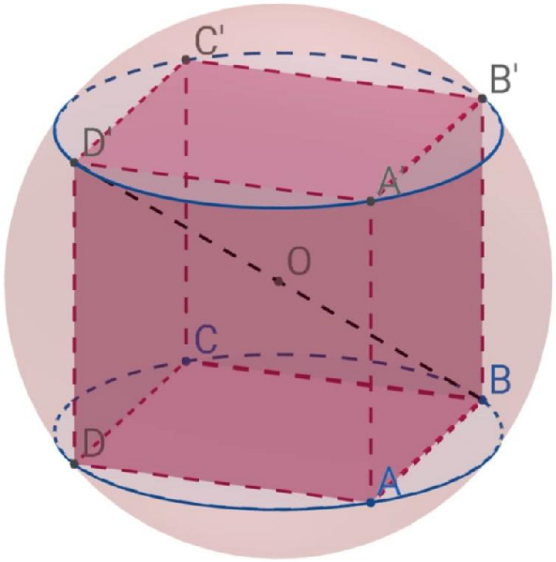
$S=4\pi R^2=4\pi\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2=9\pi a^2$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 4. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật có ba kích thước $1,\ 2,\ 3$ là

A. 36π. **B.** $\dfrac{9\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{7\pi\sqrt{14}}{3}$. **D.** $\dfrac{9\pi}{8}$.

Lời giải



Gọi R là bán kính khối cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật.

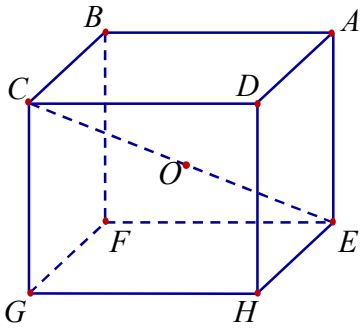
Ta có $R=\dfrac{1}{2}BD'=\dfrac{1}{2}\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Vậy thể tích khối cầu là: $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^3=\frac{7\pi\sqrt{14}}{3}$.

Câu 5. **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình lập phương cạnh 3 cm là

A. $\frac{27\pi\sqrt{3}}{2}$ cm^3. **B.** $\frac{9\pi\sqrt{3}}{2}$ cm^3. **C.** $9\pi\sqrt{3}$ cm^3. **D.** $\frac{27\pi\sqrt{3}}{8}$ cm^3.

Lời giải



Gọi R là bán kính khối cầu ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.EFGH$.

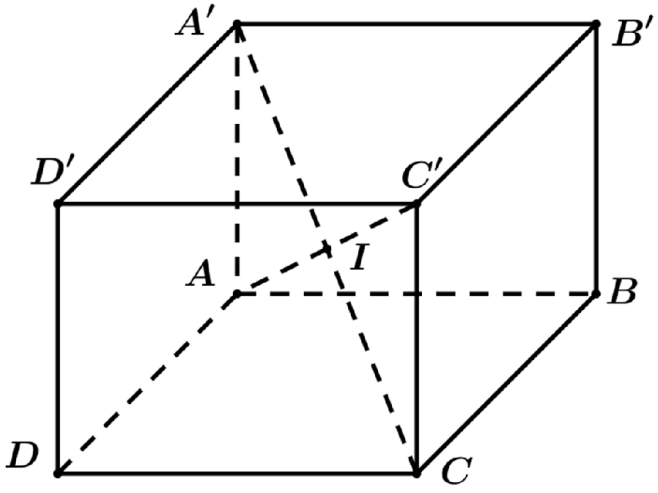
Ta có $CE=AB.\sqrt{3}=3\sqrt{3}$ cm. Suy ra $R=\frac{1}{2}CE=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm.

Thể tích khối cầu là: $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{27\sqrt{3}}{2}\pi$ cm^3.

Câu 6. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối hộp chữ nhật có kích thước a, $a\sqrt{3}$, $2a$ là

A. $8a^2$. **B.** $4\pi a^2$. **C.** $16\pi a^2$. **D.** $8\pi a^2$.

Lời giải



Xét hình hộp chữ nhật là $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$, $AA'=2a$.

Gọi I là trung điểm $A'C$, suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

Ta có bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là:

$R=\frac{1}{2}AC'=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2+AD^2+AA'^2}=a\sqrt{2}$.

Vậy diện tích mặt cầu là: $S=4\pi R^2=8\pi a^2$.

Câu 7. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình lập phương cạnh bằng $3\,\text{cm}$ là:

A. $\frac{27\sqrt{3}}{2}\pi\ \text{cm}^3$. **B.** $\frac{9\pi\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^3$. **C.** $9\pi\sqrt{3}\ \text{cm}^3$. **D.** $\frac{27\sqrt{3}}{8}\pi\ \text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn A

Nhận xét: Khối cầu ngoại tiếp hình lập phương có tâm chính là tâm của hình lập phương và bán kính bằng nửa độ dài đường chéo.

Ta có: Độ dài đường chéo $d=3\sqrt{3}$ nên bán kính của khối cầu $R=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{27\sqrt{3}}{2}\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 8. **(Chuyên Nguyễn Huệ- 2019)** Tính đường kính mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng $a\sqrt{3}$.

A. $3a$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $6a$. **D.** $\frac{3a}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đường kính mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương bằng độ dài đường chéo của hình lập phương đó.

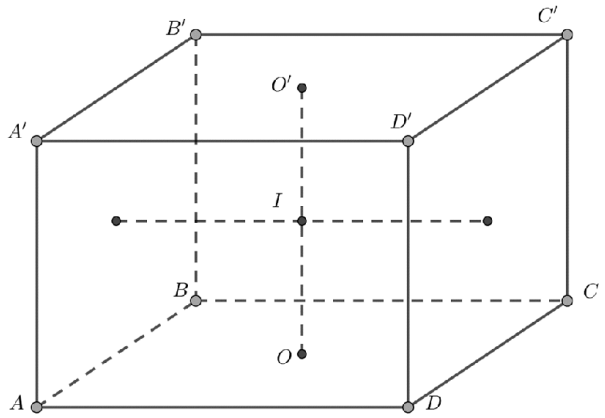
Do đó, đường kính của mặt cầu cần tìm là $d=a\sqrt{3}.\sqrt{3}=3a$.

Câu 9. Tính thể tích V cầu khối cầu nội tiếp hình lập phương cạnh a.

A. $V=\frac{\pi a^3}{6}$. **B.** $V=\frac{4\pi a^3}{3}$. **C.** $V=\frac{\pi a^3}{3}$. **D.** $V=\frac{\pi a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Nhìn vào hình vẽ dễ nhận thấy bán kính mặt cầu nội tiếp hình lập phương là tâm I, bán kính $r=IO=\frac{a}{2}$. Thể tích của mặt cầu nội tiếp hình lập phương là:

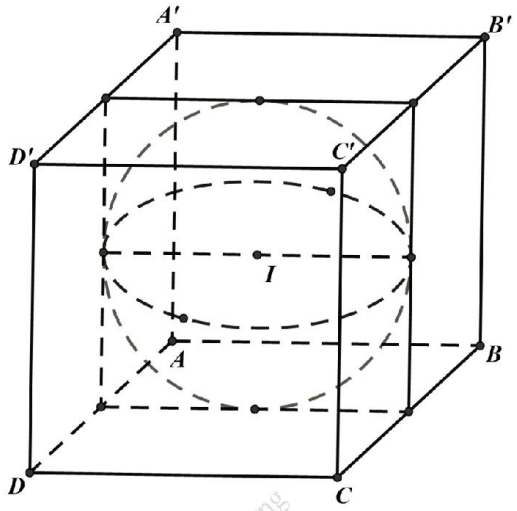
$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi.\left(\frac{a}{2}\right)^3=\frac{\pi a^3}{6}$ (đvtt). Đáp án được chọn là **A**

Câu 10. Cho khối cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của một hình lập phương. Gọi V_1; V_2 lần lượt là thể tích của khối cầu và khối lập phương đó. Tính $k=\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $k=\dfrac{2\pi}{3}$. **B.** $k=\dfrac{\pi}{6}$. **C.** $k=\dfrac{\pi}{3}$. **D.** $k=\dfrac{\pi\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi a là cạnh của hình lập phương đã cho.

Bán kính của khối cầu là $R=\dfrac{a}{2}$, nên thể tích của nó là $V_1=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi.\left(\dfrac{a}{2}\right)^3=\dfrac{\pi a^3}{6}$.

Thể tích khối lập phương là $V_2=a^3$.

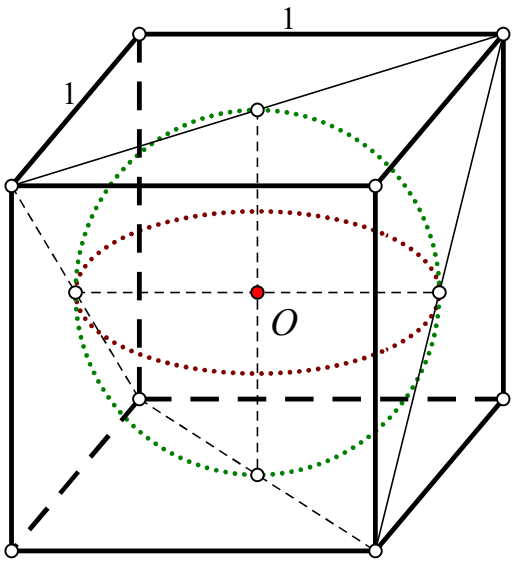
Vậy $k=\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\pi}{6}$.

Câu 11. Tính thể tích của khối cầu nội tiếp hình lập phương có cạnh bằng 1.

A. $\dfrac{\pi}{12}$. **B.** $\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi}{6}$. **D.** $\dfrac{2\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Bán kính của khối cầu $r=\frac{1}{2}$.

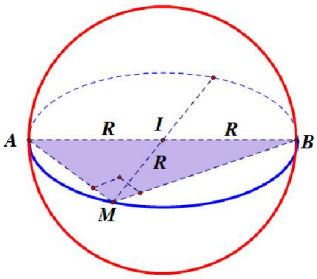
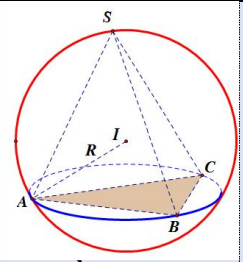
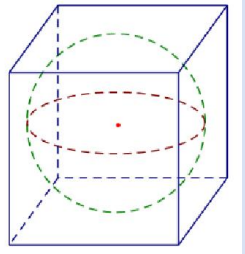
Thể tích khối cầu $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi.\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{\pi}{6}$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 23 MẶT CẦU - KHỐI CẦU

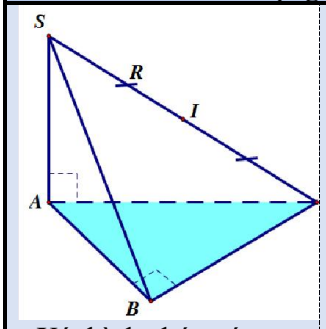
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – GIỎI MỨC 7-8-9-10 ĐIỂM

LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP

MẶT CẦU	**Một số công thức:**	**Mặt cầu ngoại tiếp đa diện** **Mặt cầu nội tiếp đa diện**
 ☞**Hình thành:** Quay đường tròn tâm I, bán kính $R=\frac{AB}{2}$ quanh trục AB, ta có mặt cầu như hình vẽ.	▪ **Tâm** I, **bán kính** $R=IA=IB=IM$. ▪ **Đường kính** $AB=2R$. ▪ **Thiết diện qua tâm** mặt cầu: Là đường tròn tâm I, bán kính R. ▪ **Diện tích** mặt cầu: $\boxed{S=4\pi R^2}$. ▪ **Thể tích** khối cầu: $\boxed{V=\frac{4\pi R^3}{3}}$.	 **Mặt cầu ngoại tiếp đa diện** là mặt cầu đi qua tất cả đỉnh của đa diện đó.  **Mặt cầu nội tiếp đa diện** là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của đa diện đó.

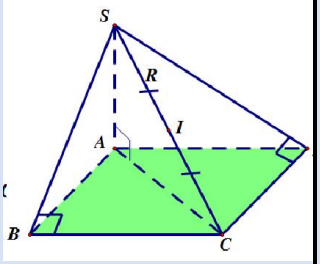
CÁCH TÌM BÁN KÍNH MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH CHÓP THƯỜNG GẶP

1. Hình chóp có các đỉnh nhìn một cạnh dưới một góc vuông.



▪ Xét hình chóp có $SA\perp(ABC)$ và $\widehat{ABC}=90^0$.

▪ Ta có $\widehat{SAC}=\widehat{SBC}=90^0$ $\widehat{SAC}=\widehat{SBC}=90^0$ nên mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có tâm I là trung điểm SC, bán kính $\boxed{R=\frac{SC}{2}}$.

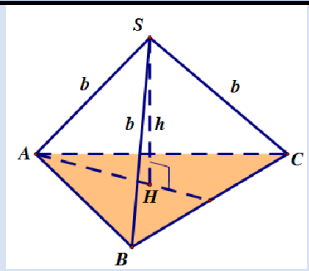


▪ Xét hình chóp có $SA\perp(ABCD)$ và $ABCD$ là hình chữ nhật hoặc hình vuông.

▪ Ta có: $\widehat{SAC}=\widehat{SBC}=\widehat{SDC}=90^0$

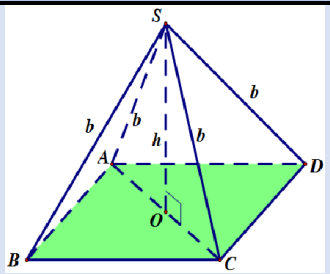
Suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có tâm I là trung điểm SC, bán kính $\boxed{R=\frac{SC}{2}}$.

2. Hình chóp đều.



▪ Xét hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng b và đường cao $SH=h$.

▪ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trên là $\boxed{R=\frac{b^2}{2h}}$.

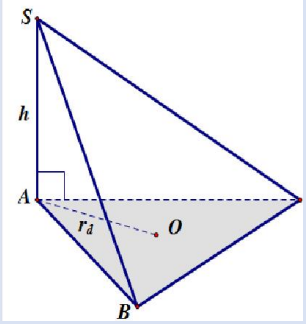


▪ Xét hình chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng b và chiều cao $SO=h$.

▪ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trên là $\boxed{R=\frac{b^2}{2h}}$.

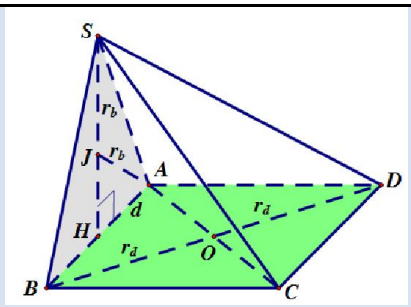
3. Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy.

4. Hình chóp có mặt bên vuông góc với mặt đáy.



- Xét hình chóp có $SA \perp$ (đáy) và $SA = h$; bán kính đường tròn ngoại tiếp của đáy là r_d.

- Khi đó mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có bán kính $R = \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r_d^2}$.
- Nếu đáy là tam giác đều cạnh a thì $r_d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
- Nếu đáy là hình vuông cạnh a thì $r_d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
- Nếu đáy là hình chữ nhật cạnh a, b thì $r_d = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.



- Xét hình chóp có mặt bên $(SAB) \perp$ (đáy), bán kính ngoại tiếp đáy là r_d, bán kính ngoại tiếp ΔSAB là r_b, $d = AB = (SAB) \cap$ (đáy). (đoạn giao tuyến)
- Khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $R = \sqrt{r_d^2 + r_b^2 - \frac{d^2}{4}}$.

Dạng 1. Khối cầu ngoại tiếp khối lăng trụ

Câu 1. **(THPT Ninh Bình-Bạc Liêu-2019)** Một hình hộp chữ nhật có ba kích thước a, b, c nội tiếp một mặt cầu. Tính diện tích S của mặt cầu đó

A. $S = 16\left(a^2+b^2+c^2\right)\pi$.

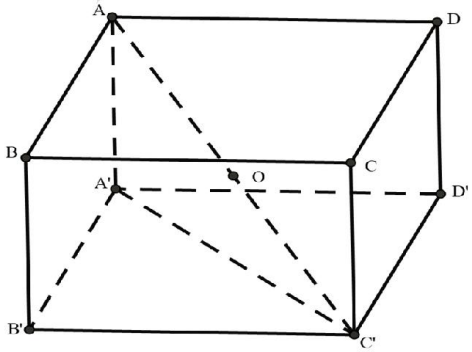
B. $S = \left(a^2+b^2+c^2\right)\pi$.

C. $S = 4\left(a^2+b^2+c^2\right)\pi$.

D. $S = 8\left(a^2+b^2+c^2\right)\pi$.

Lời giải

Chọn B



Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật là $r = OA = \frac{AC'}{2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật là

$$S = 4\pi r^2 = 4\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}\right)^2 \pi = \left(a^2+b^2+c^2\right)\pi.$$

Câu 2. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Cho lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a cạnh bên bằng b. Tính thể tích của khối cầu đi qua các đỉnh của lăng trụ.

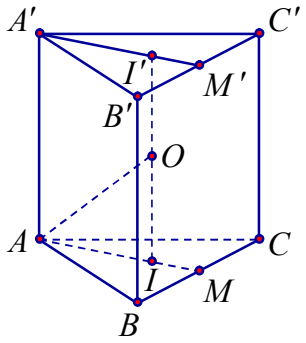
A. $\frac{1}{18\sqrt{3}}\sqrt{\left(4a^2+3b^2\right)^3}$.

B. $\frac{\pi}{18\sqrt{3}}\sqrt{\left(4a^2+3b^2\right)^3}$.

C. $\frac{\pi}{18\sqrt{3}}\sqrt{\left(4a^2+b^2\right)^3}$.

D. $\frac{\pi}{18\sqrt{2}}\sqrt{\left(4a^2+3b^2\right)^3}$.

Lời giải



Gọi I, I' lần lượt là tâm hai đáy, O là trung điểm của II'. Khi đó ta có O là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ.

Ta có: $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}, IO = \dfrac{b}{2}$ suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ là

$R = \sqrt{\dfrac{a^2}{3} + \dfrac{b^2}{4}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{4a^2 + 3b^2}$

Vậy $V_{(O;R)} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{\pi}{18\sqrt{3}}\sqrt{\left(4a^2 + 3b^2\right)^3}$.

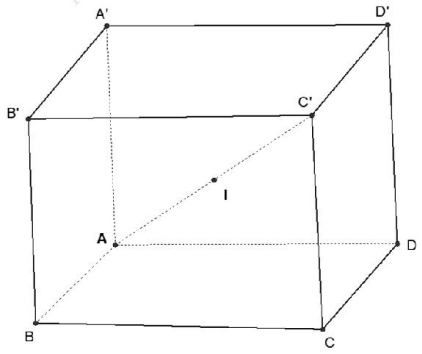
Câu 3. Một mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có kích thước $AB = 4a$, $AD = 5a$, $AA' = 3a$. Mặt cầu trên có bán kính bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{5\sqrt{2}a}{2}$. **B.** $6a$. **C.** $2\sqrt{3}a$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}a}{2}$.

Lời giải

Nguyễn Bảo Vương

Chọn A



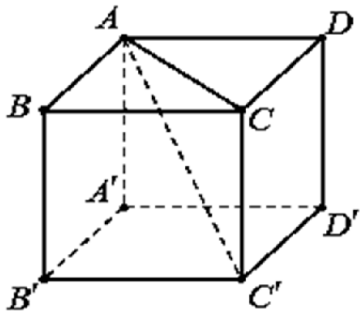
Gọi I là tâm của hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp này là $R = IA = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AD^2 + A'A^2} = \dfrac{5\sqrt{2}a}{2}$.

Câu 4. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chữ nhật có ba kích thước $1, 2, 3$ là

A. $\dfrac{9\pi}{8}$. **B.** $\dfrac{9\pi}{2}$. **C.** 36π. **D.** $\dfrac{7\sqrt{14}\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $AC' = \sqrt{AA'^2 + AB^2 + AD^2} = \sqrt{14}$.

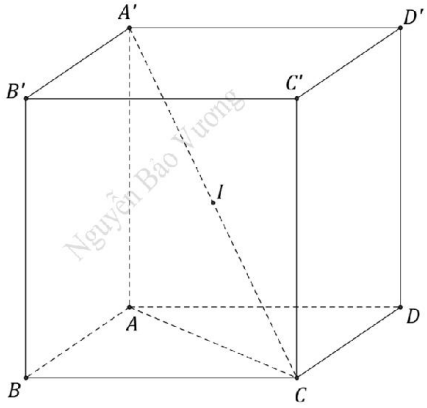
Mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật nhận đường chéo AC' là đường kính, do đó bán kính mặt cầu là $R = \frac{1}{2}AC' = \frac{\sqrt{14}}{2}$. Vậy thể tích khối cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{14\sqrt{14}}{8} = \frac{7\sqrt{14}\pi}{3}$.

Câu 5. **(Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa 2019)** Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp của một hình lập phương có cạnh bằng $2a$

A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $R = a$. **C.** $R = 2a\sqrt{3}$. **D.** $R = a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ như hình vẽ. I là tâm của hình lập phương. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình lập phương.

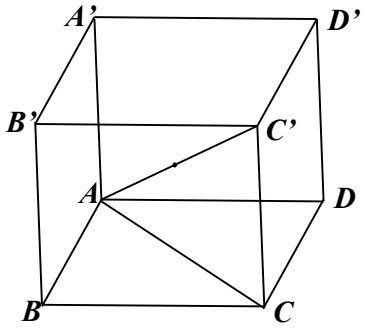
Ta có $R = \frac{A'C}{2} = \frac{\sqrt{AA'^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{AA'^2 + AB^2 + AD^2}}{2} = a\sqrt{3}$.

Câu 6. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối hộp chữ nhật có kích thước a, $a\sqrt{3}$ và $2a$.

A. $8a^2$. **B.** $4\pi a^2$. **C.** $16\pi a^2$. **D.** $8\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D



Xét khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O, với $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$ và $AA'=2a$. Dễ thấy O cách đều các đỉnh của khối hộp này nên mặt cầu ngoại tiếp khối hộp có tâm O, bán kính $R=\dfrac{AC'}{2}$.

Ta có

$AC=\sqrt{AB^2+AD^2}=2a$, $AC'=\sqrt{AC^2+CC'^2}=2a\sqrt{2}\Rightarrow R=\dfrac{AC'}{2}=a\sqrt{2}$.

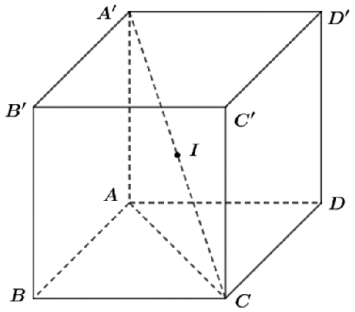
Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối hộp này là $S=4\pi R^2=8\pi a^2$.

Câu 7. **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$, $AD=AA'=2a$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp đã cho bằng

A. $9\pi a^2$. **B.** $\dfrac{3\pi a^2}{4}$. **C.** $\dfrac{9\pi a^2}{4}$. **D.** $3\pi a^2$.

Lời giải

Chọn A



Ta có tâm mặt cầu ngoại tiếp hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ cũng là trung điểm của một đường chéo $A'C$ (giao các đường chéo) của hình hộp.

Hình hộp chữ nhật có độ dài 3 cạnh dài, rộng, cao là: $AD=2a$, $AB=a$, $AA'=2a$.

$\Rightarrow$ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp là: $R=\dfrac{A'C}{2}=\dfrac{\sqrt{AD^2+AB^2+AA'^2}}{2}=\dfrac{3a}{2}$.

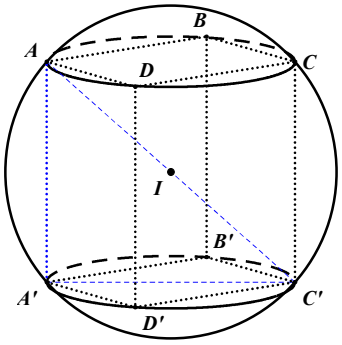
$\Rightarrow S_{mc}=4\pi R^2=4\pi.\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2=9\pi a^2$.

Câu 8. Cho hình lập phương có cạnh bằng a. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình lập phương đó bằng

A. $V=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\pi a^3$. **B.** $V=4\sqrt{3}\pi a^3$. **C.** $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Tâm I của mặt cầu ngoại tiếp lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là trung điểm của đường chéo AC' và $R = IA = \dfrac{AC'}{2}$

Khối lập phương cạnh a nên:

$AA' = a,\ A'C' = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow AC' = \sqrt{AA'^2 + A'C'^2} = \sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow R = \dfrac{AC'}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Vậy thể tích khối cầu cần tính là:

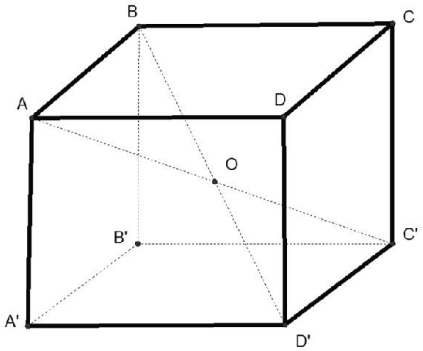
$V = \dfrac{4}{3}.\pi.R^3 = \dfrac{4}{3}.\pi.\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \dfrac{4}{3}\pi.a^3\dfrac{3\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\pi.a^3\sqrt{3}}{2}$ *(đvtt).*

Câu 9. **(Nho Quan A - Ninh Bình - 2019)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $3\pi a^2$. **B.** πa^2. **C.** $\dfrac{4\pi a^2}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



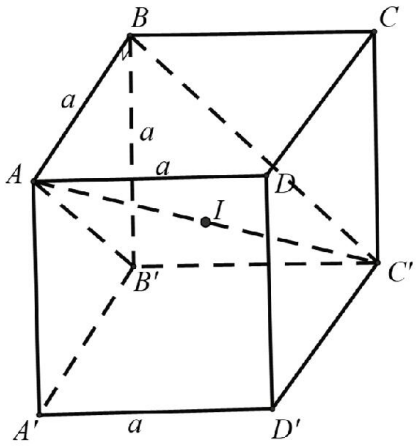
Gọi O là tâm của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là $R = OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là $S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi a^2$.

Câu 10. **(Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa 2019)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$.

A. $R = a\sqrt{3}$. **B.** $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $R = 2a$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là trung điểm của AC'.

Ta có $\Delta ABC'$ vuông tại B (vì $AB \perp (BB'C'C)$) và $\Delta AB'C'$ vuông tại B' (vì $B'C' \perp (ABB'A')$).

Khi đó $IA = IB = IB' = IC'$, suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$.

$AC' = \sqrt{AB'^2 + B'C'^2} = \sqrt{AB^2 + BB'^2 + B'C'^2} = a\sqrt{3}$. Vậy $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Cách khác: Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$ cũng là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Bán kính mặt cầu là nửa đường chéo hình lập phương cạnh a, tức là bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Nguyễn Bảo Vương

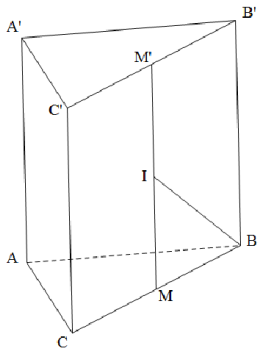
Câu 11. **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, $AB = a$, $AA' = a\sqrt{3}$. Tính bán kính R của mặt cầu đi qua tất cả các đỉnh của hình lăng trụ theo a.

A. $R = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $R = \dfrac{a}{2}$. **C.** $R = 2a$. **D.** $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Hình vẽ.



Gọi M là trung điểm BC, suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi M' là trung điểm $B'C'$, suy ra M' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$.

Gọi I là trung điểm MM', khi đó I chính là tâm đường tròn ngoại tiếp lăng trụ.

Theo đề ta có $MB=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và $IM=\dfrac{MM'}{2}=\dfrac{AA'}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

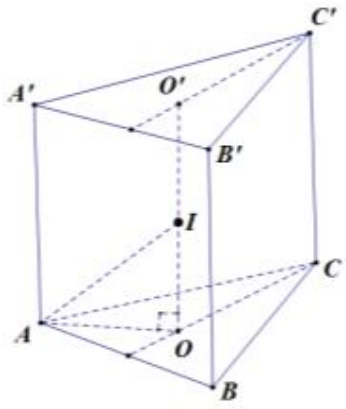
Tam giác MIB vuông tại M nên ta tính được $R=IB=\sqrt{IM^2+MB^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 12. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a.

A. $\dfrac{7\pi a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3}{8}$. **C.** πa^2. **D.** $\dfrac{7\pi a^2}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O, O' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp hai tam giác ABC, A'B'C'.
Trên OO' lấy trung điểm I. Suy ra IA = IB = IC = IA'= IB' = IC'.
Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ.

Suy ra bán kính mặt cầu $R=IA=\sqrt{OI^2+OA^2}=\sqrt{OI^2+OA^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{21}}{6}$.

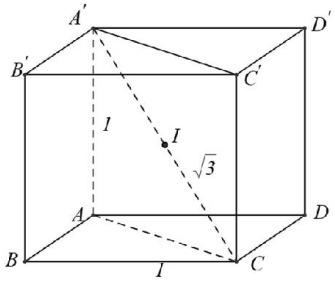
Diện tích mặt cầu $S=4\pi R^2=4\pi\dfrac{7a^2}{12}=\dfrac{7\pi a^2}{3}$

Câu 13. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho hình lập phương có cạnh bằng 1. Thể tích mặt cầu đi qua các đỉnh của hình lập phương là

A. $\dfrac{2\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{3\pi}{2}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{3}\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu qua các đỉnh của hình lập phương có đường kính là $A'C$.

Bán kính mặt cầu là $R=\dfrac{A'C}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

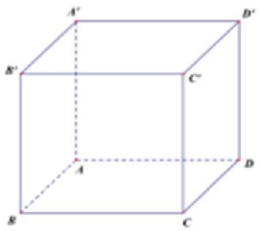
Thể tích khối cầu là $v=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$.

Câu 14. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Đường kính của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương là

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Độ dài đường kính của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương bằng độ dài đường chéo của hình lập phương bằng AC'. Ta có $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\Rightarrow AC=a\sqrt{2}$. Xét tam giác $A'AC$ vuông tại $A\Rightarrow AC'=\sqrt{AA'^2+AC^2}=\sqrt{a^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}=a\sqrt{3}$.

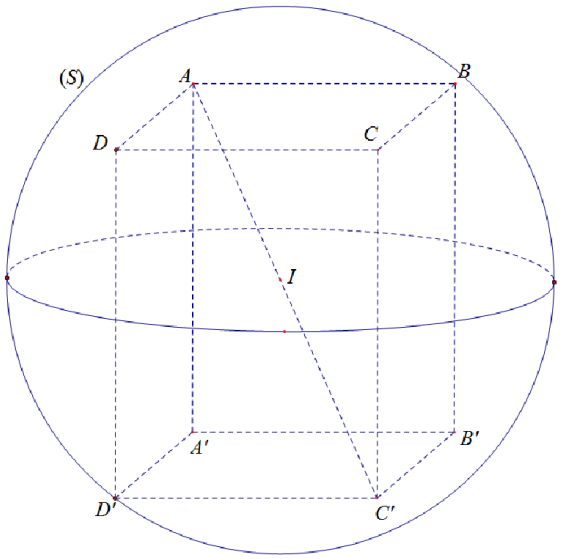
Câu 15. Tỉ số thể tích giữa khối lập phương và khối cầu ngoại tiếp khối lập phương đó bằng

A. $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{2\pi}$. **D.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Nguyễn Bảo Vương

Chọn B



Xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $2a$ nội tiếp trong mặt cầu (S).

Khi ấy, khối lập phương có thể tích $V_1=(2a)^3=8a^3$ và bán kính mặt cầu (S) là

$R=\frac{2a\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.

Thể tích khối cầu (S): $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(a\sqrt{3}\right)^3 = 4\pi a^3\sqrt{3}$.

Vậy tỉ số thể tích giữa khối lập phương và khối cầu ngoại tiếp khối lập phương bằng

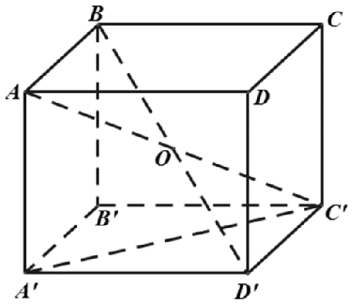
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{8a^3}{4\pi a^3\sqrt{3}} = \frac{2}{\pi\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\pi}.$$

Câu 16. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$, $AA' = 3a$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $\frac{28\sqrt{14}\pi a^3}{3}$. **B.** $\sqrt{6}\pi a^3$. **C.** $\frac{7\sqrt{14}\pi a^3}{3}$. **D.** $4\sqrt{6}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Tứ giác $ABC'D'$ là hình chữ nhật có tâm O nên $OA = OB = OC' = OD'$ (1).

Tương tự ta có các tứ giác $CDB'A'$, $BDD'B'$ là các hình chữ nhật tâm O nên $OC = OD = OA' = OB'$, $OB = OD = OB' = OD'$(2).

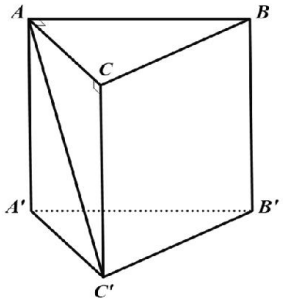
Từ (1) và (2) ta có điểm O cách đều các đỉnh của hình hộp nên O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình hộp.

Bán kính mặt cầu là: $R = OA = \frac{AC'}{2} = \frac{\sqrt{AA'^2 + A'C'^2}}{2} = \frac{\sqrt{AA'^2 + A'B'^2 + A'D'^2}}{2}$

$= \frac{\sqrt{9a^2 + a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Thể tích khối cầu là: $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{14}}{2}\right)^3 = \frac{7\sqrt{14}\pi a^3}{3}$.

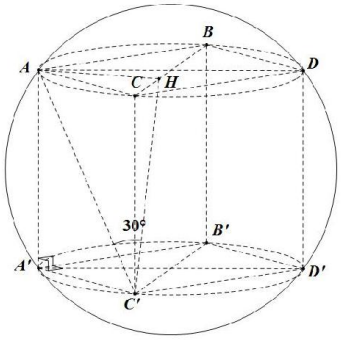
Câu 17. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$, đường thẳng AC' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc $30°$ (tham khảo hình vẽ bên dưới). Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho?



A. $S=24\pi a^2$. **B.** $S=6\pi a^2$. **C.** $S=4\pi a^2$. **D.** $S=3\pi a^2$.

Lời giải

Chọn B



Kẻ $AH\perp BC\left(H\in BC\right)$ thì $AH\perp(BCC'B')$ (vì (ABC) và $(BCC'B')$ vuông góc với nhau theo giao tuyến BC). Suy ra: $\widehat{AC'H}=30°$.

ΔABC vuông tại A có đường cao AH nên $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=a$ và $AH=\dfrac{AB.AC}{BC}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Delta AHC'$ vuông tại $H\Rightarrow AC'=\dfrac{AH}{\sin 30°}=a\sqrt{3}$. Suy ra $AA'=\sqrt{AC'^2-AB^2}=a\sqrt{2}$.

Ta có thể xem hình lăng trụ đã cho là một phần của hình hộp chữ nhật có các kích thước lần lượt là $AB=a\sqrt{3}$, $AC=a$ và $A'A=a\sqrt{2}$.

Do đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ là $R=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2+a^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

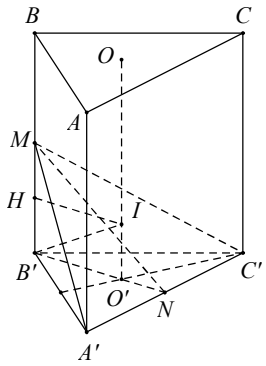
Diện tích mặt cầu cần tìm: $S=4\pi R^2=6\pi a^2$.

Câu 18. **(Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AA'=2a$, $BC=a$. Gọi M là trung điểm của BB'. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $M.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{3}a}{8}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{13}a}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{6}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O; O' lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và $A'B'C'$.

Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều $\Rightarrow \begin{cases} OO' = AA' = BB' = 2a \\ OO' \perp (ABC); OO' \perp (A'B'C') \\ BC = B'C' = a \end{cases}$.

Như vậy OO' là trục đường tròn ngoại tiếp 2 mặt đáy.

$\Rightarrow$ tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $M.A'B'C'$ nằm trên OO'.

Trong mặt phẳng $(OBB'O')$, từ trung điểm H của MB', kẻ đường thẳng vuông góc với MB' cắt OO' tại I.

Suy ra $IA' = IC' = IB' = IM \Rightarrow$ khối chóp $M.A'B'C'$ nội tiếp mặt cầu tâm I, bán kính $R = IB'$.

Gọi N là trung điểm của $A'C'$.

Dễ dàng chứng minh được $HIO'B'$ là hình chữ nhật.

Suy ra $IB' = \sqrt{IO'^2 + B'O'^2} = \sqrt{HB'^2 + \left(\frac{2}{3}B'N\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{BB'}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}.\frac{BC\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

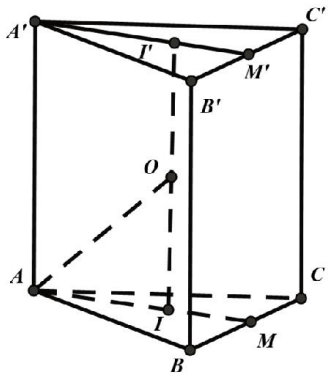
$\Rightarrow IB' = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$.

Câu 19. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 4, đáy ABC là tam giác cân tại A với $AB = AC = 2$; $\widehat{BAC} = 120°$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ trên

A. $\frac{64\pi\sqrt{2}}{3}$. **B.** 16π. **C.** 32π. **D.** $\frac{32\pi\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$. Gọi I, I' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$. Khi đó, II' là trục đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$, suy ra tâm mặt cầu là trung điểm O của II'.

Ta có $BM = AB.\sin 60° = \sqrt{3} \Rightarrow BC = 2\sqrt{3}$.

$\dfrac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = 2.IA \Rightarrow IA = \dfrac{2\sqrt{3}}{2.\sin 120°} = 2$; $OI = 2 \Rightarrow OA = \sqrt{OI^2 + IA^2} = 2\sqrt{2}$.

Bán kính mặt cầu $R = OA = 2\sqrt{2}$. Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 32\pi$.

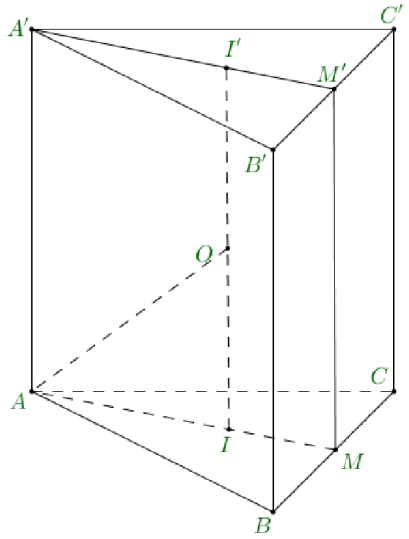
Phương án C được chọn.

Câu 20. **(Chuyên Sơn La - 2020)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có các cạnh đều bằng a. Tính diện tích S của mặt cầu đi qua 6 đỉnh của hình lăng trụ đó.

A. $S = \dfrac{7\pi a^2}{3}$. **B.** $S = \dfrac{7a^2}{3}$. **C.** $S = \dfrac{49\pi a^2}{144}$. **D.** $S = \dfrac{49a^2}{114}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I, I' lần lượt là trọng tâm tam giác $ABC, A'B'C'$, O là trung điểm của II'. Khi đó O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

Ta có $AI = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $OI = \dfrac{a}{2}$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $R = OA = \sqrt{OI^2 + AI^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{\sqrt{12}}$.

Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 4\pi.\dfrac{7a^2}{12} = \dfrac{7\pi a^2}{3}$.

Dạng 2. Khối cầu ngoại tiếp khối chóp

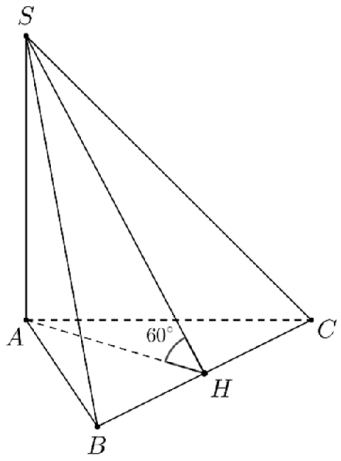
Dạng 2.1 Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

Câu 1. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $4a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{172\pi a^2}{3}$. **B.** $\frac{76\pi a^2}{3}$. **C.** $84\pi a^2$. **D.** $\frac{172\pi a^2}{9}$

Lời giải

Chọn A.



Ta có tâm của đáy cũng là giao điểm ba đường cao (ba đường trung tuyến) của tam giác đều ABC nên bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy là $r = 4a.\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}a}{3}$.

Đường cao AH của tam giác đều ABC là $AH = \frac{4a.\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}a$.

Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng $60°$ suy ra $\widehat{SHA} = 60°$.

Suy ra $\tan SHA = \frac{SA}{AH} = \frac{SA}{2\sqrt{3}a} = \sqrt{3} \Rightarrow SA = 6a$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp $R_{mc} = \sqrt{\left(\frac{SA}{2}\right)^2 + r^2} = \sqrt{9a^2 + \frac{16}{3}a^2} = \frac{\sqrt{129}}{3}a$.

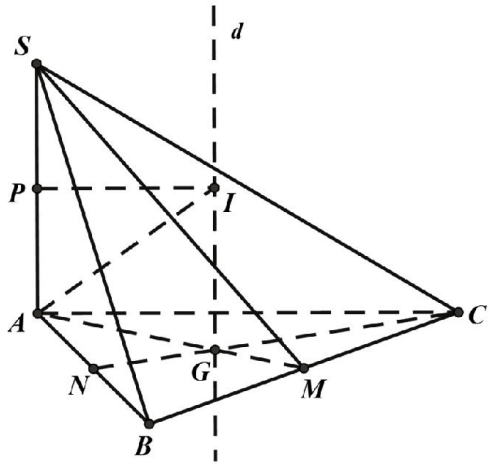
Diện tích mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp $S.ABC$ là $S_{mc} = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{\sqrt{129}}{3}a\right)^2 = \frac{172\pi a^2}{3}$.

Câu 2. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $4a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng $30°$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $52\pi a^2$. **B.** $\frac{172\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{76\pi a^2}{9}$. **D.** $\frac{76\pi a^2}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của BC,AB,SA

Gọi G là trọng tâm tam giác đồng thời là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Qua G ta dựng đường thẳng d vuông góc mặt đáy.

Kẻ đường trung trực SA cắt đường thẳng d tại I, khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

Ta có $\left((SBC),(ABC)\right)=SMA=30°$,

$$\Rightarrow SA=AM.\tan 30°=4a.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{3}=2a\Rightarrow AP=\frac{SA}{2}=a$$

$$AG=\frac{2}{3}AM=\frac{2}{3}.4a.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow PI=AG=\frac{4a\sqrt{3}}{3}$$

Xét tam giác API vuông tại P có $AI=\sqrt{AP^2+PI^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{4a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{a\sqrt{57}}{3}$.

Bán kính $R=AI=\frac{a\sqrt{57}}{3}$.

Diện tích mặt cầu $S=4\pi R^2=\frac{76\pi a^2}{3}$

Câu 3. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt (SBC) và mặt phẳng đáy là 60°. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{43\pi a^2}{3}$. **B.** $\frac{19\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{43\pi a^2}{9}$. **D.** $21\pi a^2$.

Lời giải

Chọn A.

Gọi I,J lần lượt là trung điểm của BC,SA. Ta có $\left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right)=\widehat{SIA}=60°.$,

$$\Rightarrow SA=AI.\tan 60°=3a\Rightarrow KG=\frac{SA}{2}=\frac{3a}{2}$$

Gọi G trọng tâm tam giác đồng thời là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Qua G ta dựng đường thẳng $\Delta\perp(ABC)$.

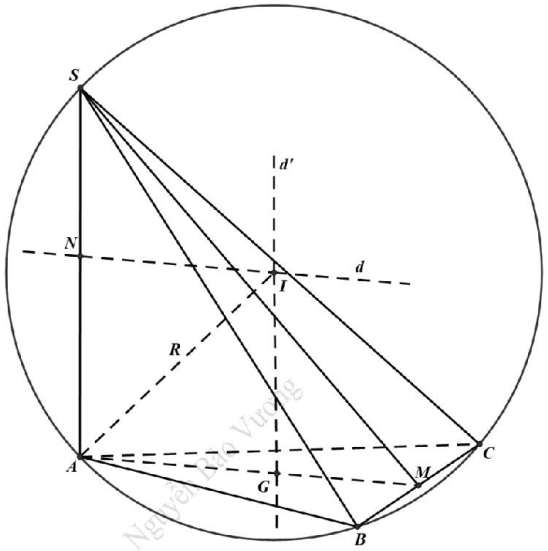
Dựng trung trực SA cắt đường thẳng Δ tại K, khi đó $KS = KA = KB = KC$ nên K là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

Ta có $R = KA = \sqrt{KG^2 + AG^2} = a.\sqrt{\frac{43}{12}}$.Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = \frac{43\pi a^2}{3}$.

Câu 4. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng 30^0. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{43\pi a^2}{3}$. **B.** $\frac{19\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{19\pi a^2}{9}$. **D.** $13\pi a^2$.

Lời giải



Chọn B

Gọi M là trung điểm của đoạn BC.

N là trung điểm của đoạn SA.

G là trọng tâm ΔABC.

Gọi d' là đường thẳng đi qua trọng tâm G của ΔABC và vuông góc với mặt phẳng đáy.

d là đường trung trực của đoạn thẳng SA.

Từ đó suy ra tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là giao điểm của hai đường thẳng d và d'.

Suy ra: bán kính mặt cầu $R = AI$.

Ta có: ΔABC đều cạnh $2a \Rightarrow AM = 2a.\frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ và $AG = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy là góc $\widehat{SMA} = 30^0$

$\tan\widehat{SMA} = \frac{SA}{AM} \Rightarrow SA = AM.\tan 30^0 = a\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{3} = a$.

Suy ra: $AN = \frac{a}{2}$.

Do đó: $R = AI = \sqrt{AN^2 + NI^2} = \sqrt{AN^2 + AG^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{57}}{6}$

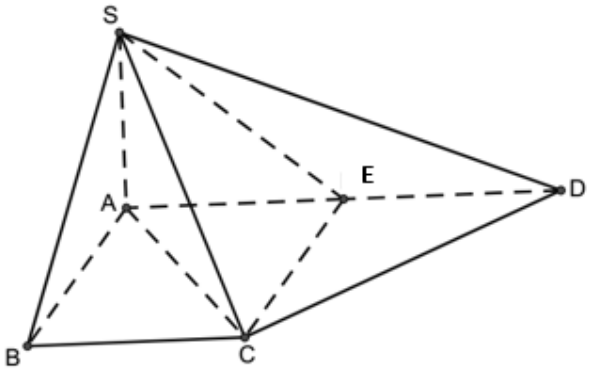
Vậy diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là: $S = 4\pi.R^2 = 4\pi.\left(\frac{\sqrt{57}}{6}\right)^2 = \frac{19\pi a^2}{3}$.

Câu 5. **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Cho hình chóp $ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D. Biết SA vuông góc với $ABCD$, $AB = BC = a$, $AD = 2a, SA = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của AD. Bán kính mặt cầu đi qua các điểm S, A, B, C, E bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{30}}{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** a.

Lời giải

Chọn D



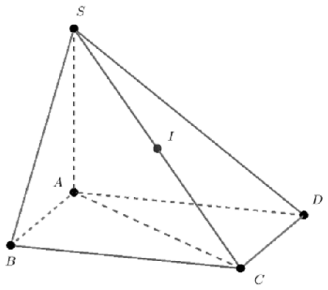
Ta thấy các tam giác $\Delta SAC; \Delta SBC; \Delta SEC$ vuông tại A, C, E. Vậy các điểm S, A, B, C, E nằm trên mặt cầu đường kính $SC \Rightarrow R = \frac{SC}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = a.$

Câu 6. **(Sở Yên Bái - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có đường chéo bằng $a\sqrt{2}$, cạnh SA có độ dài bằng $2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{12}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Theo giả thiết, $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$ nên ΔSAC vuông ta A.

Mặt khác

$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB$. Suy ra ΔSBC vuông ta B.

Tương tự, ta cũng có ΔSCD vuông ta D.

Gọi I là trung điểm của SC. Suy ra $IS = IA = IB = IC = ID$.

Do đó, I là tâm của mặt cầu goại tiếp hình chóp $S.ABCD$ và bán kính $R = \frac{SC}{2}$..

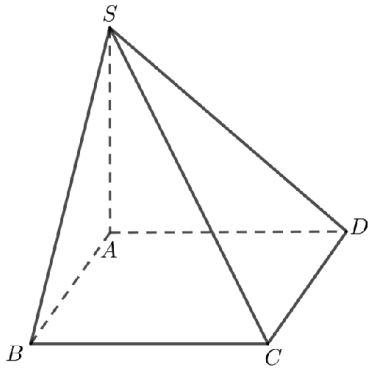
Ta có $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=\sqrt{(2a)^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}=a\sqrt{6}\Rightarrow R=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 7. **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình vuông cạnh bằng x. Cạnh bên $SA=x\sqrt{6}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính theo x diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

A. $8\pi x^2$. **B.** $x^2\sqrt{2}$. **C.** $2\pi x^2$. **D.** $2x^2$.

Lời giải

Chọn A



+ Ta có $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp AC,\ SA\perp BC,\ SA\perp CD$.

$\begin{cases}BC\perp SA\\BC\perp AB\end{cases}\Rightarrow BC\perp SB,\ \begin{cases}CD\perp SA\\CD\perp AD\end{cases}\Rightarrow CD\perp SD$.

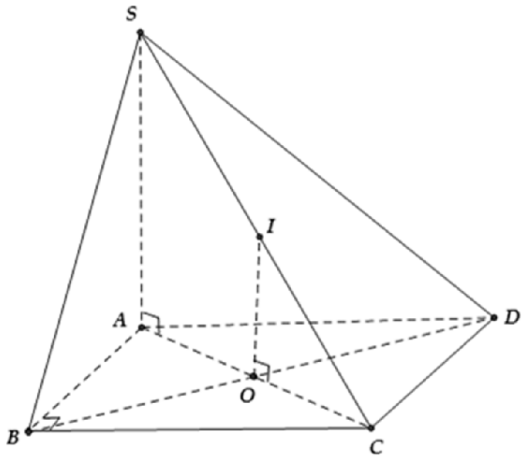
Vậy $\widehat{SAC}=\widehat{SBC}=\widehat{SDC}=90^\circ$ do đó A, B, D, S, C thuộc mặt cầu đường kính SC.

+ Ta có $AC=\sqrt{2}x$, $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=2\sqrt{2}x$. R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ khi đó $R=\dfrac{SC}{2}=\sqrt{2}x$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ bằng $S=4\pi R^2=4\pi\left(\sqrt{2}x\right)^2=8\pi x^2$.

Câu 8. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Cạnh bên $SA=a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính theo a diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

A. $8\pi a^2$. **B.** $a^2\sqrt{2}$. **C.** $2\pi a^2$. **D.** $2a^2$.

Lời giải



Gọi $O=AC\cap BD$, đường chéo $AC=a\sqrt{2}$.

Gọi I là trung điểm của SC.

Suy ra OI là đường trung bình của tam giác SAC. Suy ra $OI // SA \Rightarrow OI \perp (ABCD)$.

Hay OI là trục đường tròn ngoại tiếp đáy $ABCD$.

Mà $IS = IC \Rightarrow IA = IB = IC = ID = IS$. Suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABCD$.

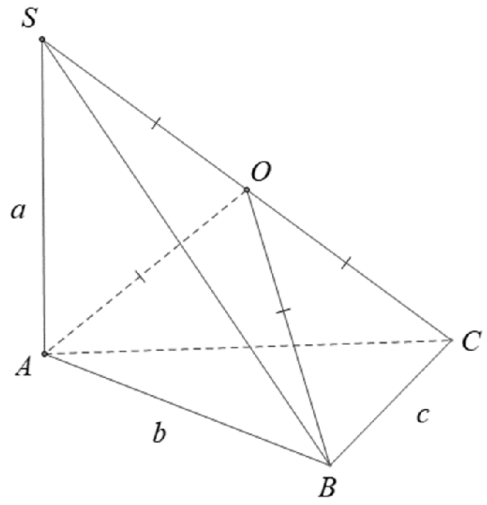
Bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABCD$: $R = SI = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = a\sqrt{2}$.

Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2 = 8\pi a^2$.

Câu 9. **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Trong không gian, cho hình chóp $S.ABC$ có SA, AB, BC đôi một vuông góc với nhau và $SA = a, AB = b, BC = c$. Mặt cầu đi qua S, A, B, C có bán kính bằng

A. $\dfrac{2(a+b+c)}{3}$. **B.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **C.** $2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AC.$

Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$

Gọi O là trung điểm SC, ta có tam giác SAC, SBC vuông lần lượt tại A và B nên:

$OA = OB = OC = OS = \dfrac{SC}{2}$. Do đó mặt cầu đi qua S, A, B, C có tâm O và bán kính $R = \dfrac{SC}{2}$.

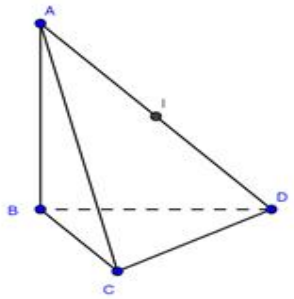
Ta có: $SC^2 = SB^2 + BC^2 = SA^2 + AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2 + c^2$. suy ra $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Câu 10. **(Mã 105 2017)** Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD vuông tại C, AB vuông góc với mặt phẳng (BCD), $AB = 5a$, $BC = 3a$ và $CD = 4a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $R = \dfrac{5a\sqrt{2}}{3}$ **B.** $R = \dfrac{5a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $R = \dfrac{5a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $R = \dfrac{5a\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Chọn C



Tam giác BCD vuông tại C nên áp dụng định lí Pitago, ta được $BD=5a$.

Tam giác ABD vuông tại B nên áp dụng định lí Pitago, ta được $AD=5a\sqrt{2}$.

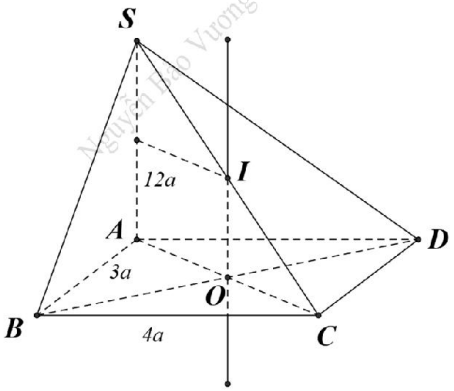
Vì B và C cùng nhìn AD dưới một góc vuông nên tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là trung điểm I của AD. Bán kính mặt cầu này là: $R=\dfrac{AD}{2}=\dfrac{5a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 11. **(Mã 104 2017)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB=3a$, $BC=4a$, $SA=12a$ và SA vuông góc với đáy. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $R=\dfrac{13a}{2}$ **B.** $R=6a$ **C.** $R=\dfrac{5a}{2}$ **D.** $R=\dfrac{17a}{2}$

Lời giải

Chọn A



Ta có: $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5a$

Vì $SA\perp AC$ nên $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=13a$

Nhận thấy: $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp SB$. Tương tự: $CD\perp SD$

Do các điểm A, B, D đều nhìn đoạn thẳng SC dưới một góc vuông nên gọi I là trung điểm của đoạn thẳng SC thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

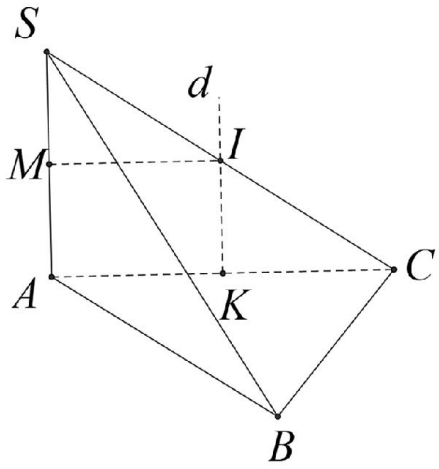
Vậy $R=\dfrac{SC}{2}=\dfrac{13a}{2}$.

Câu 12. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). $SA=5$, $AB=3$, $BC=4$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

A. $R=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. **B.** $R=5$. **C.** $R=\dfrac{5}{2}$. **D.** $R=5\sqrt{2}$.

Lời giải 1

Chọn A



Gọi K là trung điểm AC. Gọi M là trung điểm SA.

Vì tam giác ABC vuông tại B nên K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Từ K dựng đường thẳng d vuông góc với $mp(ABC)$.

Trong $mp(SAC)$ dựng MI là đường trung trực đoạn SA cắt d tại I.

Khi đó điểm I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC và bán kính mặt cầu là $R=AI$.

Ta có $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5\Rightarrow AK=\dfrac{5}{2}$. Có $IK=MA=\dfrac{SA}{2}=\dfrac{5}{2}$.

Vậy $R=AI=\sqrt{AK^2+IK^2}=\sqrt{\dfrac{25}{4}+\dfrac{25}{4}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải 2

Gọi I là trung điểm của SC. Tam giác SAC vuông tại A nên $IS=IC=IA$ (1)

Ta có $BC\perp AB; BC\perp SA\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB\Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại **B.**

Nên $IS=IC=IB$ (2)

Từ (1) và (2) ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bán kính $R=\dfrac{1}{2}SC$.

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5$; $SC=\sqrt{AS^2+AC^2}=5\sqrt{2}$

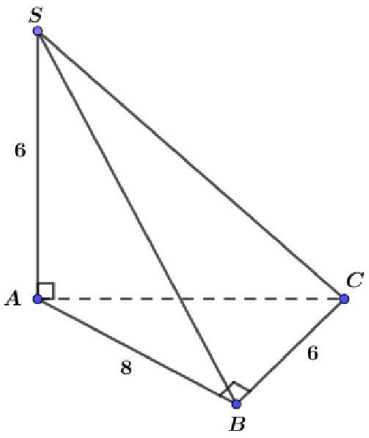
Vậy $R=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Câu 13. **(KTNL Gia Bình 2019)** Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=8$, $BC=6$. Biết $SA=6$ và $SA\perp(ABC)$. Tính thể tích khối cầu có tâm thuộc phần không gian bên trong của hình chóp và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng của hình chóp $SABC$.

A. $\dfrac{16\pi}{9}$ **B.** $\dfrac{625\pi}{81}$ **C.** $\dfrac{256\pi}{81}$ **D.** $\dfrac{25\pi}{9}$

Lời giải

Chọn C



Gọi r là bán kính khối cầu nội tiếp chóp $S.ABC$, ta có $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{tp}.r\Rightarrow r=\frac{3V_{S.ABC}}{S_{tp}}$

$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{ABC}=48$

Ta dễ dàng có ΔSAB, ΔSAC vuông tại S

Tính được $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=10$

$S_{tp}=S_{SAB}+S_{SAC}+S_{ABC}=108$ (đvdt) $\Rightarrow r=\frac{3V_{S.ABC}}{S_{tp}}=\frac{4}{3}$

Vậy thể tích khối cầu nội tiếp chóp $S.ABC$ là $V=\frac{4}{3}\pi.r^3=\frac{256\pi}{81}$.

Câu 14. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao SA, đáy ABC là tam giác vuông tại A. Biết $SA=6a, AB=2a, AC=4a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$?

A. $R=2a\sqrt{7}$. **B.** $R=a\sqrt{14}$. **C.** $R=2a\sqrt{3}$. **D.** $r=2a\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{4a^2+16a^2}=2a\sqrt{5}$

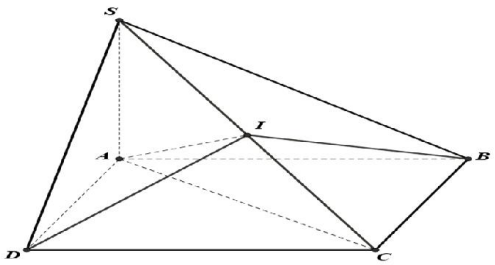
$R_d=a\sqrt{5}$

$R=\sqrt{R_d^2+\frac{SA^2}{4}}=\sqrt{5a^2+9a^2}=a\sqrt{14}$.

Câu 15. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có đường chéo bằng $\sqrt{2}a$, cạnh SA có độ dài bằng $2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$?

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải



*) Ta có ΔSAC vuông tại A (1).

*) CM ΔSDC vuông tại ***D.*** Ta có:

$AD \perp CD$ (vì $ABCD$ là hình chữ nhật).

$SA \perp CD$ (vì cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy).

Ta suy ra: $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD \Rightarrow \Delta SDC$ vuông tại D (2).

*) Chứng minh tương tự, ta được ΔSBC vuông tại B (3).

Từ (1), (2), (3): Ta suy ra: mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có đường kính SC.

Ta có: $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{4a^2 + 2a^2} = a\sqrt{6}$.

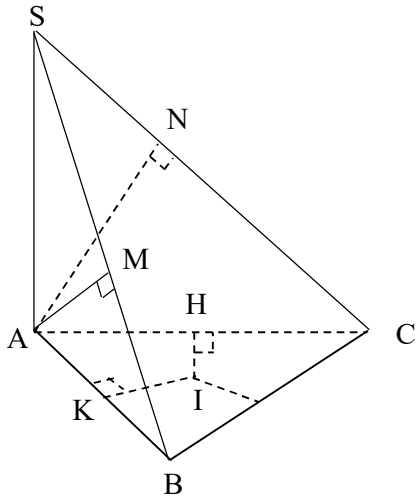
Vậy mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có bán kính bằng $R = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 16. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BAC} = 60°$, $BC = a$, $SA \perp (ABC)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC. Bán kính mặt cầu đi qua các điểm A, B, C, M, N bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ **C.** a **D.** $2a$

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải



• Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$\Rightarrow IA = IB = IC$ (1).

• Kẻ IH là trung trực của AC.

$\left.\begin{array}{l} IH \perp AC \\ IH \perp SA \end{array}\right\} \Leftrightarrow IH \perp (SAC) \Leftrightarrow IH \perp (ANC)$.

Mà ΔANC vuông tại N có AC là cạnh huyền và H là trung điểm $AC \Rightarrow IH$ là trục của $\Delta ANC \Rightarrow IA = IC = IN$ (2).

• Tương tự kẻ IK là trung trực của $AB \Rightarrow IK$ là trục của $\Delta AMB \Rightarrow IA = IB = IM \ (3)$.

$(1),(2),(3) \Rightarrow IA = IB = IC = IM = IN \Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp chóp $A.BCMN$.

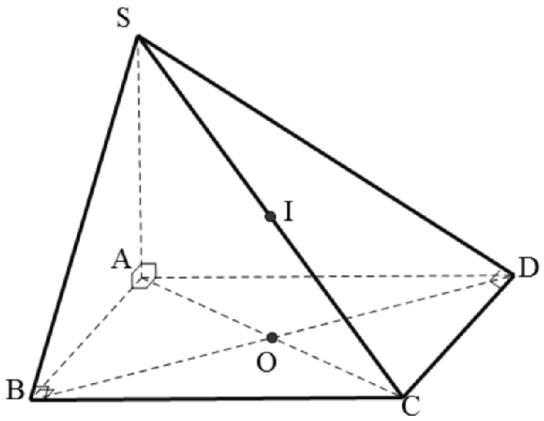
Định lí hàm sin trong ΔABC: $IA = \dfrac{BC}{2\sin \widehat{BAC}} = \dfrac{a}{2\sin 60°} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 17. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a, SA \perp (ABCD)$, SC tạo với mặt đáy một góc 45^0. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có bán kính bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $2a^3$. **B.** $2a^3\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$; I là trung điểm đoạn SC.

$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

$\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$

Các điểm A, B, D cùng nhìn SC dưới một góc vuông nên I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

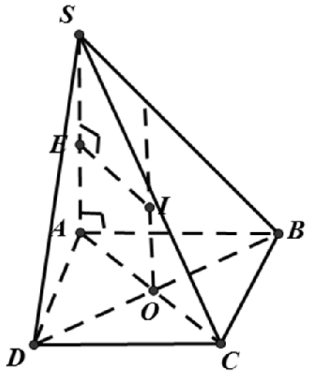
Mặt khác AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng đáy nên góc giữa SC và mặt phẳng đáy là góc ACS bằng 45^0. Do đó tam giác SAC vuông cân tại $A \Rightarrow SA = AC = 2a$.

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.2a.a.a\sqrt{3} = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 18. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có ABCD là hình vuông cạnh bằng a. $SA \perp (ABCD), SA = a\sqrt{3}$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp?

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $2a$. **C.** $a\sqrt{5}$. **D.** $a\sqrt{7}$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$. Dựng (d) đi qua O và vuông góc với $mp(ABCD)$.

Dựng Δ là đường trung trực của cạnh SA cắt SA tại E.

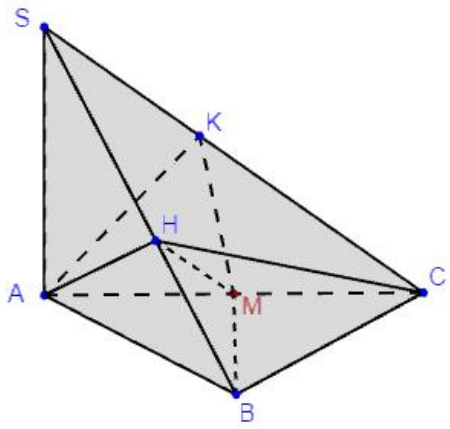
$I = d \cap \Delta \Rightarrow I$ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ => Bán kính là: IA.

Ta có $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. $AI = \sqrt{AO^2 + AE^2} = \sqrt{(\dfrac{a\sqrt{2}}{2})^2 + (\dfrac{a\sqrt{3}}{2})^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 19. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SC, khi đó thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $AHKCB$ là

A. $\sqrt{2}\pi a^3$. **B.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC.

ΔABC vuông cân tại $B \Rightarrow MB = MA = MC = \dfrac{1}{2}AC$. (1)

ΔKAC vuông tại $K \Rightarrow MK = \dfrac{1}{2}AC$. (2)

$$\left.\begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \\ AH \perp SB \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \Bigg\} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp HC.$$

$\Rightarrow \Delta AHC$ vuông tại $H \Rightarrow MH = \dfrac{1}{2}AC$. (3)

Từ $(1) \rightarrow (3) \Rightarrow M$ là tâm khối cầu ngoại tiếp hình chóp $AHKCB$.

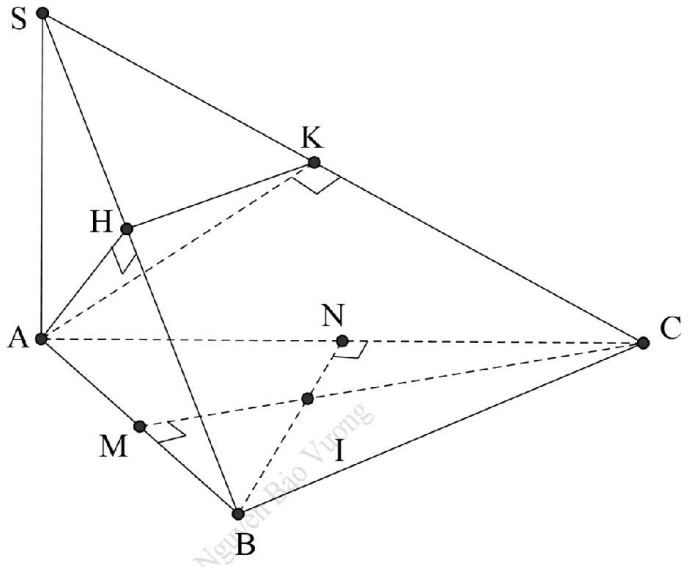
Bán kính khối cầu cần tìm: $R=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2+BC^2}=a\sqrt{2}$.

Thể tích khối cầu: $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Câu 20. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Cho hình chóp $SABC$, đáy ABC là tam giác đều cạnh a; $SA\perp(ABC)$. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên $SB;SC$. Diện tích mặt cầu đi qua 5 điểm A,B,C,K,H là

A. $\frac{4\pi a^2}{9}$. **B.** $3\pi a^2$. **C.** $\frac{4\pi a^2}{3}$. **D.** $\frac{\pi a^2}{3}$.

Lời giải



Gọi I và R lần lượt là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Vì ABC là tam giác đều cạnh nên ta có: $IA=IB=IC=R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và AC.

Ta có: $IM\perp AB$ và $IM\perp SA$ (do $SA\perp(ABC)$) suy ra $IM\perp(SAB)$; Mà $AH\perp HB$ nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHB; Do đó IM là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác $AHB\Rightarrow IA=IH=IB$ (1)

Lại có: $IN\perp AC$ và $IN\perp SA$ (do $SA\perp(ABC)$) suy ra $IN\perp(SAC)$; Mà $AK\perp KC$ nên N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AKC; Do đó IN là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác $AKC\Rightarrow IA=IK=IC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra I là tâm mặt cầu đi qua 5 điểm A,B,C,K,H và bán kính mặt cầu đó là

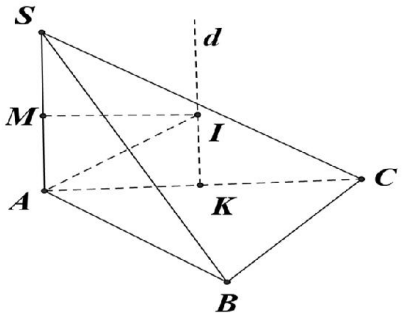
$R=\frac{a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow S_{mc}=4\pi R^2=\frac{4\pi a^2}{3}$.

Câu 21. **(Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AB=a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng SC tạo với đáy một góc 60^0. Tính diện tích mặt cầu đi qua bốn đỉnh của hình chóp $SABC$

A. $8a^2\pi$. **B.** $\frac{32a^2}{3}\pi$. **C.** $\frac{8a^2\pi}{3}$ **D.** $4a^2\pi$.

Lời giải

Chọn B



Gọi K, M lần lượt là trung điểm của AC, AS

Tam giác ABC là tam giác vuông cân tại B nên K là tâm đường tròn ngoại tiếp

Từ K dựng đường thẳng d vuông góc mặt phẳng (ABC).

Trong (SAC), dựng đường trung trực của SA cắt d tại I

Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC và bán kính mặt cầu là $R = IA$

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow AK = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$SA = AC.\tan\widehat{SCA} = a\sqrt{6} \Rightarrow MA = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

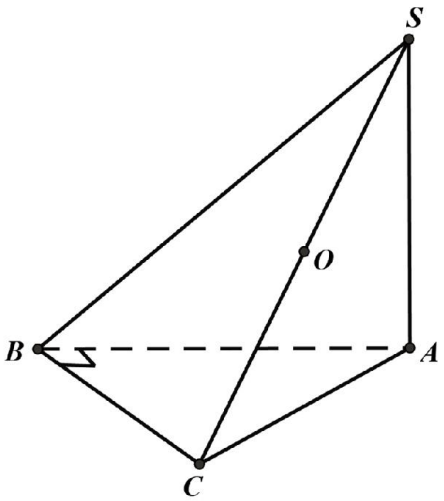
$\Rightarrow R = IA = \sqrt{MA^2 + AK^2} = a\sqrt{2}$. Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 8a^2\pi$

Câu 22. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC vuông tại B. Biết $SA = 2a, AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

A. a. **B.** $2a\sqrt{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $x = 3\ ;\ y = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\left.\begin{matrix} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$, lại có $CA \perp SA$.

Do đó 2 điểm A, B nhìn đoạn SC dưới một góc vuông. Suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S. ABC là mặt cầu đường kính SC.

Xét tam giac ABC có $AC=\sqrt{BC^2+BA^2}=2a$ suy ra $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=2a\sqrt{2}$.

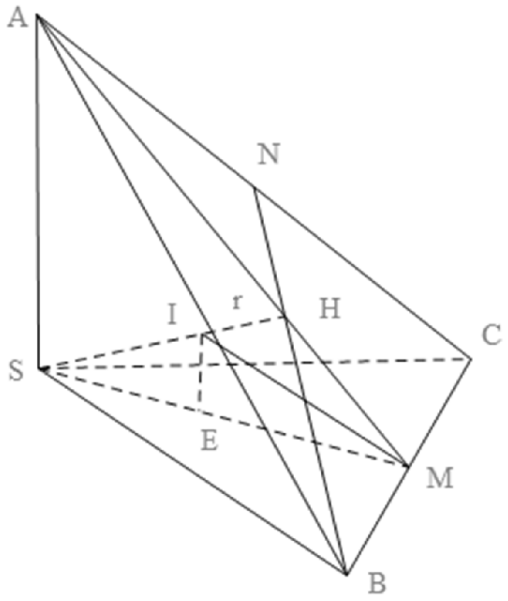
Vậy $R=a\sqrt{2}$.

Câu 23. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết thể tích của khối chóp bằng $\frac{a^3}{6}$. Tính bán kính r của mặt cầu nội tiếp của hình chóp $S.ABC$.

A. $r=\frac{a}{3+\sqrt{3}}$. **B.** $r=2a$. **C.** $r=\frac{a}{3\left(3+2\sqrt{3}\right)}$. **D.** $r=\frac{2a}{3\left(3+2\sqrt{3}\right)}$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1. Áp dụng công thức: $r=\frac{3V}{S_{tp}}$ (*) và tam giác đều cạnh x có diện tích $S=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

Từ giả thiết S.ABC đều có $SA=SB=SC$. Lại có SA, SB, SC đôi một vuông góc và thể tích khối chóp S.ABC bằng $\frac{a^3}{6}$ nên ta có $SA=SB=SC=a$.

Suy ra $AB=BC=CA=a\sqrt{2}$ và tam giác ABC đều cạnh có độ dài $a\sqrt{2}$. Do đó diện tích toàn phần của khối chóp $S.ABC$ là

$$S_{tp}=S_{SAB}+S_{SBC}+S_{SCA}+S_{ABC}=3\frac{a^2}{2}+\frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\left(3+\sqrt{3}\right)}{2}.$$

Thay vào (*) ta được:

$$r=\frac{3V}{S_{tp}}=\frac{3.\frac{a^3}{6}}{\frac{a^2\left(3+\sqrt{3}\right)}{2}}=\frac{a}{3+\sqrt{3}}.$$

Cách 2. Xác định tâm và tính bán kính

Từ giả thiết suy ra $SA=SB=SC=a$.

Kẻ $SH\perp(ABC)$, ta có H là trực tâm của tam giác ABC.

Gọi $M = AH \cap BC$, dựng tia phân giác trong của góc $\widehat{AMB}$ cắt SH tại I, kẻ $IE \perp (SBC)$ tại E. Dễ thấy $E \in SM$. Khi đó ta có $IH = IE$ hay $d(I,ABC) = d(I,SBC)$ do S.ABC la chóp tam giác đều nên hoàn toàn có $d(I,ABC) = d(I,SAB) = d(I,SAC)$ tức là I là tâm mặt cầu nội tiếp khối chóp S.ABC.

Ta có $r = IH = IE$.

Xét ΔSAM vuông tại S, đường cao SH, tính được $SM = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

$AM = \sqrt{SA^2 + SM^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$; $MH = \frac{SM^2}{AM} = \frac{a^2}{2} : \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow SH = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Áp dụng tính chất đường phân giác ta có

$\frac{IH}{IS} = \frac{MH}{MS} \Rightarrow \frac{IH}{IH + IS} = \frac{MH}{MH + MS} \Leftrightarrow \frac{IH}{SH} = \frac{MH}{MH + MS}$

$\Rightarrow IH = \frac{MH.SH}{MH + MS} = \frac{a}{\sqrt{6}}.\frac{a}{\sqrt{3}} : (\frac{a}{\sqrt{6}} + \frac{a}{\sqrt{2}}) = \frac{a}{3 + \sqrt{3}}$

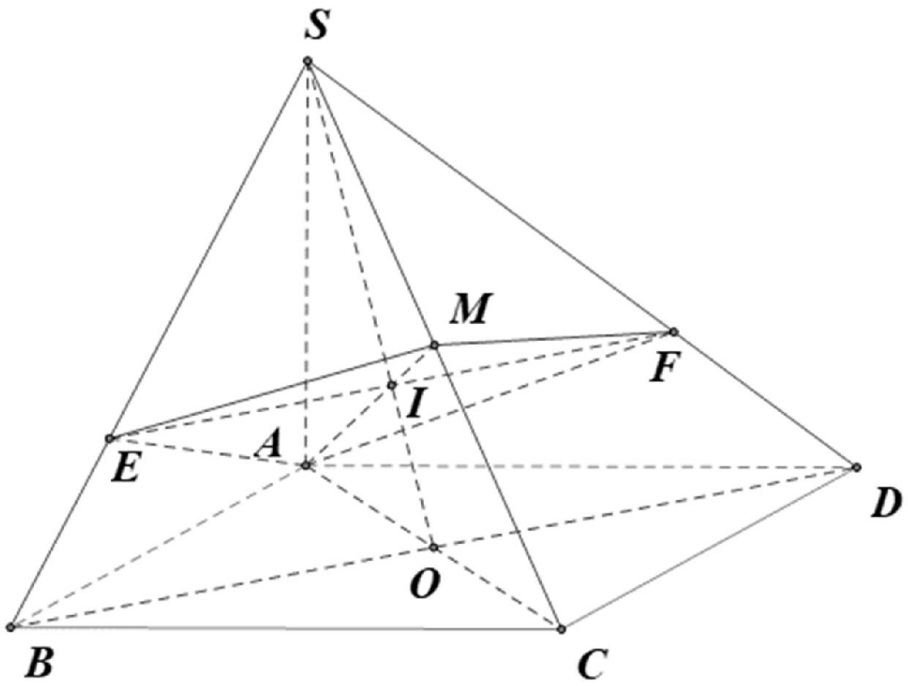
Vậy $r = IH = \frac{a}{3 + \sqrt{3}}$.

Câu 24. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Đường thẳng $SA = a\sqrt{2}$ vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm SC, mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A và M đồng thời song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E, F. Bán kính mặt cầu đi qua năm điểm S, A, E, M, F nhận giá trị nào sau đây?

A. a **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $a\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases}(\alpha)\parallel BD\\(SBD)\cap(\alpha)=FE\end{cases}\Rightarrow BD//\text{EF}$. Gọi I là giao điểm của AM và SO

Dễ thấy I là trong tâm tam giác SAC

$\frac{SF}{SD}=\frac{SI}{SO}=\frac{2}{3}\Rightarrow SF=\frac{2}{3}SD\Rightarrow SF.SD=\frac{2}{3}SD^2=\frac{2}{3}\left(SA^2+AD^2\right)=2a^2\Rightarrow SF.SD=SA^2$

Xét tam giác vuông SAD và $SF.SD=SA^2\Rightarrow AF$ là đường cao của tam giác $\Rightarrow AF\perp SF$, chứng minh tương tự ta có $\Rightarrow AE\perp SB$

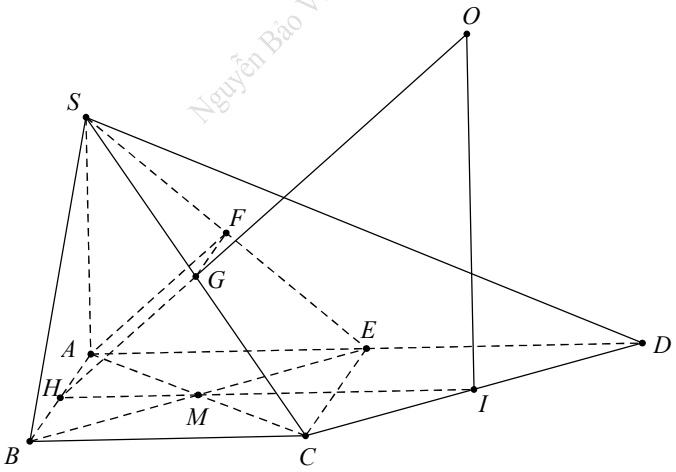
Tam giác $SA=AC=a\sqrt{2}$ nên AM vừa là trung tuyến vừa là đường cao của tam giác $SAC\Rightarrow AM\perp SM$

Ta có $\begin{cases}AF\perp SF\\AE\perp SE\\AM\perp SM\end{cases}$ nên mặt cầu đi qua năm điểm S,A,E,M,F có tâm là trung điểm của SA và bán kính bằng $\frac{SA}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 25. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Trong không gian cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB=BC=1, AD=2$, cạnh bên $SA=1$ và SA vuông góc với đáy. Gọi E là trung điểm AD. Tính diện tích S_{mc} của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDE$.

A. $S_{mc}=11\pi$. **B.** $S_{mc}=5\pi$. **C.** $S_{mc}=2\pi$. **D.** $S_{mc}=3\pi$.

Lời giải



Gọi H,G,F lần lượt là trung điểm AB, SC, SE; $M=AC\cap BD$.

Dễ thấy $AFGH$ là hình bình hành.

Ta có $\begin{cases}\text{AF}\perp SE(SA=AE)\\GF\perp SE(GF//AB//CE, AB\perp SE)\end{cases}$

Khi đó, $(AFGH)$ là mặt phẳng trung trực của SE.

Theo giả thiết: tứ giác ABCE là hình vuông $\Rightarrow CE\perp AD\Rightarrow\Delta CED$ vuông tại E.

Gọi I là trung điểm của CD, ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE.

Đường thẳng d đi qua I và song song SA là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE.

GH cắt d tại O, ta có O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDE$, bán kính: $R=OC$

Vì $\begin{cases}O\in d\Rightarrow OE=OC=OD\\O\in GH\subset(\text{AF}GH)\Rightarrow\text{OS=OE}\end{cases}\Rightarrow OS=OC=OD=OE$

$IC=\frac{1}{2}CD=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ΔOIH đồng dạng ΔGMH nên $\frac{GM}{MH}=\frac{OI}{IH}\Rightarrow OI=\frac{3}{2}$.

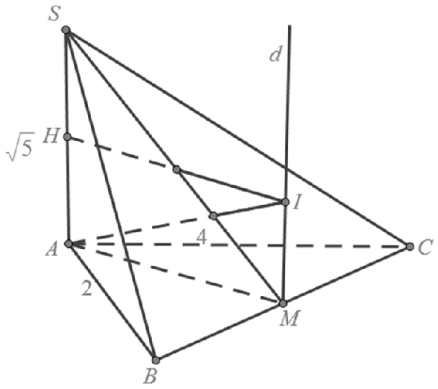
Áp dụng định lý Pitago vào tam giác OIC, suy ra $R=OC=\frac{\sqrt{11}}{2}$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDE$ là $S_{mc}=4\pi R^2=11\pi$.

Câu 26. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB=2$, $AC=4$, $SA=\sqrt{5}$. Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình chóp $S.ABC$ có bán kính là:

A. $R=\frac{25}{2}$. **B.** $R=\frac{5}{2}$. **C.** $R=5$. **D.** $R=\frac{10}{3}$.

Lời giải



Cách 1.

Gọi M,H lần lượt là trung điểm BC,SA.

Ta có tam giác ABC vuông tại A suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Qua M kẻ đường thẳng d sao cho $d\perp(ABC)\Rightarrow d$ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Trong mặt phẳng (SAM) kẻ đường trung trực Δ của đoạn SA, cắt d tại I

$\Rightarrow\begin{cases}IA=IB=IC\\IA=IS\end{cases}\Rightarrow IA=IB=IC=IS\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

- $\begin{cases}HA\perp(ABC)\\IM\perp(ABC)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}HA\perp AM\\HA\,//\,IM\end{cases}$.
- $\begin{cases}HI\perp SA\\AM\perp SA\\HI,SA,AM\subset(SAM)\end{cases}\Rightarrow HI\,//\,AM$.

Suy ra tứ giác $HAMI$ là hình chữ nhật.

Ta có $AM=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{5}$, $IM=\frac{1}{2}SA=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là: $R=AI=\sqrt{AM^2+IM^2}=\sqrt{5+\frac{5}{4}}=\frac{5}{2}$.

Cách 2. Sử dụng kết quả: Nếu $SABC$ là một tứ diện vuông đỉnh A thì bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ được tính bởi công thức: $R=\frac{1}{2}\sqrt{AS^2+AB^2+AC^2}$

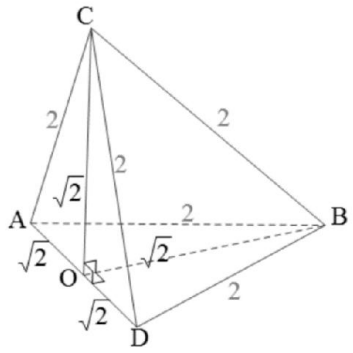
Áp dụng công thức trên, ta có $R=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+2^2+4^2}=\frac{5}{2}$.

Dạng 2.2 Khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy

Câu 1. **(THPT-Thang-Long-Ha-Noi- 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có các mặt ABC và BCD là các tam giác đều cạnh bằng 2; hai mặt phẳng (ABD) và (ACD) vuông góc với nhau. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải



Gọi O là trung điểm AD.

$$\begin{cases}(ABD)\perp(ACD)\\(ABD)\cap(ACD)=AD\Rightarrow CO\perp(ABD)\\CO\perp AD\end{cases}$$

Nguyễn Bảo Vương

ΔCOB vuông cân tại O và $CB=2$ suy ra $OB=OC=\sqrt{2}$.

$OD=OA=\sqrt{AC^2-OC^2}=\sqrt{2}$.

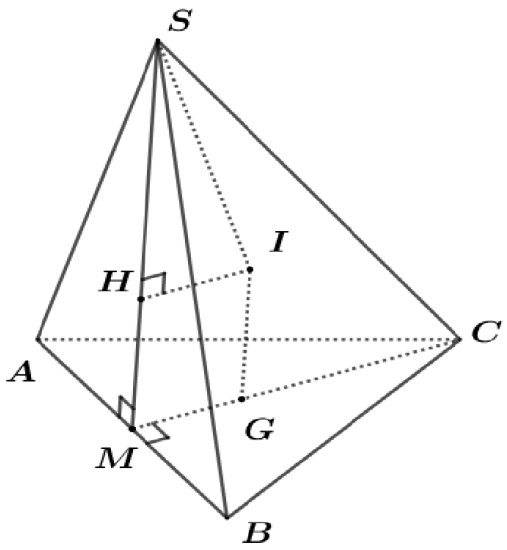
Vậy O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ và bán kính bằng $\sqrt{2}$.

Câu 2. **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{5\sqrt{15}\pi}{18}$ **B.** $V=\frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$ **C.** $V=\frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$ **D.** $V=\frac{5\pi}{3}$

Lời giải

Chọn B



Gọi M,G,H lần lượt là trung điểm của AB, trọng tâm $\Delta ABC,\Delta SAB$.

Vì $\Delta ABC,\Delta SAB$ là hai tam giác đều nên $CM\perp AB;SM\perp AB$.

Mà $\begin{cases}(SAB)\perp(ABC)\\(SAB)\cap(ABC)=AB\\CM\perp AB;SM\perp AB\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}CM\perp(SAB)\\SM\perp(ABC)\end{cases}$

Trong (SMC) từ G,H lần lượt kẻ các đường thẳng song song với SM,MC và cắt nhau tại I.

Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

Ta có

$$SI^2=SH^2+HI^2=SH^2+MG^2=\left(\frac{2}{3}SM\right)^2+\left(\frac{1}{3}SM\right)^2$$

$$=\frac{5}{9}SM^2=\frac{5}{9}.\frac{3}{4}=\frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi.SI^3=\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{5}{12}}\right)^3=\frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$$

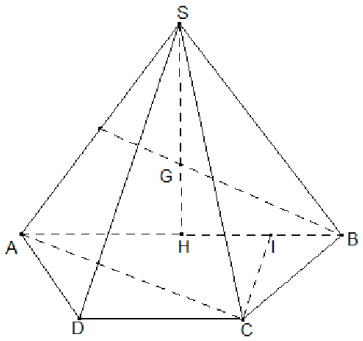
(Với V là thể tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$)

Câu 3. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân, $AB=2a$, $CD=a$, $\widehat{ABC}=60^0$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

A. $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $R=a$ **C.** $R=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $R=\frac{2a}{3}$

Lời giải

Chọn C



Do AB và CD không bằng nhau nên hai đáy của hình thang là AB và CD. Gọi H là trung điểm của AB. Khi đó SH vuông góc với AB nên SH vuông góc với $(ABCD)$.

Gọi I là chân đường cao của hình thang $ABCD$ từ đỉnh C của hình thang $ABCD$.

Ta có $BI = \dfrac{AB - CD}{2} = \dfrac{a}{2}$

Do $\widehat{ABC} = 60^0$ nên $BC = a$. Từ đó ta có tam giác ABC vuông tại C.

Do đó SH chính là trục của tam giác ABC.

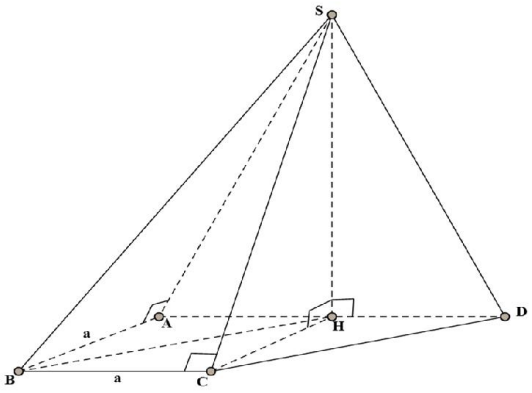
Mặt khác do tam giác SAB đều nên tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ chính là trọng tâm G của tam giác SAB.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $R = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Câu 4. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a, AD = 2a$. Tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ theo a.

A. $6\pi a^2$. **B.** $10\pi a^2$. **C.** $3\pi a^2$. **D.** $5\pi a^2$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AD. Tam giác SAD đều và $(SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Ta có $AH = a, SH = a\sqrt{3}$ và tứ giác $ABCH$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow BH = a\sqrt{2}$.

Mặt khác $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp S \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp SA$ hay $\widehat{SAB} = 90^0 \quad (1)$.

Chứng minh tương tự ta có $BC \perp SC$ hay $\widehat{SCB} = 90^0 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) ta thấy hai đỉnh A và C của hình chóp $S.ABC$ cùng nhìn SB dưới một góc vuông. Do đó bốn điểm S, A, B, C cùng nằm trên mặt cầu đường kính SB.

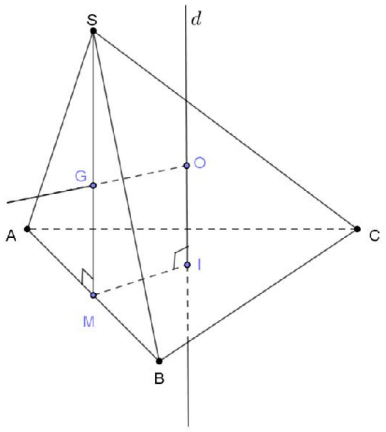
Xét tam giác vuông SHB, ta có $SB=\sqrt{BH^2+SH^2}=a\sqrt{5}$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $S=4\pi\left(\frac{SB}{2}\right)^2=5\pi a^2$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=a, \widehat{ACB}=30^0$. Biết SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABC). Tính diện tích mặt cầu S_{mc} ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $S_{mc}=\frac{7\pi a^2}{3}$. **B.** $S_{mc}=\frac{13\pi a^2}{3}$. **C.** $S_{mc}=\frac{7\pi a^2}{12}$. **D.** $S_{mc}=4\pi a^2$.

Lời giải



Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \Rightarrow IA=IB=IC=R=\frac{AB}{2\sin 30^0}=a$.

Dựng đường thẳng d qua I và vuông góc với (ABC).

Gọi M là trung điểm của AB.

Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow GA=GB=GC$

Kẽ đường thẳng đi qua G và vuông góc với (SAB) cắt d tại $O \Rightarrow OA=OB=OC=OS$.

Suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bán kính là $r=OA=OB=OC=OS$.

Khi đó $SM=\frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow GM=\frac{1}{3}SM=\frac{a\sqrt{3}}{6}=OI$.

$r^2=OB^2=OI^2+IB^2=\frac{a^2}{12}+a^2=\frac{13a^2}{12}$.

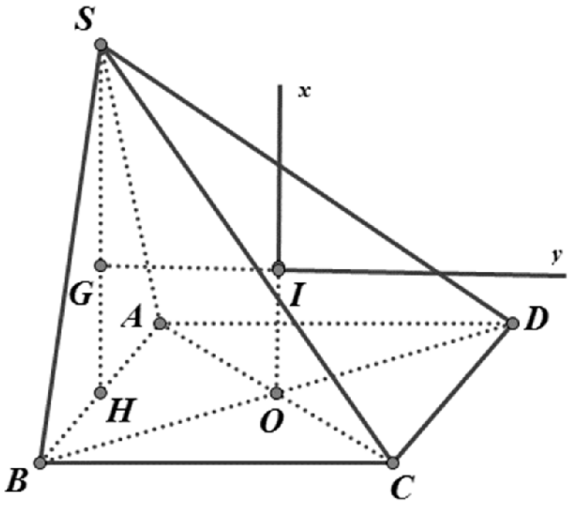
Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $S_{mc}=4.\pi.r^2=4\pi\frac{13a^2}{12}=\frac{13\pi a^2}{3}$.

Câu 6. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

A. $S=3\pi a^2$. **B.** $S=\frac{4\pi a^2}{3}$. **C.** $S=\frac{7\pi a^2}{3}$. **D.** $S=7\pi a^2$.

Lời giải

Chọn C.



+) Xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

Gọi SH là đường cao của tam giác SA**B.** Vì SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy nên SH là đường cao của hình chóp $S.ABC$**D.**

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, từ O dựng $Ox \perp (ABCD)$.

Từ trọng tâm G của tam giác SAB dựng $Gy \perp (SAB)$.

Gọi $I = Ox \cap Gy$. Vậy I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

+) Chứng minh *I* là tâm mặt cầu cần tìm

Vì $I \in Ox$, mà $Ox \perp (ABCD)$, O là tâm hình vuông $ABCD$ nên I cách đều A, B, C, D (1).

Mặt khác G là trọng tâm của tam giác đều SAB, $I \in Gy$, mà $Gy \perp (SAB)$ nên I cách đều S, A, B (2).

Từ (1) và (2) suy ra I cách đều $S, A, B, C,$ **D.** Nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$, bán kính $R=IB$

Nguyễn Bảo Vương

+) Tìm độ dài bán kính mặt cầu

Vì $OI \perp (ABCD)$, $SH \perp (ABCD)$ nên $OI // GH$ vì $G \in SH$ (3)

Mặt khác $Gy \perp (SAB)$, $I \in Gy$ mà $OH \perp (SAB)$ (vì $OH \perp AB, OH \perp SH$) nên $GI // OH$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $GHOI$ là hình bình hành $OI = GH = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Vì $OI \perp (ABCD) \Rightarrow OI \perp OB \Rightarrow \triangle BOI$ vuông tại B

Xét $\triangle BOI$ vuông tại B ta có

$$IB^2 = IO^2 + OB^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{7}{12}a^2 \Rightarrow IB = \frac{\sqrt{21}}{6}a = R.$$

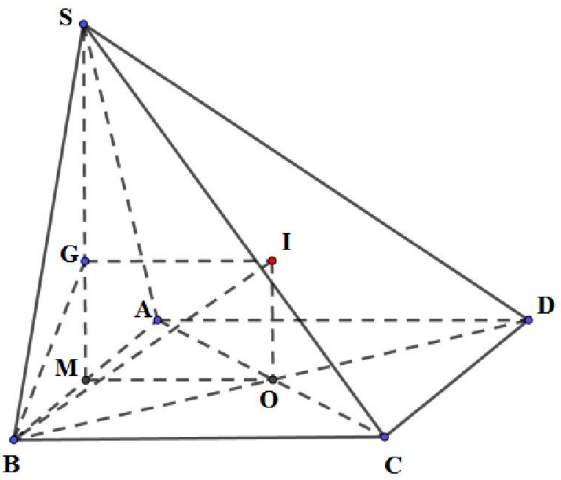
$\Rightarrow$ Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = \frac{7}{3}\pi a^2$.

Câu 7. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V = \frac{7\sqrt{21}\pi a^3}{54}$. **B.** $V = \frac{7\sqrt{21}\pi a^3}{18}$. **C.** $V = \frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{81}$. **D.** $V = \frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27}$.

Lời giải

Chọn A



***) Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp** $S.ABCD$:

Gọi G là trọng tâm tam giác SAB, O là tâm của hình vuông $ABCD$, M là trung điểm của AB.

Do ΔSAB đều $\Rightarrow SM \perp AB$

Mà $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SM \perp (ABCD) \Rightarrow SM \perp OM$

OM là đường trung bình của $\Delta ABC \Rightarrow OM // AD \Rightarrow OM \perp AB$ $(do\ AD \perp AB)$

$\Rightarrow OM \perp (SAB)$.

Dựng các đường thẳng qua G, O lần lượt song song với MO, SM, hai đường thẳng này cắt nhau tại I

Ta có: $IO // SM, SM \perp (ABCD) \Rightarrow IO \perp (ABCD)$, mà O là tâm của hình vuông $ABCD$

$\Rightarrow IA = IB = IC = ID$ (1)

Ta có: $GI // OM,\ MO \perp (SAB) \Rightarrow GI \perp (SAB)$, mà G là trọng tâm tam giác đều SAB

$\Rightarrow IS = IA = IB$ (2)

Từ (1), (2) suy ra: I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

***) Tính bán kính, thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp** $S.ABCD$:

Ta có: $OM = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2} \Rightarrow GI = OM = \frac{a}{2}$ (do tứ giác $OMIG$ là hình chữ nhật)

ΔSAB đều cạnh bằng a có G là trọng tâm $\Rightarrow BG = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Do $GI \perp (SAB) \Rightarrow GI \perp BG \Rightarrow \Delta BGI$ vuông tại G

$$\Rightarrow IB = \sqrt{IG^2 + GB^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{7}{12}}$$

Bán kính khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là: $R = IB = a\sqrt{\frac{7}{12}}$

Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là:

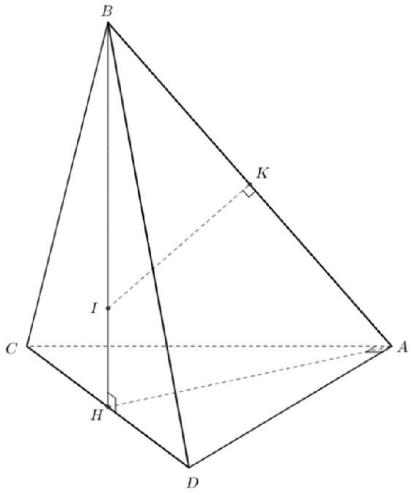
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.\left(a\sqrt{\frac{7}{12}}\right)^3 = \frac{7\sqrt{21}\pi a^3}{54}.$$

Câu 8. **(Sở Phú Thọ 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = BC = AC = BD = 2a, AD = a\sqrt{3}$; hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) vuông góc với nhau. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{64\pi a^2}{27}$ **B.** $\frac{4\pi a^2}{27}$ **C.** $\frac{16\pi a^2}{9}$ **D.** $\frac{64\pi a^2}{9}$

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm $CD \Rightarrow BH \perp (ACD)$ và tam giác ACD vuông tại **A.**

$$\Rightarrow CD = \sqrt{CA^2 + AD^2} = a\sqrt{7} \text{ và } BH = \sqrt{BD^2 - HD^2} = \frac{3}{2}a.$$

Trong mặt phẳng (BHA) kẻ đường trung trực Δ của cạnh BA và gọi $I = \Delta \cap SH$

Khi đó ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Ta có

$$\Delta BIK \sim \Delta BAH \Rightarrow BI = \frac{BK.BA}{BH} = \frac{BA^2}{2BH} = \frac{4}{3}a.$$

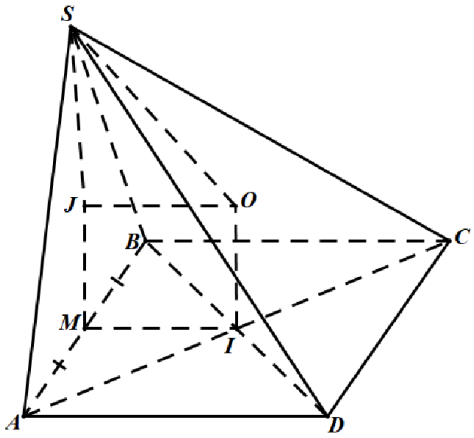
Suy ra bán kính mặt cầu là $R = BI = \frac{4}{3}a.$

Vậy diện tích của mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = \frac{64\pi a^2}{9}.$

Câu 9. **(THPT Nghĩa Hưng NĐ- 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết rằng $AB = a, AD = a\sqrt{3}$ và $\widehat{ASB} = 60°$. Tính diện tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $S = \frac{13\pi a^2}{2}.$ **B.** $S = \frac{13\pi a^2}{3}.$ **C.** $S = \frac{11\pi a^2}{2}.$ **D.** $S = \frac{11\pi a^2}{3}.$

Lời giải



Gọi I, J là tâm đường tròn ngoại tiếp của tứ giác $ABCD$ và tam giác $SA\boldsymbol{B}$. M là trung điểm của AB và O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Ta có: $JM \perp AB$ và $IM \perp AB$ và $mp(SAB) \perp mp(ABCD)$ nên $IM \perp JM$, ngoài ra O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp nên $OI \perp (ABCD) \Rightarrow OI \perp IM$; $OJ \perp (SAB) \Rightarrow OJ \perp JM$.

Do đó O, J, M, I đồng phẳng và tứ giác $OJMI$ là hình chữ nhật (do có 3 góc ở đỉnh vuông).

Gọi R, R_b lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB.

Ta có: $R = SO = \sqrt{SJ^2 + OJ^2} = \sqrt{R_b^2 + IM^2} = \sqrt{R_b^2 + IA^2 - AM^2} = \sqrt{R_b^2 + IA^2 - \dfrac{AB^2}{4}}$

Áp dụng định lý Pytago: $IA^2 = \dfrac{BD^2}{4} = \dfrac{AB^2 + AD^2}{4} = \dfrac{a^2 + 3a^2}{4} = a^2 \Rightarrow IA = a$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác SAB: $R_b = \dfrac{AB}{2\sin \widehat{ASB}} = \dfrac{a}{2.\sin 60°} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

Do đó: $R = \sqrt{\dfrac{a^2}{3} + a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{13}{12}a^2} \Rightarrow S = 4\pi R^2 = \dfrac{13}{3}\pi a^2$.

Nhận xét: Bài toán này áp dụng một bổ đề quan trọng sau:

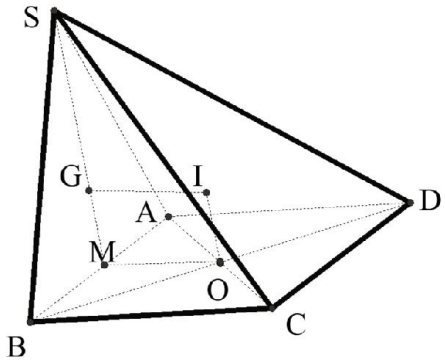
Xét hình chóp đỉnh S, có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy, mặt phẳng đáy nội tiếp trong đường tròn bán kính R_d, bán kính mặt cầu ngoại tiếp tam giác SAB là R_b. Khi đó hình chóp này nội tiếp trong 1 mặt cầu có bán kính $R = \sqrt{R_d^2 + R_b^2 - \dfrac{AB^2}{4}}$

Câu 10. **(Thi thử hội 8 trường chuyên 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $AB = 2a$, $AD = a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{57}}{6}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{19}}{4}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{15}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{13}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm của đáy, M là trung điểm của AB và G là tâm của tam giác đều SAB.
Gọi d,Δ lần lượt là trục của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ và tam giác SAB.
Do $(SAB)\perp(ABCD),(SAB)\cap(ABCD)=AB,SM\perp AB$ nên $SM\perp(ABCD)$.
Mặt khác $d\perp(ABCD)$ nên $d\,//\,SM$ hay $\Delta\subset mp(d,SM)$, Δ và d cắt nhau tại I.
Ta có I cách đều S,A,B,C,D nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.
Tứ giác $GMOI$ có $GM\perp MO,IG\perp GM,SM\,//\,IO$ nên $GMOI$ là hình chữ nhật. $SM=a\sqrt{3},GM=\frac{1}{3}SM=\frac{a\sqrt{3}}{3},AO=\frac{1}{2}AC=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

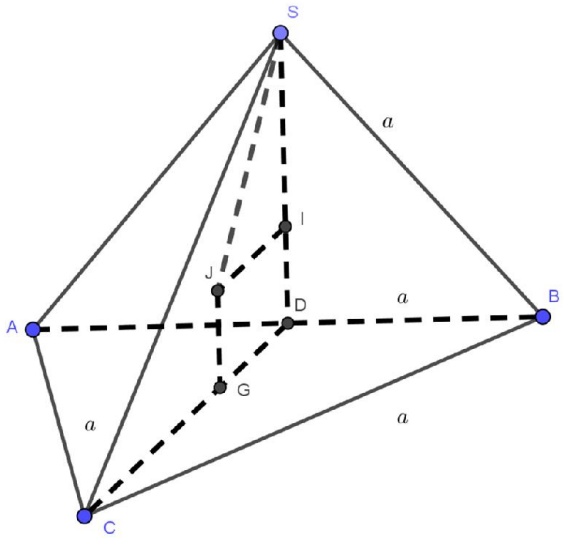
Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $R=IA=\sqrt{IO^2+AO^2}=\sqrt{\frac{a^2}{3}+\frac{5a^2}{4}}=\frac{\sqrt{57}a}{6}$.

Câu 11. **(Nam Định 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{5a^2\pi}{12}$. **B.** $\frac{5a^2\pi}{3}$. **C.** $\frac{5a^2}{3}$. **D.** $\frac{5a^2}{12}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi G,I là lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và SAB.
Trục của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và SAB cắt nhau tại J nên J là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$, bán kính mặt cầu là $R=SJ$

Ta có $IJ = GD = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ và $SI = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ nên $R = SJ = \sqrt{SI^2 + JI^2} = \frac{\sqrt{15}a}{6}$

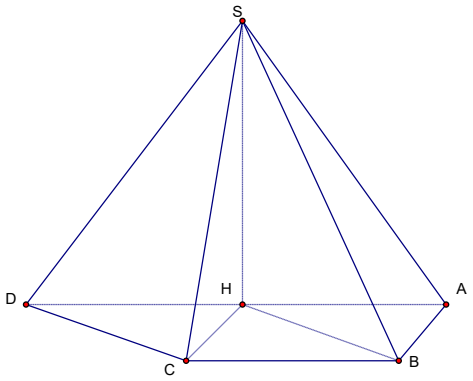
Vậy Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $S = 4\pi R^2 = \frac{5\pi a^2}{3}$

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $6\pi a^2$. **B.** $10\pi a^2$. **C.** $3\pi a^2$. **D.** $5\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm AD thì $SH \perp AD$ và $SH = \frac{AD\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ (vì ΔSAD đều).

Suy ra $SH \perp (ABCD)$ (vì (SAD) và $(ABCD)$ vuông góc nhau theo giao tuyến AD)

Ta có thể xem hình chóp $S.ABC$ là một phần của hình hộp chữ nhật có một đáy là hình vuông $ABCH$ và một cạnh bên là SH (lúc này SB là một đường chéo của hình hộp).

Do đó bán kính mặt cầu là $R = \frac{1}{2}SB = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2 + SH^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

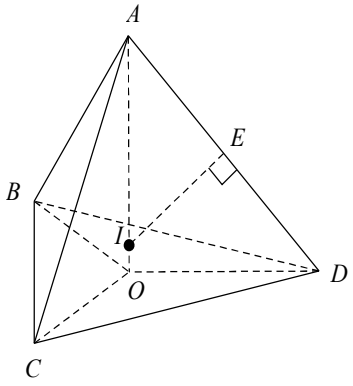
Diện tích mặt cầu cần tìm là $S = 4\pi R^2 = 5\pi a^2$.

Dạng 2.3 Khối chóp đều

Câu 1. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Nếu tứ diện đều có cạnh bằng a thì mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện có bán kính bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải



Gọi tứ diện đều là $ABCD$, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD thì ta có $AO \perp (BCD)$.

Trong mặt phẳng (AOD) dựng đường trung trực của AD cắt AO tại I, vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ với AI là bán kính.

Gọi E là trung điểm AD. Ta có $\Delta AEI \sim \Delta AOD \Rightarrow \dfrac{AO}{AE} = \dfrac{AD}{AI} \Rightarrow R = AI = \dfrac{AD.AE}{AO} = \dfrac{AD^2}{2AO}$.

$AO = \sqrt{AD^2 - DO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow R = \dfrac{a^2}{2.\dfrac{a\sqrt{6}}{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

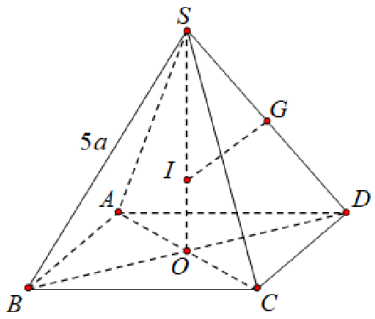
***Công thức tính nhanh*:** Tứ diện đều $ABCD$ có: độ dài cạnh bên $AB = AC = AD = x$ và chiều cao h. Khi đó, bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $R = \dfrac{x^2}{2h}$.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}a$, cạnh bên bằng $5a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $R = \sqrt{3}a$. **B.** $R = \sqrt{2}a$. **C.** $R = \dfrac{25a}{8}$. **D.** $R = 2a$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, G là trung điểm SD, $GI \perp SD, I \in SO$.

Ta có cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}a$ nên $BD = 3\sqrt{2}a.\sqrt{2} = 6a$, $OD = 3a$.

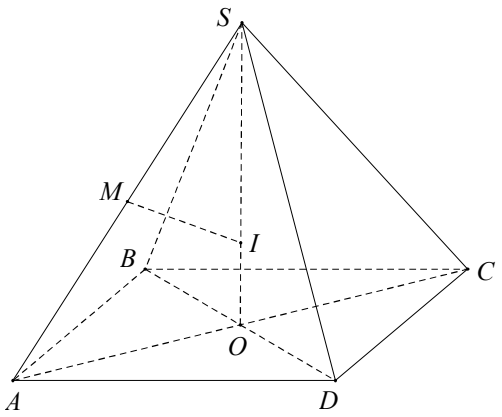
Xét ΔSOD vuông tại O ta có: $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = 4a$

Ta có $\Delta SOD \sim \Delta SGI$, suy ra $\dfrac{SO}{SG} = \dfrac{SD}{SI} \Rightarrow 4a.R = \dfrac{1}{2}(5a)^2 \Rightarrow R = \dfrac{25a}{8}$

Câu 3. Hình chóp đều $S.ABCD$ tất cả các cạnh bằng a. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là

A. $4\pi a^2$. **B.** πa^2. **C.** $\sqrt{2}\pi a^2$ **D.** $2\pi a^2$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$; M là trung điểm SA.

Trong mặt phẳng (SAC) gọi I là giao điểm của trung trực đoạn SA với SO.

Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

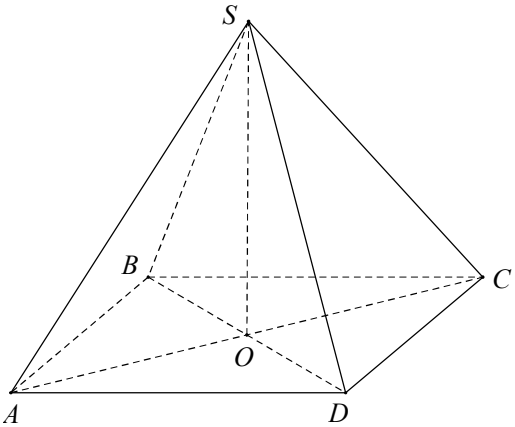
Tam giác SAO đồng dạng với tam giác SIM.

$$\Rightarrow \frac{SI}{SA} = \frac{SM}{AO} \Rightarrow R = SI = \frac{SM.SA}{AO} = \frac{\frac{a}{2}\cdot a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Nguyễn Bảo Vương

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $S = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\pi a^2$.

Cách 2:



Gọi $O = AC \cap BD$.

Vì $\Delta SBD = \Delta ABD$ nên $OS = OA$.

Mà $OA = OB = OC = OD \Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

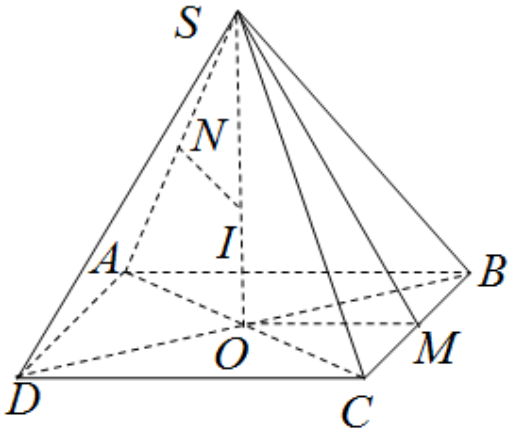
Bán kính mặt cầu $R = OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $S = 4\pi\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\pi a^2$.

Câu 4. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều có góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Biết rằng mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó có bán kính $R = a\sqrt{3}$. Tính độ dài cạnh đáy của hình chóp tứ giác đều nói trên.

A. $\dfrac{12}{5}a$ **B.** $2a$ **C.** $\dfrac{3}{2}a$ **D.** $\dfrac{9}{4}a$

Lờigiải



Gọi các điểm như hình vẽ.

Ta có $SI = a\sqrt{3}$. Góc $SMO = 60^0$.

Gọi cạnh đáy bằng x thì $SO = OM.\tan 60^0 = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

$SA = \sqrt{SO^2 + AO^2} = \dfrac{x\sqrt{5}}{2}$

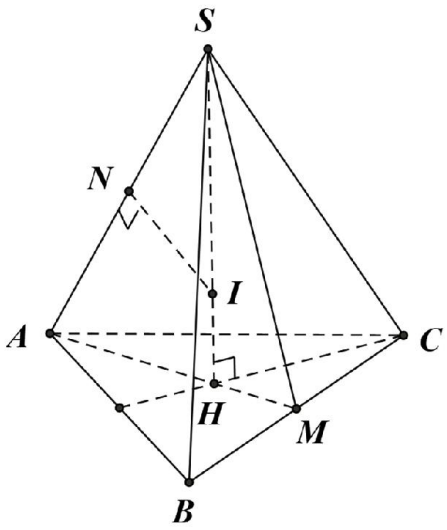
$\Delta SNI \sim \Delta SOA$ nên $\dfrac{SN}{SI} = \dfrac{SO}{SA} \Leftrightarrow \dfrac{5x^2}{8} = \dfrac{3a.x}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{12}{5}a\,(x > 0)$

Câu 5. **(Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $AB = a$, góc giữa mặt bên với mặt phẳng đáy bằng 60^0. Tính bán kính mặt cầu đi qua bốn đỉnh của hình chóp $S.ABC$

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{7a}{12}$. **C.** $\dfrac{7a}{16}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của BC, H là trọng tâm tam giác ABC

Khi đó $SH \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{SMA} = 60^0$

Gọi N là trung điểm của SA, kẻ $NI \perp SA (I \in SH)$

Khi đó ta có $IS = IA = IB = IC$, nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

ΔABC đều cạnh a nên $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}, AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.$

$\tan \widehat{SMA} = \dfrac{SH}{HM} \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\sqrt{3} = \dfrac{1}{2}a$

$SA^2 = SH^2 + AH^2 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{7a^2}{12}$

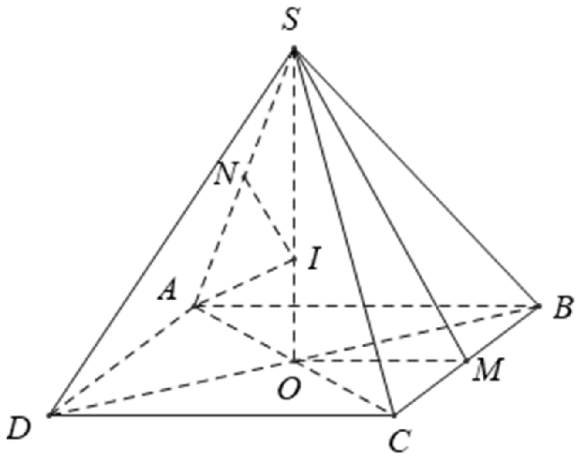
$\Delta SAH \sim \Delta SIN \Rightarrow \dfrac{SA}{SI} = \dfrac{SH}{SN} \Rightarrow SI = \dfrac{SA.SN}{SH} = \dfrac{SA^2}{2SH} = \dfrac{7a^2}{12.2.\dfrac{1}{2}a} = \dfrac{7a}{12}.$

Câu 6. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều có góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Biết rằng mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó có bán kính $R = a\sqrt{3}$. Tính độ dài cạnh đáy của hình chóp tứ giác đều nói trên.

A. $\dfrac{12}{5}a$. **B.** $2a$. **C.** $\dfrac{3}{2}a$. **D.** $\dfrac{9}{4}a$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow \left((SBC),(ABCD)\right) = \widehat{SMO} = 60°$.

Gọi N là trung điểm SA, dựng mp trung trực của SA, cắt SO tại $I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

$\Rightarrow R = IA = IS = a\sqrt{3}$

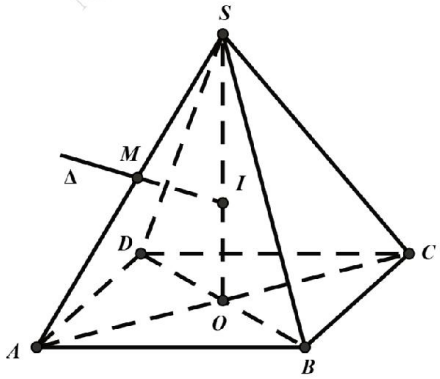
Gọi $AB = x$

Có $SO = OM.\tan 60° = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$, $OA = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$, $SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \dfrac{x\sqrt{5}}{2}$

ΔSNI đồng dạng $\Delta SOA \Rightarrow SN.SA = SO.SI$

$\Leftrightarrow \dfrac{x\sqrt{5}}{4}.\dfrac{x\sqrt{5}}{2} = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{12a}{5}$.

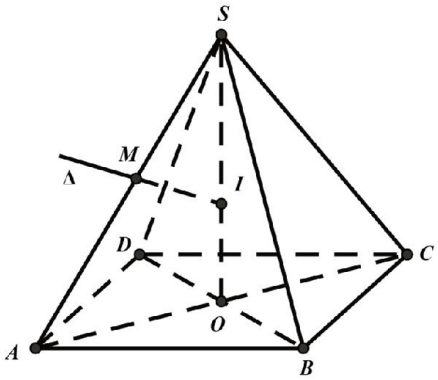
Câu 7. **(Gia Lai 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc $60°$ (tham khảo hình vẽ). Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.



A. $\dfrac{8\pi a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{5\pi a^2}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}\pi a^2}{3}$. **D.** $\dfrac{7\pi a^2}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O = AC \cap BC$. Khi đó SO là trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.
Gọi Δ là đường trung trực của cạnh SA và $I = \Delta \cap SO$ thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Theo giả thiết ta có $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Mà góc giữa SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° hay $\widehat{SAO} = 60^\circ \Rightarrow \tan 60^\circ = \dfrac{SO}{AO}, \Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Ta có ΔSMI và ΔSOA đồng dạng nên $\dfrac{SM}{SO} = \dfrac{SI}{SA} \Rightarrow SI = \dfrac{SM.SA}{SO} \Rightarrow SI = \dfrac{SA^2}{2.SO}$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp $R = IS = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$. là

$$S_{xq} = 4\pi.R^2 = 4\pi.\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{8\pi a^2}{3}.$$

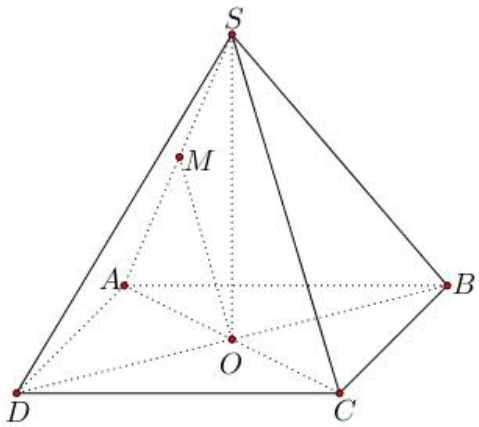
Nguyễn Bảo Vương

Câu 8. **(Vũng Tàu - 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. $2\pi a^2$. **B.** πa^2. **C.** $\dfrac{2}{3}\pi a^2$. **D.** $\dfrac{1}{2}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, suy ra $SO \perp (ABCD)$.

Gọi M là trung điểm SA.

Ta có SO là trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.

Gọi (P) là mặt phẳng trung trực cạnh SA, (P) cắt SO tại I.

Ta có $IA = IS$.

Suy ra $IS = IA = IB = IC = ID$.

Mặt cầu ngoại tiếp $S.ABCD$ có tâm I, bán kính IS.

Ta có $SM = \frac{a}{2}$, $SO = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $\Delta SMI \sim \Delta SOA(\text{g.g}) \Rightarrow \frac{IS}{SA} = \frac{SM}{SO} \Leftrightarrow IS = \frac{SM.SA}{SO} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra $I \equiv O$.

Vậy $S = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\pi a^2$.

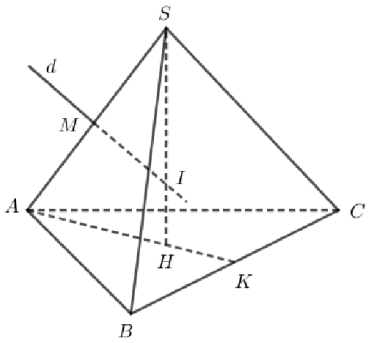
Câu 9. Cho tứ diện đều có thể tích bằng $\frac{1}{3}$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện

A. $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $R = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử tứ diện đều là $S.ABC$ có cạnh a



Gọi K là trung điểm của BC, H là hình chiếu của S trên (ABC).

Khi đó SH là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có $AH = \frac{2}{3}AK = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.AK.BC.SH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Theo đề bài ta có $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \sqrt{2}$.

Trong mặt phẳng (SAK) gọi d là đường trung trực của cạnh SA và $\begin{cases} d \cap SA = M \\ d \cap SH = I \end{cases}$ thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$ co bán kính $R = SI$.

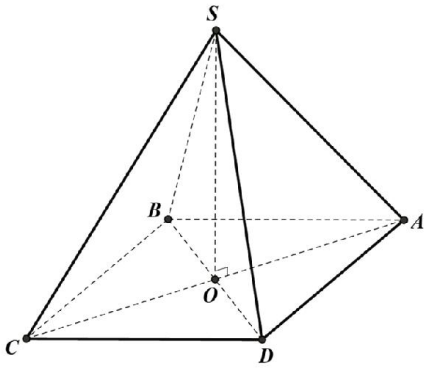
Trong tam giác SAH ta có: $SI.SH = SM.SA \Rightarrow SI = \frac{SM.SA}{SH} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}.\sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 10. Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp.

A. $V=3\pi a^3\sqrt{6}$. **B.** $V=\pi a^3\sqrt{6}$. **C.** $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{8}$. **D.** $V=\dfrac{3\pi a^3\sqrt{6}}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là giao điểm của AC và BD ta có $OA=OB=OC=OD$

Ta lại có $\triangle ABC=\triangle ASC$ (c-c-c) $\Rightarrow$ $BO=SO$ (trung tuyến tương ứng)

$\Rightarrow OA=OB=OC=OD=SO$

Suy ra O là tâm của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

Ta có $r=OA=\dfrac{a\sqrt{3}.\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

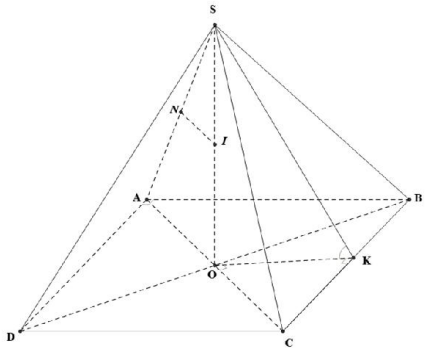
Vậy. $V=\dfrac{4}{3}\pi.\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^3=\pi a^3\sqrt{6}$

Câu 11. **(Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy bằng $45°$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

A. $\dfrac{4\pi a^2}{3}$ **B.** $\dfrac{3\pi a^2}{4}$ **C.** $\dfrac{2\pi a^2}{3}$ **D.** $\dfrac{9\pi a^2}{4}$

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của đáy suy ra SO là trục của đường tròn ngoại tiếp đáy đa giác.

Từ O dựng OK vuông góc với BC, suy ra K là trung điểm BC.

Xét tam giác SBC cân tại S có $SK \perp BC$

Từ đó ta có $\begin{cases} SK \perp BC \\ OK \perp BC \end{cases} \Rightarrow$ Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy $ABCD$ là góc $\widehat{SKO}$

Xét tam giác OBC vuông cân tại O có $OK = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$

Xét tam giác SKO vuông tại O có $SO = OK.\tan\left(\widehat{SKO}\right) = \frac{a}{2}.\tan 45° = \frac{a}{2}$

Mặt khác $SA^2 = SO^2 + OA^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Gọi N là trung điểm SA. Trong mặt phẳng (SAO) vẽ đường trung trực của cạnh SA cắt SO tại I, suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

Xét hai tam giác đồng dạng SNI và SOA có $\frac{SN}{SO} = \frac{SI}{SA}$

$$R = SI = \frac{SN.SA}{SO} = \frac{SA^2}{2SO} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2\frac{a}{2}} = \frac{3a}{4}$$

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $S = 4\pi R^2 = 4\pi.\left(\frac{3a}{4}\right)^2 = \frac{9\pi a^2}{4}$

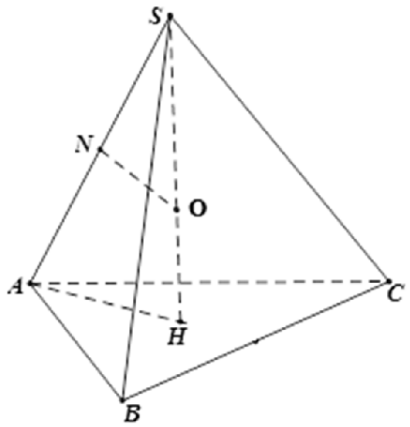
Nguyễn Bảo Vương

Dạng 2.4 Khối chóp khác

Câu 1. **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Cho mặt cầu tâm O và tam giác ABC có ba đỉnh nằm trên mặt cầu với góc $\widehat{BAC} = 30^0$ và $BC = a$. Gọi S là điểm nằm trên mặt cầu, không thuộc mặt phẳng (ABC) và thỏa mãn $SA = SB = SC$, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích V của khối cầu tâm O theo a.

A. $V = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi a^3$ **B.** $V = \frac{32\sqrt{3}}{27}\pi a^3$ **C.** $V = \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi a^3$ **D.** $V = \frac{15\sqrt{3}}{27}\pi a^3$

Lời giải



Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, khi đó $SH \perp (ABC)$ và SH là trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{SAH} = 60^0$.

Gọi N là trung điểm SA, mặt phẳng trung trực của cạnh SA cắt SH tại O. Khi đó $OS = OA = OB = OC$ nên O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Khi đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

$AH = \dfrac{BC}{2\sin 30^0} = a$. $SH = AH.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$, $SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = 2a$.

Bán kính mặt cầu là $R = SO = \dfrac{SN.SA}{SH} = \dfrac{SA^2}{2SH} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$.

Thể tích của khối cầu tâm O là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{32\sqrt{3}}{27}\pi a^3$.

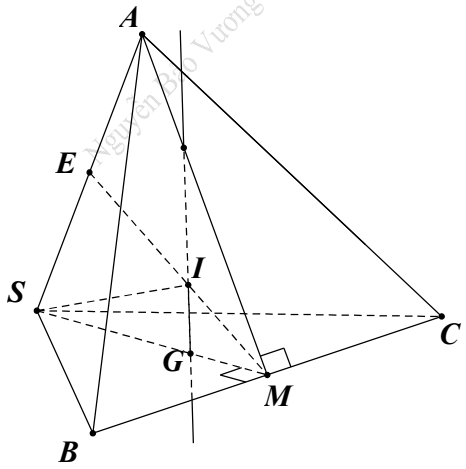
Câu 2. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, các cạnh còn lại cùng bằng a.

Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A. $R = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$ **B.** $R = \dfrac{a}{3}$ **C.** $R = \dfrac{a\sqrt{13}}{3}$ **D.** $R = \dfrac{a\sqrt{13}}{6}$

Lời giải

Chọn D



Ta có $SM = AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, do đó tam giác SAM đều.

Gọi M là trung điểm đoạn BC. Ta có (SAM) là mặt phẳng trung trực đoạn BC.

Gọi G là trọng tâm tam giác SBC, Δ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC.

Gọi E là trung điểm SA, ta có $I = \Delta \cap EM$, khi đó I là tâm đường mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$.

$IG = GM.\tan 30^o = \dfrac{a}{6}$, $SG = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Do đó $R = SI = \sqrt{IG^2 + GS^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{3} + \dfrac{a^2}{36}} \Rightarrow R = \dfrac{a\sqrt{13}}{6}$.

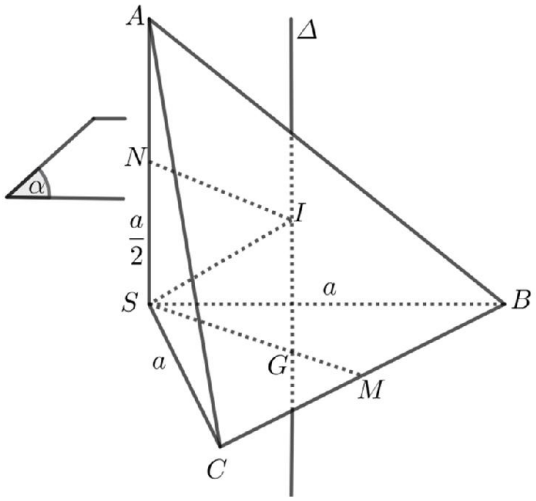
Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = \widehat{ASC} = 90°$, $\widehat{BSC} = 60°$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

A. $\frac{7\pi a^2}{18}$ **B.** $\frac{7\pi a^2}{12}$ **C.** $\frac{7\pi a^2}{3}$ **D.** $\frac{7\pi a^2}{6}$

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC)$; ΔSBC có $SB = SC = a, \widehat{BSC} = 60^\circ \Rightarrow \Delta SBC$ đều.



Gọi M là trung điểm của BC.

Gọi G là trọng tâm của tam giác $SBC \Rightarrow G$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC.

+ Dựng đường thẳng Δ đi qua G và vuông góc với (SBC) thì Δ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC.

+ Dựng mặt phẳng (α) là mặt phẳng trung trực của cạnh bên SA.

+ Gọi I là giao điểm của Δ và (α). Khi đó: $\begin{cases} I \in \Delta \Rightarrow IB = IS = IC \\ I \in (\alpha) \Rightarrow IS = IA \end{cases} \Rightarrow IA = IS = IB = IC$ hay I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.SBC$ và bán kính của mặt cầu này là $R = IS$.

Ta có tứ giác $SNIG$ là hình chữ nhật nên $IG = NS = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}$.

Lại có: $SG = \frac{2}{3}.SM = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

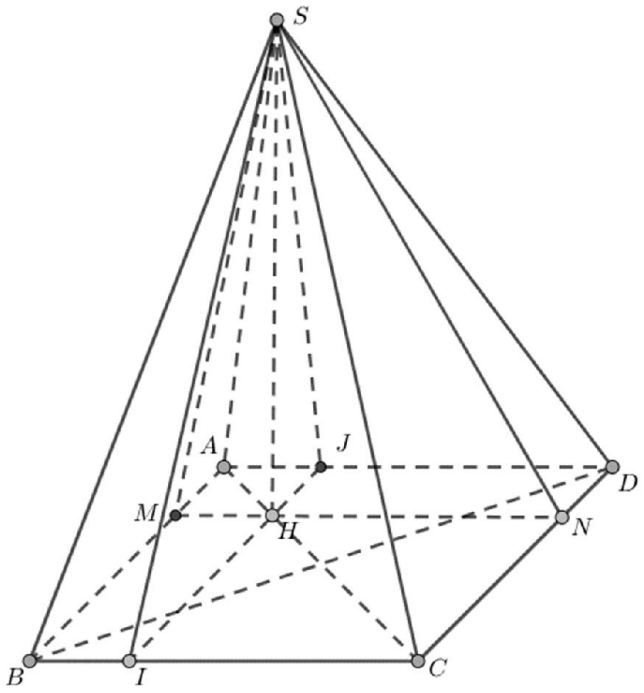
Xét ΔSGI vuông tại G ta có: $R^2 = IS^2 = IG^2 + SG^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{21a^2}{36}$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là: $S_{mc} = 4\pi R^2 = 4\pi.\frac{21a^2}{36} = \frac{7\pi a^2}{3}$.

Câu 4. **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn AC thoả mãn $AC = 4AH$ và $SH = a$. Tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$ (mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt bên của hình chóp)

A. $\frac{4a}{9+\sqrt{13}}$. **B.** $\frac{4a}{5+\sqrt{17}}$. **C.** $\frac{4a}{5+\sqrt{13}}$. **D.** $\frac{4a}{9+\sqrt{17}}$.

Lời giải



Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$ và r là bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Ta có $d\left(I,\left(ABCD\right)\right)=d\left(I,\left(SAD\right)\right)=d\left(I,\left(SAB\right)\right)=d\left(I,\left(SBC\right)\right)=d\left(I,\left(SCD\right)\right)=r$

Mặt khác, ta lại có: $V_{S.ABCD}=V_{I.ABCD}+V_{I.SAD}+V_{I.SAB}+V_{I.SBC}+V_{I.SCD}$ (*)

$V_{S.ABCD}=r.S_{ABCD}+r.S_{\Delta SAD}+r.S_{\Delta SAB}+r.S_{\Delta SBC}+r.S_{\Delta SCD}$ (*)

Suy ra $r=\dfrac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}+S_{\Delta SAD}+S_{\Delta SAB}+S_{\Delta SBC}+S_{\Delta SCD}}$.

Ta tính được thể tích khối tứ diện đều là $V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3}{3}$.

Từ H ta dựng đường thẳng song song với AB cắt BC,AD lần lượt tại I và J

Từ H ta dựng đường thẳng song song với AD cắt AB,CD lần lượt tại M và N.

Ta có $HI=HN=\dfrac{3a}{4}$ và $HM=HJ=\dfrac{a}{4}$

Suy ra $SI=SN=\dfrac{5a}{4}$ và $SM=SI=\dfrac{\sqrt{17}a}{4}$

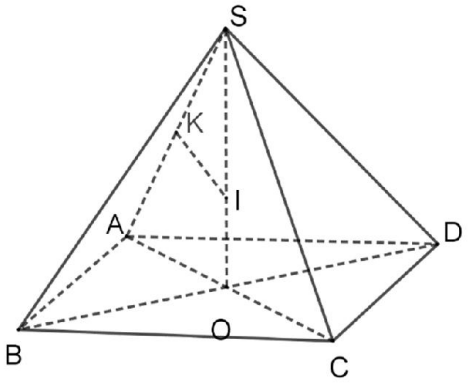
Do đó $S_{\Delta SBC}=S_{\Delta SCD}=\dfrac{5a^2}{8}$ và $S_{\Delta SAD}=S_{\Delta SAB}=\dfrac{\sqrt{17}a^2}{8}$

Do đó, từ (*) ta suy ra: $r=\dfrac{9-\sqrt{17}}{16}a=\dfrac{4a}{9+\sqrt{17}}$.

Câu 5. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=3, AD=4$ và các cạnh bên của hình chóp tạo với mặt đáy một góc $60°$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V=\dfrac{250\sqrt{3}}{3}\pi$. **B.** $V=\dfrac{125\sqrt{3}}{6}\pi$. **C.** $V=\dfrac{50\sqrt{3}}{3}\pi$. **D.** $V=\dfrac{500\sqrt{3}}{27}\pi$.

Lời giải



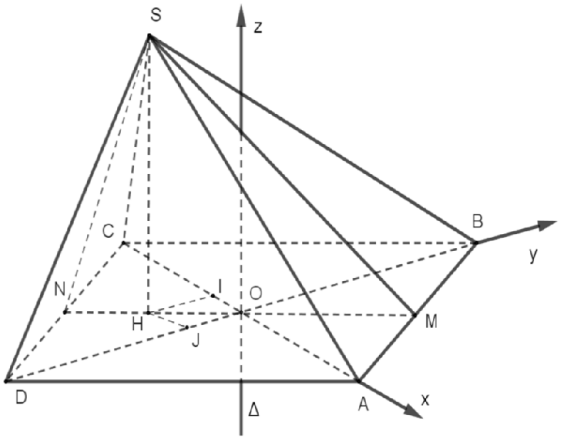
Gọi O là hình chiếu vuông góc của điểm S xuống mặt phẳng đáy. Ta có $\Delta SBO=\Delta SDO$ nên $SD=SB$. Chứng minh tương tự, $SC=SA$, hay O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$. Do tam giác SAC đều nên $SA=SC=AC=\sqrt{AB^2+AD^2}=5$. Trong mặt phẳng (SAC) kẻ đường trung trực của cạnh SA đi qua trung điểm K và cắt SO tại điểm I. Suy ra $R=SI=\dfrac{SA^2}{2.SO}=\dfrac{25}{5\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra, $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)^3=\dfrac{500\sqrt{3}}{27}\pi$.

Câu 6. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và tam giác SCD vuông cân tại S. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

A. $\dfrac{7\pi a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{8\pi a^2}{3}$. **C.** $\dfrac{5\pi a^2}{3}$. **D.** πa^2

Lời giải



+ Gọi M,N lần lượt là trung điểm AB,CD. Kẻ $SH\perp MN$ tại $H\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

$\Rightarrow SM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $SN=\dfrac{a}{2}$; $MN=a\Rightarrow\Delta SMN$ vuông tại $S\Rightarrow SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$, $OH=\dfrac{a}{4}$.

+ Gọi I,J là hình chiếu vuông góc của H lên $OC,OD \Rightarrow OI = OJ = \dfrac{a\sqrt{2}}{8}$.

+ Gọi $O = AC \cap BD$. Qua O dựng đường thẳng $\Delta \perp (ABCD)$.

Cách 1:

+ Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ sao cho: $A\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right) \in Ox$, $B\left(0;\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0\right) \in Oy$ và $\Delta \equiv Oz$.

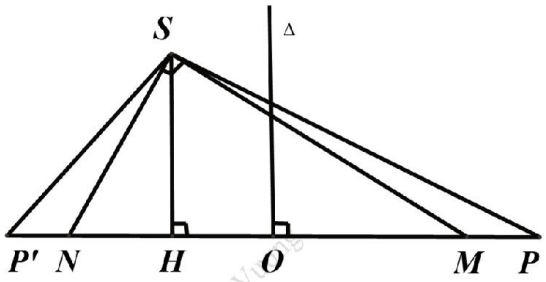
$\Rightarrow C\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $S\left(\dfrac{-a\sqrt{2}}{8};\dfrac{-a\sqrt{2}}{8};\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$

+ Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là mặt cầu đi qua 4 điểm S,A,B,C

Suy ra phương trình mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 + \dfrac{\sqrt{3}a}{3}z - \dfrac{a^2}{2} = 0$.

$\Rightarrow r = \dfrac{a\sqrt{21}}{6} \Rightarrow S = 4\pi r^2 = \dfrac{7\pi a^2}{3}$.

Cách 2:



Trên 2 tia OM,ON lấy hai điểm P,P' sao cho $OP = OP' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow PP' = a\sqrt{2}$.

+ $SP = \sqrt{SH^2 + HP^2} = \dfrac{a\sqrt{3+\sqrt{2}}}{2}$; $SP' = \sqrt{SH^2 + HP'^2} = \dfrac{a\sqrt{3-\sqrt{2}}}{2}$.

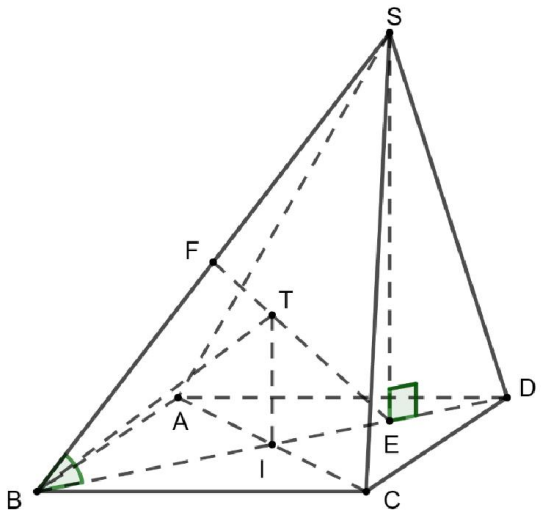
+ Trong tam giác SPP' có: $S_{\Delta SPP'} = \dfrac{1}{2}PP'.SH = \dfrac{SP.SP'.PP'}{4.R} \Rightarrow R = \dfrac{SP.SP'}{2.SH} = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$.

Vậy diện tích mặt cầu là: $S = 4\pi R^2 = \dfrac{7\pi a^2}{3}$

Câu 7. **(Chuyên Hưng Yên 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I cạnh $AB = 3a$, $BC = 4a$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của ID. Biết rằng SB tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc $45°$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{25\pi}{2}a^2$. **B.** $\dfrac{125\pi}{4}a^2$. **C.** $\dfrac{125\pi}{2}a^2$. **D.** $4\pi a^2$.

Lời giải



Gọi E là trung điểm của ID, F là trung điểm của SB. Trong mặt phẳng (SBD), vẽ IT song song với SE và cắt EF tại T.

Ta có $SE \perp (ABCD)$, suy ra $\widehat{SBE} = [SB;(ABCD)] = 45°$. Suy ra $\triangle SBE$ vuông cân tại E. Suy ra EF là trung trực của SB. Suy ra $TS = TB$. (1)

Ta có $IT \parallel SE$, suy ra $IT \perp (ABCD)$. Suy ra IT là trục đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$. Suy ra $TA = TB = TC = TD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra T là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên $BD = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5a$, suy ra $IB = ID = \frac{5}{2}a$.

Do E là trung điểm của ID nên $IE = \frac{1}{2}ID = \frac{5}{4}a$.

$\triangle BEF$ vuông tại F có $\widehat{EBF} = 45°$ nên $\triangle BEF$ vuông cân tại F.

$\triangle EIT$ vuông tại I có $\widehat{IET} = 45°$ nên $\triangle EIT$ vuông cân tại I. Suy ra $IT = IE = \frac{5}{4}a$.

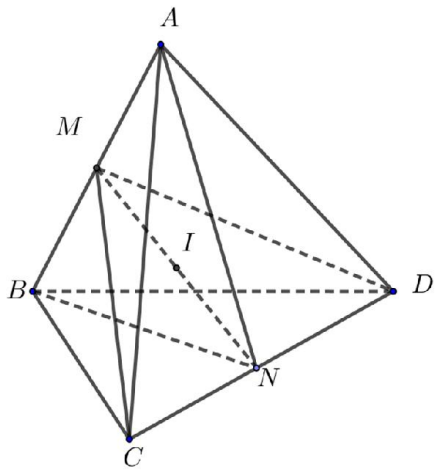
Do $\triangle BIT$ vuông tại I nên $TB = \sqrt{IB^2 + IT^2} = \frac{5\sqrt{5}}{4}a$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $S = 4\pi TB^2 = \frac{125\pi}{4}a^2$.

Câu 8. **(Chuyên Hạ Long -2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 3$, $AD = BC = 5$, $AC = BD = 6$. Tính thê tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. 35π (đvtt). **B.** 35 (đvtt). **C.** $\frac{35\sqrt{35}}{6}\pi$ (đvtt). **D.** $35\sqrt{35}\pi$ (đvtt).

Lời giải



Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của AB, CD và MN.

Ta có $\Delta ACD = \Delta BCD \Rightarrow AN = BN \Rightarrow \Delta ABN$ cân tại N, mà AM là đường trung tuyến

$\Rightarrow$ AM là đường trung trực của $AB \Rightarrow IA = IB = \dfrac{MN}{2}$ (1).

Chứng minh tương tự ta có $\Rightarrow IC = ID = \dfrac{MN}{2}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Áp dụng công thức trung tuyến cho tam giác ACD ta có $AN^2 = \dfrac{36+25}{2} - \dfrac{9}{4} = \dfrac{113}{4}$.

Xét tam giác vuông AMI có: $AI^2 = AM^2 + MI^2$

$= AM^2 + \dfrac{MN^2}{4} = AN^2 - MN^2 + \dfrac{MN^2}{4} = AN^2 - \dfrac{3MN^2}{4} = AN^2 - \dfrac{3}{4}\left(AN^2 - AM^2\right)$

$= \dfrac{1}{4}\left(AN^2 + 3AM^2\right) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{113}{4} + 3.\dfrac{9}{4}\right) = \dfrac{35}{4}$.

Suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $R = AI = \dfrac{\sqrt{35}}{2}$.

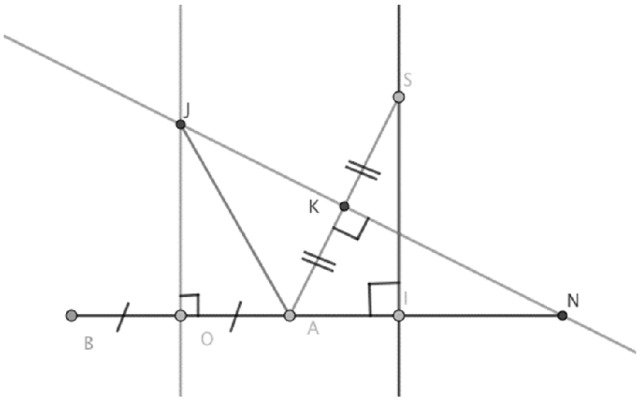
Vậy thê tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{35\sqrt{35}}{6}\pi$.

Câu 9. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Cho đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2a$ nằm trong mặt phẳng (P). Gọi I là điểm đối xứng với O qua A. Lấy điểm S sao cho SI vuông góc với mặt phẳng (P) và $SI = 2a$. Tính bán kính R của mặt cầu qua đường tròn tâm O và điểm S.

A. $R = \dfrac{a\sqrt{65}}{4}$. **B.** $R = \dfrac{a\sqrt{65}}{16}$. **C.** $R = a\sqrt{5}$. **D.** $R = \dfrac{7a}{4}$.

Lời giải

Chọn A



* Gọi J là tâm mặt cầu qua đường tròn tâm O và điểm $S \Rightarrow J$ nằm trên đường trung trực của AB và SA.

* ΔSIA vuông tại $I \Rightarrow \begin{cases} SA = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \\ \sin S = \dfrac{AI}{SA} = \dfrac{1}{\sqrt{5}};\ \tan S = \dfrac{AI}{SI} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

*Ta có: Góc N và S bằng nhau vì cùng phụ với góc $\widehat{SAN}$.

* ΔAKN vuông tại $K \Rightarrow \sin N = \dfrac{AK}{AN} \Leftrightarrow \dfrac{\frac{a\sqrt{5}}{2}}{AN} = \sin S = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow AN = \dfrac{5a}{2} \Rightarrow ON = \dfrac{7a}{2}$.

* ΔOJN vuông tại $O \Rightarrow \dfrac{OJ}{ON} = \tan N = \tan S = \dfrac{1}{2} \Rightarrow OJ = \dfrac{7a}{4}$.

* ΔOAJ vuông tại $O \Rightarrow R = JA = \sqrt{OJ^2 + OA^2} = \dfrac{a\sqrt{65}}{4}$.

Cách 2

Gắn hệ trục toạ độ Ixy sao cho A, B, O thuộc tia Ix, S thuộc tia Iy và giả sử a = 1.

Khi đó: $A(1;0);\ S(0;2);B(3;0)$.

Gọi $(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ là đường tròn tâm J qua 3 điểm A, S, B

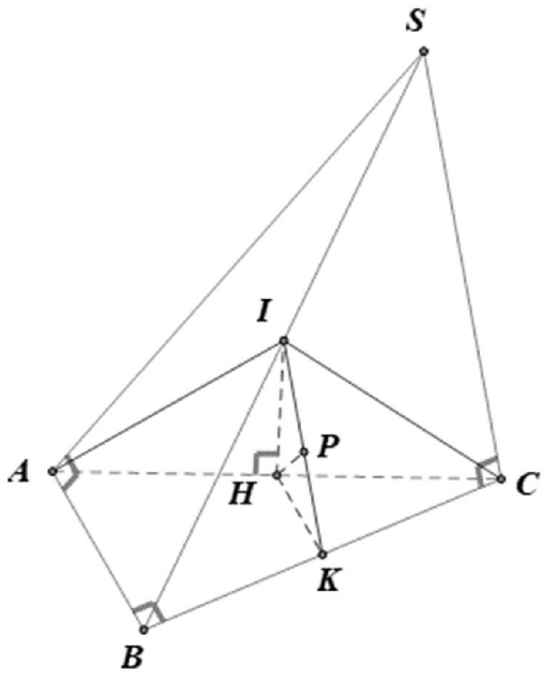
$$\Rightarrow \begin{cases} -2a + c = -1 \\ -6a + c = -9 \\ -4b + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \dfrac{7}{4} \\ c = 3 \end{cases}.$$

Suy ra: $J\left(2;\dfrac{7}{4}\right) \Rightarrow R = JA = \dfrac{\sqrt{65}}{4}$ Vậy $R = \dfrac{a\sqrt{65}}{4}$.

Câu 10. **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = 3a\sqrt{2}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^0$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $2a\sqrt{3}$. Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $72\sqrt{18}\pi a^3$. **B.** $18\sqrt{18}\pi a^3$. **C.** $6\sqrt{18}\pi a^3$. **D.** $24\sqrt{18}\pi a^3$.

Lời giải



Gọi I,H lần lượt là trung điểm của cạnh SB và AC

Mặt khác, theo giả thiết ta có $\Delta SAB,\Delta SCB$ lần lượt là các tam giác vuông tại A và C

$\Rightarrow IA=IB=IC=IS$

$\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

Mặt khác: ΔABC vuông tại B $\Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$\Rightarrow IH\perp(ABC)$

Ta có: $\dfrac{d\left(A;(SBC)\right)}{d\left(H;(SBC)\right)}=\dfrac{AC}{HC}=2\Rightarrow d\left(H;(SBC)\right)=a\sqrt{3}$

Gọi K là trung điểm của cạnh BC $\Rightarrow HK\perp BC\left(HK//AB,AB\perp BC\right)$

Lại có: $BC\perp IH\left(IH\perp(ABC)\right)\Rightarrow BC\perp(IHK)$

Mặt khác: $BC\subset(SBC)\Rightarrow(SBC)\perp(IHK)$ theo giao tuyến IK

Trong (IHK), gọi $HP\perp IK\Rightarrow HP\perp(SBC)$ tại P $\Rightarrow HP=d\left(H;(SBC)\right)=a\sqrt{3}$

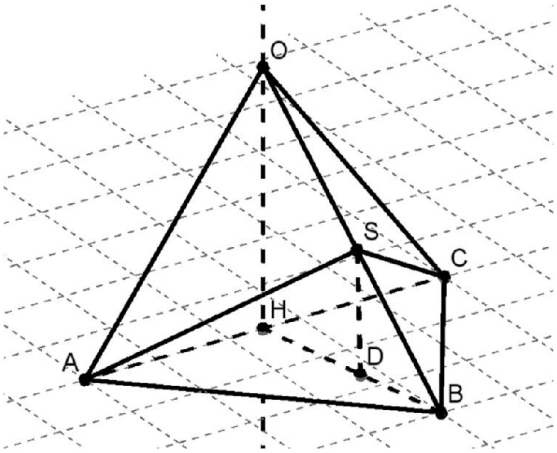
Xét $\Delta IHK:\dfrac{1}{HP^2}=\dfrac{1}{HI^2}+\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{HI^2}+\dfrac{1}{\frac{AB^2}{4}}\Rightarrow HI=3a$

Xét $\Delta IHB:IB=\sqrt{IH^2+HB^2}=3a\sqrt{2}=R$. Vậy $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=24\sqrt{18}\pi a^3$

Câu 11. **(Chuyên ĐHSP Hà Nội 2019)** Cho hình chóp $O.ABC$ có $OA=OB=OC=a$, $\widehat{AOB}=60°$, $\widehat{BOC}=90°$, $\widehat{AOC}=120°$. Gọi S là trung điểm cạnh OB. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $\dfrac{a}{4}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{4}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$ **D.** $\dfrac{a}{2}$

Lời giải



Xét ΔAOB đều nên cạnh $AB = a$.

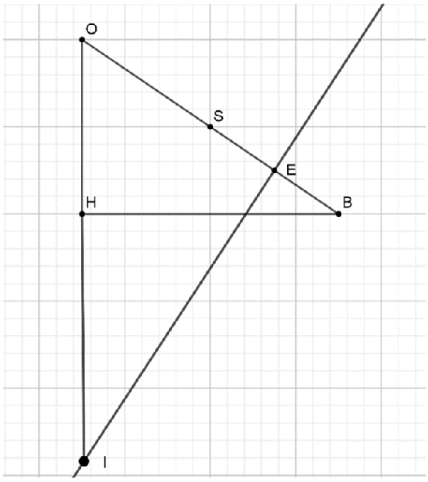
Xét $\triangle BOC$ vuông tại O nên $BC = a\sqrt{2}$.

Xét $\triangle AOC$ có. $AC = \sqrt{AO^2 + CO^2 - 2.AO.CO.\cos 120^0} = a\sqrt{3}$.

Xét $\triangle ABC$ có $AB^2 + BC^2 = AC^2$ nên tam giác ABC vuông tại $B \Rightarrow$ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm H của cạnh AC.

Lại có hình chóp $O.ABC$ có $OA = OB = OC = a$ nên $OH \perp (ABC)$.

Xét hình chóp $S.ABC$ có OH là trục đường tròn ngoại tiếp đáy, trong tam giác OHB kẻ trung trực của cạnh SB cắt OH tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, bán kính $R = IS$.



Xét $\triangle OHB$ có $\widehat{HOB} = 60°$,cạnh $OB = a \Rightarrow OE = \dfrac{3a}{4}$.

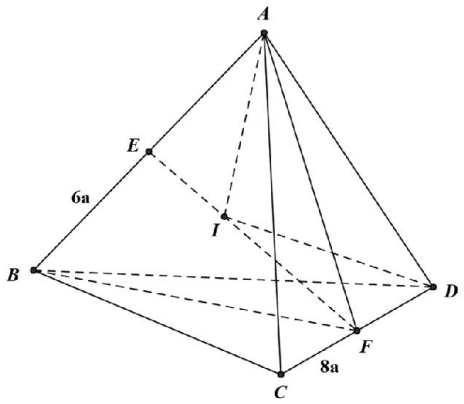
$\Rightarrow IE = OE.\tan 60° = \dfrac{3a\sqrt{3}}{4}$.

Xét $\triangle IES$ vuông tại E: $IS = \sqrt{IE^2 + ES^2} = \sqrt{\left(\dfrac{3a\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{4}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Câu 12. **(Hsg Bắc Ninh 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6a$, $CD = 8a$ và các cạnh còn lại bằng $a\sqrt{74}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $S = 25\pi a^2$. **B.** $S = 100\pi a^2$. **C.** $S = \dfrac{100}{3}\pi a^2$. **D.** $S = 96\pi a^2$.

Lời giải



Gọi E, F thứ tự là trung điểm của AB, CD. Coi $a=1$, từ giả thiết ta có $AC=AD=BC=BD=\sqrt{74}$ nên $AF\perp CD, BF\perp CD\Rightarrow (ABF)\perp CD\Rightarrow EF\perp CD.$ Chứng minh tương tự $EF\perp AB$.

Khi đó EF là đường trung trực của CD và AB. Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ ta có $IA=IB=IC=ID=R$ nên I thuộc đoạn thẳng EF.

$EF=\sqrt{AF^2-AE^2}=\sqrt{AD^2-DF^2-AE^2}=\sqrt{74-16-9}=7.$

Đặt $EI=x\Rightarrow FI=7-x$ (với $0<x<7$).

$$\begin{cases} IA=\sqrt{EA^2+EI^2}=\sqrt{x^2+9} \\ ID=\sqrt{FI^2+FD^2}=\sqrt{16+(7-x)^2}=\sqrt{x^2-14x+65} \end{cases}.$$

Ta có $IA=ID\Leftrightarrow \sqrt{x^2+9}=\sqrt{x^2-14x+65}\Leftrightarrow 9=-14x+65\Leftrightarrow x=4$

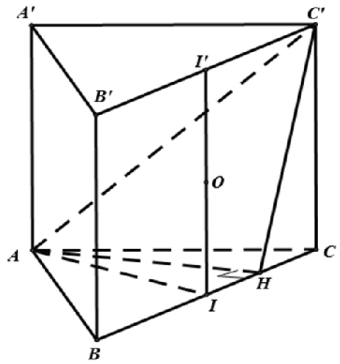
Khi đó $IA=\sqrt{x^2+9}=5$. Do đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là $R=5a$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là $S=4\pi R^2=4\pi.25a^2=100\pi a^2$.

Câu 13. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a\sqrt{3}$, $BC=2a$, đường thẳng AC' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc 30°. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đã cho bằng:

A. $3\pi a^2$. **B.** $6\pi a^2$. **C.** $4\pi a^2$. **D.** $24\pi a^2$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC

$\Rightarrow AH\perp (BCC'B').\Rightarrow \widehat{(AC',(BCC'B'))}=\widehat{HC'A}=30^\circ.$

ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a\sqrt{3}$, $BC=2a$ suy ra $AC=a$.

Ta có: $AH=\dfrac{AB.AC}{BC}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AC'=2AH=a\sqrt{3}\Rightarrow AA'==\sqrt{AC'^2-AC^2}=a\sqrt{2}$.

Gọi I, I' lần lượt là trung điểm BC, $B'C'$. Dễ thấy I, I' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, $\Delta A'B'C'$.

Gọi O là trung điểm của II' suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

Bán kính mặt cầu là : $R = OB = \sqrt{\left(\frac{BC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BB'}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

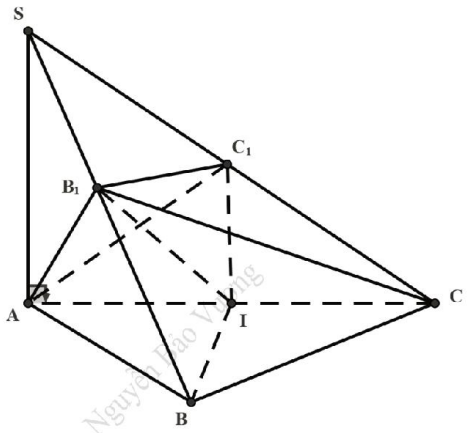
Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đã cho bằng: $S = 4\pi R^2 = 6\pi a^2$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC), $AB = a, AC = a\sqrt{2}, \widehat{BAC} = 45^0$. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC_1B_1$ bằng

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{\pi a^3}{\sqrt{2}}$. **C.** $\pi a^3\sqrt{2}$. **D.** $\frac{4}{3}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của $AC \Rightarrow IA = IC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{BAC} = a^2 \Rightarrow BC^2 + AB^2 = AC^2$.

Suy ra ΔABC vuông tại $B \Rightarrow CB \perp (SAB) \Rightarrow AB_1 \perp (SBC) \Rightarrow AB_1 \perp CB_1$.

Các tam giác ABC, AB_1C, AC_1C là các tam giác vuông có chung cạnh huyền AC.

Do đó I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC_1B_1$ và có bán kính $R = IA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

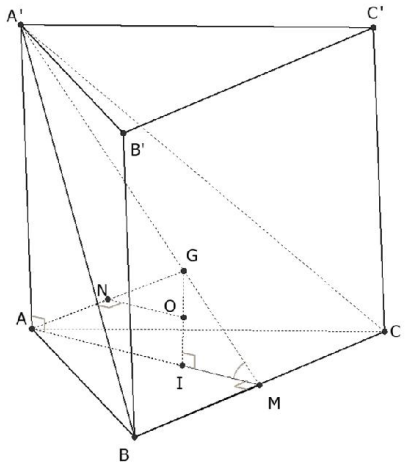
Thể tích khối cầu đó là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 15. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BC$. Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $G.ABC$.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{12}$. **B.** a. **C.** $\frac{7a}{12}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm BC và I là trọng tâm tam giác ABC.

Ta có

$$\begin{cases}(A'BC)\cap(ABC)=BC\\(ABC):AM\perp BC\\(A'BC):A'M\perp BC\end{cases}\Rightarrow((ABC),(A'BC))=\widehat{A'MA}=60^0.$$

Do tam giác ABC đều nên $AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác $A'AM$ vuông tại A: $\tan 60^0=\dfrac{AA'}{AM}\Rightarrow AA'=\dfrac{3a}{2}$.

Vì G là trọng tâm tam giác $A'BC$, I là trọng tâm tam giác ABC và $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên $GI\perp(ABC)$ và $IG=\dfrac{1}{3}\cdot AA'=\dfrac{a}{2}$.

Từ đó suy ra hình chóp $G.ABC$ là hình chóp đều.

Xét tam giác GAI vuông tại I: $AG=\sqrt{AI^2+IG^2}=\dfrac{a\sqrt{21}}{6}$ với $AI=\dfrac{2}{3}\cdot AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $G.ABC$ và N là trung điểm GA.

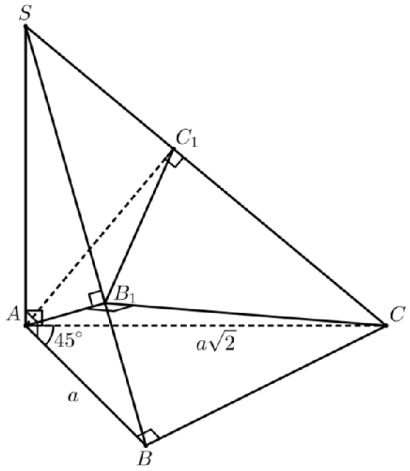
Ta có: O thuộc GI và $\Delta GNO\sim\Delta GIA$ nên $R=GO=\dfrac{GA^2}{2.GI}=\dfrac{\left(\dfrac{a\sqrt{21}}{6}\right)^2}{2\cdot\dfrac{a}{2}}=\dfrac{7a}{12}$.

Câu 16. **(Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, $AB=a$, $AC=a\sqrt{2}$, $\widehat{BAC}=45°$. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC_1B_1$ bằng

A. $\dfrac{\pi a^3}{\sqrt{2}}$. **B.** $\pi a^3\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{4}{3}\pi a^3$. **D.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Trước hết, ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos BAC = a^2$

$\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại B.

Vì $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB_1$.

Vì $\begin{cases} AB_1 \perp BC \\ AB_1 \perp SB \end{cases} \Rightarrow AB_1 \perp (SBC) \Rightarrow AB_1 \perp B_1C \Rightarrow \Delta AB_1C$ vuông tại B_1.

Như vậy, 3 điểm B, B_1, C_1 cùng nhìn cạnh AC dưới một góc vuông nên cùng thuộc mặt cầu đường kính AC hay mặt cầu đường kính AC ngoại tiếp hình chóp $A.BCC_1B_1$.

$\Rightarrow$ Bán kính mặt cầu: $R = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

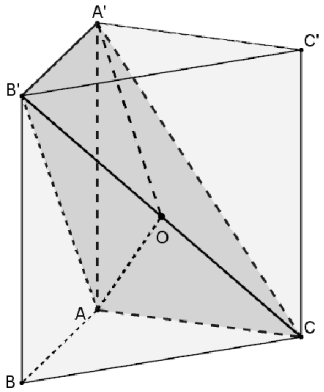
Vậy thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC_1B_1$ bằng $\dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 17. **(Thi thử Lômônôxốp - Hà Nội 2019)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A và $AB = AC = a\sqrt{2}$, $AA' = 2a$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình tứ diện $AA'B'C$ là:

A. $\dfrac{8\pi a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Vì hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A nên trục của 2 đáy trùng nhau và là đường thẳng đi qua trung điểm của BC và $B'C'$. Đồng thời $ABC.A'B'C'$ là hình lăng

trụ đứng nên tứ giác $BCC'B'$ là hình chữ nhật. Do vậy điểm O (trung điểm $B'C$) chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đúng $ABC.A'B'C'$.

Suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện $AA'B'C$.

Vì ΔABC vuông cân tại A nên $BC = AB\sqrt{2} = 2a$.

Vì $BCC'B'$ là hình chữ nhật nên $B'C = \sqrt{BB'^2 + BC^2} = 2a\sqrt{2}$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện $AA'B'C$ là $R = OB' = \frac{1}{2}B'C = a\sqrt{2}$.

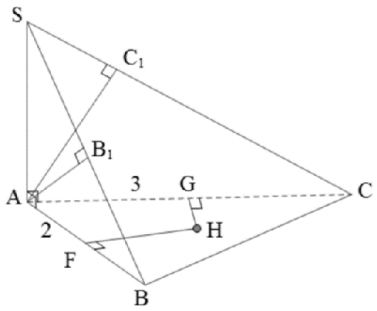
Thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện $AA'B'C$ là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác với $AB = 2\text{cm}, AC = 3\text{cm}$, $\widehat{BAC} = 60^0$, $SA \perp (ABC)$. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC. Tính thể tích khối cầu đi qua năm điểm A, B, C, B_1, C_1.

A. $\frac{28\sqrt{21}\pi}{27}\text{cm}^3$. **B.** $\frac{76\sqrt{57}\pi}{27}\text{cm}^3$. **C.** $\frac{7\sqrt{7}\pi}{6}\text{cm}^3$. **D.** $\frac{27\pi}{6}\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn A



Gọi F, G lần lượt là trung điểm của AB, AC.

$SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$.

Gọi d là trung trực của đoạn $AB \Rightarrow d \perp (SAB)$. Do đó mọi điểm thuộc d thì cách đều các điểm A, B, B_1.

Gọi d' là trung trực của đoạn $AC \Rightarrow d' \perp (SAC)$. Do đó mọi điểm thuộc d' thì cách đều các điểm A, C, C_1.

$H = d \cap d' \Rightarrow H$ là tâm mặt cầu đi qua năm điểm A, B, C, B_1, C_1.

H cũng chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

$$R = \frac{BC}{2\sin\hat{A}} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos\hat{A}}}{2.\sin\hat{A}} = \frac{\sqrt{21}}{3}cm.$$

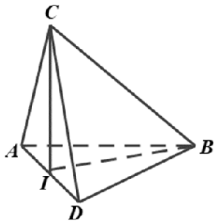
Thể tích khối cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{28\sqrt{21}\pi}{27}cm^3$

Câu 19. **(Trường THPT Thăng Long 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có các mặt ABC và BCD là các tam giác đều cạnh bằng 2, hai mặt phẳng (ABD) và (ACD) vuông góc với nhau. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: ΔABC, ΔBCD đều cạnh bằng 2 (gt) nên $AC = CD = 2 \Rightarrow \Delta ACD$ cân tại C.

Gọi I là trung điểm $AD \Rightarrow CI \perp AD$.

Ta có:

$$\begin{cases} (ACD) \perp (ADB)(gt) \\ (ACD) \cap (ADB) = AD \Rightarrow CI \perp (ABD) \Rightarrow CI \perp IB \ (do\ IB \subset (ABD)) \ (1). \\ IC \perp AD(cmt) \end{cases}$$

Ta có: $\Delta ACD = \Delta ABD(c.c.c) \Rightarrow CI = IB \ (2)$.

Từ (1) và (2) ta có ΔCIB vuông cân tại $I \Rightarrow CB = IB\sqrt{2} \Rightarrow IB = \frac{CB}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = IC$.

ΔDIB vuông tại $I \Rightarrow ID = \sqrt{BD^2 - IB^2} = \sqrt{2} \Rightarrow AD = 2ID = 2\sqrt{2}$.

Xét ΔADB có: $AB = DB = 2; AD = 2\sqrt{2} \Rightarrow \Delta ABD$ vuông tại $B \Rightarrow \widehat{ABD} = 90^0 \Rightarrow \widehat{ACD} = 90^0$

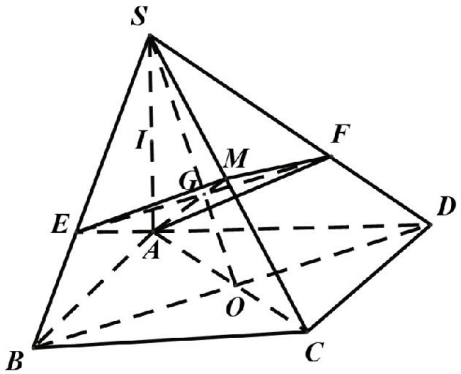
Suy ra mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có đường kính là AD nên bán kính là: $R = ID = \sqrt{2}$.

Câu 20. **(Cụm liên trường Hải Phòng -2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Đường thẳng $SA = a\sqrt{2}$ vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của SC, mặt phẳng (α) đi qua điểm A và M đồng thời song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E, F. Bán kính mặt cầu đi qua năm điểm S, A, E, M, F nhận giá trị nào sau đây?

A. a. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $\{O\}=AC\cap BD$ .Gọi G là trọng tâm tam giác SAC .

Vì (α) chứa A,M nên (α) qua G và song song với BD và $EF//BD$.

Ta có: $SB=SD=a\sqrt{3},AC=a\sqrt{2}\Rightarrow\dfrac{SE}{SB}=\dfrac{SF}{SD}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow\begin{cases}SE=\dfrac{2}{3}SB\\SF=\dfrac{2}{3}SD\end{cases}$.

Ta lại có: $SA^2=SB.SE;SA^2=SD.SF\Rightarrow\begin{cases}AE\perp SB\\AF\perp SD\end{cases}$.

Gọi I là trung điểm cạnh SA .

Ta có: ΔSAC vuông cân tại $A\Rightarrow AM\perp SC\Rightarrow\Delta SAM$ vuông tại $M\Rightarrow IA=IS=IM$

Ta lại có: ΔSAE vuông tại $E\Rightarrow IA=IS=IE$.

ΔSAF vuông tại $F\Rightarrow IA=IS=IF$.

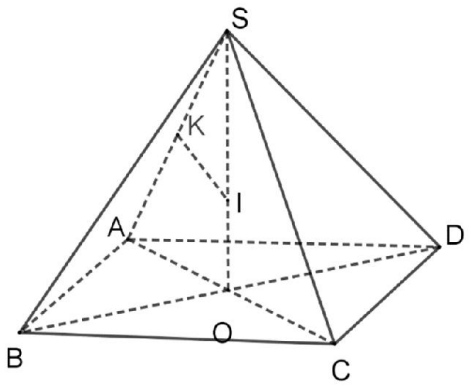
Từ,, $\Rightarrow IA=IS=IM=IE=IE\Rightarrow$ Mặt cầu đi qua năm điểm S,A,E,M,F có tâm là I và bán kính $R=\dfrac{SA}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 21. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=3,AD=4$ và các cạnh bên của hình chóp tạo với mặt đáy một góc $60°$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V=\dfrac{250\sqrt{3}}{3}\pi$. **B.** $V=\dfrac{125\sqrt{3}}{6}\pi$. **C.** $V=\dfrac{50\sqrt{3}}{3}\pi$. **D.** $V=\dfrac{500\sqrt{3}}{27}\pi$.

Lời giải

Chọn D.



Gọi O là hình chiếu vuông góc của điểm S xuống mặt phẳng đáy. Ta có $\Delta SBO=\Delta SDO$ nên $SD=SB$. Chứng minh tương tự, $SC=SA,$ hay O là tâm của hình chữ nhật $ABCD.$ Do tam giác SAC đều nên $SA=SC=AC=\sqrt{AB^2+AD^2}=5.$ Trong mặt phẳng (SAC) kẻ đường trung trực của cạnh SA đi qua trung điểm K và cắt SO tại điểm $I.$ Suy ra $R=SI=\dfrac{SA^2}{2.SO}=\dfrac{25}{5\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}.$

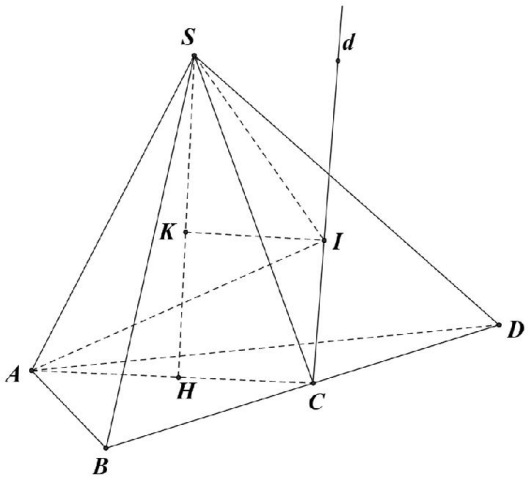
Suy ra, $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)^3=\dfrac{500\sqrt{3}}{27}\pi.$

Câu 22. **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 1. Mặt bên (SAC) là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SA = SC = \frac{3}{2}$. Gọi D là điểm đối xứng với B qua C. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABD$.

A. $\frac{\sqrt{34}}{8}$. **B.** $\frac{3\sqrt{34}}{4}$. **C.** $\frac{3\sqrt{34}}{16}$. **D.** $\frac{3\sqrt{34}}{8}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm của AC, do SAC là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên $SH \perp AC \Rightarrow SH \perp (ABC)$ và $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{1}{4}} = \sqrt{2}$.

Tam giác ABD có AC là đường trung tuyến và $AC = \frac{1}{2}BD$ nên ABD là tam giác vuông tại A, suy ra C là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AB**D.**

Dựng trục (d) của đường tròn ngoại tiếp tam giác AB**D.** Gọi I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABD \Rightarrow I \in d$ và $IA = \text{IS} = ID = IB = R$.

Kẻ $IK \perp SH \Rightarrow IK = CH = \frac{1}{2}$

Giả sử $HK = x \Rightarrow SK = \sqrt{2} - x \Rightarrow \text{IS} = \sqrt{SK^2 + HC^2} = \sqrt{(\sqrt{2} - x)^2 + \frac{1}{4}} = R$

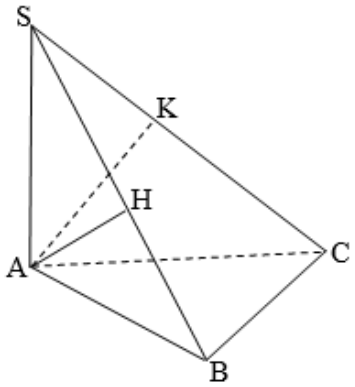
Mặt khác: $R = IA = \sqrt{AC^2 + IC^2} = \sqrt{1 + x^2}$.

Ta có phương trình: $\sqrt{(\sqrt{2} - x)^2 + \frac{1}{4}} = \sqrt{1 + x^2} \Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{2}}{16}$

Suy ra: $R = \frac{3\sqrt{2}}{16} + 1$ $R = \sqrt{x^2 + 1} = \frac{3\sqrt{34}}{16}$.

Vậy phương án C đúng.

Câu 23. **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, đáy là tam giác đều, $SA = a\sqrt{3}$ và góc giữa đường thẳng SB và đáy bằng 60^0. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC. Tính bán kính mặt cầu đi qua các điểm A, B, H, K.

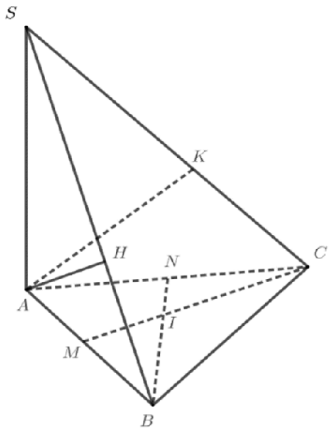


A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a}{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:



Góc giữa đường thẳng SB và đáy bằng $60^0 \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^0 \Rightarrow AB = \frac{SA}{\tan 60^0} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = a$.

Gọi BN, CM lần lượt là hai đường cao của tam giác ABC và I là trọng tâm của ΔABC.

Do tam giác ABC đều nên M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC.

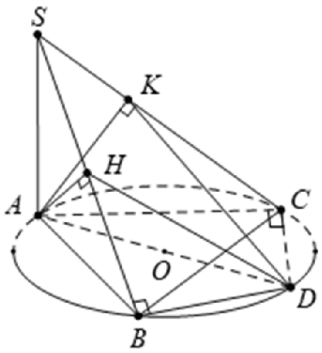
Tam giác ABH vuông tại H nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH,

mặt khác $\left.\begin{matrix} CM \perp AB \\ CM \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow CM \perp (SAB)$, ta suy ra CM là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH. Hoàn toàn tương tự ta có BN là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACK. Từ đó suy ra $IA = IB = IH = IC = IK$ hay I là tâm mặt cầu đi qua các điểm A, B, H, K bán kính mặt cầu là

$R = IA = \frac{2}{3}.\frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{AB\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $R=\dfrac{AB\sqrt{3}}{3}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Cách 2:



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và D là điểm đối xứng của A qua điểm O.

Ta có $BD\perp AB$ và $BD\perp SA\Rightarrow BD\perp(SAB)\Rightarrow BD\perp AH$.

Từ giả thuyết $\Rightarrow AH\perp SB$

$\Rightarrow AH\perp(SBD)\Rightarrow AH\perp HD$.

Tương tự $AK\perp KD$.

Do các điểm B,H,K nhìn AD dưới một góc vuông nên B,H,K nằm trên mặt cầu đường kính AD.

$\left(\widehat{SB;(ABC)}\right)=\widehat{SBA}=60^0$

$\tan\widehat{SBA}=\dfrac{SA}{AB}\Rightarrow AB=\dfrac{SA}{\tan 60^0}=a$. Tam giác ABC đều cạnh a ta có $AO=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

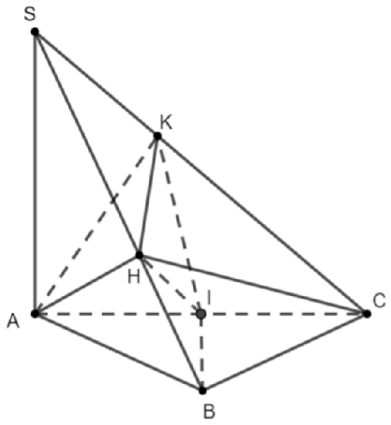
Vậy mặt cầu qua A,B,H,K có bán kính $R=\dfrac{AD}{2}=AO=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 24. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $BC=a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC). Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC. Thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.HKCB$ bằng

A. $\sqrt{2}\pi a^3$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3}{6}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của AC. Do tam giác ABC vuông cân tại B nên $IA = IB = IC = \frac{1}{2}AC$.

Do $AK \perp SC$ nên ΔAKC vuông tại K, khi đó $IA = IK = IC = \frac{1}{2}AC$.

Ta có $BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$, mà $AH \perp SB$ nên $AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow AH \perp HC$ hay ΔAHC vuông tại $H \Rightarrow IH = IA = IC = \frac{1}{2}AC$.

Như vậy $IA = IB = IC = IH = IK = \frac{1}{2}AC$ hay mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.HKCB$ có tâm I là trung điểm AC, bán kính $R = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}.BC\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

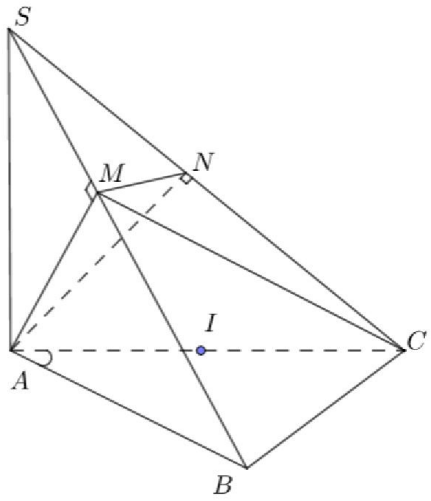
Vậy thể tích khối cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Câu 25. **(Sở Ninh Bình 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB = \sqrt{3}$, $AC = 2$ và $\widehat{BAC} = 30°$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC. Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$ là

A. $R = 2$. **B.** $R = \sqrt{13}$. **C.** $R = 1$. **D.** $R = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C



Xét tam giác ABC có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos B = 3 + 2^2 - 2.\sqrt{3}.2\cos 30° = 1$.

Suy ra: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4$ hay tam giác ABC vuông tại B.

Gọi I là trung điểm AC suy ra $IA = IC = IB$. (1)

Tương tự tam giác ANC vuông tại N ta được $IA = IC = IN$. (2)

Xét BC và (SAB) có

$$\left.\begin{array}{l} BC \perp AB\ (cmt) \\ BC \perp SA\ (gt) \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \text{ mà } AM \subset (SAB) \Rightarrow AM \perp BC.$$

Ta được

$$\left.\begin{array}{l} AM \perp BC \\ AM \perp SB(gt) \end{array}\right\} \Rightarrow AM \perp (SBC) \text{ mà } MC \subset (SBC) \Rightarrow AM \perp MC.$$

Suy ta tam giác AMC vuông tại M ta được $IA = IB = IM$. (3)

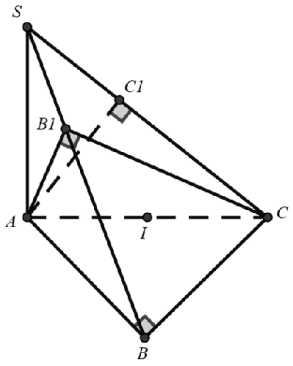
Từ (1), (2) và (3) suy ta I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$ có bán kính $R = AI = \dfrac{AB}{2} = 1$.

Câu 26. **(Kim Thành - Hải Dương - 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $AB = a, AC = a\sqrt{2}, \widehat{BAC} = 45°$. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $ABCC_1B_1$ bằng

A. $\dfrac{\pi a^3}{\sqrt{2}}$. **B.** $\pi a^3\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{4}{3}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn C



Xét tam giác ABC có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos\widehat{BAC} = a^2 + 2a^2 - 2a.a\sqrt{2}.\dfrac{1}{\sqrt{2}} = a^2$

$\Rightarrow BC = a$

Tam giác ABC có $BA = BC = a, \widehat{BAC} = 45°$ là tam giác vuông cân tại B

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB_1$

Khi đó $\begin{cases} AB_1 \perp SB \\ AB_1 \perp BC \end{cases} \Rightarrow AB_1 \perp (SBC) \Rightarrow AB_1 \perp CB_1 \Rightarrow \Delta AB_1C$ vuông tại B_1

Gọi I là trung điểm của AC

Vì tam giác ABC vuông tại B nên $IA = IB = IC$

Vì tam giác AB_1C vuông tại B_1 nên $IA = IC = IB_1$

Vì tam giác ACC_1 vuông tại C_1 nên $IA = IC = IC_1$

Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $ABCC_1B_1$ với bán kính $R = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

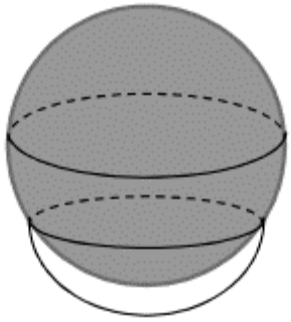
Thể tích khối cầu đó là: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^2 = \dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$

Nguyễn Bảo Vương

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

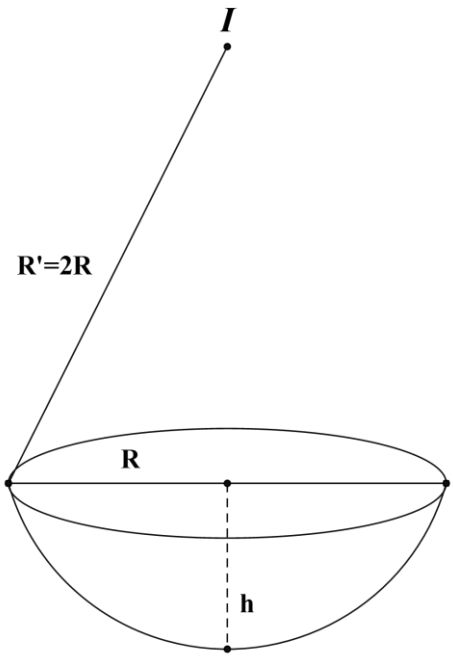
MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TẾ - CỰC TRỊ LIÊN QUAN ĐẾN MẶT CẦU – KHỐI CẦU

Câu 1. Cho một bán cầu đựng đầy nước với bán kính $R=2$. Người ta bỏ vào đó một quả cầu có bán kính bằng $2R$. Tính lượng nước còn lại trong bán cầu ban đầu.



A. $V=\left(24\sqrt{3}-\dfrac{112}{3}\right)\pi$. **B.** $V=\dfrac{16\pi}{3}$. **C.** $V=\dfrac{8}{3}\pi$. **D.** $V=\left(24\sqrt{3}-40\right)\pi$.

Lời giải



Khi đặt khối cầu có bán kính $R'=2R$ vào khối cầu có bán kính R ta được phần chung của hai khối cầu. phần chung đó gọi là chỏm cầu. Gọi h là chiều cao chỏm cầu. Thể tích khối chỏm cầu là $V_c=\pi h^2\left(R'-\dfrac{h}{3}\right)$.

với $h=R'-\sqrt{R'^2-R^2}=4-\sqrt{4^2-2^2}=4-2\sqrt{3}$.

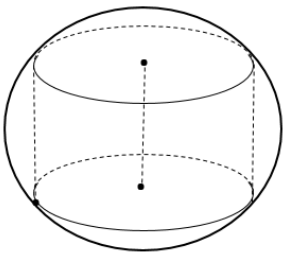
$\Rightarrow V_c=\pi\left(4-2\sqrt{3}\right)^2\left(4-\dfrac{4-2\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{2\pi}{3}\left(64-36\sqrt{3}\right)$.

Thể tích một nửa khối cầu $V=\dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{16\pi}{3}$.

Thể tích khối nước còn lại trong nửa khối cầu:

$V_n = V - V_c = \frac{16\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\left(64 - 36\sqrt{3}\right) = \left(24\sqrt{3} - \frac{112}{3}\right)\pi$.

Câu 2. Cho khối cầu (S) tâm I, bán kính R không đổi. Một khối trụ thay đổi có chiều cao h và bán kính đáy r nội tiếp khối cầu. Tính chiều cao h theo R sao cho thể tích khối trụ lớn nhất.



A. $h = \frac{R\sqrt{2}}{2}$. **B.** $h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$. **C.** $h = R\sqrt{2}$. **D.** $h = \frac{R\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $r = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}$.

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h$, $0 < h < 2R$

$V'_{(h)} = \pi\left(R^2 - \frac{3h^2}{4}\right)$; $V'_{(h)} = 0 \Leftrightarrow h = \pm\frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Bảng biến thiên

h	0		$\frac{2R\sqrt{3}}{3}$		$2R$
$V'_{(h)}$		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$		$\searrow$	

Vậy thể tích khối trụ lớn nhất khi $h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Câu 3. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Một cơ sở sản suất đồ gia dụng được đặt hàng làm các chiếc hộp kín hình trụ bằng nhôm để đựng rượu có thể tích là $V = 28\pi a^3$ $(a > 0)$. Để tiết kiệm sản suất và mang lại lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sẽ sản suất những chiếc hộp hình trụ có bán kính là R sao cho diện tích nhôm cần dùng là ít nhất. Tìm R

A. $R = a\sqrt[3]{7}$ **B.** $R = 2a\sqrt[3]{7}$ **C.** $R = 2a\sqrt[3]{14}$ **D.** $R = a\sqrt[3]{14}$

Lời giải

Diện tích nhôm cần dùng để sản suất là diện tích toàn phần S

Ta có $l = h$; mà $V = 28\pi a^3 \Leftrightarrow \pi R^2 h = 28\pi a^3 \Leftrightarrow h = \frac{28a^3}{R^2}$

$S = 2\pi Rl + 2\pi R^2 = 2\pi \dfrac{28a^3}{R} + 2\pi R^2$ với $R > 0$

$S' = 2\pi\left(-\dfrac{28a^3}{R^2} + 2R\right) = 0 \Leftrightarrow R = a\sqrt[3]{14}$

Bảng biến thiên

R	0		$a\sqrt[3]{14}$		$+\infty$
S'		$-$	0	$+$	
S		↘	$S_{\min}$	↗	

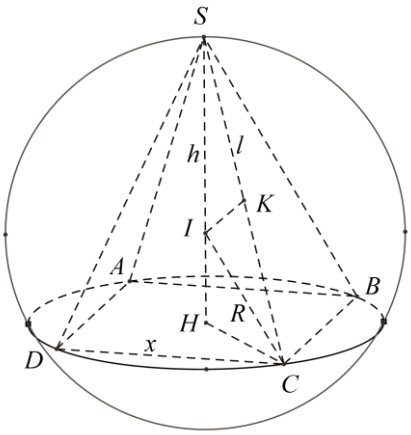
Vậy $S_{\min} \Leftrightarrow R = a\sqrt[3]{14}$

Câu 4. **(Mã 104 2017)** Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9, tính thể tích V của khối chóp có thể tích lớn nhất.

A. $V = 576\sqrt{2}$ **B.** $V = 144\sqrt{6}$ **C.** $V = 144$ **D.** $V = 576$

Lời giải

Chọn D



Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ nội tiếp mặt cầu có tâm I và bán kính $R = 9$.

Gọi $H = AC \cap BD$, K là trung điểm SC.

Đặt $AB = x; SH = h$, $(x, h > 0)$.

Ta có $HC = \dfrac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow l = SC = \sqrt{h^2 + \dfrac{x^2}{2}}$.

Do $\Delta SHI \backsim \Delta SHC \Rightarrow \dfrac{SK}{SH} = \dfrac{SI}{SC} \Rightarrow l^2 = 2h.R \Rightarrow x^2 = 36h - 2h^2$.

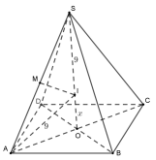
Diện tích đáy của hình chóp $S_{ABCD} = x^2$ nên $V = \dfrac{1}{3}h.x^2 = \dfrac{1}{3}h\left(36h - 2h^2\right)$.

Ta có $\dfrac{1}{3}h.\left(36h - 2h^2\right) = \dfrac{1}{3}.h.h\left(36 - 2h\right) \le \dfrac{1}{3}.\left(\dfrac{h + h + 36 - 2h}{3}\right)^3 = 576 \Rightarrow V \le 576$, dấu bằng xảy ra khi $h = h = 36 - 2h \Leftrightarrow h = 12, x = 12$. Vậy $V_{max} = 576$.

Câu 5. **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9, khối chóp có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu ?

A. $576\sqrt{2}$. **B.** 144. **C.** 576. **D.** $144\sqrt{6}$.

Lời giải



Giả sử khối chóp $S.ABCD$ là khối chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ thì $SO\perp(ABCD)$. M là trung điểm của SA, kẻ MI vuông góc với SA và cắt SO tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$, bán kính của mặt cầu là $IA=IS=9$.

Đặt $IO=x$, $0\le x\le 9$, do ΔIAO vuông tại O nên $AO=\sqrt{AI^2-IO^2}=\sqrt{81-x^2}$, suy ra $AC=2\sqrt{81-x^2}$.

Do tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $AB=\dfrac{AC}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.\sqrt{81-x^2}$, suy ra

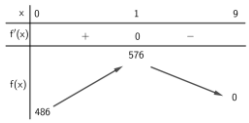
$S_{\square ABCD}=AB^2=2\left(81-x^2\right)$.

Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{\square ABCD}.SO=\dfrac{2}{3}\left(81-x^2\right).(9+x)=\dfrac{2}{3}\left(-x^3-9x^2+81x+729\right)$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{2}{3}\left(-x^3-9x^2+81x+729\right)$ với $x\in[0;9]$.

$f'(x)=2\left(-x^2-6x+27\right)$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-9(l)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên :



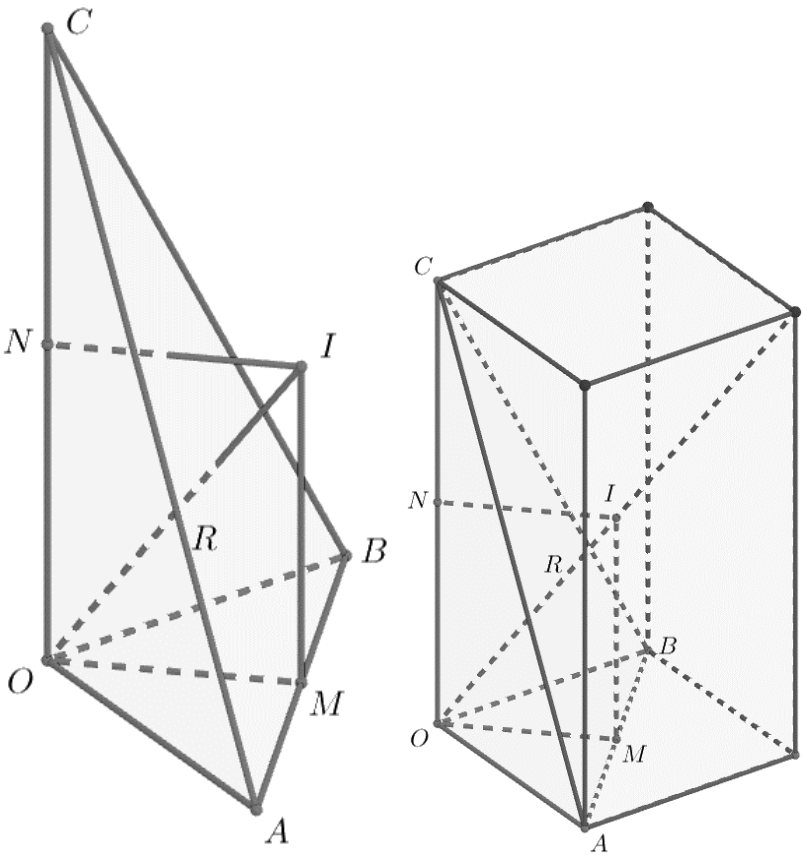
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy : $\max\limits_{x\in[0;9]}f(x)=f(3)=576$.

Vậy khối chóp có thể tích lớn nhất bằng 576.

Câu 6. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Trong không gian $Oxyz$, lấy điểm C trên tia Oz sao cho $OC=1$. Trên hai tia Ox,Oy lần lượt lấy hai điểm A,B thay đổi sao cho $OA+OB=OC$. Tìm giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$?

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ **B.** $\sqrt{6}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Lời giải.



Bốn điểm O, A, B, C tạo thành 1 tam diện vuông.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$ là $R = \dfrac{\sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2}}{2}$.

Đặt $OA = a; OB = b, a, b > 0$. Ta có $a + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - a$.

Vậy $R = \dfrac{\sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 + 1^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{a^2 + (1-a)^2 + 1^2}}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{2\left(\left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}\right)}}{2} \geq \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

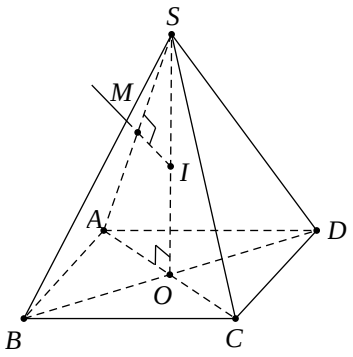
Vậy $R_{\min} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$, tại $a = b = \dfrac{1}{2}$..

Câu 7. **(KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, các cạnh bên của hình chóp bằng $\sqrt{6}\ cm$, $AB = 4\ cm$. Khi thể tích khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất, tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp $S.ABCD$.

A. $12\pi\ cm^2$. **B.** $4\pi\ cm^2$. **C.** $9\pi\ cm^2$. **D.** $36\pi\ cm^2$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có ΔSAC cân tại S nên $SO \perp AC$ và ΔSBD cân tại S nên $SO \perp BD$.

Khi đó $SO \perp (ABCD)$.

Ta có: $\Delta SAO = \Delta SBO = \Delta SCO = \Delta SDO \Rightarrow OA = OB = OC = OD$

Vậy hình bình hành $ABCD$ là hình chữ nhật.

Đặt $BC = x \Rightarrow AC = \sqrt{4^2 + x^2} \Rightarrow AO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{16 + x^2}}{2}$.

Xét ΔSAO vuông tại O, ta có: $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{6 - \dfrac{16 + x^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{8 - x^2}}{2}$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SO.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{8 - x^2}}{2}.4x = \dfrac{2}{3}.\sqrt{8 - x^2}.x$

Áp dụng bất đẳng thức : $ab \le \dfrac{a^2 + b^2}{2}$ ta có: $V = \dfrac{2}{3}.\sqrt{8 - x^2}.x \le \dfrac{2}{3}.\dfrac{8 - x^2 + x^2}{2} = \dfrac{8}{3}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{8 - x^2} = x \Leftrightarrow x = 2$. Do đó: $BC = 2, SO = 1$.

Gọi M là trung điểm của SA, trong (SAO) kẻ đường trung trực của SA cắt SO tại I.

Khi đó mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ có tâm I và bán kính $R = IS$.

Vì $\Delta SMI \backsim \Delta SOA (g.g)$ nên $\dfrac{SI}{SA} = \dfrac{SM}{SO} \Rightarrow SI = \dfrac{SA^2}{2.SO} = \dfrac{6}{2.1} = 3 \Rightarrow R = 3 (cm)$.

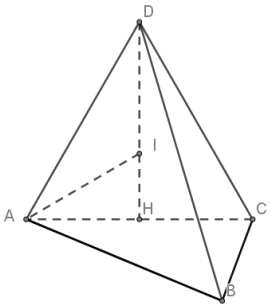
Diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ là: $4\pi R^2 = 4\pi.3^2 = 36\pi (cm^2)$.

Câu 8. Cho mặt cầu (S) có bán kính $R = 5$. Khối tứ diện $ABCD$ có tất cả các đỉnh thay đổi và cùng thuộc mặt cầu (S) sao cho tam giác ABC vuông cân tại B và $DA = DB = DC$. Biết thể tích lớn nhất của khối tứ diện $ABCD$ là $\dfrac{a}{b}$ (a, b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản), tính $a + b$.

A. $a + b = 1173$. **B.** $a + b = 4081$. **C.** $a + b = 128$. **D.** $a + b = 5035$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của AC, Vì tam giác ABC vuông cân tại B và $DA=DB=DC$ nên $DH\perp(ABC)$ và tâm I của mặt cầu (S) thuộc tia DH. Đặt $DH=x$ và $AH=a$ $(0<a\le 5, 0<x<10)$.

Có $ID=IA=5$ và $IH=|x-5|$.

Xét tam giác vuông AIH có $a^2=AH^2=AI^2-IH^2=25-(x-5)^2=10x-x^2$.

Diện tích tam giác ABC là: $S=\frac{1}{2}AC.BH=a^2=10x-x^2$.

Thể tích khối chóp $ABCD$ là: $V=\frac{1}{3}S_{ABC}.DH=\frac{1}{3}(10x-x^2)x$.

Xét $f(x)=\frac{1}{3}(10x-x^2)x=\frac{1}{3}(10x^2-x^3)$ với $0<x<10$.

Lập bảng biến thiên cho hàm số $f(x)$ ta được giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên nửa khoảng $(0;10)$ ta có kết quả là $\frac{4000}{81}$ tại $x=\frac{20}{3}$.

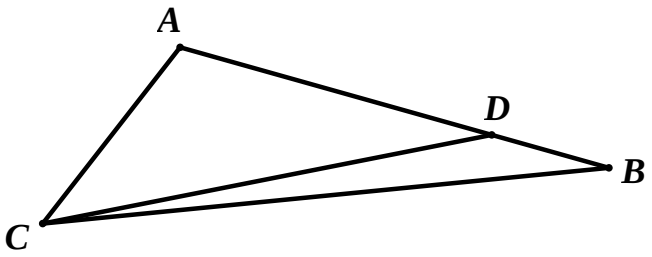
Vậy $a=4000, b=81$ nên $a+b=4081$.

Câu 9. Trong không gian cho tam giác ABC có $AB=2R, AC=R, CAB=120^0$. Gọi M là điểm thay đổi thuộc mặt cầu tâm B, bán kính R. Giá trị nhỏ nhất của $MA+2MC$ là

A. $4R$. **B.** $6R$. **C.** $R\sqrt{19}$. **D.** $2R\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $MA^2=\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}\right)^2=\left(\overrightarrow{MB}^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}^2\right)=\left(\frac{BA}{MB}\overrightarrow{MB}+\frac{MB}{BA}\overrightarrow{BA}\right)^2=\left(2\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right)^2$.

$\Rightarrow MA^2=\left|2\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right|^2\Rightarrow MA=2\left|\overrightarrow{MB}+\frac{\overrightarrow{BA}}{4}\right|$.

Gọi D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BD}=\frac{\overrightarrow{BA}}{4}$, khi đó $MA=2\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}\right|=2\left|\overrightarrow{MD}\right|=2MD$.

Do đó $MA+2MC=2\left(MC+MD\right)\ge 2CD$.

Lại có $CD^2=AC^2+AD^2-2AC.AD\cos 120°=\frac{19}{4}R^2\Rightarrow CD=R\frac{\sqrt{19}}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi M là giao điểm của đoạn CD với mặt cầu tâm B bán kính R.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA+2MC$ là $R\sqrt{19}$.

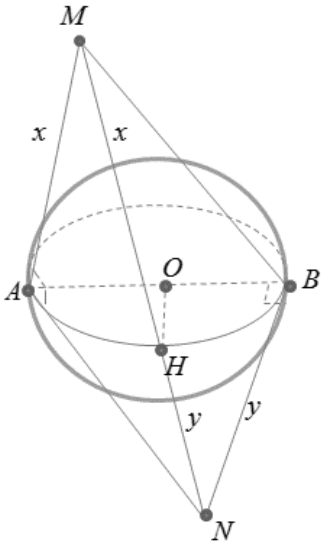
Câu 10. Cho mặt cầu (S) có bán kính bằng $3(m)$, đường kính AB. Qua A và B dựng các tia At_1, Bt_2 tiếp xúc với mặt cầu và vuông góc với nhau. M và N là hai điểm lần lượt di chuyển trên

At_1, Bt_2 sao cho MN cũng tiếp xúc với (S). Biết rằng khối tứ diện $ABMN$ có thể tích $V\left(m^3\right)$ không đổi. V thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(17;21)$. **B.** $(15;17)$. **C.** $(25;28)$. **D.** $(23;25)$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử MN tiếp xúc (S) tại H.

Đặt $MA = MH = x$, $NB = NH = y$. Khi đó $V = \frac{1}{6}.x.2R.y = \frac{1}{3}Rxy$.

Ta có tam giác AMN vuông tại A (Vì $MA \perp AB, MA \perp BN$).

$\Rightarrow AN^2 = (x+y)^2 - x^2$.

Lại có tam giác ABN vuông tại B $\Rightarrow AN^2 = 4R^2 + y^2$.

Suy ra $(x+y)^2 - x^2 = 4R^2 + y^2 \Leftrightarrow xy = 2R^2$.

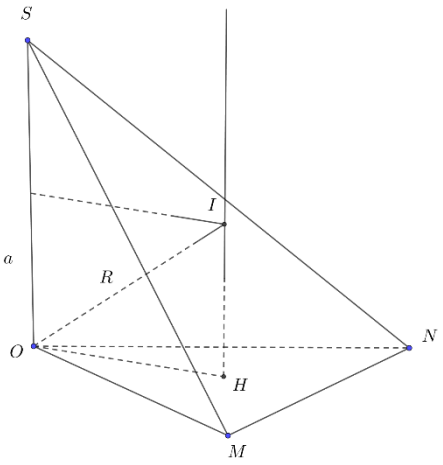
Vậy $V = \frac{1}{3}.R.2R^2 = \frac{2R^3}{3} = 18 \in (17;21)$.

Câu 11. Trên mặt phẳng (P) cho góc $xOy = 60°$. Đoạn $SO = a$ và vuông góc với mặt phẳng (α). Các điểm $M;N$ chuyển động trên Ox, Oy sao cho ta luôn có: $OM + ON = a$. Tính diện tích của mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất ngoại tiếp tứ diện $SOMN$.

A. $\frac{4\pi a^2}{3}$. **B.** $\frac{\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{8\pi a^2}{3}$. **D.** $\frac{16\pi a^2}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H , I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN và tâm bán mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SOMN \Rightarrow R^2 = OH^2 + IH^2 = \frac{a^2}{4} + OH^2$.

Áp dụng định lý hàm số sin trong tam giác OMN ta có $\frac{MN}{\sin 60°} = 2OH \Leftrightarrow OH = \frac{MN}{\sqrt{3}}$.

Áp dụng định lý hàm số cosin trong tam giác OMN ta có

$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2.OM.ON\cos MON$

$= OM^2 + ON^2 - OM.ON = (OM + ON)^2 - 3OM.ON \geq a^2 - 3\frac{(OM+ON)^2}{4} = \frac{a^2}{4}$

$\Rightarrow MN^2 \geq \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow 3OH^2 \geq \frac{a^2}{4} \Rightarrow R^2 = \frac{a^2}{4} + OH^2 \geq \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3.4} = \frac{a^2}{3}$

Bán kính nhỏ nhất của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SOMN$ bằng $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

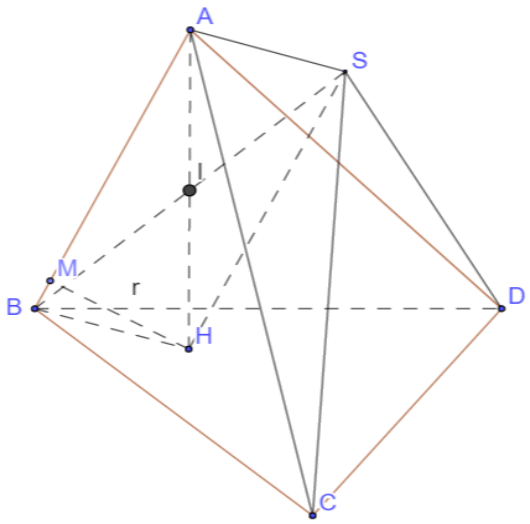
Tính diện tích của mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất ngoại tiếp tứ diện $SOMN$ là $4\pi R^2 = \frac{4\pi a^2}{3}$

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$ có hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD) là H nằm trong tam giác BCD. Biết rằng H cũng là tâm của một mặt cầu bán kính $\sqrt{3}$ và tiếp xúc các cạnh AB, AC, AD. Dựng hình bình hành $AHBS$. Tính giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCD$

A. 3. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M,N,P lần lượt là hình chếu của H lên AB,AC,AD ta có

$HM=HN=HP=\sqrt{3}\Rightarrow AM=AN=AP\Rightarrow AH\perp(MNP)\Rightarrow(MNP)\square(BCD)\Rightarrow AB=AC=AD$

(AH là trục đường tròn ΔMNP)

Vậy A thuộc trục đường tròn ngoại tiếp Δ BCD

AH là trục đường tròn ngoại tiếp Δ BCD .

Gọi $I=AH\bigcap BS\Rightarrow IB=IC=ID=IS$. Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp S.BCD

$$IH=x\Rightarrow\frac{1}{HM^2}=\frac{1}{HB^2}+\frac{1}{HA^2}\Rightarrow HB^2=\frac{12x^2}{4x^2-3}$$

$$\Delta HBI\perp tai\,H:BI^2=HB^2+HI^2=\frac{4x^4+9x^2}{4x^2-3}$$

$$t=x^2\Rightarrow f(t)=\frac{4t^2+9t}{4t-3}(t>\frac{3}{4})\Rightarrow f'(t)=\frac{16t^2-24t-27}{(4t-3)^2}$$

$$f'(t)=0\Rightarrow t=\frac{9}{4}(n)\vee t=-\frac{3}{4}(l)$$

x	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{4}$	$+\infty$
f'(x)	|	0	
f(x)	|	$\frac{27}{4}$	

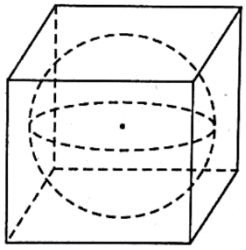
Vẽ bảng biến thiên $R_{\min}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Câu 13. **(SGD Điện Biên - 2019)** Một vật thể đựng đầy nước hình lập phương không có nắp. Khi thả một khối cầu kim loại đặc vào trong hình lập phương thì thấy khối cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình lập phương đó. Tính bán kính của khối cầu, biết thể tích nước còn lại trong hình lập phương là 10. Giả sử các mặt của hình lập phương có độ dày không đáng kể

A. $\sqrt[3]{\frac{15}{12-2\pi}}$. **B.** $\sqrt[3]{\frac{9}{24-4\pi}}$. **C.** $\sqrt[3]{\frac{15}{24-4\pi}}$. **D.** $\sqrt[3]{\frac{9}{12-2\pi}}$.

Lời giải

Chọn A



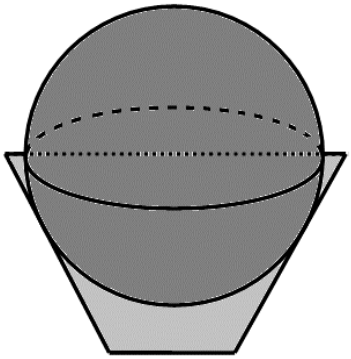
Giả sử hình lập phương có cạnh x. Khi đó thể tích khối lập phương là x^3.

Bán kính khối cầu tiếp xúc với các mặt của khối lập phương là $\frac{x}{2}$. Do đó thể tích khối cầu tiếp xúc với các mặt của hình lập phương là $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^3=\frac{\pi x^3}{6}$.

Theo đề ra ta có $x^3-\frac{\pi x^3}{6}=10\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{60}{6-\pi}}$.

Do đó bán kính của khối cầu là $R=\frac{x}{2}=\sqrt[3]{\frac{15}{12-2\pi}}$

Câu 14. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Một cái thùng đựng đầy nước được tạo thành từ việc cắt mặt xung quanh của một hình nón bởi một mặt phẳng vuông góc với trục của hình nón. Miệng thùng là đường tròn có bán kính bằng ba lần bán kính mặt đáy của thùng. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng $\frac{3}{2}$ chiều cao của thùng nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $54\sqrt{3}\pi\left(dm^3\right)$. Biết rằng khối cầu tiếp xúc với mặt trong của thùng và đúng một nửa của khối cầu đã chìm trong nước (hình vẽ). Thể tích nước còn lại trong thùng có giá trị nào sau đây?

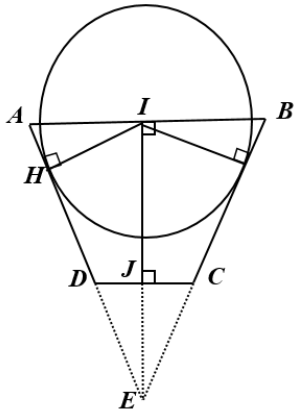


A. $\frac{46}{5}\sqrt{3}\pi\left(dm^3\right)$. **B.** $18\sqrt{3}\pi\left(dm^3\right)$. **C.** $\frac{46}{3}\sqrt{3}\pi\left(dm^3\right)$. **D.** $18\pi\left(dm^3\right)$.

Lời giải

Chọn C

Xét một thiết diện qua trục của hình nón như hình vẽ. Hình thang cân $ABCD$ (IJ là trục đối xứng) là thiết diện của cái thùng nước, hình tròn tâm I bán kính IH là thiết diện của khối cầu. Các đường thẳng AD, BC, IJ đồng qui tại E.



Đặt bán kính của khối cầu là $IH = R$, bán kính mặt đáy của thùng là $JD = r$, chiều cao của thùng là $IJ = h$. Ta có

$\frac{2}{3}\pi R^3 = 54\sqrt{3}\pi \Leftrightarrow R = 3\sqrt{3}$, $\frac{3}{2}h = 2R = 6\sqrt{3} \Leftrightarrow h = 4\sqrt{3}$.

$\frac{EJ}{EI} = \frac{JC}{IB} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3} \Rightarrow EJ = 2\sqrt{3}$, $\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IE^2} \Leftrightarrow \frac{1}{27} = \frac{1}{9r^2} + \frac{1}{108} \Leftrightarrow r = 2$.

Suy ra thể tích của thùng nước là $V_1 = \frac{1}{3}\pi IA^2.IE - \frac{1}{3}\pi JD^2.JE = \frac{208\sqrt{3}\pi}{3}$.

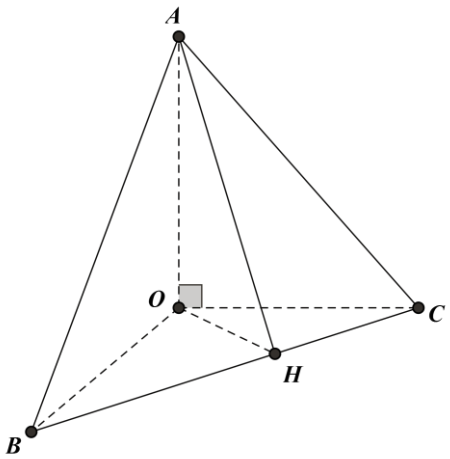
Vậy thể tích nước còn lại trong thùng là $V = \frac{208\sqrt{3}\pi}{3} - 54\sqrt{3}\pi = \frac{46\sqrt{3}\pi}{3}\left(dm^3\right)$.

Câu 15. **(THPT Mai Anh Tuấn_Thanh Hóa - 2019)** Cho tứ diện $OABC$ có $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ và đôi một vuông góc với nhau. Gọi r là bán kính mặt cầu tiếp xúc với cả bốn mặt của tứ diện. Giả sử $a \ge b, a \ge c$. Giá trị nhỏ nhất của $\frac{a}{r}$ là

A. $1+\sqrt{3}$. **B.** $2+\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $3+\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Kẻ đường cao AH của tam giác ABC.

Dễ thấy $OH \perp BC$ nên $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \Rightarrow OH = \frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$.

Tam giác AOH vuông tại O có $AH^2 = OA^2 + OH^2 \Rightarrow AH = \dfrac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{\sqrt{b^2 + c^2}}$.

Tam giác OBC có $BC = \sqrt{b^2 + c^2}$ nên $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AH.BC = \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$.

Vậy diện tích toàn phần của hình chóp $O.ABC$ là:

$$S_{tp} = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA} + S_{ABC} = \frac{1}{2}\left(ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}\right).$$

Dễ thấy thể tích khối chóp $O.ABC$ là $V = \dfrac{1}{6}abc = \dfrac{1}{3} S_{tp}.r$.

Suy ra

$$\frac{1}{6}abc = \frac{1}{3} S_{tp}.r \Rightarrow \frac{a}{r} = \frac{2S_{tp}}{bc} = \frac{ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{bc}$$

$$= \frac{a}{c} + 1 + \frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{c^2} + 1 + \frac{a^2}{b^2}} \geq 1 + 1 + 1 + \sqrt{1 + 1 + 1} = 3 + \sqrt{3}.$$

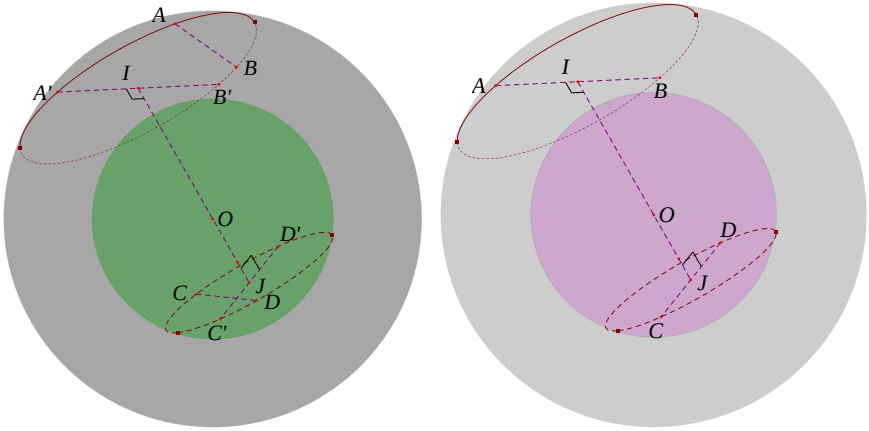
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Câu 16. Cho hai mặt cầu (S_1) và (S_2) đồng tâm O, có bán kính lần lượt là $R_1 = 2$ và $R_2 = \sqrt{10}$. Xét tứ diện $ABCD$ có hai đỉnh A, B nằm trên (S_1) và hai đỉnh C, D nằm trên (S_2). Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $ABCD$ bằng

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $7\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $6\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Dựng mặt phẳng (P) chứa AB và song song với CD, cắt $(O; R_1)$ theo giao tuyến là đường tròn tâm I.

Dựng mặt phẳng (Q) chứa CD và song song với AB, cắt $(O; R_2)$ theo giao tuyến là đường tròn tâm J.

Dựng hai đường kính $A'B', C'D'$ lần lượt của hai đườn tròn sao cho $A'B' \perp C'D'$

Khi đó $IJ = d(AB; CD) = d(A'B'; C'D')$.

Xét tất cả các tứ diện có cạnh AB nằm trên (P) và CD nằm trên (Q) thì ta có:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB.CD.IJ.\sin(AB, CD) \leq \frac{1}{6} A'B'.C'D'.IJ = V_{A'B'C'D'}.$$

Do đó ta chỉ cần xét các tứ diện có cặp cạnh đối $AB \perp CD$ và chúng có trung điểm I, J thẳng hàng với O.

Đặt $IA=x,\left(0<x\le\sqrt{10}\right),JC=y,\left(0<y\le 2\right)$, ta có: $OI=\sqrt{10-x^2},OJ=\sqrt{4-y^2}$.

Khi đó: $d\left(AB,CD\right)=IJ=OI+OJ=\sqrt{10-x^2}+\sqrt{4-y^2}$.

Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}AB.CD.IJ=\frac{1}{6}.2x.2y.\left(\sqrt{10-x^2}+\sqrt{4-y^2}\right)=\frac{2}{3}xy\left(\sqrt{10-x^2}+\sqrt{4-y^2}\right)$$

Có $\sqrt{10-x^2}=\frac{1}{2}.2.\sqrt{10-x^2}\le\frac{14-x^2}{4};\sqrt{4-y^2}\le\frac{5-y^2}{2}$

Suy ra $\sqrt{10-x^2}+\sqrt{4-y^2}\le\frac{24-x^2-2y^2}{4}\le\frac{24-2\sqrt{2}xy}{4}=\frac{12-\sqrt{2}xy}{2}$.

Ta được: $V_{ABCD}\le\frac{2}{3}xy.\frac{12-\sqrt{2}xy}{2}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}xy\right)\left(12-\sqrt{2}xy\right)\le\frac{1}{3\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}xy+12-\sqrt{2}xy}{2}\right)^2=6\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases}0<x\le\sqrt{10},0<y\le 2\\ \sqrt{10-x^2}=2\\ \sqrt{4-y^2}=1\\ x^2=2y^2\\ \sqrt{2}xy=12-\sqrt{2}xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\sqrt{6}\\ y=\sqrt{3}\end{cases}$

Vậy $\max V_{ABCD}=6\sqrt{2}$.

Câu 17. Cho tứ diện đều $ABCD$ có mặt cầu nội tiếp là $\left(S_1\right)$ và mặt cầu ngoại tiếp là $\left(S_2\right)$, hình lập phương ngoại tiếp $\left(S_2\right)$ và nội tiếp trong mặt cầu $\left(S_3\right)$. Gọi r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính các mặt cầu $\left(S_1\right)$, $\left(S_2\right)$, $\left(S_3\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(*Mặt cầu nội tiếp tứ diện là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của tứ diện, mặt cầu nội tiếp hình lập phương là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình lập phương*).

A. $\frac{r_1}{r_2}=\frac{1}{3}$ và $\frac{r_2}{r_3}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{r_1}{r_2}=\frac{2}{3}$ và $\frac{r_2}{r_3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{r_1}{r_2}=\frac{1}{3}$ và $\frac{r_2}{r_3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{r_1}{r_2}=\frac{2}{3}$ và $\frac{r_2}{r_3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Khi đó, diện tích của mỗi mặt tứ diện đều là $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Gọi H là tâm của tam giác đều BCD thì AH là đường cao của hình chóp $A.BCD$ và $BH=\frac{2}{3}.\frac{1\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Do đó chiều cao của hình chóp là $h=AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Suy ra thể tích khối tứ diện $ABCD$ là $V=\frac{1}{3}S_{BCD}.h=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{12}$.

Bán kính mặt cầu $\left(S_1\right)$ nội tiếp diện đều $ABCD$ là $r_1=\frac{3V}{4S_{BCD}}=\frac{3.\frac{\sqrt{2}}{12}}{4.\frac{\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}$.

Trong mặt phẳng ABH, đường thẳng trung trực của AB cắt AH tại I thì I là tâm mặt cầu (S_2) ngoại tiếp tứ diện đều $ABCD$.

Gọi M là trung điểm AB, ta có $\frac{AI}{AB}=\frac{AM}{AH}\Rightarrow AI=\frac{AB^2}{2AH}=\frac{1^2}{2.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\Rightarrow r_2=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Độ dài cạnh hình lập phương ngoại tiếp (S_2) bằng $a=2r_2=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

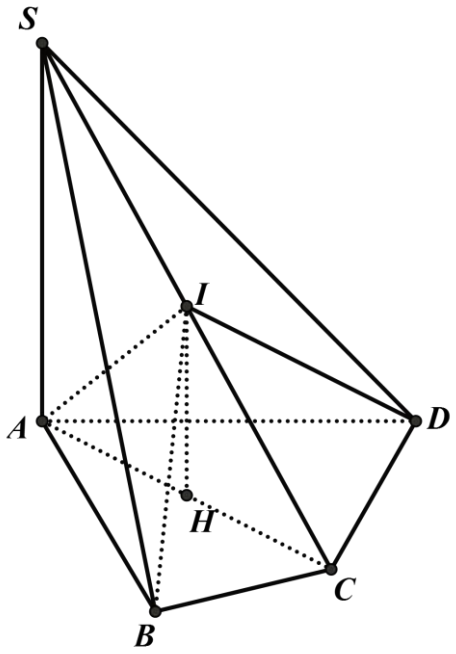
Bán kính mặt cầu (S_3) ngoại tiếp hình lập phương đó là $r_3=\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Từ đó ta được $\frac{r_1}{r_2}=\frac{1}{3}$ và $\frac{r_2}{r_3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 18. **(THPT Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABC=ADC=90°$, cạnh bên SA vuông góc với $(ABCD)$, góc tạo bởi SC và đáy $ABCD$ bằng $60°$, $CD=a$ và tam giác ADC có diện tích bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Diện tích mặt cầu S_{mc} ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

A. $S_{mc}=16\pi a^2$. **B.** $S_{mc}=4\pi a^2$. **C.** $S_{mc}=32\pi a^2$. **D.** $S_{mc}=8\pi a^2$.

Lời giải



Giả thiết: $SA\perp(ABCD)\Rightarrow$ AC là hình chiếu của SC lên $(ABCD)$.

Do đó: $\left(SC,(ABCD)\right)=\left(SC,AC\right)=SCA=60°$.

Xét tam giác ADC vuông tại D, diện tích $S_{\Delta ADC}=\frac{1}{2}AD.DC=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow AD=a\sqrt{3}$.

Khi đó: $AC=\sqrt{AD^2+DC^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2+a^2}=2a$.

ΔSAC vuông tại A, ta có: $\tan SAC=\frac{SA}{AC}\Rightarrow SA=AC.\tan 60°=2a\sqrt{3}$.

Gọi I là trung điểm SC (1), H là trung điểm AC.

Khi đó $IH // SA \Rightarrow IH \perp (ABCD)$.

Tứ giác $ABCD$ có $D = B = 90°$, H là trung điểm AC nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$. Suy ra $IA = IB = IC = ID\ (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Bán kính mặt cầu: $R = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 12a^2} = 2a$.

Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2 = 16\pi a^2$.

Câu 19. **(Yên Phong 1 - 2018)** Cho mặt cầu tâm *O* bán kính 2*a*, mặt phẳng (α) cố định cách *O* một đoạn là *a*, (α) cắt mặt cầu theo đường tròn (T). Trên (T) lấy điểm *A* cố định, một đường thẳng qua *A* vuông góc với (α) cắt mặt cầu tại điểm *B* khác *A*. Trong (α) một góc vuông *xAy* quay quanh *A* và cắt (*T*) tại 2 điểm phân biệt *C, D* không trùng với *A.* Khi đó chọn khẳng định đúng:

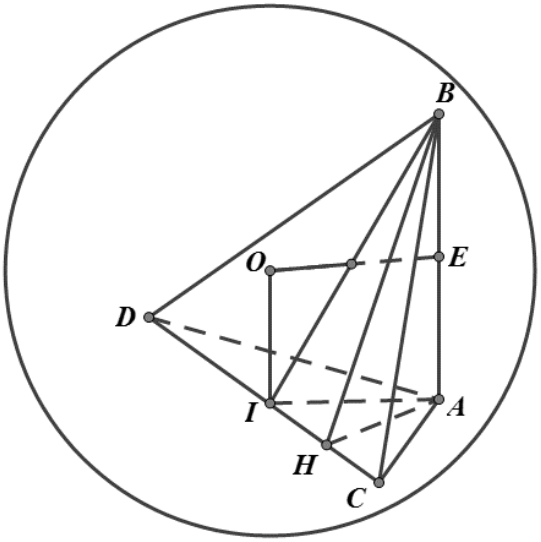
A. Diện tích tam giác *BCD* đạt giá trị nhỏ nhất là $a^2\sqrt{21}$

B. Diện tích tam giác *BCD* đạt giá trị lớn nhất là $a^2\sqrt{21}$

C. Diện tích tam giác *BCD* đạt giá trị nhỏ nhất là $2a^2\sqrt{21}$

D. Do (α) không đi qua *O* nên không tồn tại giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của diện tích tam giác *BCD*

Lời giải



Gọi *I* là tâm đường tròn thiết diện. Ta có *OI*=*a*, *OI* ⊥(α), $IA = a\sqrt{3}$

Do góc *CAD* vuông nên *CD* là đường kính của đường tròn tâm *I*, $CD = 2a\sqrt{3}$

Đặt *AD* = *x*, AC= *y*. Ta có $x^2 + y^2 = 12a^2$ ($0 < x, y < 2a\sqrt{3}$)

Gọi *H* là hình chiếu của *A* lên *CD.* Ta có *BH*⊥*CD*

$S_{BCD} = \frac{1}{2}CD.BH = BH.a\sqrt{3} = a\sqrt{3}.\sqrt{AB^2 + AH^2}$

Ta có OI và AB đồng phẳng, gọi *E* là trung điểm của *AB*, ta có *OE*⊥*AB*, tứ giác *OIAE* là hình chữ nhật, *AB* = 2*OI* = 2*a*

$S_{BCD} = a\sqrt{3}.\sqrt{4a^2 + AH^2}$

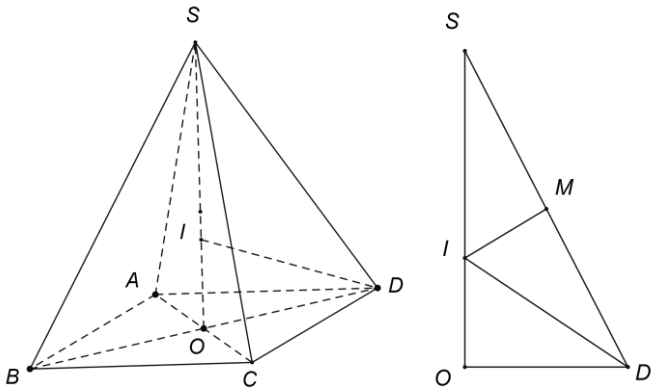
Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{4}{x^2 + y^2} = \frac{4}{12a^2} \Rightarrow AH^2 \leq 3a^2 \Rightarrow S_{BCD} \leq a\sqrt{3}.\sqrt{4a^2 + 3a^2} = a^2\sqrt{21}$.

Dấu bằng xảy ra khi *x* = *y*

Câu 20. **(THPT Hải An - Hải Phòng - 2018)** Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9, tính thể tích V của khối chóp có thể tích lớn nhất.

A. $V=144$. **B.** $V=576\sqrt{2}$. **C.** $V=576$. **D.** $V=144\sqrt{6}$.

Lời giải



Gọi I là tâm mặt cầu và $S.ABCD$ là hình chóp nội tiếp mặt cầu.

Gọi x là độ dài cạnh SO.

Gọi M là trung điểm của SD.

Ta có $SI.SO=SM.SD=\frac{1}{2}SD^2\Rightarrow SD^2=2SI.SO=18x$.

Suy ra $OD^2=18x-x^2$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $V=\frac{1}{3}SO.S_{ABCD}=\frac{1}{3}x.2.OD^2=\frac{2}{3}x\left(18x-x^2\right)=\frac{2}{3}x^2\left(18-x\right)$.

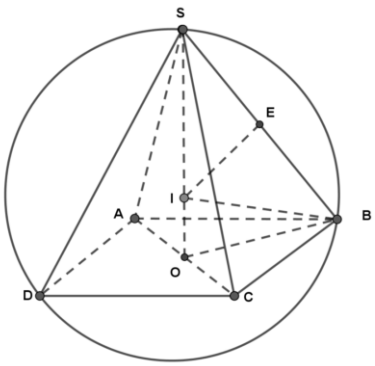
Ta có $x^2\left(18-x\right)=4\frac{x}{2}.\frac{x}{2}.\left(18-x\right)\le 4\left(\frac{18}{3}\right)^3=864$.

Vậy thể tích của khối chóp cần tìm là $V=576$.

Câu 21. **(THPT Yên Khánh A - 2018)** Cho hình chóp tứ giác đều chiều cao là h nội tiếp trong một mặt cầu bán kính R. Tìm h theo R để thể tích khối chóp là lớn nhất.

A. $h=\sqrt{3}R$. **B.** $h=\sqrt{2}R$. **C.** $V=\frac{4R}{3}$. **D.** $V=\frac{3R}{2}$.

Lời giải



Gọi a là độ dài cạnh đáy của hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi O,I lần lượt là tâm đáy và tâm cầu ngoại tiếp hình chóp.

Tam giác IBO có $(h-R)^2+\frac{a^2}{2}=R^2 \Rightarrow \frac{a^2}{2}=R^2-(h-R)^2=2Rh-h^2$.

Thể tích của khối chóp là: $V=\frac{1}{3}a^2h=\frac{1}{3}2(2Rh-h^2).h$.

Xét hàm số $y=(2Rh-h^2).h$ với $0<h<2R$, $y'=4Rh-3h^2 \Rightarrow y'=0 \Rightarrow h=\frac{4R}{3}$.

Trên $(0;2R)$, y' đổi dấu từ "+" sang "-" qua $h=\frac{4R}{3}$ nên thể tích hình chóp đạt lớn nhất tại $h=\frac{4R}{3}$.

Chuyên đề 24 MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔNG HỢP KHỐI TRÒN XOAY

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – GIỎI

Câu 1. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hình nón (N) có đỉnh S, bán kính đáy bằng $\sqrt{3}a$ và độ dài đường sinh bằng $4a$. Gọi (T) là mặt cầu đi qua S và đường tròn đáy của (N). Bán kính của (T) bằng

A. $\frac{2\sqrt{10}a}{3}$. **B.** $\frac{16\sqrt{13}a}{13}$. **C.** $\frac{8\sqrt{13}a}{13}$. **D.** $\sqrt{13}a$.

Câu 2. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hình nón (N) có đỉnh S, bán kính đáy bằng a và độ dài đường sinh bằng $4a$. Gọi (T) là mặt cầu đi qua S và đường tròn đáy của (N). Bán kính của (T) bằng

A. $\frac{2\sqrt{6}a}{3}$. **B.** $\frac{16\sqrt{15}a}{15}$. **C.** $\frac{8\sqrt{15}a}{15}$. **D.** $\sqrt{15}a$.

Câu 3. **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Cho hình nón (N) có đỉnh S, bán kính đáy bằng $\sqrt{2}\mathrm{a}$ và độ dài đường sinh bằng $4\mathrm{a}$. Gọi (T) là mặt cầu đi qua S và đường tròn đáy của (N). Bán kính của (T) bằng

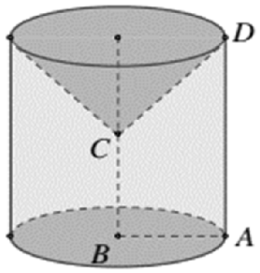
A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}a$. **B.** $\sqrt{14}a$. **C.** $\frac{4\sqrt{14}}{7}a$. **D.** $\frac{8\sqrt{14}}{7}a$.

Câu 4. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hình nón (N) có đỉnh S, bán kính đáy bằng a và độ dài đường sinh bằng $2\sqrt{2}a$. Gọi (T) là mặt cầu đi qua S và đường tròn đáy của (N). Bán kính của (T) bằng

A. $\frac{4\sqrt{7}a}{7}$. **B.** $\frac{4a}{3}$. **C.** $\frac{8\sqrt{7}a}{7}$. **D.** $\sqrt{7}a$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 5. **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B với $AB = BC = \frac{AD}{2} = a$. Quay hình thang và miền trong của nó quanh đường thẳng chứa cạnh BC. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.



A. $V = \frac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $V = \frac{5\pi a^3}{3}$. **C.** $V = \pi a^3$. **D.** $V = \frac{7\pi a^3}{3}$.

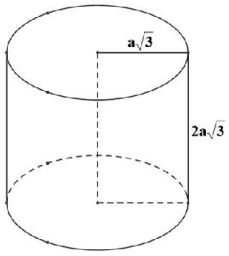
Câu 6. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Một hình nón có chiều cao $9(\mathrm{cm})$ nội tiếp trong một hình cầu có bán kính $5(\mathrm{cm})$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối nón và khối cầu. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{81}{125}$. **B.** $\frac{81}{500}$. **C.** $\frac{27}{125}$. **D.** $\frac{27}{500}$.

Câu 7. **(Sở Ninh Bình 2019)** Một khối gỗ hình trụ tròn xoay có bán kính đáy bằng 1, chiều cao bằng 2. Người ta khoét từ hai đầu khối gỗ hai nửa khối cầu mà đường tròn đáy của khối gỗ là đường tròn lớn của mỗi nửa khối cầu. Tỉ số thể tích phần còn lại của khối gỗ và cả khối gỗ ban đầu là

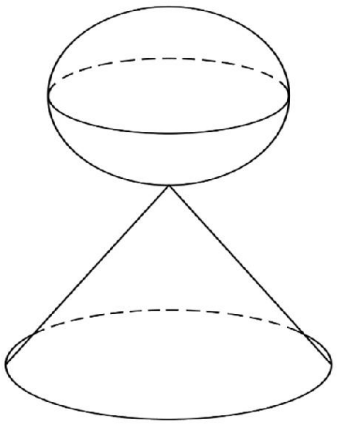
A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 8. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Một khối trụ bán kính đáy là $a\sqrt{3}$, chiều cao là $2a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp khối trụ.



A. $8\sqrt{6}\pi a^3$. **B.** $6\sqrt{6}\pi \text{a}^3$. **C.** $4\sqrt{3}\pi \text{a}^3$. **D.** $\frac{4\sqrt{6}}{3}\pi \text{a}^3$.

Câu 9. **(THPT Chuyên Thái Nguyên 2019)** Một khối cầu pha lê gồm một hình cầu (H_1) bán kính R và một hình nón (H_2) có bán kính đáy và đường sinh lần lượt là r, l thỏa mãn $r=\frac{1}{2}l$ và $l=\frac{3}{2}R$ xếp chồng lên nhau (hình vẽ). Biết tổng diện tích mặt cầu (H_1) và diện tích toàn phần của hình nón (H_2) là $91cm^2$. Tính diện tích của mặt cầu (H_1)

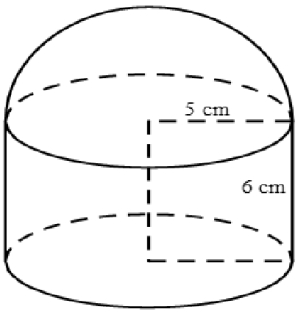


A. $\frac{104}{5}cm^2$ **B.** $16cm^2$ **C.** $64cm^2$ **D.** $\frac{26}{5}cm^2$

Câu 10. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ $AB=1$, đáy lớn $CD=3$, cạnh bên $BC=DA=\sqrt{2}$. Cho hình thang đó quay quanh AB thì được vật tròn xoay có thể tích bằng

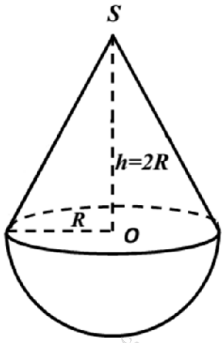
A. $\frac{5}{3}\pi$. **B.** $\frac{4}{3}\pi$. **C.** $\frac{7}{3}\pi$. **D.** $\frac{2}{3}\pi$.

Câu 11. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Một hộp đựng mỹ phẩm được thiết kế (tham khảo hình vẽ) có thân hộp là hình trụ có bán kính hình tròn đáy $r=5cm$, chiều cao $h=6cm$ và nắp hộp là một nửa hình cầu. Người ta cần sơn mặt ngoài của cái hộp đó (không sơn đáy) thì diện tích S cần sơn là



A. $S=110\pi\ cm^2$. **B.** $S=130\pi\ cm^2$. **C.** $S=160\pi\ cm^2$. **D.** $S=80\pi\ cm^2$.

Câu 12. **(Sở Bình Phước 2019)** Một đồ vật được thiết kế bởi một nửa khối cầu và một khối nón úp vào nhau sao cho đáy của khối nón và thiết diện của nửa mặt cầu chồng khít lên nhau như hình vẽ bên. Biết khối nón có đường cao gấp đôi bán kính đáy, thể tích của toàn bộ khối đồ vật bằng $36\pi cm^3$. Diện tích bề mặt của toàn bộ đồ vật đó bằng

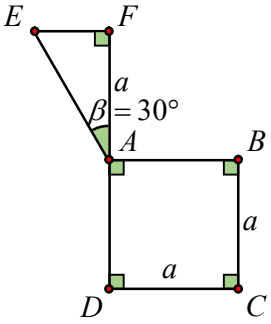


A. $\pi\left(\sqrt{5}+3\right)cm^2$ **B.** $9\pi\left(\sqrt{5}+2\right)cm^2$ **C.** $9\pi\left(\sqrt{5}+3\right)cm^2$ **D.** $\pi\left(\sqrt{5}+2\right)cm^2$

Câu 13. **(Sở Hà Nội 2019)** Cho khối cầu (S) có bán kính R. Một khối trụ có thể tích bằng $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}R^3$ và nội tiếp khối cầu (S). Chiều cao của khối trụ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}R$. **B.** $R\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}R$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}R$

Câu 14. Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay mô hình (như hình vẽ) quanh trục DF.



A. $\frac{10\pi}{7}a^3$. **B.** $\frac{\pi}{3}a^3$. **C.** $\frac{5\pi}{2}a^3$. **D.** $\frac{10\pi}{9}a^3$.

Câu 15. **(Sở Ninh Bình 2019)** Cho mặt cầu (S) tâm O, bán kính bằng 2. (P) là mặt phẳng cách O một khoảng bằng 1 và cắt (S) theo một đường tròn (C). Hình nón (N) có đáy là (C), đỉnh thuộc (S), đỉnh cách (P) một khoảng lớn hơn 2. Kí hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối cầu (S) và khối nón (N). Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{16}{9}$. **D.** $\frac{32}{9}$.

Câu 16. **(Mã 104 2017)** Cho mặt cầu (S) tâm O, bán kính $R=3$. Mặt phẳng (P) cách O một khoảng bằng 1 và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có tâm H. Gọi T là giao điểm của tia HO với (S), tính thể tích V của khối nón có đỉnh T và đáy là hình tròn (C).

A. $V=\frac{32\pi}{3}$ **B.** $V=16\pi$ **C.** $V=\frac{16\pi}{3}$ **D.** $V=32\pi$

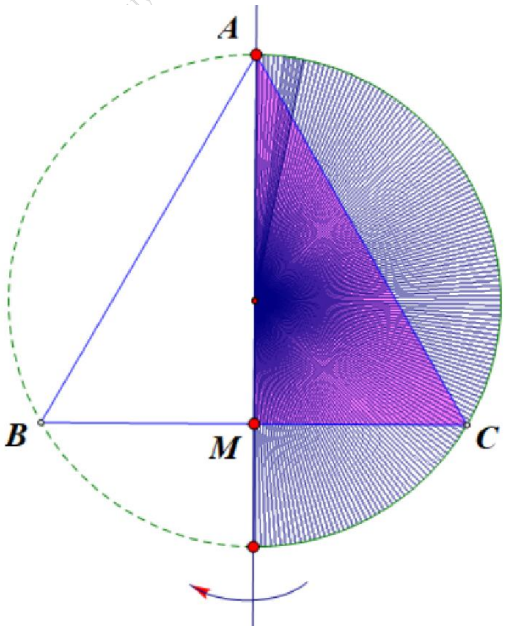
Câu 17. Một hình trụ có hai đường tròn đáy nằm trên một mặt cầu bán kính R và có đường cao bằng bán kính mặt cầu. Diện tích toàn phần của hình trụ đó bằng

A. $\frac{\left(3+2\sqrt{3}\right)\pi R^2}{3}$. **B.** $\frac{\left(3+2\sqrt{3}\right)\pi R^2}{2}$. **C.** $\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)\pi R^2}{2}$. **D.** $\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)\pi R^2}{3}$.

Câu 18. **(Mã 110 2017)** Cho mặt cầu (S) có bán kính bằng 4, hình trụ (H) có chiều cao bằng 4 và hai đường tròn đáy nằm trên (S). Gọi V_1 là thể tích của khối trụ (H) và V_2 là thể tích của khối cầu (S). Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$

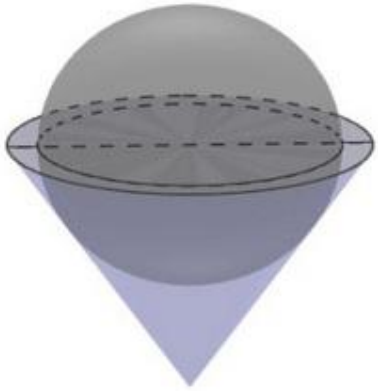
A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{9}{16}$ **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{3}{16}$

Câu 19. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm I đường kính AA', M là trung điểm BC. Khi quay tam, giác ABM với nữa hình tròn đường kính AA' xung quanh đường thẳng AM (như hình vẽ minh hoạ), ta được khối nón và khối cầu có thể tích lần lượt V_1, V_2. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:



A. $\frac{9}{4}$ **B.** $\frac{4}{9}$ **C.** $\frac{27}{32}$ **D.** $\frac{9}{32}$

Câu 20. **(Chuyên ĐHSP Hà Nội 2019)** Một bình đựng nước dạng hình nón (không có đáy), đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $18\pi\,\text{dm}^3$. Biết rằng khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa của khối cầu chìm trong nước (hình bên). Thể tích V của nước còn lại trong bình bằng



A. $24\pi\,\text{dm}^3$. **B.** $6\pi\,\text{dm}^3$. **C.** $54\pi\,\text{dm}^3$. **D.** $12\pi\,\text{dm}^3$.

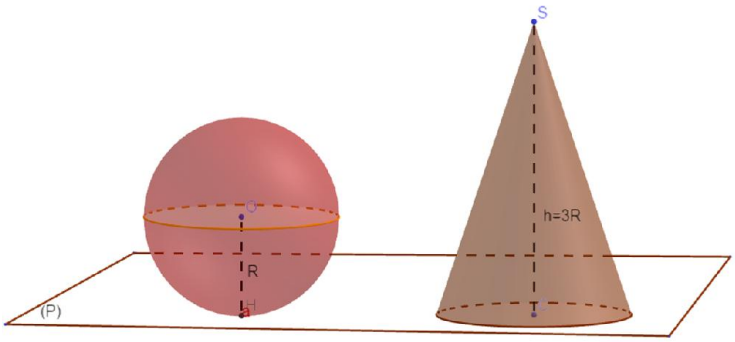
Câu 21. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Cho tam giác đều ABC có đường tròn nội tiếp $(O;r)$, cắt bỏ phần hình tròn và cho hình phẳng thu được quay quanh AO. Tính thể tích khối tròn xoay thu được theo r.

A. $\frac{5}{3}\pi r^3$. **B.** $\frac{4}{3}\pi r^3$. **C.** $\pi r^3\sqrt{3}$. **D.** πr^3.

Câu 22. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho một cái bình hình trụ có bán kính đáy bằng R và có 4 quả cam hình cầu, trong đó có 3 quả cam có cùng bán kính và một quả cam cùng bán kính với đáy bình. Lần lượt bỏ vào bình 3 quả cam cùng bán kính sao cho chúng đôi một tiếp xúc với nhau, mỗi quả cam đều tiếp xúc với với đáy bình và tiếp xúc với một đường sinh của bình; Bỏ tiếp quả cam thứ tư còn lại vào bình và tiếp xúc với mặt nắp của bình. Chiều cao của bình bằng

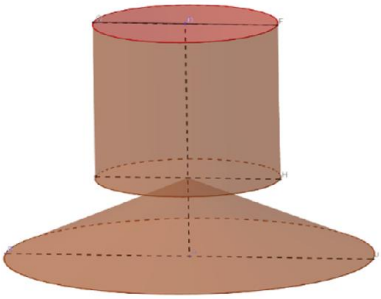
A. $R\left(\sqrt{2\sqrt{3}-3}+1\right)^2$. **B.** $R\left(\sqrt{2\sqrt{3}-3}-1\right)^2$. **C.** $R\left(\sqrt{2\sqrt{3}+3}+1\right)^2$. **D.** $R\left(\sqrt{2\sqrt{3}+3}-1\right)^2$.

Câu 23. **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Cho hình cầu tâm O bán kính $R=5$, tiếp xúc với mặt phẳng (P). Một hình nón tròn xoay có đáy nằm trên (P), có chiều cao $h=15$, có bán kính đáy bằng R. Hình cầu và hình nón nằm về một phía đối với mặt phẳng (P). Người ta cắt hai hình đó bởi mặt phẳng (Q) song song với (P) và thu được hai thiết diện có tổng diện tích là S. Gọi x là khoảng cách giữa (P) và (Q), $(0<x\le 5)$. Biết rằng S đạt giá trị lớn nhất khi $x=\frac{a}{b}$ (phân số $\frac{a}{b}$ tối giản). Tính giá trị $T=a+b$.



A. $T=17$ **B.** $T=19$ **C.** $T=18$ **D.** $T=23$

Câu 24. **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Một khối đồ chơi gồm một khối hình trụ (T) gắn chồng lên một khối hình nón (N), lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_2=2r_1$, $h_1=2h_2$ (hình vẽ). Biết rằng thể tích của khối nón (N) bằng $20\,\text{cm}^3$. Thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng



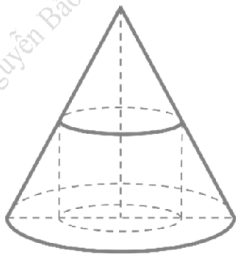
A. $140\,\text{cm}^3$ **B.** $120\,\text{cm}^3$ **C.** $30\,\text{cm}^3$ **D.** $50\,\text{cm}^3$

Câu 25. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng -2019)** Thả một quả cầu đặc có bán kính 3 (cm) vào một vật hình nón (có đáy nón không kín) (như hình vẽ bên). Cho biết khoảng cách từ tâm quả cầu đến đỉnh nón là 5 (cm). Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) phần không gian kín giới hạn bởi bề mặt quả cầu và bề mặt trong của vật hình nón.



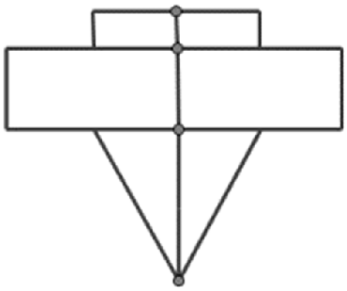
A. $\frac{12\pi}{5}$. **B.** $\frac{14\pi}{5}$. **C.** $\frac{16\pi}{5}$. **D.** $\frac{18\pi}{5}$.

Câu 26. **(Sở Hà Nội 2019)** Cho hình nón có chiều cao $2R$ và bán kính đáy là R. Xét hình trụ nội tiếp hình nón sao cho thể tích trụ lớn nhất. Khi đó bán kính đáy của trụ là



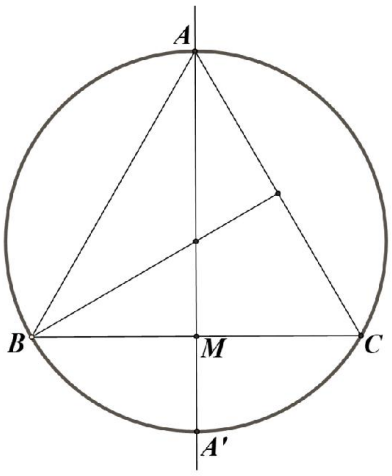
A. $\frac{2R}{3}$. **B.** $\frac{R}{3}$. **C.** $\frac{3R}{4}$. **D.** $\frac{R}{2}$.

Câu 27. **(Thanh Tường Nghệ An -2019)** Một con xoay được thiết kế gồm hai khối trụ (T_1), (T_2) chồng lên khối nón (N)(*Tham khảo mặt cắt ngang qua trục như hình vẽ*). Khối trụ (T_1) có bán kính đáy $r(cm)$, chiều cao $h_1(cm)$. Khối trụ (T_2) có bán kính đáy $2r(cm)$, chiều cao $h_2 = 2h_1(cm)$. Khối nón (N) có bán kính đáy $r(cm)$, chiều cao $h_n = 4h_1(cm)$. Biết rằng thể tích toàn bộ con xoay bằng $31(cm^3)$. Thể tích khối nón (N) bằng



A. $5(cm^3)$. **B.** $3(cm^3)$. **C.** $4(cm^3)$. **D.** $6(cm^3)$.

Câu 28. Cho tam giác đều ABC có đỉnh $A(5;5)$ nội tiếp đường tròn tâm I đường kính AA', M là trung điểm BC. Khi quay tam giác ABM cùng với nửa hình tròn đường kính AA' xung quanh đường thẳng AM (như hình vẽ minh họa), ta được khối nón và khối cầu có thể tích lần lượt là V_1 và V_2.



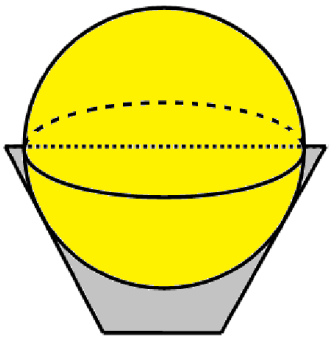
Tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{9}{32}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\frac{27}{32}$. **D.** $\frac{4}{9}$.

Câu 29. **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho mặt cầu tâm O bán kính R. Xét mặt phẳng (P) thay đổi cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C). Hình nón (N) có đỉnh S nằm trên mặt cầu, có đáy là đường tròn (C) và có chiều cao $h(h>R)$. Tính h để thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) có giá trị lớn nhất.

A. $h=\sqrt{2}R$ **B.** $h=\frac{4R}{3}$ **C.** $h=\frac{3R}{2}$ **D.** $h=\sqrt{3}R$

Câu 30. **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Một cái thùng đựng đầy nước được tạo thành từ việc cắt mặt xung quanh của một hình nón bởi một mặt phẳng vuông góc với trục của hình nón. Miệng thùng là đường tròn có bán kính bằng ba lần bán kính mặt đáy của thùng. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng $\frac{3}{2}$ chiều cao của thùng nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $54\sqrt{3}\pi$ (dm^3). Biết rằng khối cầu tiếp xúc với mặt trong của thùng và đúng một nửa của khối cầu đã chìm trong nước (hình vẽ). Thể tích nước còn lại trong thùng có giá trị nào sau đây?



A. $\frac{46}{5}\sqrt{3}\pi$ (dm^3). **B.** $18\sqrt{3}\pi$ (dm^3). **C.** $\frac{46}{3}\sqrt{3}\pi$ (dm^3). **D.** 18π (dm^3).

Câu 31. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương - 2019)** Chiều cao của khối trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong hình cầu có bán kính R là

A. $\frac{4R\sqrt{3}}{3}$. **B.** $R\sqrt{3}$. **C.** $\frac{R\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Câu 32. Một bình đựng nước dạng hình nón (không có đáy) đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $18\pi\ dm^3$ .Biết khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa khối cầu chìm trong nước. Tính thể tích nước còn lại trong bình.

A. $27\pi\ dm^3$. **B.** $6\pi\ dm^3$. **C.** $9\pi\ dm^3$. **D.** $24\pi\ dm^3$.

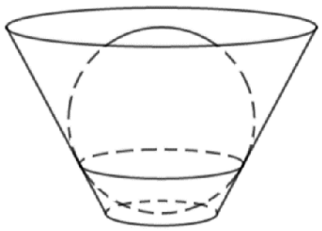
Câu 33. **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Cho khối nón có độ lớn góc ở đỉnh là $\frac{\pi}{3}$. Một khối cầu (S_1) nội tiếp trong khối nối nón. Gọi (S_2) là khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của nón và với S_1 ; S_3 là khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của khối nón và với S_2 ;… ; S_n là khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của nón và với S_{n-1}. Gọi $V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}, V_n$ lần lượt là thể tích của khối cầu $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ và V là thể tích của khối nón. Tính giá trị của biểu thức $T = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{V_1+V_2+\ldots+V_n}{V}$

A. $T=\frac{3}{5}$. **B.** $T=\frac{6}{13}$. **C.** $T=\frac{7}{9}$. **D.** $T=\frac{1}{2}$.

Câu 34. **(Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), bán kính bằng a. Một hình nón có đỉnh là O' và có đáy là hình tròn (O). Biết góc giữa đường sinh của hình nón với mặt đáy bằng 60^0, tỉ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón bằng

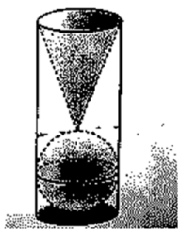
A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 35. **(Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Cho một chiếc cốc có dạng hình nón cụt và một viên bi có đường kính bằng chiều cao của cốc. Đổ đầy nước rồi thả viên bi vào, ta thấy lượng nước tràn ra bằng một phần ba lượng nước đổ vào cốc lúc ban đầu. Biết viên bi tiếp xúc với đáy cốc và thành cốc. Tìm tỉ số bán kính của miệng cốc và đáy cốc (bỏ qua độ dày của cốc).



A. $\frac{5+\sqrt{21}}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\sqrt{21}$. **D.** $\frac{21+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 36. **(Đại Học Hà Tĩnh - 2020)** Trên bàn có một cốc nước hình trụ chứa đầy nước có chiều cao bằng 3 lần đường kính của đáy; một viên bi và một khối nón đều bằng thủy tinh. Biết viên bi là một khối cầu có đường kính bằng của cốc nước. Người ta từ từ thả vào cốc nước viên bi và khối nón đó (như hình vẽ) thì thấy nước trong cốc tràn ra ngoài. Tính tỉ số thể tích của lượng nước còn lại trong cốc và lượng nước ban đầu(bỏ qua bề dày của lớp vỏ thủy tinh)

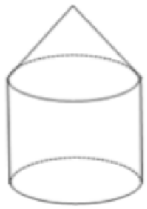


A. $\frac{5}{9}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{4}{9}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 37. **(Sở Ninh Bình 2020)** Cho tam giác vuông cân ABC có $AB = BC = a\sqrt{2}$. Khi quay tam giác ABC quanh đường thẳng đi qua B và song song với AC ta thu được một khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $2\pi a^3$. **B.** $\frac{2\pi a^3}{3}$. **C.** $\frac{4\pi a^3}{3}$. **D.** πa^3.

Câu 38. **(Sở Yên Bái - 2020)** Một khối đồ chơi gồm một khối trụ và một khối nón có cùng bán kính được chồng lên nhau, độ dài đường sinh khối trụ bằng độ dài đường sinh khối nón và bằng đường kính khối trụ, khối nón (tham khảo hình vẽ). Biết thể tích toàn bộ khối đồ chơi là $50cm^3$, thể tích khối trụ gần với số nào nhất trong các số sau



A. $38,8cm^3$. **B.** $38,2cm^3$. **C.** $36,5cm^3$. **D.** $40,5cm^3$.

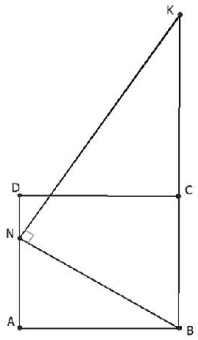
Câu 39. **(Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Trong tất cả các hình nón nội tiếp trong hình cầu có thể tích bằng 36π, bán kính r của hình nón có diện tích xung quanh lớn nhất là

A. $r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $r = \frac{3}{2}$. **C.** $r = 2\sqrt{2}$. **D.** $r = 3$.

Câu 40. **(Sở Ninh Bình 2020)** Có một bể hình hộp chữ nhật chứa đầy nước. Người ta cho ba khối nón giống nhau có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân vào bể sao cho ba đường tròn đáy của ba khối nón đôi một tiếp xúc với nhau, một khối nón có đường tròn đáy chỉ tiếp xúc với một cạnh của đáy bể và hai khối nón còn lại có đường tròn đáy tiếp xúc với hai cạnh của đáy bể. Sau đó người ta đặt lên đỉnh của ba khối nón một khối cầu có bán kính bằng $\frac{4}{3}$ lần bán kính đáy của khối nón. Biết khối cầu vừa đủ ngập trong nước và tổng lượng nước trào ra là $\frac{337\pi}{24}$ (lít). Thể tích nước ban đầu ở trong bể thuộc khoảng nào dưới đây (đơn vị tính: lít)?

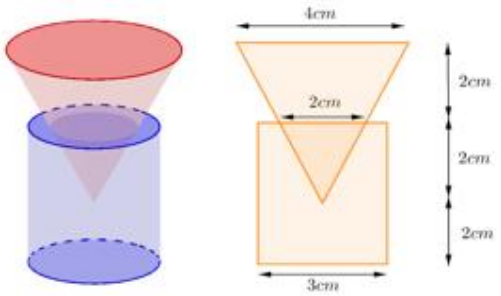
A. $(150;151)$. **B.** $(151;152)$. **C.** $(139;140)$. **D.** $(138;139)$.

Câu 41. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi N là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AN = 2DN$. Đường thẳng qua N vuông góc với BN cắt BC tại K. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay tứ giác $ANKB$ quanh trục BK là



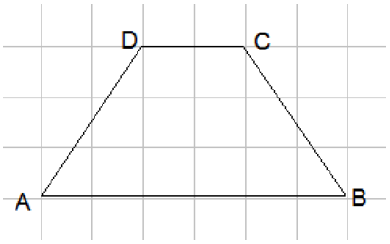
A. $V = \frac{7}{6}\pi a^3$. **B.** $V = \frac{9}{14}\pi a^3$. **C.** $V = \frac{6}{7}\pi a^3$. **D.** $V = \frac{14}{9}\pi a^3$.

Câu 42. Cho một khối tròn xoay (H), một mặt phẳng chứa trục của (H) cắt (H) theo một thiết diện như trong hình vẽ sau. Tính thể tích của (H) (đơn vị cm^3).



A. $V_{(H)}=13\pi$. **B.** $V_{(H)}=23\pi$. **C.** $V_{(H)}=\dfrac{41\pi}{3}$. **D.** $V_{(H)}=17\pi$.

Câu 43. Cho hình thang cân $ABCD$, $AB//CD$, $AB=6\ cm$, $CD=2\ cm$, $AD=BC=\sqrt{13}\ cm$, Quay hình thang $ABCD$ xung quanh đường thẳng AB ta được một khối tròn xoay có thể tích là



A. $18\pi\left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $30\pi\left(\text{cm}^3\right)$. **C.** $24\pi\left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $12\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 44. **(Chuyên Long An-2019)** Cho một dụng cụ đựng chất lỏng được tạo bởi một hình trụ và hình nón được lắp đặt như hình bên. Bán kính đáy hình nón bằng bán kính đáy hình trụ. Chiều cao hình trụ bằng chiều cao hình nón và bằng h. Trong bình, lượng chất lỏng có chiều cao bằng $\dfrac{1}{24}$ chiều cao hình trụ. Lật ngược dụng cụ theo phương vuông góc với mặt đất. Tính độ cao phần chất lỏng trong hình nón theo h.

A. $\dfrac{h}{8}$. **B.** $\dfrac{3h}{8}$. **C.** $\dfrac{h}{2}$. **D.** $\dfrac{h}{4}$.

Câu 45. Có một hình chữ nhật $ABCD$ với $AB=2a$, $AD=4a$. Người ta đánh dấu E là trung điểm BC và $F\in AD$ sao cho $AF=a$. Sau đó người ta cuốn mảnh bìa lại sao cho cạnh DC trùng cạnh AB tạo thành một hình trụ. Tính thể tích tứ diện $ABEF$ với các đỉnh A, B, E, F nằm trên hình trụ vừa tạo thành.

A. $\dfrac{16a^3}{3\pi^2}$. **B.** $\dfrac{8a^3}{3\pi^2}$. **C.** $\dfrac{a^3}{3\pi}$. **D.** $\dfrac{8a^3}{\pi^2}$.

Câu 46. **(Chuyên Nguyễn Huệ- 2019)** Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B với $AB=BC=\dfrac{AD}{2}=a$. Quay hình thang và miền trong của nó quanh đường thẳng chứa cạnh BC. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.

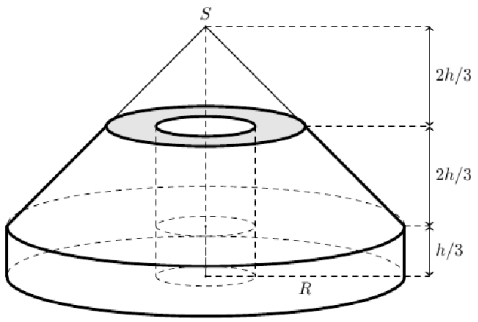
A. $V=\pi a^3$. **B.** $V=\dfrac{4\pi a^3}{3}$. **C.** $V=\dfrac{5\pi a^3}{3}$. **D.** $V=\dfrac{7\pi a^3}{3}$.

Câu 47. Để định vị một trụ điện, người ta cần đúc một khối bê tông có chiều cao $h=1,5\,\text{m}$ gồm:

- Phần dưới có dạng hình trụ bán kính đáy $R=1\,\text{m}$ và có chiều cao bằng $\dfrac{1}{3}h$;

- Phần trên có dạng hình nón bán kính đáy bằng R đã bị cắt bỏ bớt một phần hình nón có bán kính đáy bằng $\frac{1}{2}R$ ở phía trên (*người ta thường gọi hình đó là hình nón cụt);*

- Phần ở giữa rỗng có dạng hình trụ bán kính đáy bằng $\frac{1}{4}R$ *(tham khảo hình vẽ bên dưới).*



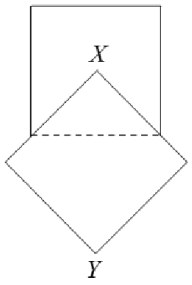
Thể tích của khối bê tông *(làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba)* bằng

A. $2{,}815\,\text{m}^3$. **B.** $2{,}814\,\text{m}^3$. **C.** $3{,}403\,\text{m}^3$. **D.** $3{,}109\,\text{m}^3$.

Câu 48. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B có $AB=a$, $AD=3a$ và $BC=x$ với $0<x<3a$. Gọi V_1, V_2, lần lượt là thể tích các khối tròn xoay tạo thành khi quay hình thang $ABCD$ (kể cả các điểm trong) quanh đường thẳng BC và AD. Tìm x để $\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{5}$.

A. $x=a$. **B.** $x=2a$. **C.** $x=3a$. **D.** $x=4a$.

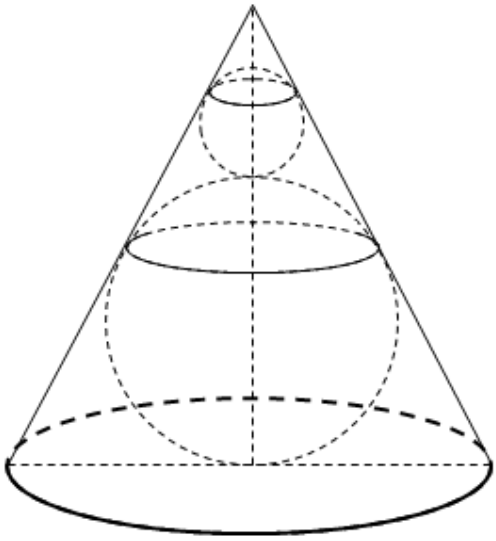
Câu 49. **(Đề thử nghiệm 2017)** Cho hai hình vuông có cùng cạnh bằng 5 được xếp chồng lên nhau sao cho đỉnh X của một hình vuông là tâm của hình vuông còn lại (như hình vẽ). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên xung quanh trục XY.



A. $V=\frac{125\left(1+\sqrt{2}\right)\pi}{6}$. **B.** $V=\frac{125\left(5+2\sqrt{2}\right)\pi}{12}$.

C. $V=\frac{125\left(5+4\sqrt{2}\right)\pi}{24}$. **D.** $V=\frac{125\left(2+\sqrt{2}\right)\pi}{4}$.

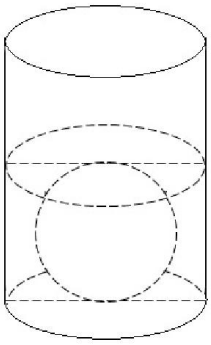
Câu 50. Người ta chế tạo một món đồ chơi cho tre em theo các công đoạn như sau: Trước hết chế tạo ra hình nón tròn xoay có góc ở đỉnh là $2\alpha=60°$ bằng thủy tinh trong suốt. Sau đó đặt hai quả cầu nhỏ bằng thủy tinh có bán kính lớn, nhỏ khác nhau sao cho hai mặt cầu tiếp xúc với nhau và tiếp xúc với mặt nón, quả cầu lớn tiếp xúc với mặt đáy của hình nón (hình vẽ). Biết rằng chiều cao của hình nón bằng $9cm$.



Bỏ qua bề dày của các lớp vỏ thủy tinh, tổng thể tích của hai khối cầu bằng

A. $\frac{112\pi}{3}$. **B.** $\frac{40\pi}{3}$. **C.** $\frac{38\pi}{3}$. **D.** $\frac{100\pi}{3}$.

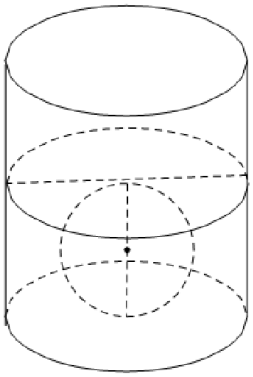
Câu 51. Người ta thả một viên billiards snooker có dạng hình cầu với bán kính nhỏ hơn 4,5 cm vào một chiếc cốc hình trụ đang chứa nước thì viên billiards đó tiếp xúc với đáy cốc và tiếp xúc với mặt nước sau khi dâng (tham khảo hình vẽ bên). Biết rằng bán kính của phần trong đáy cốc bằng 5,4 cm và chiều cao của mực nước ban đầu trong cốc bằng 4,5 cm.



Bán kính của viên billiards đó bằng

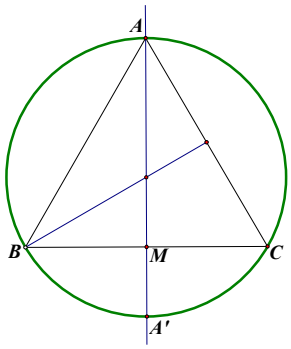
A. 2,6 cm. **B.** 2,7 cm. **C.** 4,2 cm. **D.** 3,6 cm.

Câu 52. **(THPT Cẩm Bình -2019)** Người ta thả một viên bi có dạng hình cầu có bán kính $2,7\,cm$ vào một chiếc cốc hình trụ đang chứa nước (tham khảo hình vẽ dưới). Biết rằng bán kính của phần trong đáy cốc bằng $5,4\,cm$ và chiều cao của mực nước ban đầu trong cốc bằng $4,5\,cm$. Khi đó chiều cao của mực nước trong cốc là?



A. $5,4\,cm$. **B.** $5,7\,cm$. **C.** $5,6\,cm$. **D.** $5,5\,cm$.

Câu 53. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm I đường kính AA', M là trung điểm BC. Khi quay tam giác ABM cùng với nửa đường tròn đường kính AA' xung quanh đường thẳng AM (như hình vẽ minh họa), ta được khối nón và khối cầu có thể tích lần lượt là V_1 và V_2. Tỷ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

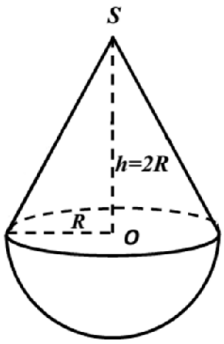


A. $\dfrac{9}{32}$. **B.** $\dfrac{9}{4}$. **C.** $\dfrac{27}{32}$. **D.** $\dfrac{4}{9}$.

Câu 54. Cho mặt cầu (S) có bán kính bằng 2 và có một đường tròn lớn là (C). Khối nón (N) có đường tròn đáy là (C) và thiết diện qua trục là tam giác đều. Biết rằng phần khối nón (N) chứa trong mặt cầu (S) có thể tích bằng $\left(a+b\sqrt{3}\right)\pi$, với a,b là các số hữu tỉ. Tính $a+b$.

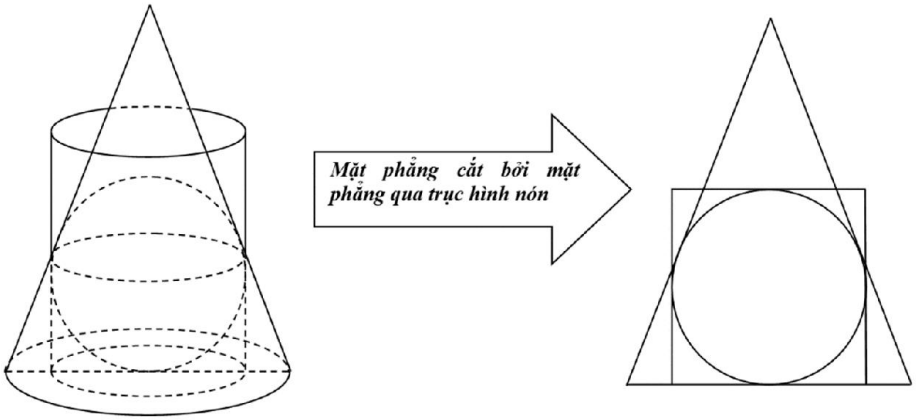
A. $a+b=\dfrac{14}{3}$. **B.** $a+b=\dfrac{13}{3}$. **C.** $a+b=\dfrac{11}{3}$. **D.** $a+b=\dfrac{7}{3}$.

Câu 55. **(Bình Phước - 2019)** Một đồ vật được thiết kế bởi một nửa khối cầu và một khối nón úp vào nhau sao cho đáy của khối nón và thiết diện của nửa mặt cầu chồng khít lên nhau như hình vẽ bên. Biết khối nón có đường cao gấp đôi bán kính đáy, thể tích của toàn bộ khối đồ vật bằng $36\pi\,cm^3$. Diện tích bề mặt của toàn bộ đồ vật đó bằng



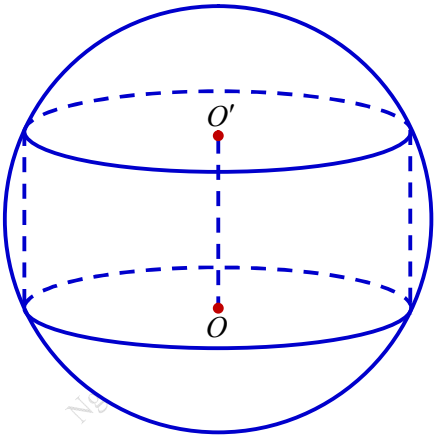
A. $\pi\left(\sqrt{5}+3\right)cm^2$. **B.** $9\pi\left(\sqrt{5}+2\right)cm^2$. **C.** $9\pi\left(\sqrt{5}+3\right)cm^2$. **D.** $\pi\left(\sqrt{5}+2\right)cm^2$.

Câu 56. Cho một hình cầu nội tiếp hình nón tròn xoay có góc ở đỉnh là 2α, bán kính đấy là R và chiều cao là h. Một hình trụ ngoại tiếp hình cầu đó có đáy dưới nằm trong mặt phẳng đáy của hình nón. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình nón và hình trụ, biết rằng $V_1 \neq V_2$. Gọi M là giá trị lớn nhất của tỉ số $\dfrac{V_2}{V_1}$. Giá trị của biểu thức $P=48M+25$ thuộc khoảng nào dưới đây? (*tham khảo hình vẽ*)



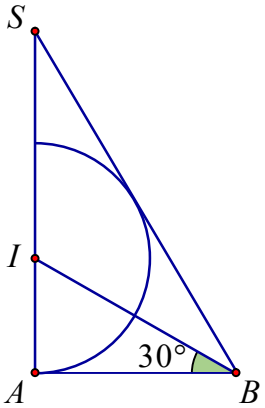
A. $(40;60)$. **B.** $(60;80)$. **C.** $(20;40)$. **D.** $(0;20)$.

Câu 57. **(Hà Nội - 2018)** Cho khối cầu (S) tâm I, bán kính R không đổi. Một khối trụ thay đổi có chiều cao h và bán kính đáy r nội tiếp khối cầu. Tính chiều cao h theo R sao cho thể tích của khối trụ lớn nhất.



A. $h=\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$. **B.** $h=\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$. **C.** $h=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. **D.** $h=R\sqrt{2}$.

Câu 58. **(Toán Học Và Tuổi Trẻ 2018)** Cho tam giác SAB vuông tại A, $\widehat{ABS}=60°$, đường phân giác trong của $\widehat{ABS}$ cắt SA tại điểm I. Vẽ nửa đường tròn tâm I bán kính IA (như hình vẽ). Cho ΔSAB và nửa đường tròn trên cùng quay quanh SA tạo nên các khối cầu và khối nón có thể tích tương ứng V_1, V_2. Khẳng định nào dưới đây đúng?



A. $4V_1=9V_2$ **B.** $9V_1=4V_2$ **C.** $V_1=3V_2$ **D.** $2V_1=3V_2$

Câu 59. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên - 2018)** Người ta đặt được vào trong một hình nón hai khối cầu có bán kính lần lượt là a và $2a$ sao cho các khối cầu đều tiếp xúc với mặt xung quanh

của hình nón, hai khối cầu tiếp xúc với nhau và khối cầu lớn tiếp xúc với đáy của hình nón. Bán kính đáy của hình nón đã cho là

A. $\sqrt{5}a$. **B.** $3a$. **C.** $2\sqrt{2}a$. **D.** $\frac{8a}{3}$.

Câu 60. **(THPT Hậu Lộc 2 - TH - 2018)** Cho hình nón (N) có bán kính đáy $r=20(cm)$, chiều cao $h=60(cm)$ và một hình trụ (T) nội tiếp hình nón (N) (hình trụ (T) có một đáy thuộc đáy hình nón và một đáy nằm trên mặt xung quanh của hình nón). Tính thể tích V của hình trụ (T) có diện tích xung quanh lớn nhất?

A. $V=3000\pi(cm^3)$. **B.** $V=\frac{32000}{9}\pi(cm^3)$. **C.** $V=3600\pi(cm^3)$. **D.** $V=4000\pi(cm^3)$.

Câu 61. **(Phan Đăng Lưu - Huế - 2018)** Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp hình cầu có bán kính bằng 9. Tính thể tích V của khối chóp có thể tích lớn nhất.

A. $576\sqrt{2}$. **B.** 576. **C.** $144\sqrt{2}$. **D.** 144.

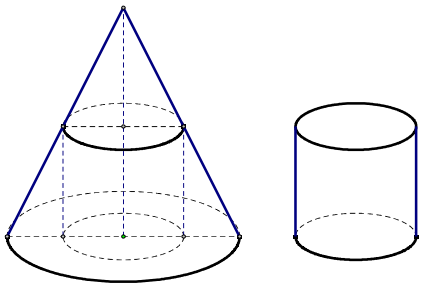
Câu 62. **(Toán Học Tuổi Trẻ - 2018)** Cho tam giác ABC vuông ở A có $AB=2AC$. M là một điểm thay đổi trên cạnh BC. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB, AC. Gọi V và V' tương ứng là thể tích của vật thể tròn xoay tạo bởi tam giác ABC và hình chữ nhật $MHAK$ khi quay quanh trục AB. Tỉ số $\frac{V'}{V}$ lớn nhất bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{4}{9}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 63. **(THPT Nguyễn Trãi - Đà Nẵng - 2018)** Xét hình trụ (T) nội tiếp một mặt cầu bán kính R và S là diện tích thiết diện qua trục của (T). Tính diện tích xung quanh của hình trụ (T) biết S đạt giá trị lớn nhất

A. $S_{xq}=\frac{2\pi R^2}{3}$. **B.** $S_{xq}=\frac{\pi R^2}{3}$. **C.** $S_{xq}=2\pi R^2$. **D.** $S_{xq}=\pi R^2$.

Câu 64. **(THPT Quỳnh Lưu - Nghệ An - 2018)** Một khúc gỗ có dạng hình khối nón có bán kính đáy bằng $r=2\text{m}$, chiều cao $h=6\text{m}$. Bác thợ mộc chế tác từ khúc gỗ đó thành một khúc gỗ có dạng hình khối trụ như hình vẽ. Gọi V là thể tích lớn nhất của khúc gỗ hình trụ sau khi chế tác. Tính V.

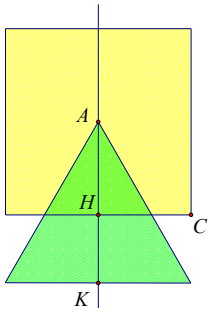


A. $V=\frac{32\pi}{9}(\text{m}^2)$. **B.** $V=\frac{32}{9}(\text{m}^2)$. **C.** $V=\frac{32\pi}{3}(\text{m}^2)$. **D.** $V=\frac{32\pi}{9}(\text{m}^2)$.

Câu 65. **(THPT Thanh Miện I - Hải Dương - 2018)** Cho mặt cầu (S) có bán kính R không đổi, hình nón (H) bất kì nội tiếp mặt cầu (S). Thể tích khối nón (H) là V_1; và thể tích phần còn lại của khối cầu là V_2. Giá trị lớn nhất của $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. $\frac{81}{32}$. **B.** $\frac{76}{32}$. **C.** $\frac{32}{81}$. **D.** $\frac{32}{76}$.

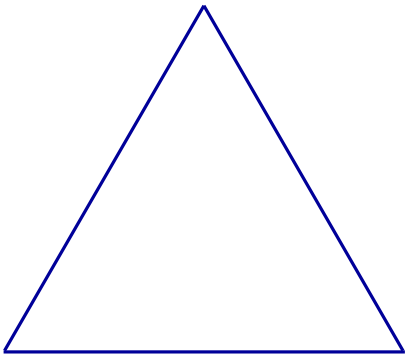
Câu 66. **(THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Tĩnh - 2018)** Cho tam giác đều và hình vuông cùng có cạnh bằng 8 được xếp chồng lên nhau sao cho một đỉnh của tam giác đều trùng với tâm của hình vuông, trục của tam giác đều trùng với trục của hình vuông (như hình vẽ). Tính thể tích của vật thể tròn xoay sinh bởi hình đã cho khi quay quanh trục.



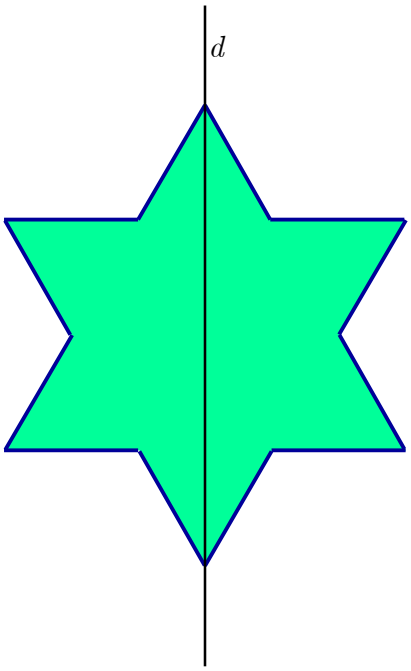
A. $\frac{16\pi\left(23+4\sqrt{3}\right)}{3}$. **B.** $\frac{64\pi\left(17+\sqrt{3}\right)}{3}$. **C.** $\frac{16\pi\left(17+3\sqrt{3}\right)}{9}$. **D.** $\frac{64\pi\left(17+3\sqrt{3}\right)}{9}$.

Câu 67. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2018)** Ban đầu ta có một tam giác đều cạnh bằng 3 (hình 1). Tiếp đó ta chia mỗi cạnh của tam giác thành 3 đoạn bằng nhau và thay mỗi đoạn ở giữa bằng hai đoạn bằng nó sao cho chúng tạo với đoạn bỏ đi một tam giác đều về phía bên ngoài ta được hình 2. Khi quay hình 2 xung quanh trục d ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích khối tròn xoay đó.

Nguyễn Bảo Vương



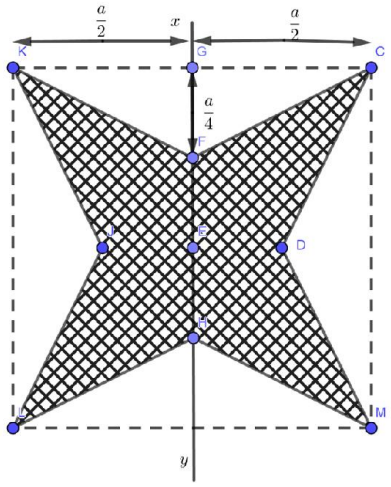
Hình 1



Hình 2

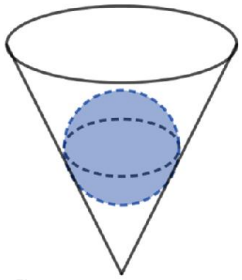
A. $\frac{5\pi\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{9\pi\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{5\pi\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{5\pi\sqrt{3}}{2}$.

Câu 68. **(THPT Nguyễn Tất Thành - Yên Bái - 2018)** Bên trong hình vuông cạnh a, dựng hình sao bốn cạnh đều như hình vẽ bên (các kích thước cần thiết cho như trong hình). Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình sao đó quanh trục xy.



A. $V=\frac{5\pi}{48}a^3$. **B.** $V=\frac{5\pi}{16}a^3$. **C.** $V=\frac{\pi}{6}a^3$. **D.** $V=\frac{\pi}{8}a^3$.

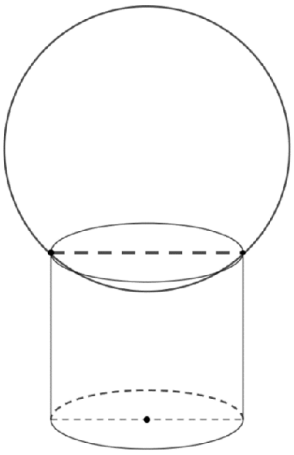
Câu 69. **(THPT Chu Văn An - Hà Nội - 2018)** Bạn An có một cốc giấy hình nón có đường kính đáy là 10 cm và độ dài đường sinh là 8 cm. Bạn dự định đựng một viên kẹo hình cầu sao cho toàn bộ viên kẹo nằm trong cốc (*không phần nào của viên kẹo cao hơn miệng cốc*).



Hỏi bạn An có thể đựng được viên kẹo có đường kính lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $\frac{64}{\sqrt{39}}$ cm. **B.** $\frac{5\sqrt{39}}{13}$ cm. **C.** $\frac{10\sqrt{39}}{13}$ cm. **D.** $\frac{32}{\sqrt{39}}$ cm.

Câu 70. **(Chuyên Nguyễn Đình Triểu - Đồng Tháp - 2018)** Một trái banh và một chiếc chén hình trụ có cùng chiều cao. Người ta đặt trái banh lên hình trụ thấy phần ở bên ngoài của quả bóng có chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao của nó. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của quả bóng và chiếc chén, khi đó:



A. $9V_1=8V_2$. **B.** $3V_1=2V_2$. **C.** $16V_1=9V_2$. **D.** $27V_1=8V_2$.

Chuyên đề 24 MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔNG HỢP KHỐI TRÒN XOAY

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – GIỎI

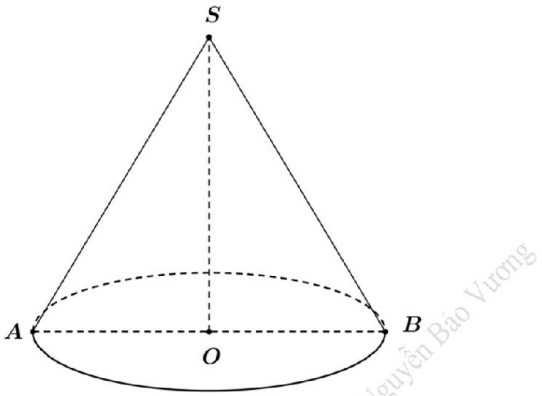
Câu 1. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hình nón (N) có đỉnh S, bán kính đáy bằng $\sqrt{3}a$ và độ dài đường sinh bằng $4a$. Gọi (T) là mặt cầu đi qua S và đường tròn đáy của (N). Bán kính của (T) bằng

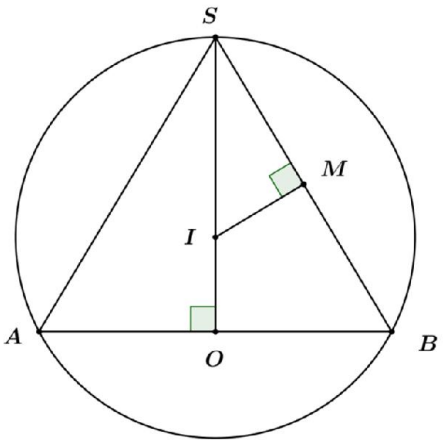
A. $\frac{2\sqrt{10}a}{3}$. **B.** $\frac{16\sqrt{13}a}{13}$. **C.** $\frac{8\sqrt{13}a}{13}$. **D.** $\sqrt{13}a$.

Lời giải.

Chọn C

Cách 1.





Nguyễn Bảo Vương

Nếu cắt mặt cầu ngoại tiếp khối nón (N) bởi mặt phẳng (SAB), ta được mộ hình tròn ngoại tiếp tam giác SAB. Khi đó bán kính mặt cầu (T) bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB.

Gọi M là trung điểm của SB. Kẻ đường vuông góc với SB tại M, cắt SO tại I.

Khi đó I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSAB và $r = SI$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔSAB.

Ta có: $\Delta SIM \backsim \Delta SBO \Rightarrow \frac{SI}{SB} = \frac{SM}{SO} \Rightarrow SI = \frac{SM}{SO}.SB$.

Trong đó: $\begin{cases} SM = 2a \\ SB = 4a \\ SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = a\sqrt{13} \end{cases} \Rightarrow r = SI = \frac{8a\sqrt{13}}{13}$.

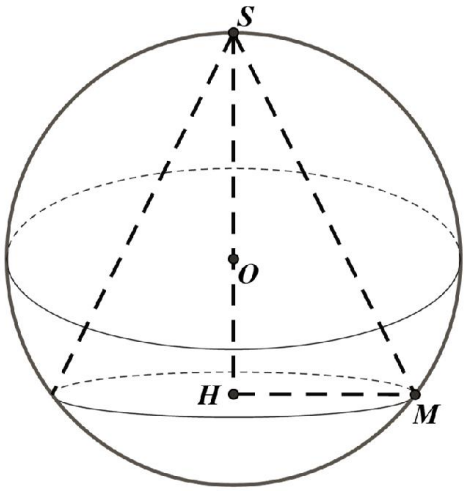
Cách 2.

Gọi O là tâm của mặt cầu (T), H là tâm đường tròn đáy của (N), M là một điểm trên đường tròn đáy của (N) và R là bán kính của (T).

Ta có: $SO = OM = R$; $OM^2 = OH^2 + HM^2$; $SH = \sqrt{SM^2 - HM^2} = \sqrt{13}a$.

Do $SH \neq HM$ nên chỉ xảy ra hai trường hợp sau

Trường hợp 1: $SH = SO + OH$

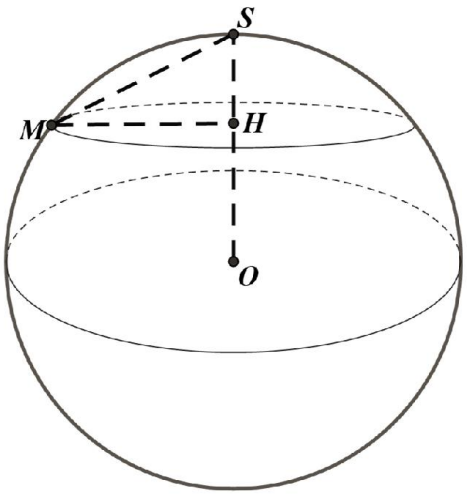


Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} R + OH = \sqrt{13}a \\ R^2 = OH^2 + 3a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OH = \sqrt{13}a - R \\ R^2 = 13a^2 - 2\sqrt{3}aR + R^2 + 3a^2 \ (*) \end{cases}.$$

Giải $(*)$ ta có $R = \dfrac{8\sqrt{13}a}{13}$.

Trường hợp 2: $SH = SO - OH$.



Ta có hệ phương trình $\begin{cases} R = OH + \sqrt{13}a \\ R^2 = OH^2 + 3a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OH = R - \sqrt{13}a \\ R^2 = 13a^2 - 2\sqrt{13}aR + R^2 + 3a^2 \ (*) \end{cases}.$

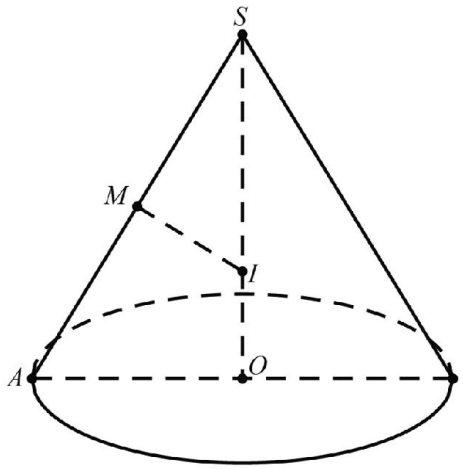
Giải $(*)$ ta có $R = \dfrac{8\sqrt{13}a}{13}$.

Câu 2. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hình nón (N) có đỉnh S, bán kính đáy bằng a và độ dài đường sinh bằng $4a$. Gọi (T) là mặt cầu đi qua S và đường tròn đáy của (N). Bán kính của (T) bằng

A. $\frac{2\sqrt{6}a}{3}$. **B.** $\frac{16\sqrt{15}a}{15}$. **C.** $\frac{8\sqrt{15}a}{15}$. **D.** $\sqrt{15}a$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là tâm của (T) thì $I \in SO$ và $IS = IA$. Gọi M là trung điểm của SA thì $IM \perp SA$.

Ta có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{(4a)^2 - a^2} = a\sqrt{15}$.

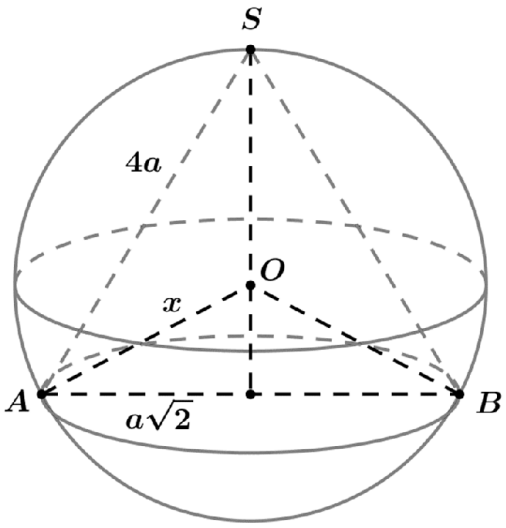
Lại có $SM.SA = SI.SO \Rightarrow SI = \frac{SM.SA}{SO} = \frac{2a.4a}{a\sqrt{15}} = \frac{8\sqrt{15}a}{15}$.

Câu 3. **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Cho hình nón (N) có đỉnh S, bán kính đáy bằng $\sqrt{2}\mathrm{a}$ và độ dài đường sinh bằng $4\mathrm{a}$. Gọi (T) là mặt cầu đi qua S và đường tròn đáy của (N). Bán kính của (T) bằng

A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}a$. **B.** $\sqrt{14}a$. **C.** $\frac{4\sqrt{14}}{7}a$. **D.** $\frac{8\sqrt{14}}{7}a$.

Lời giải

Chọn C



Gọi R là bán kính mặt cầu (T), SH là đường cao của hình nón

$\Rightarrow \mathrm{SH} = \sqrt{(4\mathrm{a})^2 - (\mathrm{a}\sqrt{2})^2} = \mathrm{a}\sqrt{14}$

Gọi I là tâm mặt cầu $\Rightarrow \mathrm{R}^2 = (\mathrm{a}\sqrt{2})^2 + (\mathrm{R} - \mathrm{a}\sqrt{14})^2 \Rightarrow \mathrm{R} = \dfrac{4\sqrt{14}}{7}\mathrm{a}$

Câu 4. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hình nón (N) có đỉnh S, bán kính đáy bằng a và độ dài đường sinh bằng $2\sqrt{2}a$. Gọi (T) là mặt cầu đi qua S và đường tròn đáy của (N). Bán kính của (T) bằng

A. $\dfrac{4\sqrt{7}a}{7}$. **B.** $\dfrac{4a}{3}$. **C.** $\dfrac{8\sqrt{7}a}{7}$. **D.** $\sqrt{7}a$.

Lời giải

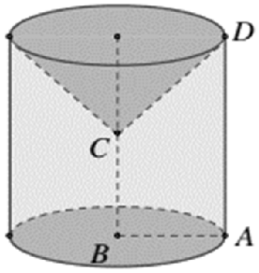
Chọn A

Giả sử thiết diện qua trục của hình nón là tam giác SAB cân tại S.

Khi đó ta có $S_{SAB} = \dfrac{1}{2}SH.AB = \dfrac{1}{2}(a\sqrt{7}).2a = \sqrt{7}a^2$.

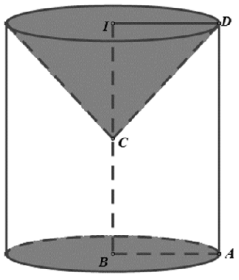
Ta có $S_{SAB} = \dfrac{SA.SB.AB}{4R} \Rightarrow R = \dfrac{SA.SB.SC}{4S_{SAB}} = \dfrac{2\sqrt{2}a.2\sqrt{2}a.2a}{4.a^2\sqrt{7}} = \dfrac{4a\sqrt{7}}{7}$.

Câu 5. **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B với $AB = BC = \dfrac{AD}{2} = a$. Quay hình thang và miền trong của nó quanh đường thẳng chứa cạnh BC. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.



A. $V = \dfrac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $V = \dfrac{5\pi a^3}{3}$. **C.** $V = \pi a^3$. **D.** $V = \dfrac{7\pi a^3}{3}$.

Lời giải



Thể tích của khối trụ sinh bởi hình chữ nhật $ABID$ khi quay cạnh BI là:

$$V_1 = \pi.AB^2.AD = 2\pi a^3.$$

Thể tích của khối nón sinh bởi tam giác CID khi quay cạnh CI là:

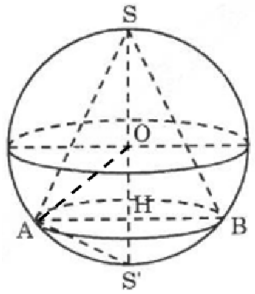
$$V_2 = \frac{1}{3}\pi.ID^2.CI = \frac{\pi a^3}{3}.$$

Vậy $V = V_1 - V_2 = \frac{5\pi a^3}{3}$.

Câu 6. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Một hình nón có chiều cao $9(\text{cm})$ nội tiếp trong một hình cầu có bán kính $5(\text{cm})$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối nón và khối cầu. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{81}{125}$. **B.** $\frac{81}{500}$. **C.** $\frac{27}{125}$. **D.** $\frac{27}{500}$.

Lời giải



Gọi hình cầu có tâm O bán kính R.

Gọi hình nón có đỉnh S, tâm đáy là H, bán kính đáy $r = HA$.

Vì hình nón nội tiếp hình cầu nên đỉnh S thuộc hình cầu, chiều cao SH của hình nón đi qua tâm O của hình cầu, đồng thời cắt hình cầu tại điểm S'.

Theo đề chiều cao hình nón $SH = 9$, bán kính hình cầu $OS = 5 \Rightarrow OH = 4$, từ đó ta có

$$HA = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

Thể tích khối nón $V_1 = \frac{1}{3}h\pi r^2 = \frac{1}{3}SH.\pi.HA^2 = \frac{1}{3}.9\pi 3^2 = 27\pi$.

Thể tích khối cầu $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 5^3 = \frac{500\pi}{3}$.

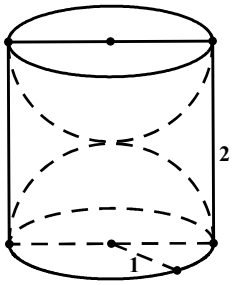
Tỉ số $\frac{V_1}{V_2} = \frac{27\pi}{\frac{500\pi}{3}} = \frac{81}{500}$.

Câu 7. **(Sở Ninh Bình 2019)** Một khối gỗ hình trụ tròn xoay có bán kính đáy bằng 1, chiều cao bằng 2. Người ta khoét từ hai đầu khối gỗ hai nửa khối cầu mà đường tròn đáy của khối gỗ là đường tròn lớn của mỗi nửa khối cầu. Tỉ số thể tích phần còn lại của khối gỗ và cả khối gỗ ban đầu là

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Theo bài toán ta có hình vẽ



Thể tích của khối trụ là $V=\pi.1^2.2=2\pi$.

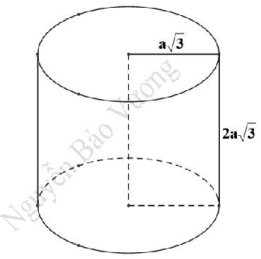
Vì đường tròn đáy của khối trụ là đường tròn lớn của mỗi nửa khối cầu nên bán kính của mỗi nửa khối cầu là $R=1$.

Thể tích của hai nửa khối cầu bị khoét đi là $V_1=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi.1^3}{3}=\frac{4\pi}{3}$.

Thể tích của phần còn lại của khối gỗ là $V_2=V-V_1=2\pi-\frac{4\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$.

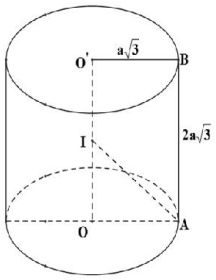
Vậy tỉ số thể tích cần tìm là $\frac{V_2}{V}=\frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi}=\frac{1}{3}$.

Câu 8. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Một khối trụ bán kính đáy là $a\sqrt{3}$, chiều cao là $2a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp khối trụ.



A. $8\sqrt{6}\pi a^3$. **B.** $6\sqrt{6}\pi\,\mathrm{a}^3$. **C.** $4\sqrt{3}\pi\,\mathrm{a}^3$. **D.** $\frac{4\sqrt{6}}{3}\pi\,\mathrm{a}^3$.

Lời giải



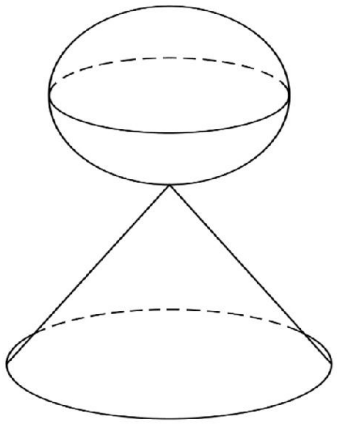
Xét hình hình chữ nhật $OABO'$ như hình vẽ, với O,O' lần lượt là tâm hai đáy của khối trụ. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng OO'. Khi đó IA là bán kính khối cầu ngoại tiếp khối trụ.

Ta có: $IA^2=OA^2+OI^2=3a^2+3a^2=6a^2\Rightarrow IA=\sqrt{6}a$.

Thể tích khối cầu ngoại tiếp khối trụ là: $V=\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{6}a\right)^3=8\sqrt{6}\pi a^3$

Câu 9. **(THPT Chuyên Thái Nguyên 2019)** Một khối cầu pha lê gồm một hình cầu (H_1) bán kính R và một hình nón (H_2) có bán kính đáy và đường sinh lần lượt là r,l thỏa mãn $r=\frac{1}{2}l$ và $l=\frac{3}{2}R$

xếp chồng lên nhau (hình vẽ). Biết tổng diện tích mặt cầu (H_1) và diện tích toàn phần của hình nón (H_2) là $91cm^2$. Tính diện tích của mặt cầu (H_1)



A. $\frac{104}{5}cm^2$ **B.** $16cm^2$ **C.** $64cm^2$ **D.** $\frac{26}{5}cm^2$

Lời giải

$r=\frac{1}{2}l=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}R=\frac{3}{4}R$. Diện tích mặt cầu $S_1=4\pi R^2$

Diện tích toàn phần của hình nón $S_2=\pi rl+\pi r^2=\pi.\frac{3}{4}R.\frac{3}{2}R+\pi.\frac{9}{16}R^2=\frac{27\pi R^2}{16}$

Theo giả thiết: $4\pi R^2+\frac{27\pi R^2}{16}=91\Leftrightarrow\frac{91\pi R^2}{16}=91\Leftrightarrow\pi R^2=16$

Vậy $S_1=4\pi R^2=64cm^2$

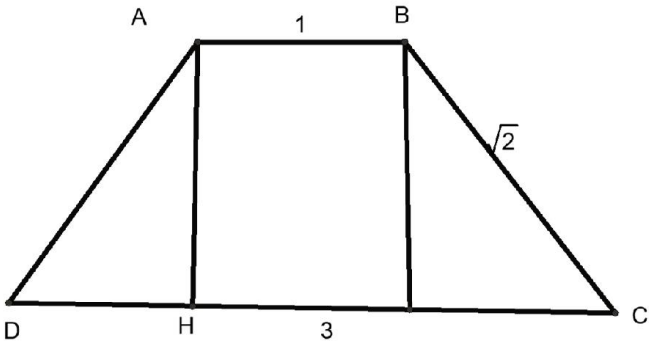
Nguyễn Bảo Vương

Câu 10. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ $AB=1$, đáy lớn $CD=3$, cạnh bên $BC=DA=\sqrt{2}$. Cho hình thang đó quay quanh AB thì được vật tròn xoay có thể tích bằng

A. $\frac{5}{3}\pi$. **B.** $\frac{4}{3}\pi$. **C.** $\frac{7}{3}\pi$. **D.** $\frac{2}{3}\pi$.

Lời giải

Chọn C



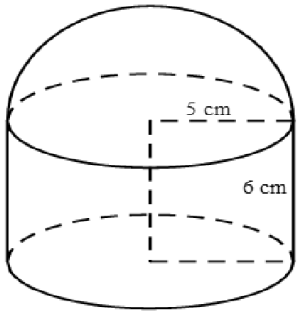
Thể tích của khối tròn xoay bằng thể tích của hình trụ đường cao DC và bán kính đường tròn đáy AH. $AH=DH=1$

Trừ đi thể tích hai khối nòn tròn xoay chiều cao DH bán kính đường tròn đáy AH

Ta có thể tích khối tròn xoay cần tìm là:

$$V = 3.\pi.1^2 - 2.\frac{1}{3}.1.\pi.1^2 = \frac{7}{3}\pi$$

Câu 11. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Một hộp đựng mỹ phẩm được thiết kế (tham khảo hình vẽ) có thân hộp là hình trụ có bán kính hình tròn đáy $r = 5cm$, chiều cao $h = 6cm$ và nắp hộp là một nửa hình cầu. Người ta cần sơn mặt ngoài của cái hộp đó (không sơn đáy) thì diện tích S cần sơn là



A. $S = 110\pi\ cm^2$. **B.** $S = 130\pi\ cm^2$. **C.** $S = 160\pi\ cm^2$. **D.** $S = 80\pi\ cm^2$.

Lời giải

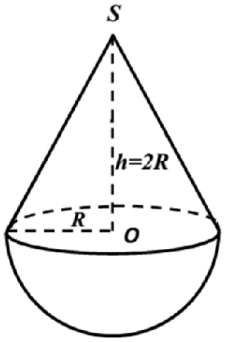
Diện tích nắp hộp cần sơn là: $S_1 = \frac{4\pi r^2}{2} = 50\pi\ cm^2$.

Diện tích than hộp cần sơn là: $S_2 = 2\pi rh = 60\pi\ cm^2$.

Diện tích S cần sơn là: $S = S_1 + S_2 = 50\pi + 60\pi = 110\pi\ cm^2$.

Câu 12. **(Sở Bình Phước 2019)** Một đồ vật được thiết kế bởi một nửa khối cầu và một khối nón úp vào nhau sao cho đáy của khối nón và thiết diện của nửa mặt cầu chồng khít lên nhau như hình vẽ bên.

Biết khối nón có đường cao gấp đôi bán kính đáy, thể tích của toàn bộ khối đồ vật bằng $36\pi cm^3$. Diện tích bề mặt của toàn bộ đồ vật đó bằng



A. $\pi\left(\sqrt{5}+3\right)\ cm^2$ **B.** $9\pi\left(\sqrt{5}+2\right)\ cm^2$

C. $9\pi\left(\sqrt{5}+3\right)\ cm^2$ **D.** $\pi\left(\sqrt{5}+2\right)\ cm^2$

Lời giải

Chọn B

Thể tích khối nón là $V_1 = \frac{1}{3}\pi.R^2.2R = \frac{2}{3}\pi.R^3$

Thể tích nửa khối cầu là $V_2 = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}\pi.R^3 = \frac{2}{3}\pi.R^3$

Thể tích của toàn bộ khối đồ vật là $V_1 + V_2 = 36\pi \Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi.R^3 = 36\pi \Leftrightarrow R = 3$

Diện tích xung quanh của mặt nón là $S_1 = \pi R.\sqrt{4R^2 + R^2} = \pi R^2\sqrt{5} = 9\sqrt{5}\pi$

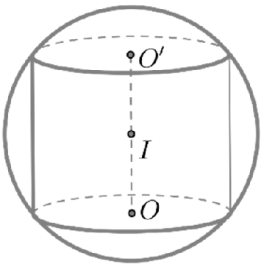
Diện tích của nửa mặt cầu là $S_2 = \frac{1}{2}.4\pi R^2 = 18\pi$

Diện tích bề mặt của toàn bộ đồ vật bằng $S_1 + S_2 = 9\pi\left(\sqrt{5}+2\right)\ cm^2$.

Câu 13. **(Sở Hà Nội 2019)** Cho khối cầu (S) có bán kính R. Một khối trụ có thể tích bằng $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}R^3$ và nội tiếp khối cầu (S). Chiều cao của khối trụ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}R$. **B.** $R\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}R$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}R$

Lời giải



Gọi r là bán kính của khối trụ và h là chiều cao của khối tru, khi đó ta có $r^2 = R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$.

Thể tích của khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h$.

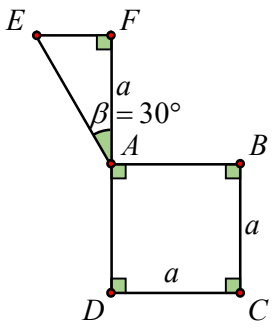
Theo đề bài thể tích khối trụ bằng $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}R^3$ nên ta có phương trình

$$\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}R^3 = \pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h \Leftrightarrow 9h^3 - 36R^2h + 16\sqrt{3}R^3 = 0 \Leftrightarrow 9\left(\frac{h}{R}\right)^3 - 36\left(\frac{h}{R}\right) + 16\sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{h}{R} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow h = \frac{2\sqrt{3}}{3}R.$$

Vậy chiều cao khối trụ là $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$.

Câu 14. Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay mô hình (như hình vẽ) quanh trục DF.



A. $\frac{10\pi}{7}a^3$. **B.** $\frac{\pi}{3}a^3$. **C.** $\frac{5\pi}{2}a^3$. **D.** $\frac{10\pi}{9}a^3$.

Lời giải

Lời giải

Chọn D

Khi quay mô hình trên quanh trục DF. Tam giác AFE tạo ra khối nón tròn xoay (N) và hình vuông $ABCD$ tạo ra khối trụ tròn xoay (T).

(N) có chiều cao $AF = a$, bán kính đáy

$EF = AF.\tan 30^0 = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow V_{(N)} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 a = \frac{\pi a^3}{9}$.

(T) có chiều cao $AD = a$, bán kính đáy $AB = a \Rightarrow V_{(T)} = \pi a^2.a = \pi a^3$.

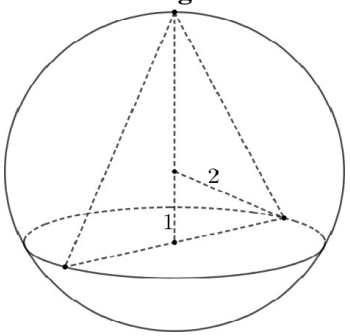
Vậy thể tích cần tính là: $V = V_{(N)} + V_{(T)} = \pi a^3 + \frac{\pi a^3}{9} = \frac{10\pi a^3}{9}$.

Câu 15. **(Sở Ninh Bình 2019)** Cho mặt cầu (S) tâm O, bán kính bằng 2. (P) là mặt phẳng cách O một khoảng bằng 1 và cắt (S) theo một đường tròn (C). Hình nón (N) có đáy là (C), đỉnh thuộc (S), đỉnh cách (P) một khoảng lớn hơn 2. Kí hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối cầu (S) và khối nón (N). Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là

Nguyễn Bảo Vương

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{16}{9}$. **D.** $\frac{32}{9}$.

Lời giải



Thể tích khối cầu (S) là $V_1 = \frac{4}{3}\pi.R^3 = \frac{4}{3}\pi.2^3 = \frac{32}{3}\pi$

Khối nón (N) có bán kính đáy $r = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$, chiều cao $h = 3$

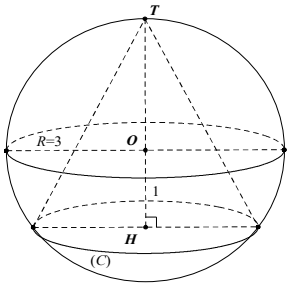
Thể tích khối nón (N) là $V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi.\left(\sqrt{3}\right)^2.3 = 3\pi$. Do đó $\frac{V_1}{V_2} = \frac{32}{9}$.

Câu 16. **(Mã 104 2017)** Cho mặt cầu (S) tâm O, bán kính $R = 3$. Mặt phẳng (P) cách O một khoảng bằng 1 và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có tâm H. Gọi T là giao điểm của tia HO với (S), tính thể tích V của khối nón có đỉnh T và đáy là hình tròn (C).

A. $V=\dfrac{32\pi}{3}$ **B.** $V=16\pi$ **C.** $V=\dfrac{16\pi}{3}$ **D.** $V=32\pi$

Lời giải

Chọn A



Gọi r là bán kính đường tròn (C) thì r là bán kính đáy của hình nón ta có: $r^2=R^2-OH^2=8$;

$HT=HO+OT=1+3=4=h$ là chiều cao của hình nón.

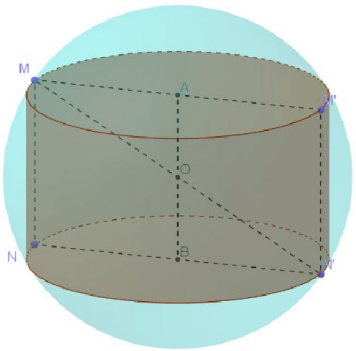
Suy ra: $V_n=\dfrac{1}{3}.h.S_{(C)}=\dfrac{1}{3}.4.\pi.8=\dfrac{32\pi}{3}$.

Câu 17. Một hình trụ có hai đường tròn đáy nằm trên một mặt cầu bán kính R và có đường cao bằng bán kính mặt cầu. Diện tích toàn phần của hình trụ đó bằng

A. $\dfrac{\left(3+2\sqrt{3}\right)\pi R^2}{3}$. **B.** $\dfrac{\left(3+2\sqrt{3}\right)\pi R^2}{2}$. **C.** $\dfrac{\left(3+2\sqrt{2}\right)\pi R^2}{2}$. **D.** $\dfrac{\left(3+2\sqrt{2}\right)\pi R^2}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Đường cao hình trụ $h=R$ nên ta có bán kính của đáy hình trụ $r=\sqrt{R^2-\dfrac{R^2}{4}}=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

$S_{xq}=2\pi rh=2\pi\dfrac{R\sqrt{3}}{2}R=\pi R^2\sqrt{3}$.

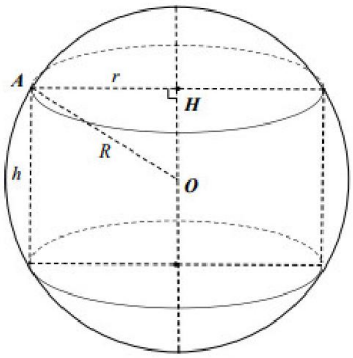
Vậy $S_{tp}=S_{xq}+2S_{đáy}=\pi R^2\sqrt{3}+2\pi\left(\dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{\left(3+2\sqrt{3}\right)\pi R^2}{2}$.

Câu 18. **(Mã 110 2017)** Cho mặt cầu (S) có bán kính bằng 4, hình trụ (H) có chiều cao bằng 4 và hai đường tròn đáy nằm trên (S). Gọi V_1 là thể tích của khối trụ (H) và V_2 là thể tích của khối cầu (S). Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$

A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{9}{16}$ **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{3}{16}$

Lời giải

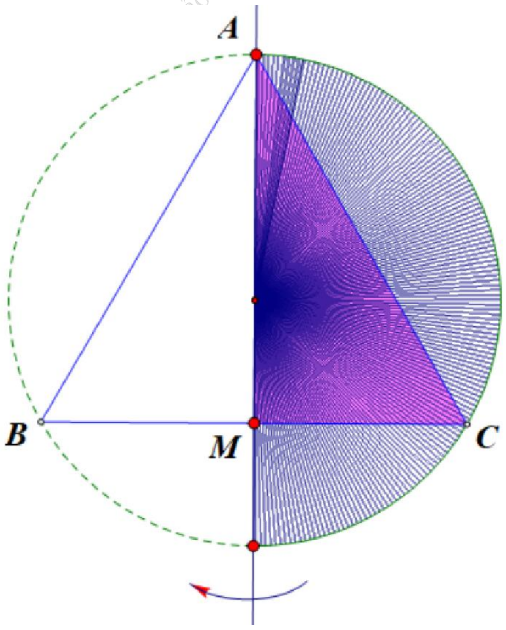
Chọn A



Ta có $r=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$. Thể tích của khối trụ (H) là $V_1=\pi r^2 h=\pi.12.4=48\pi$.

Thể tích của khối cầu (S) là $V_2=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi.4^3=\frac{256\pi}{3}$. Vậy $\frac{V_1}{V_2}=\frac{9}{16}$.

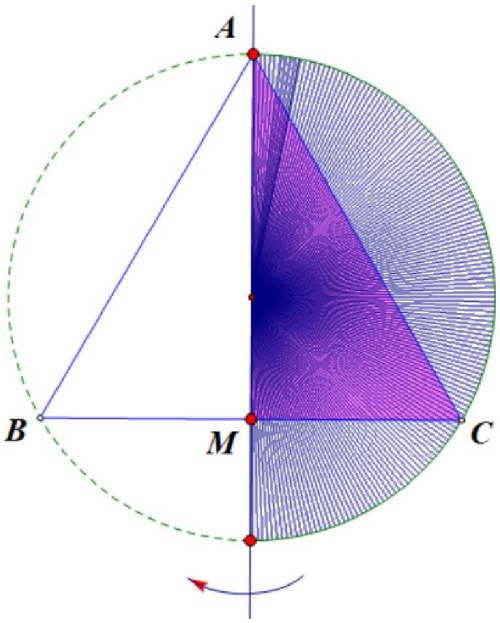
Câu 19. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm I đường kính AA', M là trung điểm BC. Khi quay tam, giác ABM với nữa hình tròn đường kính AA' xung quanh đường thẳng AM (như hình vẽ minh hoạ), ta được khối nón và khối cầu có thể tích lần lượt V_1, V_2. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:



A. $\frac{9}{4}$ **B.** $\frac{4}{9}$ **C.** $\frac{27}{32}$ **D.** $\frac{9}{32}$

Lời giải

Chọn D



Gọi tam giác đều cạnh a. Ta có

$r = \frac{a}{2}$ là bán kính đường tròn đáy của khối nón.

$R = \frac{2}{3}.\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ là bán kính khối cầu.

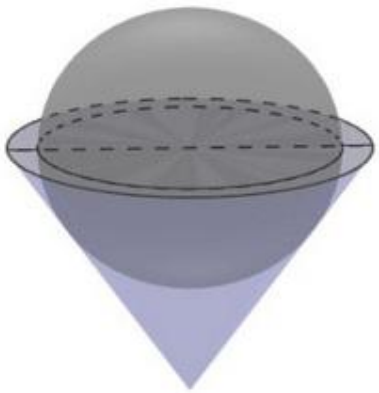
$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2.\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{24}$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27}$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{32}$$

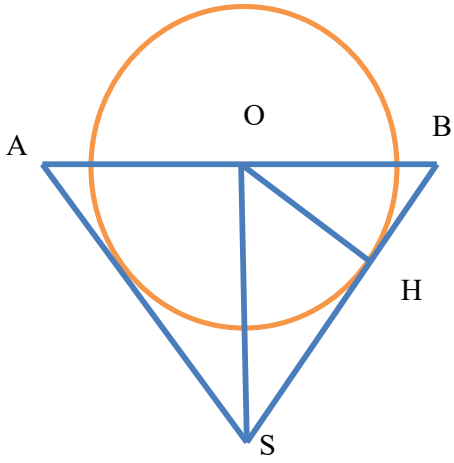
Nguyễn Bảo Vương

Câu 20. **(Chuyên ĐHSP Hà Nội 2019)** Một bình đựng nước dạng hình nón (không có đáy), đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $18\pi\,\text{dm}^3$. Biết rằng khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa của khối cầu chìm trong nước (hình bên). Thể tích V của nước còn lại trong bình bằng



A. $24\pi\,\text{dm}^3$. **B.** $6\pi\,\text{dm}^3$. **C.** $54\pi\,\text{dm}^3$. **D.** $12\pi\,\text{dm}^3$.

Lời giải



Đường kính của khối cầu bằng chiều cao của bình nước nên $OS = 2OH$.
Ta có thể tích nước tràn ra ngoài là thể tích của nửa quả cầu chìm trong bình nước:

$18\pi = \frac{V_C}{2} = \frac{2\pi OH^3}{3} \Leftrightarrow OH = 3.$

Lại có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow OB^2 = 12.$

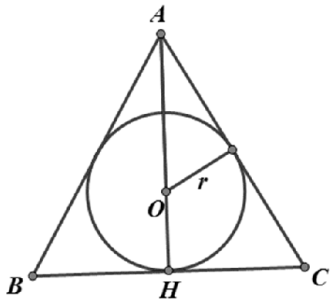
Thể tích bình nước (thể tích nước ban đầu): $V_n = \frac{\pi.OS.OB^2}{3} = 24\pi \ \left(\text{dm}^3\right).$

Thể tích nước còn lại là: $24\pi - 18\pi = 6\pi \ \left(\text{dm}^3\right).$

Câu 21. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Cho tam giác đều ABC có đường tròn nội tiếp $(O;r)$, cắt bỏ phần hình tròn và cho hình phẳng thu được quay quanh AO. Tính thể tích khối tròn xoay thu được theo r.

A. $\frac{5}{3}\pi r^3.$ **B.** $\frac{4}{3}\pi r^3.$ **C.** $\pi r^3\sqrt{3}.$ **D.** $\pi r^3.$

Lời giải



Gọi H là chân đường cao AH của tam giác ABC

Vì tam giác ABC đều nên ta có: $AH = 3OH = 3r$, $AH = BC\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow BC = \frac{2}{\sqrt{3}}AH = r2\sqrt{3}$

Khi quay tam giác ABC quanh trục AO ta được hình nón có thể tích là: V_N, có đáy là đường tròn đường kính BC khi đó: $S_N = \pi HC^2 = \pi r^2 3$, chiều cao của hình nón là: $AH = 3r$, khi đó thể tích hình nón là: $V_N = \frac{1}{3}AH.S_N = \frac{1}{3}3r.\pi r^2 3 = 3\pi r^3$ (đvtt)

Thể tích khối cầu khi quay hình tròn $(O;r)$ quanh trục AO là: $V_C = \frac{4}{3}\pi r^3$

Vậy thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay tam giác ABC đã cắt bỏ phần hình tròn quanh trục AO là: $V = V_N - V_C = 3\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{5}{3}\pi r^3$

Câu 22. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho một cái bình hình trụ có bán kính đáy bằng R và có 4 quả cam hình cầu, trong đó có 3 quả cam có cùng bán kính và một quả cam cùng bán kính với đáy bình. Lần lượt bỏ vào bình 3 quả cam cùng bán kính sao cho chúng đôi một tiếp xúc với nhau, mỗi quả cam đều tiếp xúc với với đáy bình và tiếp xúc với một đường sinh của bình; Bỏ tiếp quả cam thứ tư còn lại vào bình và tiếp xúc với mặt nắp của bình. Chiều cao của bình bằng

A. $R\left(\sqrt{2\sqrt{3}-3}+1\right)^2$. **B.** $R\left(\sqrt{2\sqrt{3}-3}-1\right)^2$.

C. $R\left(\sqrt{2\sqrt{3}+3}+1\right)^2$. **D.** $R\left(\sqrt{2\sqrt{3}+3}-1\right)^2$.

Lời giải

Gọi A,B,C là tâm ba quả cam có cùng bán kính r. K là tâm quả cam có bán kính R. IJ là chiều cao của hình trụ.

Khi đó $OA = \frac{2}{3}.\frac{2r\sqrt{3}}{2} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$. Do ba quả cam tiếp xúc với ba đường sinh của hình trụ nên ta có

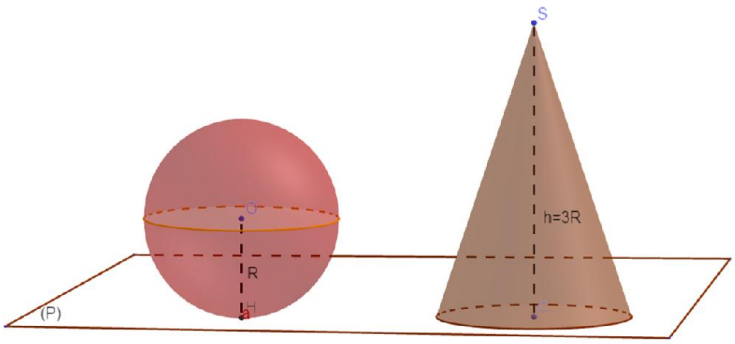
$R = OA + r = \frac{2r\sqrt{3}}{3} + r \Rightarrow r = R\left(2\sqrt{3}-3\right)$ và $OA = 2R\left(2-\sqrt{3}\right)$.

Do quả cam có bán kính R tiếp xúc với ba quả cam có bán kính r nên khoảng cách từ tâm K đến mặt phẳng (ABC) là $OK = \sqrt{KA^2 - OA^2} = \sqrt{(R+r)^2 - \left(2R\left(2-\sqrt{3}\right)\right)^2} = 2R\sqrt{2\sqrt{3}-3}$.

Vậy chiều cao của hình trụ là

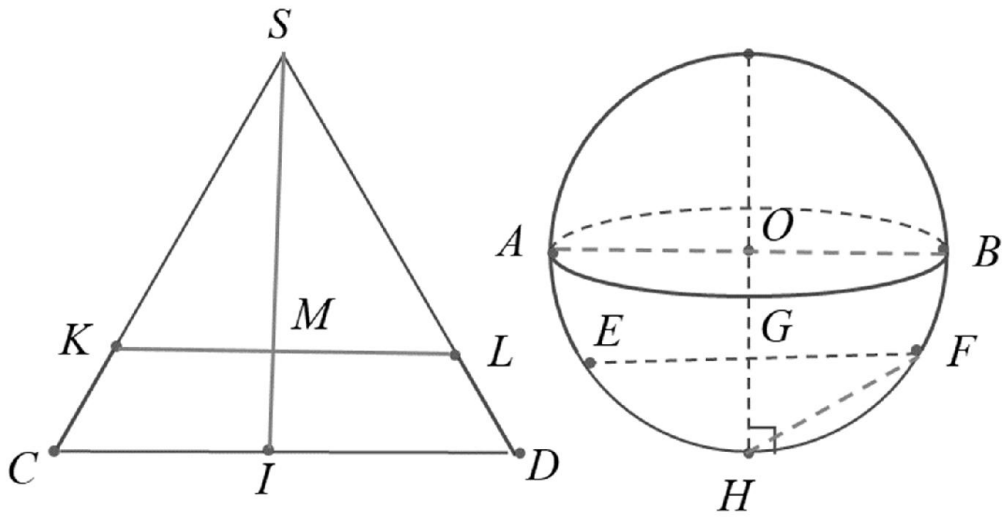
$$IJ = IO + OK + KJ = R\left(2\sqrt{3}-3\right) + 2R\sqrt{2\sqrt{3}-3} + R = R\left(\sqrt{2\sqrt{3}-3}+1\right)^2.$$

Câu 23. **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Cho hình cầu tâm O bán kính $R = 5$, tiếp xúc với mặt phẳng (P). Một hình nón tròn xoay có đáy nằm trên (P), có chiều cao $h = 15$, có bán kính đáy bằng R. Hình cầu và hình nón nằm về một phía đối với mặt phẳng (P). Người ta cắt hai hình đó bởi mặt phẳng (Q) song song với (P) và thu được hai thiết diện có tổng diện tích là S. Gọi x là khoảng cách giữa (P) và (Q), $(0 < x \le 5)$. Biết rằng S đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{a}{b}$ (phân số $\frac{a}{b}$ tối giản). Tính giá trị $T = a + b$.



A. $T = 17$ **B.** $T = 19$ **C.** $T = 18$ **D.** $T = 23$

Lời giải



Gọi G là tâm của thiết diện cắt bởi mặt phẳng (Q) và mặt cầu.

Theo giả thiết ta có $OA=OB=OH=R=5$ và $HG=x$. GF là bán kính của đường tròn thiết diện. Khi đó $GF=\sqrt{5^2-(5-x)^2}=\sqrt{10x-x^2}$.

Gọi S_1 là tâm của thiết diện cắt bởi mặt phẳng (Q) và mặt cầu.

Gọi M là tâm của thiết diện cắt bởi (Q) và hình nón. Theo giả thiết ta có $MI=x$ và $\frac{SM}{SI}=\frac{ML}{ID}\Rightarrow ML=\frac{SM.ID}{SI}=\frac{(15-x)5}{15}=5-\frac{x}{3}$.

Gọi S_2 là diện tích thiết diện của mặt phẳng (Q) và hình nón.

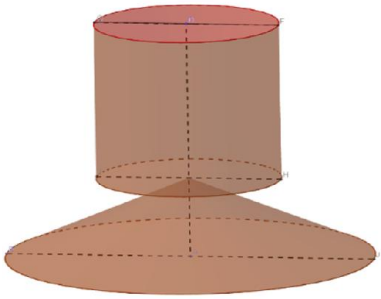
Ta có $S_2=\pi\left(5-\frac{x}{3}\right)^2$

Vậy $S=S_1+S_2=\pi\left[10x-x^2+\left(5-\frac{x}{3}\right)^2\right]=\pi\left(-\frac{8}{9}x^2+\frac{20}{3}x+25\right)$

S đạt giá trị lớn nhất khi $f(x)=-\frac{8}{9}x^2+\frac{20}{3}x+25$ đạt giá khi lớn nhất $\Leftrightarrow x=\frac{15}{4}$.

Theo đề ra ta có $x=\frac{a}{b}=\frac{15}{4}\Rightarrow T=a+b=19$

Câu 24. **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Một khối đồ chơi gồm một khối hình trụ (T) gắn chồng lên một khối hình nón (N), lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_2=2r_1$, $h_1=2h_2$ (hình vẽ). Biết rằng thể tích của khối nón (N) bằng 20cm^3. Thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng



A. $140\,\text{cm}^3$ **B.** $120\,\text{cm}^3$ **C.** $30\,\text{cm}^3$ **D.** $50\,\text{cm}^3$

Lời giải

Ta có thể tích khối trụ là $V_1 = \pi.r_1^2.h_1$, mà $r_2 = 2r_1,\ h_1 = 2h_2$

$V_1 = \pi.\left(\frac{r_2}{2}\right)^2.2h_2 = \frac{1}{2}\pi.r_2^2h_2$.

Mặt khác thể tích khối nón là $V_2 = \frac{1}{3}\pi.r_2^2h_2 = 20 \Rightarrow \pi.r_2^2h_2 = 60\ \left(\text{cm}^3\right)$.

Suy ra $V_1 = \frac{1}{2}.60 = 30\ \text{cm}^3$.

Vậy thể tích toàn bộ khối đồ chơi bằng $V_1 + V_2 = 30 + 20 = 50\ \text{cm}^3$.

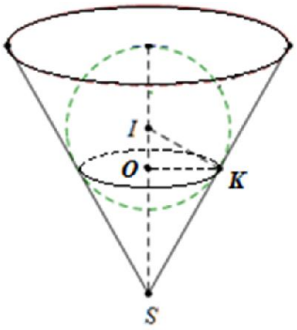
Câu 25. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng -2019)** Thả một quả cầu đặc có bán kính 3 $\left(\text{cm}\right)$ vào một vật hình nón (có đáy nón không kín) (như hình vẽ bên). Cho biết khoảng cách từ tâm quả cầu đến đỉnh nón là 5 $\left(\text{cm}\right)$. Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) phần không gian kín giới hạn bởi bề mặt quả cầu và bề mặt trong của vật hình nón.



A. $\frac{12\pi}{5}$. **B.** $\frac{14\pi}{5}$. **C.** $\frac{16\pi}{5}$. **D.** $\frac{18\pi}{5}$.

Lời giải

Xét hình nón và quả cầu như hình vẽ bên dưới.



$OI = \frac{IK^2}{SI} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5}\ \left(\text{cm}\right)$.

Thể tích chỏm cầu tâm I có bán kính OK là:

$$V_2=\pi.(IK-OI)^2.\left(IK-\frac{IK-OI}{3}\right)=\pi.\left(3-\frac{9}{5}\right)^2.\left(3-\frac{3-\frac{9}{5}}{3}\right)=\frac{468\pi}{125}\ (\text{cm}^3).$$

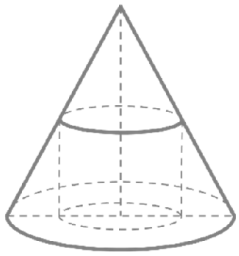
Thể tích hình nón có đỉnh S, đáy hình tròn tâm O, bán kính đáy OK là:

$$V_1=\frac{1}{3}.SO.S_{(O;OK)}\ \frac{1}{3}.\frac{16}{5}.\pi\left(\frac{12}{5}\right)^2=\frac{768\pi}{125}\ (\text{cm}^3).$$

Thể tích phần không gian kín giới hạn bởi bề mặt quả cầu và bề mặt trong của vật hình nón là:

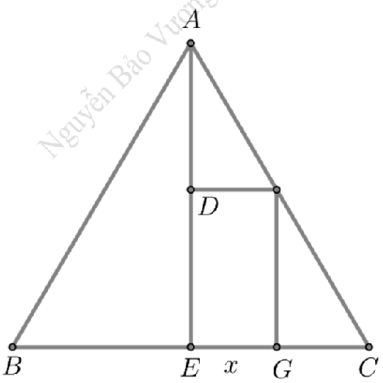
$$V_1-V_2=\frac{768\pi}{125}-\frac{468\pi}{125}=\frac{12\pi}{5}\ (\text{cm}^3).$$

Câu 26. **(Sở Hà Nội 2019)** Cho hình nón có chiều cao $2R$ và bán kính đáy là R. Xét hình trụ nội tiếp hình nón sao cho thể tích trụ lớn nhất. Khi đó bán kính đáy của trụ là



A. $\frac{2R}{3}$. **B.** $\frac{R}{3}$. **C.** $\frac{3R}{4}$. **D.** $\frac{R}{2}$.

Lời giải



Nguyễn Bảo Vương

Gọi D,E lần lượt là tâm đáy nhưu hình vẽ. Đặt bán kính đáy là $r=x\in(0;R)$.

Ta có $\frac{GC}{CE}=\frac{FG}{AE}\Rightarrow\frac{R-x}{R}=\frac{FG}{2R}\Rightarrow FG=2(R-x)=h$

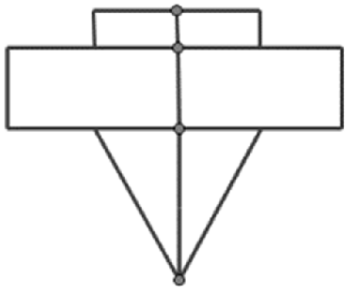
Ta có thể tích trụ là:

$$V=\pi r^2h=2\pi x^2(R-x)=8\pi.\frac{x}{2}.\frac{x}{2}(R-x)\le 8\pi\left(\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+R-x}{3}\right)^3=\frac{8\pi R^3}{27}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x}{2}=R-x\Leftrightarrow x=\frac{2R}{3}$.

Câu 27. **(Thanh Tường Nghệ An -2019)** Một con xoay được thiết kế gồm hai khối trụ (T_1), (T_2) chồng lên khối nón (N)(*Tham khảo mặt cắt ngang qua trục như hình vẽ*). Khối trụ (T_1) có bán kính đáy $r(cm)$, chiều cao $h_1(cm)$. Khối trụ (T_2) có bán kính đáy $2r(cm)$, chiều cao $h_2=2h_1(cm)$. Khối

nón (N) có bán kính đáy $r(cm)$, chiều cao $h_n = 4h_1(cm)$. Biết rằng thể tích toàn bộ con xoay bằng $31(cm^3)$. Thể tích khối nón (N) bằng



A. $5(cm^3)$. **B.** $3(cm^3)$. **C.** $4(cm^3)$. **D.** $6(cm^3)$.

Lời giải

Theo bài ta có $h_n = 4h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{1}{4}h_n;\ h_2 = 2h_1 = \frac{1}{2}h_n$.

Thể tích toàn bộ con xoay là

$$V = V_{(T_1)} + V_{(T_2)} + V_{(N)} = \pi.r^2.h_1 + \pi.(2r)^2.h_2 + \frac{1}{3}\pi.r^2.h_n$$

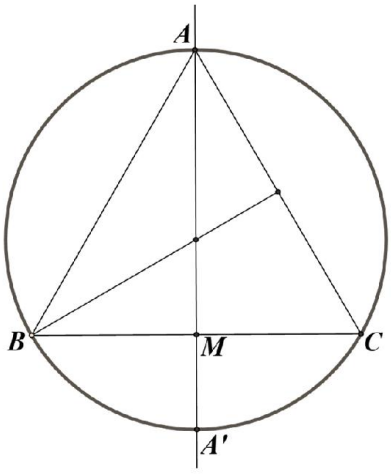
$$\Leftrightarrow 31 = \pi.r^2.\frac{1}{4}h_n + \pi.4r^2.\frac{1}{2}h_n + \frac{1}{3}\pi.r^2.h_n$$

$$\Leftrightarrow 31 = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\pi.r^2.h_n\right) + 6\left(\frac{1}{3}\pi.r^2.h_n\right) + \frac{1}{3}\pi.r^2.h_n \Leftrightarrow 31 = \frac{31}{4}\left(\frac{1}{3}\pi.r^2.h_n\right) \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi.r^2.h_n = 4$$

Vậy thể tích khối nón (N) là: $V_{(N)} = 4(cm^3)$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 28. Cho tam giác đều ABC có đỉnh $A(5;5)$ nội tiếp đường tròn tâm I đường kính AA', M là trung điểm BC. Khi quay tam giác ABM cùng với nửa hình tròn đường kính AA' xung quanh đường thẳng AM (như hình vẽ minh họa), ta được khối nón và khối cầu có thể tích lần lượt là V_1 và V_2.



Tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{9}{32}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\frac{27}{32}$. **D.** $\frac{4}{9}$.

Lời giải

Gọi độ dài cạnh của tam giác ABC là a.

Khi đó khối nón tạo thành có bán kính đáy là: $r = BM = \frac{a}{2}$; chiều cao $h = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Thể tích khối nón là $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}.\pi.\left(\frac{a}{2}\right)^2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$

Khối cầu tạo thành có bán kính là $R = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Thể tích khối cầu là: $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}.\pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27}$

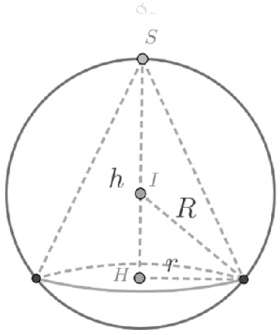
Suy ra: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24} : \frac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27} = \frac{9}{32}$.

Câu 29. **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho mặt cầu tâm O bán kính R. Xét mặt phẳng (P) thay đổi cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C). Hình nón (N) có đỉnh S nằm trên mặt cầu, có đáy là đường tròn (C) và có chiều cao $h(h > R)$. Tính h để thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) có giá trị lớn nhất.

A. $h = \sqrt{2}R$ **B.** $h = \frac{4R}{3}$ **C.** $h = \frac{3R}{2}$ **D.** $h = \sqrt{3}R$

Lời giải

Chọn B



Cách 1:

Gọi I là tâm mặt cầu và H, r là tâm và bán kính của (C).

Ta có $IH = h - R$ và $r^2 = R^2 - IH^2 = R^2 - (h-R)^2 = 2Rh - h^2$.

Thể tích khối nón $V = \frac{1}{3}h\pi r^2 = \frac{\pi}{3}h(2Rh - h^2)$.

Ta có $h \cdot h \cdot (4R - 2h) \le \left(\frac{h + h + 4R - 2h}{3}\right)^3 = \left(\frac{4R}{3}\right)^3 \Rightarrow h^2(2R - h) \le \frac{1}{2}\left(\frac{4R}{3}\right)^3$.

Do đó V lớn nhất khi $h = 4R - 2h \Leftrightarrow h = \frac{4R}{3}$.

Cách 2:

Gọi I là tâm mặt cầu và H, r là tâm và bán kính của (C).

Ta có $IH = h - R$ và $r^2 = R^2 - IH^2 = R^2 - (h-R)^2 = 2Rh - h^2$.

Thể tích khối nón $V = \frac{1}{3}h\pi r^2 = \frac{\pi}{3}h(2Rh - h^2) = \frac{\pi}{3}.(2h^2R - h^3)$

Xét hàm $f(h)=-h^3+2h^2R,\ h\in(R,2R)$, có $f'(h)=-3h^2+4hR$.

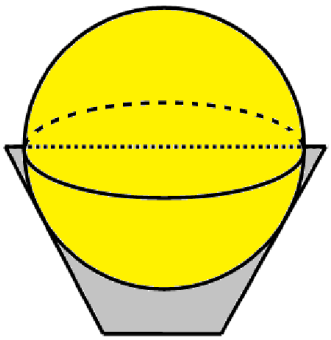
$f'(h)=0\Leftrightarrow -3h^2+4hR=0\Leftrightarrow h=0$ hoặc $h=\dfrac{4R}{3}$.

Bảng biến thiên

h	R		$\dfrac{4R}{3}$		$2R$
$f'(h)$		$+$	0	$-$	
$f(h)$		↗	$\dfrac{32R^3}{27}$	↘	

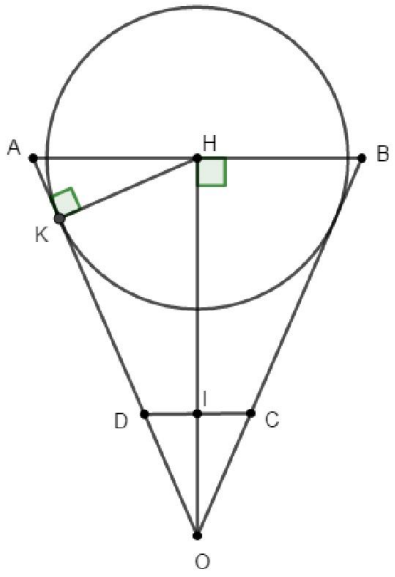
$\max f(h)=\dfrac{32}{27}R^3$, tại $h=\dfrac{4R}{3}$. Vậy thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) có giá trị lớn nhất là $V=\dfrac{1}{3}\pi\dfrac{32}{27}R^3=\dfrac{32}{81}\pi R^3$ khi $h=\dfrac{4R}{3}$.

Câu 30. **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Một cái thùng đựng đầy nước được tạo thành từ việc cắt mặt xung quanh của một hình nón bởi một mặt phẳng vuông góc với trục của hình nón. Miệng thùng là đường tròn có bán kính bằng ba lần bán kính mặt đáy của thùng. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng $\dfrac{3}{2}$ chiều cao của thùng nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $54\sqrt{3}\pi$ (dm^3). Biết rằng khối cầu tiếp xúc với mặt trong của thùng và đúng một nửa của khối cầu đã chìm trong nước (hình vẽ). Thể tích nước còn lại trong thùng có giá trị nào sau đây?



A. $\dfrac{46}{5}\sqrt{3}\pi$ (dm^3). **B.** $18\sqrt{3}\pi$ (dm^3). **C.** $\dfrac{46}{3}\sqrt{3}\pi$ (dm^3). **D.** 18π (dm^3).

Lời giải



Gọi R là bán kính của khối cầu. Khi đó thể tích nước tràn ra ngoài là thể tích của một nửa khối cầu nên $\frac{1}{2}.\frac{4}{3}\pi R^3 = 54\sqrt{3}\pi \Leftrightarrow R = 3\sqrt{3}$.

Do đó chiều cao của thùng nước là $h = \frac{2}{3}.2R = 4\sqrt{3}$.

Cắt thùng nước bởi thiết diện qua trục ta được hình thang cân $ABCD$ với $AB = 3CD$. Gọi O là giao điểm của AD và BC thì tam giác OAB cân tại O.

Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB và I là giao điểm của OH và $CD \to I$ là trung điểm của DC nên $DI = \frac{1}{3}AH$.

Ta có $\frac{OI}{OH} = \frac{DI}{AH} = \frac{1}{3} \to OH = \frac{3}{2}HI = 6\sqrt{3}$

Gọi K là hình chiếu của H trên OA thì $HK = R = 3\sqrt{3}$

Tam giác OHA vuông tại H có đường cao HK nên

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HO^2} + \frac{1}{AH^2} \to \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{HK^2} - \frac{1}{HO^2} = \frac{1}{36} \to AH = 6 \to DI = 2$$

Thể tích thùng đầy nước là $\frac{h\pi\left(AH^2 + DI^2 + AH.DI\right)}{3} = \frac{4\sqrt{3}\pi\left(6^2 + 2^2 + 6.2\right)}{3} = \frac{208\sqrt{3}\pi}{3}$

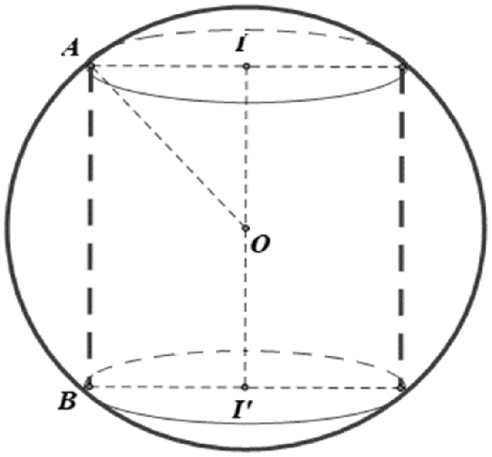
Do đó thể tích nước còn lại là $\frac{208\sqrt{3}\pi}{3} - 54\sqrt{3}\pi = \frac{46\sqrt{3}\pi}{3}\left(dm^3\right)$.

Câu 31. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương - 2019)** Chiều cao của khối trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong hình cầu có bán kính R là

A. $\frac{4R\sqrt{3}}{3}$. **B.** $R\sqrt{3}$. **C.** $\frac{R\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Gọi O là tâm hình cầu bán kính R và I, I' lần lượt là tâm hai hình tròn đáy của khối trụ với AB là một đường cao của khối trụ như hình vẽ.



Dễ thấy O là trung điểm II'.

Đặt x là chiều cao của khối trụ ta có $0<x<2R$ và $AB=II'=x$

Tam giác OAI có $AI=\sqrt{AO^2-OI^2}=\sqrt{R^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{R^2-\frac{x^2}{4}}$.

Thể tích khối trụ là $f(x)=\pi IA^2.AB=\pi\left(R^2-\frac{x^2}{4}\right)x=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{4}\right)$.

$f'(x)=\pi\left(R^2-\frac{3}{4}x^2\right)$, $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{2R\sqrt{3}}{3}\\x=-\frac{2R\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$ với $x>0$ nên $x=\frac{2R\sqrt{3}}{3}\in(0;2R)$

Ta có bảng biến thiên:

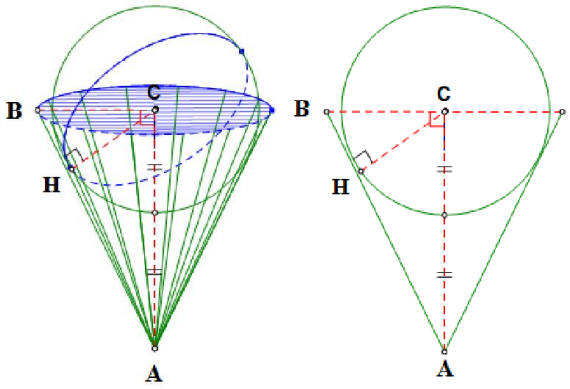
x	0		$\frac{2R\sqrt{3}}{3}$		$2R$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

Từ bảng biến thiên ta thấy thể tích khối trụ lớn nhất khi chiều cao $x=\frac{2R\sqrt{3}}{3}$

Câu 32. Một bình đựng nước dạng hình nón (không có đáy) đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $18\pi\ dm^3$.Biết khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa khối cầu chìm trong nước. Tính thể tích nước còn lại trong bình.

A. $27\pi\ dm^3$. **B.** $6\pi\ dm^3$. **C.** $9\pi\ dm^3$. **D.** $24\pi\ dm^3$.

Lời giải



Vì đúng một nửa khối cầu chìm trong nước nên thể tích khối cầu gấp 2 lần thể tích nước tràn ra ngoài.

Gọi bán kính khối cầu là R, lúc đó: $\frac{4}{3}\pi R^3=36\pi \Leftrightarrow R^3=27$.

Xét tam giác ABC có AC là chiều cao bình nước nên $AC=2R$ (Vì khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước)

Trong tam giác ABC có: $\frac{1}{CH^2}=\frac{1}{CA^2}+\frac{1}{CB^2}\Leftrightarrow\frac{1}{R^2}=\frac{1}{4R^2}+\frac{1}{CB^2}\Leftrightarrow CB^2=\frac{4R^2}{3}$.

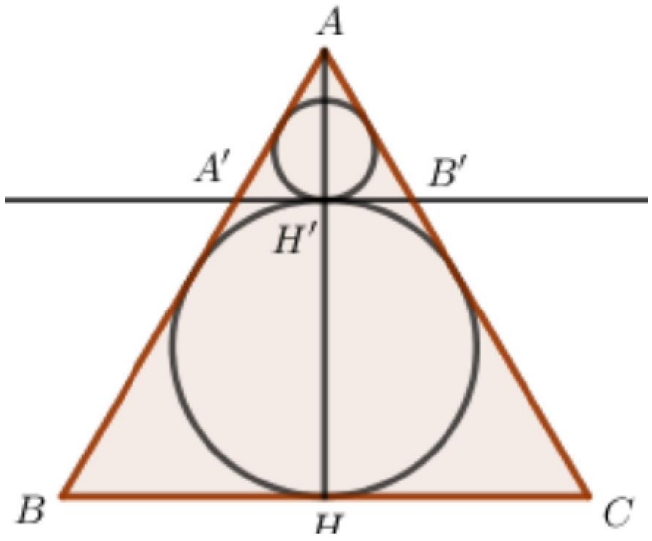
Thể tích khối nón: $V_n=\frac{1}{3}\pi.CB^2.AC=\frac{1}{3}\pi.\frac{4R^2}{3}.2R=\frac{8\pi}{9}.R^3=24\pi\ dm^3$.

Vậy thể tích nước còn lại trong bình: $24\pi-18\pi=6\pi\ dm^3$

Câu 33. **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Cho khối nón có độ lớn góc ở đỉnh là $\frac{\pi}{3}$. Một khối cầu (S_1) nội tiếp trong khối nối nón. Gọi (S_2) là khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của nón và với S_1 ; S_3 là khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của khối nón và với S_2 ;… ; S_n là khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của nón và với S_{n-1}. Gọi $V_1, V_2,\ldots,V_{n-1},V_n$ lần lượt là thể tích của khối cầu $S_1, S_2, S_3,...,S_n$ và V là thể tích của khối nón. Tính giá trị của biểu thức $T=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{V_1+V_2+...+V_n}{V}$

A. $T=\frac{3}{5}$. **B.** $T=\frac{6}{13}$. **C.** $T=\frac{7}{9}$. **D.** $T=\frac{1}{2}$.

Lời giải



Thiết diện qua trục của hình nón là một tam giác đều cạnh l. Do đó bán kính đường tròn nội tiếp tam giác cũng chính là bán kính mặt cầu nội tiếp chọp là $r_1 = \frac{1}{3}\frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{6}$

Áp dụng định lí Ta-Let ta có:

$$\frac{AA'}{AB} = \frac{AH'}{AH} = \frac{AH - HH'}{AH} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2} - \frac{l\sqrt{3}}{3}}{\frac{l\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{3} \Rightarrow AA' = \frac{1}{3}$$

Tương tự ta tìm được $r_2 = \frac{l}{3}.\frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{l\sqrt{3}}{18} = \frac{r_1}{3}.$

Tiếp tục như vậy ta có $r_3 = \frac{1}{3}r_2,\ \mathrm{r}_4 = \frac{1}{3}\mathrm{r}_3, ..., r_n = \frac{1}{3}r_{n-1}$

Ta có $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3,\ V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{r_1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3^3}\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_3 = \frac{1}{\left(3^3\right)^2}\mathrm{V}_1, ..., V_n = \frac{4}{3}\pi r_{n-1}^3 = \frac{1}{\left(3^3\right)^{n-1}}V_1$

Do đó $T = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{V_1 + V_2 + ... + V_n}{V} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{V_1\left[1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{\left(3^3\right)^2} + ... + \frac{1}{\left(3^3\right)^{n-1}}\right]}{V} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{V_1.S}{V}$

Đặt $S = 1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{\left(3^3\right)^2} + ... + \frac{1}{\left(3^3\right)^{n-1}}$

Đây là tổng của CSN lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{3^3} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S = \frac{1}{1 - \frac{1}{3^3}} = \frac{27}{26}$

$$\Rightarrow V_1 + V_2 + ... + V_n = \frac{27}{26}V_1 = \frac{27}{26}\frac{4}{3}\pi\left(\frac{l\sqrt{3}}{6}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{52}\pi l^3$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2\frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi l^3}{24}$$

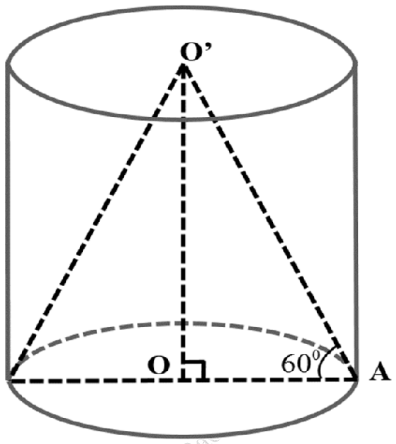
Vậy $T=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{52}\pi l^3}{\dfrac{\sqrt{3}}{24}\pi l^3}=\dfrac{6}{13}$

Câu 34. **(Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), bán kính bằng a. Một hình nón có đỉnh là O' và có đáy là hình tròn (O). Biết góc giữa đường sinh của hình nón với mặt đáy bằng 60^0, tỉ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi A là điểm thuộc đường tròn (O).

Góc giữa $O'A$ và mặt phẳng đáy là góc $\widehat{O'AO}$. Theo giả thiết ta có $\widehat{O'AO}=60°$.

Xét tam giác $O'OA$ vuông tại O, ta có:

$\tan\widehat{O'AO}=\dfrac{O'O}{OA}\Rightarrow O'O=a.\tan 60°=a\sqrt{3}$.

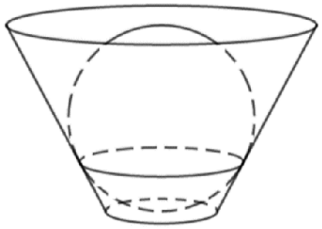
+ $\cos\widehat{O'AO}=\dfrac{OA}{O'A}\Rightarrow O'A=\dfrac{a}{\cos 60°}=2a$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq(T)}=2\pi.OA.O'O=2\pi.a.a\sqrt{3}=2\pi a^2\sqrt{3}$.

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq(N)}=\pi.OA.O'A=\pi.a.2a=2\pi a^2$

$\Rightarrow\dfrac{S_{xq(T)}}{S_{xq(N)}}=\dfrac{2\pi a^2\sqrt{3}}{2\pi a^2}=\sqrt{3}$.

Câu 35. **(Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Cho một chiếc cốc có dạng hình nón cụt và một viên bi có đường kính bằng chiều cao của cốc. Đổ đầy nước rồi thả viên bi vào, ta thấy lượng nước tràn ra bằng một phần ba lượng nước đổ vào cốc lúc ban đầu. Biết viên bi tiếp xúc với đáy cốc và thành cốc. Tìm tỉ số bán kính của miệng cốc và đáy cốc (bỏ qua độ dày của cốc).



A. $\frac{5+\sqrt{21}}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\sqrt{21}$. **D.** $\frac{21+\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

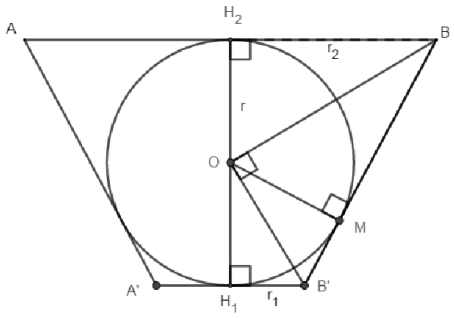
Gọi bán kính viên bi là r; bán kính đáy cốc, miệng cốc lần lượt là r_1, r_2, $(r_1 < r_2)$. Theo giả thiết thì chiều cao của cốc là $h = 2r$.

Thể tích viên bi là $V_B = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Thể tích cốc là $V_C = \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\right) = \frac{2}{3}\pi r\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\right)$.

Theo giả thiết thì $V_B = \frac{1}{3}V_C \Leftrightarrow 6r^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2$ (1).

Mặt cắt chứa trục của cốc là hình thang cân $ABB'A'$. Đường tròn tâm $(O;r)$ là đường tròn lớn của viên bi, đồng thời là đường tròn nội tiếp hình thang $ABB'A'$, tiếp xúc với $A'B', AB$ lần lượt tại H_1, H_2 và tiếp xúc với BB' tại M.



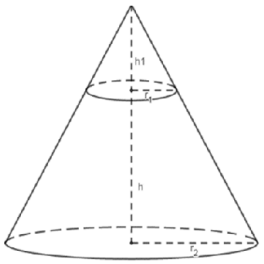
Dễ thấy tam giác BOB' vuông tại O.

Ta có $OM^2 = MB.MB' \Leftrightarrow r^2 = r_1 r_2$ (2).

Thay (2) vào (1) ta được $6r_1 r_2 = r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2 \Leftrightarrow \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 5\frac{r_2}{r_1} + 1 = 0$.

Giải phương trình với điều kiện $\frac{r_2}{r_1} > 1$ ta được $\frac{r_2}{r_1} = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$.

Chú ý: Chứng minh công thức thể tích hình nón cụt.



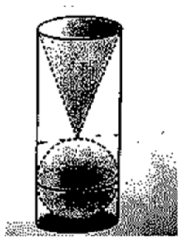
Ta có: $\frac{r_1}{r_2} = \frac{h_1}{h_1 + h} \Leftrightarrow h_1 = \frac{r_1 h}{r_2 - r_1}$.

$V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2.h_1 = \frac{1}{3}\pi h\frac{r_1^3}{r_2 - r_1}$.

$V_2 = \frac{1}{3}\pi r_2^2.(h_1 + h) = \frac{1}{3}\pi h\frac{r_2^3}{r_2 - r_1}$.

$$V = V_2 - V_1 = \frac{1}{3}\pi h \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2 - r_1} = \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\right).$$

Câu 36. **(Đại Học Hà Tĩnh - 2020)** Trên bàn có một cốc nước hình trụ chứa đầy nước có chiều cao bằng 3 lần đường kính của đáy; một viên bi và một khối nón đều bằng thủy tinh. Biết viên bi là một khối cầu có đường kính bằng của cốc nước. Người ta từ từ thả vào cốc nước viên bi và khối nón đó (như hình vẽ) thì thấy nước trong cốc tràn ra ngoài. Tính tỉ số thể tích của lượng nước còn lại trong cốc và lượng nước ban đầu(bỏ qua bề dày của lớp vỏ thủy tinh)



A. $\frac{5}{9}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{4}{9}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi R, h lần lượt là bán kính đáy và là chiều cao của khối trụ

$h = 6R$

Thể tích của khối trụ $V_T = \pi 6R^3$.

Khối cầu bên trong khối trụ có bán kính R nên khối cầu có thể tích $V_C = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Khối nón bên trong khối trụ có bán kính R và chiều cao $h = 4R$ nên khối nón có thể tích $V_N = \frac{4}{3}\pi R^3$

Thể tích lượng nước còn lại bên trong khối trụ

$V = V_T - \left(V_C + V_N\right) = 6\pi R^3 - \frac{8}{3}\pi R^3 = \frac{10}{3}\pi R^3.$

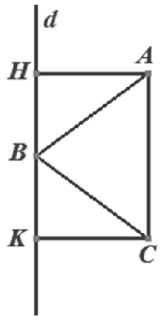
Vậy $\frac{V}{V_T} = \frac{5}{9}$.

Câu 37. **(Sở Ninh Bình 2020)** Cho tam giác vuông cân ABC có $AB = BC = a\sqrt{2}$. Khi quay tam giác ABC quanh đường thẳng đi qua B và song song với AC ta thu được một khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $2\pi a^3$. **B.** $\frac{2\pi a^3}{3}$. **C.** $\frac{4\pi a^3}{3}$. **D.** πa^3.

Lời giải

Chọn C

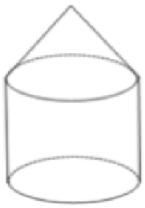


Gọi d là đường thẳng đi qua B và song song với AC; H,K lần lượt là hình chiếu của A,C trên d. Ta có $AC=2a,\ HA=KC=a$.

Khối tròn xoay cần nhận được khi quay tam giác ABC quanh d chính là khối tròn xoay có được bằng cách từ khối trụ với hai đáy là hình tròn (H,HA) và (K,KC) bỏ đi 2 khối nón chung đỉnh B với đáy lần lượt là (H,HA) và (K,KC).

Do đó $V=\pi.HA^2.AC-2.\frac{1}{3}\pi.HA^2.\frac{AC}{2}=2\pi a^3-\frac{2}{3}\pi a^3=\frac{4}{3}\pi a^3$.

Câu 38. **(Sở Yên Bái - 2020)** Một khối đồ chơi gồm một khối trụ và một khối nón có cùng bán kính được chồng lên nhau, độ dài đường sinh khối trụ bằng độ dài đường sinh khối nón và bằng đường kính khối trụ, khối nón (tham khảo hình vẽ). Biết thể tích toàn bộ khối đồ chơi là $50cm^3$, thể tích khối trụ gần với số nào nhất trong các số sau



A. $38,8cm^3$. **B.** $38,2cm^3$. **C.** $36,5cm^3$. **D.** $40,5cm^3$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $l;r$ lần lượt là độ dài đường sinh và bán kính đáy khối trụ.

Khi đó ta có: $l=2r$.

Suy ra thể tích khối trụ là $V_t=\pi r^2 l=2\pi r^3$.

Gọi $h_n;l_n$ lần lượt là chiều cao và đường sinh của khối nón.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} l_n=l \\ h_n=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{3}r \end{cases}$.

Khi đó thể tích khối nón là $V_n=\frac{1}{3}\pi r^2 h_n=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3$.

Do thể tích toàn bộ khối đồ chơi là $50cm^3$ **nên**

$$V_t+V_n=2\pi r^3+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3=\left(2+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\pi r^3=50\Rightarrow \pi r^3=\frac{150}{6+\sqrt{3}}.$$

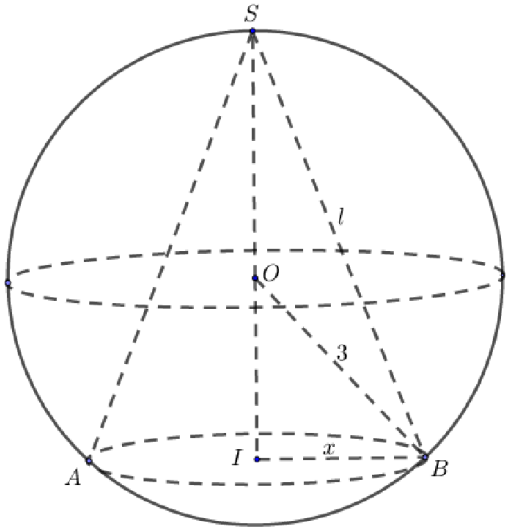
Khi đó thể tích khối trụ là $V_t=\pi r^2 l\ =2\pi r^3\approx 38,8cm^3$.

Câu 39. **(Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Trong tất cả các hình nón nội tiếp trong hình cầu có thể tích bằng 36π, bán kính r của hình nón có diện tích xung quanh lớn nhất là

A. $r=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $r=\dfrac{3}{2}$. **C.** $r=2\sqrt{2}$. **D.** $r=3$.

Lời giải

Chọn C



Vì hình cầu có thể tích là 36π nên bán kính hình cầu là $R=3$.

Ta có diện tích xung quanh của hình nón là $S=\pi rl$.

Để hình nón có diện tích xung quanh lớn nhất thì đỉnh của hình nón và đáy của hình nón phải ở hai phía so với đường tròn kính của hình cầu.

Đặt bán kính đáy hình nón là $r=x$ với $0<x\le 3$ và tâm của đáy hình nón là I.

Ta có tam giác OIB vuông tại I nên $OI=\sqrt{9-x^2}$.

Chiều cao của hình nón là $h=3+\sqrt{9-x^2}$.

Độ dài đường sinh của hình nón là $l=\sqrt{\left(3+\sqrt{9-x^2}\right)^2+x^2}=\sqrt{18+6\sqrt{9-x^2}}$.

Suy ra diện tích xung quanh của hình nón là $S=\pi x\sqrt{18+6\sqrt{9-x^2}}$.

Đặt $P=x\sqrt{18+6\sqrt{9-x^2}}$ nên $P^2=x^2\left(18+6\sqrt{9-x^2}\right)$ và đặt $\sqrt{9-x^2}=t$, $\left(0\le t<3\right)$.

Khi đó $P^2=\left(9-t^2\right)\left(18+6t\right)$ với $0\le t<3$.

Xét hàm số $y=\left(9-t^2\right)\left(18+6t\right)\Leftrightarrow y=-6t^3-18t^2+54t+162$ có

$y'=-18t^2-36t+54=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-3(L)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=\left(9-t^2\right)\left(18+6t\right)$ trên $0\le t<3$.

t	0		1		3
y'		+	0	−	
y	162	↗	192	↘	0

Từ bảng biến thiên, P^2 lớn nhất khi và chỉ khi $t=1$ suy ra P lớn nhất khi và chỉ khi $t=1$.

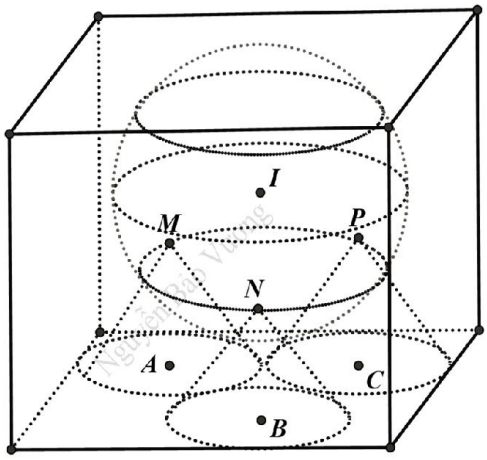
Khi đó $S=\pi x\sqrt{18+6\sqrt{9-x^2}}$ lớn nhất khi $\sqrt{9-x^2}=1\Leftrightarrow x=2\sqrt{2}$ và diện tích xung quanh của mặt cầu khi đó là $S=8\sqrt{3}\pi$.

Câu 40. **(Sở Ninh Bình 2020)** Có một bể hình hộp chữ nhật chứa đầy nước. Người ta cho ba khối nón giống nhau có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân vào bể sao cho ba đường tròn đáy của ba khối nón đôi một tiếp xúc với nhau, một khối nón có đường tròn đáy chỉ tiếp xúc với một cạnh của đáy bể và hai khối nón còn lại có đường tròn đáy tiếp xúc với hai cạnh của đáy bể. Sau đó người ta đặt lên đỉnh của ba khối nón một khối cầu có bán kính bằng $\frac{4}{3}$ lần bán kính đáy của khối nón. Biết khối cầu vừa đủ ngập trong nước và tổng lượng nước trào ra là $\frac{337\pi}{24}$ (lít). Thể tích nước ban đầu ở trong bể thuộc khoảng nào dưới đây (đơn vị tính: lít)?

A. $(150;151)$. **B.** $(151;152)$. **C.** $(139;140)$. **D.** $(138;139)$.

Lời giải

Chọn B



+) Gọi r là bán kính đáy của hình nón suy ra chiều cao nón là $h=r$ (do thiết diện là tam giác vuông cân).

+) Chiều dài của khối hộp là $b=4r$; bán kính của khối cầu là $R=\frac{4}{3}r$.

+) Thể tích nước bị tràn là $3.\frac{1}{3}\pi r^2h+\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{337\pi}{24}\Leftrightarrow\pi r^3+\frac{4}{3}\pi\frac{64}{27}r^3=\frac{337\pi}{24}\Rightarrow r=\frac{3}{2}$(dm).

+) Gọi A,B,C là tâm của 3 đáy của khối nón suy ra ΔABC đều cạnh $2r\Rightarrow R_{ABC}=\frac{2r}{\sqrt{3}}$.

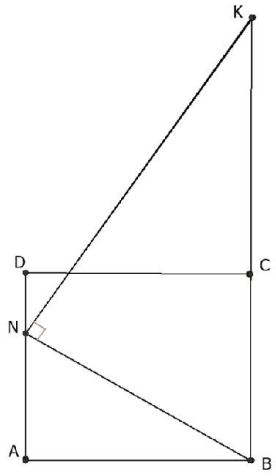
+) Chiều rộng khối hộp là $a=2r+\frac{2r\sqrt{3}}{2}=r(2+\sqrt{3})$ (dm).

+) Ba đỉnh nón chạm mặt cầu tại các điểm $M,N,P\Rightarrow\Delta MNP=\Delta ABC$

$d(I;(MNP))=\sqrt{R^2-R_{(ABC)}^2}$ (với I là tâm mặt cầu), do đó $d(I;(MNP))=\frac{2}{3}r$. Suy ra chiều cao của khối trụ là $c=R+\frac{2}{3}r+r=3r$.

+) Thể tích nước ban đầu là $abc=12(2+\sqrt{3})r^3=12(2+\sqrt{3}).\frac{27}{8}\approx151,1\left(\text{dm}^3\right)=151,1$ (lít).

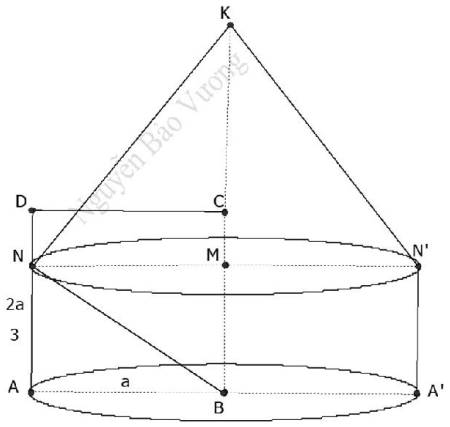
Câu 41. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi N là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AN = 2DN$. Đường thẳng qua N vuông góc với BN cắt BC tại K. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay tứ giác $ANKB$ quanh trục BK là



A. $V = \frac{7}{6}\pi a^3$. **B.** $V = \frac{9}{14}\pi a^3$. **C.** $V = \frac{6}{7}\pi a^3$. **D.** $V = \frac{14}{9}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn A



Dựng đường thẳng qua N vuông góc với BC cắt BC tại M.

Lấy A' đối xứng với A qua B, N' đối xứng với N qua M.

Khối tròn xoay tạo thành khi quay tứ giác $ANKB$ quanh trục BK gồm hai khối là khối nón có đường cao là MK, bán kính đáy là MN và khối trụ có đường cao là MB, bán kính đáy là MN.

Ta có $AN = \frac{2a}{3}$, $AB = a$.

Xét tam giác ABN vuông tại A: $NB = \sqrt{AN^2 + AB^2} = \frac{a\sqrt{13}}{3}$.

Xét tam giác BNK vuông tại N

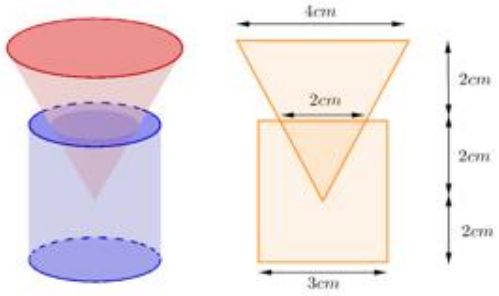
$\frac{1}{NK^2} = \frac{1}{MN^2} - \frac{1}{NB^2} = \frac{4}{13} \Rightarrow NK = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

$BK = \sqrt{NK^2 + BN^2} = \frac{13a}{6}$.

Lại có $MB = AN = \frac{2a}{3}$, $MK = BK - MB = \frac{3a}{2}$.

$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi.MN^2.MK + \pi.MN^2.MB = \frac{7\pi a^3}{6}$.

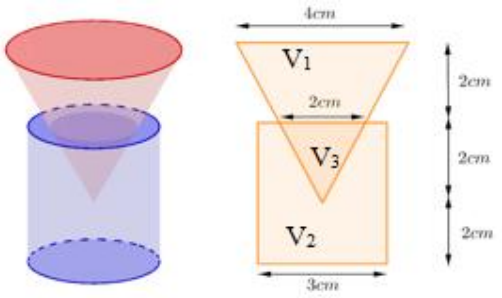
Câu 42. Cho một khối tròn xoay (H), một mặt phẳng chứa trục của (H) cắt (H) theo một thiết diện như trong hình vẽ sau. Tính thể tích của (H) (đơn vị cm^3).



A. $V_{(H)} = 13\pi$. **B.** $V_{(H)} = 23\pi$. **C.** $V_{(H)} = \frac{41\pi}{3}$. **D.** $V_{(H)} = 17\pi$.

Lời giải

Chọn C



Ta có:

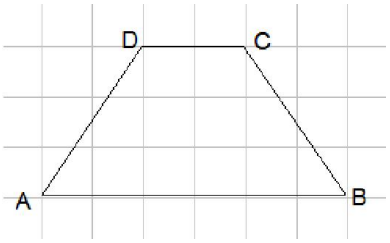
Thể tích của hình nón lớn là: $V_1 = \frac{1}{3}\pi.2^2.4 = \frac{16}{3}\pi$

Thể tích của hình trụ là $V_2 = \pi.\left(\frac{3}{2}\right)^2.4 = 9\pi$

Thể tích của hình nón nhỏ là $V_3 = \frac{1}{3}\pi.1^2.2 = \frac{2}{3}\pi$

Thể tich của khối (H) là $V = V_1 + V_2 - V_3 = \frac{16}{3}\pi + 9\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{41}{3}\pi$.

Câu 43. Cho hình thang cân $ABCD$, $AB // CD$, $AB = 6\ cm$, $CD = 2\ cm$, $AD = BC = \sqrt{13}\ cm$, Quay hình thang $ABCD$ xung quanh đường thẳng AB ta được một khối tròn xoay có thể tích là

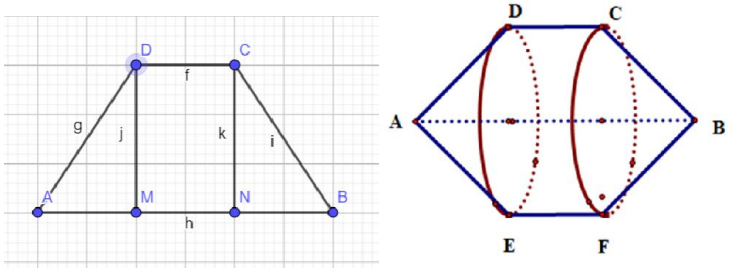


A. $18\pi(cm^3)$. **B.** $30\pi(cm^3)$. **C.** $24\pi(cm^3)$. **D.** $12\pi(cm^3)$.

Lời giải

Chọn B

Khi quay hình thang $ABCD$ xung quanh đường thẳng AB ta được một khối tròn xoay được ghép bởi 2 khối nón có thể tích bằng nhau và 1 khối trụ.



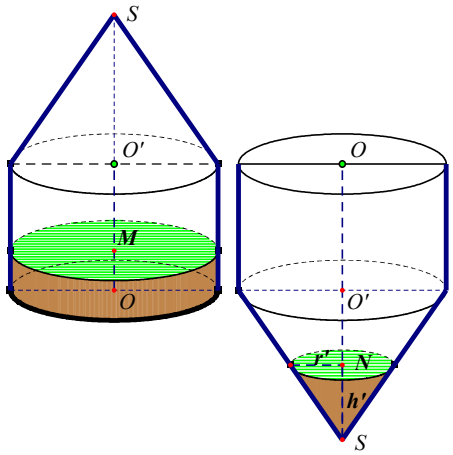
Khối nón có được do ΔADM và ΔCBN quay quanh đường thẳng AB có cùng thể tích, với chiều cao $AM=2(cm)$, bán kính đáy $DM=3(cm)\Rightarrow V_{non}=\frac{1}{3}.2.\pi.3^2\ (cm^3)$.

Khối trụ có được do hình chữ nhật $DCMN$ quay quanh đường thẳng AB, với chiều cao $MN=2(cm)$, bán kính đáy $DM=3(cm)\Rightarrow V_{tru}=2.\pi.3^2\ (cm^3)$.

Suy ra thể tích khối tròn xoay cần tính là: $V=2V_{non}+V_{tru}=2.\frac{1}{3}.2.\pi.3^2+2.\pi.3^2=30\pi\ (cm^3)$

Câu 44. **(Chuyên Long An-2019)** Cho một dụng cụ đựng chất lỏng được tạo bởi một hình trụ và hình nón được lắp đặt như hình bên. Bán kính đáy hình nón bằng bán kính đáy hình trụ. Chiều cao hình trụ bằng chiều cao hình nón và bằng h. Trong bình, lượng chất lỏng có chiều cao bằng $\frac{1}{24}$ chiều cao hình trụ. Lật ngược dụng cụ theo phương vuông góc với mặt đất. Tính độ cao phần chất lỏng trong hình nón theo h.

A. $\frac{h}{8}$. **B.** $\frac{3h}{8}$. **C.** $\frac{h}{2}$. **D.** $\frac{h}{4}$.



Lời giải

Chọn C

Thể tích chất lỏng $V=\pi r^2.\frac{1}{24}h=\frac{1}{24}\pi r^2 h$.

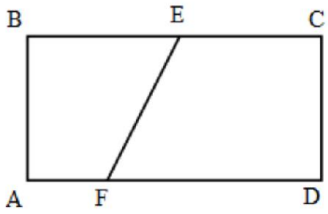
Khi lật ngược bình, thể tích phần hình nón chứa chất lỏng là $V' = \frac{1}{3}\pi r'^2 h'$.

Mà $\frac{r'}{r} = \frac{h'}{h} \Rightarrow r' = \frac{h'}{h}.r$. Do đó $V' = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h'}{h}.r\right)^2 h' = \frac{1}{3}\pi r^2.\frac{h'^3}{h^2}$.

Theo bài ra, $V' = V \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi r^2.\frac{h'^3}{h^2} = \frac{1}{24}\pi r^2 h \Leftrightarrow h'^3 = \frac{1}{8}h^3 \Leftrightarrow h' = \frac{h}{2}$.

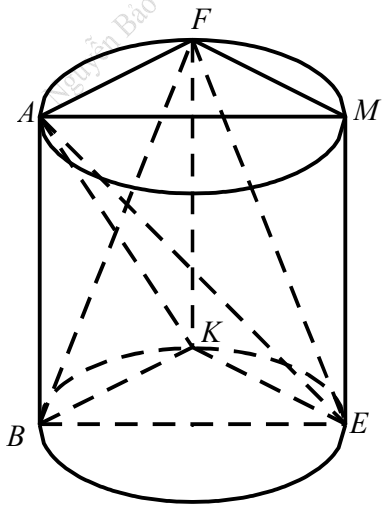
Câu 45. Có một hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 2a$, $AD = 4a$. Người ta đánh dấu E là trung điểm BC và $F \in AD$ sao cho $AF = a$. Sau đó người ta cuốn mảnh bìa lại sao cho cạnh DC trùng cạnh AB tạo thành một hình trụ. Tính thể tích tứ diện $ABEF$ với các đỉnh A, B, E, F nằm trên hình trụ vừa tạo thành.

A. $\frac{16a^3}{3\pi^2}$. **B.** $\frac{8a^3}{3\pi^2}$. **C.** $\frac{a^3}{3\pi}$. **D.** $\frac{8a^3}{\pi^2}$.



Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của cạnh AD, K là trung điểm của BE. Khi cuốn tấm bìa theo yêu cầu bài toán, ta được một hình trụ có đường kính đáy là AM; chiều cao là AB; F, K lần lượt là các điểm chính giữa các cung AM và BE và khối $AMF.BKE$ là khối lăng trụ đứng (minh họa ở hình trên).

Đường tròn đáy có chu vi bằng $AD = 4a$, suy ra bán kính đáy $r = \frac{2a}{\pi}$.

Ta có $V_{AFM.BKE} = AB.S_{\Delta BKE} = AB.\frac{1}{2}r.2r = 2a.\left(\frac{2a}{\pi}\right)^2 = \frac{8a^3}{\pi^2}$.

$V_{ABEF} = V_{EBFK} = \frac{1}{3}V_{AFM.BKE} = \frac{8a^3}{3\pi^2}$

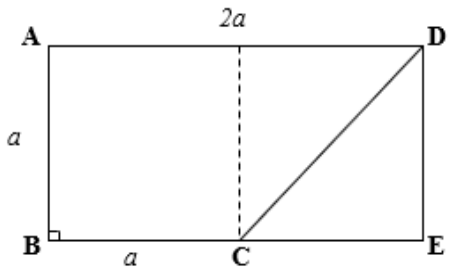
Câu 46. **(Chuyên Nguyễn Huệ- 2019)** Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B với $AB = BC = \dfrac{AD}{2} = a$.

Quay hình thang và miền trong của nó quanh đường thẳng chứa cạnh BC. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.

A. $V = \pi a^3$. **B.** $V = \dfrac{4\pi a^3}{3}$. **C.** $V = \dfrac{5\pi a^3}{3}$. **D.** $V = \dfrac{7\pi a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Kẻ $CE // AD$ và $CE = AB = BC = a$

$\Rightarrow ABED$ là hình chữ nhật.

Khi quay hình chữ nhật $ABED$ quanh trục BC ta được hình trụ

$V_t = \pi AB^2.AD = \pi.a^2.2a = 2\pi a^3$.

Khi quay ΔCED quanh trục $EC\ (BC)$ ta được hình nón có:

$V_n = \dfrac{1}{3}\pi DE^2.CE = \dfrac{1}{3}\pi.a^2.a = \dfrac{1}{3}\pi a^3$.

Thể tích của khối tròn xoay được tạo ra khi quay $ABCD$ quanh trục BC là:

$V = V_t - V_n = 2\pi a^3 - \dfrac{1}{3}\pi a^3 = \dfrac{5}{3}\pi a^3$.

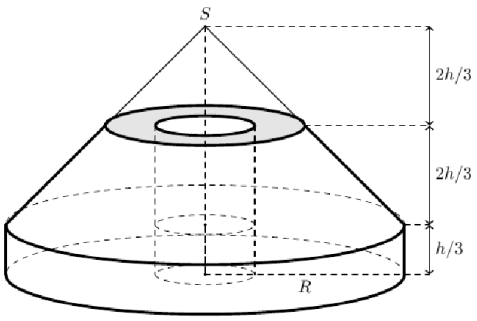
Vậy thể tích khối tròn xoay được tạo thành là $V = \dfrac{5\pi a^3}{3}$.

Câu 47. Để định vị một trụ điện, người ta cần đúc một khối bê tông có chiều cao $h = 1{,}5\,\text{m}$ gồm:

- Phần dưới có dạng hình trụ bán kính đáy $R = 1\,\text{m}$ và có chiều cao bằng $\dfrac{1}{3}h$;

- Phần trên có dạng hình nón bán kính đáy bằng R đã bị cắt bỏ bớt một phần hình nón có bán kính đáy bằng $\dfrac{1}{2}R$ ở phía trên (*người ta thường gọi hình đó là hình nón cụt);*

- Phần ở giữa rỗng có dạng hình trụ bán kính đáy bằng $\dfrac{1}{4}R$ *(tham khảo hình vẽ bên dưới).*



Thể tích của khối bê tông *(làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba)* bằng

A. $2{,}815\,\text{m}^3$. **B.** $2{,}814\,\text{m}^3$. **C.** $3{,}403\,\text{m}^3$. **D.** $3{,}109\,\text{m}^3$.

Lời giải

Chọn D

Thể tích hình trụ bán kính đáy R và có chiều cao bằng $\frac{h}{3}$:

$$V_1 = \pi R^2.\frac{h}{3} = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Thể tích hình nón cụt bán kính đáy lớn R, bán kính đáy bé $\frac{R}{2}$ và có chiều cao bằng $\frac{2h}{3}$:

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2.\frac{4h}{3} - \frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{4}.\frac{2h}{3} = \frac{7}{18}\pi R^2 h.$$

Thể tích hình trụ bán kính đáy $\frac{R}{4}$ và có chiều cao bằng h *(phần rỗng ở giữa)*:

$$V_3 = \pi\frac{R^2}{16}.h = \frac{1}{16}\pi R^2 h.$$

Thể tích của khối bê tông bằng:

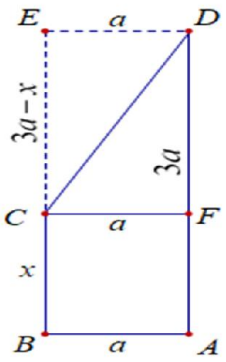
$$V = V_1 + V_2 - V_3 = \pi R^2 h.\left(\frac{1}{3} + \frac{7}{18} - \frac{1}{16}\right) = \frac{95}{144}\pi R^2.h \approx 3{,}109\,\text{m}^3.$$

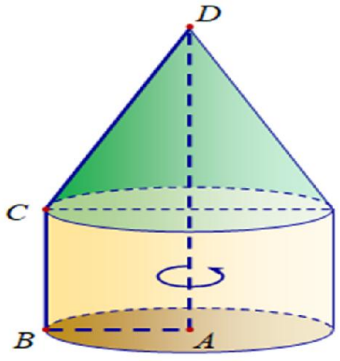
Câu 48. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B có $AB = a$, $AD = 3a$ và $BC = x$ với $0 < x < 3a$. Gọi V_1, V_2, lần lượt là thể tích các khối tròn xoay tạo thành khi quay hình thang $ABCD$ (kể cả các điểm trong) quanh đường thẳng BC và AD. Tìm x để $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$.

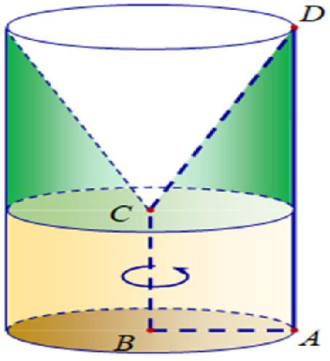
A. $x = a$. **B.** $x = 2a$. **C.** $x = 3a$. **D.** $x = 4a$.

Lời giải

Chọn A.







Dựng các điểm E, F để có các hình chữ nhật $ABED$ và $ABCF$ như hình vẽ.

- Khi quay hình thang $ABCD$ (kể các điểm trong) quanh đường thẳng BC ta được khối tròn xoay có thể tích là

$$V_1 = V_3 - V_4 = 3\pi a^3 - \frac{1}{3}\pi(3a - x)a^2 = 2\pi a^3 + \frac{1}{3}\pi x a^2 = \frac{1}{3}\pi a^2(6a + x).$$

Trong đó, V_3 là thể tích khối trụ tròn xoay có bán kính đáy bằng a, chiều cao bằng $3a$; V_4 là thể tích khối nón tròn xoay có bán kính đáy bằng a, chiều cao bằng $3a-x$.

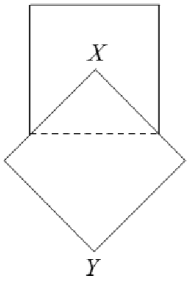
- Khi quay hình thang $ABCD$ (kể các điểm trong) quanh đường thẳng AD ta được khối tròn xoay có thể tích là

$$V_2 = V_5 + V_4 = \pi a^2 x + \frac{1}{3}\pi(3a-x)a^2 = \pi a^3 + \frac{2}{3}\pi x a^2 = \frac{1}{3}\pi a^2(3a+2x).$$

Trong đó, V_5 là thể tích khối trụ tròn xoay có bán kính đáy bằng a, chiều cao bằng x.

Theo giả thiết ta có: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow \frac{6a+x}{3a+2x} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow x = a$.

Câu 49. **(Đề thử nghiệm 2017)** Cho hai hình vuông có cùng cạnh bằng 5 được xếp chồng lên nhau sao cho đỉnh X của một hình vuông là tâm của hình vuông còn lại (như hình vẽ). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên xung quanh trục XY.



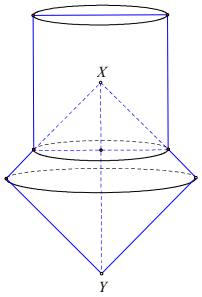
A. $V = \frac{125(1+\sqrt{2})\pi}{6}$. **B.** $V = \frac{125(5+2\sqrt{2})\pi}{12}$.

C. $V = \frac{125(5+4\sqrt{2})\pi}{24}$. **D.** $V = \frac{125(2+\sqrt{2})\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn C

□ ***Cách 1:***



Khối tròn xoay gồm 3 phần:

Phần 1: khối trụ có chiều cao bằng 5, bán kính đáy bằng $\frac{5}{2}$ có thể tích $V_1 = \pi \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times 5 = \frac{125\pi}{4}$

Phần 2: khối nón có chiều cao và bán kính đáy bằng $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ có thể tích

$$V_2=\frac{1}{3}\times\pi\times\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2\times\frac{5\sqrt{2}}{2}=\frac{125\pi\sqrt{2}}{12}$$

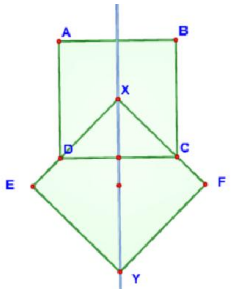
Phần 3: khối nón cụt có thể tích là

$$V_3=\frac{1}{3}\pi\times\frac{5\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}\times\left(\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2+\frac{5\sqrt{2}}{2}\times\frac{5}{2}\right)=\frac{125\left(2\sqrt{2}-1\right)\pi}{24}.$$

Vậy thể tích khối tròn xoay là

$$V=V_1+V_2+V_3=\frac{125\pi}{4}+\frac{125\pi\sqrt{2}}{12}+\frac{125\left(2\sqrt{2}-1\right)\pi}{24}=\frac{125\left(5+4\sqrt{2}\right)\pi}{24}.$$

Cách 2:



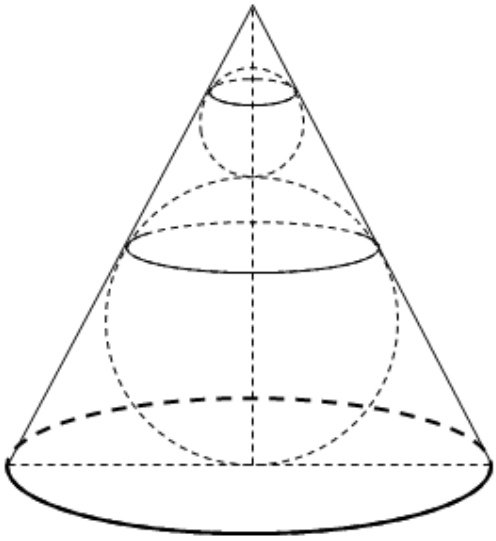
Thể tích hình trụ được tạo thành từ hình vuông $ABCD$ là: $V_T=\pi R^2h=\frac{125\pi}{4}$

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành từ hình vuông $XEYF$ là: $V_{2N}=\frac{2}{3}\pi R^2h=\frac{125\pi\sqrt{2}}{6}$

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành từ tam giác XDC là: $V_{N'}=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{125\pi}{24}$

Thể tích cần tìm $V=V_T+V_{2N}-V_{N'}=125\pi\frac{5+4\sqrt{2}}{24}$.

Câu 50. Người ta chế tạo một món đồ chơi cho tre em theo các công đoạn như sau: Trước hết chế tạo ra hình nón tròn xoay có góc ở đỉnh là $2\alpha=60°$ bằng thủy tinh trong suốt. Sau đó đặt hai quả cầu nhỏ bằng thủy tinh có bán kính lớn, nhỏ khác nhau sao cho hai mặt cầu tiếp xúc với nhau và tiếp xúc với mặt nón, quả cầu lớn tiếp xúc với mặt đáy của hình nón (hình vẽ). Biết rằng chiều cao của hình nón bằng $9cm$.

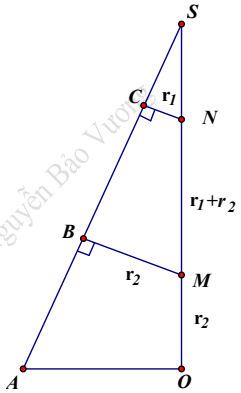


Bỏ qua bề dày của các lớp vỏ thủy tinh, tổng thể tích của hai khối cầu bằng

A. $\frac{112\pi}{3}$. **B.** $\frac{40\pi}{3}$. **C.** $\frac{38\pi}{3}$. **D.** $\frac{100\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi N, r_1 là tâm và bán kính của mặt câu nhỏ. M, r_2 là tâm và bán kính của mặt cầu lớn.

Do các mặt cầu tiếp xúc với nhau và tiếp xúc với mặt nón nên tam giác SNC vuông tại C, tam giác SMB vuông tại B.

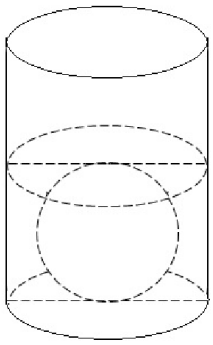
Hình nón tròn xoay có góc ở đỉnh là $2\alpha = 60°$ nên $\widehat{ASO} = 30°$.

Ta có: $r_2 = SM.\sin 30° \Leftrightarrow r_2 = \frac{1}{2}(SO - r_2) \Leftrightarrow \frac{3}{2}r_2 = \frac{1}{2}SO \Leftrightarrow r_2 = \frac{1}{3}SO = 3$.

$r_1 = SN.\sin 30° \Leftrightarrow r_1 = \frac{1}{2}(SO - NO) \Leftrightarrow r_1 = \frac{1}{2}(SO - r_1 - 2r_2) \Leftrightarrow r_1 = \frac{SO - 2r_2}{3} = 1$

Vậy tổng thể tích hai khối cầu là $V = \frac{4}{3}\left(r_1^3 + r_2^3\right)\pi = \frac{112\pi}{3}$

Câu 51. Người ta thả một viên billiards snooker có dạng hình cầu với bán kính nhỏ hơn 4,5 cm vào một chiếc cốc hình trụ đang chứa nước thì viên billiards đó tiếp xúc với đáy cốc và tiếp xúc với mặt nước sau khi dâng (tham khảo hình vẽ bên). Biết rằng bán kính của phần trong đáy cốc bằng 5,4 cm và chiều cao của mực nước ban đầu trong cốc bằng 4,5 cm.



Bán kính của viên billiards đó bằng

A. 2,6 cm. **B.** 2,7 cm. **C.** 4,2 cm. **D.** 3,6 cm.

Lời giải

Chọn B

Gọi bán kính của viên billiards là r cm.

Thể tích của nước trong cốc là $V_1 = h_1.\pi R^2 = 4,5.\pi.(5,4)^2 = \frac{6561}{50}\pi$.

Thể tích khối trụ tạo bởi đáy cốc và mặt nước sau khi dâng là $V_2 = h_2.\pi R^2 = 2r.\pi.(5,4)^2 = \frac{1458}{25}\pi r$

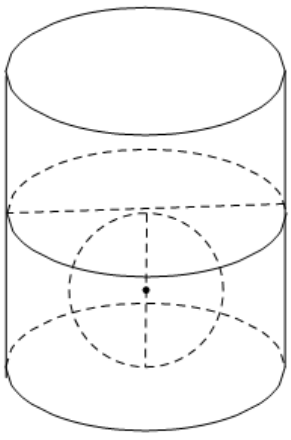
Thể tích khối cầu là $V_3 = \frac{4}{3}.\pi r^3$

Ta có:

$V_2 - V_1 = V_3 \Leftrightarrow \frac{1458}{25}\pi r - \frac{6561}{50}\pi = \frac{4}{3}.\pi r^3 \Leftrightarrow \frac{4}{3}r^3 - \frac{1458}{25}r + \frac{6561}{50} = 0 \Rightarrow r = -7,5 \vee r = 4,8 \vee r = 2,7.$

Kết hợp với điều kiện suy ra bán kính của viên billiards là 2,7 cm.

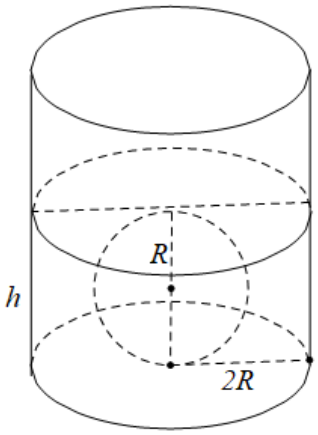
Câu 52. **(THPT Cẩm Bình -2019)** Người ta thả một viên bi có dạng hình cầu có bán kính $2,7\,cm$ vào một chiếc cốc hình trụ đang chứa nước (tham khảo hình vẽ dưới). Biết rằng bán kính của phần trong đáy cốc bằng $5,4\,cm$ và chiều cao của mực nước ban đầu trong cốc bằng $4,5\,cm$. Khi đó chiều cao của mực nước trong cốc là?



A. $5,4\,cm$. **B.** $5,7\,cm$. **C.** $5,6\,cm$. **D.** $5,5\,cm$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $R = 2,7\,cm$ là bán kính của viên bi. Ta có bán kính phần trong đáy cốc là $2R$.

Thể tích nước ban đầu là: $V_1 = \pi (2R)^2 .4,5 = 18\pi R^2$.

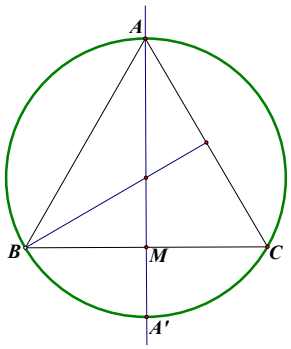
Thể tích viên bi là: $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Thể tích nước sau khi thả viên bi là: $V = V_1 + V_2 = 18\pi R^2 + \frac{4}{3}\pi R^3 = 2\pi R^2\left(9 + \frac{2}{3}R\right)$.

Gọi h là chiều cao mực nước sau khi thả viên bi vào.

Ta có: $V = 2\pi R^2\left(9 + \frac{2}{3}R\right) = \pi (2R)^2 .h \Rightarrow h = \frac{2\pi R^2\left(9 + \frac{2}{3}R\right)}{\pi (2R)^2} = \frac{\left(9 + \frac{2}{3}R\right)}{2} = 5.4(cm)$.

Câu 53. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm I đường kính AA', M là trung điểm BC. Khi quay tam giác ABM cùng với nửa đường tròn đường kính AA' xung quanh đường thẳng AM (như hình vẽ minh họa), ta được khối nón và khối cầu có thể tích lần lượt là V_1 và V_2. Tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng



A. $\frac{9}{32}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\frac{27}{32}$. **D.** $\frac{4}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi a là độ dài các cạnh của tam giác ABC

Ta có chiều cao, bán kính của hình nón lần lượt là $h_1 = AM = a\frac{\sqrt{3}}{2}$, $r_1 = \frac{a}{2}$. Do đó thể tích khối nón là $V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = \frac{\sqrt{3}a^3}{24}\pi$.

Bán kính của hình cầu là $r_2 = AI = \frac{2}{3}AM = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ nên thể tích khối cầu là

$V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi a^3$.

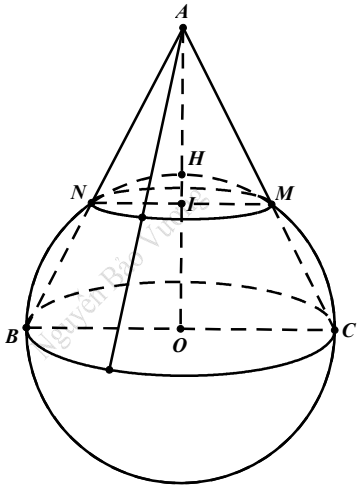
Từ đó suy ra $\frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{32}$.

Câu 54. Cho mặt cầu (S) có bán kính bằng 2 và có một đường tròn lớn là (C). Khối nón (N) có đường tròn đáy là (C) và thiết diện qua trục là tam giác đều. Biết rằng phần khối nón (N) chứa trong mặt cầu (S) có thể tích bằng $\left(a+b\sqrt{3}\right)\pi$, với a,b là các số hữu tỉ. Tính $a+b$.

A. $a+b=\frac{14}{3}$. **B.** $a+b=\frac{13}{3}$. **C.** $a+b=\frac{11}{3}$. **D.** $a+b=\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi thể tích khối nón có bán kính đáy OC và đường cao OA là: V_1

Thể tích khối nón có bán kính đáy IM và đường cao IA là: V_2

Do ABC là tam giác đều nên M là trung điểm của AC và $OA=2\sqrt{3}, IM=1$

suy ra: $IA=IO=\sqrt{3}, IH=2-\sqrt{3}$

Ta có: $V_1 = \frac{1}{3}.\pi.OC^2.OA = \frac{1}{3}.\pi.2^2.2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$, $V_2 = \frac{1}{3}.\pi.IM^2.IA = \frac{1}{3}.\pi.1^2.\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

Thể tích chỏm cầu có chiều cao IH và bán kính IM là:

$V_{Chom} = \pi.h^2(R-\frac{h}{3}) = \pi.IH^2(R-\frac{IH}{3}) = \pi.\left(2-\sqrt{3}\right)^2(2-\frac{2-\sqrt{3}}{3}) = \left(\frac{16-9\sqrt{3}}{3}\right)\pi$

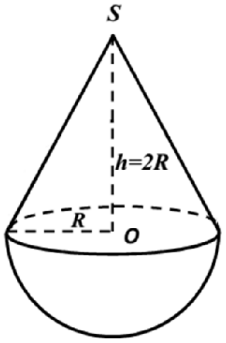
Suy ra thể tích phần khối nón (N) chứa trong mặt cầu (S) là:

$$V = V_1 - V_2 + V_{Chom} = \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{3}\pi + \left(\frac{16-9\sqrt{3}}{3}\right)\pi = \left(\frac{16}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\pi \Rightarrow a = \frac{16}{3}, b = -\frac{2}{3}$$

Suy ra $a+b = \frac{14}{3}$

Câu 55. **(Bình Phước - 2019)** Một đồ vật được thiết kế bởi một nửa khối cầu và một khối nón úp vào nhau sao cho đáy của khối nón và thiết diện của nửa mặt cầu chồng khít lên nhau như hình vẽ bên.

Biết khối nón có đường cao gấp đôi bán kính đáy, thể tích của toàn bộ khối đồ vật bằng $36\pi\, cm^3$. Diện tích bề mặt của toàn bộ đồ vật đó bằng



A. $\pi\left(\sqrt{5}+3\right) cm^2$. **B.** $9\pi\left(\sqrt{5}+2\right) cm^2$.

C. $9\pi\left(\sqrt{5}+3\right) cm^2$. **D.** $\pi\left(\sqrt{5}+2\right) cm^2$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích khối nón là $V_1 = \frac{1}{3}\pi.R^2.2R = \frac{2}{3}\pi.R^3$

Thể tích nửa khối cầu là $V_2 = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}\pi.R^3 = \frac{2}{3}\pi.R^3$

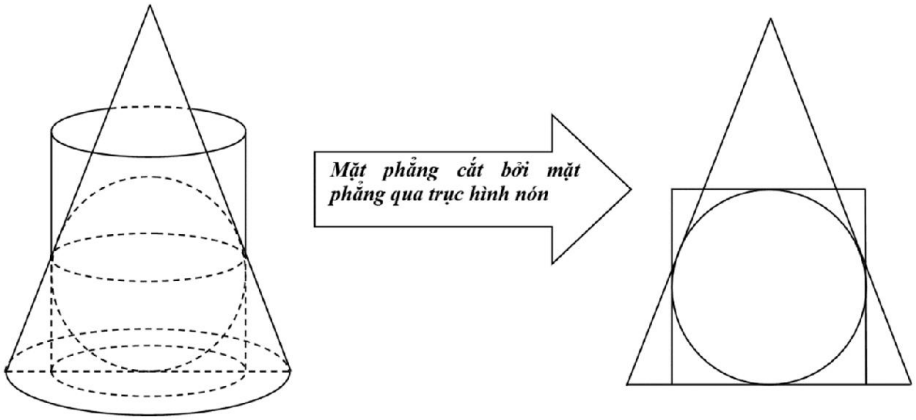
Thể tích của toàn bộ khối đồ vật là $V_1 + V_2 = 36\pi \Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi.R^3 = 36\pi \Leftrightarrow R = 3$

Diện tích xung quanh của mặt nón là $S_1 = \pi R.\sqrt{4R^2+R^2} = \pi R^2\sqrt{5} = 9\sqrt{5}\pi$

Diện tích của nửa mặt cầu là $S_2 = \frac{1}{2}.4\pi R^2 = 18\pi$

Diện tích bề mặt của toàn bộ đồ vật bằng $S_1 + S_2 = 9\pi\left(\sqrt{5}+2\right) cm^2$.

Câu 56. Cho một hình cầu nội tiếp hình nón tròn xoay có góc ở đỉnh là 2α, bán kính đấy là R và chiều cao là h. Một hình trụ ngoại tiếp hình cầu đó có đáy dưới nằm trong mặt phẳng đáy của hình nón. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình nón và hình trụ, biết rằng $V_1 \neq V_2$. Gọi M là giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V_2}{V_1}$. Giá trị của biểu thức $P = 48M + 25$ thuộc khoảng nào dưới đây? (*tham khảo hình vẽ*)



A. $(40;60)$. **B.** $(60;80)$. **C.** $(20;40)$. **D.** $(0;20)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi r bán kính kính hình cầu nội tiếp hình nón.

Ta có $Rh = r\left(l + R\right) \Rightarrow r = \dfrac{Rh}{R + \sqrt{R^2 + h^2}}$.

Hình trụ ngoại tiếp hình cầu nên có đường kính đáy và chiều cao bằng đường kính hình cầu. Do đó nó có thể tích là $V_2 = \pi r^2.2r = 2\pi\left(\dfrac{Rh}{R + \sqrt{R^2 + h^2}}\right)^3$.

Khi đó $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{2\pi\left(\dfrac{Rh}{R + \sqrt{R^2 + h^2}}\right)^3}{\dfrac{1}{3}\pi R^2 h} = 6\dfrac{Rh^2}{\left(R + \sqrt{R^2 + h^2}\right)^3} = \dfrac{6\left(\dfrac{R}{h}\right)}{\left(\dfrac{R}{h} + \sqrt{\left(\dfrac{R}{h}\right)^2 + 1}\right)^3} = \dfrac{6t}{\left(t + \sqrt{t^2 + 1}\right)^3}$

Với $t = \dfrac{R}{h} > 0$, xét hàm số $y = \dfrac{t}{\left(t + \sqrt{t^2 + 1}\right)^3}$ với $t > 0$, ta có

$y' = \dfrac{\sqrt{t^2 + 1} - 3t}{\left(t + \sqrt{t^2 + 1}\right)^3 \sqrt{t^2 + 1}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

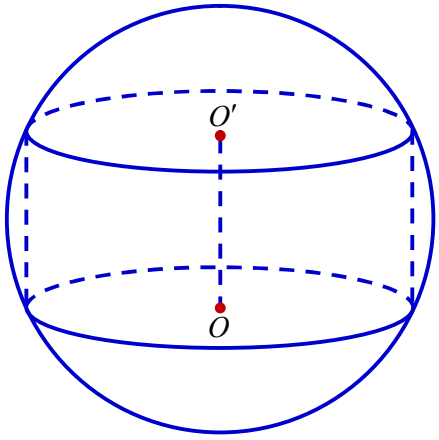
Ta có bảng biến thiên

t	0		$\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	$\dfrac{1}{8}$	↘	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $M=\max\left\{\dfrac{V_2}{V_1}\right\}=6\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{4}$.

Do đó $P=48M+25=61$.

Câu 57. **(Hà Nội - 2018)** Cho khối cầu (S) tâm I, bán kính R không đổi. Một khối trụ thay đổi có chiều cao h và bán kính đáy r nội tiếp khối cầu. Tính chiều cao h theo R sao cho thể tích của khối trụ lớn nhất.



A. $h=\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$. **B.** $h=\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$. **C.** $h=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. **D.** $h=R\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $r^2=R^2-\dfrac{h^2}{4}$.

Thể tích của khối trụ: $V=\pi\left(R^2-\dfrac{h^2}{4}\right)h\Leftrightarrow V=\pi R^2h-\dfrac{\pi h^3}{4}$.

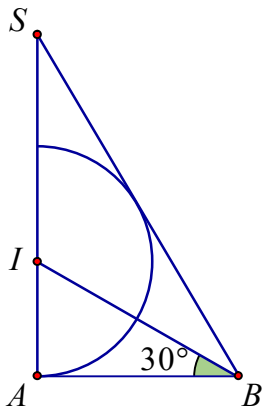
Ta có $V'=\pi R^2-\dfrac{3\pi}{4}h^2,\Rightarrow V'=0\Leftrightarrow h=\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Bảng biến thiên:

h	0		$\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
V'	‖	$+$	0	$-$	
V	‖	↗	$V_{\max}$	↘	

Vậy thể tích khối trụ lớn nhất khi $h=\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$

Câu 58. **(Toán Học Và Tuổi Trẻ 2018)** Cho tam giác SAB vuông tại A, $\widehat{ABS}=60^\circ$, đường phân giác trong của $\widehat{ABS}$ cắt SA tại điểm I. Vẽ nửa đường tròn tâm I bán kính IA (như hình vẽ). Cho ΔSAB và nửa đường tròn trên cùng quay quanh SA tạo nên các khối cầu và khối nón có thể tích tương ứng V_1, V_2. Khẳng định nào dưới đây đúng?



A. $4V_1 = 9V_2$ **B.** $9V_1 = 4V_2$

C. $V_1 = 3V_2$ **D.** $2V_1 = 3V_2$

Lời giải

Đặt $AB = x \Rightarrow \begin{cases} IA = x\tan 30° \\ SA = x\tan 60° \end{cases}$. Chỗ này hình như cô Liên bôi xanh này:D

Khối cầu: $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi IA^3 = \frac{4}{3}\pi\left(x\tan 30°\right)^3$.

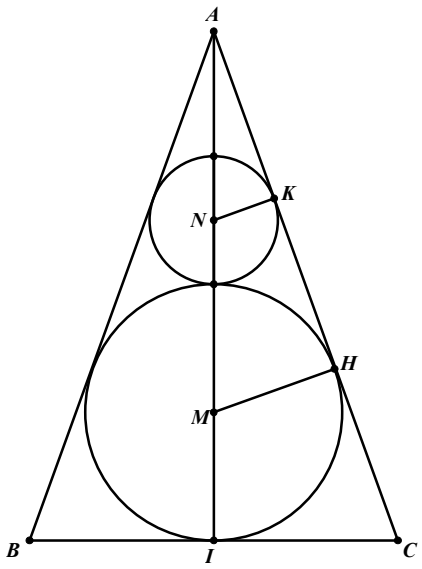
Khối nón $V_2 = \frac{1}{3}\pi AB^2 SA = \frac{1}{3}\pi x^2.\left(x\tan 60°\right)$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{9}$ hay $9V_1 = 4V_2$.

Câu 59. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên - 2018)** Người ta đặt được vào trong một hình nón hai khối cầu có bán kính lần lượt là a và $2a$ sao cho các khối cầu đều tiếp xúc với mặt xung quanh của hình nón, hai khối cầu tiếp xúc với nhau và khối cầu lớn tiếp xúc với đáy của hình nón. Bán kính đáy của hình nón đã cho là

A. $\sqrt{5}a$. **B.** $3a$. **C.** $2\sqrt{2}a$. **D.** $\frac{8a}{3}$.

Lời giải



Gọi thiết diện qua trục của hình nón là tam giác ABC với A là đỉnh của hình nón và BC là đường kính đáy của hình nón có tâm đáy là I.

Gọi M và N lần lượt là tâm của hai khối cầu có bán kính $2a$ và a. H và K lần lượt là điểm tiếp xúc của AC với hai đường tròn tâm M và N.

Ta có: NK là đường trung bình trong tam giác AMH suy ra N là trung điểm của AM.

$AM = 2MN = 2.3a = 6a \Rightarrow AI = 8a$.

Ta lại có hai tam giác vuông AIC và AHM đồng dạng

suy ra $\dfrac{IC}{HM} = \dfrac{AI}{AH} \Leftrightarrow IC = \dfrac{8a.2a}{\sqrt{36a^2 - 4a^2}} = 2a\sqrt{2}$.

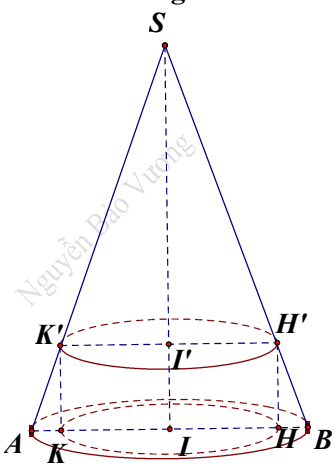
Vậy bán kính hình nón là $R = 2a\sqrt{2}$.

Câu 60. **(THPT Hậu Lộc 2 - TH - 2018)** Cho hình nón (N) có bán kính đáy $r = 20(cm)$, chiều cao $h = 60(cm)$ và một hình trụ (T) nội tiếp hình nón (N) (hình trụ (T) có một đáy thuộc đáy hình nón và một đáy nằm trên mặt xung quanh của hình nón). Tính thể tích V của hình trụ (T) có diện tích xung quanh lớn nhất?

A. $V = 3000\pi(cm^3)$. **B.** $V = \dfrac{32000}{9}\pi(cm^3)$.

C. $V = 3600\pi(cm^3)$. **D.** $V = 4000\pi(cm^3)$.

Lời giải



Gọi độ dài bán kính hình trụ là $x\,cm\,(0 < x < 20)$, chiều cao của hình trụ là h'.

Ta có: $\dfrac{h'}{h} = \dfrac{SI'}{SI} = \dfrac{I'K'}{AI} \Leftrightarrow \dfrac{SI - II'}{SI} = \dfrac{I'K'}{AI} \Leftrightarrow \dfrac{h - h'}{h} = \dfrac{x}{r} \Leftrightarrow \dfrac{60 - h'}{60} = \dfrac{x}{20}$.

$\Leftrightarrow 60 - h' = 3x \Leftrightarrow h' = 60 - 3x$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là:

$S = 2\pi x.h' = 2\pi x(60 - 3x)\ 2\pi(60x - 3x^2) = 2\pi\left[100 - 3(x - 10)^2\right] \le 200\pi$.

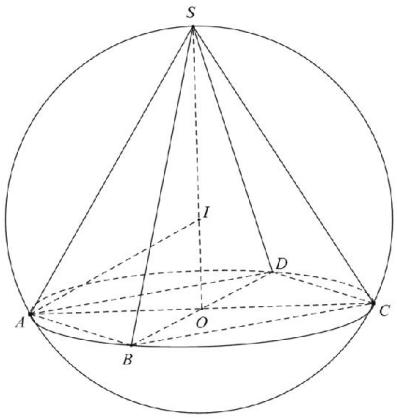
Diện tích xung quanh của hình trụ lớn nhất khi $x = 10$.

Khi đó thể tích khối trụ là: $V = \pi x^2.h' = \pi.10^2.30 = 3000\pi$.

Câu 61. **(Phan Đăng Lưu - Huế - 2018)** Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp hình cầu có bán kính bằng 9. Tính thể tích V của khối chóp có thể tích lớn nhất.

A. $576\sqrt{2}$. **B.** 576. **C.** $144\sqrt{2}$. **D.** 144.

Lời giải



Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và bán kính $R=9$.

Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a, $\left(0<a\le 9\sqrt{2}\right)$

Ta có $OA=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow OI=\sqrt{IA^2-OA^2}=\sqrt{81-\dfrac{a^2}{2}}$.

Mặt khác ta lại có $SO=SI+IO=9+\sqrt{81-\dfrac{a^2}{2}}$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $V=\dfrac{1}{3}a^2\left(9+\sqrt{81-\dfrac{a^2}{2}}\right)=3a^2+\dfrac{1}{3}a^2\sqrt{81-\dfrac{a^2}{2}}$.

Đặt $a^2=t$, do $0<a\le 9\sqrt{2}$ nên $0<t\le 162$

Xét hàm số $f(t)=3t+\dfrac{1}{3}t\left(9+\sqrt{81-\dfrac{t}{2}}\right)$, với $0<t\le 162$ ta có $f'(t)=3+\dfrac{324-3t}{12\sqrt{81-\dfrac{t}{2}}}$;

$$f'(t)=0\Leftrightarrow\sqrt{81-\frac{t}{2}}=\frac{t}{12}-9\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 108\\81-\dfrac{t}{2}=\left(\dfrac{t}{12}-9\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 108\\\left[\begin{array}{l}t=0\\t=144\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow t=144.$$

Ta có bảng biến thiên

t	0		144		162
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		↗	576	↘	

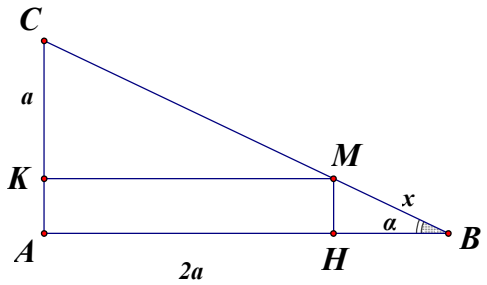
Từ bảng biến thiên ta có $V_{\max}=576$ khi $t=144$ hay $a=12$.

Câu 62. **(Toán Học Tuổi Trẻ - 2018)** Cho tam giác ABC vuông ở A có $AB=2AC$. M là một điểm thay đổi trên cạnh BC. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB, AC. Gọi

V và V' tương ứng là thể tích của vật thể tròn xoay tạo bởi tam giác ABC và hình chữ nhật $MHAK$ khi quay quanh trục AB. Tỉ số $\frac{V'}{V}$ lớn nhất bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{4}{9}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải



Giả sử $AC=a$, $AB=2a$, $BM=x$. Ta có:

$BC=a\sqrt{5}$, $\sin\alpha=\frac{AC}{BC}=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

$MH=x\sin\alpha=\frac{x}{\sqrt{5}}$, $HB=x\cos\alpha=\frac{2x}{\sqrt{5}}$, $AH=2a-\frac{2x}{\sqrt{5}}$.

Khi quay tam giác ABC quanh trục AB ta được một khối nón có thể tích là :

$V=\frac{1}{3}\pi AC^2.AB=\frac{2a^3\pi}{3}$.

Khi quay hình chữ nhật $MHAK$ quanh trục AB ta được một khối trụ có thể tích là :

$V'=\pi.MH^2.AH=\pi\frac{x^2}{5}\left(2a-\frac{2x}{\sqrt{5}}\right)$.

Do đó, $\frac{V'}{V}=\frac{3}{5a^2}x^2-\frac{3}{5\sqrt{5}a^3}x^3$.

Xét hàm số $f(x)=\frac{3}{5a^2}x^2-\frac{3}{5\sqrt{5}a^3}x^3$ trên đoạn $\left[0;a\sqrt{5}\right]$.

Ta có : $f'(x)=\frac{6}{5a^2}x-\frac{9}{5\sqrt{5}a^3}x^2$, $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\frac{2\sqrt{5}a}{3}\in\left[0;\sqrt{5}\right]\end{array}\right.$.

$f(0)=0$, $f\left(a\sqrt{5}\right)=0$, $f\left(\frac{2a\sqrt{5}}{3}\right)=\frac{4}{9}$.

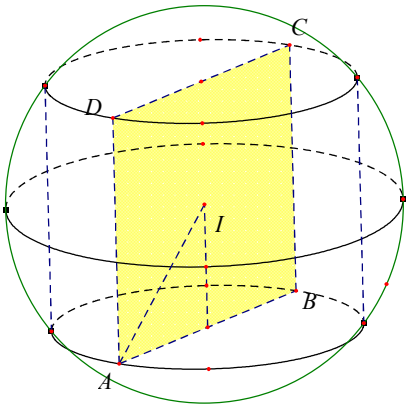
Suy ra $\max\limits_{\left[0;\sqrt{5}\right]}f(x)=f\left(\frac{2a\sqrt{5}}{3}\right)=\frac{4}{9}$.

Vậy giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V'}{V}$ bằng $\frac{4}{9}$.

Câu 63. (THPT Nguyễn Trãi - Đà Nẵng - 2018) **Xét hình trụ (T) nội tiếp một mặt cầu bán kính R và S là diện tích thiết diện qua trục của (T). Tính diện tích xung quanh của hình trụ (T) biết S đạt giá trị lớn nhất**

A. $S_{xq}=\frac{2\pi R^2}{3}$. **B.** $S_{xq}=\frac{\pi R^2}{3}$. **C.** $S_{xq}=2\pi R^2$. **D.** $S_{xq}=\pi R^2$.

Lời giải



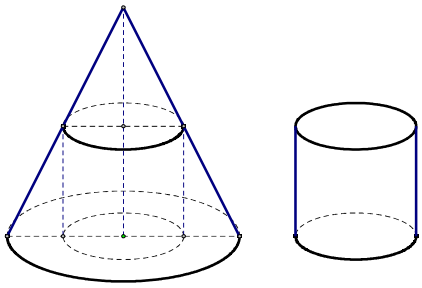
Gọi x là bán kính của hình trụ $0 < x < R$. Diện tich thiết diện là

$S = 2x.2\sqrt{R^2 - x^2} = 4x\sqrt{R^2 - x^2}$.

Vì $4x\sqrt{R^2 - x^2} \le 2.\left(x^2 + R^2 - x^2\right)$ nên $S \le 2R$. Vậy $S_{\max} = 2R$ khi $x = \sqrt{R^2 - x} \Leftrightarrow x = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

Vậy diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi \dfrac{R\sqrt{2}}{2}.2\dfrac{R\sqrt{2}}{2} = 2\pi R^2$.

Câu 64. **(THPT Quỳnh Lưu - Nghệ An - 2018)** Một khúc gỗ có dạng hình khối nón có bán kính đáy bằng $r = 2\text{m}$, chiều cao $h = 6\text{m}$. Bác thợ mộc chế tác từ khúc gỗ đó thành một khúc gỗ có dạng hình khối trụ như hình vẽ. Gọi V là thể tích lớn nhất của khúc gỗ hình trụ sau khi chế tác. Tính V.



A. $V = \dfrac{32\pi}{9}\left(\text{m}^2\right)$. **B.** $V = \dfrac{32}{9}\left(\text{m}^2\right)$. **C.** $V = \dfrac{32\pi}{3}\left(\text{m}^2\right)$. **D.** $V = \dfrac{32\pi}{9}\left(\text{m}^2\right)$.

Lời giải

Gọi r_t, h_t lần lượt là bán kính và chiều cao của khối trụ.

Ta có: $\dfrac{r_t}{2} = \dfrac{6 - h_t}{6} \Rightarrow h_t = 6 = 3r_t$.

Ta lại có: $V = \pi r_t^2.h_t = \pi\left(6r_t^2 - 3r_t^3\right)$.

Xét hàm số $f\left(r_t\right) = 6r_t^2 - 3r_t^3$, với $r_t \in \left(0;2\right)$

có $f'\left(r_t\right) = 12r_t - 9r_t^2$; $f'\left(r_t\right) = 0 \Leftrightarrow r_t = \dfrac{4}{3}$ (vì $r_t > 0$).

Bảng biến thiên

r_t	0		$\frac{4}{3}$		2
$f'(r_t)$		$+$	0	$-$	
$f(r_t)$		0 ↗	$\frac{32}{9}$	↘	0

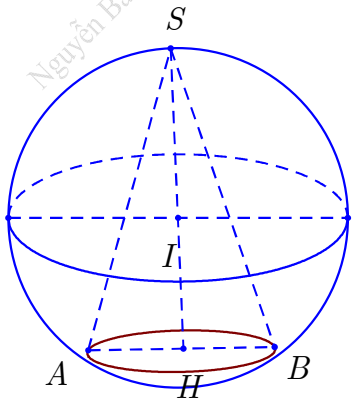
Dựa vào BBT ta có $f(r_t)_{\max} = \frac{32}{9}$ đạt tại $r_t = \frac{4}{3}$.

Vậy $V = \frac{32}{9}\pi$.

Câu 65. **(THPT Thanh Miện I - Hải Dương - 2018)** Cho mặt cầu (S) có bán kính R không đổi, hình nón (H) bất kì nội tiếp mặt cầu (S). Thể tích khối nón (H) là V_1; và thể tích phần còn lại của khối cầu là V_2. Giá trị lớn nhất của $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. $\frac{81}{32}$. **B.** $\frac{76}{32}$. **C.** $\frac{32}{81}$. **D.** $\frac{32}{76}$.

Lời giải



Gọi I, S là tâm mặt cầu và đỉnh hình nón.

Gọi H là tâm đường tròn đáy của hình nón và AB là một đường kính của đáy.

Ta có $\frac{V_1}{V_2} + 1 = \frac{V}{V - V_1}$. Do đó để $\frac{V_1}{V_2}$ đạt GTLN thì V_1 đạt GTLN.

TH 1: Xét trường hợp $SI \le R$

Khi đó thể tích của hình nón đạt GTLN khi $SI = R$ Lúc đó $V_1 = \frac{\pi R^3}{3}$.

TH 2: $(SI > R)I$ nằm trong tam giác SAB như hình vẽ.

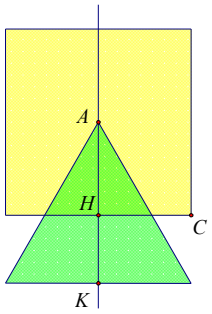
Đặt $IH = x(x > 0)$. Ta có

$$V_1=\frac{1}{3}\pi HA^2.SH=\frac{1}{3}\pi\left(R^2-x^2\right)(R+x)=\frac{\pi}{6}(2R-2x)(R+x)(R+x)\le\frac{\pi}{6}\left(\frac{4R}{3}\right)^3=\frac{32\pi}{81}R^3.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=\frac{R}{3}$.

Khi đó $\frac{V_1}{V_2}=\frac{V}{V-V_1}-1=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3-\frac{32}{81}\pi R^3}-1=\frac{8}{19}$.

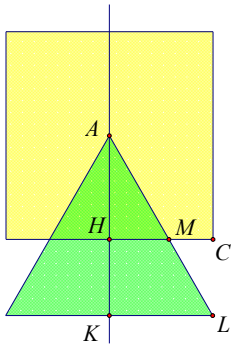
Câu 66. **(THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Tĩnh - 2018) Cho tam giác đều và hình vuông cùng có cạnh bằng 8 được xếp chồng lên nhau sao cho một đỉnh của tam giác đều trùng với tâm của hình vuông, trục của tam giác đều trùng với trục của hình vuông (như hình vẽ). Tính thể tích của vật thể tròn xoay sinh bởi hình đã cho khi quay quanh trục.**



A. $\frac{16\pi\left(23+4\sqrt{3}\right)}{3}$. **B.** $\frac{64\pi\left(17+\sqrt{3}\right)}{3}$. **C.** $\frac{16\pi\left(17+3\sqrt{3}\right)}{9}$. **D.** $\frac{64\pi\left(17+3\sqrt{3}\right)}{9}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải



Ta cần tìm HM

Ta có $\frac{HM}{KL}=\frac{AH}{AK}\Leftrightarrow\frac{HM}{4}=\frac{4}{4\sqrt{3}}\Rightarrow R'=HM=\frac{4}{\sqrt{3}}$

Thể tích được tính bằng thể tích trụ cộng với thể tích nón lớn trừ đi thể tích nón nhỏ phía trong.

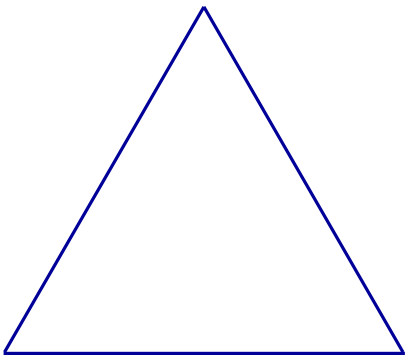
$V_{tru}=\pi.4^2.8=128\pi.$

$V_{non\ lon}=\frac{1}{3}\pi.4^2.4\sqrt{3}=\frac{64\sqrt{3}\pi}{3}$

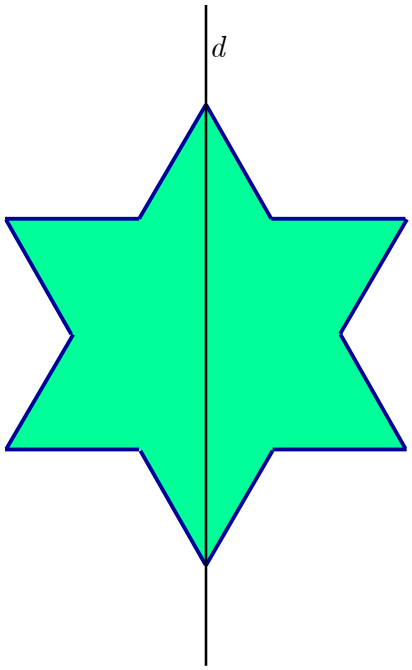
$V_{non\ nho}=\frac{1}{3}\pi.\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2.4=\frac{64\pi}{9}.$

$$V = V_{tru} + V_{non\ lon} - V_{non\ nho} = 128\pi + \frac{64\sqrt{3}\pi}{3} - \frac{64\pi}{9} = 64\left(\frac{17\pi + 3\sqrt{3}\pi}{9}\right)$$

Câu 67. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2018)** Ban đầu ta có một tam giác đều cạnh bằng 3 (hình 1). Tiếp đó ta chia mỗi cạnh của tam giác thành 3 đoạn bằng nhau và thay mỗi đoạn ở giữa bằng hai đoạn bằng nó sao cho chúng tạo với đoạn bỏ đi một tam giác đều về phía bên ngoài ta được hình 2. Khi quay hình 2 xung quanh trục d ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích khối tròn xoay đó.



Hình 1

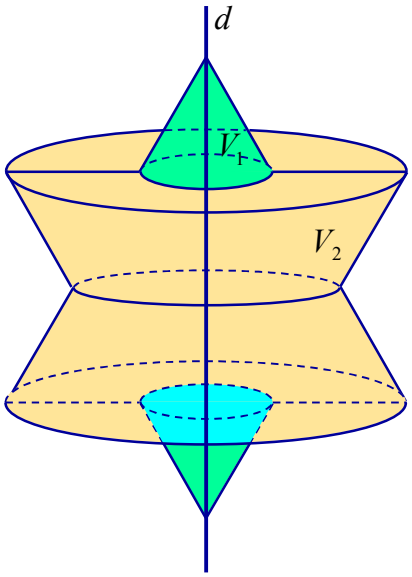


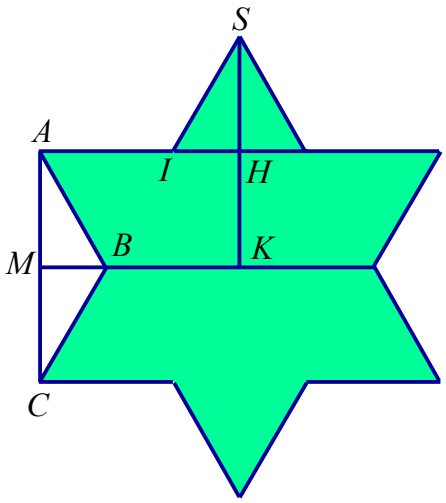
Hình 2

Nguyễn Bảo Vương

A. $\frac{5\pi\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{9\pi\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{5\pi\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{5\pi\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải





Ta có thể tích khối tròn xoay tạo thành bằng 2 lần thể tích nửa trên khi cho hình $SIABK$ quay quanh trục SK.

Tam giác SIH quay quanh trục SK tạo thành khối nón có $r_1 = IH = \frac{1}{2}$; $h_1 = SH = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối nón này bằng $V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = \frac{1}{3}\pi.\frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{24}$

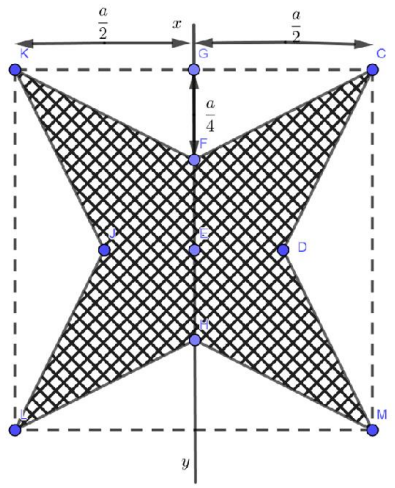
Hình thang vuông $HABK$ quay quanh trục HK tạo thành hình nón cụt có $R = AH = \frac{3}{2}$;

$r = BK = 1$; $h = HK = SH = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối nón cụt này bằng $V_2 = \frac{\pi h}{3}.\left(R^2 + r^2 + R.r\right) = \frac{\pi}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{9}{4} + 1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{19\pi\sqrt{3}}{24}$.

Suy ra thể tích khối tròn xoay đã cho bằng $V = 2\left(V_1 + V_2\right) = \frac{5\sqrt{3}\pi}{3}$.

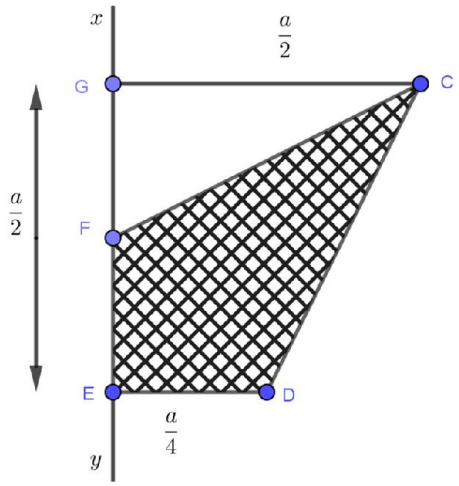
Câu 68. **(THPT Nguyễn Tất Thành - Yên Bái - 2018)** Bên trong hình vuông cạnh a, dựng hình sao bốn cạnh đều như hình vẽ bên (các kích thước cần thiết cho như trong hình). Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình sao đó quanh trục xy.



Nguyễn Bảo Vương

A. $V = \frac{5\pi}{48}a^3$. **B.** $V = \frac{5\pi}{16}a^3$. **C.** $V = \frac{\pi}{6}a^3$. **D.** $V = \frac{\pi}{8}a^3$.

Lời giải



Xét phần gạch chéo quay xung quanh trục xy.

Thể tich khối nón cụt tạo thành khi cho hình thang $EDCG$ quay xung quanh trục xy là:

$$V_1=\frac{\pi h}{3}\left(R^2+R.r+r^2\right)=\frac{\pi a}{6}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{8}+\frac{a^2}{16}\right)=\frac{7\pi a^3}{96}.$$

Thể tích khối nón tạo thành khi cho tam giác FCG quay xung quanh trục xy là:

$$V_2=\frac{1}{3}.FG.\pi.CG^2=\frac{\pi a^3}{48}.$$

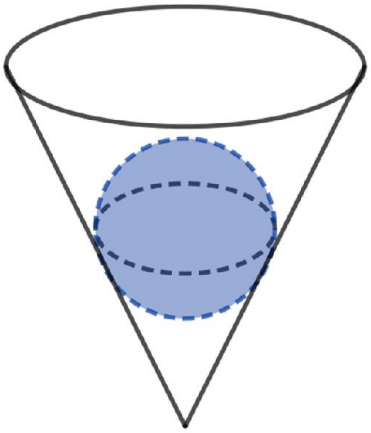
Thể tích khối tòn xoay sinh ra khi cho hình gạch chéo quay xung quanh trục xy là:

$$V_3=V_1-V_2=\frac{5\pi a^3}{96}.$$

Vậy thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình sao đó quanh trục xy là:

$$V=2.V_3=\frac{5\pi a^3}{48}.$$

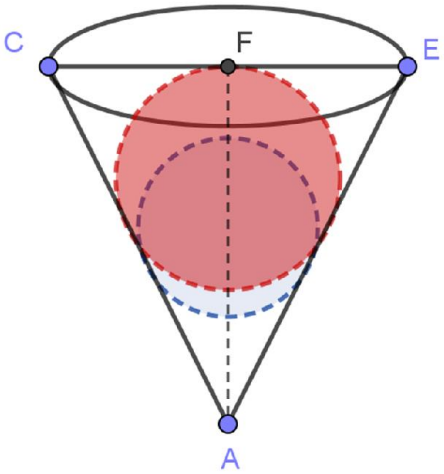
Câu 69. **(THPT Chu Văn An - Hà Nội - 2018)** Bạn An có một cốc giấy hình nón có đường kính đáy là 10 cm và độ dài đường sinh là 8 cm. Bạn dự định đựng một viên kẹo hình cầu sao cho toàn bộ viên kẹo nằm trong cốc (*không phần nào của viên kẹo cao hơn miệng cốc*).



Hỏi bạn An có thể đựng được viên kẹo có đường kính lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $\frac{64}{\sqrt{39}}$ cm. **B.** $\frac{5\sqrt{39}}{13}$ cm. **C.** $\frac{10\sqrt{39}}{13}$ cm. **D.** $\frac{32}{\sqrt{39}}$ cm.

Lời giải



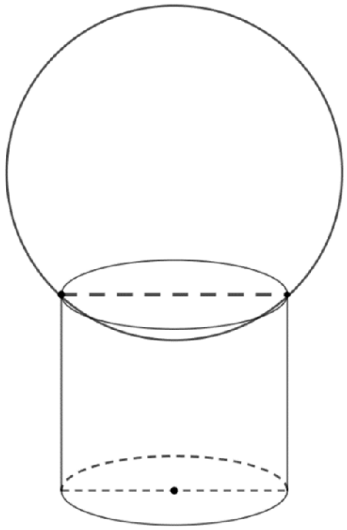
Xét một tiết diện qua trục của hình nón, gồm một tam giác ACE và đường tròn bán kính r tiếp xúc với hai cạnh AC, AE sao cho toàn bộ hình tròn nằm trong tam giác.

Dễ thấy viên bi lớn nhất là viên bi có bán kính bằng bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ACE.

Tức là bằng: $r_0 = \dfrac{S_{ACE}}{\dfrac{1}{2}(AC+AE+CE)} = \dfrac{10.\sqrt{8^2-5^2}}{8+8+10} = \dfrac{10\sqrt{39}}{26} = \dfrac{5\sqrt{39}}{13}$.

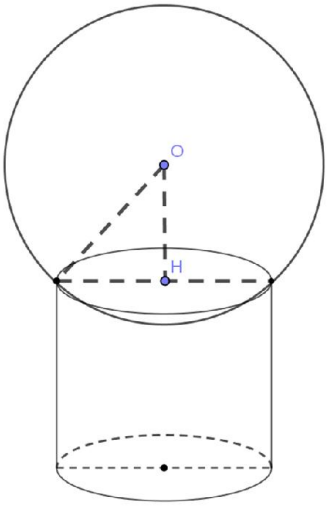
Đường kính $2r_0 = \dfrac{10\sqrt{39}}{13}$.

Câu 70. **(Chuyên Nguyễn Đình Triểu - Đồng Tháp - 2018)** Một trái banh và một chiếc chén hình trụ có cùng chiều cao. Người ta đặt trái banh lên hình trụ thấy phần ở bên ngoài của quả bóng có chiều cao bằng $\dfrac{3}{4}$ chiều cao của nó. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của quả bóng và chiếc chén, khi đó:



A. $9V_1 = 8V_2$. **B.** $3V_1 = 2V_2$. **C.** $16V_1 = 9V_2$. **D.** $27V_1 = 8V_2$.

Lời giải



Gọi R là bán kính mặt cầu, r, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao hình trụ.

Theo bài ra ta có: $h = 2R$ và $r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$, $V_2 = \pi r^2 h = \pi \frac{3R^2}{4}.2R = \frac{3\pi R^3}{2} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{8}{9}$ hay $9V_1 = 8V_2$.

Nguyễn Bảo Vương