

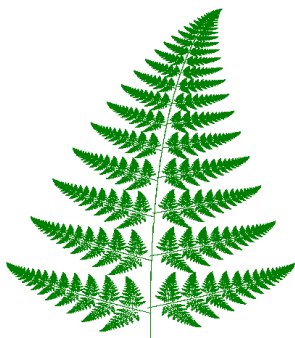
CHUYÊN ĐỀ: ỨNG DỤNG CỦA CẤP SỐ TRONG BÀI TOÁN HÌNH HỌC

Tác giả: Thái Nguyễn

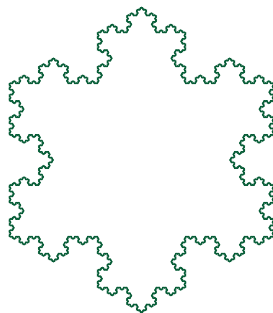
Ngày 23 tháng 6 năm 2026

Tóm tắt nội dung

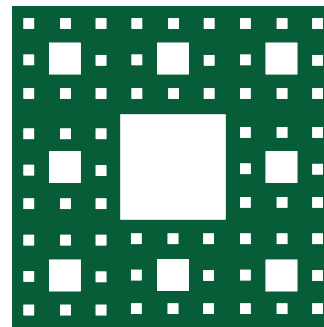
Bạn có bao giờ tự hỏi làm thế nào để đo lường và tính toán sự vô hạn? Trong thế giới hình học, có những cấu trúc kỳ diệu mang tính **tự đồng dạng**¹ - nơi một chi tiết nhỏ bé lại chính là bản sao hoàn hảo của toàn bộ hình khối. Từ những chiếc lá dương xỉ trong tự nhiên, bông tuyết Koch tuyệt mỹ, cho đến những bài toán dây tam giác, hình vuông lồng nhau chằng chịt, tất cả đều ẩn chứa một quy luật toán học rất quen thuộc: cấp số nhân.



(a) Dương xỉ Barnsley



(b) Bông tuyết Koch



(c) Tầm thẳm Sierpinski

Chuyên đề này sẽ cung cấp cho bạn chiếc chìa khóa để kết nối hai phân môn tưởng chừng biệt lập: Hình học và Cấp số. Bằng cách nhận diện tỉ số đồng dạng, chúng ta sẽ biến bài toán tính tổng chu vi, diện tích của vô số hình phức tạp thành bài toán tính tổng của một cấp số nhân quen thuộc. Hi vọng tài liệu sẽ cung cấp cho bạn hướng tư duy mạch lạc để giải quyết các câu hỏi phân loại trong các kỳ thi và đồng thời mở ra cho bạn một góc nhìn đầy tính thẩm mỹ về Toán học.

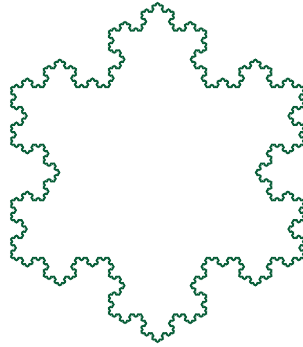
¹Mặc dù có nhắc đến nhưng đây không phải tài liệu về hình học Fractal.

Mục lục

1 Bài toán mở đầu	3
2 Cơ sở lý thuyết	4
2.1 Tính lặp lại	4
2.2 Phép đồng dạng	4
2.3 Cấp số nhân	5
3 Các mô hình bài toán hình học cấp số điển hình	6
3.1 Bài toán tẩm thắm Sierpinski	6
3.2 Bài toán bông tuyết của Von Koch	8
4 Bài tập tự luyện	11
Tài liệu tham khảo	22

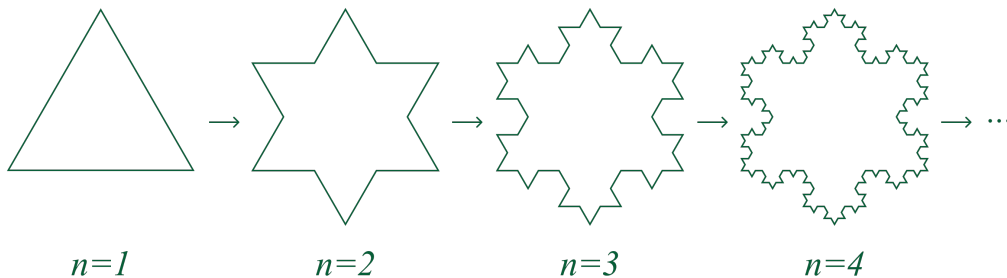
1 Bài toán mở đầu

Liệu có một hình nào có diện tích hữu hạn nhưng lại có chu vi vô hạn không?



Bông tuyết Von Koch (được nhà toán học người Thụy Điển Helge von Koch giới thiệu năm 1904) là một trong những hình có cấu trúc tự đồng dạng đầu tiên được mô tả. Nó được tạo thành bằng các bước sau đây:

- **Bước 1** ($n = 1$): Bắt đầu với một tam giác đều cạnh 1 đơn vị.
- **Bước 2** ($n = 2$): Chia mỗi cạnh của tam giác thành 3 đoạn bằng nhau. Xóa đoạn ở giữa và thay thế bằng hai đoạn thẳng tạo thành một tam giác đều nhỏ hướng ra ngoài.
- **Bước n** ($n \geq 3$): Tiếp tục lặp lại quá trình trên, thay thế đoạn thẳng ở giữa của mỗi cạnh bằng một "mũi nhọn" tam giác đều hướng ra ngoài.



Gọi P_n và S_n lần lượt là chu vi và diện tích của bông tuyết ở bước thứ n , thì bằng các biến đổi toán học, ta sẽ có:

$$P_n = P_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

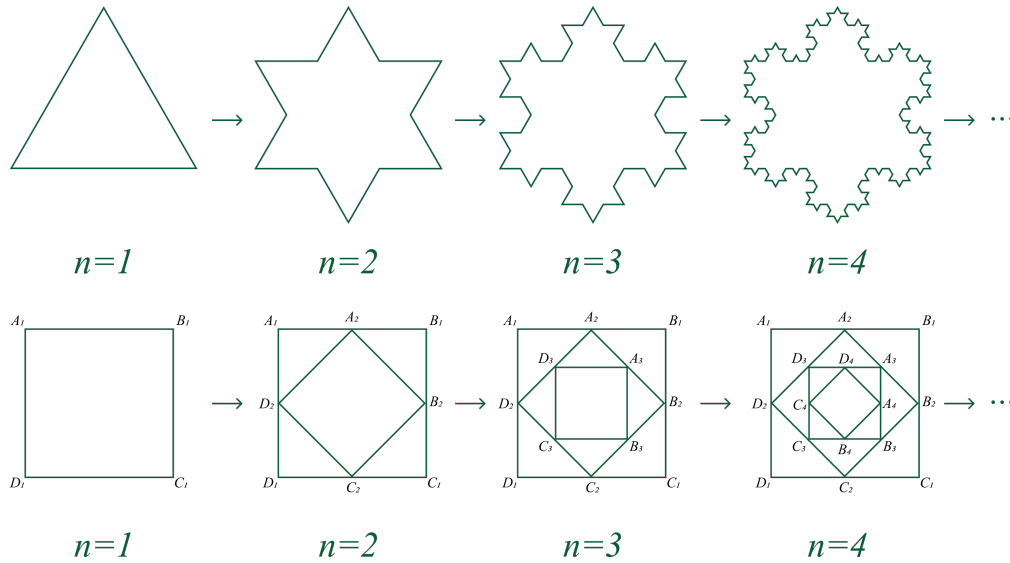
$$S_n = \frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

Nếu bạn thử tính giới hạn khi ta lặp lại các bước trên vô số lần ($n \rightarrow \infty$) thì $\lim P_n = \infty$ còn $\lim S_n = \frac{2\sqrt{3}}{5}$. Tức là: mặc dù diện tích của hình này là hữu hạn nhưng chu vi của nó lại lớn tới mức không thể đo đếm được. Thật kì diệu phải không? Ta sẽ cùng tìm hiểu và chứng minh nhé!

2 Cơ sở lý thuyết

2.1 Tính lặp lại

Giống như bài toán **Bông tuyết Von Koch**, cách tạo ra các hình khối có tính tự đồng dạng sẽ yêu cầu bạn phải lặp đi lặp lại một hành động nhiều lần, đây chính là tính lặp lại: tạo ra hình mới bằng cách biến đổi hình cũ theo một quy tắc nào đó. Nó giống như việc bạn tìm số hạng của dãy số bằng công thức truy hồi: $u_{n+1} = f(u_n)$ trong đó f là một phép biến đổi, một quy tắc nào đó cho trước.



Nhiệm vụ của bạn là đọc hiểu kỹ quy tắc lặp lại mà bài cho và trả lời câu hỏi: khi qua phép biến đổi như vậy, hình mới sẽ liên hệ với hình cũ như thế nào? Từ đó tìm ra số hạng tổng quát và tính toán yêu cầu đề bài.

2.2 Phép đồng dạng

Điểm mấu chốt của một số cấu trúc tự đồng dạng chính là phép đồng dạng, nên ta sẽ ôn lại một chút về phép biến đổi hình học này thông qua định nghĩa bên dưới.

Phép đồng dạng

Phép biến hình F được gọi là phép đồng dạng tỉ số k ($k > 0$) nếu với hai điểm M, N bất kỳ và ảnh M', N' tương ứng của chúng, ta luôn có:

$$M'N' = k \cdot MN$$



Chú ý: Phép đồng dạng khác với phép vị tự cần tâm O và tỉ số $k(k \neq 0)$, phép đồng dạng chỉ quan tâm đến tỉ lệ khoảng cách tương đối giữa các điểm mà không cần một tâm biến hình cụ thể.

Định lý về tỉ số diện tích và thể tích của các hình đồng dạng

Nếu hai hình phẳng (hoặc khối hình trong không gian) H và H' đồng dạng với nhau theo tỉ số k ($k > 0$) thì:

- Tỉ số giữa các đoạn thẳng tương ứng (hoặc chu vi tương ứng P và P') bằng k :

$$\frac{P'}{P} = k$$

- Tỉ số giữa hai diện tích tương ứng S và S' bằng bình phương tỉ số đồng dạng:

$$\frac{S'}{S} = k^2$$

- Tỉ số giữa hai thể tích tương ứng V và V' bằng lập phương tỉ số đồng dạng:

$$\frac{V'}{V} = k^3$$

Hệ quả ứng dụng vào Cấp số nhân: Khi một cấu trúc hình học được tạo nên bằng cách lặp lại liên tiếp một phép đồng dạng với tỉ số k ($k \neq 0$):

- Dãy các chu vi tương ứng tạo thành một cấp số nhân với công bội $q = k$.
- Dãy các diện tích tương ứng tạo thành một cấp số nhân với công bội $q = k^2$.
- Dãy các thể tích tương ứng tạo thành một cấp số nhân với công bội $q = k^3$.

2.3 Cấp số nhân

Để tính toán được tổng chu vi hay diện tích của một dãy các cấu trúc hình học lặp lại đến vô hạn, kiến thức nền tảng về đại số, cụ thể là cấp số nhân, là công cụ không thể thiếu.

Cấp số nhân

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với một số không đổi q . Số q được gọi là *công bội* của cấp số nhân.

$$u_{n+1} = u_n \cdot q \quad (n \geq 1)$$

Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q , thì số hạng tổng quát u_n được xác định theo công thức:

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \quad (n \geq 1)$$

Tổng n số hạng đầu của cấp số nhân

Cho cấp số nhân (u_n) có công bội $q \neq 1$. Tổng n số hạng đầu tiên $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ được tính bởi công thức:

$$S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Nếu $q = 1$ thì dãy số trở thành dãy không đổi và $S_n = n \cdot u_1$.

Chú ý: Với cấp số nhân lùi vô hạn ($|q| < 1$), khi số lượng số hạng n tiến tới dương vô cực ($n \rightarrow +\infty$) thì giới hạn của q^n tiến về 0. Do đó, tổng của tất cả vô số các số hạng trong cấp số nhân lùi vô hạn này (kí hiệu là S) sẽ hội tụ về một giá trị hữu hạn:

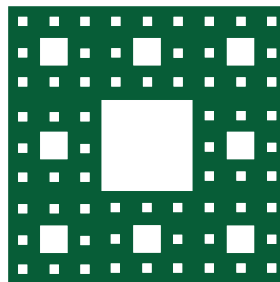
$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1 - q}$$

3 Các mô hình bài toán hình học cấp số điển hình

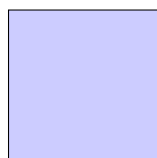
3.1 Bài toán tấm thảm Sierpinski

Ví dụ 1: Tấm thảm Sierpinski

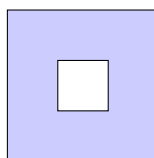
Một hình vuông có cạnh bằng a . Chia hình vuông đó thành 9 hình vuông bằng nhau và bỏ đi hình vuông ở chính giữa. Với mỗi hình vuông nhỏ hơn chưa bị bỏ đi, lại chia thành 9 hình vuông bằng nhau và bỏ đi hình vuông ở chính giữa. Cứ thế, quá trình trên được lặp lại. Tính chu vi và diện tích phần còn lại của hình vuông ban đầu sau vô hạn lần chia?



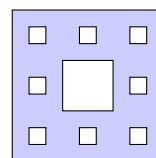
Lời giải:



$n = 0$



$n = 1$



$n = 2$

a) Khảo sát chu vi của tấm thảm

Chu vi của tấm thảm ở bước thứ n (P_n) bao gồm chu vi hình vuông lớn bên ngoài cộng với tổng chu vi của tất cả các lỗ hổng hình vuông đã bị loại bỏ tính đến bước đó.

- Gọi P_0 là chu vi hình vuông biên ngoài ban đầu: $P_0 = 4a$.
- Lần 1:** Ta tạo ra 1 lỗ hổng hình vuông cạnh $\frac{a}{3}$. Chu vi tăng thêm là:

$$\Delta P_1 = 4 \cdot \frac{a}{3} = \frac{4a}{3}$$

- Lần 2:** Ta tạo thêm 8 lỗ hổng hình vuông cạnh $\frac{a}{9}$. Tổng chu vi tăng thêm ở bước này là:

$$\Delta P_2 = 8 \cdot \left(4 \cdot \frac{a}{9}\right) = \frac{32a}{9} = \frac{4a}{3} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)$$

- Lần n :** Số lượng lỗ hổng tạo thêm là 8^{n-1} , mỗi lỗ hổng có cạnh $\frac{a}{3^n}$. Tổng chu vi tăng thêm là:

$$\Delta P_n = 8^{n-1} \cdot \left(4 \cdot \frac{a}{3^n}\right) = 4a \cdot \frac{8^{n-1}}{3^n} = \frac{4a}{3} \left(\frac{8}{3}\right)^{n-1}$$

Dãy các chu vi tăng thêm $\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_n$ là một cấp số nhân gồm n số hạng, với số hạng đầu $u_1 = \frac{4a}{3}$ và công bội $q = \frac{8}{3}$.

- Tổng chu vi sau n lần chia:**

$$\begin{aligned} P_n &= P_0 + \Delta P_1 + \Delta P_2 + \dots + \Delta P_n = 4a + \frac{4a}{3} \cdot \frac{\left(\frac{8}{3}\right)^n - 1}{\frac{8}{3} - 1} \\ &= 4a + \frac{4a}{3} \cdot \frac{\left(\frac{8}{3}\right)^n - 1}{\frac{5}{3}} = 4a + \frac{4a}{5} \left[\left(\frac{8}{3}\right)^n - 1\right] \\ &= \frac{16a}{5} + \frac{4a}{5} \left(\frac{8}{3}\right)^n \end{aligned}$$

- Sau vô hạn lần chia ($n \rightarrow +\infty$):** Vì $\frac{8}{3} > 1$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{8}{3}\right)^n = +\infty$. Suy ra:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = +\infty$$

b) Khảo sát diện tích phần còn lại

Để giải quyết bài toán này, chúng ta có thể tính tổng diện tích các phần đã bị loại bỏ, rồi lấy diện tích hình vuông ban đầu trừ đi.

- Lần 1:** Bỏ đi 1 hình vuông có cạnh $\frac{a}{3}$. Diện tích bị bỏ đi là:

$$u_1 = 1 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}a^2$$

- Lần 2:** Còn lại 8 hình vuông, mỗi hình vuông ta bỏ đi 1 hình vuông nhỏ ở giữa có cạnh $\frac{a}{9}$. Diện tích bị bỏ đi thêm là:

$$u_2 = 8 \cdot \left(\frac{a}{9}\right)^2 = \frac{8}{81}a^2 = u_1 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)$$

- **Lần 3:** Còn lại $8 \times 8 = 64$ hình vuông nhỏ hơn, mỗi hình ta bỏ đi 1 hình vuông có cạnh $\frac{a}{27}$. Diện tích bị bỏ đi thêm là:

$$u_3 = 64 \cdot \left(\frac{a}{27}\right)^2 = \frac{64}{729}a^2 = u_1 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

- **Lần n:** Có thể thấy dãy diện tích bị loại bỏ ở từng bước (u_n) lập thành một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{9}a^2$ và công bội $q' = \frac{8}{9}$.
- **Tổng diện tích bị bỏ đi sau vô hạn lần:** Vì $|q'| = \frac{8}{9} < 1$, đây là một cấp số nhân lùi vô hạn. Tổng diện tích các phần bị khoét đi là:

$$S_{\text{bỏ}} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots = \frac{u_1}{1 - q'} = \frac{\frac{1}{9}a^2}{1 - \frac{8}{9}} = \frac{\frac{1}{9}a^2}{\frac{1}{9}} = a^2$$

- **Kết luận:** Sau vô hạn bước, tổng diện tích các phần bị khoét bỏ đi đúng bằng diện tích hình vuông ban đầu (a^2) . Do đó, diện tích phần thảnh còn lại là:

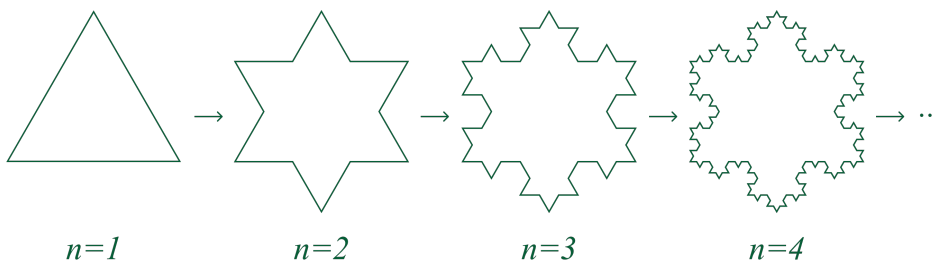
$$S_{\text{còn lại}} = S_{\text{ban đầu}} - S_{\text{bỏ}} = a^2 - a^2 = 0$$

3.2 Bài toán bông tuyết của Von Koch

Ví dụ 2: Bông tuyết của Von Koch

Ta bắt đầu với một tam giác đều cạnh a (đơn vị độ dài) và thực hiện quá trình lặp:

- **Bước 1** ($n = 1$): Bắt đầu với một tam giác đều.
- **Bước 2** ($n = 2$): Chia mỗi cạnh của tam giác thành 3 đoạn bằng nhau. Xóa đoạn ở giữa và thay thế bằng hai đoạn thẳng tạo thành một tam giác đều nhỏ hướng ra ngoài.
- **Bước n** ($n \geq 3$): Tiếp tục lặp lại quá trình trên, thay thế đoạn thẳng ở giữa của mỗi cạnh bằng một "mũi nhọn" tam giác đều hướng ra ngoài.



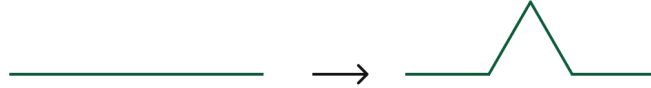
Gọi P_n và S_n lần lượt là chu vi và diện tích của bông tuyết ở bước thứ n .

- Hãy thiết lập công thức tính chu vi P_n . Tính số bước lặp n nhỏ nhất để chu vi bông tuyết vượt qua $1000a$ đơn vị độ dài.
- Hãy thiết lập công thức tính diện tích S_n . Khi quá trình lặp tiếp diễn mãi mãi ($n \rightarrow +\infty$), diện tích của bông tuyết tiến tới giá trị nào?

Lời giải:

a) Tính chu vi và tìm n để $P_n > 1000$:

- Ở bước 1, tam giác đều ban đầu có 3 cạnh, mỗi cạnh dài a . Chu vi $P_1 = 3a$.
- Qua mỗi bước, một đoạn thẳng được chia làm 3 phần, xóa phần ở giữa và thay bằng 2 đoạn thẳng mới có cùng độ dài (tạo thành "mũi nhọn") nên 1 đoạn thẳng sẽ biến thành 4 đoạn thẳng mới, mỗi đoạn có độ dài bằng $\frac{1}{3}$ đoạn cũ.



Do đó, chu vi của hình mới luôn bằng $\frac{4}{3}$ chu vi của hình ở bước trước. Dãy số chu vi (P_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu $P_1 = 3a$ và công bội $q = \frac{4}{3}$.

- Công thức chu vi ở bước thứ n là:

$$P_n = P_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

- Để chu vi vượt quá 1000 đơn vị độ dài, ta đi giải bất phương trình số mũ:

$$3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} > 1000 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} > \frac{1000}{3}$$

Lấy logarit cơ số $\frac{4}{3}$ hai vế, ta được:

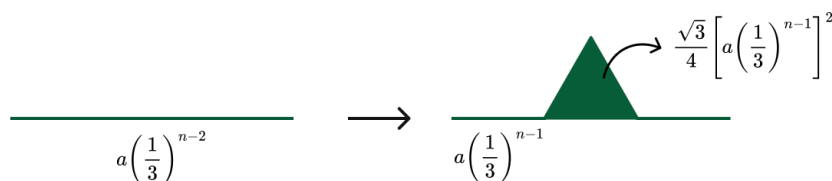
$$n - 1 > \log_{\frac{4}{3}} \left(\frac{1000}{3}\right) \approx 20,19 \Rightarrow n > 21,19$$

Vậy kể từ bước thứ $n = 22$, chu vi của bông tuyết sẽ lớn hơn $1000a$.

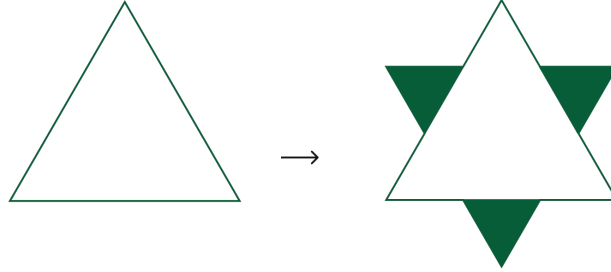
Nhật xét: Khi $n \rightarrow +\infty$, thì chu vi của bông tuyết cũng tiến tới vô hạn.

b) Tính diện tích khi $n \rightarrow +\infty$:

- Diện tích tam giác đều cạnh a ban đầu: $S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
- Qua mỗi bước, số cạnh của bông tuyết tăng lên 4 lần nhưng chiều dài mỗi cạnh lại giảm đi 3 lần. Như vậy, số cạnh của bông tuyết ở bước thứ n ($n \geq 2$) là $N_n = 3 \cdot 4^{n-1}$ cạnh và mỗi cạnh có độ dài $a \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.



Và với mỗi cạnh của hình cũ, ta thêm vào một phần diện tích của một tam giác đều nhỏ có độ dài cạnh mới là $a \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$. Diện tích mỗi tam giác đó là $\frac{\sqrt{3}}{4} \left[a \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right]^2$



Mà hình cũ là hình có $N_{n-1} = 3 \cdot 4^{n-2}$ cạnh, vậy tổng diện tích các tam giác nhỏ được thêm vào ở bước n là:

$$\Delta S_n = (3 \cdot 4^{n-2}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \left[a \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right]^2 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4^{n-2}}{9^{n-1}} = S_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}$$

- Diện tích S_n của bông tuyết ở bước n là tổng diện tích ban đầu và các phần diện tích tăng thêm:

$$\begin{aligned} S_n &= S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \cdots + \Delta S_n \\ &= S_1 + \frac{1}{3}S_1 + \frac{1}{3}S_1 \cdot \left(\frac{4}{9}\right) + \frac{1}{3}S_1 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{3}S_1 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2} \\ &= S_1 \left[1 + \underbrace{\frac{1}{3} \left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2} \right)}_{\text{Tổng của cấp số nhân có } n-1 \text{ số hạng}} \right] \end{aligned}$$

- Khi $n \rightarrow +\infty$, thì $(n-1) \rightarrow +\infty$, ta có giới hạn diện tích áp dụng tổng cấp số nhân lùi vô hạn:

$$S_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{u_1}{1-q'} \right) = S_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{9}} \right) = \frac{8}{5} S_1$$

- Thay giá trị $S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, diện tích toàn phần của bông tuyết khi $n \rightarrow +\infty$ là:

$$S_\infty = \frac{8}{5} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{5}$$

4 Bài tập tự luyện

Câu 1[29Edu]: Cho một đoạn thẳng ban đầu có độ dài bằng $a = 1$. Ta thực hiện các bước sau:

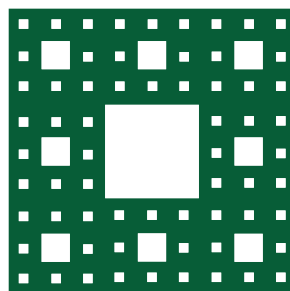
1. Chia đoạn thẳng này thành 3 phần bằng nhau và xóa đi phần đoạn thẳng ở chính giữa (không bao gồm hai nút). Khi đó ta còn lại 2 đoạn thẳng, mỗi đoạn có độ dài $\frac{a}{3}$.
2. Với mỗi đoạn thẳng còn lại, ta tiếp tục chia làm 3 phần bằng nhau và xóa đi đoạn ở chính giữa. Khi đó ta còn lại 4 đoạn thẳng, mỗi đoạn có độ dài $\frac{a}{9}$.
3. Lặp lại quá trình trên nhiều lần.



Hãy tính tổng độ dài của tất cả các đoạn thẳng đã bị xóa đi sau 8 bước. Làm tròn đến hàng phần chục

Điền đáp án: _____

Câu 2[29Edu]: Một hình vuông có cạnh bằng 3. Chia hình vuông đó thành 9 hình vuông bằng nhau và tô màu hình vuông ở chính giữa. Với mỗi hình vuông nhỏ chưa được tô màu, lại chia thành 9 hình vuông bằng nhau và tô màu hình vuông ở chính giữa. Cứ như thế, quá trình trên được lặp lại. Tính diện tích phần được tô màu sau 3 lần chia. Làm tròn đến hàng phần chục.

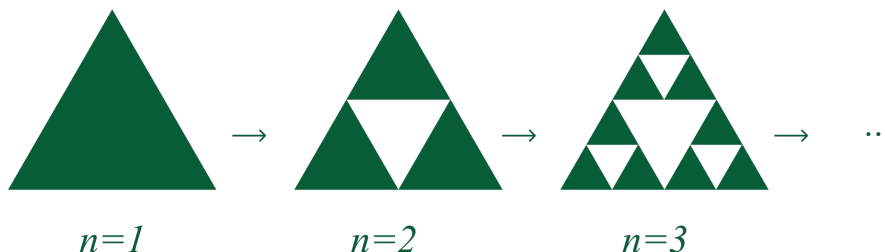


Điền đáp án: _____

Câu 3[29Edu]: Khởi đầu với một tam giác đều, ta thực hiện các bước sau:

1. Chia nhỏ tam giác này thành 4 tam giác đều bằng nhau, sau đó ta loại bỏ tam giác ở chính giữa (trung tâm).
2. Lặp lại bước trên cho các tam giác còn lại.

Quá trình này có thể tiến ra vô hạn, và ta được một fractal, được gọi là tam giác Sierpinski. Tính diện tích phần còn lại sau 10 lần chia. Làm tròn đến hàng phần chục.

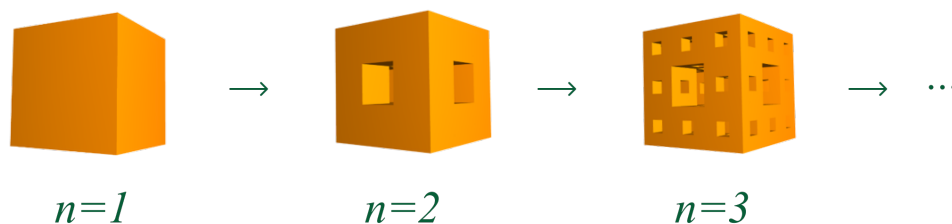


Điền đáp án: _____

Câu 4[29Edu]: Một hình lập phương có cạnh bằng 9, ta thực hiện các bước sau:

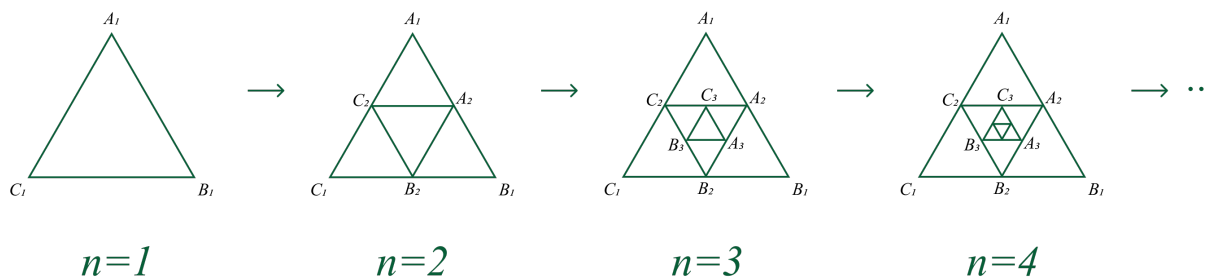
1. Chia khối lập phương ban đầu thành 27 khối lập phương nhỏ hơn, bằng nhau, tương tự như cấu trúc của một khối Rubik kích thước $3 \times 3 \times 3$.
2. Loại bỏ khối lập phương nhỏ nằm ở chính giữa (trung tâm của khối lớn) và 6 khối lập phương nhỏ nằm ở trung tâm của 6 mặt. Tức là ta loại bỏ tổng cộng 7 khối và giữ lại 20 khối lập phương nhỏ.
3. Lặp lại quy trình trên đối với mỗi khối lập phương nhỏ còn lại.

Khi quá trình này được lặp lại nhiều lần, hình khối còn thu được chính là bọt biển Menger. Tính thể tích khối bọt biển sau 20 lần chia. Làm tròn đến hàng phần chục.



Điền đáp án: _____

Câu 5[29Edu]: Một tam giác đều ABC có cạnh $AB = 1$, diện tích S_1 . Nối 3 trung điểm A_1, B_1, C_1 theo thứ tự của 3 cạnh AB, BC, CA ta được tam giác đều thứ hai là $A_1B_1C_1$ có diện tích S_2 . Tiếp tục như thế ta được tam giác đều thứ ba $A_2B_2C_2$ có diện tích S_3 và cứ tiếp tục như thế, ta được diện tích $S_4, S_5, \dots$. Tính $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{100}$. Làm tròn đến hàng phần chục

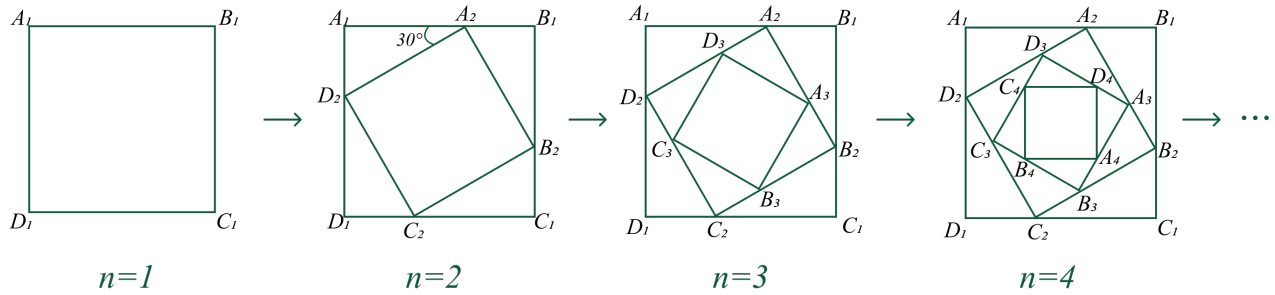


Điền đáp án: _____

Câu 6[29Edu]: Cho một hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có độ dài cạnh là $A_1B_1 = 1$ và diện tích là S_1 . Trên các cạnh $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1$ lần lượt lấy các điểm A_2, B_2, C_2, D_2 sao cho tứ giác $A_2B_2C_2D_2$ là một hình vuông và góc $\widehat{A_1A_2D_2} = 30^\circ$. Hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ có diện tích là S_2 .

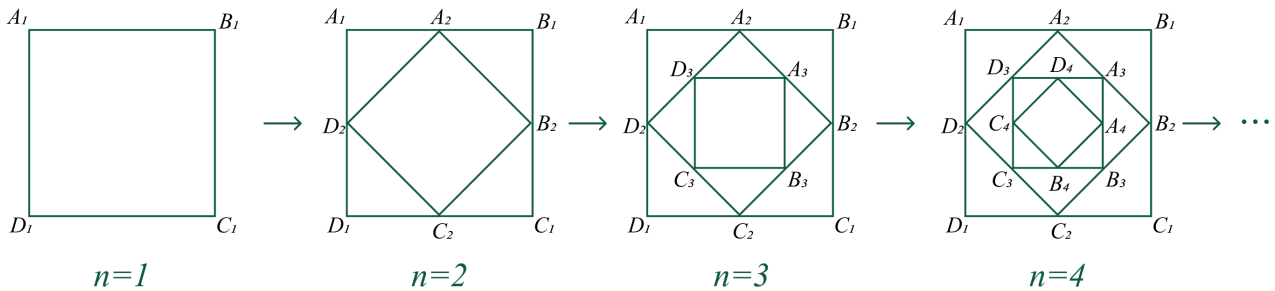
Tiếp tục lặp lại quá trình này: trên các cạnh của hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ lấy các điểm A_3, B_3, C_3, D_3 để tạo thành hình vuông thứ ba có diện tích S_3 , và cứ tiếp tục như thế ta thu được dãy diện tích $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$

Tính tổng diện tích của 100 hình vuông đầu tiên $S = S_1 + S_2 + \dots + S_{100}$. Làm tròn đến hàng phần chục.



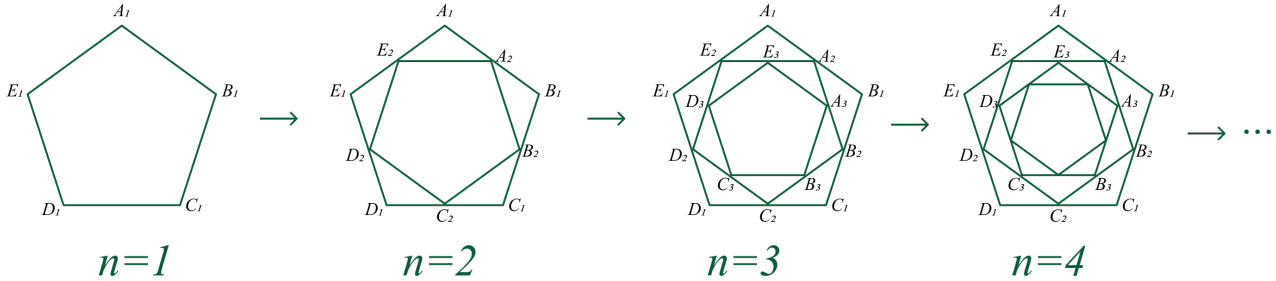
Điền đáp án: _____

Câu 7[29Edu]: Một hình vuông $ABCD$ có cạnh $AB = a$, diện tích S_1 . Nối 4 trung điểm A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự của 4 cạnh AB, BC, CD, DA ta được hình vuông thứ hai là $A_1B_1C_1D_1$ có diện tích S_2 . Tiếp tục như thế ta được hình vuông thứ ba $A_2B_2C_2D_2$ có diện tích S_3 và cứ tiếp tục như thế, ta được diện tích S_4, S_5 . Tính $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{100}$, làm tròn đến hàng phần chục.



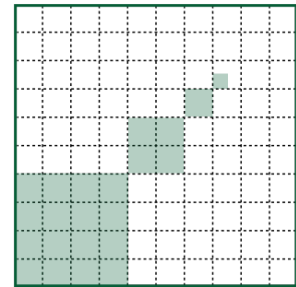
Điền đáp án: _____

Câu 8[29Edu]: Một ngũ giác đều $A_1B_1C_1D_1E_1$ có diện tích $S_1 = 1$ đơn vị diện tích. Nối 5 trung điểm của 5 cạnh liên tiếp ta được ngũ giác đều thứ hai là $A_2B_2C_2D_2E_2$ có diện tích S_2 . Tiếp tục quá trình như thế ta được ngũ giác đều thứ ba có diện tích S_3 và cứ tiếp tục, ta được diện tích $S_4, S_5, \dots$. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{100}$, làm tròn đến hàng phần chục.



Điền đáp án: _____

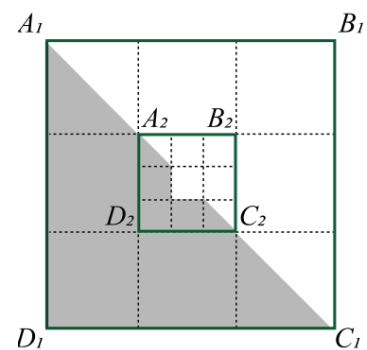
Câu 9[29Edu]: Để trang trí cho quán trà sữa sắp mở của mình, bạn Việt quyết định tô màu một mảng tường hình vuông cạnh bằng 1m. Phần tô màu dự kiến là các hình vuông nhỏ được đánh số lần lượt là 1, 2, 3, n (các hình vuông được tô màu đen), trong đó cạnh của hình vuông kế tiếp bằng một nửa cạnh hình vuông trước đó (hình vẽ). Giả sử quá trình tô màu của Việt có thể diễn ra nhiều giờ. Hỏi bạn Việt tô màu đến hình vuông thứ mấy thì diện tích của hình vuông được tô bắt đầu nhỏ hơn $\frac{1}{1000}(\text{m}^2)$?



Điền đáp án: _____

Câu 10[29Edu]: Với hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ như hình vẽ bên, cách tô màu như phần gạch sọc được gọi là cách tô màu "đẹp". Một nhà thiết kế tiến hành tô màu cho một hình vuông như hình bên, theo quy trình sau:

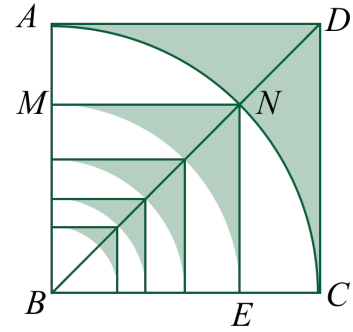
- Bước 1: Tô màu "đẹp" cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$.
- Bước 2: Tô màu "đẹp" cho hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ là hình vuông ở chính giữa khi chia hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ thành 9 phần bằng nhau như hình vẽ.
- Bước 3: Tô màu "đẹp" cho hình vuông $A_3B_3C_3D_3$ là hình vuông ở chính giữa khi chia hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ thành 9 phần bằng nhau. Cứ tiếp tục như vậy.



Hỏi cần ít nhất bao nhiêu bước để tổng diện tích phần được tô màu chiếm 49,99%?

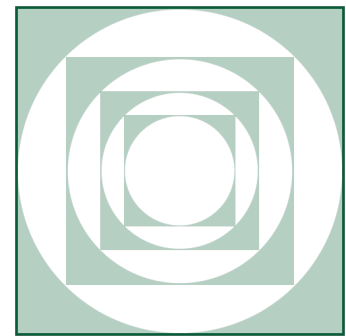
Điền đáp án: _____

Câu 11[29Edu]: Bác Bình muốn trang trí một bức vách gỗ hình vuông kích thước 6 m, bác đề xuất ý tưởng: coi bức vách ban đầu là hình vuông $ABCD$, vẽ $\frac{1}{4}$ đường tròn tâm B , bán kính AB và phủ lớp keo epoxy màu cho phần giữa cung tròn với hình vuông $ABCD$. Từ giao điểm N của đường chéo BD và cung tròn, dựng hình vuông $BMNE$ và tiếp tục vẽ $\frac{1}{4}$ đường tròn tâm B , bán kính BM rồi phủ keo cho phần giữa cung tròn mới và hình vuông $BMNE$ (hình vẽ). Quá trình này lặp lại cho đến khi phủ keo được 5 mảng màu. Tính tổng số phần diện tích cần phủ keo theo đơn vị m^2 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Điền đáp án: _____

Câu 12[29Edu]: Một loại gạch men có kích thước hình vuông 60×60 cm. Người ta thiết kế hoa văn cho viên gạch bằng cách tạo đường tròn (C_1) nội tiếp hình vuông ban đầu, phần nằm ngoài đường tròn (C_1) mà thuộc viên gạch thì được tô màu đậm. Tiếp theo họ tạo ra một hình vuông nội tiếp đường tròn (C_1), bên trong hình vuông này lại có một đường tròn nội tiếp (C_2); và họ tiếp tục tô màu đậm cho phần nằm ngoài đường tròn (C_2) mà thuộc hình vuông này. Quy luật này cứ thế tiếp tục vô hạn lần (tham khảo hình vẽ). Hỏi tổng diện tích thuộc về viên gạch được tô màu đậm là bao nhiêu cm vuông? (Kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị của cm vuông.)

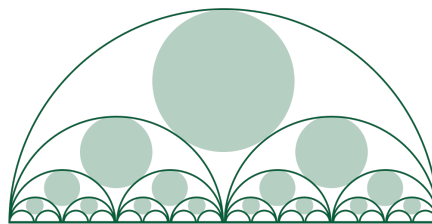


Điền đáp án: _____

Câu 13[29Edu]: Từ một tấm vải hình bán nguyệt đường kính 1m. Người nghệ nhân muốn vẽ một bức tranh trừu tượng bằng cách tô màu theo quy luật sau:

1. Dựng hai hình bán nguyệt có đường kính bằng bán kính của hình bán nguyệt ban đầu, sau đó dựng một đường tròn tiếp xúc ngoài với 2 hình bán nguyệt mới và tiếp xúc trong với hình bán nguyệt cũ và tô màu cho nó.
2. Lặp lại với hai hình bán nguyệt mới vừa dựng.

Tổng diện tích phần tô màu là bao nhiêu m^2 . Làm tròn đến hàng phần trăm.

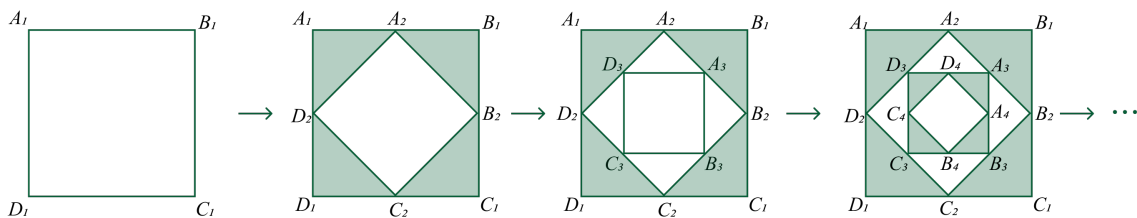


Điền đáp án: _____

Câu 14[29Edu]: Một viên gạch hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh $AB = 1$. Người ta bắt đầu trang trí viên gạch bằng cách tô màu như sau:

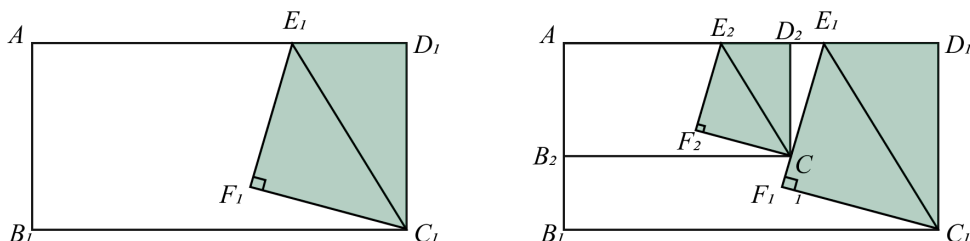
1. Nối 4 trung điểm A_2, B_2, C_2, D_2 theo thứ tự của 4 cạnh $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1$ ta được hình vuông thứ hai là $A_2B_2C_2D_2$ và 4 tam giác vuông cân, người ta tô màu 4 tam giác vuông cân này.
2. Nối 4 trung điểm A_3, B_3, C_3, D_3 theo thứ tự của 4 cạnh $A_2B_2, B_2C_2, C_2D_2, D_2A_2$ ta được hình vuông thứ 3 là $A_3B_3C_3D_3$.
3. Nối 4 trung điểm A_4, B_4, C_4, D_4 theo thứ tự của 4 cạnh $A_3B_3, B_3C_3, C_3D_3, D_3A_3$ ta được hình vuông thứ hai là $A_4B_4C_4D_4$ và 4 tam giác vuông cân, người ta tô màu 4 tam giác vuông cân này.
4. Lặp lại các bước trên vô hạn lần. (Tham khảo hình vẽ)

Tổng diện tích phần tô màu có dạng $\frac{m}{n}$ với m, n nguyên tố cùng nhau. Tính $m + n$



Điền đáp án: _____

Câu 15[29Edu]: Cho hình chữ nhật $AB_1C_1D_1$ có độ dài cạnh $AD_1 = 2AB_1 = 20$ cm. Điểm E_1 thuộc đoạn AD_1 sao cho $AE_1 = 3E_1D_1$. Lấy điểm F_1 sao cho tam giác $F_1E_1C_1$ vuông cân tại F_1 (F_1 và D_1 khác phía nhau so với đường thẳng C_1E_1), sau đó tô đậm tứ giác $C_1D_1E_1F_1$ (hình 1). Tiếp theo lấy điểm B_2 trên đoạn AB_1 , điểm C_2 trên đoạn E_1F_1 và điểm D_2 trên đoạn AE_1 sao cho $AD_2 = 2AB_2$ và thỏa mãn $AB_2C_2D_2$ là hình chữ nhật. Điểm E_2 thuộc đoạn AD_2 sao cho $AE_2 = 3E_2D_2$. Lấy điểm F_2 sao cho tam giác $F_2E_2C_2$ vuông cân tại F_2 (F_2 và D_2 khác phía nhau so với đường thẳng C_2E_2), sau đó tô đậm tứ giác $C_2D_2E_2F_2$ (hình 2). Cứ tiếp tục như vậy, tính tổng vô hạn các hình tứ giác được tô đậm là $T(\text{cm}^2)$, tính $46T$.



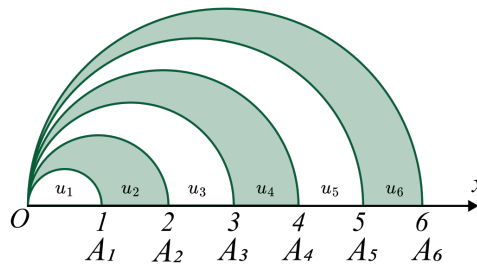
Điền đáp án: _____

Câu 16[29Edu]: Trên trục Ox lấy các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ sao cho $OA_n = n$, với mỗi số nguyên dương n . Trong cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa trục Ox , vẽ các nửa đường tròn đường kính OA_n với $n = 1, 2, 3, \dots$

Kí hiệu:

- u_1 là diện tích của nửa hình tròn đường kính OA_1 .
- u_n là diện tích của hình giới hạn bởi nửa đường tròn đường kính OA_{n-1} , nửa đường tròn đường kính OA_n và tia Ox , với mỗi $n = 2, 3, \dots$ (tham khảo hình vẽ).

Hỏi khi n bằng bao nhiêu thì tổng $u_2 + u_4 + \dots + u_n$ bắt đầu lớn hơn 1983?



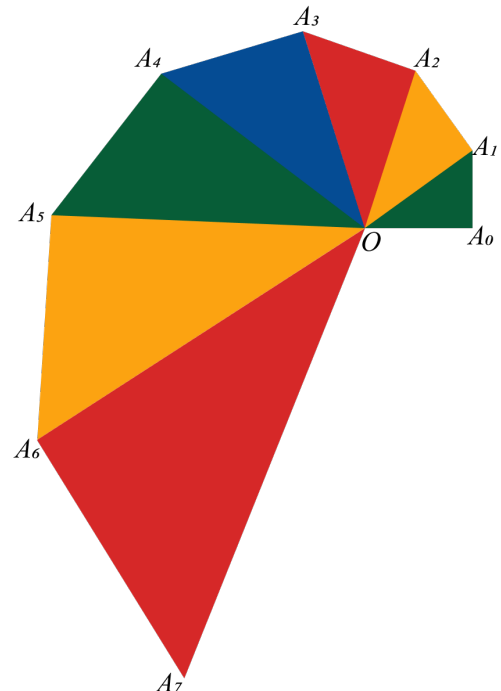
Điền đáp án: _____

Câu 17[29Edu]: Trên một mặt phẳng, cho đoạn thẳng OA_0 có độ dài bằng 1. Người ta dựng một chuỗi các tam giác vuông liên tiếp $OA_0A_1, OA_1A_2, \dots, OA_{n-1}A_n, \dots$ theo quy luật sau:

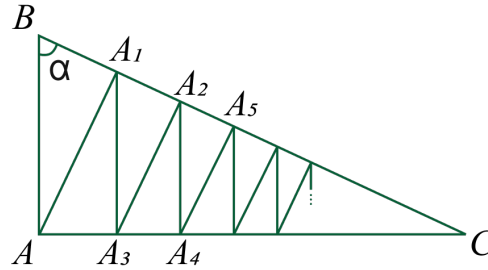
- Tam giác đầu tiên là $\triangle OA_0A_1$ vuông tại A_0 và có góc $\widehat{A_0OA_1} = 35^\circ$.
- Tam giác thứ hai là $\triangle OA_1A_2$ vuông tại A_1 , sử dụng cạnh huyền của tam giác trước làm một cạnh góc vuông, và có góc $\widehat{A_1OA_2} = 35^\circ$.
- Tổng quát, tam giác thứ n là $\triangle OA_{n-1}A_n$ vuông tại A_{n-1} , nhận cạnh huyền OA_{n-1} của tam giác thứ $n - 1$ làm một cạnh góc vuông, và có góc $\widehat{A_{n-1}OA_n} = 35^\circ$.

Gọi h_n là độ dài cạnh huyền của tam giác vuông thứ n (tức là $h_n = OA_n$). Hãy tính tổng độ dài 29 cạnh huyền của 29 tam giác đầu tiên được tạo ra. (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Điền đáp án: _____



Câu 18[29Edu]: Cho hình tam giác ABC vuông tại A và $BC = 2AB = 4$. Từ A hình chiếu xuống cạnh BC tại A_1 , từ A_1 hình chiếu xuống cạnh AC tại A_2 , cứ thế lặp lại vô hạn lần ta thu được $A_3, A_4, A_5, \dots$. Tính độ dài đường gấp khúc $AA_1A_2A_3 \dots$, làm tròn đến hàng phần chục.



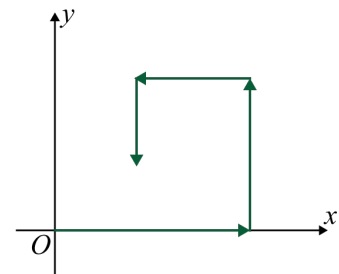
Điền đáp án: _____

Câu 19[29Edu]: Một Pikachu khám phá "mê cung kỳ lạ" trong mặt phẳng Oxy , xuất phát từ O và bước đi vô hạn bước theo quy luật sau:

- Bước đầu tiên: Dài 8 đơn vị theo tia Ox .
- Các bước sau: Luôn rẽ trái 90° so với bước liền trước và dài bằng 0.75 bước liền trước. (tham khảo hình bên).

Biết rằng, với hành trình như trên thì Pikachu sẽ tiến đến điểm M . Độ dài đoạn thẳng OM bằng bao nhiêu đơn vị? Làm tròn đến hàng phần trăm

Điền đáp án: _____



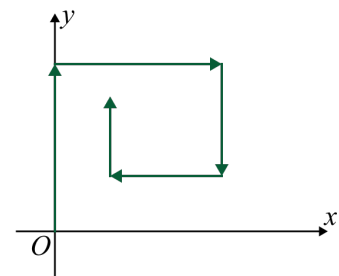
Câu 20[29Edu]: Một Pikachu khám phá "mê cung kỳ lạ" trong mặt phẳng Oxy , xuất phát từ O và bước đi vô hạn bước theo quy luật sau:

- Bước đầu tiên: Dài 9 đơn vị theo tia Oy .
- Bước thứ 2: Rẽ phải 90° và đi một đoạn có độ dài bằng bước trước.
- Bước thứ 3: Rẽ phải 90° và đi một đoạn có độ dài bằng $\frac{4}{5}$ bước trước.
- Bước thứ 4: Rẽ phải 90° và đi một đoạn có độ dài bằng bước trước.

- Các bước sau: Lặp lại theo quy luật, bước chẵn có độ dài bằng bước lẻ trước đó, còn bước lẻ sẽ có độ dài bằng $\frac{3}{4}$ bằng bước chẵn trước đó. (tham khảo hình bên).

Biết rằng, với hành trình như trên thì Pikachu sẽ tiến đến điểm M . Độ dài đoạn thẳng OM bằng bao nhiêu đơn vị? Làm tròn đến hàng phần trăm

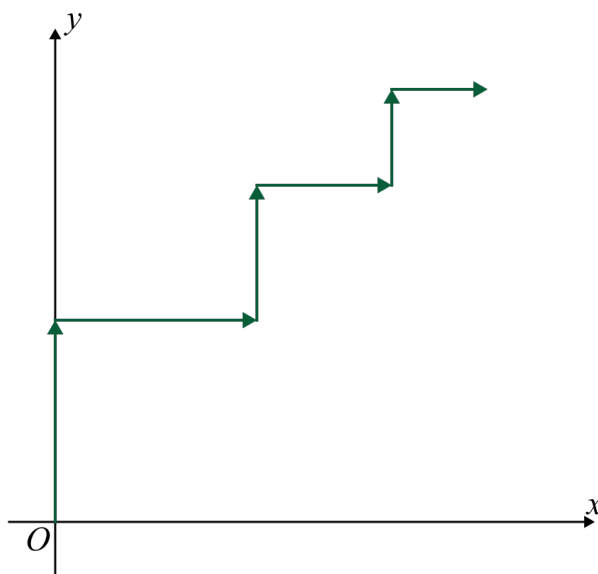
Điền đáp án: _____



Câu 21[29Edu]: Một Pikachu khám phá "mê cung kỳ lạ" trong mặt phẳng Oxy , xuất phát từ O và bước đi vô hạn bước theo quy luật sau:

- Bước đầu tiên: Dài 9 đơn vị theo tia Oy .
- Bước thứ 2: Rẽ phải 90° và đi một đoạn có độ dài bằng bước trước.
- Bước thứ 3: Rẽ trái 90° và đi một đoạn có độ dài bằng $\frac{5}{6}$ bước trước.
- Bước thứ 4: Rẽ phải 90° và đi một đoạn có độ dài bằng bước trước.
- Các bước sau: Lặp lại theo quy luật, bước chẵn luôn dọc theo Ox có độ dài bằng bước lẻ trước đó, còn bước lẻ luôn dọc theo Oy sẽ có độ dài bằng $\frac{3}{4}$ bằng bước chẵn trước đó. (tham khảo hình dưới).

Biết rằng, với hành trình như trên thì Pikachu sẽ tiến đến điểm M . Độ dài đoạn thẳng OM bằng bao nhiêu đơn vị? Làm tròn đến hàng phần trăm



Điền đáp án: _____

Câu 22[29Edu]: Một chất điểm chuyển động quanh gốc O trên trục Ox , xuất phát từ A_0 có tọa độ $x = 5$ và theo quy luật sau:

- Bước đầu tiên: Dài 9 đơn vị theo chiều âm của trục Ox tới A_1 .
- Bước thứ 2: Quay đầu và đi một đoạn có độ dài bằng $\frac{9}{10}$ bước trước tới A_2 .
- Các bước sau: Lặp lại theo quy luật(tham khảo hình dưới).

Biết rằng, với hành trình như trên thì chất điểm sẽ ở A_{10} sau 10 bước. Độ dài đoạn thẳng OA_{10} bằng bao nhiêu đơn vị? Làm tròn đến hàng phần trăm

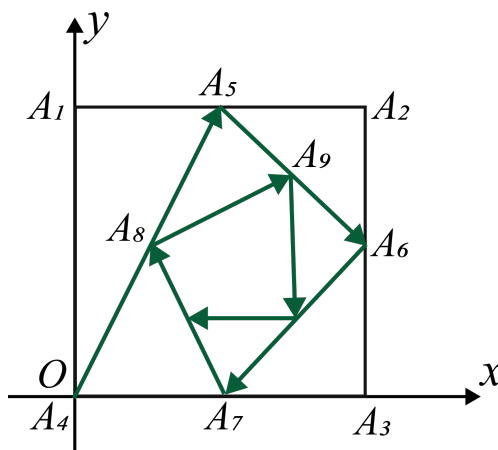


Điền đáp án: _____

Câu 23[29Edu]: Một chất điểm chuyển động trong vùng được giới hạn bởi hình vuông $A_1A_2A_3A_4$ có cạnh bằng 1 (A_4 trùng gốc O), trên mặt phẳng Oxy , theo quy luật sau:

- Bước đầu tiên: Đi từ O tới A_5 với A_5 là trung điểm A_1A_2 .
- Bước thứ 2: Đi từ A_5 tới A_6 với A_6 là trung điểm A_2A_3 .
- Bước thứ 3: Đi từ A_6 tới A_7 với A_7 là trung điểm A_3A_4 .
- Bước thứ 4: Đi từ A_7 tới A_8 với A_8 là trung điểm A_4A_5 .
- Các bước sau: Lặp lại theo quy luật(tham khảo hình dưới).

Biết rằng, với hành trình như trên thì chất điểm sẽ ở P sau vô hạn bước. Độ dài đoạn thẳng OP bằng bao nhiêu đơn vị? Làm tròn đến hàng phần chục.

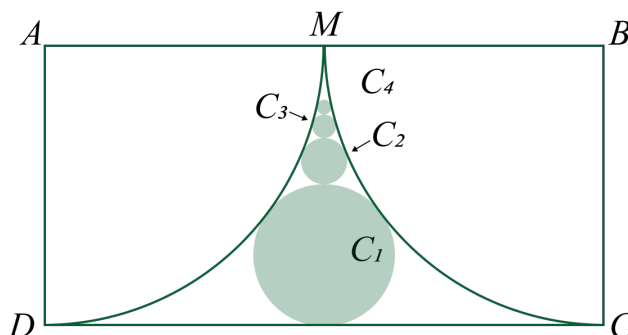


Điền đáp án: _____

Câu 24[29Edu]: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2AD = 2$ đơn vị. Dựng 2 góc phần tư cung tròn (S_1) tâm A và (S_2) tâm B, ta lần lượt dựng các hình tròn:

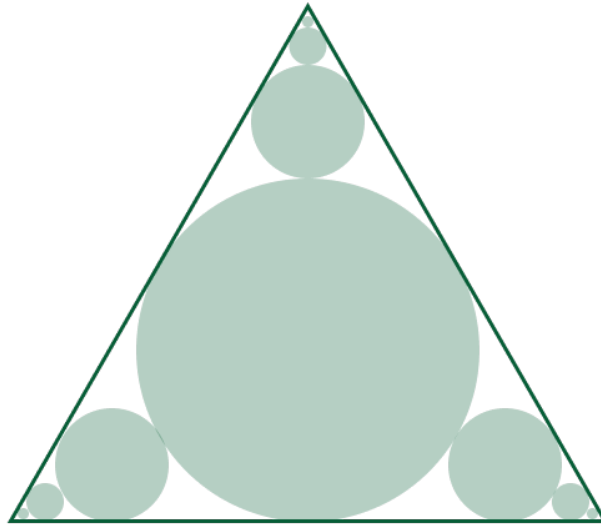
- (C_1) tiếp xúc với CD và $(S_1), (S_2)$.
- (C_2) tiếp xúc với (C_1) và $(S_1), (S_2)$.
- (C_3) tiếp xúc với (C_2) và $(S_1), (S_2)$.
- Các bước sau: Lặp lại vô hạn lần theo quy luật(tham khảo hình dưới).

Tính tổng diện tích tất cả các hình tròn $(C_1), (C_2), (C_3) \dots$? Làm tròn đến hàng phần chục.



Điền đáp án: _____

Câu 25[29Edu]: Cho tam giác đều $\triangle ABC$ cạnh 1 đơn vị. Dựng lần lượt các hình tròn tiếp xúc nhau và tiếp xúc với các cạnh của tam giác (tham khảo hình vẽ)
 Tính tổng diện tích tất cả các hình tròn đó? Làm tròn đến hàng phần chục.



Điền đáp án: _____

—————**HẾT**—————

Mọi đóng góp, ý kiến vui lòng gửi về fanpage: Trung tâm luyện thi 29Edu.

Tài liệu tham khảo

- James Stewart, *Calculus*.
- Michael F. Barnsley, *Fractal Everywhere*.
- Đề thi thử tốt nghiệp THPT 2026 lần 2 môn Toán sở GD và ĐT Đồng Nai.
- Đề khảo sát chất lượng Toán 11 năm 2025 – 2026 sở GD và ĐT Hà Nội.