

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

A. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Phương trình mặt phẳng

Vector pháp tuyến

Vector $\vec{n} \neq \vec{0}$ là vector pháp tuyến của (α) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với (α) .

Cặp vector chỉ phương của mặt phẳng

Hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương là cặp vector chỉ phương của (α) nếu các giá của chúng song song hoặc nằm trên (α) .

Chú ý:

- Nếu $\vec{n}$ là một vector pháp tuyến của (α) thì $k\vec{n} (k \neq 0)$ cũng là vector pháp tuyến của (α) .
- Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là một cặp vector chỉ phương của (α) thì $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$ là một vector pháp tuyến của (α) .

Phương trình tổng quát của mặt phẳng

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

- Nếu (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ thì $\vec{n} = (A; B; C)$ là một vector pháp tuyến của (α) .
- Phương trình mặt phẳng đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có một vector pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ là:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Các trường hợp đặc biệt

Các hệ số	Phương trình mặt phẳng (α)	Tính chất mặt phẳng (α)
$D = 0$.	$Ax + By + Cz = 0$	(α) đi qua gốc tọa độ O
$A = 0$	$By + Cz + D = 0$	$(\alpha) // Ox$ hoặc $(\alpha) \supset Ox$
$B = 0$	$Ax + Cz + D = 0$	$(\alpha) // Oy$ hoặc $(\alpha) \supset Oy$
$C = 0$	$Ax + By + D = 0$	$(\alpha) // Oz$ hoặc $(\alpha) \supset Oz$
$A = B = 0$	$Cz + D = 0$	$(\alpha) // (Oxy)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oxy)$
$A = C = 0$	$By + D = 0$	$(\alpha) // (Oxz)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oxz)$
$B = C = 0$	$Ax + D = 0$	$(\alpha) // (Oyz)$ hoặc

		$(\alpha) \equiv (Oyz)$
--	--	-------------------------

Nếu (α) cắt các trục toạ độ tại các điểm $(a;0;0), (0;b;0), (0;0;c)$ với $abc \neq 0$ thì ta có phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn $(\alpha): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Chú ý: Nếu trong phương trình (α) không chứa ẩn nào thì (α) song song hoặc chứa trục tương ứng.

2. Khoảng cách từ một điểm tới mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ và mặt phẳng

$$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0.$$

Khi đó khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (α) được tính theo công thức:

$$d(A, (\alpha)) = \frac{|Ax_A + By_A + Cz_A + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

3. Vị trí tương đối

Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng

$$(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \quad (\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$+) (\alpha) \equiv (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

$$+) (\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

$$+) (\alpha) \cap (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \text{ hoặc } \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

$$+) (\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng và mặt cầu

$$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0;$$

$$(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

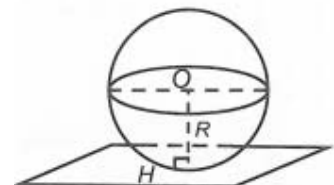
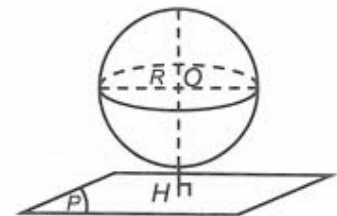
Để xét vị trí của (α) và (S) ta làm như sau:

+) Nếu $d(I, (\alpha)) > R$ thì (α) không cắt (S) .

+) Nếu $d(I, (\alpha)) = R$ thì (α) tiếp xúc (S) tại H . Khi đó H được gọi là

tiếp điểm đồng thời H là hình chiếu vuông góc của I lên (α) và (α)

được gọi là tiếp diện.

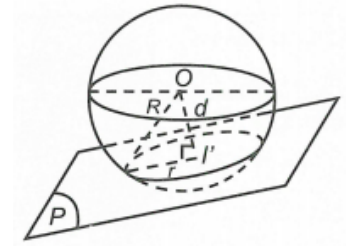


+) Nếu $d(I, (\alpha)) < R$ thì (α) cắt (S) theo đường tròn có phương trình

$$(C): \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$$

Bán kính của (C) là $r = \sqrt{R^2 - d^2[I, (\alpha)]}$.

Tâm J của (C) là hình chiếu vuông góc của I trên (α) .



4. Góc giữa hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng

$$(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ và } (\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Góc giữa (α) và (β) bằng hoặc bù với góc giữa hai vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$. Tức là

$$\cos((\alpha), (\beta)) = \left| \cos \widehat{\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta} \right| = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Chùm mặt phẳng

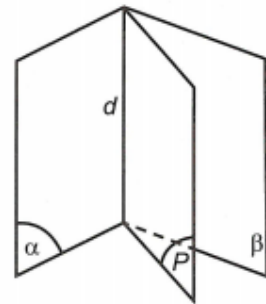
- Tập hợp tất cả các mặt phẳng qua giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) được gọi là một chùm mặt phẳng.
- Gọi (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng

$$(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

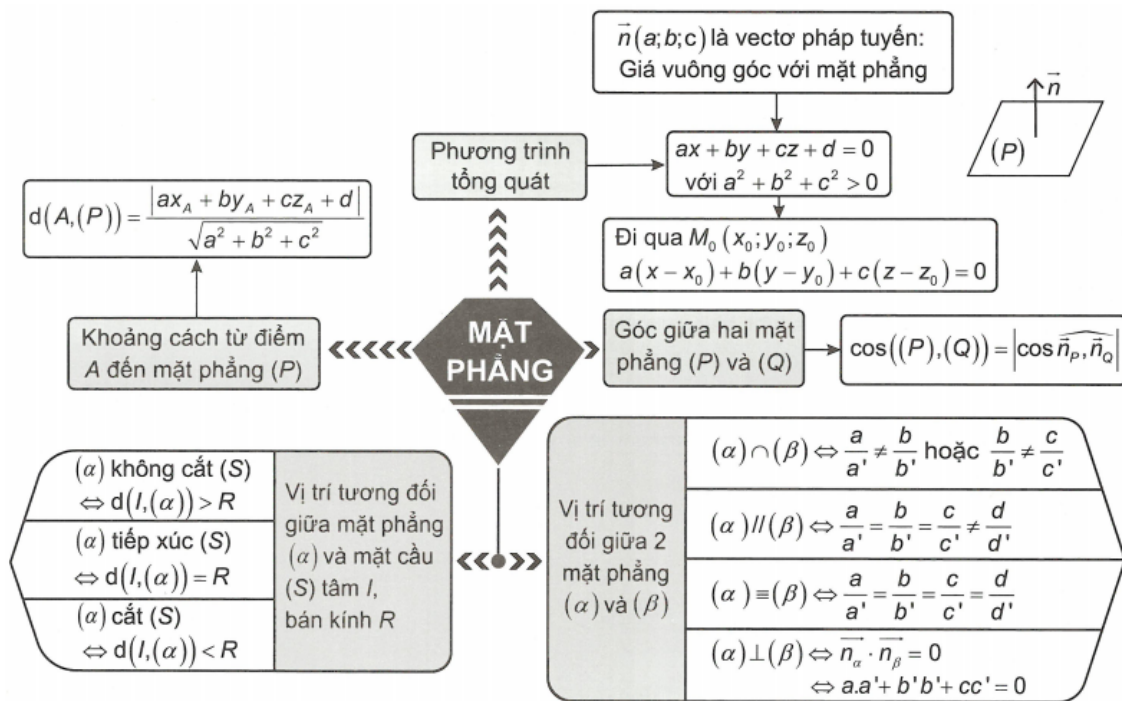
$$(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Khi đó nếu (P) là mặt phẳng chứa (d) thì mặt phẳng (P) có dạng

$$m \cdot (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + n \cdot (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \text{ với } m^2 + n^2 \neq 0$$



SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Xác định vector pháp tuyến và viết phương trình mặt phẳng

1. Phương pháp

- Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ có vector pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$
- Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ có cặp vector chỉ phương $\vec{a}, \vec{b}$. Khi đó một vector pháp tuyến của (α) là $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho mặt phẳng (Q): $x - y + 2z - 2 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q), đồng thời cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm M, N sao cho $MN = 2\sqrt{2}$.

- A. (P): $x - y + 2z + 2 = 0$.

C. (P): $x - y + 2z \pm 2 = 0$.

B. (P): $x - y + 2z = 0$.

D. (P): $x - y + 2z - 2 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

(P) // (Q) nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng $x - y + 2z + D = 0$ ($D \neq -2$).

Khi đó mặt phẳng (P) cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm $M(-D; 0; 0)$, $N(0; D; 0)$.

Từ giả thiết: $MN = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2D^2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow D = 2$ (do $D \neq -2$).

Vậy phương trình mặt phẳng (P): $x - y + 2z + 2 = 0$.

Chú ý: Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và song song với mặt phẳng $(\beta): Ax + By + Cz + D = 0$ thì (α) có phương trình là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Bài tập 2: Cho điểm $M(1; 2; 5)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M cắt trục tọa độ Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho M là trọng tâm tam giác ABC . Phương trình mặt phẳng (P) là

- A. $x + y + z - 8 = 0$. B. $x + 2y + 5z - 30 = 0$. C. $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 0$. D. $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $OA \perp (OBC) \Rightarrow \left. \begin{matrix} OA \perp BC \\ AM \perp BC \end{matrix} \right\} \Rightarrow BC \perp (OAM) \Rightarrow BC \perp OM$ (1)

Tương tự $AB \perp OM$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $OM \perp (ABC)$ hay $OM \perp (P)$.

Suy ra $\overrightarrow{OM} = (1; 2; 5)$ là vectơ pháp tuyến của (P) .

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là

$$x - 1 + 2(y - 2) + 5(z - 5) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 5z - 30 = 0.$$

Bài tập 3: Cho tứ diện $ABCD$ có đỉnh $A(8; -14; -10)$; AD, AB, AC lần lượt song song với Ox, Oy, Oz . Phương trình mặt phẳng (BCD) đi qua $H(7; -16; -15)$ là trọng tâm $\triangle BCD$ có phương trình là

- A. $x + 2y + 5z - 100 = 0$. B. $x + 2y + 5z + 100 = 0$.
C. $\frac{x}{7} + \frac{y}{-16} + \frac{z}{-15} = 0$. D. $\frac{x}{7} + \frac{y}{-16} + \frac{z}{-15} = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Theo đề ra, ta có (BCD) đi qua $H(7; -16; -15)$, nhận $\overrightarrow{HA} = (1; 2; 5)$ là vectơ pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng (BCD) là

$$\begin{aligned} (x - 7) + 2(y + 16) + 5(z + 15) &= 0 \\ \Leftrightarrow x + 2y + 5z + 100 &= 0. \end{aligned}$$

Vậy $(BCD): x + 2y + 5z + 100 = 0$.

Bài tập 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, lập phương trình của các mặt phẳng song song với mặt phẳng $(\beta): x + y - z + 3 = 0$ và cách (β) một khoảng bằng $\sqrt{3}$.

- A. $x + y - z + 6 = 0; x + y - z = 0$. B. $x + y - z + 6 = 0$.
C. $x - y - z + 6 = 0; x - y - z = 0$. D. $x + y + z + 6 = 0; x + y + z = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm. Ta có $A(0;0;3) \in (\beta)$.

Do $(\alpha) // (\beta)$ nên phương trình của mặt phẳng (α) có dạng:

$$x + y - z + m = 0 \text{ với } m \neq 3.$$

$$\text{Ta có } d((\alpha), (\beta)) = \sqrt{3} \Leftrightarrow d(A, (\alpha)) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|m-3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

$$\Leftrightarrow |m-3| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = 0 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy phương trình của các mặt phẳng cần tìm là

$$x + y - z + 6 = 0 \text{ và } x + y - z = 0.$$

Bài tập 5: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng

$$(P): x + 3z + 2 = 0, (Q): x + 3z - 4 = 0.$$

Mặt phẳng song song và cách đều (P) và (Q) có phương trình là:

$$\text{A. } x + 3z - 1 = 0. \quad \text{B. } x + 3z - 2 = 0. \quad \text{C. } x + 3z - 6 = 0. \quad \text{D. } x + 3z + 6 = 0.$$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điểm $M(x; y; z)$ bất kỳ cách đều (P) và $(Q) \Leftrightarrow d(M; (P)) = d(M; (Q))$

$$\Leftrightarrow \frac{|x + 3z + 2|}{\sqrt{1+9}} = \frac{|x + 3z - 4|}{\sqrt{1+9}} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3z + 2 = x + 3z - 4 \\ x + 3z + 2 = -x - 3z + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -4 \\ x + 3z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + 3z - 1 = 0.$$

Vậy M thuộc $(\alpha): x + 3z - 1 = 0$. Nhận thấy (α) song song với (P) và (Q) .

Bài tập 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$, $B(3;4;0)$ và mặt phẳng $(P): ax + by + cz + 46 = 0$. Biết rằng khoảng cách từ A, B đến mặt phẳng (P) lần lượt bằng 6 và 3. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ bằng

$$\text{A. } -3. \quad \text{B. } -6. \quad \text{C. } 3. \quad \text{D. } 6.$$

Hướng dẫn giải

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B trên mặt phẳng (P) .

Theo giả thiết, ta có: $AB = 3, AH = 6, BK = 3$.

Do đó A, B ở cùng phía với mặt phẳng (P) .

Lại có: $AB + BK \geq AK \geq AH$. Mà $AB + BK = AH$ nên $H \equiv K$.

Suy ra A, B, H là ba điểm thẳng hàng và B là trung điểm của AH nên tọa độ $H(5;6;-1)$.

Vậy mặt phẳng (P) đi qua $H(5;6;-1)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (2;2;-1)$ là vector pháp tuyến nên có phương trình là $2(x-5) + 2(y-6) - 1(z+1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y - z - 23 = 0$

Theo bài ra, ta có $(P): -4x - 4y + 2z + 46 = 0$ nên $a = -4, b = -4, c = 2$.

Vậy $T = a + b + c = -6$.

Dạng 2. Viết phương trình mặt phẳng liên quan đến mặt cầu

1. Phương pháp

Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm H .

Giả sử mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R , khi đó ta viết được phương trình mặt phẳng (α) đi qua H và có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = \overrightarrow{IH}$.

2. Bài tập

Bài tập 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình

$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 12$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm mặt cầu và đáy là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất.

A. $2x + 2y - z + 2 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 8 = 0$.

B. $2x + 2y - z - 1 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 11 = 0$.

C. $2x + 2y - z - 6 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 3 = 0$.

D. $2x + 2y - z + 2 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 2 = 0$.

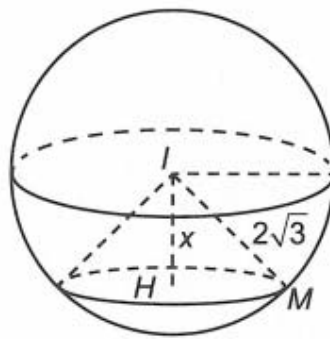
Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $(\alpha) \parallel (P)$ nên $(\alpha): 2x + 2y - z + d = 0$ ($d \neq -3$).

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 3)$, bán kính $R = 2\sqrt{3}$.

Gọi (H) là khối nón thỏa mãn đề bài với đường sinh $IM = R = 2\sqrt{3}$.



Đặt $x = h = d(I, (\alpha))$. Khi đó bán kính đường tròn đáy hình nón là $r = \sqrt{12 - x^2}$.

Thể tích khối nón là $V_{(H)} = \frac{1}{3} \pi (12 - x^2) x$ với $0 < x < 2\sqrt{3}$.

Xét hàm số: $f(x) = \frac{1}{3} \pi (12 - x^2) x$ với $0 < x < 2\sqrt{3}$.

Khi đó $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 2$ hay $d(I, (\alpha)) = 2$.

$$\text{Ta có } d(I, (\alpha)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) - 3 + d|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} d - 5 = 6 \\ d - 5 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 11 \\ d = -1 \end{cases}.$$

Chú ý: Công thức tính thể tích hình nón:

$$V = \frac{1}{3}hS = \frac{1}{3} \cdot 2\pi R \cdot h$$

Trong đó R là bán kính đáy, h là chiều cao.

Bài tập 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$ và điểm $A(2; 2; 2)$. Từ A kẻ ba tiếp tuyến AB, AC, AD với mặt cầu (B, C, D là các tiếp điểm). Phương trình mặt phẳng (BCD) là

A. $2x + 2y + z - 1 = 0$.

B. $2x + 2y + z - 3 = 0$.

C. $2x + 2y + z + 1 = 0$.

D. $2x + 2y + z - 5 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; 1)$ và bán kính $R = 2$.

Do AB, AC, AD là ba tiếp tuyến của mặt cầu (S) với B, C, D là các tiếp điểm nên

$$\begin{cases} AB = AC = AD \\ IB = IC = ID = R \end{cases} \Rightarrow IA \text{ là trục của đường tròn ngoại tiếp } \triangle BCD.$$

$$\Rightarrow IA \perp (BCD).$$

Khi đó mặt phẳng (BCD) có một vector pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{IA} = (2; 2; 1)$.

Gọi J là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD \Rightarrow J \in IA$ và $IJ \perp BJ$.

Ta có $\triangle IBA$ vuông tại B và $BJ \perp IA$ nên

$$IB^2 = IJ \cdot IA \Rightarrow IJ = \frac{IB^2}{IA} = \frac{4}{3} \Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{4}{9} \overrightarrow{IA}.$$

Đặt $J(x; y; z)$. Ta có $\overrightarrow{IJ} = (x; y; z-1); \overrightarrow{IA} = (2; 2; 1)$.

$$\text{Từ } \overrightarrow{IJ} = \frac{4}{9} \overrightarrow{IA} \text{ suy ra } J\left(\frac{8}{9}; \frac{8}{9}; \frac{13}{9}\right).$$

Mặt phẳng (BCD) đi qua $J\left(\frac{8}{9}; \frac{8}{9}; \frac{13}{9}\right)$ và nhận vector pháp tuyến $\vec{n} = (2; 2; 1)$ có phương trình:

$$2\left(x - \frac{8}{9}\right) + 2\left(y - \frac{8}{9}\right) + \left(z - \frac{13}{9}\right) = 0 \Rightarrow 2x + 2y + z - 5 = 0.$$

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 12$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 11 = 0$. Xét điểm M di động trên (P) và các điểm A, B, C phân biệt di động trên (S) sao cho AM, BM, CM là các tiếp tuyến của (S) . Mặt phẳng (ABC) luôn đi qua điểm cố định nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

B. $(0; -1; 3)$.

C. $\left(\frac{3}{2}; 0; 2\right)$.

D. $(0; 3; -1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 1; 1)$ và bán kính $R = 2\sqrt{3}$.

Xét điểm $M(a; b; c) \in (P); A(x; y; z) \in (S)$ nên ta có hệ điều kiện:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 12 \\ AI^2 + AM^2 = IM^2 \\ a - 2b + 2c + 11 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 12 & (1) \\ 12 + (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 & (2) \\ a - 2b + 2c + 11 = 0 & (3) \end{cases}$$

Lấy (1) - (2) ta có:

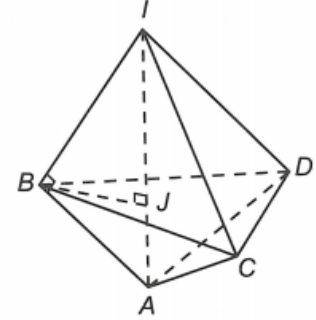
$$\begin{aligned} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - [12 + (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2] \\ = 12 - [(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2] \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (a-1)x + (b-1)y + (c-1)z - a - b - c - 9 = 0$$

Vậy mặt phẳng đi qua ba tiếp điểm là:

$$(Q): (a-1)x + (b-1)y + (c-1)z - a - b - c - 9 = 0$$

Kết hợp với (3) suy ra mặt phẳng này luôn đi qua điểm cố định $(0; 3; -1)$.



Dạng 3. Phương trình mặt phẳng đoạn chắn

1. Phương pháp

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(a; 0; 0), B(0; b; 0)$ và $C(0; 0; c)$ với $abc \neq 0$ là:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

2. Bài tập

Bài tập 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(3; 0; 0), N(2; 2; 2)$. Mặt phẳng (P) thay đổi qua M, N cắt các trục Oy, Oz lần lượt tại $B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với $b, c \neq 0$. Hệ thức nào dưới đây là đúng?

A. $b + c = 6$.

B. $bc = 3(b + c)$.

C. $bc = b + c$.

D. $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Mặt phẳng (P) đi qua $M(3; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với $b, c \neq 0$ nên phương trình mặt phẳng (P)

theo đoạn chắn là: $\frac{x}{3} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Mặt phẳng (P) đi qua $N(2;2;2)$ suy ra $\frac{2}{3} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{6}$.

Bài tập 2: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $G(1;4;3)$. Phương trình mặt phẳng cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho G là trọng tâm tứ diện $OABC$ là

A. $\frac{x}{3} + \frac{y}{12} + \frac{z}{9} = 1$.

B. $\frac{x}{4} + \frac{y}{16} + \frac{z}{12} = 1$.

C. $3x + 12y + 9z - 78 = 0$.

D. $4x + 16y + 12z - 104 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Giả sử $A(a, 0, 0); B(0, b, 0); C(0, 0, c)$.

$$G(1;4;3) \text{ là trọng tâm tứ diện } OABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 + a + 0 + 0 = 4.1 \\ 0 + 0 + b + 0 = 4.4 \\ 0 + 0 + 0 + c = 4.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 16 \\ c = 12 \end{cases}$$

Ta có phương trình mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{4} + \frac{y}{16} + \frac{z}{12} = 1$.

Bài tập 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại ba điểm A, B, C khác với gốc tọa độ O sao cho biểu thức $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $(P): x + 2y + z - 14 = 0$.

B. $(P): x + 2y + 3z - 14 = 0$.

C. $(P): x + 2y + 3z - 11 = 0$.

D. $(P): x + y + 3z - 14 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi H là trực tâm ΔABC .

$$\text{Ta có } \begin{cases} BH \perp AC \\ OB \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp (OBH) \Rightarrow AC \perp OH \quad (1).$$

Chứng minh tương tự, ta có: $BC \perp OH \quad (2)$.

Từ (1), (2) ta có $OH \perp (ABC)$.

$$\text{Suy ra } \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{OH^2}.$$

Vậy để biểu thức $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất thì OH đạt giá trị lớn nhất. Mà $OH \leq OM$ nên OH đạt giá trị lớn nhất bằng OM hay $H \equiv M$.

Khi đó $OM \perp (ABC)$ nên (P) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{OM} = (1; 2; 3)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là

$$1(x-1) + 2(y-2) + 3(z-3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 3z - 14 = 0.$$

Bài tập 4: Trong không gian $Oxyz$, có bao nhiêu mặt phẳng qua điểm $M(4; -4; 1)$ và chắn trên ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz theo ba đoạn thẳng có độ dài theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội bằng $\frac{1}{2}$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với $abc \neq 0$ là giao điểm của mặt phẳng (P) và các trục tọa độ. Khi đó (P) có phương trình là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} M \in (P) \\ OC = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{4}OA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{a} - \frac{4}{b} + \frac{1}{c} = 1 \\ |c| = \frac{1}{2}|b| = \frac{1}{4}|a| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -8, b = -4, c = 2 \\ a = 8, b = -4, c = -2 \\ a = 16, b = -8, c = 4 \end{cases}$$

Vậy có ba mặt phẳng thỏa mãn.

Bài tập 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 0), B(0; 1; 0)$. Mặt phẳng $x + ay + bz + c = 0$ đi qua các điểm A, B đồng thời cắt tia Oz tại C sao cho tứ diện $OABC$ có thể tích bằng $\frac{1}{6}$. Giá trị của $a + 3b - 2c$ là

A. 16.

B. 1.

C. 10.

D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Mặt phẳng đi qua các điểm A, B đồng thời cắt tia Oz tại $C(0; 0; t)$ với $t > 0$ có phương trình là

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{t} = 1.$$

$$\text{Mặt khác: } V_{OABC} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6}. OA.OB.OC = \frac{1}{6} \Leftrightarrow t = 1.$$

$$\text{Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm có dạng } \frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow x + y + z - 1 = 0.$$

$$\text{Vậy } a = b = 1, c = -1.$$

$$\text{Suy ra } a + 3b - 2c = 1 + 3.1 + 2 = 6.$$

Dạng 4. Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

1. Phương pháp

Cho hai mặt phẳng:

$$(P): Ax + By + Cz + D = 0;$$

$$(P'): A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

Khi đó:

- (P) cắt $(P') \Leftrightarrow A:B:C \neq A':B':C'$.
- $(P) // (P') \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$.
- $(P) \equiv (P') \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$.
- $(P) \perp (P') \Leftrightarrow \vec{n}_{(P)} \perp \vec{n}_{(P')} \Leftrightarrow \vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(P')} = 0$.
 $\Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0$.

Chú ý:

- Nếu $A = 0$ thì tương ứng $A' = 0$.
- Nếu $B = 0$ thì tương ứng $B' = 0$.
- Nếu $C = 0$ thì tương ứng $C' = 0$.

Ví dụ: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - z - 1 = 0$ và $(\beta): 2x + 4y - mz - 2 = 0$.

Tìm m để (α) và (β) song song với nhau.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } (\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-1}{-m} \neq \frac{-1}{-2}$$

$$(\text{vô lý vì } \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{-2}{-1}).$$

Vậy không tồn tại m để hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ song song với nhau.

2. Bài tập

Bài tập 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình

$$mx + (m-1)y + z - 10 = 0 \text{ và mặt phẳng } (Q): 2x + y - 2z + 3 = 0.$$

Với giá trị nào của m thì (P) và (Q) vuông góc với nhau?

A. $m = -2$.

B. $m = 2$.

C. $m = 1$.

D. $m = -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$(P): mx + (m-1)y + z - 10 = 0 \text{ có vector pháp tuyến } \vec{n}_1 = (m; m-1; 1).$$

$$(Q): 2x + y - 2z + 3 = 0 \text{ có vector pháp tuyến } \vec{n}_2 = (2; 1; -2).$$

$$(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow 2m + m - 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Dạng 5. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

1. Phương pháp

Cho mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và mặt cầu tâm I ; bán kính R .

- (α) và (S) không có điểm chung $\Leftrightarrow d(I, (\alpha)) > R$.
- (α) tiếp xúc với $(S) \Leftrightarrow d(I, (\alpha)) = R$. Khi đó (α) là tiếp diện.
- (α) và (S) cắt nhau $\Leftrightarrow d(I, (\alpha)) < R$.

Khi đó (O) có tâm là hình chiếu của I trên (α) và bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (\alpha))}$.

2. Bài tập

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.

Mặt phẳng nào cắt (S) theo một đường tròn có bán kính $r = 3$?

- A. $4x - 3y - z - 4\sqrt{26} = 0$. B. $2x + 2y - z + 12 = 0$.
- C. $3x - 4y + 5z - 17 + 20\sqrt{2} = 0$. D. $x + y + z + \sqrt{3} = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình mặt cầu (S) là $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.

Suy ra tâm $I(3; -2; 0)$ và bán kính $R = 5$.

Ta gọi khoảng cách từ tâm I của mặt cầu tới các mặt phẳng ở các đáp án là h , khi đó để mặt phẳng cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính $r = 3$ thì $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$.

Đáp án A loại vì $h = \frac{|18 - 4\sqrt{26}|}{\sqrt{26}} \neq 4$.

Đáp án B loại vì $h = \frac{14}{3} \neq 4$.

Chọn đáp án C vì $h = 4$.

Đáp án D loại vì $h = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \neq 4$.

Bài tập 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1; 2; -2)$ và mặt phẳng

$(P): 2x + 2y + z + 5 = 0$. Phương trình mặt cầu tâm I cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích bằng 16π là

- A. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 36$.
- B. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 2)^2 = 9$.
- C. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 2)^2 = 25$.
- D. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 2)^2 = 16$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } a = d(I; (P)) = \frac{|2.1 + 2.2 - 2 + 5|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 3.$$

$$\text{Bán kính của đường tròn giao tuyến là: } r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt{16} = 4.$$

Mặt cầu tâm I cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn nên ta có

$$R^2 = a^2 + r^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow R = 5.$$

Vậy phương trình mặt cầu tâm I , bán kính $R = 5$ là:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 25.$$

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha): 4x + 3y - 12z + 10 = 0$. Tìm phương trình mặt phẳng (β) thỏa mãn đồng thời các điều kiện: tiếp xúc với (S) ; song song với (α) và cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương.

A. $4x + 3y - 12z - 78 = 0$.

B. $4x + 3y - 12z - 26 = 0$.

C. $4x + 3y - 12z + 78 = 0$.

D. $4x + 3y - 12z + 26 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Mặt cầu } (S) \text{ có tâm } I(1; 2; 3), \text{ bán kính } R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 2} = 4.$$

$$\text{Vì } (\alpha) // (\beta) \text{ nên phương trình } (\alpha) \text{ có dạng: } 4x + 3y - 12z + d = 0, d \neq 10.$$

Vì (β) tiếp xúc mặt cầu (S) nên

$$d_{(I, (\beta))} = R \Leftrightarrow \frac{|4.1 + 3.2 - 12.3 + d|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + (-12)^2}} = 4 \Leftrightarrow |d - 26| = 52 \Leftrightarrow \begin{cases} d = -26 \\ d = 78 \end{cases}.$$

Do (β) cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương nên chọn $d = 78$.

$$\text{Vậy phương trình mặt phẳng } (\beta): 4x + 3y - 12z + 78 = 0.$$

Dạng 6. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

1. Phương pháp

Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ là

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

2. Bài tập

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 10 = 0$ và $(Q): x + 2y + 2z - 3 = 0$ bằng

A. $\frac{4}{3}$.

B. 3.

C. $\frac{8}{3}$.

D. $\frac{7}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Vì $(P) // (Q)$ nên $d((P), (Q)) = d(A, (Q))$ với $A \in (P)$.

$$\text{Chọn } A(0; 0; 5) \in (P) \text{ thì } d(A, (Q)) = \frac{|0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 5 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{7}{3}.$$

Chú ý: Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

Nếu hai mặt phẳng không song song thì khoảng cách giữa chúng bằng 0.

Bài tập 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 2; 3), B(3; 4; 4)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(P): 2x + y + mz - 1 = 0$ bằng độ dài đoạn thẳng AB .

A. $m = 2$.

B. $m = -2$.

C. $m = -3$.

D. $m = \pm 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \overline{AB} = (2; 2; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3 \quad (1).$$

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) là

$$d(A, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 + 2 + m \cdot 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + m^2}} = \frac{|3m + 3|}{\sqrt{5 + m^2}} \quad (2).$$

$$\text{Vì } AB = d(A, (P)) \Leftrightarrow 3 = \frac{|3m + 3|}{\sqrt{5 + m^2}} \Leftrightarrow 9(5 + m^2) = 9(m + 1)^2 \Leftrightarrow m = 2.$$

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1; 2; 1), B(2; 1; 3),$

$C(3; 2; 2), D(1; 1; 1)$. Độ dài chiều cao DH của tứ diện bằng

A. $\frac{3\sqrt{14}}{14}$.

B. $\frac{\sqrt{14}}{14}$.

C. $\frac{4\sqrt{14}}{7}$.

D. $\frac{3\sqrt{14}}{7}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\overline{AB} = (1; -1; 2), \overline{AC} = (2; 0; 1) \Rightarrow [\overline{AB}; \overline{AC}] = (-1; 3; 2)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) .

Vậy phương trình mặt phẳng (ABC) là

$$-1(x - 1) + 3(y - 2) + 2(z - 1) = 0 \Leftrightarrow -x + 3y + 2z - 7 = 0.$$

Độ dài chiều cao DH của tứ diện $ABCD$ là khoảng cách từ D đến (ABC) .

$$\text{Suy ra } DH = d(D, (ABC)) = \frac{|-1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 7|}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{3\sqrt{14}}{14}.$$

Bài tập 4: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(a;b;c)$ với $a, b, c \neq 0$. Xét (P) là mặt phẳng thay đổi đi qua điểm A . Khoảng cách lớn nhất từ điểm O đến mặt phẳng (P) bằng

- A. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. B. $2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. C. $3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. D. $4\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

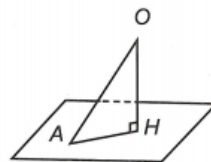
Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (P) .

Khi đó

$$d(O, (P)) = OH \leq OA = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$



Dạng 7. Góc giữa hai mặt phẳng

1. Phương pháp

Cho hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ có phương trình:

$$(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Góc giữa $(\alpha), (\beta)$ bằng hoặc bù với góc giữa hai vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1, \vec{n}_2$.

$$\cos(\widehat{(\alpha), (\beta)}) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Chú ý: $0^\circ \leq \widehat{(\alpha), (\beta)} \leq 90^\circ$.

2. Bài tập

Bổ sung sau

Dạng 8. Một số bài toán cực trị

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(-1;2;0), C(3;-1;2)$ và M là điểm thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z + 7 = 0$.

Tính giá trị nhỏ nhất của $P = |3\vec{MA} + 5\vec{MB} - 7\vec{MC}|$.

- A. $P_{\min} = 20$. B. $P_{\min} = 5$. C. $P_{\min} = 25$. D. $P_{\min} = 27$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi điểm $I(x; y; z)$ sao cho $3\vec{IA} + 5\vec{IB} - 7\vec{IC} = \vec{0}$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} 3(1-x) + 5(-1-x) - 7(3-x) = 0 \\ 3(1-y) + 5(2-y) - 7(-1-y) = 0 \\ 3(1-z) + 5(0-z) - 7(2-z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -23 \\ y = 20 \\ z = -11 \end{cases} \Rightarrow I(-23; 20; -11).$$

$$\begin{aligned} \text{Xét } P &= \left| 3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC} \right| = \left| 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + 5(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) - 7(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) \right| \\ &= \left| \overrightarrow{MI} + (3\overrightarrow{IA} + 5\overrightarrow{IB} - 7\overrightarrow{IC}) \right| = \left| \overrightarrow{MI} \right| = MI. \end{aligned}$$

$P_{\min}$ khi MI ngắn nhất hay M là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (α) .

$$\text{Khi đó: } P_{\min} = d(I, (\alpha)) = \frac{|2 \cdot (-23) - 20 + 2 \cdot (-11) + 7|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 27.$$

Bài tập 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3; 5; -5), B(5; -3; 7)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$. Tìm tọa độ điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho $MA^2 - 2MB^2$ lớn nhất.

- A. $M(-2; 1; 1)$. B. $M(2; -1; 1)$. C. $M(6; -18; 12)$. D. $M(-6; 18; 12)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Khi đó $\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA} - 2(\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OB}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow I(13; -11; 19)$.

Ta có $MA^2 - 2MB^2 = (\overrightarrow{MA})^2 - 2(\overrightarrow{MB})^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = -MI^2 + (IA^2 - 2IB^2)$.

$MA^2 - 2MB^2$ lớn nhất khi MI nhỏ nhất. Khi đó I là hình chiếu vuông góc của M lên (P) .

Ta tìm được $M(6; -18; 12)$.

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(m; 0; 0), N(0; n; 0), P(0; 0; p)$ không trùng với gốc tọa độ và thỏa mãn $m^2 + n^2 + p^2 = 3$. Giá trị lớn nhất của khoảng cách từ O đến mặt phẳng (MNP) bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{1}{27}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Do M, N, P không trùng với gốc tọa độ nên $m \neq 0, n \neq 0, p \neq 0$.

Phương trình mặt phẳng (MNP) là: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{m}x + \frac{1}{n}y + \frac{1}{p}z - 1 = 0$.

$$\text{Suy ra } d(O, (MNP)) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2}}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương m^2, n^2, p^2 và ba số dương $\frac{1}{m^2}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{p^2}$ ta có:

$$m^2 + n^2 + p^2 \geq 3\sqrt[3]{m^2 n^2 p^2} \text{ và } \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{m^2 n^2 p^2}}.$$

$$\text{Suy ra } (m^2 + n^2 + p^2) \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} \right) \geq 9$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} \right) \geq 9 \quad (\text{do } m^2 + n^2 + p^2 = 3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} \geq 3 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2}} \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2}}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Vậy $d(O, (MNP)) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m^2 = n^2 = p^2 = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của khoảng cách từ O đến mặt phẳng (MNP) là $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài tập 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + 5 = 0$. Giả sử $M \in (P)$ và $N \in (S)$ sao cho $\overline{MN}$ cùng phương với vector $\vec{u} = (1; 0; 1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN .

- A. $MN = 3$. B. $MN = 1 + 2\sqrt{2}$. C. $MN = 3\sqrt{2}$. D. $MN = 14$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

(S) có tâm $I(-1; 2; 1)$ và bán kính $R = 1$.

Ta có: $d(I, (P)) = \frac{|-1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 2 > R$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của N trên mặt phẳng (P) và α là góc giữa MN và NH .

Vì $\overline{MN}$ cùng phương với $\vec{u}$ nên góc α có số đo không đổi.

$\triangle MNH$ vuông tại H có $\alpha = \widehat{HNM}$ nên $HN = MN \cdot \cos \alpha \Rightarrow MN = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot HN$

Do đó MN lớn nhất $\Leftrightarrow HN$ lớn nhất $\Leftrightarrow HN = d(I, (P)) + R = 3$.

Có $\cos \alpha = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}_P) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ nên $MN = \frac{1}{\cos \alpha} HN = 3\sqrt{2}$.

Bài tập 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi $(P): ax + by + cz - 3 = 0$ (với a, b, c là các số nguyên không đồng thời bằng 0) là mặt phẳng đi qua hai điểm $M(0; -1; 2), N(-1; 1; 3)$ và không đi qua điểm $H(0; 0; 2)$. Biết rằng khoảng cách từ H đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất. Giá trị của tổng $T = a - 2b + 3c + 12$ bằng

- A. -16 . B. 8 . C. 12 . D. 16 .

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi K là hình chiếu của H lên (P) , E là hình chiếu của H lên MN .

Ta có $d(H; (P)) = HK$ và $d(H; MN) = HE$, $HK \leq HE$ (không đổi).

Vậy $d(H; (P))$ lớn nhất khi $K \equiv E$, với E là hình chiếu của H lên MN .

Suy ra $E\left(\frac{-1}{3}; \frac{-1}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

Vậy mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng nhận $\overrightarrow{HE} = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ làm vector pháp tuyến và đi qua M có phương trình là $-x - y + z - 3 = 0$.

Suy ra $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$.

Vậy $T = 16$.
