



HÌNH KHÔNG GIAN THỂ TÍCH

TỪ CƠ BẢN ĐẾN NÂNG CAO FULL

Giáo viên: Nguyễn Tiến Đạt

HÌNH KHÔNG GIAN THỂ TÍCH

ÔN TẬP 1: KIẾN THỨC CƠ BẢN HÌNH HỌC LỚP 9 – 10

1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông: Cho $\triangle ABC$ vuông ở A . Ta có:

a) Định lý Pitago : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

b) $BA^2 = BH.BC; CA^2 = CH.CB$

c) $AB.AC = BC.AH$

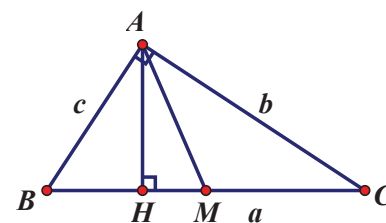
d) $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

e) $BC = 2AM$

f) $\sin B = \frac{b}{a}, \cos B = \frac{c}{a}, \tan B = \frac{b}{c}, \cot B = \frac{c}{b}$

g) $b = a.\sin B = a.\cos C, c = a.\sin C = a.\cos B, a = \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\cos C}$

$b = c.\tan B = c.\cot C$



2. Hệ thức lượng trong tam giác thường

♦ Định lý hàm số cosin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

♦ Định lý hàm số sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

3. Các công thức tính diện tích

a) Công thức tính diện tích tam giác

$$S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}a.b \sin C = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ với } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Đặc biệt: $\triangle ABC$ vuông ở A : $S = \frac{1}{2}AB.AC$

$\triangle ABC$ đều cạnh $\triangle ABC$: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

b) Diện tích hình vuông: $S = \text{cạnh} \times \text{cạnh}$

c) Diện tích hình chữ nhật: $S = \text{dài} \times \text{rộng}$

d) Diện tích hình thoi: $S = \frac{1}{2}(\text{chéo dài} \times \text{chéo ngắn})$

e) **Diện tích hình thang:** $S = \frac{1}{2} (\text{đáy lớn} + \text{đáy nhỏ}) \times \text{chiều cao}$

f) **Diện tích hình bình hành:** $S = \text{đáy} \times \text{chiều cao}$

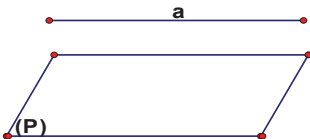
g) **Diện tích hình tròn:** $S = \pi R^2$

ÔN TẬP 2: KIẾN THỨC CƠ BẢN HÌNH HỌC LỚP 11

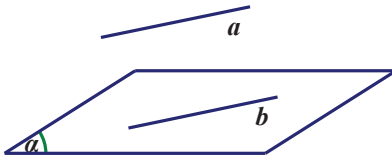
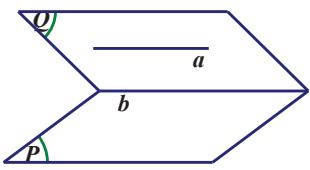
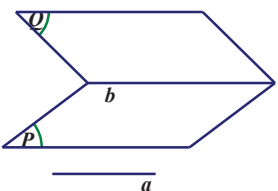
A. QUAN HỆ SONG SONG

§1. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG

1. Định nghĩa

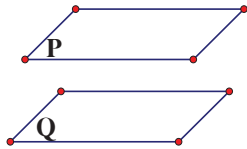
Đường thẳng và mặt phẳng gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm nào chung.	$a \parallel (P) \Leftrightarrow a \cap (P) = \emptyset$	
---	--	---

2. Các định lý:

Định lý 1: Nếu đường thẳng a không nằm trên mặt phẳng (α) và song song với một đường thẳng nào đó nằm trên (α) thì a song song với (α) .	$\left. \begin{array}{l} a \not\subset (\alpha) \\ b \parallel a \\ b \subset (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel (\alpha)$	
Định lý 2: Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) thì mọi mặt phẳng (Q) chứa a mà cắt (P) thì cắt theo giao tuyến song song với a .	$\left\{ \begin{array}{l} a \parallel (P) \\ a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = b \end{array} \right. \Rightarrow b \parallel a$	
Định lý 3: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng cũng song song với đường thẳng đó.	$\left\{ \begin{array}{l} (P) \cap (Q) = b \\ (P) \parallel a \\ (Q) \parallel a \end{array} \right. \Rightarrow b \parallel a$	

§2. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

1. Định nghĩa:

Hai mặt phẳng được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm nào chung.	$(P) \parallel (Q) \Leftrightarrow (P) \cap (Q) = \emptyset$	
---	--	---

2. Các định lý:

Định lý 1: Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) và (Q) song song với nhau.	$\left. \begin{array}{l} a, b \subset (P) \\ a \cap b = I \\ a \parallel (Q), b \parallel (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) \parallel (Q)$	
Định lý 2: Nếu một đường thẳng nằm một trong hai mặt phẳng song song thì song song với mặt phẳng kia.	$\left. \begin{array}{l} (P) \parallel (Q) \\ a \subset (P) \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel (Q)$	
Định lý 3: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song.	$\left. \begin{array}{l} (P) \parallel (Q) \\ (R) \cap (P) = a \\ (R) \cap (Q) = b \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$	

B. QUAN HỆ VUÔNG GÓC

§1. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

1. Định nghĩa:

Một đường thẳng được gọi là vuông góc với một mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng đó.	$a \perp (P) \Leftrightarrow a \perp c, \forall c \subset (P)$	
--	--	--

2. Các định lý:

Định lý 1: Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (P) thì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P).	$\left. \begin{array}{l} d \perp a, d \perp b \\ a, b \subset (P) \\ a \cap b \neq \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp (P)$	
Định lý 3: (Ba đường vuông góc) Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó,	$\left. \begin{array}{l} a \not\perp (P), b \subset (P) \\ b \perp a \Leftrightarrow b \perp a' \end{array} \right\}$	

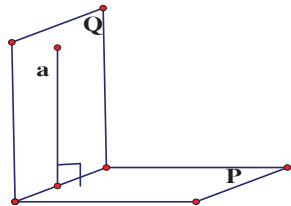
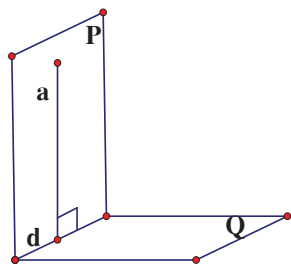
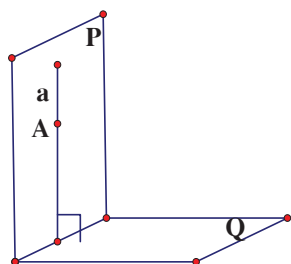
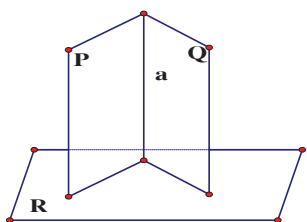
điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P) .

§2. HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

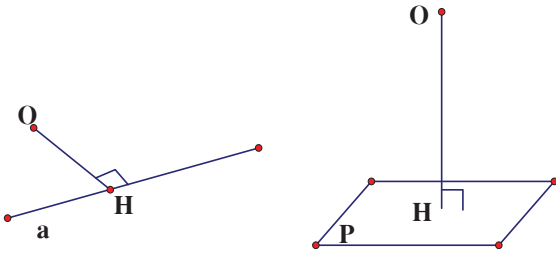
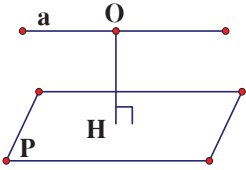
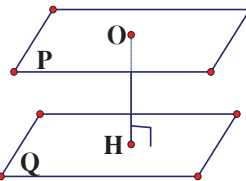
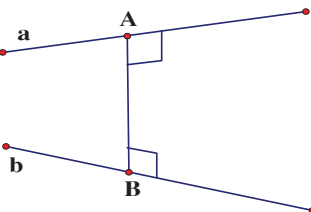
1. Định nghĩa:

Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

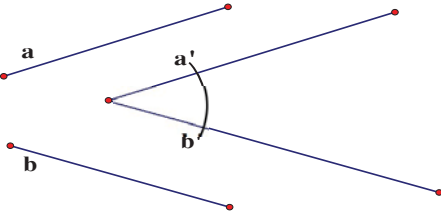
2. Các định lý:

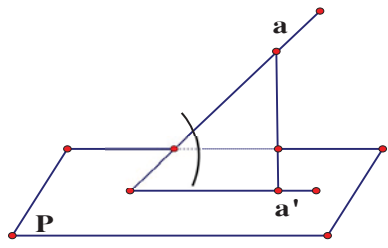
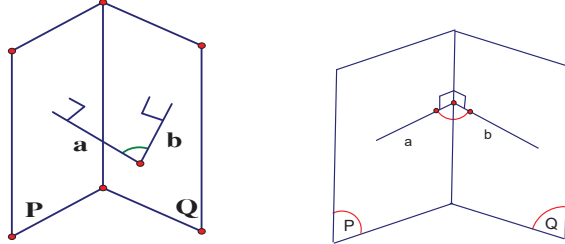
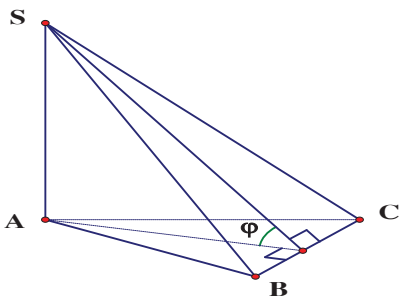
Định lý 1: Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.	$\left. \begin{array}{l} a \perp (P) \\ a \subset (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow (Q) \perp (P)$	
Định lý 2: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong (P) , vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (Q) .	$\left. \begin{array}{l} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \\ a \subset (P), a \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (Q)$	
Định lý 3: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là một điểm trong (P) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P) .	$\left. \begin{array}{l} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ A \in a \\ a \perp (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow a \subset (P)$	
Định lý 4: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.	$\left. \begin{array}{l} (P) \cap (Q) = a \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (R)$	

§3. KHOẢNG CÁCH

1. Khoảng cách từ 1 điểm tới 1 đường thẳng, đến 1 mặt phẳng: Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng a (hoặc đến mặt phẳng (P)) là khoảng cách giữa hai điểm M và H, trong đó H là hình chiếu của điểm M trên đường thẳng a (hoặc trên mặt phẳng (P)) $d(O;a) = OH; d(O;(P)) = OH$	
2. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song: Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm nào đó của a đến mặt phẳng (P). $d(a;(P)) = OH$	
3. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song: là khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia. $d((P);(Q)) = OH$	
4. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau: là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó. $d(a;b) = AB$	

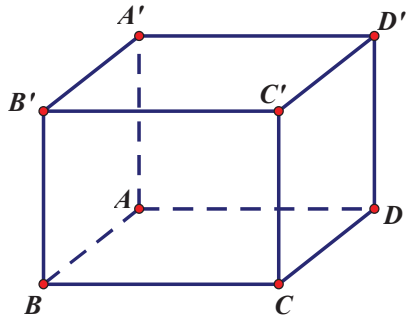
§4. GÓC

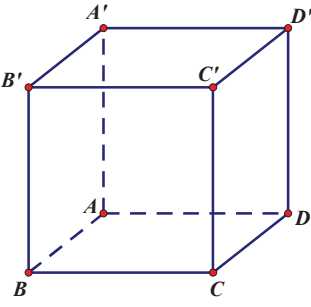
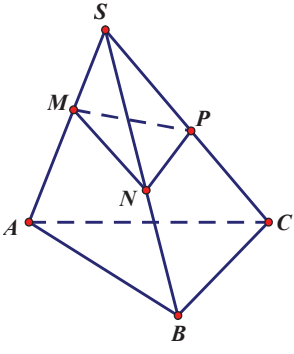
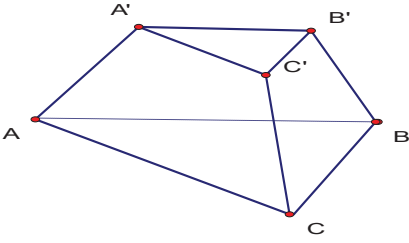
1. Góc giữa hai đường thẳng a và b là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt cùng phương với a và b.	
---	--

2. Góc giữa đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) là góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên mặt phẳng (P). Đặc biệt: Nếu a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) là 90°.	
3. Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó. Hoặc là góc giữa 2 đường thẳng nằm trong 2 mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại 1 điểm	
4. Diện tích hình chiếu: Gọi S là diện tích của đa giác (H) trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu (H') của (H) trên mặt phẳng (P') thì: $S' = S \cos \varphi$ trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P').	

ÔN TẬP 3: KIẾN THỨC CƠ BẢN HÌNH HỌC LỚP 12

A. CÁC CÔNG THỨC THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN:

1. Thể tích khối lăng trụ: $V = S.h$ Trong đó: S : Diện tích đa giác đáy. h : Đường cao của hình lăng trụ.	
a) Thể tích khối hộp chữ nhật: $V = a.b.c$ với a, b, c là ba kích thước	

b) Thể tích khối lập phương: $V = a^3$ với a là độ dài cạnh	
2. Thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3} S.h$ Trong đó: S : Diện tích đa giác đáy. h : Đường cao của hình chóp.	
3. Tỷ số thể tích tứ diện: Hai khối chóp $S.ABC$ và $S.MNP$ có chung đỉnh S và các góc ở đỉnh S. Khi đó: $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC}$	
4. Thể tích khối chóp cụt: $V = \frac{h}{3} (B + B' + \sqrt{BB'})$ Trong đó: B, B' : Diện tích hai đáy. h : Chiều cao.	

Chú ý:

1/ Đường chéo của hình vuông cạnh a là $d = a\sqrt{2}$,

Đường chéo của hình lập phương cạnh a là $d = a\sqrt{3}$,

Đường chéo của hình hộp chữ nhật có ba kích thước a, b, c là $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$,

2/ Đường cao của tam giác đều cạnh a là $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

3/ Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên đều bằng nhau (hoặc có đáy là đa giác đều, hình chiếu của đỉnh trùng với tâm của đáy).

4/ Lăng trụ đều là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

PHÂN DẠNG BÀI TẬP

A. LOẠI 1: THỂ TÍCH LĂNG TRỤ

1. Dạng 1: Khối lăng trụ đứng có chiều cao hay cạnh đáy

Ví dụ 1. Cho (H) là khối lăng trụ đứng tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a . Thể tích của (H) bằng:

A. $\frac{a^3}{2}$.

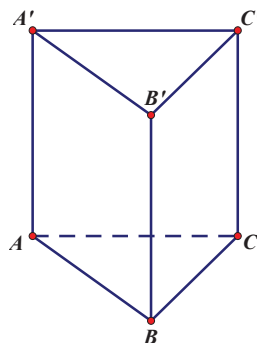
B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

$$V = S_{SBC} \cdot AA' = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$



Ví dụ 2. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a$, tam giác ABC đều cạnh a . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

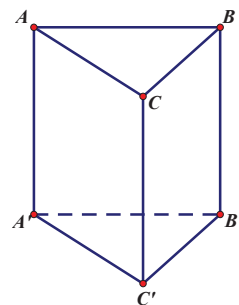
B. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

C. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

D. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3}{6}$.

Hướng dẫn giải:

$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, h = AA' = a \Rightarrow V = S_{ABC} \cdot h = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$



Ví dụ 3. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $BA = BC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{\sqrt{2} \cdot a^3}{3}$.

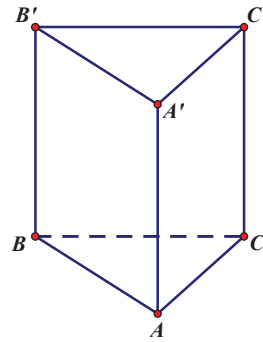
B. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{\sqrt{2} \cdot a^3}{2}$.

C. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{\sqrt{2} \cdot a^3}{4}$.

D. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải:

$$V = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot AA' = \frac{a^3 \sqrt{2}}{2}$$



Ví dụ 4. Lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $BC = 2a$, $AB = a$. Mặt bên $(BB'C'C)$ là hình vuông. Khi đó thể tích lăng trụ là:

- A. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$. B. $a^3 \sqrt{2}$. C. $2a^3 \sqrt{3}$. D. $a^3 \sqrt{3}$.

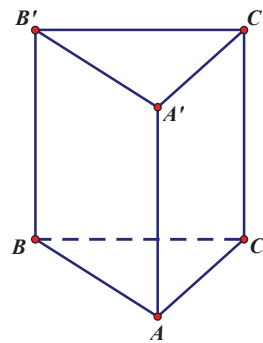
Hướng dẫn giải:

Ta có: $BB'C'C$ là hình vuông

$$\left. \begin{array}{l} h = BB' = 2a \\ AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{3} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = BB' \cdot S_{ABC} = a^3 \sqrt{3}$$



Ví dụ 5. Đáy của lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ là tam giác ABC vuông cân tại A có cạnh $BC = a\sqrt{2}$ và biết $A'B = 3a$. Tính thể tích khối lăng trụ.

- A. a^3 . B. $a^3 \sqrt{2}$. C. $a^3 \sqrt{3}$. D. $2a^3$.

Hướng dẫn giải:

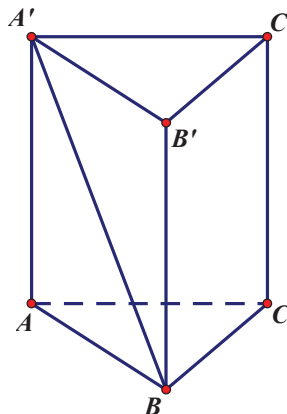
$\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $AB = AC = a$

$ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng

$$\Rightarrow AA' \perp AB$$

$$\Rightarrow AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = 2a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow V = B \cdot h = S_{ABC} \cdot AA' = a^3 \sqrt{2}$$



Ví dụ 6. Đáy của lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ là tam giác đều cạnh $a = 4$ và biết diện tích tam giác $A'BC$ bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ.

A. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

B. $\frac{8}{3}$.

C. $8\sqrt{2}$.

D. 8.

Hướng dẫn giải:

Gọi I là trung điểm BC . Ta có:

$\triangle ABC$ đều nên

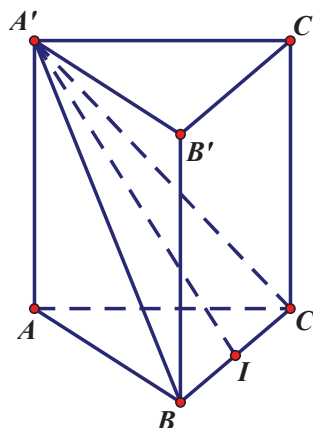
$$AI = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}; AI \perp BC \Rightarrow A'I \perp BC$$

$$S_{A'BC} = \frac{1}{2} BC \cdot A'I \Rightarrow A'I = \frac{2S_{A'BC}}{BC} = 4$$

$$AA' \perp (ABC) \Rightarrow AA' \perp AI$$

$$AA' = \sqrt{A'I^2 - AI^2} = 2$$

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA' = 8\sqrt{3}$$



Ví dụ 7. Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên bằng $4a$ và đường chéo $5a$. Tính thể tích khối lăng trụ này.

A. $9a^3$.

B. 9.

C. $3a^3$.

D. 3.

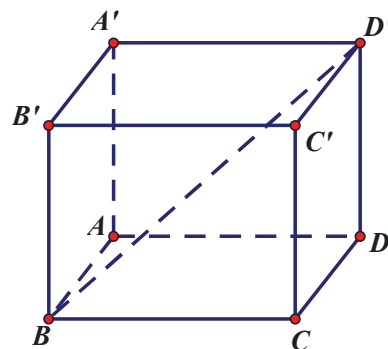
Hướng dẫn giải:

$$ABCD.A'B'C'D' \text{ là lăng trụ đứng nên } BD = \sqrt{BD'^2 - DD'^2} = 3a$$

$$ABCD \text{ là hình vuông } \Rightarrow AB = \frac{3a}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Suy ra } B = S_{ABCD} = \frac{9a^2}{4}$$

$$\Rightarrow V = B \cdot h = S_{ABCD} \cdot AA' = 9a^3$$



Ví dụ 8. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, tam giác $A'AC$ vuông cân và $A'C = a$. Tính theo a thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

B. $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{a^3\sqrt{2}}{48}$.

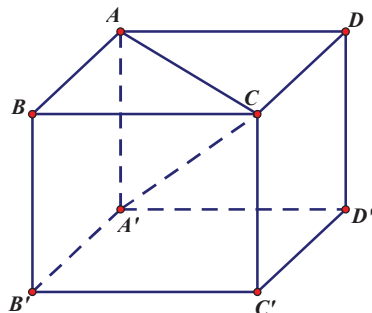
C. $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{a^3\sqrt{2}}{16}$.

D. $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

Hướng dẫn giải:

$$A'C = a \Rightarrow AC = AA' = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow AB = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow V = S_{ABCD} \cdot AA' = \frac{a^3 \sqrt{2}}{8}$$



Ví dụ 9. Cho hình hộp đứng có đáy là hình thoi cạnh a và có góc nhọn bằng 60° . Đường chéo lớn của đáy bằng đường chéo nhỏ của hình hộp. Tính thể tích hình hộp.

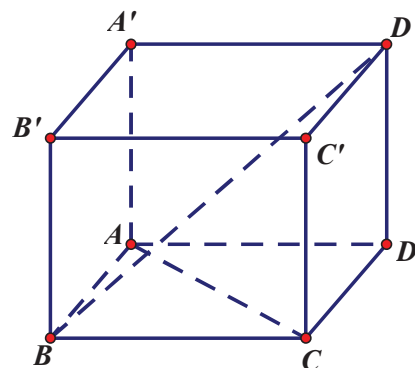
- A. $\frac{a^3 \sqrt{6}}{2}$. B. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a^3 \sqrt{6}}{6}$. D. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có tam giác ABD đều nên $BD = a$ và $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$

Theo đề bài $BD' = AC = a\sqrt{3}$

$$DD' = \sqrt{BD'^2 - BD^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow V = S_{ABCD} \cdot DD' = \frac{a^3 \sqrt{6}}{2}$$



Ví dụ 10. Một tấm bìa hình vuông có cạnh 44cm , người ta cắt bỏ đi ở mỗi góc tấm bìa một hình vuông cạnh 12cm rồi gấp lại thành một cái hộp chữ nhật không có nắp. Tính thể tích cái hộp này.

- A. 1200cm^3 . B. 1600cm^3 . C. 2400cm^3 . D. 4800cm^3 .

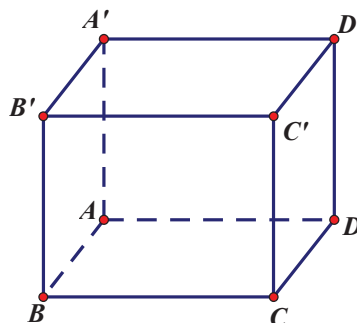
Hướng dẫn giải:

Theo đề bài, ta có: $AA' = BB' = CC' = DD' = 12\text{cm}$

nên $ABCD$ là hình vuông.

$$AB = 44\text{ cm} - 24\text{ cm} = 20\text{ cm}; h = 12\text{ cm}$$

$$\Rightarrow V = S_{ABCD} \cdot h = 4800\text{cm}^3$$



2. Dạng 2: Lăng trụ đứng có góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

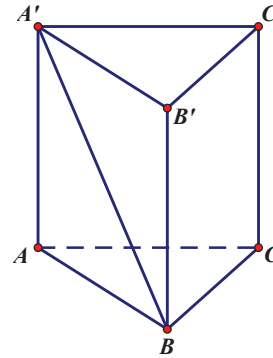
Ví dụ 1. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $BA = BC = a$, $A'B$ hợp với mặt đáy một góc 60° . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $V_{ABC.A'B'C'} = a^3\sqrt{3}$. C. $V_{ABC.A'B'C'} = a^3$. D. $V_{ABC.A'B'C'} = 5a^3\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

$$AA' \perp (ABC) \Rightarrow (AA', (ABC)) = (A'B, AB) = \widehat{ABA'} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow AA' = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot AA' = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$$



Ví dụ 2. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại C , góc giữa BC' và $(ABB'A')$ bằng 60° , $AB = AA' = a$. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{\sqrt{15} \cdot a^3}{4}$. B. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{\sqrt{18} \cdot a^3}{4}$. C. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{15a^3}{4}$. D. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{18a^3}{4}$.

Hướng dẫn giải:

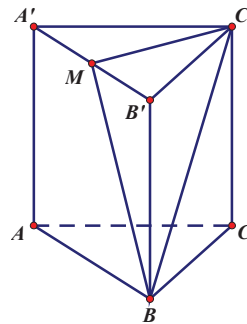
Gọi M là trung điểm của $A'B'$.

$$\Rightarrow C'M \perp (ABB'A')$$

$$\Rightarrow (BC', (ABB'A')) = (BC', BM) = \widehat{MBC'} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow MC' = \sqrt{BB'^2 + MB'^2} \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{A'B'C'} = \frac{a^2\sqrt{15}}{4} \Rightarrow V = S_{A'B'C'} \cdot AA' = \frac{a^3\sqrt{15}}{4}$$



Ví dụ 3. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$, góc giữa BC' và mặt phẳng $(AA'C'C)$ bằng 30° . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $V_{ABC.A'B'C'} = a^3\sqrt{6}$. B. $V_{ABC.A'B'C'} = a^3\sqrt{3}$. C. $V_{ABC.A'B'C'} = 2\sqrt{2}a^3$. D. $V_{ABC.A'B'C'} = a^3\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải:

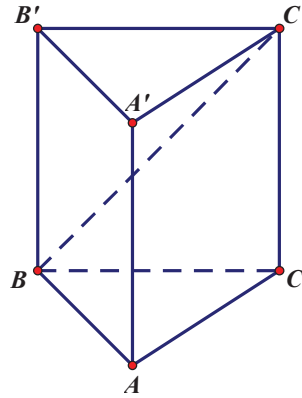
$$AC = a \Rightarrow AB = a\sqrt{3}, BC = 2a$$

$$AB \perp (AA'C'C)$$

$$\Rightarrow (BC', (AA'C'C)) = (BC', AC') = \widehat{AC'B} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow AC' = 3a \Rightarrow CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = 2a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot CC' = a^3 \sqrt{6}$$



Ví dụ 4. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và đường chéo BD' của lăng trụ hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 30° . Tính thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$. B. $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{2}$. C. $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{3}$. D. Kết quả khác.

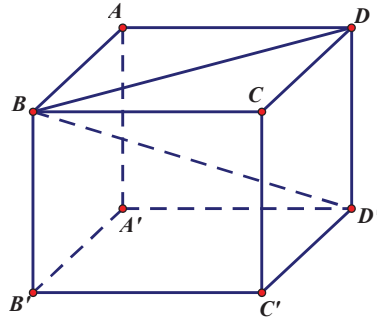
Hướng dẫn giải:

$$DD' \perp (ABCD)$$

$$\Rightarrow (BD', (ABCD)) = (BD', BD) = \widehat{DBD'} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow DD' = BD \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow V = S_{ABCD} \cdot DD' = \frac{a^3 \sqrt{6}}{3}$$



Ví dụ 5. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Biết AB' hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 30° . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{a^3}{2}$. B. $V_{ABCD.A'B'C'D'} = a^3 \sqrt{5}$. C. $V_{ABCD.A'B'C'D'} = a^3$. D. $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$.

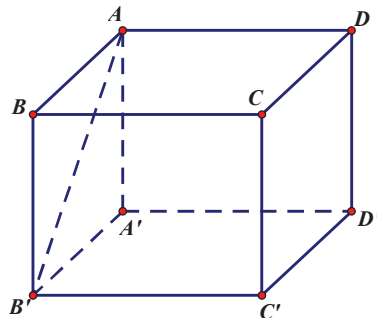
Hướng dẫn giải:

$$BB' \perp (ABCD)$$

$$\Rightarrow (AB', (ABCD)) = (AB', AB) = \widehat{BAB'} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow BB' = AB \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow V = S_{ABCD} \cdot BB' = 2S_{ABD} \cdot BB' = \frac{a^3}{2}$$



Ví dụ 6. Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa AC' và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 30° . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

- A. $V_{ABC.A'B'C'} = 2a^3$. B. $V_{ABC.A'B'C'} = \sqrt{2}a^3$. C. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{\sqrt{2}a^3}{2}$. D. $V_{ABC.A'B'C'} = a^3$.

Hướng dẫn giải:

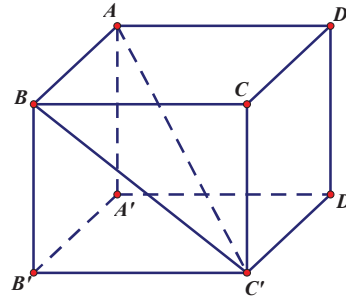
$$AB \perp (BCC'B')$$

$$\Rightarrow (\angle AC', (BCC'B')) = (\angle AC', BC') = \widehat{AC'B} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow BC' = AB \cdot \cot 30^\circ = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow BB' = \sqrt{BC'^2 - B'C'^2} = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow V = S_{ABCD} \cdot BB' = a^3\sqrt{2}$$



Ví dụ 7. Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a , đường chéo AC' tạo với mặt bên $(BCC'B')$ một góc α ($0 < \alpha < 45^\circ$). Khi đó, thể tích khối lăng trụ bằng:

- A. $a^3\sqrt{\cot^2 \alpha + 1}$. B. $a^3 \cot 2\alpha$. C. $a^3\sqrt{\cot^2 \alpha - 1}$. D. $a^3\sqrt{\tan^2 \alpha - 1}$.

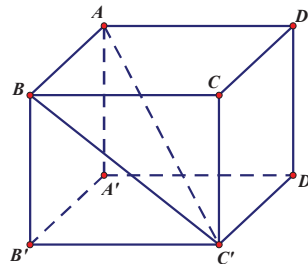
Hướng dẫn giải:

$$AB \perp (BCC'B')$$

$$\Rightarrow (\angle AC', (BCC'B')) = (\angle AC', BC') = \widehat{AC'B} = \alpha$$

$$\Rightarrow BC' = AB \cdot \cot \alpha \Rightarrow BB' = a\sqrt{\cot^2 \alpha - 1}$$

$$\Rightarrow V = S_{ABCD} \cdot BB' = a^3\sqrt{\cot^2 \alpha - 1}$$



3. Dạng 3: Lăng trụ đứng có góc giữa hai mặt phẳng

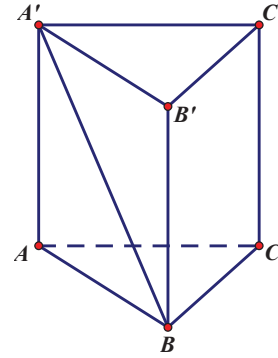
Ví dụ 1. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $BA = BC = a$, $A'B$ hợp với mặt đáy một góc 60° . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $V_{ABC.A'B'C'} = a^3\sqrt{3}$. C. $V_{ABC.A'B'C'} = a^3$. D. $V_{ABC.A'B'C'} = 5a^3\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

$$AA' \perp (ABC) \Rightarrow (AA', (ABC)) = (A'B, AB) = \widehat{ABA'} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow AA' = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot AA' = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$$



Ví dụ 2. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , $AC = 2a$, $\widehat{CAB} = 120^\circ$, góc giữa $(A'BC)$ và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V_{ABC.A'B'C'} = a^3\sqrt{3}$. **B.** $V_{ABC.A'B'C'} = 3a^3\sqrt{3}$. **C.** $V_{ABC.A'B'C'} = 3a^3$. **D.** $V_{ABC.A'B'C'} = 2a^3\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi M là trung điểm của BC .

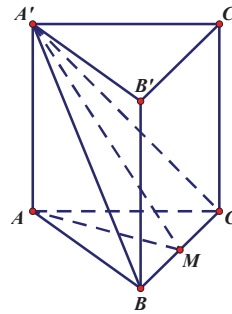
$$AM = AC \cdot \cos 60^\circ = a$$

$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 120^\circ} = 2a\sqrt{3}$$

$$A'M \perp BC, AM \perp BC$$

$$\Rightarrow ((A'BC), (ABC)) = (A'M, AM) = \widehat{AMA'} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow AA' = AM = a \Rightarrow V = \frac{1}{2} BC \cdot AM \cdot AA' = a^3\sqrt{3}$$



Ví dụ 3. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với mặt đáy góc 60° . Tính theo a thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Hướng dẫn giải:

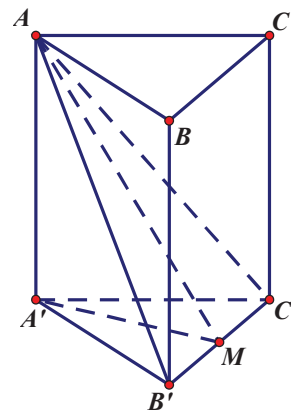
Gọi M là trung điểm $B'C'$

$$\Rightarrow A'M \perp B'C'$$

$$\Rightarrow 60^\circ = ((AB'C'), (A'B'C')) = (AM, A'M) = \widehat{AMA'}$$

$$A'M = \frac{a\sqrt{3}}{2}; AA' = A'M \cdot \tan \widehat{AMA'} = \frac{3a}{2}$$

$$S_{\Delta A'B'C'} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V = S_{\Delta ABC} \cdot AA' = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$$



Ví dụ 4. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a . Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 30° . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. B. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. C. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3}{2}$. D. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

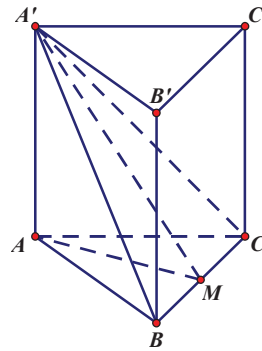
Hướng dẫn giải:

Gọi M là trung điểm của BC .

$\Rightarrow A'M \perp BC, AM \perp BC$

$\Rightarrow ((A'BC), (ABC)) = (A'M, AM) = \widehat{A'MA} = 30^\circ$

$$\Rightarrow AA' = AM \cdot \tan 30^\circ = \frac{a}{2} \Rightarrow V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$$



Ví dụ 5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $BC = a$, mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 30° và tam giác $A'BC$ có diện tích bằng $a^2\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. B. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. D. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp A'B$$

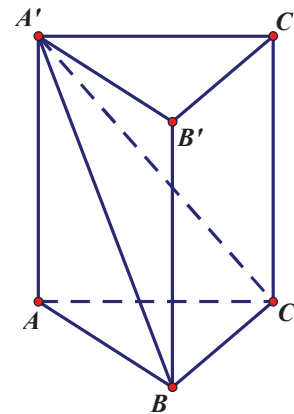
$$\left. \begin{array}{l} BC \perp AB \subset (ABC) \\ BC \perp A'B \subset (A'BC) \\ BC = (ABC) \cap (A'BC) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow ((ABC), (A'BC)) = (AB, A'B) = \widehat{ABA'}$$

$$S_{\triangle A'BC} = \frac{1}{2} A'B \cdot BC \Rightarrow A'B = \frac{2 \cdot S_{\triangle A'BC}}{BC} = \frac{2 \cdot a^2\sqrt{3}}{a} = 2a\sqrt{3}$$

$$AB = A'B \cdot \cos \widehat{ABA'} = 2a\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 3a; AA' = A'B \cdot \sin \widehat{ABA'} = 2a\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ = a\sqrt{3}$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = B \cdot h = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot AA' = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$$



Ví dụ 6. Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a , mặt phẳng $(BC'D)$ hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 60° . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

- A. $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. B. $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. D. Kết quả khác.

Hướng dẫn giải:

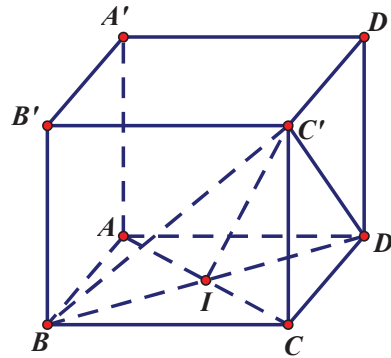
Gọi I là trung điểm của BD .

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} AC \perp BD, C'I \perp BD \\ (BC'D) \cap (ABCD) = BD \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow ((BC'D); (ABCD)) = (AC, C'I) = \widehat{CIC'} = 60^\circ$$

$$CI = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow CC' = CI \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\Rightarrow V = S_{ABCD} \cdot CC' = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$$



Ví dụ 7. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(A'BC)$ hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 60° , $A'C$ hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 30° và $AA' = a\sqrt{3}$. Tính theo a thể tích khối hộp.

- A. $V = 2a^3\sqrt{6}$. B. $V = \frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. C. $V = 2a^3\sqrt{2}$. D. $V = a^3$.

Hướng dẫn giải:

$$AA' \perp (ABCD)$$

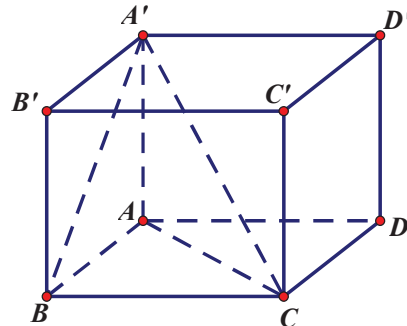
$$\Rightarrow 30^\circ = (A'C, (ABCD)) = (A'C, AC) = \widehat{A'CA}$$

$$\Rightarrow 60^\circ = ((A'BC), (ABCD)) = (A'B, AB) = \widehat{A'BA}$$

$$AB = \frac{AA'}{\tan \widehat{A'BA}} = a; AC = \frac{AA'}{\tan \widehat{A'CA}} = 3a$$

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a\sqrt{2}; S_{ABCD} = AB \cdot BC = 2a^2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot AA' = 2a^3\sqrt{6}$$



4. Dạng 4: Khối lăng trụ xiên

Ví dụ 1. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Biết cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$ và hợp với đáy (ABC) một góc 60° . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

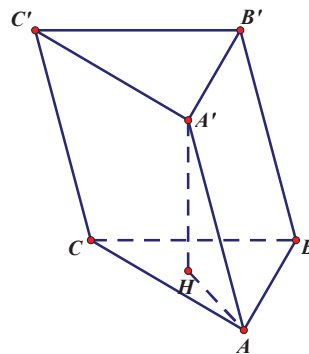
- A. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. B. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. C. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{5a^3\sqrt{3}}{8}$. D. Đáp án khác.

Hướng dẫn giải:

Kẻ $A'H \perp (ABC)$

$$\Rightarrow (AA', (ABC)) = (AA', AH) = \widehat{A'AH} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow A'H = AA' \cdot \sin 60^\circ = \frac{3a}{2} \Rightarrow V = S_{ABC} \cdot A'H = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$$



Ví dụ 2. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , điểm A' cách đều ba điểm A, B, C . Góc giữa AA' và (ABC) bằng 60° . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

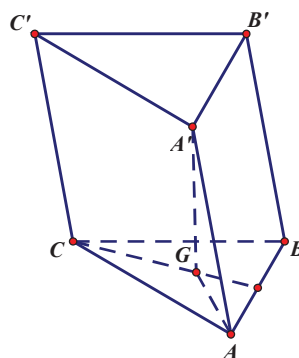
A. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3a^3\sqrt{4}}{4}$. B. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. D. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{5a^3\sqrt{3}}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC \Rightarrow A'G \perp (ABC)$

$$\Rightarrow (AA', (ABC)) = (AA', AG) = \widehat{GAA'} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow A'G = AG \cdot \tan 60^\circ = a \Rightarrow V = S_{ABC} \cdot A'G = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$



Ví dụ 3. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AC = 2a$; cạnh bên $AA' = \sqrt{2}a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh AC . Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

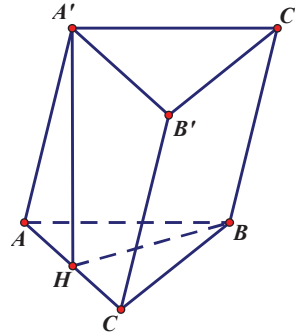
A. $V = \frac{1}{2}a^3$. B. $V = \frac{a^3}{3}$. C. $V = a^3$. D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Vì ABC là tam giác vuông cân tại B nên trung tuyến BH cũng là đường cao của nó và $HB = HA = HC = \frac{1}{2}AC = a$.

$$A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \sqrt{2a^2 - a^2} = a$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{ABC} = A'H \cdot \frac{1}{2}BH \cdot AC = a^3$$



Ví dụ 4. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm O của tam giác ABC . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, biết khoảng cách giữa AA' và BC là $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

- A. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. B. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. C. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{5}$. D. Kết quả khác.

Hướng dẫn giải:

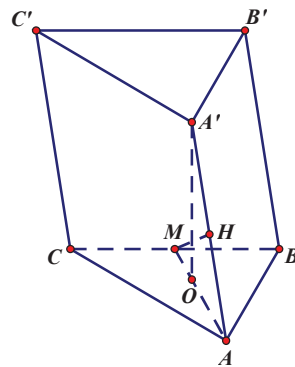
Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow BC \perp (AA'M)$

Gọi H là hình chiếu của M lên AA'

$$\Rightarrow HM = d_{(AA', BC)} = \frac{a\sqrt{3}}{8} \Rightarrow \sin \widehat{A'AO} = \frac{HM}{AM} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{A'AO} = 30^\circ \Rightarrow A'O = AO \cdot \tan \widehat{A'AO} = \frac{a}{3}$$

$$\Rightarrow V = S_{ABC} \cdot A'O = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$



Ví dụ 5. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm của BC , góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 30° . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. D. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

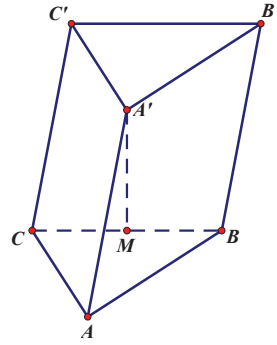
Hướng dẫn giải:

Gọi M là trung điểm của BC

$$\Rightarrow A'M \perp (ABC)$$

$$\Rightarrow (\widehat{AA', (ABC)}) = (\widehat{AA', AM}) = \widehat{A'AM} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow A'M = AM \cdot \tan 30^\circ = \frac{a}{2} \Rightarrow V = S_{ABC} \cdot A'M = \frac{a^3 \sqrt{3}}{8}$$



Ví dụ 6. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm của AB , góc giữa mặt phẳng $(AA'C'C)$ và mặt đáy bằng 60° . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V_{ABC.A'B'C'} = 2a^3 \sqrt{3}$. B. $V_{ABC.A'B'C'} = 3a^3 \sqrt{3}$. C. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3a^3 \sqrt{3}}{2}$. D. $V_{ABC.A'B'C'} = a^3 \sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi M là trung điểm của AB , kẻ $MH \perp AC$

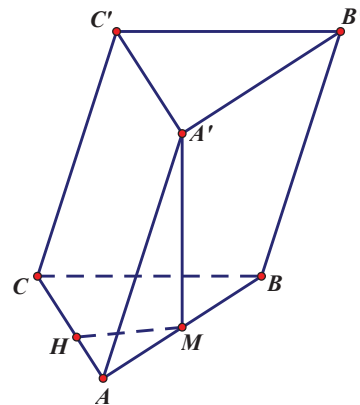
$$\Rightarrow A'M \perp (ABC)$$

$$\Rightarrow ((ACC'A'), (ABC)) = (\widehat{A'HM}) = 60^\circ$$

$$S_{ABC} = a^2 \sqrt{3}; S_{AMC} = \frac{1}{2} AC \cdot MH = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow MH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'M = MH \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}$$

$$V = S_{ABC} \cdot A'M = \frac{3a^3 \sqrt{3}}{2}$$



Ví dụ 7. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' = \frac{a\sqrt{10}}{4}$, $AC = a\sqrt{2}$, $BC = a$, $\widehat{ACB} = 135^\circ$. Hình chiếu vuông góc của C' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của AB . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V_{ABC.A'B'C'} = a^3$. B. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{8}$. C. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3a^3}{8}$. D. $V_{ABC.A'B'C'} = 3a^3 \sqrt{3}$.

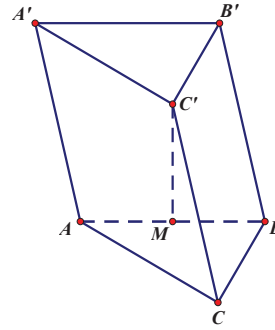
Hướng dẫn giải:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \widehat{ACB}} = a\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow MC = \sqrt{\frac{2(AC^2 + BC^2) - AB^2}{4}} = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow MC' = \sqrt{CC'^2 - MC^2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin 135^\circ \cdot MC' = \frac{a^3 \sqrt{6}}{8}$$



Ví dụ 8. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng a , đáy ABC là tam giác vuông tại C , $\widehat{BAC} = 60^\circ$, góc giữa BB' và (ABC) bằng 60° . Hình chiếu vuông góc của B' lên (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{27a^3}{208}$. B. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{27a^3}{280}$. C. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{73a^3}{208}$. D. $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{27a^3}{802}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$, M là trung điểm $AC \Rightarrow B'G \perp (ABC)$

$$\Rightarrow (BB', (ABC)) = (BB', BG) = \widehat{B'BG} = 60^\circ$$

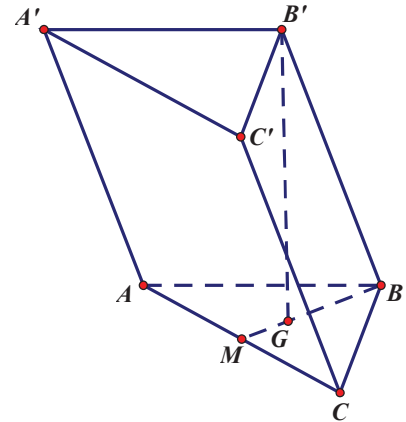
$$\Rightarrow B'G = BB' \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}, BG = BB' \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$$

$$AC = AB \cdot \cos 60^\circ = \frac{AB}{2}, BC = AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{8}$$

$$BM = \frac{3}{2} BG = \frac{3a}{4} = \sqrt{\frac{2(AB^2 + BC^2) - AC^2}{4}} = \frac{AB\sqrt{13}}{4} \Rightarrow AB = \frac{3a}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{9a^2 \sqrt{3}}{104} \Rightarrow V = S_{ABC} \cdot B'G = \frac{27a^3}{208}$$



Ví dụ 9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{3}$, $AD = \sqrt{7}$. Hai mặt bên $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ lần lượt tạo với đáy các góc 45° và 60° . Tính theo thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết cạnh bên bằng 1.

A. 1. B. 3. C. 6. D. 9.

Hướng dẫn giải:

Kẻ $A'H \perp (ABCD), HM \perp AB, HN \perp AD$

$$\Rightarrow A'M \perp AB, A'N \perp AD \Rightarrow \widehat{A'MH} = 45^\circ, \widehat{A'NH} = 60^\circ$$

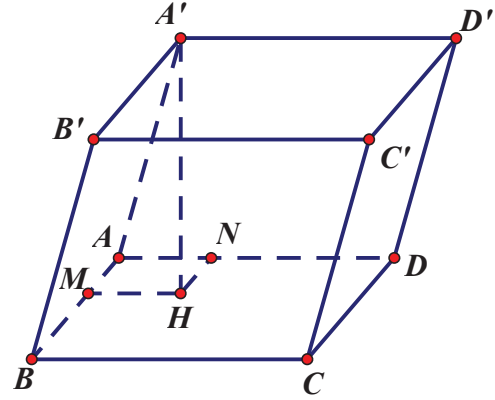
Đặt $A'H = x$. Khi đó:

$$A'N = \frac{x}{\sin 60^\circ} = \frac{2x}{\sqrt{3}}; AN = \sqrt{AA'^2 - A'N^2} = \sqrt{\frac{3-4x^2}{3}} = HM$$

$$\text{Mà } HM = x \cdot \cot 45^\circ = x$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{3-4x^2}{3}} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB \cdot AD \cdot x = 3$$



Ví dụ 10. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O và $AB = a, AD = a\sqrt{3}$; $A'O$ vuông góc với đáy $(ABCD)$. Cạnh bên AA' hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 45° . Tính theo a thể tích khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

D. $V = a^3\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

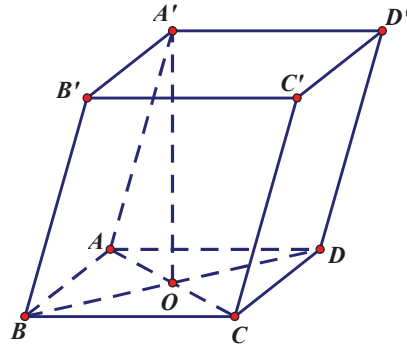
$$S_{ABCD} = AB \cdot AD = a^2\sqrt{3}$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a \Rightarrow AO = \frac{AC}{2} = a$$

$$A'O \perp (ABCD)$$

$$\Rightarrow 45^\circ = (\angle AA', (ABCD)) = (\angle AA', AO) = \widehat{A'AO}$$

$$A'O = AO = a \Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'O = a^3\sqrt{3}$$



B. LOẠI 2: THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

Một số hình chóp đặc biệt:

♦ **Hình chóp tam giác đều:**

Hình chóp tam giác đều:

- Đáy là tam giác đều.
- Các mặt bên là các tam giác cân.

Hình tứ diện đều:

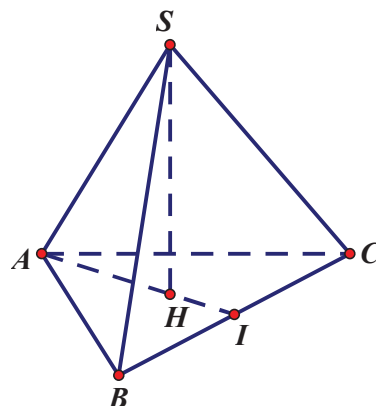
- Đáy là tam giác đều.
- Các mặt bên là các tam giác đều.

Cách vẽ:

- Vẽ đáy ABC .
- Vẽ trung tuyến AI .
- Đặt trọng tâm H .
- Vẽ $SH \perp (ABC)$.

Ta có:

- SH là chiều cao của hình chóp.
- Góc giữa cạnh bên và mặt đáy: $\widehat{SAH} = \alpha$.
- Góc giữa mặt bên và mặt đáy: $\widehat{SIH} = \beta$.



♦ **Hình chóp tứ giác đều:**

Hình chóp tứ giác đều:

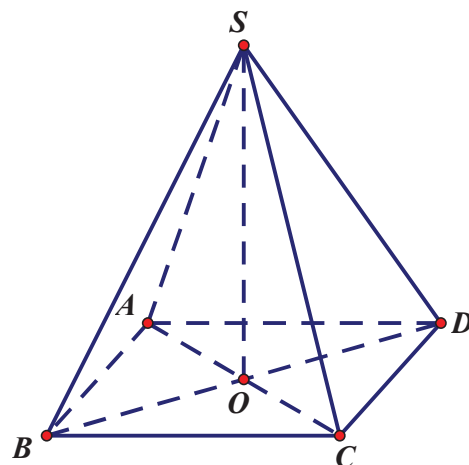
- Đáy là hình vuông.
- Các mặt bên là các tam giác cân.

Cách vẽ:

- Vẽ đáy $ABCD$.
- Đặt giao điểm H của hai đường chéo AC và BD .
- Vẽ $SH \perp (ABCD)$.

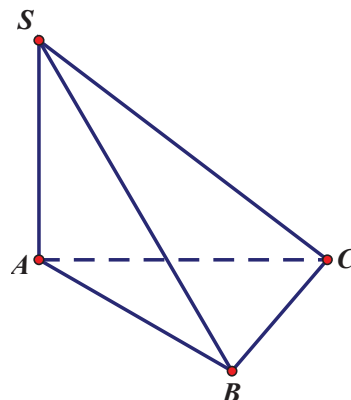
Ta có:

- SH là chiều cao của hình chóp.
- Góc giữa cạnh bên và mặt đáy: $\widehat{SAH} = \alpha$.
- Góc giữa mặt bên và mặt đáy: $\widehat{SIH} = \beta$.

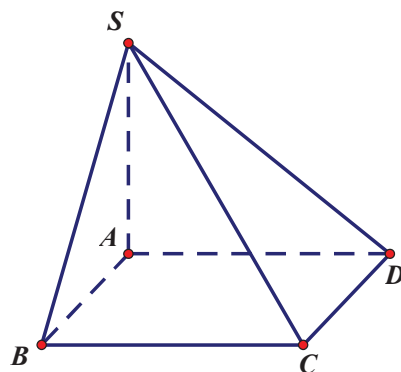


♦ **Hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy:**

- $SA \perp (ABC)$.
- Góc giữa cạnh bên SB và mặt đáy: $\widehat{SBA} = \alpha$.
- Góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy: $\widehat{SCA} = \beta$.



- $SA \perp (ABCD)$.
- Góc giữa cạnh bên SB và mặt đáy: $\widehat{SBA} = \alpha$.
- Góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy: $\widehat{SCA} = \beta$.
- Góc giữa cạnh bên SD và mặt đáy: $\widehat{SDA} = \gamma$.



Chú ý:

- Đường chéo của hình vuông cạnh a là $d = a\sqrt{2}$.
Đường chéo của hình lập phương cạnh a là $d = a\sqrt{3}$.
Đường chéo của hình hộp chữ nhật có 3 kích thước a, b, c là $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
- Đường cao của tam giác đều cạnh a là $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên đều bằng nhau (hoặc có đáy là đa giác đều, hình chiếu của đỉnh trùng với tâm của đáy).

1. Dạng 1: Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

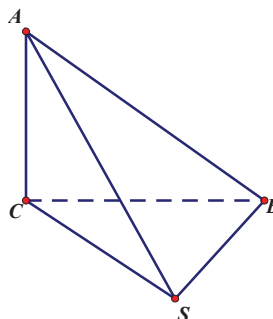
Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ $SB = SC = BC = CA = a$. Hai mặt (ABC) và (ASC) cùng vuông góc với (SBC) . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng:

A. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

$$(ABC) \perp (SBC), (ASC) \perp (SBC) \Rightarrow AC \perp (SBC)$$

$$SB = SC = BC \Rightarrow \Delta SBC \text{ đều} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot S_{SBC} \cdot CA = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$$

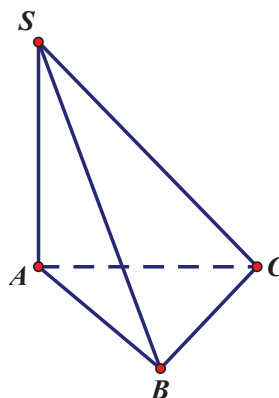


Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $V_{S.ABC} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$. B. $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{3}$. C. $V_{S.ABC} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$. D. $V_{S.ABC} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot SA = \frac{a^3}{3}$$



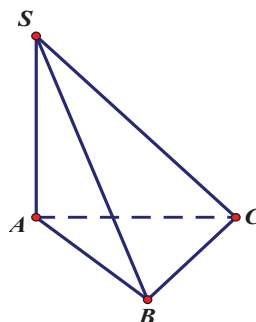
Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SB = 2a$. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{4}$. B. $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{3}$. C. $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{2}$. D. $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{7}$.

Hướng dẫn giải:

$$SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3}{4}$$



Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $AC = a$. Biết bên SA vuông góc với đáy và SB hợp với đáy một góc 60° . Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{24}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

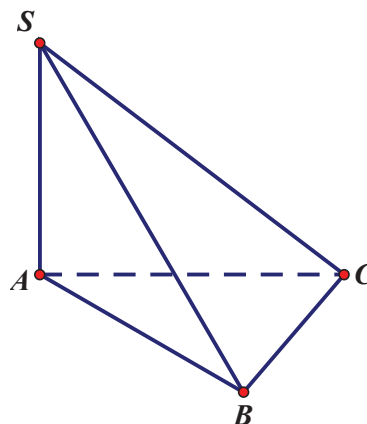
Hướng dẫn giải:

$$SA \perp (ABCD)$$

$$\Rightarrow (SB, (ABCD)) = (SB, AB) = \widehat{SBA} = 60^\circ$$

$$AB = BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}; S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{a^2}{4}$$

$$SA = AB \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{a^3\sqrt{6}}{24}$$



Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Biết SA vuông góc với đáy (ABC) và (SBC) hợp với đáy (ABC) một góc 60° . Tính thể tích hình chóp.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

C. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

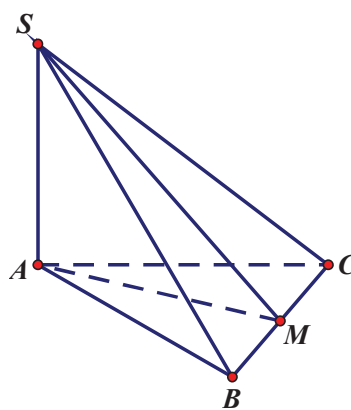
Gọi M là trung điểm BC . Ta có:

ΔABC đều nên

$$AM \perp BC \Rightarrow SA \perp BC$$

$$\Rightarrow ((SBC), (ABC)) = \widehat{SMA} = 60^\circ$$

$$SA = AM \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{2} \Rightarrow V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$$



Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc BAC bằng 120° . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{2}.a^3}{36}$.

B. $V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{2}.a^3}{12}$.

C. $V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{2}.a^3}{6}$.

D. $V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{2}.a^3}{3}$.

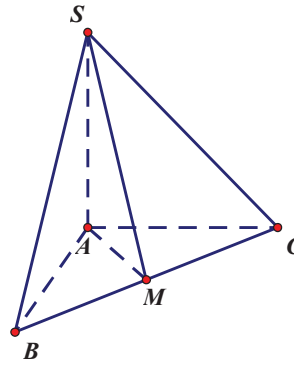
Hướng dẫn giải:

$$SB = SC \Rightarrow AB = AC \Rightarrow \triangle ABC \text{ cân tại } A.$$

$$\text{Có } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow AB = AC = \frac{a\sqrt{3}}{3}; SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ \cdot SA = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$$



Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{2}$, $BC = a$, $\widehat{SCA} = 60^\circ$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

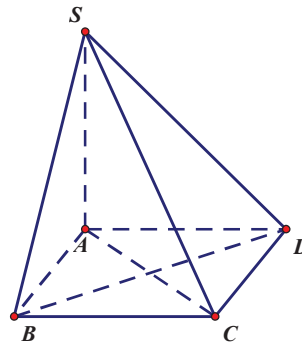
- A. $V_{S.ABCD} = a^3\sqrt{2}$. B. $V_{S.ABCD} = a^3\sqrt{3}$. C. $V_{S.ABCD} = 3a^3$. D. $V_{S.ABCD} = 2a^3$.

Hướng dẫn giải:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}; \widehat{SCA} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow SA = AC \cdot \tan 60^\circ = 3a$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot AB \cdot BC \cdot SA = a^3\sqrt{2}$$



Ví dụ 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$) và mặt bên (SCD) hợp với đáy một góc 60° . Tính thể tích hình chóp $S.ABCD$.

- A. $a^3\sqrt{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

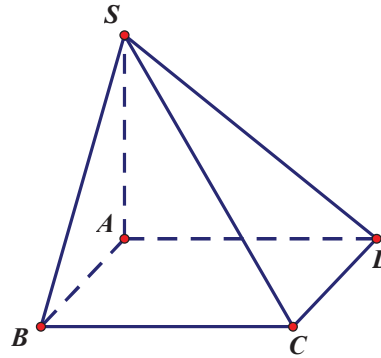
Hướng dẫn giải:

$$SA \perp (ABCD); CD \perp AD \Rightarrow CD \perp SD$$

$$\Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = \widehat{SDA} = 60^\circ$$

$$SA = AD \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$$



Ví dụ 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Biết góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

B. $\sqrt{3}a^3$.

C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{6}a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải:

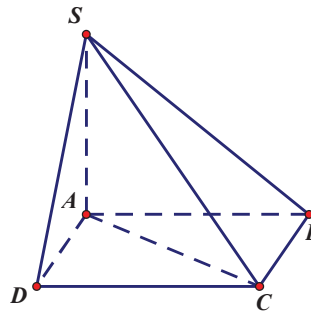
$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$$

$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$$

$$\Rightarrow (SC, (ABCD)) = \widehat{SCA} = 60^\circ$$

$$\frac{SA}{AC} = \tan 60^\circ \Rightarrow SA = AC \tan 60^\circ = a\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} a^2 \cdot a\sqrt{6} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{3}$$



Ví dụ 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D , $AD = CD = a$, $AB = 3a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa SC với mặt đáy bằng 45° . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$.

B. $V_{S.ABCD} = \frac{2a^3}{3}$.

C. $V_{S.ABCD} = \frac{2a^3 \sqrt{2}}{3}$.

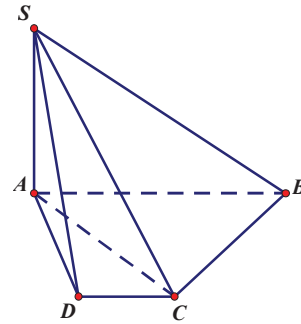
D. $V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải:

$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow SA = AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (AB + CD) \cdot AD \cdot SA = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$$



2. Dạng 2: Khối chóp có một mặt bên vuông góc với đáy

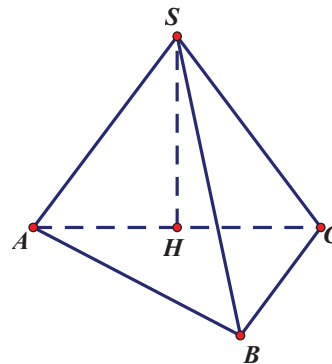
Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AC = 2a$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt đáy là trung điểm H của cạnh AC và $SH = a\sqrt{2}$. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{6}}{17}$. B. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. C. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{6}}{5}$. D. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Hướng dẫn giải:

$$AB = AC \cdot \sin 30^\circ = a \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot SH = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$$



Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác đều, BCD là tam giác vuông cân tại D , $(ABC) \perp (BCD)$ và AD hợp với (BCD) một góc 60° . Tính thể tích của khối tứ diện $ABCD$.

A. $V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. B. $V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $V_{ABCD} = a^3\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi H là trung điểm của BC .

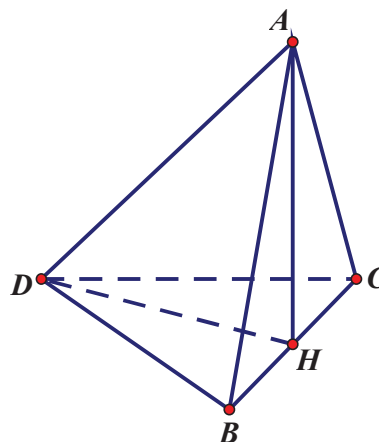
Ta có tam giác ABC đều nên $AH \perp (BCD)$

$$((ABC), (BCD)) \Rightarrow AH \perp (BCD)$$

$$AH \perp HD \Rightarrow AH = AD \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$$

$$HD = AD \cdot \cot 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}; BC = 2HD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

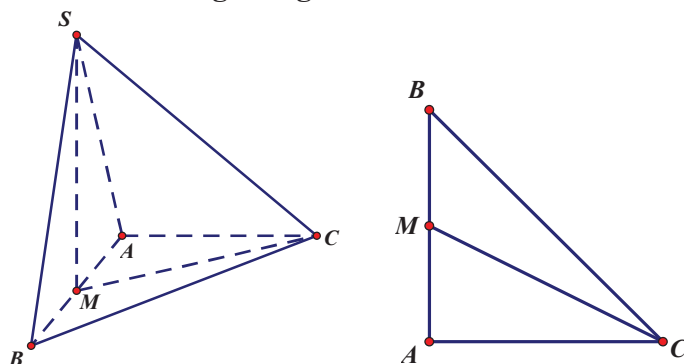
$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot AH = \frac{a^3 \sqrt{3}}{9}$$



Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $SC = 2a\sqrt{5}$. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) là trung điểm M của cạnh AB , góc giữa đường thẳng SC với mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $V_{S.ABC} = \frac{2a^3 \sqrt{15}}{3}$. B. $V_{S.ABC} = \frac{a^3 \sqrt{15}}{3}$. C. $V_{S.ABC} = \frac{2a^3}{3}$. D. $V_{S.ABC} = \frac{3a^3 \sqrt{15}}{2}$.

Hướng dẫn giải:



$$SM \perp (ABC) \Rightarrow (SC, (ABC)) = (SC, CM) = \widehat{SCM} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow CM = SC \cdot \cos 60^\circ = a\sqrt{5}; SM = a\sqrt{15}$$

$$\text{Tam giác } MAC \text{ vuông tại } A \Rightarrow AC = 2a \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot SM = \frac{2a^3 \sqrt{15}}{3}$$

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $BC = a$. Mặt bên SAC vuông góc với đáy, các mặt bên còn lại đều tạo với mặt đáy một góc 45° . Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{4}$. B. $V_{S.ABC} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$. C. $V_{S.ABC} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$. D. $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{12}$.

Hướng dẫn giải:

Kẻ $SH \perp BC$. Gọi I, J lần lượt là hình chiếu của H trên AB và BC .

$$((SAC), (ABC)) \Rightarrow SH \perp (ABC)$$

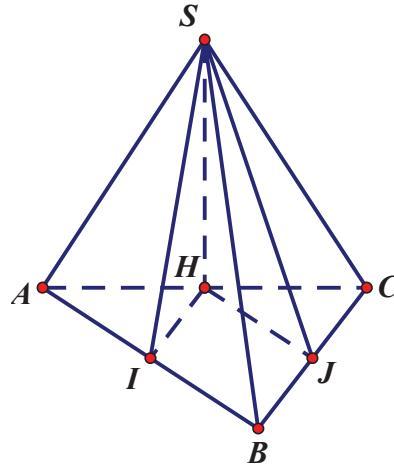
$$SI \perp AB, SJ \perp BC \Rightarrow \widehat{SIH} = \widehat{SJH} = 45^\circ$$

$$\Delta SHI = \Delta SHJ \Rightarrow HI = HJ$$

$\Rightarrow BH$ là đường phân giác của ΔABC

$\Rightarrow H$ là trung điểm của AC .

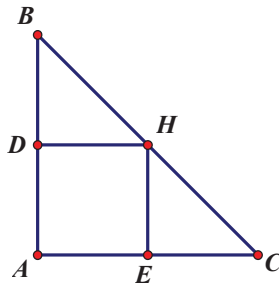
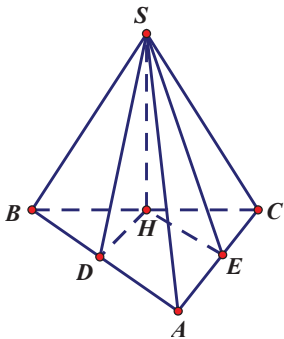
$$HI = HJ = SH = \frac{a}{2} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = \frac{a^3}{12}$$



Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $AB = a, (SBC) \perp (ABC)$. Hai mặt bên còn lại hợp với đáy một góc 60° . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $V_{S.ABC} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$. B. $V_{S.ABC} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{5}$. C. $V_{S.ABC} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{18}$. D. $V_{S.ABC} = \frac{7a^3 \sqrt{3}}{12}$.

Hướng dẫn giải:



Kẻ $SH \perp BC$. Do $(SBC) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$

$$Kẻ HD \perp AB, HE \perp AC \Rightarrow \widehat{SDH} = \widehat{SEH} = 60^\circ$$

Do tam giác ABC vuông cân tại A nên $HD = HE = \frac{a}{2} \Rightarrow H$ là trung điểm của BC

$$\Rightarrow SH = HD \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot SH = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$$

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$. B. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$. D. $a^3 \sqrt{3}$.

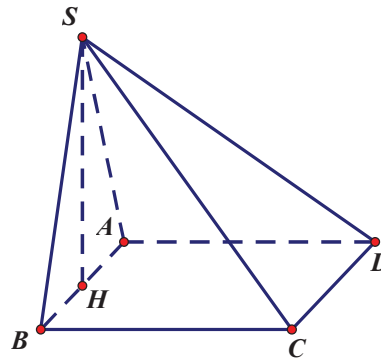
Hướng dẫn giải:

Gọi H là trung điểm của AB

$\triangle SAB$ đều $\Rightarrow SH \perp AB$

$(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

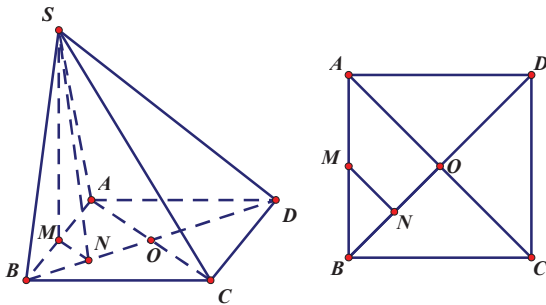
$$SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$$



Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt bên SAB vuông góc với mặt phẳng đáy và tam giác SAB cân tại S . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$, biết rằng: đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , góc giữa mặt (SBD) và mặt đáy bằng 60° .

A. $V_{S.ABCD} = a^3\sqrt{6}$. B. $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{5}$. C. $V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{12}$. **D. $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.**

Hướng dẫn giải:



Gọi M là trung điểm của AB .

$(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SM \perp (ABCD)$

Gọi O là giao điểm của AC và BD , N là trung điểm của OB .

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow MN \perp BD \\ SM \perp BD \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (SMN) \Rightarrow BD \perp SN$$

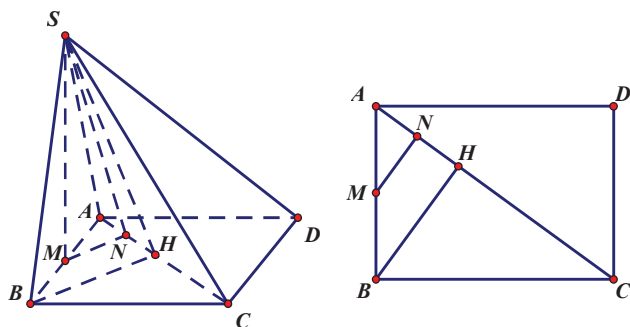
$$\Rightarrow ((SBD), (ABCD)) = (SN, MN) = \widehat{SNM} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow SM = MN \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{4} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot AB^2 \cdot SM = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$$

Ví dụ 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt bên SAB vuông góc với mặt phẳng đáy và tam giác SAB cân tại S . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$, biết rằng: đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, góc giữa mặt SAC và mặt đáy bằng 60° .

A. $V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{3}$. **B.** $V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{6}$. **C.** $V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{2}$. **D.** $V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{8}$.

Hướng dẫn giải:



Gọi M là trung điểm của AB .

$$(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SM \perp (ABCD)$$

Kẻ BH vuông góc với AC , gọi N là trung điểm của $AH \Rightarrow MN \perp AC$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow MN \perp AC \\ SM \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp (SMN) \Rightarrow AC \perp SN$$

$$\Rightarrow ((SAC), (ABCD)) = (SN, MN) = \widehat{SNM} = 60^\circ$$

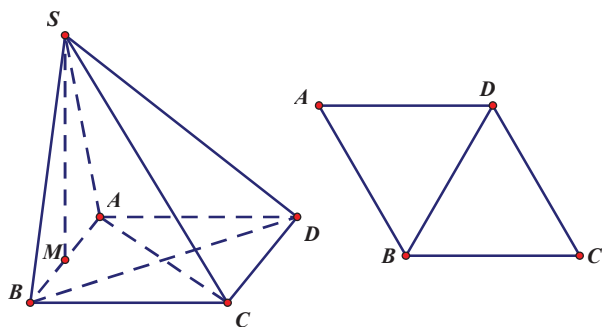
$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow MN = \frac{BH}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$\Rightarrow SM = MN \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot AB \cdot AD \cdot SM = \frac{a^3}{3}$$

Ví dụ 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, $AB = BC = BD = a$, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$

A. $V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{4}$. **B.** $V_{S.ABCD} = \frac{5a^3}{6}$. **C.** $V_{S.ABCD} = \frac{5a^3}{2}$. **D.** $V_{S.ABCD} = \frac{11a^3}{8}$.

Hướng dẫn giải:



Gọi M là trung điểm của AB .

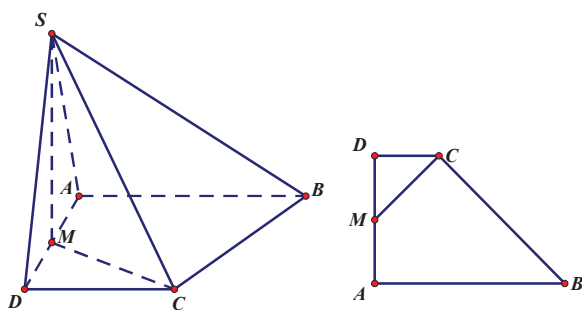
$$(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SM \perp (ABCD)$$

$$SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, S_{ABCD} = 2S_{ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SM = \frac{a^3}{4}$$

Ví dụ 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AB = 3a, AD = 2a, CD = a$, tam giác SAD cân tại S , mặt phẳng (SAD) vuông góc với đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt đáy bằng 60° . Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V_{S.ABCD} = \frac{4a^3\sqrt{6}}{3}$. **B.** $V_{S.ABCD} = \frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. **C.** $V_{S.ABCD} = \frac{5a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải:



Gọi M là trung điểm của AD .

$$\left. \begin{array}{l} (SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SM \perp (ABCD) \Rightarrow SM \perp BC \\ MC \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SMC) \Rightarrow BC \perp SC$$

$$\Rightarrow ((SBC), (ABCD)) = (SC, MC) = \widehat{SCM} = 60^\circ \Rightarrow SM = MC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (AB + CD) \cdot AD \cdot SM = \frac{4a^3\sqrt{6}}{3}$$

3. Dạng 3: Khối chóp đều

Ví dụ 1. Cho H là khối tứ diện đều cạnh a . Thể tích của H bằng bao nhiêu?

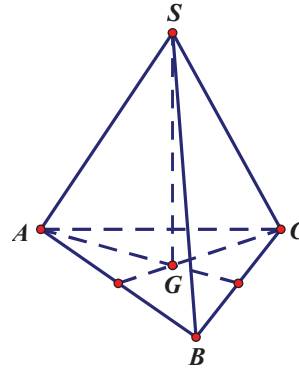
A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow SG \perp (ABC)$

$$AG = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SG = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$



Ví dụ 2. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $2a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{11}}{36}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{11}}{12}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{11}}{6}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{11}}{24}$.

Hướng dẫn giải:

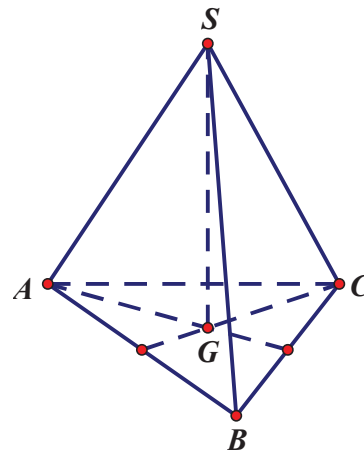
Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow SG \perp (ABC)$

$$AG = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}; SA = 2a$$

$$\Rightarrow SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \frac{a\sqrt{33}}{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SG = \frac{a^3\sqrt{11}}{12}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{36}$$



Ví dụ 3. Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a , M là trung điểm của CD . Tính thể tích hình chóp $M.ABC$.

A. $V_{M.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

B. $V_{M.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

C. $V_{M.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

D. $V_{M.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

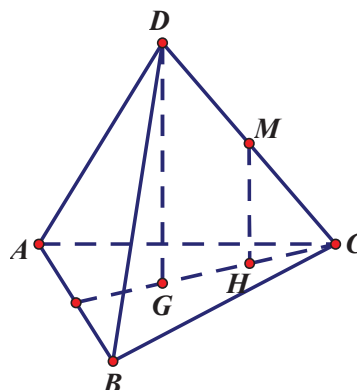
Hướng dẫn giải:

Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$. Kẻ $MH \parallel DG$

$$\Rightarrow DG \perp (ABC) \Rightarrow MH \perp (ABC)$$

$$MH = \frac{1}{2}DG = \frac{1}{2}\sqrt{CD^2 - GC^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot MH = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$$



Ví dụ 4. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $2a$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABI$.

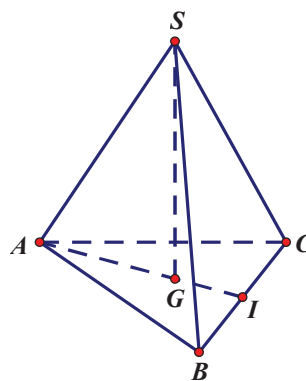
A. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{41}}{24}$. B. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{11}}{24}$. C. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{31}}{24}$. D. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{21}}{24}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow SG \perp (ABC)$

$$\Rightarrow SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{AB\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{33}}{3}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABI} = \frac{1}{2}V_{S.ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SG = \frac{a^3\sqrt{11}}{24}$$



Ví dụ 5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ tất cả các cạnh đều bằng a . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

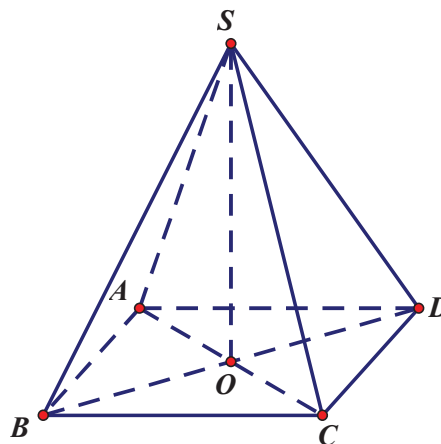
Hướng dẫn giải:

Gọi O là giao điểm của AC và BD

$$\Rightarrow SO \perp (ABCD)$$

$$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}; SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3}AB \cdot BC \cdot SO = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$



Ví dụ 6. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

B. $V_{S.ABCD} = \frac{a^2\sqrt{6}}{6}$.

C. $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{5}$.

D. $V_{S.ABCD} = \frac{a^2\sqrt{6}}{5}$.

Hướng dẫn giải:

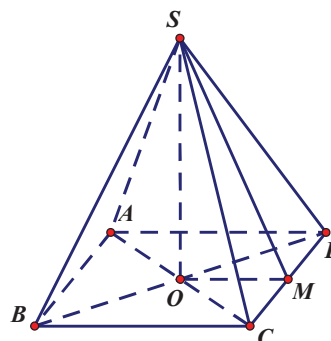
Gọi O là giao điểm của AC và BD , M là trung điểm của CD .

$$\Rightarrow OM \perp CD, SM \perp CD$$

$$\Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = (OM, SM) = \widehat{SMO} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow SO = OM \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$$



Ví dụ 7. Cho một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và diện tích xung quanh gấp đôi diện tích đáy. Khi đó thể tích của khối chóp là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

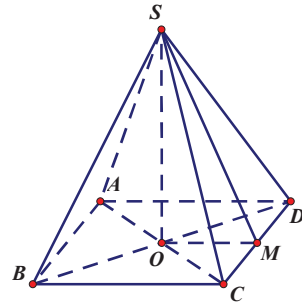
Gọi O là giao điểm của AC và BD , M là trung điểm của CD .

$$S_{xq} = 4S_{SCD} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot CD \cdot SM = 2a \cdot SM; S_d = AB^2 = a^2$$

$$S_{xq} = 2S_d \Leftrightarrow 2a \cdot SM = 2a^2 \Leftrightarrow SM = a$$

$$\Rightarrow SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$$



4. Dạng 4: Khối chóp và phương pháp tỉ số thể tích

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi B' và C' lần lượt là trung điểm của AB và AC . Khi đó tỉ số thể tích của khối tứ diện $AB'C'D$ và khối tứ diện $ABCD$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$.

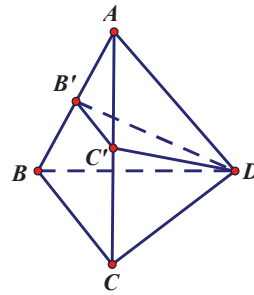
B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{1}{6}$.

D. $\frac{1}{8}$.

Hướng dẫn giải:

$$\frac{V_{AB'C'D}}{V_{ABCD}} = \frac{AB'}{AB} \cdot \frac{AC'}{AC} \cdot \frac{AD}{AD} = \frac{1}{4}$$



Ví dụ 2. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$. Gọi A' , B' lần lượt là trung điểm của SA và SB . Mặt phẳng $(A'B'C)$ chia hình chóp thành hai phần. Tỉ số thể tích của hai phần đó bằng:

A. $\frac{1}{2}$.

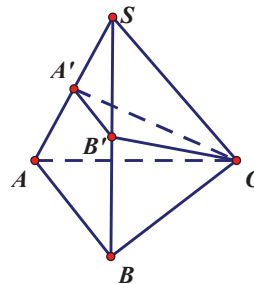
B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải:

$$\frac{V_{S.A'B'D}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC}{SC} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{V_{S.A'B'D}}{V_{ABCD A'B'}} = \frac{1}{3}$$



Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $AC = a\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Mặt phẳng (α) qua AG và song song với BC , cắt SC, SB lần lượt tại M, N . Tính thể tích của khối chóp $S.AMN$.

- A. $V_{S.AMN} = \frac{a^3}{9}$. B. $V_{S.AMN} = \frac{a^3}{27}$. C. $V_{S.AMN} = \frac{2a^3}{27}$. D. $V_{S.AMN} = \frac{2a^3}{9}$.

Hướng dẫn giải:

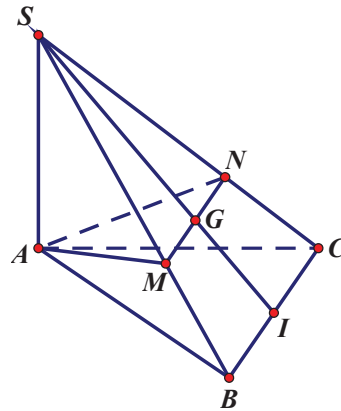
Gọi I là trung điểm của BC

$$AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = BC = a$$

$$(\alpha) \parallel BC \Rightarrow MN \parallel BC \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC} = \frac{SG}{SI} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{4}{9} V_{S.ABC} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot SA = \frac{2a^3}{27}$$



Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , $AB = a$. Trên đường thẳng qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm D sao cho $CD = a$. Mặt phẳng qua C vuông góc với BD , cắt BD tại F và cắt AD tại E . Tính theo a thể tích khối tứ diện $CDEF$.

- A. $\frac{a^3}{36}$. B. $\frac{a^3}{18}$. C. $\frac{a^3}{24}$. D. $\frac{a^3}{12}$.

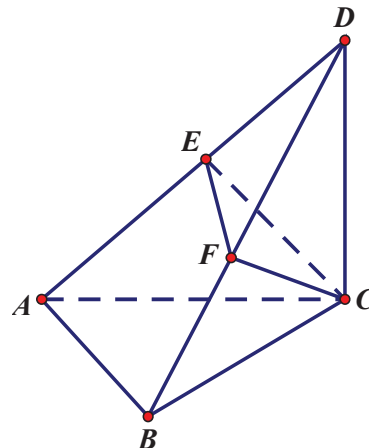
Hướng dẫn giải:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot CD = \frac{a^3}{6}$$

$$DE \cdot DA = DC^2 \Rightarrow \frac{DE \cdot DA}{DA^2} = \frac{DC^2}{DA^2} \Rightarrow \frac{DE}{DA} = \frac{DC^2}{DA^2} = \frac{1}{2}$$

$$CMTT: \frac{DF}{DB} = \frac{DC^2}{DB^2} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{CDEF}}{V_{ABCD}} = \frac{DE}{DA} \cdot \frac{DF}{DB} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{CDEF} = \frac{1}{6} V_{ABCD} = \frac{a^3}{36}$$



Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SB và SD . Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.AMN$ và $S.ABD$.

A. $\frac{1}{4}$.

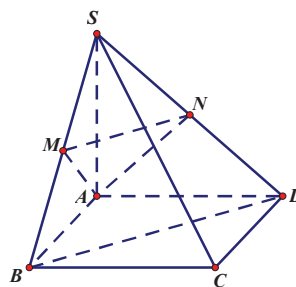
B. $\frac{3}{4}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{5}$.

Hướng dẫn giải:

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABD}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} = \frac{1}{4}$$



Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD . Khi đó tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C'D'$ và $S.ABCD$ là:

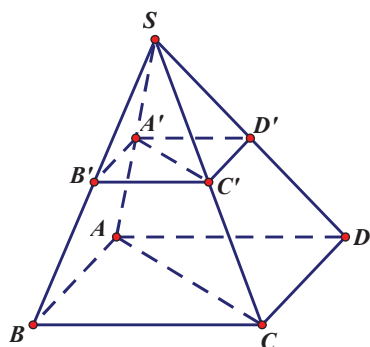
A. $\frac{1}{8}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:



$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{8}; \quad \frac{V_{S.A'D'C'}}{V_{S.ADC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{V_{S.A'D'C'}}{V_{S.ADC}} = \frac{V_{S.A'B'C'} + V_{S.A'D'C'}}{V_{S.ABC} + V_{S.ADC}} = \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{8}$$

Ví dụ 7. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (α) đi qua A, B và trung điểm M của SC . Tỉ số thể tích của hai phần khối chóp bị phân chia bởi mặt phẳng đó là:

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{3}{8}$.

C. $\frac{5}{8}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Kẻ $MN \parallel CD (N \in CD)$, suy ra hình thang $ABMN$ là thiết diện của khối chóp.

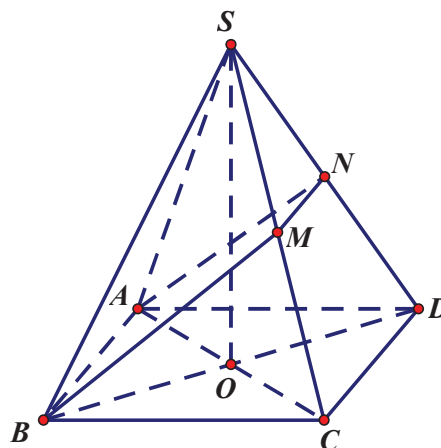
$$V_{S.ABMN} = V_{S.ABM} + V_{S.AMN}; \frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SC} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABM} = \frac{1}{2} V_{S.ABC} = \frac{1}{4} V_{S.ABCD}$$

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SD} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{1}{8} V_{S.ABCD}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABMN} = \frac{1}{4} V_{S.ABCD} + \frac{1}{8} V_{S.ABCD} = \frac{3}{8} V_{S.ABCD}$$

$$\Rightarrow V_{ABMNDC} = \frac{5}{8} V_{S.ABCD} \Rightarrow \frac{V_{S.ABMN}}{V_{ABMNDC}} = \frac{3}{5}$$



Ví dụ 8. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên tạo với đáy góc 60° . Gọi M là trung điểm của SC . Mặt phẳng đi qua AM và song song với BD cắt SB tại E và cắt SD tại F . Tính theo a thể tích khối chóp $S.AEMF$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{36}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{18}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{9}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Hướng dẫn giải:

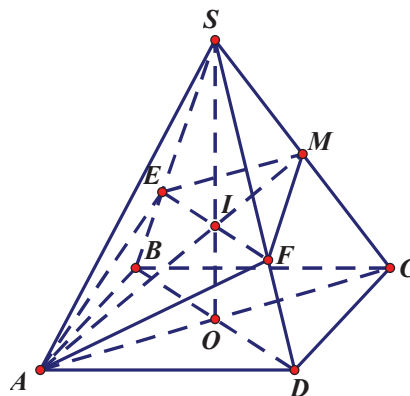
Gọi $I = SO \cap AM$

$(AEMF) \parallel BD \Rightarrow EF \parallel BD$

$$SO = OA \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$$

$$\frac{V_{S.AMF}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SF}{SD} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AMF} = \frac{1}{3} V_{S.ACD} = \frac{1}{6} V_{S.ABCD}$$

$$V_{S.AEMF} = V_{S.AMF} + V_{S.AME} = 2V_{S.AMF} = \frac{1}{3} V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$$



Ví dụ 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi B', D' lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD . Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C' . Tính theo a thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$.

A. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{9}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

C. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{27}$.

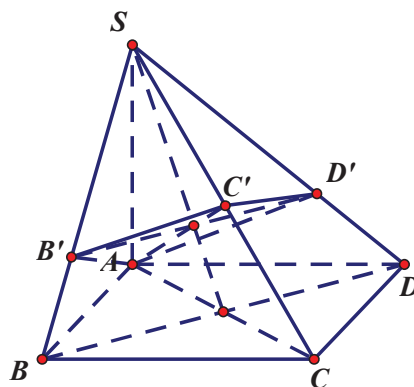
D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$.

Hướng dẫn giải:

$$\frac{SB'}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2}{3}; \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AB'C'} = \frac{1}{3} V_{S.ABC}$$

$$V_{S.AB'C'D'} = V_{S.AB'C'} + V_{S.AC'D'} = 2V_{S.AB'C'} = \frac{2}{3} V_{S.ABC} = \frac{2a^3\sqrt{2}}{9}$$



Ví dụ 10. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có thể tích bằng V với đáy là hình bình hành. Gọi C' là trung điểm cạnh SC . Mặt phẳng qua AC' và song song với BD cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D' . Khi đó thể tích của khối chóp $S.A'B'C'D'$ bằng:

A. $\frac{V}{3}$.

B. $\frac{2V}{3}$.

C. $\frac{V}{4}$.

D. $\frac{V}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi O là giao điểm của AC và BD , gọi I là giao điểm của SO và AC' . Qua I kẻ $B'D'$ song song với BD . Khi đó mặt phẳng qua AC' và song song với BD là mặt phẳng $(AB'C'D')$.

Ta dễ dàng nhận thấy rằng I là trọng tâm của tam giác SAC nên $\frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}$

Theo định lí Ta lét ta có $\frac{SD'}{SD} = \frac{SI}{SO} = \frac{SB'}{SB} = \frac{2}{3}$

$$\frac{V_{SAD'C'}}{V_{SADC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{V_{SAB'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$V_{SADC} = V_{SABC} = \frac{1}{2} V_{SABCD}$$

$$\Rightarrow V_{SAD'C'B'} = V_{SAD'C'} + V_{SAB'C'} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} V_{SABCD} = \frac{V}{3}$$

