TRƯỜNG THPT CHU VĂN AN
GV:PHẠM LÊ DUY
SĐT: 0704.963.919

TOÁN 12

(THEO CHƯƠNG TRÌNH GDPT 2018 - NXB: BGDĐT)

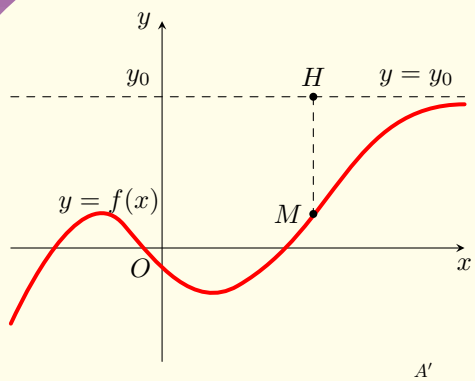
Năm Học: 2026-2027

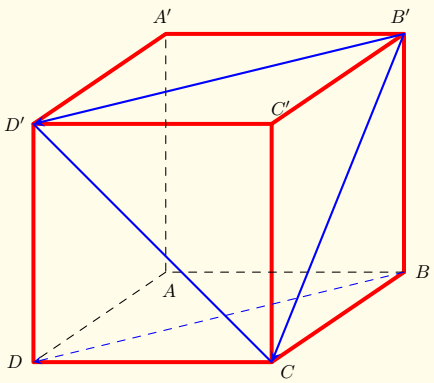
Nắm chắc Lí Thuyết A

Hiểu rõ Ví Dụ B

Tích cực Luyện Tập C

Thành thạo Giải Toán D





LƯU HÀNH NỘI BỘ

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1 ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ 15

1 TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ 15

A Lý thuyết 15

B Các dạng bài tập 17

Dạng 1.1. Xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi một công thức 17

Dạng 1.2. Xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi đồ thị - bảng biến thiên 19

Dạng 1.3. Xác định cực trị của hàm số cho bởi công thức 20

Dạng 1.4. Xác định cực trị của hàm số cho bởi bảng biến thiên – đồ thị 23

Dạng 1.5. Toán thực tế áp dụng tính đơn điệu của hàm số 25

C Luyện tập 27

2 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ 57

A Lý thuyết 57

B Các dạng bài tập 58

Dạng 2.1. Giá trị lớn nhất - nhỏ nhất trên đoạn 58

Dạng 2.2. Giá trị lớn nhất – nhỏ nhất của hàm số trên khoảng 59

Dạng 2.3. Sử dụng cách đánh giá để tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất 61

Dạng 2.4. Ứng dụng giá trị lớn nhất – nhỏ nhất 62

Dạng 2.5. Bài toán thực tế áp dụng giá trị lớn nhất - nhỏ nhất 64

C Luyện tập 66

3 ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ 80

A Lý Thuyết 80

B Các dạng bài tập 81

Dạng 3.1. Tìm các đường tiệm cận khi cho bảng biến thiên – đồ thị 81

Dạng 3.2. Tìm các đường tiệm cận khi cho bảng biến thiên – đồ thị 84

Dạng 3.3. Đường tiệm cận liên quan góc – khoảng cách – diện tích 86

Dạng 3.4. Bài toán thực tế và ý nghĩa của giá trị gần về tiệm cận 87

C Luyện tập 89

4 KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ 106

A Lý thuyết 106

B Các dạng bài tập 109

Dạng 4.1. Khảo sát hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$ 109

Dạng 4.2. Khảo sát hàm số hữu tỉ bậc nhất trên bậc nhất 111

Dạng 4.3. Khảo sát hàm số hữu tỉ bậc hai trên bậc nhất 112

Dạng 4.4. Nhận dạng hàm số khi biết đồ thị - bảng biến thiên 114

Dạng 4.5. Nhận dạng đồ thị - bảng biến thiên khi biết hàm số 116

Dạng 4.6. Xác định dấu – giá trị các hệ số 117

Dạng 4.7. Đọc đồ thị của đạo hàm 119

Dạng 4.8. Sự tương giao 121

C Luyện tập 123

5 ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN THỰC TIỄN 151

A Lý thuyết 151

B Các dạng bài tập 151

Dạng 5.1. Tốc độ thay đổi của doanh thu, lợi nhuận 151

Dạng 5.2. Bài toán thực tế liên quan đến tốc độ thay đổi của một đại lượng 153

C Luyện tập 155

CHƯƠNG 2 VEC TƠ VÀ HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN 215

6 VEC TƠ TRONG KHÔNG GIAN 215

A Lý thuyết 215

B Các dạng bài tập 218

Dạng 6.1. Sử dụng các định nghĩa 218

Dạng 6.2. Tổng và hiệu của hai vectơ 220

Dạng 6.3. Tích của một số với một véc-tơ 223

Dạng 6.4. Tích vô hướng của hai véc-tơ 225

C Luyện tập 227

7 HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ RONG KHÔNG GIAN 251

A Lý thuyết 251

B Các dạng bài tập 252

Dạng 7.1. Tọa độ điểm 252

Dạng 7.2. Tọa độ vectơ 254

Dạng 7.3. Bài toán thực tế 256

C Luyện tập 258

8 BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ 280

A Lý thuyết 280

B Các dạng bài tập 281

Dạng 8.1. Tọa độ tổng hiệu vectơ 281

Dạng 8.2. Tọa độ điểm – vectơ thỏa điều kiện 282

Dạng 8.3. Độ dài vectơ 284

Dạng 8.4. Sự cùng phương của hai vectơ 286

Dạng 8.5. Tích vô hướng và ứng dụng 288

Dạng 8.6. Tâm tỷ cự 290

C Luyện tập 293

CHƯƠNG 3 CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP N

9 KHOẢNG BIẾN THIÊN VÀ KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ 305

A Lý thuyết 305

B Các dạng bài tập 306

Dạng 9.1. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm 306

Dạng 9.2. Ý nghĩa của khoảng biến thiên trong việc đo mức độ phân tán 308

Dạng 9.3. Ý nghĩa của khoảng biến thiên trong việc đo mức độ phân tán 310

Dạng 9.4. Ý nghĩa của khoảng tứ phân vị trong việc đo mức độ phân tán 312

C Luyện tập 315

10 PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN 352

A Lý thuyết 352

B Các dạng bài tập 354

Dạng 10.1. Lập mẫu số liệu ghép nhóm và tính giá trị trung bình 354

Dạng 10.2. Tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm 355

Dạng 10.3. Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm và ý nghĩa 357

Dạng 10.4. Sử dụng phương sai, độ lệch chuẩn đo độ rủi ro 359

C Luyện tập 362

CHƯƠNG 4 NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN 391

11 NGUYÊN HÀM 391

A Lý thuyết 391

B Các dạng bài tập 392

Dạng 11.1. Áp dụng định nghĩa 392

Dạng 11.2. Nguyên hàm hàm số lũy thừa 393

Dạng 11.3. Nguyên hàm hàm số lượng giác 395

Dạng 11.4. Nguyên hàm hàm số mũ 397

Dạng 11.5. Nguyên hàm có điều kiện 398

Dạng 11.6. Bài toán thực tế (liên quan đến vận tốc, gia tốc, quãng đường,...) 400

C Luyện tập 403

12 TÍCH PHÂN 424

A Lý thuyết 424

B Các dạng bài tập 426

Dạng 12.1. Áp dụng định nghĩa – tính chất 426

Dạng 12.2. Tích phân hàm số chứa dấu trị tuyệt đối 429

Dạng 12.3. Tích phân hàm số cho bởi nhiều công thức 431

Dạng 12.4. Bài toán thực tế 433

C Luyện tập 437

13 ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN 458

A Lý thuyết 458

B Các dạng bài tập 460

Dạng 13.1. Xây dựng công thức tính diện tích theo hình vẽ 460

Dạng 13.2. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x)$, Ox và $x = a$, $x = b$ 462

Dạng 13.3. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x)$, $y = g(x)$ và $x = a$, $x = b$ 464

Dạng 13.4. Từ diện tích hình phẳng tính giá trị hàm 467

C Luyện tập 470

CHƯƠNG 5 PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN 499

14 PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG 499

A Lý thuyết 499

B Các dạng bài tập 502

Dạng 14.1. Xác định vectơ pháp tuyến của mặt phẳng 502

Dạng 14.2. Phương trình mặt phẳng khi biết điểm đi qua và cặp véc-tơ chỉ phương 504

Dạng 14.3. PTMP 1 điểm kèm điều kiện vuông góc với mặt phẳng khác 505

Dạng 14.4. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng 508

C Luyện tập 510

15 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN 529

A Lý thuyết 529

B Các dạng bài tập 532

Dạng 15.1. Xác định vectơ chỉ phương của đường thẳng 532

Dạng 15.2. Đường thẳng qua điểm và có sẵn vectơ chỉ phương 533

Dạng 15.3. Đường thẳng qua hai điểm 534

Dạng 15.4. Đường thẳng là giao tuyến của hai mặt phẳng 535

Dạng 15.5. Đường thẳng là đường thẳng vuông góc chung của hai đường thẳng 537

C Luyện tập 538

16 CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN 547

A Lý thuyết 547

B Các dạng bài tập 548

Dạng 16.1. Góc 548

Dạng 16.2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng 549

C Luyện tập 554

17 PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU 570

A Lý thuyết 570

B Các dạng bài tập 572

Dạng 17.1. Xác định tâm, bán kính, nhận biết phương trình mặt cầu 572

Dạng 17.2. Mặt cầu có tâm và đi qua một điểm 574

Dạng 17.3. Mặt cầu có đường kính 575

Dạng 17.4. Mặt cầu qua 4 điểm không đồng phẳng 576

Dạng 17.5. Mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng, mặt phẳng 577

Dạng 17.6. Mặt cầu tiếp xúc đường thẳng, mặt phẳng 579

Dạng 17.7. Mặt cầu cắt đường thẳng, mặt phẳng 581

Dạng 17.8. Vị trí tương đối liên quan mặt cầu 584

Dạng 17.9. Bài toán thực tế 586

C Luyện tập 588

CHƯƠNG 6 XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN 609

18 XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN 609

A Lý thuyết 609

B Các dạng bài tập 610

Dạng 18.1. Tính xác suất có điều kiện không sử dụng công thức 610

Dạng 18.2. Tính xác suất có điều kiện sử dụng công thức 611

Dạng 18.3. Tính xác suất có điều kiện sử dụng sơ đồ hình cây. 614

C Luyện tập 616

19 CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN VÀ CÔNG THỨC BAYES 640

A Lý thuyết 640

B Các dạng bài tập 641

	Dạng 19.1. Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes.	641
	Dạng 19.2. Các bài toán liên quan đến công thức xác suất toàn phần	642
	Dạng 19.3. Các bài toán liên quan đến công thức Bayes	644
C	Luyện tập	647

CHƯƠNG 1 ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT

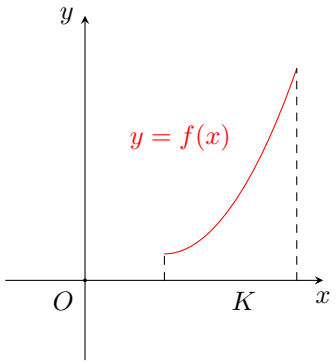
0.1 Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

Định nghĩa 1. Kí hiệu $\mathbb{K}$ là khoảng; đoạn; nửa khoảng. Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{K}$.
Hàm số $y = f(x)$

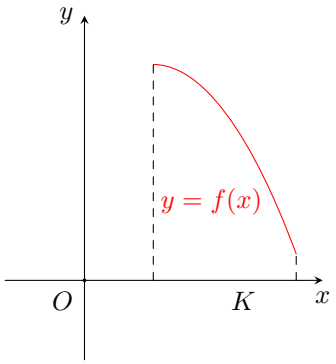
- Gọi là đồng biến trên $\mathbb{K}$ nếu $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{K}$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.
- Gọi là nghịch biến trên $\mathbb{K}$ nếu $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{K}$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.

⚠ • *Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{K}$ thì đồ thị đi lên từ trái sang phải (Hình a).*

- *Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{K}$ thì đồ thị đi xuống từ trái sang phải (Hình b).*



Hình a)



Hình b)

0.2 Tính đơn điệu của hàm số

Định lí 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{K}$.

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc $\mathbb{K}$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{K}$.
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc $\mathbb{K}$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{K}$.

⚠

- *Định lí vẫn đúng trong trường hợp $f'(x)=0$ tại một số hữu hạn điểm trong $\mathbb{K}$.*
- *Nếu $f'(x)=0$ với mọi $x\in\mathbb{K}$ thì hàm số $f(x)$ không đổi trên khoảng $\mathbb{K}$.*

0.3 Khái niệm cực trị của hàm số

Định nghĩa 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và điểm $x_0\in(a;b)$.

- $\exists h>0$ sao cho $f(x)<f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)\subset(a;b)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0.
- $\exists h>0$ sao cho $f(x)>f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)\subset(a;b)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0.

⚠
- *Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CD} hay y_{CD}. Điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại của đồ thị hàm số.*
- *Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CT} hay y_{CT}. Điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ được gọi là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.*
- *Các điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị.*
  Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là giá trị cực trị (cực trị) của hàm số.

0.4 Cách tìm cực trị của hàm số

Định lí 2. Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó:

- Nếu $f'(x)<0$ với mọi $x\in(a;x_0)$ và $f'(x)>0$ với mọi $x\in(x_0;b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x)>0$ với mọi $x\in(a;x_0)$ và $f'(x)<0$ với mọi $x\in(x_0;b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.
- Định lí trên được viết gọn lại trong hai bảng biến thiên sau:

x	a	x_0	b
y'	$+$	$-$	
y		$y_{\text{CĐ}}$ ↗ ↘	

x	a	x_0	b
y'	$-$	$+$	
y	↘	y_{CT}	↗

Hàm số f đạt cực đại tại $x = x_0$.

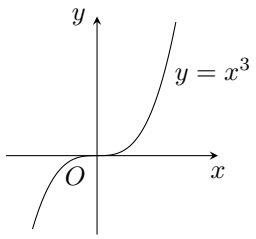
Hàm số f đạt cực tiểu tại $x = x_0$.

⚠

- *Từ định lí trên ta có các bước tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ như sau:*
  - ***Bước 1:*** *Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số.*
  - ***Bước 2:*** *Tính đạo hàm $f'(x)$ của các hàm số. Tìm các điểm $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\} \in \mathscr{D}$ mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.*
  - ***Bước 3:*** *Lập bảng biến thiên suy ra các cực trị của hàm số.*

- *Nếu $f'(x_0) = 0$ nhưng $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua x_0 thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số.*

  Chẳng hạn, hàm số $f(x) = x^3$ có $\begin{cases} f'(x) = 3x^2 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$, nhưng $x = 0$ không phải là điểm cực trị của hàm số.



B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1.1. Xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi một công thức

Phương pháp:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số.
- **Bước 2:** Tính đạo hàm $f'(x)$ của các hàm số. Tìm các điểm $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\} \in \mathscr{D}$ mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.
- **Bước 3:** Sắp xếp các điểm $x_1; x_2; \ldots; x_n$ theo thứ tự tăng dần. Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4:** Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Ví dụ 1. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = 4x^3 + 3x^2 - 36x + 6$.

Lời giải

. . . . . .

Ví dụ 2. Xét tính đơn điệu của hàm số $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Lời giải

Ví dụ 3. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = \sqrt{-x^2+4}$.

Lời giải

Ví dụ 4. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = \log_3(x^2 - 2x)$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Dạng 1.2. Xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi đồ thị - bảng biến thiên

Phương pháp:

- Với đồ thị hàm số, quan sát: hướng lên–xuống của đường cong (chiều từ trái sang phải).
- Với bảng biến thiên, quan sát: hướng lên–xuống của mũi tên (chiều từ trái sang phải).
- Với bảng xét dấu, quan sát: dấu âm-dương của $f'(x)$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

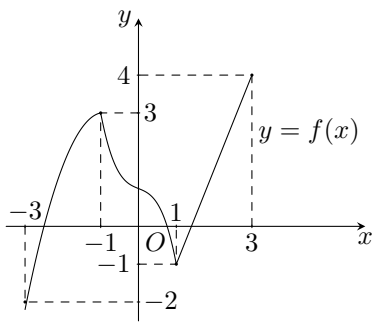
Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Ví dụ 2.
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 3]$ và có đồ thị như hình bên. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$.



Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Dạng 1.3. Xác định cực trị của hàm số cho bởi công thức

Phương pháp:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số.
- **Bước 2:** Tính đạo hàm $f'(x)$ của các hàm số. Tìm các điểm $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\} \in \mathscr{D}$ mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.
- **Bước 3:** Sắp xếp các điểm $x_1; x_2; \ldots; x_n$ theo thứ tự tăng dần. Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4:** Kết luận hàm số đạt cực trị tại $x =?$, $y =?$ (nếu có).

Ví dụ 1. Tìm cực trị của hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.
Lời giải

. . . . . .

Ví dụ 2. Tìm cực trị của hàm số $y = -x^4 + 2x^3 - 2x - 1$.

Lời giải

Ví dụ 3. Tìm cực trị của hàm số $y = \dfrac{x+2}{3x-1}$.

Lời giải

Ví dụ 4. Tìm cực trị của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{1-x}$.

Lời giải

Ví dụ 5. Tìm cực trị của hàm số $f(x) = 2^{x^2-5x}$.

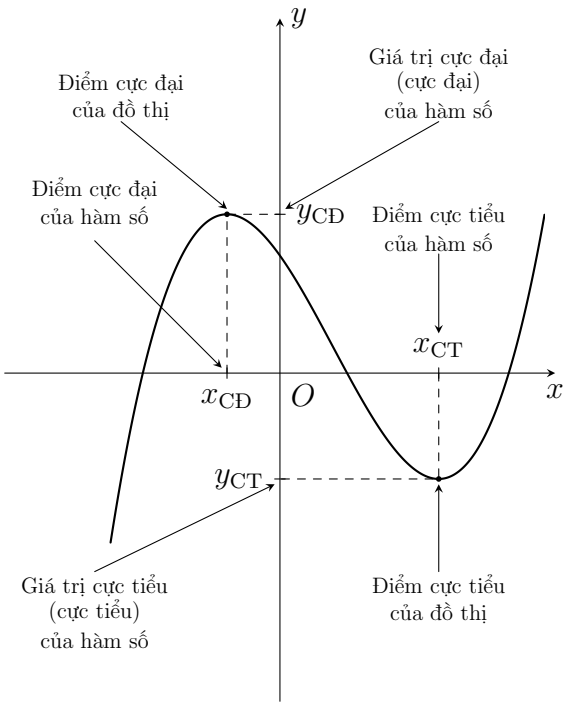
Lời giải

Dạng 1.4. Xác định cực trị của hàm số cho bởi bảng biến thiên – đồ thị

- **Nhận xét:** Hàm số $f(x)$

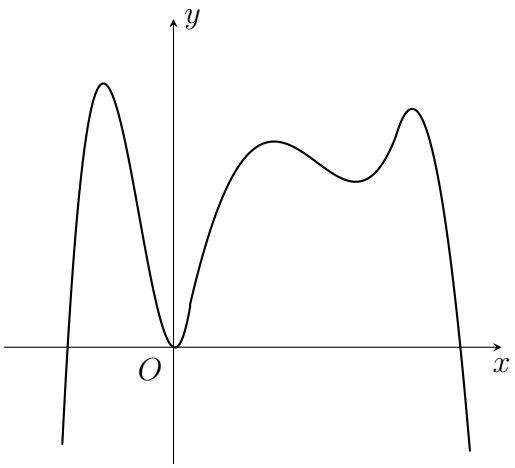
có cực trị	y' đổi dấu
không cực trị	y' không đổi dấu
chỉ có 1 cực trị	y' đổi dấu 1 lần
có 2 cực trị	y' đổi dấu 2 lần
có 3 cực trị	y' đổi dấu 3 lần

- Đối với một hàm số bất kì, hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại những điểm x_0 mà tại đó đạo hàm triệt tiêu $f'(x_0) = 0$ hoặc đạo hàm không xác định tại đó.



Ví dụ 1.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ bao nhiêu có điểm cực tiểu và điểm cực đại?



Lời giải

.....

.....

.....

.....

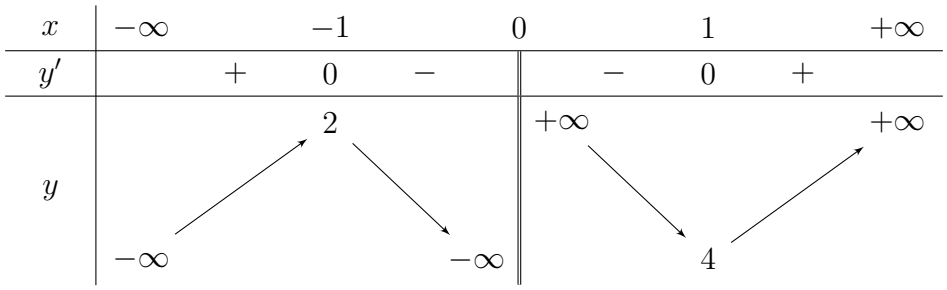
.....

.....

.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

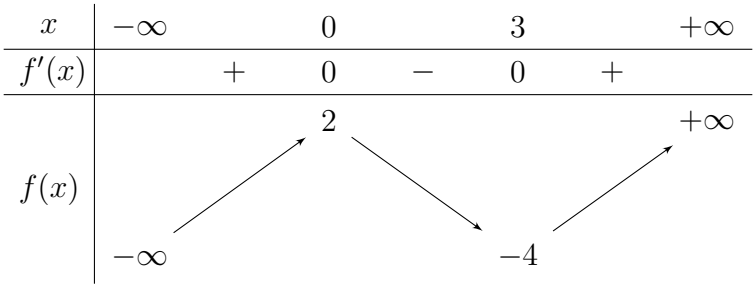


Hàm số $y = f(x)$ bao nhiêu có điểm cực tiểu và điểm cực đại?

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau:



Dựa vào bảng biến thiên, hãy thiết lập công thức hàm số $y = f(x)$ đã cho?

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

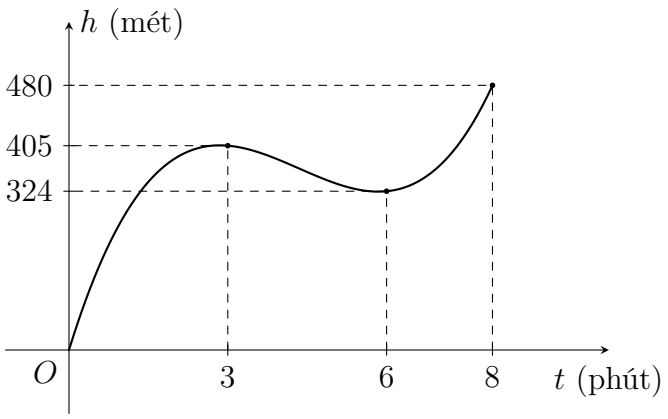
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Dạng 1.5. Toán thực tế áp dụng tính đơn điệu của hàm số

- Nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị quãng đường di chuyển của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ tức thời của chuyển động tại t_0.
- Đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là gia tốc tức thời tại thời điểm t của vật chuyển động có phương trình $s = f(t)$.

Ví dụ 1.

Trong 8 phút đầu kể từ khi xuất phát, độ cao h (tính bằng mét) của khinh khí cầu vào thời điểm t phút được cho bởi $h(t) = 6t^3 - 81t^2 + 324t$. Đồ thị của hàm số $h(t)$ được biểu diễn như hình bên. Trong các khoảng thời gian nào khinh khí cầu tăng dần độ cao, giảm dần độ cao?



Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Tọa độ của chất điểm tại

thời điểm t (giây) được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $v(t)$. Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

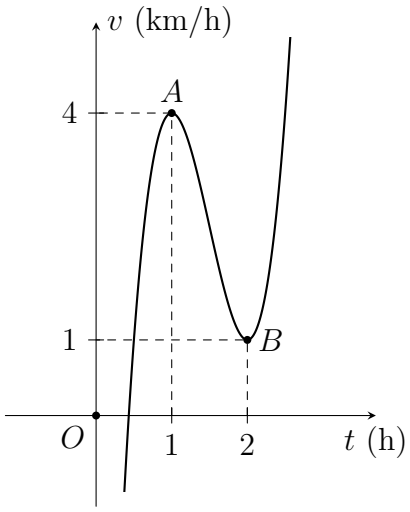
.....

.....

.....

Ví dụ 3.

Một vật chuyển động với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị của hàm số dạng hàm bậc ba như hình bên. Biết rằng tại thời điểm $t_1 = 1$ h vật có vận tốc $v_1 = 4$ km/h và tại thời điểm $t_2 = 2$ h vật có vận tốc $v_2 = 1$ km/h. Tính vận tốc của vật tại thời điểm $t = 3$ h.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. LUYỆN TẬP

PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty)$. **B.** Hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$. **D.** Hàm số đồng biến trên $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Hỏi hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty; 0)$. **B.** $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$. **C.** $(0; +\infty)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Hàm số $y = \dfrac{5 - 2x}{x + 3}$ nghịch biến trên

A. $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(-\infty; -3)$. **D.** $(3; +\infty)$.

Lời giải

.....

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-3;0)$. **B.** $(-3;3)$. **C.** $(0;3)$. **D.** $(-\infty;-3)$.

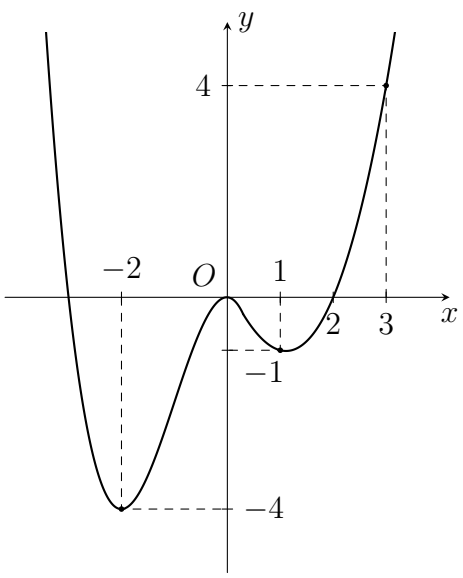
Lời giải

Câu 5.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

A. $(-4;0)$. **B.** $(2;3)$.

C. $(-1;1)$. **D.** $(1;3)$.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

A. $x = -2$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = -1$.

Lời giải

.....

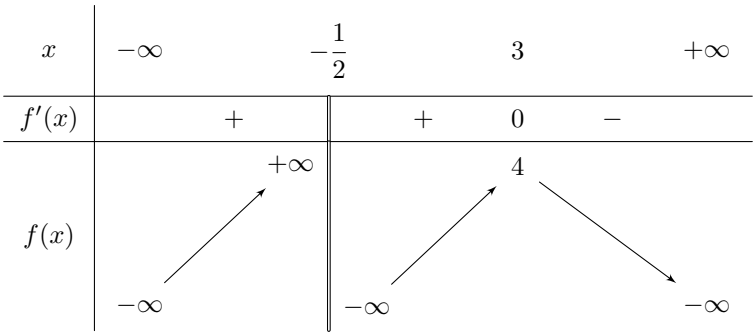
.....

.....

.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?



A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ và $(3; +\infty)$.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 8. Tìm điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.

A. $x = 1$. **B.** $(3; 1)$. **C.** $x = 3$. **D.** $\left(1; \frac{7}{3}\right)$.

Lời giải

. . . . . .

Câu 9. Hàm số nào dưới đây **không** có cực trị?

A. $y = \dfrac{x^2+1}{x}$.
B. $y = \dfrac{2x-2}{x+1}$.
C. $y = x^2 - 2x + 1$.
D. $y = -x^3 + x + 1$.

Lời giải

Câu 10. Hàm số $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1.
B. 0.
C. 2.
D. 3.

Lời giải

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** -4. **D.** 3.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

A. $x = -1$. **B.** $x = -2$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 1$.

Lời giải

.....

.....

.....

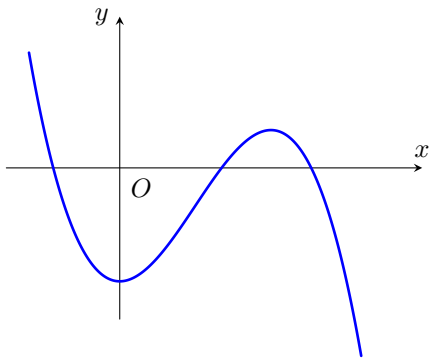
.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....

Câu 13. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ sau. Số điểm cực trị của hàm số này là



A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 14. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

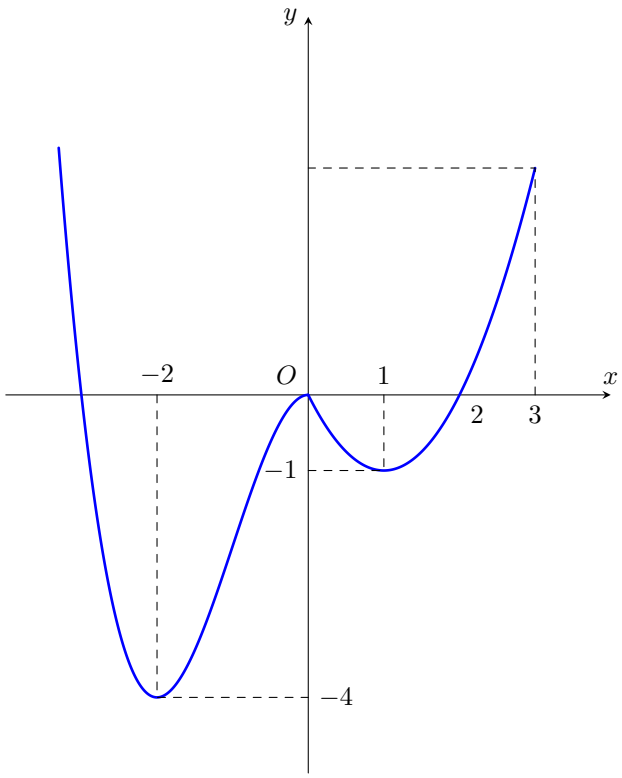
A. $y = \dfrac{x-1}{x-2}$. **B.** $y = -x^3 - 3x$. **C.** $y = x^3 + x$. **D.** $y = \dfrac{x+1}{x+3}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng

A. $(-2;1)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-1;2)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)^2(1-x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

.....

.....

.....

Câu 19. Hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty; 0)$. **B.** $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$. **C.** $(0; +\infty)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải

Câu 20. Hàm số $y = \dfrac{2}{x^2 + 1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; +\infty)$. **B.** $(0; +\infty)$. **C.** $(-\infty; 0)$. **D.** $(-1; 1)$.

Lời giải

Câu 21. Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(1-x)^2(x+1)^3(3-x)$. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 23. Cho hàm số $y=x^4-2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 24. Trong 8 phút đầu kể từ khi xuất phát, độ cao h (tính bằng mét) của khinh khí cầu vào thời điểm t phút được cho bởi công thức $h(t) = 6t^3 - 81t^2 + 324t$. Trong khoảng thời gian nào khinh khí cầu giảm dần độ cao?

A. $\left(1; \frac{5}{2}\right)$. **B.** $(0; 3)$. **C.** $(3; 6)$. **D.** $\left(\frac{7}{2}; 8\right)$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 1$. Có bao nhiêu khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

a) Điểm cực đại của hàm số là $x = -1$.

b) Điểm cực tiểu của hàm số là $x = 4$.

c) Giá trị cực đại của hàm số là $y = 14$.

d) Giá trị cực tiểu của hàm số là $y = -111$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....

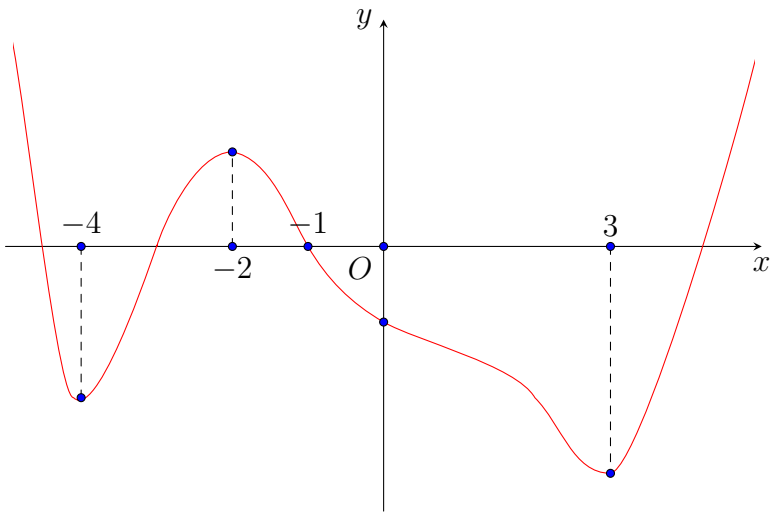
Câu 26. Tìm các điểm cực trị của hàm số $y = \dfrac{x^2 + x + 4}{x + 1}$.

A. $x_{\text{CĐ}} = -3$, $x_{CT} = 1$.
B. $x_{CT} = -3$, $x_{\text{CĐ}} = 1$.
C. $x_{\text{CĐ}} = -5$, $x_{CT} = 3$.
D. $x_{CT} = -5$, $x_{\text{CĐ}} = 3$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như trong hình dưới đây.



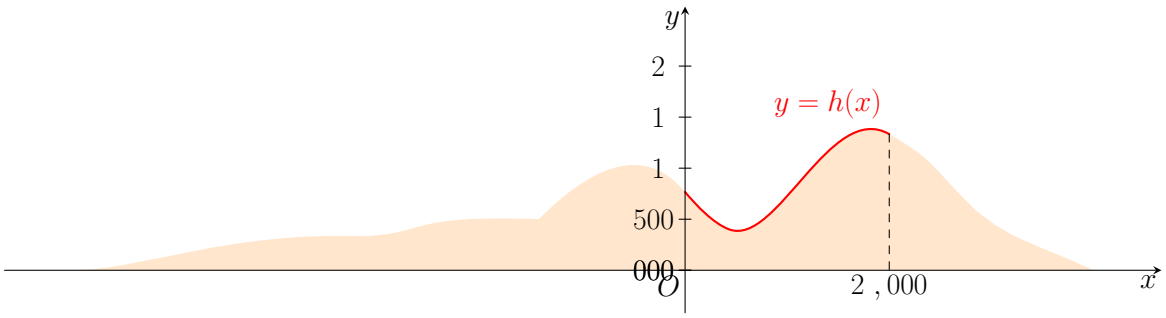
Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Điểm cực đại của hàm số là $x = -4$.
B. Điểm cực đại của hàm số là $x = -2$.
C. Điểm cực tiểu của hàm số là $x = -2$.
D. Điểm cực đại của hàm số là $x = 3$.

Lời giải

.....

Câu 28. Một phần lát cắt của dãy núi có độ cao tính bằng mét được mô tả bởi hàm số $y = h(x) = -\dfrac{1}{1320000}x^3 + \dfrac{9}{3520}x^2 - \dfrac{81}{44}x + 840$ với $0 \le x \le 2000$. Tìm tọa độ các đỉnh của lát cắt dãy núi trên đoạn $[0; 2000]$.



A. $\left(1800; \dfrac{7365}{16}\right)$ và $\left(450; \dfrac{15315}{11}\right)$.

B. $\left(480; \dfrac{1515}{16}\right)$ và $\left(450; \dfrac{7365}{16}\right)$.

C. $\left(480; \dfrac{1515}{16}\right)$ và $\left(1750; \dfrac{7561}{16}\right)$.

D. $\left(1800; \dfrac{15315}{11}\right)$ và $\left(450; \dfrac{7365}{16}\right)$.

Lời giải

Câu 29. Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = 2x+1-\sqrt{2x^2-8}$.

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên $(-2;2)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 30. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t)=t^3-6t^2+9t$ với $t\geq 0$. Khi đó $v(t)=x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t. Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?

A. $t\in(0;2)$. **B.** $t\in(0;3)$. **C.** $t=2$. **D.** $t\in(2;+\infty)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 31. Cho hàm số $y=x-2\sqrt{x^2+4}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số có giá trị cực đại bằng $-2\sqrt{3}$.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

D. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng $-\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 32. Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa ($1 \leq x \leq 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí $C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500$. Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Vậy hộ này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày bao nhiêu mét để thu được lợi nhuận tối đa?

A. 6 mét. **B.** 10 mét. **C.** 18 mét. **D.** 12 mét.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(3 - 2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0; 2)$. **B.** $(2; 3)$. **C.** $(-\infty; -3)$. **D.** $(3; 4)$.

Lời giải

.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

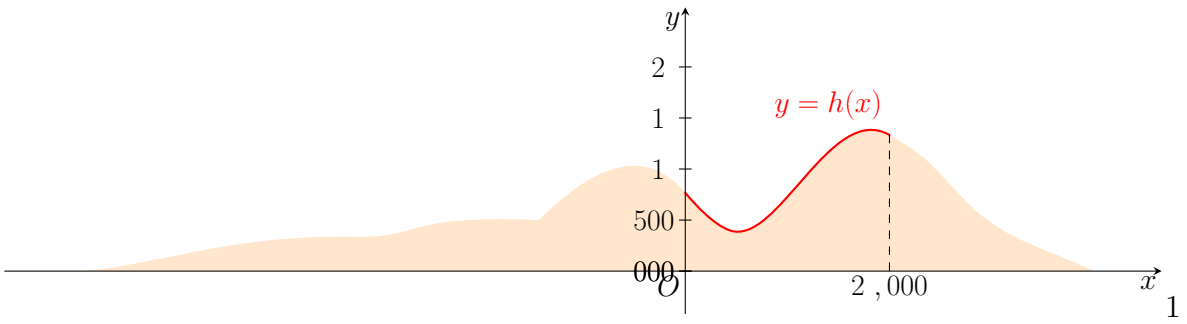
Hàm số $y = f(x^2 - 2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2; -1)$. **B.** $(2; +\infty)$. **C.** $(0; 2)$. **D.** $(-1; 0)$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau.



Hàm số $y = f(2 - 3x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(2; 3)$. **B.** $(1; 2)$. **C.** $(0; 1)$. **D.** $(1; 3)$.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\rightarrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

a) Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -5)$ và $(-3; -2)$.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -5)$.

c) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.

d) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 0)$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

d) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$.

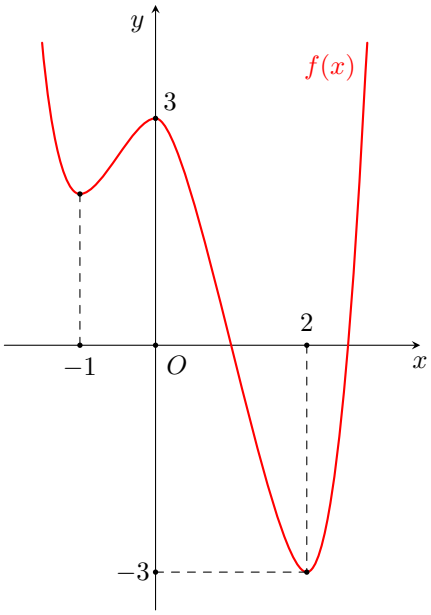
Lời giải

.....

.....

.....

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



a) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;0)$.

c) Đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

d) Nghịch biến trên khoảng $(0;3)$.

Lời giải

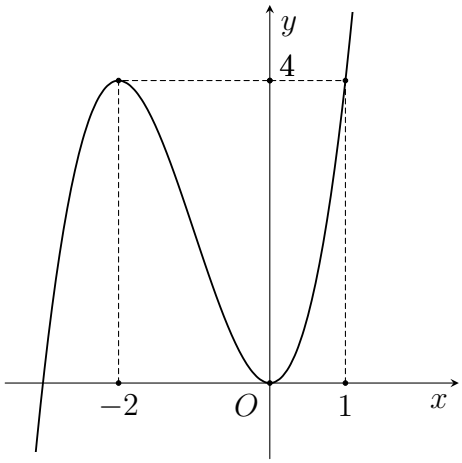
Câu 4. Cho hàm số $f(x) = -x^3 + 3x^2$.

a) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.
b) Hàm số nghịch biến trên $(2; +\infty)$.
c) Hàm số đồng biến trên $(0; 2)$.
d) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như trong hình dưới đây.



a) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -2)$.
b) Hàm số đồng biến trên $(0; 1)$.
c) Hàm số nghịch biến trên $(-2; 1)$.
d) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

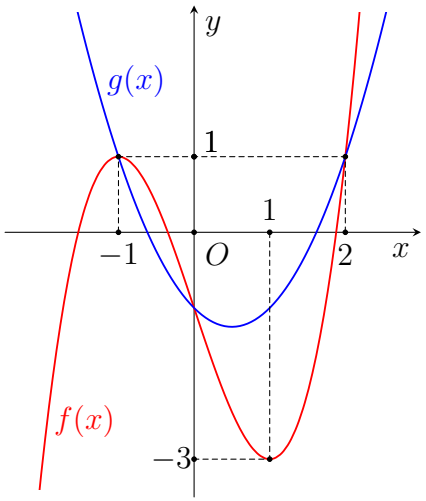
Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

. . . . . .

. . . . . .

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đồ thị là các đường cong như trong hình dưới đây.



a) Hàm số $y = g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x_0 > 1$.

b) Hàm số $y = g(x)$ có hai điểm cực trị.

c) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có điểm cực tiểu là $x = 1$.

d) Giá trị cực đại của hàm số $y = f(x)$ là $y_0 = 1$.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

a) Hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$.

b) Hàm số nghịch biến trên $(-1; 0)$ và $(0; 1)$.

c) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

d) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải

Câu 8. Cho hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + \dfrac{2}{3}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

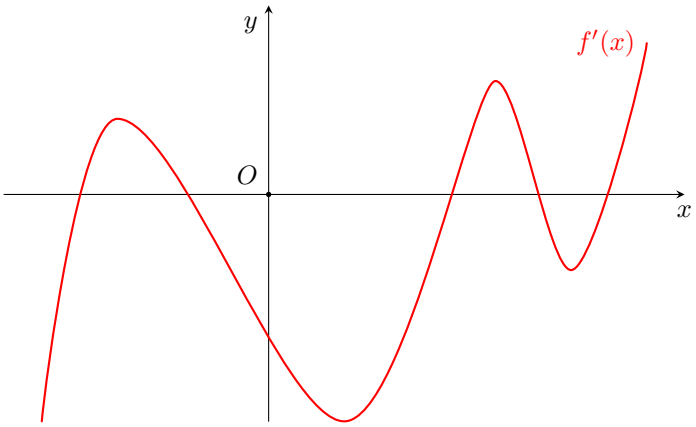
b) Giá trị cực tiểu của hàm số là $x = 3$.

c) Điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho là $x = 1$.

d) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

Lời giải

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục và có đồ thị trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ.



a) Hàm số $y = f(x)$ đã cho có 4 điểm cực trị.

b) Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực tiểu.

c) Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực đại.

d) Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại dương.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 10. Gọi giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $(a; b)$ lần lượt là m và M. Xét tính đúng sai của mệnh đề sau.

a) $m < M$.

b) $f(a) = m$.

c) Với mọi $x \in (a; b)$ ta có $f(x) > m$.

d) Với mọi $x \in (a; b)$ ta có $m \leq f(x) < M$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của mệnh đề sau.

a) Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm.

b) Phương trình $f(x) = C$ vô nghiệm với $m \leq C \leq M$.

c) Bất phương trình $f(x) > M$ vô nghiệm.

d) Bất phương trình $f(x) > m$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Lời giải

Câu 12. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. Xét tính đúng sai của mệnh đề sau.

a) $\min\limits_{[0;1]} y = 0$.

b) $\min\limits_{[0;2]} y = y(0)$.

c) $\min\limits_{[-1;0]} y + \max\limits_{[0;1]} y = 4$.

d) $\min\limits_{\left[-\frac{3}{2};0\right]} \dfrac{1}{y} = \dfrac{8}{25}$.

Lời giải

.....

Câu 13. Cho hàm số $y = 2\sin x - 1$. Khi đó

a) $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 1$.

b) $\min\limits_{\mathbb{R}} y = -3$.

c) $\max\limits_{[0;\pi]} y = y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

d) $\min\limits_{[0;\pi]} y = y(0) = -1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và có bảng biến thiên như sau

x	0		1		3
y'		$+$	0	$-$	
y	8	↗	9	↘	5

a) Có 7 số nguyên m để phương trình $f(x) = m(x^4 - 2x^2 + 2)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$.

b) Giá trị m lớn nhất để phương trình $f(x) = m(x^4 - 2x^2 + 2)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$ là 7.

c) Giá trị m nhỏ nhất để phương trình $f(x) = m(x^4 - 2x^2 + 2)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$ là 3.

d) Tổng các giá trị của m để phương trình $f(x) = m(x^4 - 2x^2 + 2)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$ là 45.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....

Câu 15. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{\sin x}$. Khi đó

a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{1}{\sin x}$ trên khoảng $(0;\pi)$ là 1.

b) Không tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{1}{\sin x}$ trên $(0;\pi)$.

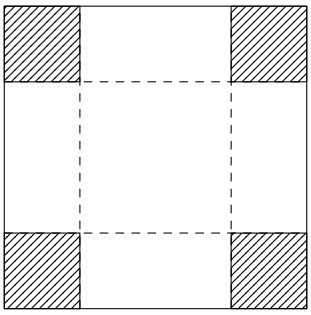
c) Không tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{1}{\sin x}$ trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

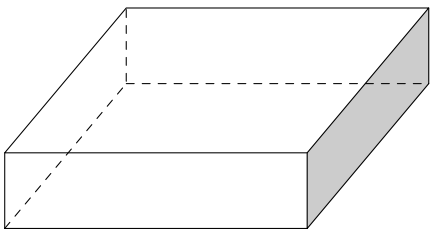
d) Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{1}{\sin x}$ trên $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 16. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh a. Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp.





a) Ta có $0 < x < \dfrac{a}{2}$.

b) Thể tích của khối hộp là: $V(x) = x(a-2x)^2$ $\left(0 < x < \dfrac{a}{2}\right)$.

c) Thể tích của khối hộp lớn nhất bằng $\dfrac{2a^3}{9}$.

d) Cạnh của hình vuông bị cắt sao cho thể tích của khối hộp là lớn nhất bằng $\frac{a}{6}$.

Lời giải

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Hãy xác định số khoảng đồng biến của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

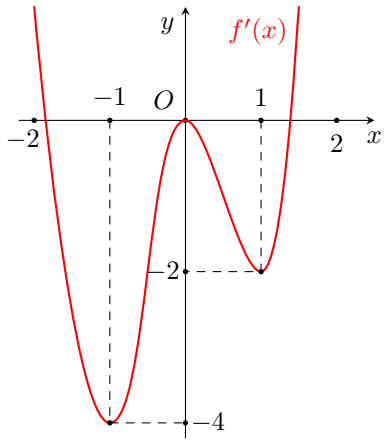
.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục và có đồ thị trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ bên dưới.



Giả sử hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$. Trong khoảng $(a; b)$ có bao nhiêu giá trị nguyên nhỏ hơn 2024?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

. . . . . .
. . . . . .

Câu 3. Cho hàm số $f'(x) = x(x^2-1)(x+1)^3$. Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	0	$+$	0	$+$	

Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

BÀI 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathscr{D}$.

- Số M được gọi là giá trị lớn nhất (GTLN) của hàm số $y=f(x)$ trên $\mathscr{D}$ nếu $\begin{cases} f(x)\le M; \forall x\in\mathscr{D} \\ \exists x_0\in\mathscr{D}\colon f(x_0)=M \end{cases}$, ta kí hiệu $M=\max\limits_{x\in\mathscr{D}} f(x)$ hoặc $M=\max\limits_{\mathscr{D}} f(x)$.
- Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số $y=f(x)$ trên $\mathscr{D}$ nếu $\begin{cases} f(x)\ge M; \forall x\in\mathscr{D} \\ \exists x_0\in\mathscr{D}\colon f(x_0)=M \end{cases}$, ta kí hiệu $m=\min\limits_{x\in\mathscr{D}} f(x)$ hoặc $m=\min\limits_{\mathscr{D}} f(x)$.

!
- Quy ước rằng khi nói GTLN và GTNN của hàm số $y=f(x)$ (mà không xét "trên tập $\mathscr{D}$") thì ta hiểu đó là GTLN hay GTNN của $y=f(x)$ trên tập xác định của hàm số.
- Để tìm GTLN hay GTNN của hàm số trên tập $\mathscr{D}$, ta thường lập bảng biến thiên của hàm số trên tập $\mathscr{D}$ để kết luận.

2. Tìm giá trị lớn nhất - nhỏ nhất trên đoạn

⚠ *Cách tìm giá trị lớn nhất - nhỏ nhất trên đoạn Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$*

- ***Bước 1:*** *Tìm các điểm $x_1; x_2; \ldots; x_n$ thuộc $(a;b)$ sao cho $f'(x)=0$.*
- ***Bước 2:*** *Tính $f(a); f(x_1); f(x_2); \ldots; f(x_n); f(b)$.*
- ***Bước 3:*** *Gọi M là số lớn nhất và m là số nhỏ nhất trong các giá trị ở Bước 2. Khi đó $M=\max\limits_{[a;b]} f(x)$ và $m=\min\limits_{[a;b]} f(x)$.*

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 2.1. Giá trị lớn nhất - nhỏ nhất trên đoạn

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$

- **Bước 1:** Tìm các điểm x_1; x_2; ...; x_n thuộc $(a;b)$ sao cho $f'(x)=0$.
- **Bước 2:** Tính $f(a)$; $f(x_1)$; $f(x_2)$; ...; $f(x_n)$; $f(b)$.
- **Bước 3:** Gọi M là số lớn nhất và m là số nhỏ nhất trong các giá trị ở Bước 2. Khi đó $M=\max\limits_{[a;b]}f(x)$ và $m=\min\limits_{[a;b]}f(x)$.

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x+1$ trên đoạn $[-2;2]$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 2.2. Giá trị lớn nhất – nhỏ nhất của hàm số trên khoảng

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(a;b)$.

- Bước 1: Tìm điều kiện xác định của hàm số $y=f(x)$.
  - $f(x)$ không liên tục trên $(a;b) \Rightarrow$ Không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.
  - $f(x)$ liên tục trên $(a;b) \Rightarrow$ Bước tiếp theo.
- Bước 2: Tính đạo hàm $y'=f'(x)$.
- Bước 3: Tìm các điểm $x_1;x_2;\cdots;x_n$ thuộc $(a;b)$ sao cho $f'(x)=0$, hoặc $f'(x)$ không xác định.
- Bước 4: Lập bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ trên khoảng $(a;b)$ cho trước.
- Bước 5: Xác định điểm "cao nhất" và điểm "thấp nhất" của đồ thị hàm số trên $(a;b)$.
- Bước 6: Kết luận giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$.

Nhận xét.
- *Nếu đề bài không cho sẵn $(a;b)$ thì thường sẽ lấy luôn tập xác định làm khoảng phải xét.*
- *Dây là phương pháp tổng quát, tùy vào bài toán sẽ giản lược bớt 1 vài bước.*

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^2+2x+4$ trên khoảng $(0;3)$.
Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $f(x)=x^3-3x-4$ trên $[-3;2)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \dfrac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ trên $(-1; -\infty)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 2.3. Sử dụng cách đánh giá để tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất

Sử dụng bất đẳng thức thường xuyên

- **Bất đẳng thức Cô-si**:
  - Với hai số thực không âm $a+b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu bằng xảy ra khi $\Leftrightarrow a=b$.
  - Với ba số thực không âm: $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.
  - Với n thực không âm: $a_1+a_2+\ldots+a_n \geq n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=a_3\ldots=a_n$.
- **Bất đẳng thức Bunhiacopxki**
  - Dạng cơ bản:$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$.
  - Dạng tổng quát:
    Với hai bộ số $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ và $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ ta có
    $$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right) \geq (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$
    Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$.

Ví dụ 1. Giả sử M và m lần lượt là GTLN và GTNN của hàm số $y=2+3\sin x$. Tính $M+m$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{386x}{x^2+2x+5}$.

Lời giải

.....

.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

heo bất đẳng thức AM - GM, ta có

$$\begin{aligned} x+\frac{5}{x}\geq 2\sqrt{5} &\Rightarrow x+\frac{5}{x}+2\geq 2\sqrt{5}+2\\ &\Rightarrow \frac{386}{x+\dfrac{5}{x}+2}\leq \frac{386}{2\sqrt{5}+2}\\ &\Rightarrow f(x)=\frac{386x}{x^2+2x+5}\leq \frac{386}{2\sqrt{5}+2}. \end{aligned}$$

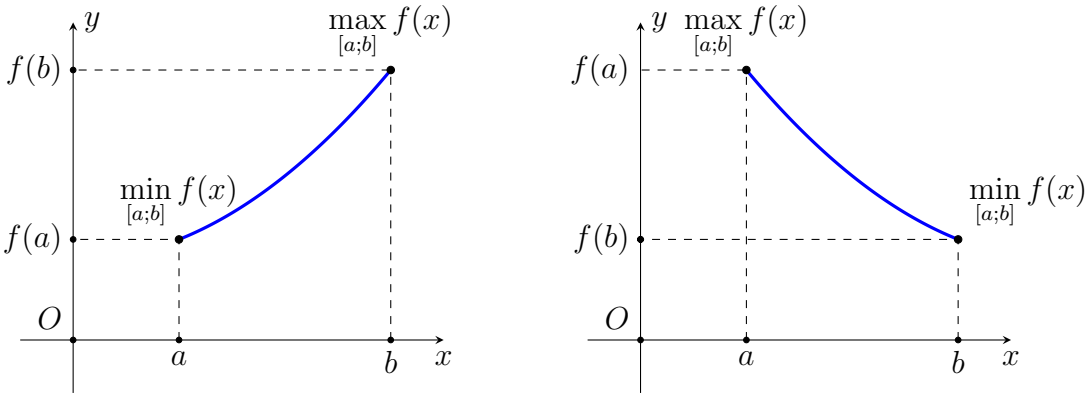
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{x}\Leftrightarrow x^2=5\Leftrightarrow x=\sqrt{5}$. (vì $x>0$)

Dạng 2.4. Ứng dụng giá trị lớn nhất – nhỏ nhất

- **Bài toán bất phương trình**
  - Chuyển bất phương trình đã cho về dạng $f(x)-g(x)\geq 0$ và tìm điều kiện tồn tại của bất phương trình.
  - Đặt hàm số $y=h(x)=f(x)-g(x)$, xét tính đơn điệu của $y=h(x)$ trên điều kiện xác định.
  - Từ đó kết luận về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.
- **Bài toán bất phương trình chứa tham số**
  Ta đưa bất phương trình đề bài cho về một trong các dạng sau
  - Nếu $m\geq f(x)$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathscr{D}$ thì $m\geq \max\limits_{\mathscr{D}} f(x)$.
  - Nếu $m\leq f(x)$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathscr{D}$ thì $m\leq \min\limits_{\mathscr{D}} f(x)$.
  - Nếu $m\geq f(x)$ có nghiệm $x\in\mathscr{D}$ thì $m\geq \min\limits_{\mathscr{D}} f(x)$.
  - Nếu $m\leq f(x)$ có nghiệm $x\in\mathscr{D}$ thì $m\leq \max\limits_{\mathscr{D}} f(x)$.
- **Nhận xét**

– Nếu $y=f(x)$ đồng biến trên $[a;b]$ thì $\begin{cases}\max\limits_{x\in\mathscr{D}} f(x)=f(a)\\ \min\limits_{x\in\mathscr{D}} f(x)=f(b).\end{cases}$

– Nếu $y=f(x)$ nghịch biến trên $[a;b]$ thì $\begin{cases}\max\limits_{x\in\mathscr{D}} f(x)=f(b)\\ \min\limits_{x\in\mathscr{D}} f(x)=f(a).\end{cases}$



Ví dụ 1. Giải bất phương trình $\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+3}\geq 4$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Giải bất phương trình $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}\geq 2\sqrt{3}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....

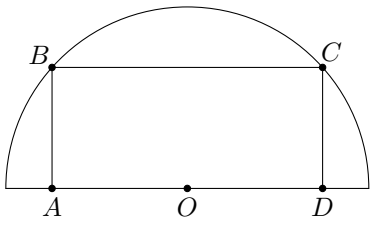
Dạng 2.5. Bài toán thực tế áp dụng giá trị lớn nhất - nhỏ nhất

Phương pháp

- *Bước* 1*:* Gọi ẩn và xác định điều kiện cho ẩn.
- *Bước* 2*:* Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn số và các đại lượng đã biết.
- *Bước* 3*:* Xét hàm số biểu thị đại lượng mà đề bài yêu cầu. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đó trên điều kiện của ẩn.
- *Bước* 4*:* Kết luận.

Ví dụ 1.

Tính diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của một hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính $R = 6$ cm nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp.



Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2. Một doanh nghiệp cần sản xuất một mặt hàng trong đúng 10 ngày và phải sử dụng hai máy A và B. Máy A làm việc trong x ngày và cho số tiền lãi là $x^3 + 2x$ (triệu đồng), máy B làm việc trong y ngày và cho số tiền lãi là $326y - 27y^3$ (triệu đồng). Hỏi doanh nghiệp đó cần sử dụng máy A trong bao nhiêu ngày sao cho số tiền lãi là nhiều

nhất? (Biết rằng hai máy A và B không đồng thời làm việc, máy B làm việc không quá 6 ngày).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

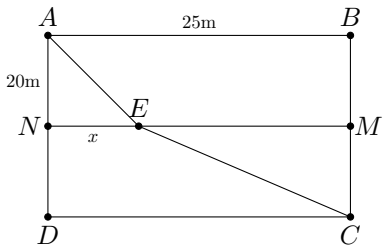
.....

.....

.....

Ví dụ 3.

Một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 25$ m, chiều rộng $AD = 20$ m được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chắn MN (M, N lần lượt là trung điểm BC và AD). Một đội xây dựng làm một con đường đi từ A đến C qua vạch chắn MN, biết khi làm đường trên miền $ABMN$ mỗi giờ làm được 15 m và khi làm trong miền $CDNM$ mỗi giờ làm được 30 m. Tính thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

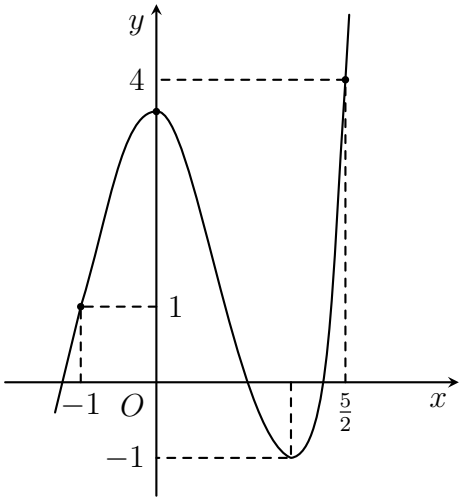
.....

.....

C. LUYỆN TẬP

PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1, \dfrac{5}{2}\right]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1, \dfrac{5}{2}\right]$ là

A. $M = 4, m = 1$.

B. $M = 4, m = -1$.

C. $M = \dfrac{7}{2}, m = -1$.

D. $M = \dfrac{7}{2}, m = 1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$		3		5		7		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	1	↗	5	↘	$+\infty$

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[3; 7]$. Ta có giá trị của $M + 2m$ là

A. $M + 2m = 1$. **B.** $M + 2m = 7$. **C.** $M + 2m = 3$. **D.** $M + 2m = 4$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-1; 2]$. Giá trị của $M + m$ bằng bao nhiêu?

x	-3		-1		0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	3	↘		↗	2	↘	
	-2				0				1

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $\left[-\sqrt{3}; \sqrt{5}\right]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	-3		-1		0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	3	↘		↗	2	↘	
	-2				0				1

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\min\limits_{\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]} y = 0$.

B. $\max\limits_{\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]} y = 2$.

C. $\max\limits_{\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]} y = 2\sqrt{5}$.

D. $\min\limits_{\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]} y = 1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0; 2]$.

A. $M = 5$.

B. $M = -5$.

C. $M = \dfrac{1}{3}$.

D. $M = -\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là bao nhiêu?

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	3	↘	-1	↗	1

A. $\max\limits_{\mathbb{R}} = -\frac{1}{2}$. **B.** $\max\limits_{\mathbb{R}} = -1$. **C.** $\max\limits_{\mathbb{R}} = 1$. **D.** $\max\limits_{\mathbb{R}} = 3$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x+3-\dfrac{1}{x+2}$ trên nửa khoảng $[-4;-2)$.

A. $\min\limits_{[-4;-2)} y = 4$. **B.** $\min\limits_{[-4;-2)} y = 7$. **C.** $\min\limits_{[-4;-2)} y = 5$. **D.** $\min\limits_{[-4;-2)} y = \frac{15}{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 8. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -3x^4 + 4x^3 + 1$ bằng

A. 11. **B.** 0. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$. **B.** $\max\limits_{(-1;1]} f(x) = f(0)$.

C. $\min\limits_{(-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$. **D.** $\min\limits_{(-1;+\infty)} f(x) = f(0)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$. Kí hiệu $M = \max\limits_{x\in[0;2]} f(x)$, $m = \min\limits_{x\in[0;2]} f(x)$. Khi đó $M + m$ bằng

A. $-\dfrac{4}{3}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** 1.

Lời giải

Câu 11. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$ đạt được tại x_0. Giá trị x_0 bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -1.

Lời giải

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

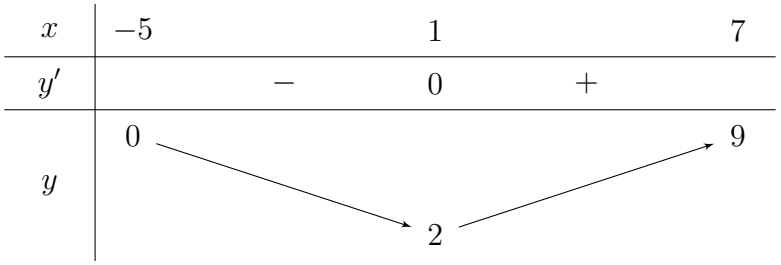
Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\max\limits_{x\in(0;+\infty)} f(x) = f(1)$. **B.** $\max\limits_{x\in(-1;1]} f(x) = f(0)$.

C. $\min\limits_{x\in(-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$. **D.** $\min\limits_{x\in(-1;+\infty)} f(x) = f(0)$.

Lời giải

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ và có bảng biến thiên trên $[-5; 7)$ như sau



Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\min\limits_{x\in[-5;7)} f(x) = 2$ và hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $[-5; 7)$.

B. $\max\limits_{x\in[-5;7)} f(x) = 6$ và $\min\limits_{x\in[-5;7)} f(x) = 2$.

C. $\max\limits_{x\in[-5;7)} f(x) = 9$ và $\min\limits_{x\in[-5;7)} f(x) = 2$.

D. $\max\limits_{x\in[-5;7)} f(x) = 9$ và $\min\limits_{x\in[-5;7)} f(x) = 6$.

Lời giải

Câu 14. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{t^2 + t + 4}{t + 1}$ trên đoạn $[0; 10]$.

A. 3. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{114}{11}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Câu 15. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2\cos x - \dfrac{4}{3}\cos^3 x$ trên $[0;\pi]$.

A. $\max\limits_{x\in[0;\pi]} y = \dfrac{2}{3}$. **B.** $\max\limits_{x\in[0;\pi]} y = \dfrac{10}{3}$. **C.** $\max\limits_{x\in[0;\pi]} y = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\max\limits_{x\in[0;\pi]} y = 0$.

Lời giải

Câu 16. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0{,}035x^2(15-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất?

A. $x = 8$. **B.** $x = 10$. **C.** $x = 15$. **D.** $x = 7$.

Lời giải

.....
.....

Câu 17. Sự ảnh hưởng khi sử dụng một loại độc tố với vi khuẩn X được một nhà sinh học mô tả bởi hàm số $P(t) = \dfrac{t+1}{t^2+t+4}$, trong đó $P(t)$ là số lượng vi khuẩn sau thời gian t sử dụng độc tố. Vào thời điểm nào thì số lượng vi khuẩn X bắt đầu giảm?

A. Ngay từ lúc bắt đầu sử dụng độc tố. **B.** Sau 0,5 giờ.

C. Sau 2 giờ. **D.** Sau 1 giờ.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 18. Một sợi dây kim loại dài 120 cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất được uốn thành hình vuông, đoạn dây thứ hai được uốn thành vòng tròn (tham khảo hình bên dưới).

Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn đạt giá trị nhỏ nhất là (làm tròn đến hàng đơn vị)?

A. 504. **B.** 462. **C.** 426. **D.** 498.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Gọi giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[a;b]$ lần lượt là m và M. Xét tính đúng sai của mệnh đề sau.

a) $m = \min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$.

b) $m \le M$.

c) Với mọi $x \in [a;b]$ ta có $f(x) \ge m$.

d) Với mọi $x \in [a;b]$ ta có $f(x) < M$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

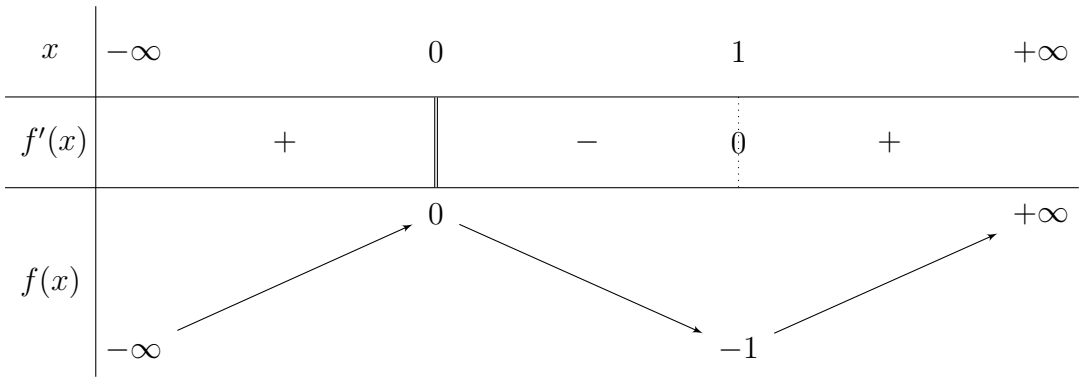
.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho hàm số$y = f(x)$ xác định, liên tục trên$\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên



a) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

b) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

c) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

d) Hàm số có đúng một cực trị.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	0	$+$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$			2	$\searrow$	-4

Khi đó

a) Hàm số có hai điểm cực trị.

b) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3.

c) Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

d) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và $(2; +\infty)$.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Trên đoạn $[-1;2]$, hàm số $y=x^3+3x^2+1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm có hoành độ bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3+\sqrt{x^2-2x+5}$ bằng

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Hàm số $y=\sin^4 x-\cos^4 x$ có giá trị lớn nhất bằng

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{2x-2}$ trên khoảng $(0;1)$. (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất hàm số $y = \dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+2}}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

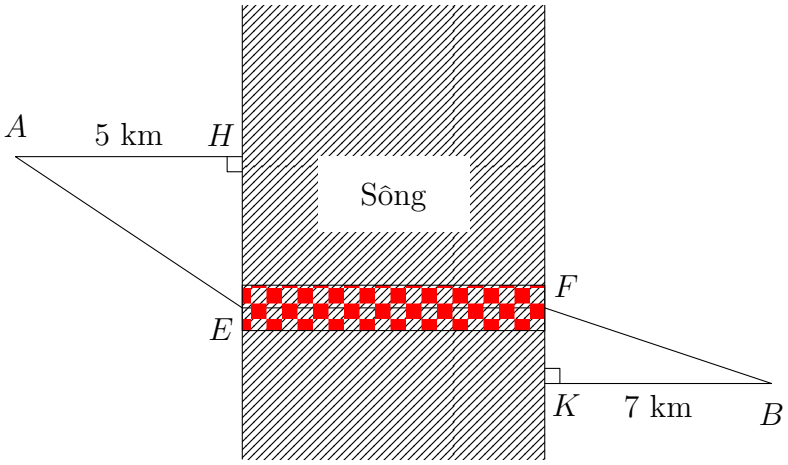
.....

.....

.....

.....

Câu 6. Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là 5 km và thành phố B cách con sông một khoảng là 7 km (hình vẽ), biết $HE + KF = 24$ km và độ dài EF không đổi. Hỏi xây cây cầu cách thành phố B là bao nhiêu để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (đi theo đường $AEFB$)? (kết quả làm tròn đến km).



Lời giải

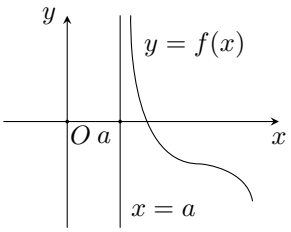
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

BÀI 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT

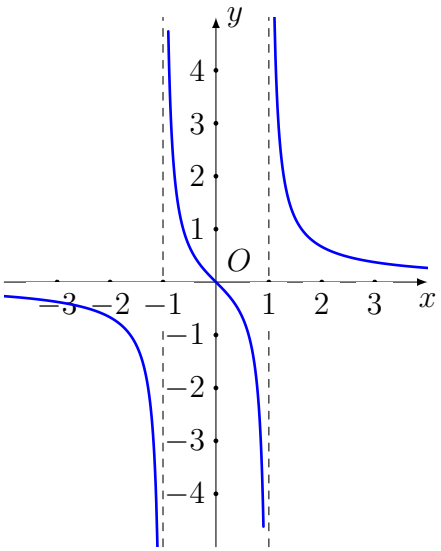
1. Tiệm cận đứng

Định nghĩa 1. Đường thẳng $x = a$ được gọi là một đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đúng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thoả mãn:



- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.

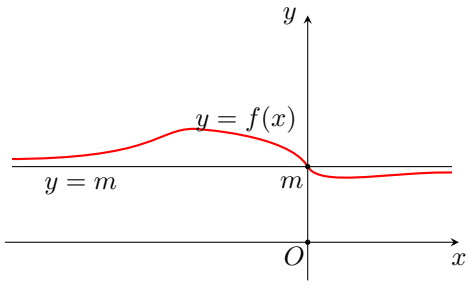
⚠ *Đồ thị hàm số* $y = \dfrac{x}{x^2-1}$ *cùng với hai tiệm cận đứng* $x = 1$ *và* $x = -1$



2. Tiệm cận ngang

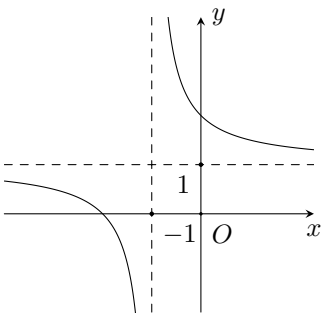
Định nghĩa 2. Đường thẳng $y = m$ được gọi là một đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = m$ hoặc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = m$.



a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = m$

⚠ *Đồ thị của hàm số* $y = \dfrac{x}{x+1}$ *cùng với tiệm cận ngang* $y = 1$ *và tiệm cận đứng* $x = -1$.

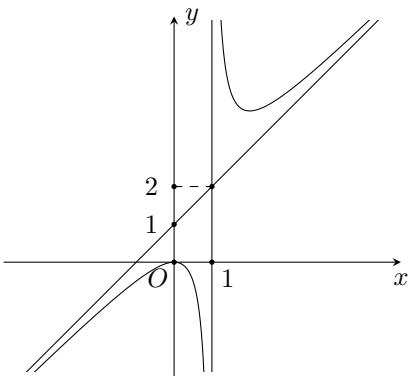


3. Tiệm cận xiên

Định nghĩa 3. Đường thẳng $y = ax + b, a \neq 0$, được gọi là đường tiệm cận xiên (hay tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

- $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

⚠ *Đồ thị hàm số* $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$ *cùng tiệm cận đứng* $x = 1$ *và tiệm cận xiên* $y = x + 1$.



B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 3.1. Tìm các đường tiệm cận khi cho bảng biến thiên – đồ thị

a) Bước 1: Tìm Tập xác định của hàm số. Giả Sử $D = (-\infty; +\infty)\backslash\{x_0\}$.

b) Bước 2: Quan sát Bảng biến thiên hoặc đồ thị, tìm giới hạn

- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} y = y_0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} y = y_0 \end{cases} \Rightarrow y = y_0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^-} y = +\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0^-} y = -\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} y = +\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} y = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = x_0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} [y-(ax+b)] = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} [y-(ax+b)] = 0 \end{cases} \Rightarrow y = ax+b$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

⚠
- $\lim\limits_{x\to+\infty} y = y_1; \lim\limits_{x\to-\infty} y = y_2 \Rightarrow y = y_1; y = y_2$ *là hai đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.*
- *Tập xác định không có chứa* $+\infty; -\infty$ *thì đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang.*
- *Hàm số xác định trên* $\mathbb{R}$ *thì đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.*

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có báng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$+\infty$ | 2	↘	-3	↗	3

Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Lời giải

.....

.....

.....

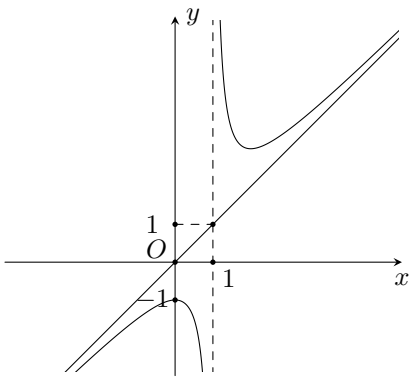
.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....

Câu 2.

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.



Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	5	↘		↗	$+\infty$	-2	↗	↘	-5
			3				1		

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 3.2. Tìm các đường tiệm cận khi cho bảng biến thiên – đồ thị

a) Bước 1: Tìm Tập xác định của hàm số. Giả Sử $D = (-\infty; +\infty)\backslash\{x_0\}$.

b) Bước 2: Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số bằng cách tính các giới hạn (nếu có): $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Bước 3: Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số bằng cách tính các giới hạn (nếu có): $\lim\limits_{x\to k^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to k^-} f(x)$.

d) Bước 3: Tìm tiệm cận xiên (dành cho hàm số có dạng phân thức có bậc tử số lớn hơn bậc mẫu số 1 bậc) bằng một trong hai cách sau:

- Cách 1: Nếu biểu diễn $f(x) = ax + b + g(x)$ thì tính $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}[y-(ax+b)]=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}[y-(ax+b)]=0 \end{cases} \Rightarrow y = ax+b$
- Cách 2: Xác định đường tiệm cận xiên $y = ax + b$ bằng cách xác định hệ số a, b:
  $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ hoặc $a = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ với $a \notin 0$.
  Khi đó tương ứng ta có $b = \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]$ hoặc $b = \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$

⚠ • *Đồ thị hàm số chỉ có thể có một trong hai loại tiệm cận ngang hoặc tiệm cận xiên.*

- *Nếu hàm số xác định trên toàn bộ tập số thực thì không có tiệm cận đứng.*
- *Hàm số hằng $y = b$ có đồ thị nhận $y = b$ là tiệm cận ngang, hàm số bậc nhất $y = ax + b$ có đồ thị nhận chính nó $y = ax + b$ là tiệm cận xiên.*

Câu 1. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2+1}{x}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-1}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 3.3. Đường tiệm cận liên quan góc – khoảng cách – diện tích

a) Bước 1: Xác định các đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

b) Bước 2: Dựa vào các giả thiết: khoảng cách, góc, diện tích,$\cdots$ để tính toán hoặc thiết lập phương trình, hệ phương trình để tìm ẩn cần tìm.

Câu 1. Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 - x}{x - 1}$ có đồ thị (C).

a) Tính khoảng cách từ $M(2;1)$ đến đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (C).

b) Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (C) cắt hai trục tọa độ lần lượt tại hai điểm A, B. Tính diện tích của tam giác OAB đó.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho hàm số $y = \dfrac{4x + 4}{3 - x}$ có đồ thị là (C). Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ một điểm M tùy ý trên (C) đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (C).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 3.4. Bài toán thực tế và ý nghĩa của giá trị gần về tiệm cận

a) Bước 1: Biểu diễn các đại lượng với nhau thông qua hàm số.

b) Bước 2: Tìm tiệm của hàm số vừa tìm được.

c) Bước 3: Nêu ý nghĩa của giá trị gần về tiệm cận.

Câu 1. Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là $C(x) = \dfrac{300x}{100-x}$(triệu đồng), $0 \le x < 100$. Hãy cho biết

a) Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi như thế nào khi x tăng?

b) Có thể loại bỏ được 10% chất gây ô nhiễm không khí không? Vì sao?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong x (tháng) được tính theo công thức $S(x) = 200\left(5 - \dfrac{9}{2+x}\right)$, trong đó $x \ge 1$.

a) Xem $y = S(x)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

b) Nêu nhận xét về số lượng sản phẩm bán được của công ty đó trong x (tháng) khi x đủ lớn.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 3. Một bể chứa 5000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 30 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 25 lít/phút.

a) Chứng tỏ nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là $f(t) = \dfrac{30t}{200+t}$.

b) Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

c) Nêu nhận xét về nồng độ muối trong bể sau thời gian t ngày càng lớn.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

C. LUYỆN TẬP

PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	2	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$
		-4					

Số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

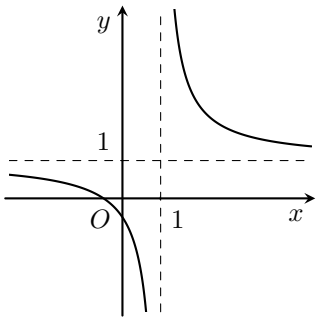
.....

.....

.....

.....

Câu 2. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số có phương trình là



A. $x = 1$. **B.** $x = 2$. **C.** $y = 1$. **D.** $y = 2$.

Lời giải

.....

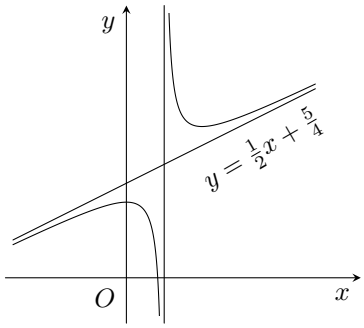
.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 3. Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ có đồ thị như hình bên. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là



A. $x = \dfrac{1}{2}$.
B. $y = 2x - 1$.
C. $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{4}$.
D. $x = 1$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.
B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....

Câu 5. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$ là

A. $y = -2$. **B.** $y = 1$. **C.** $x = -1$. **D.** $x = 2$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

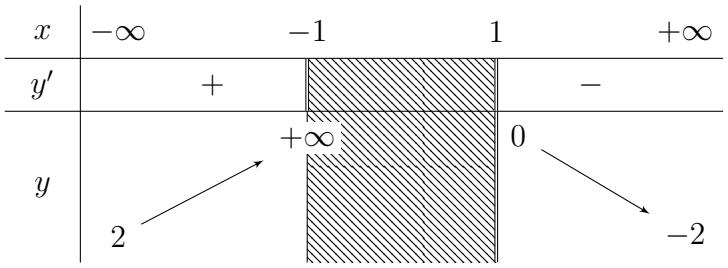
Câu 6. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x+1}{x-1}$ là

A. $y = \dfrac{1}{4}$. **B.** $y = 4$. **C.** $y = 1$. **D.** $y = -1$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus [-1;1]$ liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:



Tính tổng số đường tiệm cận đứng và số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

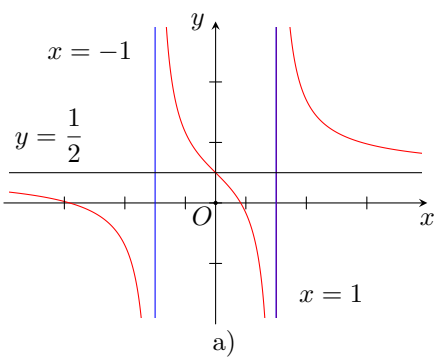
.....

.....

.....

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 6.



a)

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 9. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$ là

A. $y = 1$. **B.** $y = -2$. **C.** $x = -1$. **D.** $x = 2$.

Lời giải

Câu 10. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+2024}{x-1}$ là

A. $x = 2$. **B.** $x = -2$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = -1$.

Lời giải

Câu 11. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = x + 2 + \dfrac{3}{2x+1}$ là

A. $y = \dfrac{1}{2}$. **B.** $y = 2x + 1$. **C.** $y = x - 2$. **D.** $y = x + 2$.

Lời giải

Câu 12. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 16}{x + 5}$ là

A. $y = 2x + 5$. **B.** $y = x + 5$. **C.** $y = x - 5$. **D.** $y = 2x - 5$.

Lời giải

Câu 13. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x - 5}{x + 1}$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Câu 14. Cho hàm số $y = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$. Khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường tiệm cận đứng bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 3.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$		$+$		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	0
			$-\infty$		1		

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 16. Đồ thị hàm số nào sau đây có một tiệm cận?

A. $y = \dfrac{x+3}{2x-1}$. **B.** $y = \dfrac{x^2+3x-2}{x+3}$.

C. $y = \dfrac{4}{x-1}$. **D.** $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 17. Đường thẳng $2y+1=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào sau đây?

A. $y=\dfrac{x+1}{2x+1}$.

B. $y=\dfrac{x^2+x+1}{1-2x}$.

C. $y=\dfrac{2x+1}{1-x}$.

D. $y=\dfrac{3-x^2}{2x^2-3x+1}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 18. Đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nào sau đây?

A. $y=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1}$.

B. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$.

C. $y=\dfrac{x+1}{x^2+4x+3}$.

D. $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....

Câu 19. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 2}$ có đồ thị (C). Góc tạo bởi đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (C) với trục hoành bằng

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $120°$. **D.** $135°$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 20. Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x + 3}{x - 1}$ tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	-1

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị.

B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-1; +\infty)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ có tổng cộng 3 đường tiệm cận.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

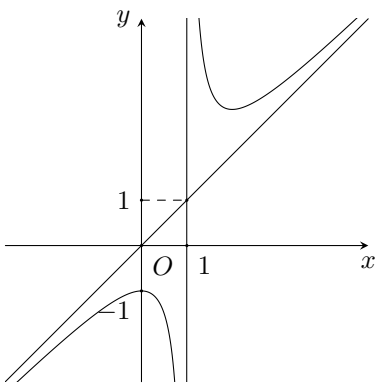
.....

.....

.....

.....

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị và đường tiệm cận xiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

C. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số có hệ số góc là một số âm.

D. Hàm số không có cực trị.

Lời giải

.....

.....

.....

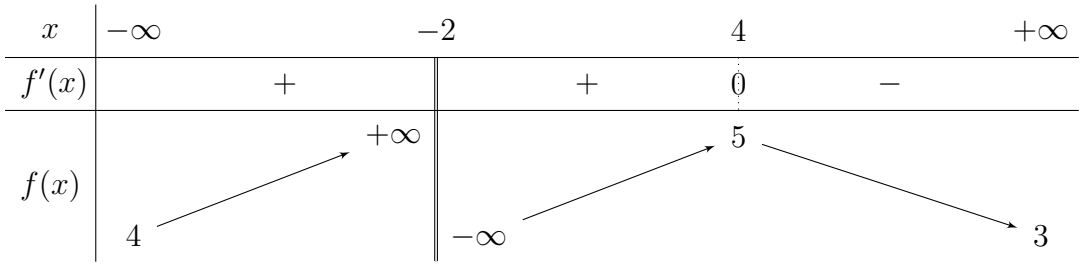
.....

.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình dưới đây.



Khi đó

a) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

b) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số có phương trình là $x = -2$.

c) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang có phương trình là $x = 3$ và $x = 4$.

d) Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho hàm số $y = \dfrac{\sqrt{4x^2 - 9}}{x - 1}$. Khi đó

a) Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$.

c) Đường thẳng $y = -2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

d) Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận.

Lời giải

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 3. Cho hàm số $y = \dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x}$. Khi đó

a) Đường thẳng $x = 0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

b) Đường thẳng $y = 0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

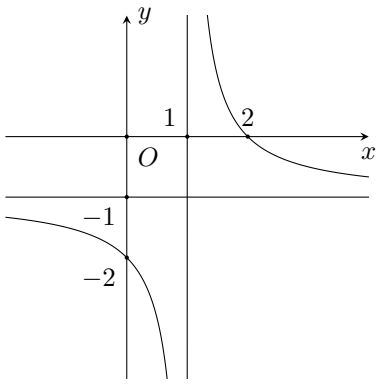
c) Đường thẳng $x = 2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

d) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 4. Cho hàm số $y = \dfrac{x+b}{cx+d}$ với $b, c, d \in \mathbb{Z}$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Khi đó

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 1$.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = -1$.

d) Tổng $b + c + d = 5$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian t cho bởi công thức $y(t) = 5 - \dfrac{15t}{9t^2 + 1}$, với y được tính theo mg/l và t được tính theo giờ, $t \geq 0$.

a) Đồ thị hàm số $y(t)$ có một đường tiệm cận ngang và một đường tiệm cận xiên.

b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = 5$.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = \dfrac{1}{3}$.

d) Sau một thời gian đủ dài, nồng độ oxygen trong hồ sẽ bão hòa và đạt ngưỡng 5 mg/l.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x + 2}$. Khi đó

a) Đồ thị hàm số có hai tiệm cận.

b) Giao điểm của hai tiệm cận là $I(-2; -6)$.

c) Khoảng cách từ O đến tiệm cận xiên bằng $4\sqrt{2}$.

d) Tiệm cận xiên của hàm số đi qua điểm $M(0;-4)$.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-2}{x+1}$. Giả sử đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = a$ và đường tiệm cận ngang là $y = b$. Tính giá trị $a + b$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho hàm số có bảng biến thiên bên dưới.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	1

Đồ thị hàm số có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 3}$ có đồ thị (C). Đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) là đường thẳng $\Delta\colon y = ax + b$. Tính $a + b$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+3}{x-2}$ có đồ thị (C). Hai đường tiệm cận của đồ thị (C) cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình thang vuông có diện tích S. Tính S.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT

1. Sơ đồ khảo sát hàm số

Định nghĩa 1. a) Tìm tập xác định của hàm số.

b) Xét sự biến thiên của hàm số:

- Tìm y', xét dấu y', xác định khoảng đơn điệu, cực trị (nếu có) của hàm số.
- Tìm giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực của hàm số và các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
- Lập bảng biến thiên của hàm số.

c) Vẽ đồ thị của hàm số:

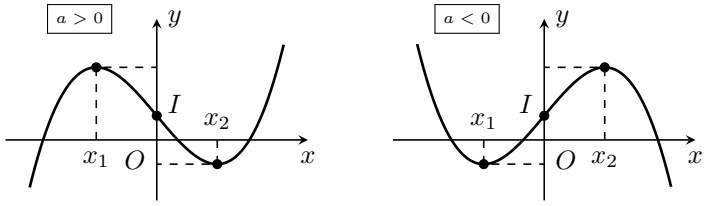
- Xác định các điểm cực trị (nếu có), giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu có và dễ tìm), ...
- Vẽ các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
- Vẽ đồ thị hàm số.

⚠ *Chỉ ra tâm đối xứng và trục đối xứng của đồ thị hàm số (nếu có).*

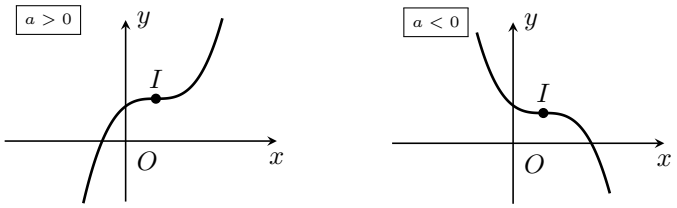
2. Khảo sát hàm số

- Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$.

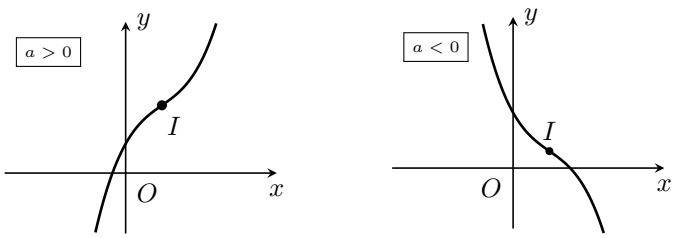
☑ **TH1.** Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 $(b^2 - 3ac > 0)$.



☑ **TH2.** Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép x_0 $(b^2 - 3ac = 0)$.

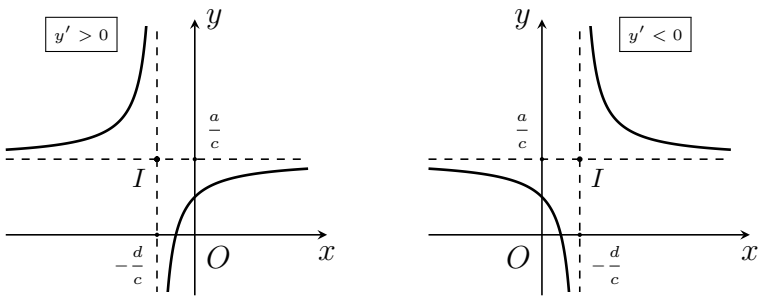


☑ **TH3.** Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm $(b^2 - 3ac < 0)$.



⚠ *Trường hợp: $y' = 0$ vô nghiệm và có nghiệm kép, đồ thị hàm số sẽ ở dạng luôn đơn điệu nhưng trường hợp có nghiệm kép thì đồ thị hàm số có 1 điểm hơi ngang ngang 1 chút (nhìn hình vẽ trên).*

- Hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$.



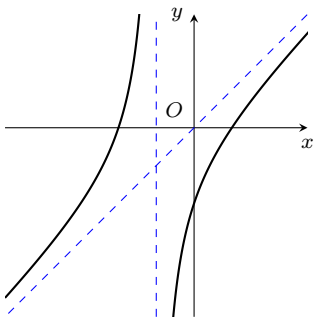
⚠

– *Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng* $x = -\dfrac{d}{c}$, *tiệm cận ngang* $y = \dfrac{a}{c}$.

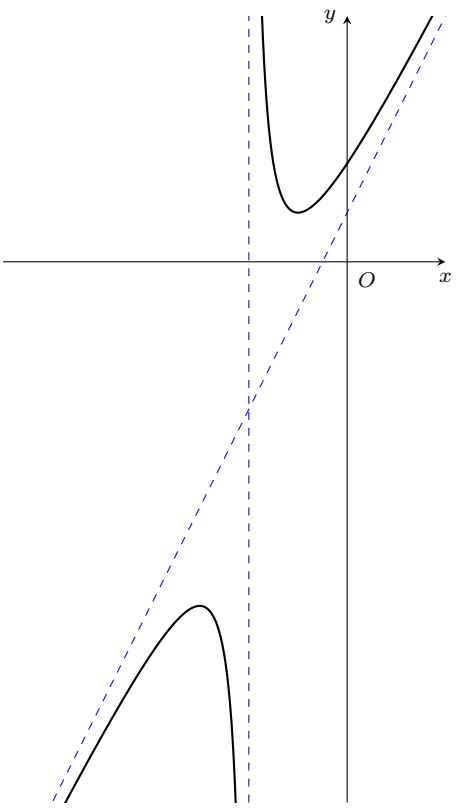
– *Các điểm đặc biệt:*
Giao điểm với Ox : $A\left(-\dfrac{b}{a};0\right)$, *giao điểm với* Oy : $B\left(0;\dfrac{b}{d}\right)$.
Giao của hai đường tiệm cận $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ *là tâm đối xứng.*

- Hàm số phân thức bậc hai trên bậc nhất $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ $(ad \neq 0)$.

– $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép



– $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt



– *Ta luôn tách được* $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}=\dfrac{a}{d}x+f+\dfrac{m}{dx+e}$.

– *Khi đó đồ thị hàm số có tiện cận đứng* $x=-\dfrac{e}{d}$. *Tiệm cận xiên* $y=\dfrac{a}{d}x+f$.



– *Đồ thị của hàm số* $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ *luôn nhận điểm* $I(x_0;y_0)$ *làm tâm đối xứng, trong đó* x_0 *là nghiệm của phương trình* $y''=0$ *và* $y_0=y(x_0)$.

– *Đồ thị của hàm số* $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$*:*

∗ *Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm tâm đối xứng;*

∗ *Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm trục đối xứng.*

– *Đồ thị của hàm số* $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ $(ad\neq 0)$*:*

∗ *Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng;*

∗ *Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm trục đối xứng.*

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 4.1. Khảo sát hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ với $a\neq 0$

Bước 1: Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Bước 2: Khảo sát sự biến thiên của hàm số

Giới hạn:

- Với $a>0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}y=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}=-\infty$.
- Với $a<0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}y=+\infty$.

Đạo hàm và cực trị: $y'=3ax^2+2bx+c$. Khi đó:

Hàm số có hai điểm cực trị khi $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'_{y'}>0$.

Gọi $A(x_1;y_1)$; $B(x_2;y_2)$ là hai điểm cực trị, theo định lý Viet: $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{-2b}{3a}\\ x_1x_2=\dfrac{c}{3a}.\end{cases}$

Hàm số không có cực trị khi $y'=0$ vô nghiệm hoặc nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta'_{y'}\leq 0$.

Bảng biến thiên.

Đồ thị hàm số:

- Không có tiệm cận.

- Tâm đối xứng là điểm có hoành độ thỏa mãn $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-b}{3a}$.

Ví dụ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

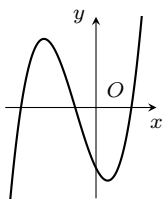
.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hãy xác định dấu của các hệ số a, b, c và d.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 4.2. Khảo sát hàm số hữu tỉ bậc nhất trên bậc nhất

$y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $x \neq -\dfrac{d}{c}$

Bước 1: Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

Bước 2: Khảo sát sự biến thiên của hàm số

Giới hạn:

- Giới hạn và đường tiệm cận

  $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \dfrac{a}{c}$ suy ra $y = \dfrac{a}{c}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

  $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} y = -\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} y = -\infty$,

  $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} y = -\infty$ suy ra $x = -\dfrac{d}{c}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Đạo hàm và cực trị: $y' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
  - Nếu $ad - bc > 0, \forall x \in \mathscr{D}$.

    Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{d}{c}\right)$ và $\left(-\dfrac{d}{c}; +\infty\right)$.
  - Nếu $ad - bc < 0, \forall x \in \mathscr{D}$.

    Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{d}{c}\right)$ và $\left(-\dfrac{d}{c}; +\infty\right)$.

Bảng biến thiên.

Đồ thị hàm số luôn nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $I\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$.

Ví dụ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

. . . . . .
. . . . . .

Ví dụ 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x}{x+1}$.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Dạng 4.3. Khảo sát hàm số hữu tỉ bậc hai trên bậc nhất

$y = \dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ với $ad \neq 0; x \neq -\dfrac{e}{d}$

Tử và mẫu không có nghiệm chung. Viết hàm số dưới dạng (bằng cách chia đa thức)

Bước 1: Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{e}{d}\right\}$.

Bước 2: Khảo sát sự biến thiên của hàm số

Giới hạn:

- Giới hạn và đường tiệm cận

  $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[y-(\alpha x+\beta)] = 0$ suy ra $y = \alpha x + \beta$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

  $\lim\limits_{x\to(-\frac{e}{d})^{\pm}} y = \pm\infty$ suy ra $x = -\dfrac{e}{d}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Đạo hàm và cực trị: $y' = \dfrac{\alpha(dx+e)^2-\gamma d}{(dx+e)^2}$.

  Dấu của đạo hàm là dấu của $g(x) = \alpha(dx+e)^2 - \gamma d$.

  - Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép thì không có cực trị.
  - Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt thì có hai cực trị.

Bảng biến thiên.

Đồ thị hàm số:

- Tìm giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu có).
- Đồ thị hàm số luôn nhận giao điểm I của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

Nhận xét. *Đồ thị hàm số nhận giao điểm hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.*
Đồ thị hàm có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y'=0$ *có hai nghiệm phân biệt khác* $-\dfrac{e}{d}$.
Trong trường hợp đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu thì phương trình đường thẳng qua hai cực trị là $y=\dfrac{2ax+b}{d}$.
Mọi tiếp tuyến tại điểm $M\in(C)$ *cắt hai đường tiệm cận tại* A, B *thì* M *là trung điểm* AB.
Diện tích tam giác IAB *không đổi.*
Mọi điểm $M\in(C)$ *có tích khoảng cách từ* M *đến hai đường tiệm cận là một hằng số.*
Nếu từ một điểm E *nằm trên một đường tiệm cận của* (C) *thì qua* E *kẻ duy nhất một tiếp tuyến với* (C).

Ví dụ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{2x^2+5x+4}{x+2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x+1}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

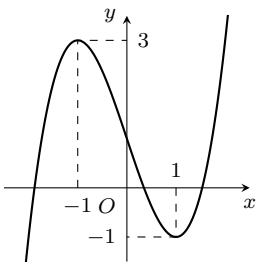
.....

.....

.....
.....
.....
.....

Dạng 4.4. Nhận dạng hàm số khi biết đồ thị - bảng biến thiên

Ví dụ 1. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Viết công thức của hàm số.



Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = \dfrac{ax-1}{2x+b}$ có bảng biến thiên như hình bên dưới. Xác định a, b.

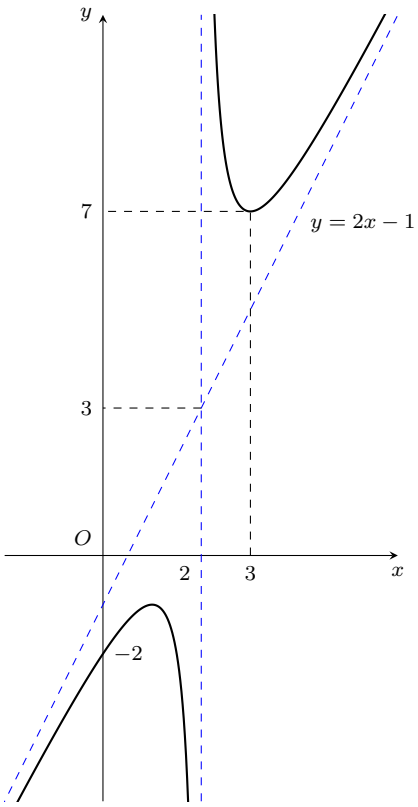
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	-1	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	-1
		$-\infty$			

Lời giải

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 3. Cho hàm số hữu tỉ $y = \dfrac{2x^2 + ax + b}{cx - 2}$ có đồ thị như hình bên. Viết công thức của hàm số.



Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....

Dạng 4.5. Nhận dạng đồ thị - bảng biến thiên khi biết hàm số

Vận dụng các kiến thức liên quan: Đơn điệu, Cực trị, Đường tiệm cận

- **Bước 1:** Tập xác định.
- **Bước 2:** Sự biến thiên
  - Chiều biến thiên.
  - Cực trị.
  - Đường tiệm cận.
  - Điểm đi qua.
- **Bước 3:** Kết luận đồ thị.

Ví dụ 1. Xác định bảng biến thiên của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 9x - 9$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2. Xác định đồ thị của hàm số hữu tỉ $y = \dfrac{x^2+3}{x+1}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Dạng 4.6. Xác định dấu – giá trị các hệ số

a) **Loại 1:** Hàm đa thức bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a \neq 0)$.

- **Bước 1:** Nhìn vào nhánh ngoài cùng của đồ thị Xác định dấu của hệ số a.
- **Bước 2:** Điểm cắt trục tung: xác định dấu hệ số d.
- **Bước 3:** Nhìn vào hai điểm cực trị (nếu có). Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0$.
  - Nếu đồ thị hàm số không có điểm cực trị $\Rightarrow \Delta' = b^2 - 3ac \leq 0$.
  - Nếu đồ thị hàm số có hai điểm cực trị:
    Các điểm cực trị x_1, x_2 của hàm số là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$.
    Khi đó $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{3a} \end{cases}$ (Vi-ét).
    Dựa vào vị trí của x_1, x_2 để suy luận các phép tính $x_1 + x_2$ và $x_1 x_2$ mang dấu gì.
    Nếu không cho tọa độ rõ ràng, ước lượng khoảng cách từ O tới các điểm x_1, x_2.
- **Bước 4:** Xác định tọa độ các điểm đã cho.
- **Bước 5:** Dựa vào điểm uốn U-Là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.
  - x_U là nghiệm của phương trình $y'' = 0$.
  - Điểm U là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị.

Nhận xét: Bảng biến thiên mô phỏng đồ thị hàm số. Cách đọc bảng biến thiên giống như cách đọc đồ thị.

b) **Loại 2:** Hàm phân thức $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ và $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$.

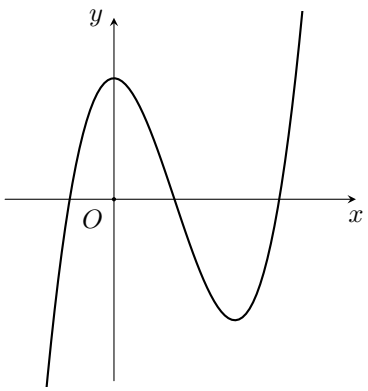
- **Bước 1:** Xác định các đường tiệm cận. Dùng công thức tính nhanh định nghĩa) để tìm mối quan hệ giữa các hệ số.

Lưu ý: Giao điểm của hai đường tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.

- **Bước 2:** Xác định các điểm thuộc đồ thị hàm số: giao với các trục tọa độ, cực trị.
- **Bước 3:** Từ hình dáng đồ thị (bảng biến thiên), xác định dấu của đạo hàm dựa vào các khoảng đồng biến/nghịch biến. Từ đó xác định dấu của các hệ số.

Ví dụ 1.

Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên dưới. Trong các hệ số a, b, c, d có bao nhiêu giá trị dương?



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

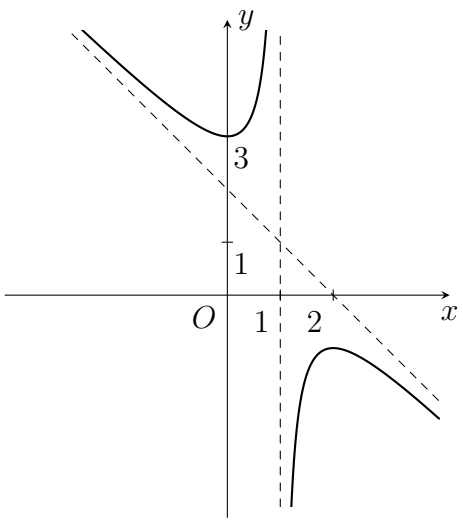
.....

.....

.....

Ví dụ 2.

Cho hàm số hữu tỉ $y = ax + 2 + \dfrac{b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên. Tính $P = a + b + c$.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

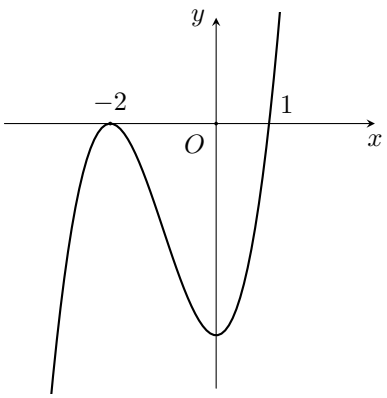
Dạng 4.7. Đọc đồ thị của đạo hàm

Xác định tính đơn điệu, cực trị, giá trị lớn nhất nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$, $g(x) = f(u(x))$, $g(x) = g(f(x))$ khi biết đồ thị (bảng biến thiên) của đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ hoặc $y = f'(u(x))$.

- **Bước 1:** Tính $g'(x)$ (chú ý hàm hợp dạng $g(x) = f(u(x)) \Rightarrow g'(x) = u'(x) \cdot f'(u(x))$).
- **Bước 2:** Giải $g'(x) = 0$ ta được $x_1; x_2; \ldots; x_i$ là các điểm mà tại đó $g'(x) = 0$ hoặc $g'(x)$ không xác định.
- **Bước 3:** Lập bảng xét dấu của $g'(x)$ lập được bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$. Dựa vào bảng biến thiên xét các tính chất đơn điệu, cực trị, min, max...

Ví dụ 1.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $y = f'(x)$ có đồ thị trong hình dưới đây. Lập bảng xét dấu của $y = f'(x)$?



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

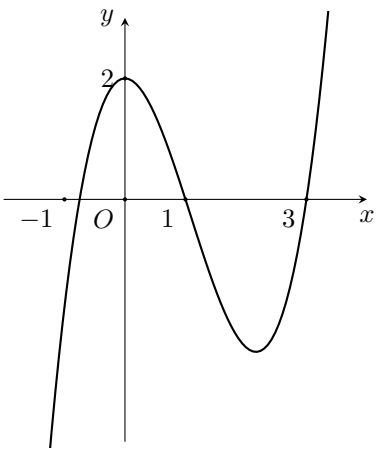
.....

.....

.....

Ví dụ 2.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $y = f'(x)$ có đồ thị trong hình dưới đây. Tìm điểm cực đại của hàm số đã cho



Lời giải

.....

.....

.....

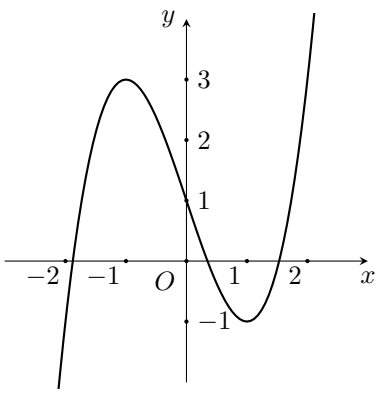
.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 3.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xác định giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x-1) - 2x + 1$ trên $[0;1]$.



Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Dạng 4.8. Sự tương giao

Các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đồ thị lần lượt là các đường (C_1), (C_2), khi đó:

- Số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ chính là số giao điểm của các đồ thị (C_1), (C_2).
- Số giao điểm của các đường (C_1), (C_2) chính là số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$.

Ví dụ 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị của hàm số $y = 3x^3 - 9x + 3(m-1)$ giao với trục hoành tại hai điểm phân biệt?

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

C. LUYỆN TẬP

PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ đồng biến trên khoảng

A. $(0;2)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

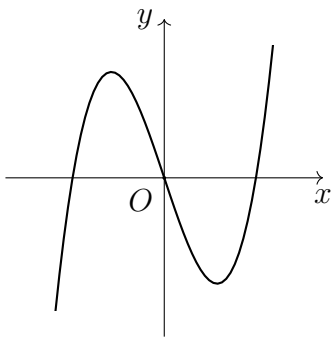
.....

.....

.....

Câu 2.

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y = x^3 - 3x$. **B.** $y = -x^3 + 3x$.

C. $y = x^3 - 3x^2 + 1$. **D.** $y = -x^3 + 3x^2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

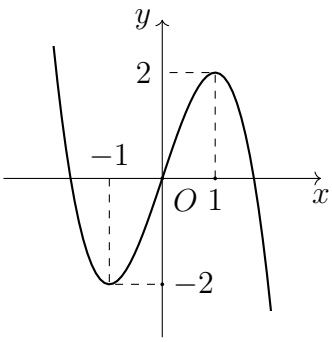
.....

.....

.....

Câu 3.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là



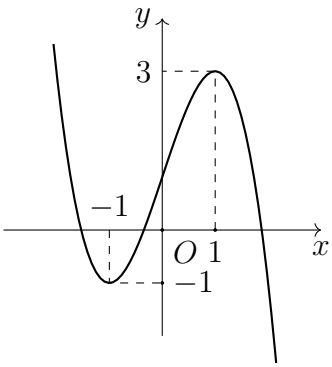
A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 4.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là



A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

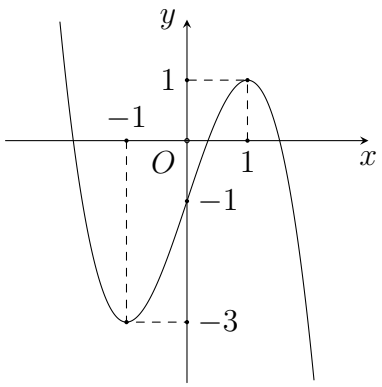
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....

Câu 5.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt?

A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.



Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 6. Tìm giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

A. $y = -1$. **B.** $y = 4$. **C.** $y = 1$. **D.** $y = 0$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....

Câu 7. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{5x+1}{x-1}$ là

A. $y = -\dfrac{1}{5}$. **B.** $y = 5$. **C.** $y = 1$. **D.** $y = 0$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 8. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = \dfrac{(n-3)x+n-2017}{x+m+3}$ (m, n là các số thực) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Tính tổng $m+n$.

A. 0. **B.** -3. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 9. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2+2x-3}{2x-2}$ là

A. $x = 1$. **B.** $x = \dfrac{1}{2}$.

C. $x = 2$. **D.** Không có tiệm cận đứng.

Lời giải

.....
.....

Câu 10. Đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - 1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 0.

Lời giải

Câu 11. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2$ và đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 3x$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Câu 12. Biết rằng đường thẳng $y = 4x + 5$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x + 1$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0.

A. $y_0 = 10$. **B.** $y_0 = 13$. **C.** $y_0 = 11$. **D.** $y_0 = 12$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

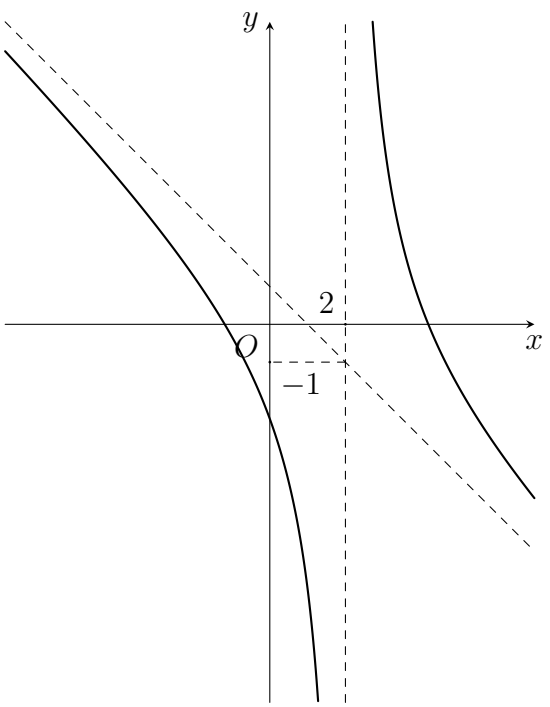
.....

.....

.....

Câu 13.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ có đồ thị như hình bên



Xét các mệnh đề sau:

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

c) Điểm $I(1; 2)$ là tâm đối xứng của đồ thị.

d) Hệ số a và m trái dấu.

Có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....

Câu 14. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2$ và đồ thị hàm số $y = x^2 + 5x$ là

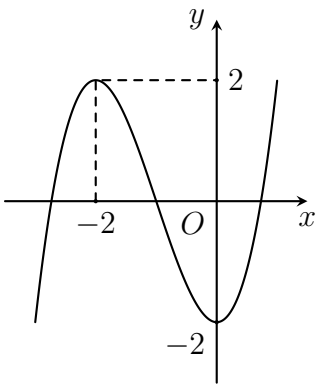
A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 15.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = -x^3 - 3x^2 - 2$. **B.** $y = x^3 + 3x^2 - 2$.

C. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$. **D.** $y = x^3 - 3x^2 - 2$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....

Câu 16. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ và đường cong $y = \dfrac{2x+4}{x-1}$. Khi đó hoành độ x_I của trung điểm I của đoạn MN bằng bao nhiêu?

A. $x_I = 2$. **B.** $x_I = 1$. **C.** $x_I = -5$. **D.** $x_I = -\frac{5}{2}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 17. Biết đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{-x+5}{x-2}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2. Giá trị $x_1 + x_2$ bằng

A. -1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

»

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

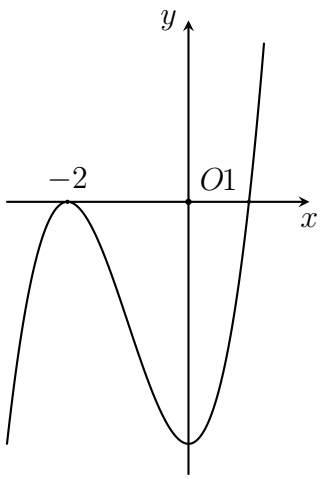
.....

.....

.....

Câu 19.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-2;0)$. **B.** $(-4;-2)$.

C. $(-\infty;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 20. Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên sau?

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	
$f(t)$	$-2 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -2$	

A. $y = \dfrac{x-1}{x-1}$. **B.** $y = \dfrac{-2x}{x-1}$. **C.** $y = \dfrac{-2+x}{x+1}$. **D.** $y = \dfrac{1-2x}{x+1}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

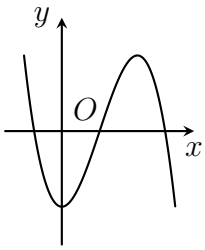
.....

.....

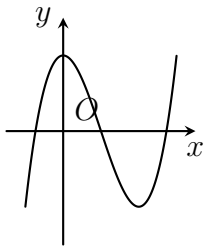
.....

.....

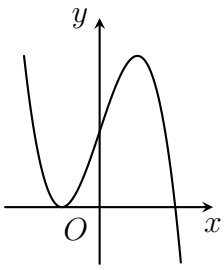
Câu 21. Hình nào dưới đây là dạng đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$?

A. 

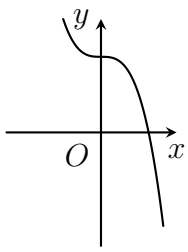
.

B. 

.

C. 

.

D. 

.

Lời giải

.....

.....

.....

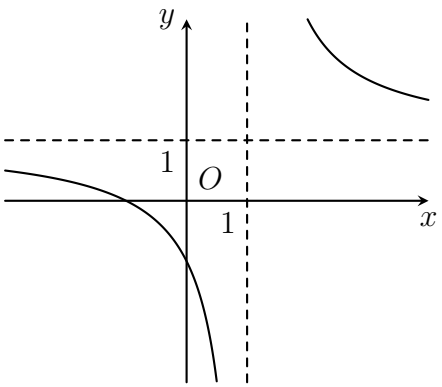
.....

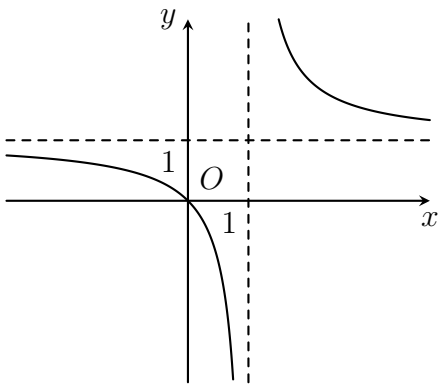
.....

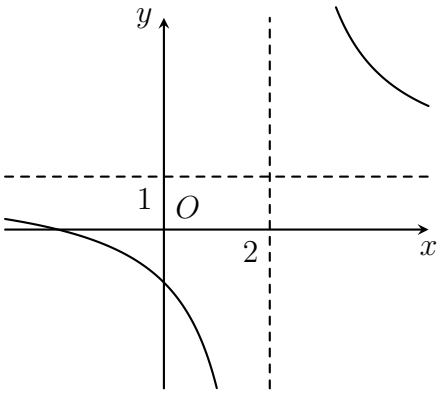
.....

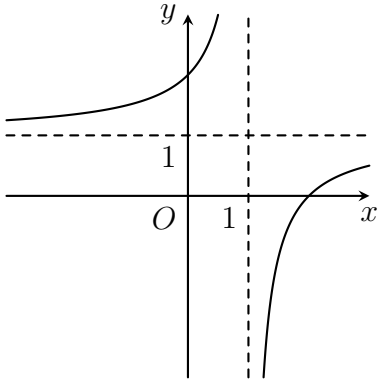
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 22. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x-2}{x-1}$?

A.


B.


C.


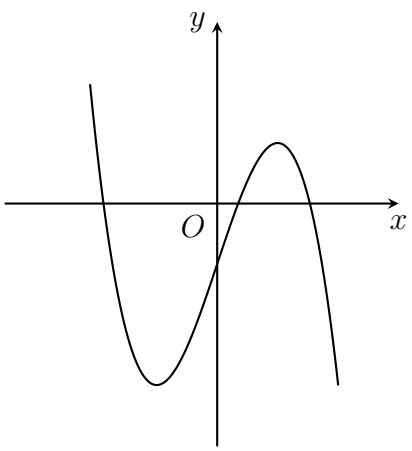
D.


Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 23.

Cho hàm số $y = ax^3 + 3x + d$ $(a; d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a > 0, d > 0$. **B.** $a < 0, d > 0$.

C. $a > 0, d < 0$. **D.** $a < 0, d < 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-5	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

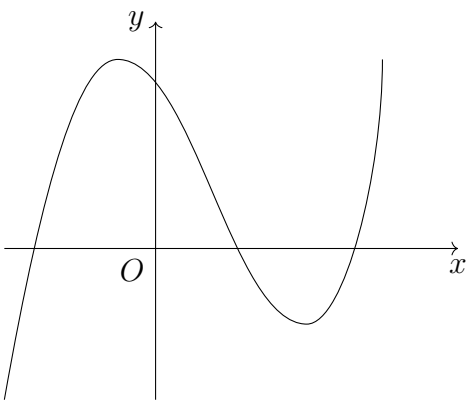
.....

.....

.....

Câu 25.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ. Chọn khẳng định đúng về dấu của a, b, c, d.



A. $a > 0$, $b > 0$, $d > 0$, $c > 0$.
B. $a > 0$, $c > 0 > b$, $d < 0$.
C. $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.
D. $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$, $d > 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

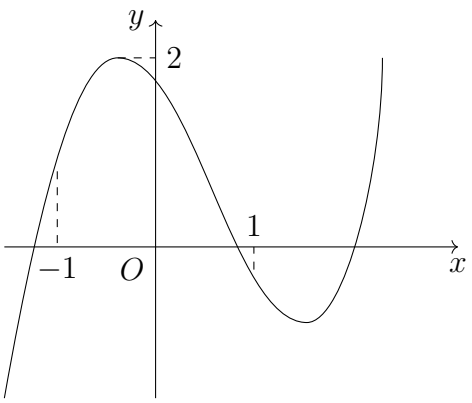
.....

.....

.....

Câu 26.

Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới Khẳng định nào là đúng?



A. $a < 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d < 0$.

B. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d < 0$.

C. $a > 0,\ b > 0,\ c < 0,\ d > 0$.

D. $a > 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d > 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$		$+\infty$	↘	$\frac{27}{4}$	↗	$+\infty$

Tìm điều kiện của m để phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt.

A. $m < 0$. **B.** $m > 0$. **C.** $0 < m < \dfrac{27}{4}$. **D.** $m > \dfrac{27}{4}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 28. Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ cắt hai trục Ox và Oy tại A và B. Khi đó diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ bằng)

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 29. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ có tiệm cận xiên là

A. $y = x$. **B.** $y = -x$. **C.** $y = x+1$. **D.** $y = -x+1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

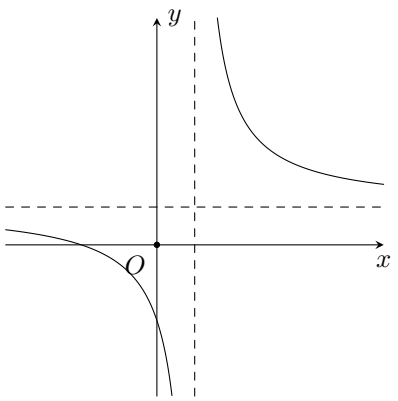
.....

.....

.....

Câu 30.

Cho hàm số $y=\dfrac{(a-1)x+b}{(c-1)x+d}$, $d<0$ có đồ thị như hình trên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A. $a>1$, $b>0$, $c<1$. **B.** $a>1$, $b<0$, $c>1$.

C. $a<1$, $b>0$, $c<1$. **D.** $a>1$, $b>0$, $c>1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

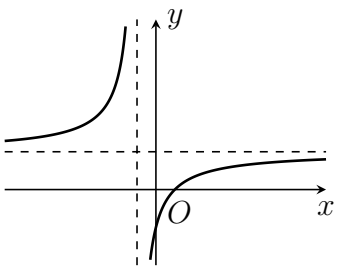
.....

.....

.....

Câu 31.

Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng.



A. $\begin{cases} ad<0 \\ bc>0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} ad<0 \\ bc<0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} ad>0 \\ bc<0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} ad>0 \\ bc>0 \end{cases}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 32. Tính tổng các hoành độ giao điểm giữa hai đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{4-x}$ và $y = 6 - x$.

A. 12. **B.** 27. **C.** -12. **D.** -27.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 33. Một học sinh được giao thiết kế một cái hộp thỏa mãn: Tổng của chiều dài và chiều rộng bằng 12 cm; tổng của chiều rộng và chiều cao là 24 cm. Giáo viên yêu cầu học sinh ấy phải thiết kế sao cho thể tích cái hộp lớn nhất, giá trị thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. 600. **B.** $843\sqrt{3}$. **C.** $384\sqrt{3}$. **D.** $348\sqrt{3}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 34. Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) để vượt khoảng cách 400 km tới nơi sinh sản. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ cho bởi công thức $E(v) = cv3t$. Trong đó c là hằng số cho trước; E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất bằng

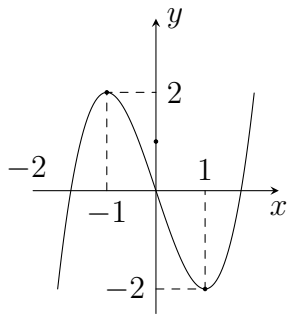
A. 9 km/h. **B.** 8 km/h. **C.** 10 km/h. **D.** 12 km/h.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho đồ thị hàm số bậc ba như hình bên dưới.



Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **ĐÚNG**? Khẳng định nào **SAI**?

a) Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-1;\ 2)$.

b) Đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

d) Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua gốc toạ độ O.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Các mệnh đề sau, **ĐÚNG** hay **SAI** .

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;-1);(-1;0)$.

b) Hàm số có hai điểm cực trị.

c) Đồ thị (C) không cắt trục Ox.

d) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên đi qua điểm $A(1;2)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 3. Cho hàm số $y = \dfrac{-x^2 - 3x + 4}{x - 3}$ có đồ thị là (C). Những mệnh đề sau **Đúng** hay **Sai**?

a) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên là $y = -x - 6$.

b) Đồ thị (C) nhận giao điểm $I(3; -9)$ làm tâm đối xứng.

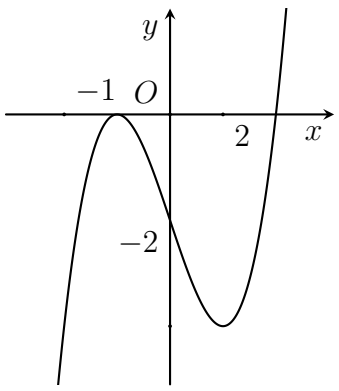
c) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy.

d) Đồ thị không cắt trục Ox.

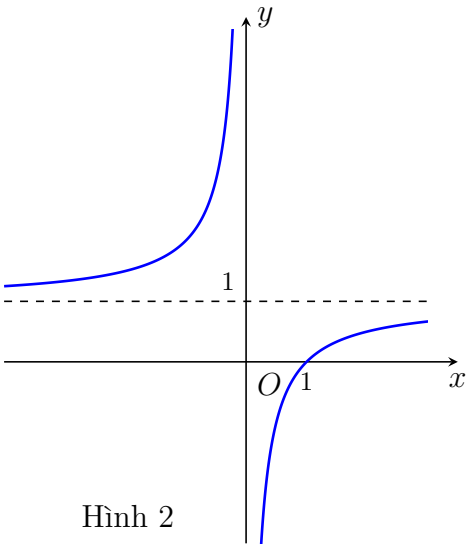
Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 4. Cho ba dạng đồ thị hàm số.



Hình 1



Hình 2

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$ 3	$\searrow$	$-\infty$

Hình 3

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **ĐÚNG**? Khẳng định nào **SAI**?

a) Hình 1 là đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hệ số $a > 0$ và $d = -2$.

b) Hình 2 là đồ thị hàm số có dạng $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ thoả $a = c$, với $a \neq 0,\ \ c \neq 0$.

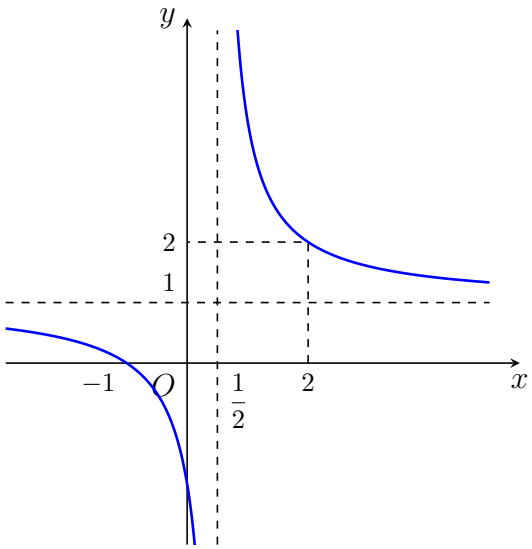
c) Hình 3 là đồ thị hàm số có dạng $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ với $a \neq 0,\ \ m \neq 0$ và có điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(2; 3)$.

d) Hình 3 có $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 5. Cho hai đồ thị hàm số hình 1 là $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ và hình 2 là $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$



Hình 1

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hình 2

Xét tính **ĐÚNG**, **SAI** các mệnh đề sau

a) Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ thoả mãn $a + 2d = 0$.

b) Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ thoả mãn $3b - 4c - 2d = 0$.

c) Hình 2 có đồ thị hàm số có dạng là $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

d) Hình 2 là đồ thị hàm số có tổng các hệ số $a + b + c + d < 0$.

Lời giải

Câu 6. Cho hàm số $y = x - \dfrac{1}{x+1}$.

a) Đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$.

b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại M.
Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y = 2x - 1$.

c) Tồn tại hai tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với nhau.

d) Để đường thẳng $y = k$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $OA \perp OB$ khi đó k là nghiệm của phương trình $k^2 - k - 1 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

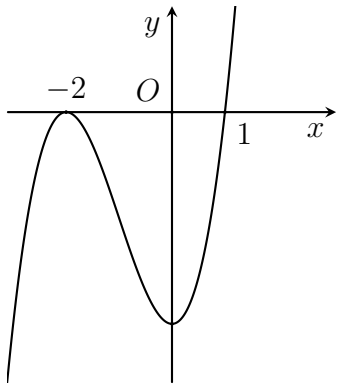
.....

.....

.....

.....

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 3)$ và xét tính **ĐÚNG**, **SAI** của các mệnh đề sau.

a) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

b) Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

c) Hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

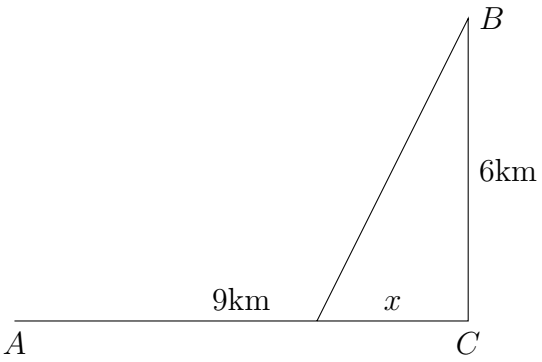
d) Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 2$.

Lời giải

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 8. Một công ty muốn xây một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ biển đến một điểm B trên một hòn đảo (như hình vẽ).



Giá để xây đường ống trên bờ là 50 000 USD mỗi km và 130 000 USD để xây mỗi km dưới nước. Gọi C là điểm trên bờ biển sao cho BC vuông góc với bờ biển, $BC = 6$ km, $AC = 9$ km. Gọi M là vị trí trên đoạn AC sao cho khi làm ống dẫn theo đường gấp khúc AMB thì chi phí ít nhất. Xét tính **ĐÚNG, SAI** các mệnh đề dưới đây.

a) Nếu công ty lắp đường ống theo đường ACB thì chi phí hết số tiền 1 230 000 USD.

b) Nếu công ty lắp đường ống thẳng theo đường trên biển từ A đến B thì chi phí hết số tiền nhỏ hơn 1 400 000 USD.

c) Nếu công ty lắp đường ống theo đường gấp khúc AMB thì khi M là trung điểm của AC chi phí hết số tiền 1 200 000 USD.

d) Chi phí thấp nhất để hoàn thành việc xây dựng đường ống dẫn là 1 170 000 USD.

Lời giải

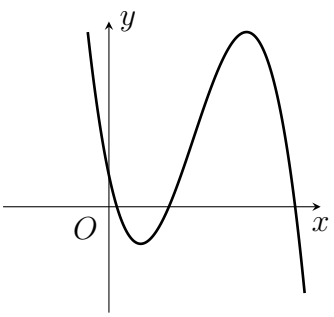
.....
.....
.....
.....
.....
.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Ta xác định được các số a, b, c để đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $(1; 0)$ và có điểm cực trị $(-2; 0)$. Tính giá trị biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

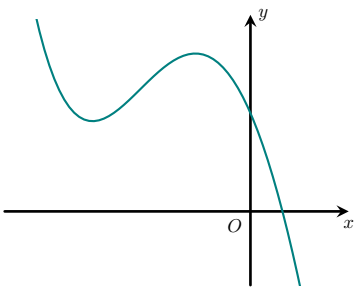
.....

.....

.....

Câu 3.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Giả sử chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in,...) được cho bởi công thức:

$$C(x) = 0{,}0001x^2 - 0{,}2x + 10000$$

trong đó $C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng (1 vạn đồng = 10 000 đồng). Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. Tỉ số $M(x) = \dfrac{T(x)}{x}$ được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn và tổng chi phí $T(x)$ (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí. Tìm chi phí trung bình thấp nhất cho một cuốn tạp chí xuất bản (*đơn vị: vạn đồng*), biết rằng nhu cầu hiện tại xuất bản không quá 30 000 cuốn.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa ($1 \leq x \leq 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí $C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500$. Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa. Tìm lợi nhuận tối đa mà hộ làm nghề dệt này có thể thu được mỗi ngày (*đơn vị: nghìn đồng*).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI 5. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN THỰC TIỄN

A. LÝ THUYẾT

1. Quy trình giải một bài toán tối ưu đơn giản

- Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.
- Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là x, và biểu diễn các đại lượng khác ở Bước 1 theo x. Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x. Tìm tập xác định của hàm số $Q = Q(x)$.
- Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q = Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 5.1. Tốc độ thay đổi của doanh thu, lợi nhuận

Nếu $C = C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng hoá được sản xuất được gọi là **chi phí biên**.
Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ (xấp xỉ vì chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x+1$ (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87, bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống). Gọi $p(x)$ là giá bán mỗi đơn vị mà công ty có thể tính nếu bán x đơn vị. Khi đó, p được gọi là hàm cầu (hay hàm giá) và chúng ta mong đợi đó là một hàm giảm của x. Nếu x đơn vị được bán và giá mỗi đơn vị là $p(x)$ thì tổng doanh thu là

$$R(x) = x \cdot p(x).$$

Và $R(x)$ được gọi là **hàm doanh thu**. Đạo hàm $R'(x)$ của hàm doanh thu được gọi là **hàm doanh thu biên** và là tốc độ thay đổi của doanh thu đối với số lượng đơn vị sản phẩm bán ra.
Nếu x đơn vị được bán, thì tổng lợi nhuận là

$$P(x) = R(x) - C(x).$$

Và $P(x)$ được gọi là **hàm lợi nhuận**. Hàm lợi nhuận biên là đạo hàm $P'(x)$ của hàm lợi nhuận.

Ví dụ 1. (MH - THPTQG 2025). Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 500 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm ($1 \leq x \leq 500$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là

$$F(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000$$

(đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho một sản phẩm là

$$G(x) = x + 1000 + \frac{250000}{x}$$

(đồng). Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. (CT - THPTQG 2025). Nếu một doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm trong một tháng ($x \in \mathbb{N}^*$; $1 \leq x \leq 4500$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là

$$F(x) = -0{,}01x^2 + 450x$$

(nghìn đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho mỗi sản phẩm là

$$G(x) = \frac{30000}{x} + 340$$

(nghìn đồng). Giả sử số sản phẩm sản xuất ra luôn được bán hết. Trong một tháng, doanh nghiệp đó cần sản xuất ít nhất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được lớn hơn 100 triệu đồng?

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Dạng 5.2. Bài toán thực tế liên quan đến tốc độ thay đổi của một đại lượng

- Nếu $s = s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì

$$v = s'(t)$$

biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

- Nếu $C = C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hóa học tại thời điểm t, thì

$$C'(t)$$

là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t.

- Nếu $P = P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t, thì

$$P'(t)$$

biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t.

Ví dụ 1. Một cửa hàng kinh doanh máy lọc nước Karofi. Hàm cầu biểu thị liên hệ giữa giá bán của một chiếc máy với số lượng máy bán được trong một tháng là hàm bậc nhất. Khi giá bán là 5 triệu đồng một chiếc thì một tháng bán được 100 chiếc, khi giá bán là 4,5 triệu đồng một chiếc thì một tháng bán được 120 chiếc. Biết chi phí trung bình cho

một chiếc máy khi bán được x chiếc là

$$\frac{3x+50}{x}.$$

Hỏi cửa hàng cần bán với giá bao nhiêu triệu đồng một chiếc máy để lợi nhuận thu được trong một tháng lớn nhất?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Sản lượng táo trên mỗi cây khi thu hoạch lệ thuộc vào mật độ cây được trồng. Với cùng một phương pháp chăm sóc như nhau, nếu trên mỗi sào đất được trồng n cây táo thì người ta ước tính trung bình sản lượng táo khi thu hoạch là

$$f(n) = -0{,}06n^2 - 0{,}4n + 320$$

kg/cây. Biết rằng bình quân chi phí giống và chăm sóc từ lúc trồng cho đến khi thu hoạch là 560 nghìn đồng mỗi cây. Giá bán mỗi kg táo là 50 nghìn đồng/kg, với giá bán này thì tất cả lượng táo thu hoạch đều được bán hết. Hỏi nên trồng trung bình bao nhiêu cây táo trên mỗi sào đất để mang về lợi nhuận cao nhất?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. LUYỆN TẬP

PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Một hợp tác xã trồng dưa lưới tại Lâm Đồng ký hợp đồng cung cấp dưa cho chuỗi siêu thị. Qua khảo sát, nếu mỗi ngày hợp tác xã cung cấp x tấn dưa thì giá bán trung bình của mỗi tấn là

$$p(x) = 26 - 0,25x$$

(triệu đồng), với $0 < x \leq 40$.

Doanh thu mỗi ngày của hợp tác xã được biểu diễn bởi công thức nào dưới đây?

A. $R(x) = 26 - 0,25x$. **B.** $R(x) = 26x - 0,25x^2$.

C. $R(x) = 26x + 0,25x^2$. **D.** $R(x) = 26x$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Một công ty sản xuất pin xe điện ước tính tổng chi phí để sản xuất x bộ pin trong một ngày được cho bởi

$$C(x) = 0,04x^2 + 120x + 350$$

(triệu đồng).

Đại lượng nào dưới đây biểu diễn **chi phí biên** của công ty?

A. $0,08x^2 + 120$. **B.** $0,04x + 120$. **C.** $0,08x + 120$. **D.** $0,08x + 350$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....

Câu 3. Một doanh nghiệp chế biến thủy sản bán toàn bộ sản phẩm sản xuất trong ngày. Doanh thu và tổng chi phí (đơn vị: triệu đồng) lần lượt được cho bởi

$$R(x) = 180x, \qquad C(x) = 0,2x^2 + 70x + 500,$$

trong đó x là số tấn thủy sản chế biến.

Biểu thức nào sau đây là hàm lợi nhuận của doanh nghiệp?

A. $0,2x^2 + 110x + 500$.
B. $0,2x^2 - 110x + 500$.
C. $-0,2x^2 + 110x - 500$.
D. $-0,2x^2 + 250x - 500$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 4. Một hãng xe khách liên tỉnh nhận thấy rằng nếu mỗi ngày khai thác x chuyến xe thì giá vé trung bình của mỗi hành khách được mô hình hóa bởi hàm

$$p(x) = 320 - 4x$$

(nghìn đồng).

Nhận xét nào dưới đây đúng?

A. Giá vé tăng khi số chuyến xe tăng.
B. Giá vé giảm khi số chuyến xe tăng.
C. Giá vé luôn không đổi.
D. Giá vé tỉ lệ thuận với số chuyến xe.

Lời giải

.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 5. Một xưởng sản xuất bàn học thông minh ước tính lợi nhuận (triệu đồng) thu được khi sản xuất x sản phẩm trong một tháng được cho bởi

$$P(x) = -x^2 + 80x - 600.$$

Theo mô hình trên, số sản phẩm cần sản xuất để lợi nhuận đạt lớn nhất là

A. 20. **B.** 30. **C.** 40. **D.** 80.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 6. Một chuỗi cửa hàng cà phê dự kiến tung ra chương trình khuyến mại cho loại cà phê mang đi. Theo khảo sát, nếu mỗi ngày bán được x cốc thì giá bán trung bình của mỗi cốc là

$$p(x) = 65 - 0,05x$$

(nghìn đồng), với $0 < x \leq 600$.

Doanh thu mỗi ngày của chuỗi cửa hàng được biểu diễn bởi công thức nào dưới đây?

A. $R(x) = 65 - 0,05x$. **B.** $R(x) = 65x + 0,05x^2$.

C. $R(x) = 65x - 0,05x^2$. **D.** $R(x) = 65x$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 7. Một công ty logistics vận chuyển hàng hóa giữa các tỉnh. Tổng chi phí vận hành khi thực hiện x chuyến xe trong một ngày được mô hình hóa bởi

$$C(x) = 0,1x^2 + 45x + 180$$

(triệu đồng).

Theo ý nghĩa kinh tế, đại lượng nào sau đây biểu diễn chi phí biên của công ty?

A. $0,2x^2 + 45$. **B.** $0,1x + 45$. **C.** $0,2x + 45$. **D.** $0,2x + 180$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 8. Một doanh nghiệp sản xuất nước giải khát bán hết toàn bộ sản phẩm trong ngày. Doanh thu và tổng chi phí (đơn vị: triệu đồng) lần lượt được cho bởi

$$R(x) = 250x, \qquad C(x) = 0,5x^2 + 120x + 600,$$

trong đó x là số nghìn chai nước giải khát bán ra.

Hàm lợi nhuận của doanh nghiệp là

A. $0,5x^2 + 130x + 600$. **B.** $0,5x^2 - 130x + 600$.

C. $-0,5x^2 + 130x - 600$. **D.** $-0,5x^2 + 250x - 600$.

Lời giải

.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 9. Một khu du lịch sinh thái nhận thấy rằng khi số lượng khách tham quan mỗi ngày tăng thì để thu hút khách, giá vé trung bình phải điều chỉnh theo mô hình

$$p(x) = 180 - 0,2x$$

(nghìn đồng), trong đó x là số khách tham quan.

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Giá vé tăng khi lượng khách tăng.

B. Giá vé không phụ thuộc vào lượng khách.

C. Giá vé giảm khi lượng khách tăng.

D. Giá vé luôn bằng 180 nghìn đồng.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 10. Một doanh nghiệp sản xuất tấm pin năng lượng mặt trời ước tính lợi nhuận (triệu đồng) khi sản xuất x tấm pin trong một tháng được cho bởi

$$P(x) = -2x^2 + 160x - 500.$$

Theo mô hình trên, doanh nghiệp đạt lợi nhuận lớn nhất khi sản xuất

A. 20 tấm pin. **B.** 40 tấm pin. **C.** 60 tấm pin. **D.** 80 tấm pin.

Lời giải

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 11. Một công ty giao hàng sử dụng thiết bị GPS để theo dõi chuyển động của xe tải. Quãng đường xe đi được sau t giờ kể từ khi xuất phát được mô tả bởi hàm số

$$s(t) = 2t^3 + 6t^2 + 5t \quad (0 \le t \le 6),$$

trong đó $s(t)$ được tính bằng kilômét.

Vận tốc tức thời của xe tại thời điểm t được xác định bởi $v(t) = s'(t)$.

A. $v(2) = 29$ km/h. **B.** $v(2) = 37$ km/h. **C.** $v(2) = 41$ km/h. **D.** $v(2) = 53$ km/h.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 12. Trong một thí nghiệm sinh học, số lượng vi khuẩn (đơn vị: nghìn tế bào) sau t giờ được mô hình hóa bởi

$$P(t) = 120e^{0,04t}.$$

Tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t là $P'(t)$.

Giá trị của $P'(0)$ bằng

A. $0,48$. **B.** $2,4$. **C.** $4,8$. **D.** 120.

Lời giải

.....
.....

Câu 13. Một ô tô chuyển động trên đường cao tốc. Vận tốc của xe tại thời điểm t (giây) được cho bởi

$$v(t) = 18 + 4t.$$

Gia tốc tức thời của xe tại thời điểm t được xác định bởi $a(t) = v'(t)$.

Gia tốc của xe bằng

A. $18\,\text{m/s}^2$. **B.** $4\,\text{m/s}^2$. **C.** $22\,\text{m/s}^2$. **D.** $4t\,\text{m/s}^2$.

Lời giải

Câu 14. Một bể chứa nước được bơm vào với lưu lượng thay đổi theo thời gian. Thể tích nước trong bể sau t phút được mô hình hóa bởi

$$V(t) = 0{,}2t^2 + 3t + 15 \quad (0 \le t \le 30),$$

trong đó $V(t)$ tính bằng lít. Tốc độ tăng thể tích nước tại thời điểm t là $V'(t)$.

Tốc độ tăng thể tích nước tại thời điểm $t = 10$ phút là

A. 5 lít/phút. **B.** 6 lít/phút. **C.** 7 lít/phút. **D.** 20 lít/phút.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 15. Sau khi một lượng chất thải hữu cơ bị xả vào hồ, nồng độ oxygen hòa tan trong nước sau t giờ được ước tính bởi

$$C(t) = 6 - \frac{2t}{t+1} \quad (t \geq 0),$$

trong đó $C(t)$ tính bằng mg/l. Đại lượng $C'(t)$ biểu thị tốc độ thay đổi nồng độ oxygen theo thời gian.

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $C'(t) > 0$ với mọi $t \geq 0$, nên nồng độ oxygen luôn tăng.

B. $C'(t) < 0$ với mọi $t \geq 0$, nên nồng độ oxygen giảm theo thời gian.

C. $C'(t) = 0$ với mọi $t \geq 0$, nên nồng độ oxygen không đổi.

D. $C'(t) = \dfrac{2}{(t+1)^2}$ với mọi $t \geq 0$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 16. Một công ty viễn thông thống kê số lượng thuê bao mới sau t tháng kể từ khi triển khai một gói cước mới được mô hình hóa bởi hàm số

$$N(t) = 500 + 40t^2$$

(trong đó $N(t)$ tính bằng thuê bao, $0 \leq t \leq 12$). Khi đó $N'(t)$ biểu thị tốc độ tăng số thuê bao.

Tốc độ tăng số thuê bao sau 6 tháng là

A. 40 thuê bao/tháng. **B.** 120 thuê bao/tháng.
C. 240 thuê bao/tháng. **D.** 480 thuê bao/tháng.

Lời giải

.....

Câu 17. Một xe buýt di chuyển trên tuyến đường nội thành. Vận tốc của xe tại thời điểm t (giây) được cho bởi

$$v(t) = 15 + 0,8t.$$

Gia tốc tức thời của xe là

A. $15\,\text{m/s}^2$. **B.** $0,8\,\text{m/s}^2$. **C.** $15 + 0,8t\,\text{m/s}^2$. **D.** $1,6\,\text{m/s}^2$.

Lời giải

.....

Câu 18. Một phòng thí nghiệm theo dõi nồng độ của một chất phản ứng theo thời gian. Sau t phút, nồng độ của chất được xác định bởi

$$C(t) = 15 - 0,5t^2$$

(mmol/l).

Tốc độ thay đổi nồng độ của chất tại thời điểm $t = 4$ phút bằng

A. -2 mmol/l/phút. **B.** 2 mmol/l/phút.

C. -4 mmol/l/phút. **D.** 4 mmol/l/phút.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 19. Một máy bơm hoạt động liên tục đưa nước vào bể. Thể tích nước trong bể sau t phút được mô hình hóa bởi

$$V(t) = 5t^2 + 20$$

(lít).

Tốc độ bơm nước tại thời điểm $t = 8$ phút là

A. 40 lít/phút. **B.** 60 lít/phút. **C.** 80 lít/phút. **D.** 320 lít/phút.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 20. Một trung tâm bảo tồn theo dõi số lượng chim trong một khu sinh thái. Sau t năm, số lượng chim được ước tính bởi

$$P(t) = 200e^{0,03t}.$$

Khi đó $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng số lượng chim.

Tốc độ tăng trưởng ban đầu của quần thể là

A. $0,03$ con/năm. **B.** 3 con/năm. **C.** 6 con/năm. **D.** 6 con/năm.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Một công ty sau khi ra mắt sản phẩm mới đã ghi nhận lợi nhuận $P(t)$ sau t tháng kinh doanh. Trong năm đầu tiên, giả sử mối liên hệ giữa lợi nhuận và thời gian kinh doanh được mô hình hóa bởi hàm số

$$P(t) = -t^3 + 12t^2 + 60t - 50, \qquad 0 \le t \le 12.$$

a) Lợi nhuận của công ty tại thời điểm $t = 2$ là 110 tỷ đồng.
b) Hàm số biểu thị tốc độ tăng trưởng lợi nhuận $P'(t) = -3t^2 + 24t + 10$.
c) Lợi nhuận của công ty đạt mức tối đa tại thời điểm $t = 10$.
d) Tại thời điểm $t = 4$ thì tốc độ tăng trưởng lợi nhuận là lớn nhất.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 2. Chi phí vận hành trung bình (tính bằng triệu đồng/chuyến) của một công ty vận tải khi vận hành x chuyến xe mỗi ngày được cho bởi hàm số

$$A(x) = 0,2x + 2 + \frac{500}{x}, \qquad 10 \le x \le 100.$$

a) Đạo hàm của hàm chi phí trung bình là $A'(x) = \dfrac{0,2x^2 + 500}{x^2}$.
b) Chi phí trung bình trên mỗi chuyến xe thấp nhất bằng 22 triệu đồng.
c) Nếu do giới hạn về số lượng tài xế khiến công ty chỉ có thể vận hành tối đa 40 chuyến xe mỗi ngày, chi phí trung bình mỗi chuyến xe trong trường hợp này thấp nhất bằng $22,5$ triệu đồng.
d) Tổng chi phí vận hành của công ty vận tải trong một ngày thấp nhất bằng $1,1$ tỷ đồng.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 3. Một nhà sản xuất trung bình bán được 1500 tivi màn hình phẳng mỗi tuần với giá 15 triệu đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 600 nghìn đồng (0,6 triệu đồng), số lượng tivi bán ra sẽ tăng thêm khoảng 120 tivi mỗi tuần. Gọi p (triệu đồng) là giá của mỗi tivi, x là số tivi bán ra mỗi tuần.

a) Hàm cầu là $p = -\dfrac{1}{200}x + \dfrac{45}{2}$ (triệu đồng).

b) Tổng doanh thu từ tiền bán tivi là $f(p) = -200p^2 + 4500p$ (triệu đồng).

c) Công ty giảm giá 3,5 triệu đồng cho người mua thì doanh thu của công ty sẽ lớn nhất.

d) Nếu hàm chi phí hằng tuần là $C(x) = 12000 - \dfrac{7}{2}x$ (triệu đồng), trong đó x là số tivi bán ra trong tuần, nhà sản xuất nên đặt giá bán 9,5 triệu đồng thì lợi nhuận là lớn nhất.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 4. Một cơ sở sản xuất khăn đang bán mỗi chiếc khăn với giá 50 000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 34 000 chiếc. Cơ sở sản xuất có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý nhận thấy rằng nếu từ mức giá 50 000 đồng mà cứ tăng thêm 1 000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn

500 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 32 000 đồng, gọi tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là x (nghìn đồng).

a) Tổng doanh thu trung bình mỗi tháng cơ sở sản xuất thu được khi chưa tăng giá là 1 700 000 nghìn đồng.

b) Số khăn bán ra được mỗi tháng sau khi tăng giá là $34000 - 5x$ chiếc.

c) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì sau khi tăng giá mỗi chiếc khăn lãi 41 nghìn đồng.

d) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì số khăn bán ra giảm 12 500 chiếc.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 5. Một công ty bất động sản ước tính rằng lợi nhuận P (tỉ đồng) thu được từ việc xây dựng x căn hộ cao cấp trong một dự án được cho bởi hàm số

$$P(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 50, \qquad 0 < x < 8.$$

a) Nếu công ty không xây dựng căn hộ nào ($x = 0$) thì công ty vẫn chịu chi phí cố định (lỗ vốn) là 50 tỉ đồng.

b) Hàm lợi nhuận đồng biến trên khoảng $(1; 5)$.

c) Lợi nhuận đạt cực tiểu khi xây dựng 5 căn hộ.

d) Để đạt lợi nhuận lớn nhất, công ty nên xây dựng 5 căn hộ.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 6. Một doanh nghiệp sản xuất và tiêu thụ một loại sản phẩm. Trong một ngày, nếu doanh nghiệp sản xuất và tiêu thụ x sản phẩm ($x \in \mathbb{N}$, $1 \leq x \leq 186$) thì chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm là

$$\overline{C}(x) = x^2 - 6x + 140 + \frac{750}{x}$$

(USD/sản phẩm) và toàn bộ chúng được bán với giá $(1400 - 7,5x)$ (USD) một sản phẩm. Giả sử toàn bộ x sản phẩm sản xuất ra đều được tiêu thụ hết.

a) Số tiền doanh nghiệp thu được là $F(x) = 1400x - 7,5x^2$ (USD).

b) Chi phí doanh nghiệp phải bỏ ra là $C(x) = x^3 - 6x^2 + 140x + 750$ (USD).

c) Lợi nhuận doanh nghiệp thu được là $P(x) = -x^3 - 1,5x^2 + 1260x - 750$ (USD).

d) Lợi nhuận lớn nhất mà doanh nghiệp thu được là 15850 (USD).

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 7. Một xưởng sản xuất một loại sản phẩm A. Phòng kinh doanh đã nghiên cứu và đưa ra các hàm số sau:

- Hàm chi phí sản xuất x sản phẩm là $C(x) = 20x + 1200$
- Hàm giá bán của mỗi sản phẩm (khi bán ra x sản phẩm) là $p(x) = 100 - x$

Đơn vị của x là sản phẩm, đơn vị của chi phí và giá bán là nghìn đồng.

a) Hàm lợi nhuận $P(x)$ thu được từ việc sản xuất và bán x sản phẩm A là $P(x) = -x^2 + 80x - 1200$.

b) Để công ty không bị lỗ, số sản phẩm cần sản xuất và bán ra phải thuộc đoạn $[20; 60]$.

c) Doanh thu của xưởng là một hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 60)$.

d) Nếu chính phủ áp thuế 4 nghìn đồng trên mỗi sản phẩm bán ra thì lợi nhuận tối đa của xưởng sẽ giảm đi 80 nghìn đồng so với khi chưa có thuế.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 8. Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong x tháng được tính theo công thức

$$S(x) = 200\left(5 - \frac{9}{x+2}\right),$$

trong đó $x \geq 1$. Khi đó $S'(x)$ biểu thị tốc độ thay đổi của số lượng sản phẩm bán được theo thời gian.

a) Công ty bán được 775 sản phẩm trong 6 tháng.

b) Đạo hàm $S'(x) = \dfrac{1800}{(x+2)^2}$.

c) Nếu công ty duy trì thời gian bán hàng đủ lâu thì số lượng sản phẩm bán được sẽ vượt mức 1000.

d) Doanh số của công ty tăng trưởng chậm dần theo thời gian.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 9. Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa

$(1 \leq x \leq 18)$. Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:

$$C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500.$$

Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa.

a) Biểu thức tính $B(x)$ theo x là $B(x) = 220x$ (nghìn đồng).

b) Biểu thức tính $L(x)$ theo x là $L(x) = -x^3 + 3x^2 + 220x - 500$ (nghìn đồng).

c) Hộ làm nghề dệt này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày 10 mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa.

d) Lợi nhuận tối đa của hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm có thể đạt được mỗi ngày là 1000 nghìn đồng.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 10. Tại một xí nghiệp chuyên sản xuất vật liệu xây dựng, nếu trong một ngày xí nghiệp sản xuất x m^3 sản phẩm thì phải bỏ ra các khoản chi phí bao gồm: 4 triệu đồng chi phí cố định; 0,2 triệu đồng chi phí cho mỗi mét khối sản phẩm và $0{,}001x^2$ triệu đồng chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết rằng, mỗi ngày xí nghiệp sản xuất được tối đa 100 m^3 sản phẩm. Gọi $C(x)$ là tổng chi phí để xí nghiệp sản xuất x m^3 sản phẩm trong một ngày và $\overline{C}$ là chi phí trung bình trên mỗi mét khối sản phẩm.

a) $\overline{C} = 0{,}2x + 0{,}001x^2$ với $0 \leq x \leq 100$.

b) Tổng chi phí sản xuất 100 m^3 sản phẩm là 34 triệu đồng.

c) $\overline{C} = 0{,}001x + \dfrac{4}{x} + 0{,}2$ với $0 \leq x \leq 100$.

d) $\overline{C}$ có giá trị thấp nhất bằng 0,326 triệu đồng (kết quả làm tròn ba chữ số thập phân).

Lời giải

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 11. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là

$$P(x) = 45 - 0{,}001x^2$$

(triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là

$$C(x) = 100 + 30x$$

(triệu đồng).

a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.

b) Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là 600 triệu đồng.

c) Lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm $(0 \leq x \leq 100)$ cho B được biểu diễn bằng công thức $-0{,}01x^3 + 15x - 100$.

d) A bán cho B khoảng 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 12. Một công ty sau khi mở bán sản phẩm mới đã ghi nhận lợi nhuận $P(t)$ (đơn vị triệu đồng) sau t tháng kinh doanh. Trong năm đầu tiên, giả sử mối liên hệ giữa lợi

nhuận và thời gian kinh doanh được mô hình hóa bởi hàm số

$$P(t) = -t^3 + 15t^2 + mt + 50, \qquad t \in \mathbb{N},\ 1 \le t \le 12,\ m \in \mathbb{R}.$$

Biết sau tháng đầu tiên mở bán, công ty thu được lợi nhuận là 136 triệu đồng.

a) Tốc độ tăng trưởng lợi nhuận của công ty là hàm số $P'(t) = -3t^2 + 30t + 50$.

b) Lợi nhuận của công ty đạt mức tối đa tại thời điểm $t = 3$.

c) Sau 2 tháng mở bán, lợi nhuận công ty thu về được là 246 triệu đồng.

d) Tại thời điểm $t = 5$ thì tốc độ thay đổi lợi nhuận là lớn nhất.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 13. Một cơ sở đóng giày sản xuất mỗi ngày được x đôi giày với $1 \le x \le 50$. Tổng chi phí sản xuất x đôi giày (đơn vị nghìn đồng) là

$$C(x) = x^3 - 90x^2 + 2400x + 900.$$

Giả sử cơ sở này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 600 nghìn đồng/một đôi.

a) Doanh thu của cơ sở khi bán hết 45 đôi giày là 27 triệu đồng.

b) Lợi nhuận thu được trong một ngày lớn nhất khi sản xuất và bán hết 47 đôi giày.

c) Tổng chi phí sản xuất 25 đôi giày là 20 triệu đồng.

d) Tổng chi phí cao nhất trong một ngày là 30 triệu đồng.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 14. Một doanh nghiệp sản xuất ô tô có hàm sản xuất là hàm Cobb-Douglas

$$Q = \sqrt[3]{K^2 L},$$

trong đó K và L lần lượt là số đơn vị vốn và số đơn vị lao động mà doanh nghiệp thuê được, Q là số ô tô sản xuất ra được (đơn vị: chiếc ô tô). Giả sử giá thuê một đơn vị vốn là c_K, giá thuê một đơn vị lao động là c_L, ngoài chi phí thuê lao động và vốn, doanh nghiệp còn phải chịu một chi phí cố định là C_0 (đơn vị: trăm USD). Khi đó hàm số

$$F = c_K K + c_L L + C_0$$

mô tả tổng chi phí mà doanh nghiệp phải bỏ ra. Từ năm 2025 thì doanh nghiệp cố định giá thuê như sau $c_K = 10$, $c_L = 5$ và chi phí cố định $C_0 = 50$. Năm 2026 doanh nghiệp dự định sản xuất 2026 chiếc ô tô. Xét dự định sản xuất năm 2026 của doanh nghiệp.

a) $L = \dfrac{2026^3}{K^2}$.

b) Hàm tổng chi phí là $F = 10K + 5 \cdot \dfrac{2026^3}{K^2} + 50$.

c) $F'(K) = 10 - 5 \cdot \dfrac{2026^3}{K^3}$.

d) Tổng chi phí tối thiểu doanh nghiệp chi ra để sản xuất 2026 chiếc ô tô là 3,44 triệu USD.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 15. Dân số của một quốc gia sau t (năm) bắt đầu từ năm 2023 được tính theo công thức

$$N(t) = 100e^{0{,}012t}$$

(trong đó $N(t)$ được tính bằng triệu người, $0 \leq t \leq 50$) (các kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

a) Dân số của quốc gia này ở năm 2030 vượt mức 110 triệu người.

b) Dân số của quốc gia này ở năm 2035 vượt mức 115 triệu người.

c) Vào năm 2030 tốc độ tăng dân số là $1,6$ triệu người/năm.

d) Vào năm 2026 tốc độ tăng dân số là $1,2$ triệu người/năm.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 16. Tại một khu bảo tồn thiên nhiên các nhà khoa học đã thả một số cá thể của một loài động vật quý hiếm trong một khu rừng rộng 10 héc-ta để theo dõi sự tăng trưởng số lượng của chúng. Họ thấy rằng số lượng cá thể của loài động vật đó sau t năm kể từ khi nuôi tái lập khu bảo tồn được xấp xỉ bởi hàm số

$$h(t) = 70 \log_2 \left(\frac{8t+1}{t+1} \right) + 30$$

(cá thể, t là số thực dương) và tốc độ tăng trưởng số lượng của loài động vật đó tại thời điểm sau đúng t năm kể từ khi nuôi là $h'(t)$ (đơn vị: cá thể/năm).

a) Thời điểm ban đầu, người ta thả nuôi 30 cá thể.

b) Sau 9 năm thống kê thì bắt đầu nuôi, số lượng cá thể của loài động vật đó là 170.

c) Tốc độ tăng trưởng số lượng cá thể của loài động vật đó tại thời điểm đúng 6 năm kể từ khi nuôi là $\dfrac{10}{7}$ (cá thể/năm).

d) Số lượng cá thể của loài động vật đó không vượt quá 240.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....

Câu 17. Một chất điểm chuyển động theo phương trình

$$s(t) = t^3 - 3t^2 + 8t + 1,$$

trong đó t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét.

a) Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3$ s bằng 8 m/s.

b) Tại thời điểm mà chất điểm di chuyển được 13 m, vận tốc khi đó bằng 8 m/s.

c) Vận tốc nhỏ nhất của chất điểm là 5 m/s.

d) Gia tốc tại thời điểm chất điểm đạt vận tốc nhỏ nhất bằng 2 m/s^2.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 18. Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t = 0$ s cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t = 126$ s, cho bởi hàm số

$$s(t) = 0{,}001302t^3 - 0{,}090292t^2 + 23{,}61t - 3{,}083$$

được tính bằng feet/s, 1 feet = 0,3048 m.

a) Vận tốc của tàu con thoi luôn tăng trong khoảng thời gian từ lúc cất cánh đến khi tên lửa đẩy được phóng đi.

b) Gia tốc lớn nhất tàu con thoi có thể đạt được trong lúc thực hiện sứ mệnh trên, làm tròn đến hàng phần trăm, là 62,87 feet/s^2.

c) Gia tốc của tàu con thoi tăng trong khoảng thời gian từ lúc cất cánh đến thời điểm $t = 23$ s.

d) Gia tốc của tàu con thoi tăng trong khoảng thời gian từ $t = 21{,}5$ s đến 126 s.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 19. Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô, biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng được tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức

$$V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4, \quad 0 \le t \le 0{,}5.$$

Gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t, với $0 \le t \le 0{,}5$.

a) Lượng xăng ban đầu trong bình là 1 lít.

b) $V'(t) = 300(2t - 3t^2) + 4$, với $0 \le t \le 0{,}5$.

c) Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất.

d) Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là 41,5 lít.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 20. Thể tích nước (đơn vị: m^3) của một bể bơi sau t phút bơm được cho bởi công thức

$$V(t) = \frac{1}{100}\left(-0{,}5t^3 + 90t^2\right), \quad 0 \le t \le 120.$$

Gọi $v(t) = V'(t)$ là tốc độ bơm nước.

a) Thể tích nước sau 10 phút là 80 m^3.

b) Tốc độ bơm nước tại thời điểm $t = 20$ phút là 30 m^3/phút.

c) Trong 30 phút đầu, thể tích nước lớn nhất trong bể là 675 m^3.

d) Tốc độ bơm nước cao nhất là 60 m^3/phút.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 21. Dân số của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức

$$f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5}$$

($f(t)$ tính bằng nghìn người).

a) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1980 là 18 nghìn người.

b) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1995 là 23 nghìn người.

c) Xét f là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$, vậy hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$.

d) Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Vào năm 1998 thì tốc độ tăng dân số là 0,125 nghìn người/năm.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 22. Dựa vào thiết bị giám sát hành trình của một xe khách di chuyển trên một đường thẳng theo thời gian t (phút), với gốc tọa độ là văn phòng của công ty và chiều dương cho trước, người ta xác định được vị trí của xe tại thời điểm t (phút) được cho bởi hàm số

$$S(t) = \frac{1}{36}t^3 - \frac{1}{6}t^2 \quad (\text{km}), \quad t \in [0;6].$$

Vận tốc của xe tại thời điểm t (phút), với $t \in [0;6]$, là $v(t)$ (km/phút) được tính theo công thức $v(t) = S'(t)$.

a) Sau 1 phút di chuyển, xe cách văn phòng công ty một đoạn $\frac{5}{36}$ km.

b) Vận tốc của xe tại thời điểm $t = 1$ phút là $-\frac{1}{4}$ km/phút.

c) Sau 6 phút di chuyển, xe di chuyển được quãng đường là $\frac{16}{9}$ km.

d) Trong khoảng thời gian từ phút thứ 2 đến phút thứ 4, tốc độ xe đang tăng dần.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 23. Đậu đỏ là một loại thực phẩm quen thuộc trong bữa ăn của người Việt Nam. Ngoài giá trị dinh dưỡng cao, đậu đỏ còn có nhiều công dụng tuyệt vời cho sức khỏe và sắc đẹp như: chống oxy hóa, giúp cơ bắp con người khỏe mạnh, tăng cường sức khỏe cho tim mạch con người, lợi ích cho hệ tiêu hóa, bổ thận, cung cấp vitamin bổ dưỡng cho cơ thể, đào thải độc tố, giải độc, tốt cho hệ miễn dịch, giúp huyết áp ổn định, da đẹp.

Cây đậu đỏ khi trồng có chiều cao 6 cm. Khảo sát cho thấy độ cao tính bằng centimet của cây đậu đỏ tại thời điểm t kể từ khi được trồng được cho bởi hàm số

$$h(t) = -0{,}005t^4 + bt^3 + c$$

(trong đó $b, c \in \mathbb{R}$), với t tính theo tuần. Giả sử $h'(t)$ là tốc độ tăng chiều cao của cây đậu đỏ sau khi trồng (đơn vị của $h'(t)$: cm/tuần). Biết $h'(5) = 5$.

a) Hàm số $h(t)$ có công thức $h(t) = -0{,}005t^4 + 0{,}1t^3$.

b) Giai đoạn tăng trưởng của cây đậu đỏ đó kéo dài 15 tuần.

c) Chiều cao tối đa của cây đậu đỏ đó là 90 cm.

d) Vào thời điểm cây đậu đỏ đó phát triển nhanh nhất thì chiều cao của cây là 56 cm.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 24. Khối lượng của một cá thể sinh vật X theo thời gian t tuần ($t \geq 0$) cho bởi công thức

$$f(t) = 0{,}1 + t^2 e^{-kt}$$

($k \in \mathbb{R}$, đơn vị tính bằng microgram). Biết rằng sinh vật X chỉ sống được đúng 6 tuần và khối lượng của nó lớn nhất tại thời điểm $t = 4$, đúng lúc nó sinh sản.

a) $f'(4) = 0$.

b) $f'(t) = 2te^{-kt}$.

c) $k = \dfrac{1}{2}$.

d) Biết rằng mỗi lần sinh sản, mỗi cá thể X sinh ra 10 cá thể con. Nếu ban đầu ($t = 0$), người ta nuôi một cá thể X vừa mới sinh thì số lượng cá thể X tại thời điểm $t = 17$ là 11000.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 25. Một hạt chuyển động trên một đường thẳng có gắn một trục tọa độ với gốc tọa độ là vị trí bắt đầu chuyển động. Tọa độ của hạt trên trục tại thời điểm t giây kể từ khi xuất phát được cho bởi

$$x(t) = 2t - 3\ln(t+1), \quad t \geq 0.$$

Hàm số $v(t) = x'(t)$ biểu thị vận tốc chuyển động của hạt.

a) Tọa độ của hạt tại thời điểm $t = 3$ giây là 1,84 m.

b) Hạt đứng yên tại thời điểm $t = 0{,}5$ s.

c) $v(t) = 2 - \dfrac{3}{t+1}$.

d) Vận tốc ban đầu của hạt là -1 m/s.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 26. Một chất điểm M chuyển động trên một đường thẳng đi qua O. Để khảo sát chuyển động của M người ta gắn trên đường thẳng đó một trục tọa độ là Ox với O là điểm gốc, mỗi đơn vị trên trục tương ứng với độ dài 1 mét. Xét trong 12 giây đầu tiên, tọa độ $x(t)$ của M tại thời điểm t giây kể từ lúc bắt đầu khảo sát được cho bởi

$$x(t) = -\frac{t^3}{3} + 6t^2 + 4.$$

a) Ban đầu M ở vị trí cách O một khoảng bằng 6 mét.

b) Vận tốc tức thời của M tại thời điểm t giây, $0 \leq t \leq 12$, là $v(t) = -t^2 + 12t$ m/s.

c) Trong suốt 6 giây đầu tiên, vận tốc tức thời của M luôn tăng.

d) Xét trong 12 giây đầu tiên, tính từ lúc bắt đầu khảo sát đến lúc M có vận tốc tức thời lớn nhất thì M đi được một quãng đường dài 148 mét.

Lời giải

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 27. Sự phân hủy của các chất hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hòa tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong hồ nước sau t giờ, $t \geq 0$, khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xác định bởi hàm số

$$y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2+1}.$$

a) Tốc độ thay đổi oxygen trong hồ nước sau t giờ, $t \geq 0$, là $g(t) = \dfrac{130t^2-15}{(9t^2+1)^2}$.

b) Nồng độ oxygen trong hồ nước thấp nhất sau 30 phút khi một lượng rác thải hữu cơ xả vào hồ.

c) Vào thời điểm $t = 2$ thì tốc độ thay đổi nồng độ oxygen trong hồ nước là $\dfrac{52}{1369}$.

d) Vào thời điểm $t = 1$ thì nồng độ oxygen trong hồ nước là 3,5 mg/l.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 28. Để kỷ niệm 70 năm ngày thành lập trường THPT Việt Đức, các cựu học sinh tổ chức phát hành áo kỷ niệm gây quỹ học bổng. Giả sử doanh số (tính bằng số áo bán được) tuần theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số

$$f(t) = \frac{7000}{1+69e^{-t}}, \quad t \geq 0,$$

trong đó thời gian t được tính theo đơn vị ngày, kể từ thời điểm ngày phát hành đầu tiên (11/8/2025).

a) Sau ba ngày kể từ thời điểm ngày phát hành đầu tiên, số áo bán ra vượt quá 2000 chiếc.

b) Tổng số áo được bán ra không vượt quá 7000 chiếc.

c) Ngay tại thời điểm ngày phát hành đầu tiên, số áo được bán ra đã đạt 100 chiếc.

d) Đạo hàm $f'(t)$ biểu thị tốc độ phát hành. Sau 360 giờ kể từ thời điểm phát hành đầu tiên thì tốc độ phát hành là lớn nhất.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 29. Trong một số trường hợp, tin đồn lan truyền và được mô hình hóa bằng hàm số

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}},$$

trong đó $p(t)$ là tỉ lệ dân số biết tin đồn tại thời điểm t (giờ) và a, k là hằng số dương. Giả sử $a = 10$ và $k = 0{,}5$. Khi đó

a) $\lim\limits_{t \to +\infty} p(t) = 1$.

b) Tốc độ lan truyền tin đồn là $p'(t) = \dfrac{10e^{-0{,}5t}}{(1 + 10e^{-0{,}5t})^2}$.

c) Tốc độ lan truyền tin đồn lớn nhất sau 9,2 giờ.

d) Tại thời điểm tin đồn lan truyền với tốc độ lớn nhất thì có 50% dân số biết tin đồn.

Lời giải

.....

.....

.....

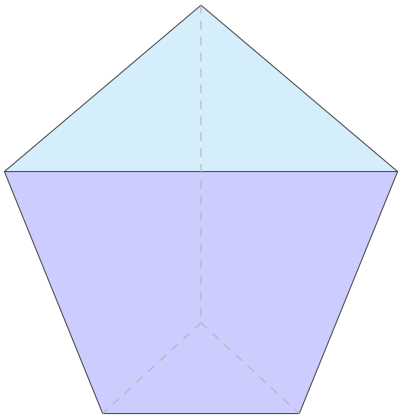
.....

.....

.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 30. Một cái chậu đựng nước có dạng hình chóp cụt đều đáy là các tam giác đều cạnh bằng 1 dm và 3 dm. Chiều cao chậu nước bằng 4 dm. Người ta bơm nước vào chậu với lưu lượng không đổi 0,5 lít/phút.



a) Tốc độ dâng lên của nước giảm dần.

b) Thể tích của chậu là $\dfrac{13\sqrt{3}}{3}$ dm^3.

c) Sau 10 phút bơm thì chiều cao của mực nước bằng 3,27 dm.

d) Đến phút thứ 10 thì tốc độ dâng lên của nước là 4,32 dm/phút.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. (CT - THPTQG 2026). Một công ty nông sản có công suất chế biến không quá 180 tấn nguyên liệu một tháng. Nếu công ty chế biến x tấn nguyên liệu trong một tháng $(1 \leq x \leq 180)$ thì chi phí sản xuất và doanh thu lần lượt là

$$C(x) = 0{,}002x^3 + 30x + 20$$

(triệu đồng) và

$$R(x) = 90x$$

(triệu đồng). Lợi nhuận lớn nhất mà công ty đạt được trong một tháng là bao nhiêu triệu đồng?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Một gia đình đan lưới đánh cá, mỗi ngày đan được x mét lưới $(1 \leq x \leq 18)$. Tổng chi phí sản xuất x mét lưới, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí

$$C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500.$$

Giả sử gia đình làm nghề đan lưới bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét lưới. Hỏi lợi nhuận tối đa của gia đình đan lưới trong một ngày là bao nhiêu nghìn đồng?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....

Câu 3. Nếu một doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm trong một tháng ($x \in \mathbb{N}$; $1 \leq x \leq 300$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm là

$$F(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000$$

(đồng). Trong đó, chi phí vận hành máy móc bình quân cho mỗi sản phẩm khi sản xuất x sản phẩm là

$$G(x) = 300 + \frac{100}{x}$$

(nghìn đồng), chi phí mua nguyên vật liệu để sản xuất x sản phẩm là

$$H(x) = 2x^3 + 100000x - 50000$$

(đồng). Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 4. Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 180 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm ($1 \leq x \leq 180$) thì giá bán của mỗi sản phẩm là

$$f(x) = 35840 - 192x$$

(nghìn đồng) và chi phí sản xuất bình quân trên một sản phẩm là

$$g(x) = 25{,}6x^2 - 153{,}6x + 3072 + \frac{19200}{x}$$

(nghìn đồng). Biết rằng mức thuế trên một sản phẩm là 512 nghìn đồng. Hỏi doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

Lời giải

. . . . . .

Câu 5. Một doanh nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Giả sử khi sản xuất và bán hết x sản phẩm $(0 < x < 2000)$, tổng số tiền doanh nghiệp thu được là

$$F(x) = 2000x - x^2$$

(chục nghìn đồng) và tổng chi phí doanh nghiệp bỏ ra là

$$G(x) = x^2 + 1440x + 50$$

(chục nghìn đồng). Công ty cũng phải chịu mức thuế phụ thu cho 1 đơn vị sản phẩm bán được là t (chục nghìn đồng) $(0 < t < 300)$. Mức thuế phụ thu t là bao nhiêu sao cho nhà nước thu được số tiền thuế phụ thu lớn nhất và doanh nghiệp cũng thu được lợi nhuận nhiều nhất theo đúng mức thuế phụ thu đó? Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.

Lời giải

. . . . . .

Câu 6. Giả sử chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in, ...) được cho bởi công thức

$$C(x) = 0{,}0001x^2 - 0{,}2x + 10000,$$

trong đó $C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. Tỉ số

$$M(x) = \frac{T(x)}{x}$$

được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn và tổng chi phí $T(x)$ (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí. Tìm chi phí trung bình thấp nhất cho một cuốn tạp chí là bao nhiêu vạn đồng, biết rằng nhu cầu hiện tại xuất bản không quá 30000 cuốn?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7. Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung vào chiến lược kinh doanh xe X với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá 31 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang bán chạy này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi theo đó, giá bán mới là bao nhiêu thì lợi nhuận thu được cao nhất?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 8. Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 300000 quả bóng Pickleball. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy có thể sản xuất được 60 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập máy này là 125 ngàn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 90 ngàn đồng một giờ. Số máy móc công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí hoạt động là thấp nhất?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 9. Một cửa hàng kinh doanh máy lọc nước Karofi. Hàm cầu biểu thị liên hệ giữa giá bán của một chiếc máy với số lượng máy bán được trong một tháng là hàm bậc nhất. Khi giá bán là 5 triệu đồng một chiếc thì một tháng bán được 100 chiếc, khi giá bán là 4,5 triệu đồng một chiếc thì một tháng bán được 120 chiếc. Biết chi phí trung bình cho một chiếc máy khi bán được x chiếc là $3+\dfrac{50}{x}$. Hỏi cửa hàng cần bán với giá bao nhiêu triệu đồng một chiếc máy để lợi nhuận thu được trong một tháng lớn nhất?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 10. Sản lượng táo trên mỗi cây khi thu hoạch lệ thuộc vào mật độ cây được trồng. Với cùng một phương pháp chăm sóc như nhau, nếu trên mỗi sào đất được trồng n cây táo thì người ta ước tính trung bình sản lượng táo khi thu hoạch là

$$f(n) = -0{,}06n^2 - 0{,}4n + 320$$

(kg/cây). Biết rằng bình quân chi phí giống và chăm sóc cho mỗi cây táo từ lúc trồng cho đến khi thu hoạch là 560 nghìn đồng. Giá bán mỗi kg táo là 50 nghìn đồng/kg, với giá bán này thì tất cả lượng táo thu hoạch đều được bán hết. Em hãy cho biết nên trồng trung bình bao nhiêu cây táo trên mỗi sào đất để mang về lợi nhuận cao nhất?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 11. Một doanh nghiệp dự định sản xuất x sản phẩm trong một tháng ($x \in \mathbb{N};\ 100 \leq x \leq 800$). Tổng doanh thu khi bán hết x sản phẩm đó là

$$F(x) = -0{,}001x^3 + 0{,}6x^2 + 500x + 100000$$

(nghìn đồng). Chi phí để sản xuất bình quân cho mỗi sản phẩm là

$$G(x) = 0{,}0002x^2 + \frac{40000}{x}$$

(nghìn đồng) và chi phí để mua nguyên vật liệu khi chưa chiết khấu là

$$H(x) = -\frac{4}{49}x^2 + \frac{750}{49}x + \frac{1500000}{49}$$

(nghìn đồng). Công ty cung cấp nguyên vật liệu giảm 2% tổng tiền mua nguyên vật liệu cho doanh nghiệp đó. Trong một tháng, doanh nghiệp đó cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

Lời giải

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 12. Tại một công ty sản xuất đồ chơi an toàn cho trẻ em, công ty phải chi 34567 USD để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất được một sản phẩm đồ chơi X, công ty phải trả 8 USD cho nguyên liệu ban đầu và nhân công. Gọi x $(x \geq 1)$ là số đồ chơi X mà công ty đã sản xuất và $C(x)$ là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x đồ chơi X. Khi đó chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi X là hàm số $\overline{C}(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ xác định trên $[1;+\infty)$. Khi số đồ chơi sản xuất tăng lên thì chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi X giảm xuống nhưng không xuống dưới mức tối thiểu là bao nhiêu USD?

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 13. Năm 2025, một cửa hàng cần nhập về tổng cộng 600 chiếc điện thoại. Cửa hàng sẽ nhận theo nhiều lô hàng, mỗi lô hàng chứa số lượng điện thoại bằng nhau. Chi phí vận chuyển là 50 USD cho mỗi lô hàng, cộng thêm một loại phí vận chuyển nữa là 3 USD cho mỗi chiếc điện thoại và phí này cả năm chỉ tính cho lần vận chuyển đầu tiên. Hỏi cửa hàng đó nên nhập mỗi lô hàng bao nhiêu chiếc điện thoại để chi phí vận chuyển cả năm 2025 thấp nhất?

Lời giải

.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 14. Bác An có một cửa hàng chuyên bán buôn bưởi Đoan Hùng. Nếu bán mỗi kilogram bưởi với giá 30 nghìn đồng thì mỗi tuần có 60 đơn hàng và mỗi đơn hàng mua 100 kilogram. Nếu cứ tăng giá mỗi kilogram bưởi thêm 2 nghìn đồng thì hằng tuần số đơn hàng giảm 4 đơn, đồng thời số lượng bưởi mà mỗi đơn hàng đặt mua cũng giảm đi 2 kilogram. Hỏi bác cần bán mỗi kilogram bưởi với giá bao nhiêu nghìn đồng để lợi nhuận hằng tuần thu được là lớn nhất, biết giá nhập mỗi kilogram bưởi là 24 nghìn đồng và giá bán không vượt quá 50 nghìn đồng/kg? Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 15. Trên một khúc sông có dòng nước lặng, một chiếc tàu chạy với tốc độ không đổi. Chi phí nhiên liệu gồm hai phần: phần thứ nhất không phụ thuộc vào tốc độ và mất 630 nghìn đồng/giờ; phần thứ hai tỉ lệ thuận với bình phương của tốc độ, khi $v = 10$ km/h thì chi phí phần thứ hai là 70 nghìn đồng/giờ. Tìm tốc độ của tàu để tổng chi phí nhiên liệu khi tàu chạy 1 km trên sông là ít nhất. Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.

Lời giải

.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 16. Một xe ô tô chở khách du lịch có sức chứa tối đa là 16 hành khách. Trong một khu du lịch, một đoàn khách gồm 22 người đang đi bộ và muốn thuê xe về khách sạn. Lái xe đưa ra thỏa thuận với đoàn khách du lịch như sau: Nếu một chuyến xe chở x người thì giá tiền cho mỗi người là

$$\frac{(40-x)^2}{2}$$

nghìn đồng. Với thỏa thuận như trên thì lái xe có thể thu được nhiều nhất bao nhiêu triệu đồng từ một chuyến chở khách? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 17. Một trung tâm thương mại bán 2500 ti vi mỗi năm. Chi phí gửi trong kho là 100000 đồng một cái ti vi mỗi năm. Để đặt hàng, chi phí cố định cho mỗi lần đặt là 200000 đồng cộng thêm 90000 đồng mỗi cái ti vi. Trung tâm nên đặt hàng n lần trong mỗi năm và mỗi lần m cái để chi phí hàng tồn kho là ít nhất. Biết rằng mỗi lần đặt hàng về chỉ có một nửa trong số đó được trưng bày ở cửa hàng. Tính giá trị biểu thức

$$T = 20m + 25n.$$

Lời giải

.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 18. Một cơ sở sản xuất sữa hạt chất lượng cao có thể sản xuất được tối đa 300 lít mỗi ngày. Chi phí sản xuất x lít sữa mỗi ngày bao gồm: chi phí nhân công là 1 triệu đồng/ngày; chi phí nguyên vật liệu, đóng chai, bao bì là 35 nghìn đồng cho một lít sữa; chi phí bảo dưỡng máy móc là

$$C_b(x) = 0{,}00001x^2$$

triệu đồng. Ngoài ra, nếu x lít sữa sản xuất mỗi ngày vượt 200 lít thì phát sinh thêm chi phí vận hành quá tải là

$$C_v(x) = 0{,}00003(x - 200)^3$$

triệu đồng. Giá bán mỗi lít sữa là 60 nghìn đồng. Biết cơ sở bán hết lượng sữa sản xuất trong ngày. Hỏi mỗi ngày cơ sở có lợi nhuận đạt được nhiều nhất là bao nhiêu triệu đồng? Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 19. Một tập đoàn dự định đầu tư tổng số vốn là 20 tỷ đồng để phát triển hai dự án công nghệ A và B. Biết rằng khoản chi phí cơ sở hạ tầng cố định ban đầu là 4 tỷ đồng. Số vốn còn lại được phân bổ cho hai dự án A và B. Lợi nhuận kỳ vọng của dự án A khi đầu tư x tỷ đồng là

$$L_A(x) = -x^2 + 12x.$$

Lợi nhuận kỳ vọng của dự án B khi đầu tư y tỷ đồng là

$$L_B(y) = -y^2 + 20y.$$

Để tổng lợi nhuận kỳ vọng đạt giá trị lớn nhất thì tập đoàn nên phân bổ vốn cho dự án A bao nhiêu tỷ đồng?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 20. Một công ty đang triển khai chiến dịch quảng cáo sản phẩm mới. Số tiền đầu tư quảng cáo là A (triệu đồng). Theo kết quả nghiên cứu thị trường, số lượng sản phẩm bán ra phụ thuộc vào chi phí quảng cáo theo hàm

$$q(A) = 1000 + \frac{1013}{5}\ln(1 + A).$$

Biết rằng, chi phí sản xuất mỗi sản phẩm là 10 triệu đồng và giá bán mỗi sản phẩm là 20 triệu đồng. Giá trị lợi nhuận tối đa mà công ty có thể đạt được là bao nhiêu tỉ đồng? Làm tròn đến hàng phần mười.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 21. Theo thống kê tại một nhà máy Z, nếu áp dụng tuần làm việc 40 giờ thì mỗi tuần có 100 tổ công nhân đi làm và mỗi tổ công nhân làm được 120 sản phẩm trong một giờ. Nếu tăng thời gian làm việc thêm 2 giờ mỗi tuần thì sẽ có 1 tổ công nhân nghỉ việc

và năng suất lao động giảm 5 sản phẩm/1 tổ/1 giờ. Ngoài ra, số phế phẩm mỗi tuần ước tính là

$$P(x) = \frac{95x^2 + 120x}{4},$$

với x là thời gian làm việc trong một tuần. Nhà máy cần áp dụng thời gian làm việc mỗi tuần mấy giờ để số lượng sản phẩm thu được mỗi tuần là lớn nhất?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 22. Một xưởng in có 18 máy in, mỗi máy in in được 3500 bản in trong một giờ. Chi phí để vận hành ban đầu cho một máy trong mỗi lần in là 80000 đồng. Chi phí cho n máy hoạt động trong một giờ là $(60n + 100)$ nghìn đồng. Hỏi nếu in 70000 tờ quảng cáo thì phải sử dụng bao nhiêu máy in để được lãi nhiều nhất?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 23. Một công ty tái chế vận chuyển nguyên vật liệu gồm giấy và bìa carton từ thành phố A đến một nhà máy chế biến ở thành phố B dọc theo một tuyến đường cao tốc. Tốc độ tối đa cho phép trên đường cao tốc là 120 km/h và tốc độ tối thiểu là 60 km/h. Gọi tốc độ xe tải vận chuyển nguyên vật liệu của công ty là x km/h. Biết rằng loại xe tải mà

công ty đang sử dụng có tốc độ tiêu thụ nhiên liệu là

$$12 + \frac{x^2}{450}$$

lít mỗi giờ và loại nhiên liệu này có giá 20000 đồng/lít. Đồng thời, công ty trả lương cho tài xế 120000 đồng mỗi giờ lái xe. Xe tải nên được lái với tốc độ bao nhiêu km/h để chi phí mà công ty phải trả cho toàn bộ việc vận chuyển là ít nhất?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 24. Một đại lý nhập khẩu trái cây tươi để phân phối cho các cửa hàng. Mỗi lần nhập khẩu trái cây, khoản chi phí vận chuyển không đổi là 25 triệu đồng. Chi phí bảo quản mỗi tạ trái cây dự trữ trong kho là 80 nghìn đồng/ngày. Thời gian bảo quản trái cây trong kho tối đa 10 ngày. Biết rằng, kể từ ngày đầu tiên nhập hàng, đại lý sẽ phân phối tới các cửa hàng 25 tạ trái cây mỗi ngày. Mỗi lần nhập hàng, đại lý phải nhập đủ trái cây cho bao nhiêu ngày phân phối để chi phí trung bình cho mỗi ngày là thấp nhất?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 25. Giả sử giá của một cổ phiếu nào đó, tính bằng euro, trong một ngày nhất định có 8 giờ giao dịch được mô tả bởi hàm số

$$f(x) = 35{,}7 \cdot \frac{x+2}{x^2+21}, \quad x \in [0;8],$$

trong đó x là thời gian tính bằng giờ kể từ khi phiên giao dịch mở cửa. Nếu một người mua 100 cổ phiếu và bán chúng ngay trong ngày này thì người đó có lợi nhuận tối đa là bao nhiêu euro?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 26. Theo kết quả thăm dò trước một buổi biểu diễn văn nghệ ngoài trời, nếu giá bán mỗi vé là p nghìn đồng thì sẽ có x người mua vé xem biểu diễn, giữa p và x có mối liên hệ

$$p = 500e^{-0{,}0005x}.$$

Đơn vị tổ chức nên bán vé với giá bao nhiêu nghìn đồng thì đạt được doanh thu cao nhất?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 27. Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 400 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm $(1 \leq x \leq 400)$ thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm là

$$F(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000.$$

Trong đó, chi phí vận hành máy móc cho mỗi sản phẩm là

$$G(x) = \frac{100000x^3}{2x+1}$$

đồng. Tổng chi phí mua nguyên vật liệu là

$$H(x) = 2x^3 + 100000x - 50000$$

đồng nhưng do doanh nghiệp mua với số lượng lớn nên được giảm 1% cho 200 sản phẩm đầu tiên doanh nghiệp sản xuất và giảm 2% cho sản phẩm tiếp theo. Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 28. Một công ty chuyên phát nhanh cần vận chuyển một lô hàng trên quãng đường dài 200 km bằng một xe tải. Giả sử rằng xe chạy với vận tốc không đổi bằng v km/h trên suốt quãng đường đó với mức tiêu thụ dầu của xe được mô hình hóa bởi hàm số

$$C(v) = \frac{5}{v} + \frac{v}{512}$$

lít/km. Biết chi phí trả cho tài xế là 150 nghìn đồng/giờ và giá dầu là 20 nghìn đồng/lít. Hỏi chi phí thấp nhất, tính bằng nghìn đồng, bao gồm tiền công trả cho tài xế và tiền dầu, cho chuyến vận chuyển hàng đó là bao nhiêu?

Lời giải

.....
.....
.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 29. Một công ty công nghệ sản xuất linh kiện điện tử. Chi phí sản xuất x linh kiện được tính theo công thức

$$C(x) = 0{,}5x^2 + 200x + 5000$$

(USD). Khách hàng ký hợp đồng bao tiêu sản phẩm với mức giá như sau:

- Với 500 sản phẩm đầu tiên được mua với giá 1000 USD/sản phẩm.
- Từ sản phẩm thứ 501 trở đi, giá thu mua là 800 USD/sản phẩm.

Để điều tiết sản xuất, Nhà nước áp đặt một mức thuế phụ thu là t USD trên mỗi đơn vị sản phẩm, nhưng chỉ áp dụng cho những sản phẩm từ thứ 501 trở đi và khi thu thuế thì mong muốn số tiền phụ thu lớn nhất. Với cách tính thuế và yêu cầu như vậy, doanh nghiệp nên sản xuất bao nhiêu linh kiện để lợi nhuận thu được lớn nhất?

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 30. Một doanh nghiệp kinh doanh một loại sản phẩm T được sản xuất trong nước. Qua nghiên cứu thấy rằng nếu chi phí sản xuất mỗi sản phẩm T là x USD thì số sản phẩm T các nhà máy sản xuất sẽ là

$$R(x) = 30x - 200$$

và số sản phẩm T mà doanh nghiệp bán được trên thị trường trong nước sẽ là

$$Q(x) = 3000 - 10x.$$

Số sản phẩm còn dư doanh nghiệp xuất khẩu ra thị trường quốc tế với giá bán mỗi sản phẩm ổn định là 150 USD. Nhà nước đánh thuế trên mỗi sản phẩm xuất khẩu là a USD và luôn đảm bảo tỉ lệ giữa lợi nhuận từ việc xuất khẩu của doanh nghiệp và thuế thu được của nhà nước tương ứng là $4:1$. Hãy tìm giá trị của a biết lợi nhuận mà doanh nghiệp thu được từ việc xuất khẩu là nhiều nhất.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 31. Một công ty vận tải có thể huy động tối đa 10 xe tải để chuyển 60 tấn hàng hóa đến một địa điểm. Mỗi xe tải có thể chở 3 tấn hàng trong một chuyến đi và mất 1 giờ để hoàn tất một chuyến. Chi phí khởi động để điều một xe tải là 100 nghìn đồng. Ngoài ra, khi cùng chạy, n xe tải tốn chi phí nhiên liệu mỗi giờ là

$$15(2n+5)$$

nghìn đồng. Công ty đang tính toán để sử dụng một số lượng xe tải sao cho tổng chi phí vận chuyển là thấp nhất. Chi phí thấp nhất ấy là bao nhiêu nghìn đồng cho đợt vận chuyển hàng nói trên?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 32. Từ năm 2004 đến năm 2019, doanh thu $R(t)$, tính bằng triệu đô la, của McDonald's có thể được mô hình hóa bởi

$$R(t) = -130{,}769t^3 + 2296{,}47t^2 - 11493{,}5t + 35493, \quad 4 \leq t \leq 19,$$

trong đó t là đại diện cho năm, với $t = 4$ tương ứng với năm 2004. Biết rằng $R'(t)$ là hàm tốc độ doanh thu theo thời gian. Tốc độ thay đổi doanh thu của McDonald's lớn nhất vào năm nào?

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 33. Công ty X cần vận chuyển một lượng lớn hàng hóa từ nhà kho A đến cửa hàng B, lượng hàng hóa chia ra thành nhiều chuyến đi bằng một xe tải có tải trọng tối đa là 50 tấn. Biết rằng để bốc xếp x tấn hàng hóa từ nhà kho A lên xe cần thời gian

$$\frac{x}{60 - x}$$

giờ. Sau khi xe đến B, để di chuyển mỗi tấn hàng từ xe xuống cửa hàng B cần thời gian 3 phút. Tổng thời gian trung bình di chuyển từ nhà kho A đến cửa hàng B và quay về A là 1,2 giờ. Em hãy cho biết trong mỗi chuyến đi, xe nên vận chuyển bao nhiêu tấn hàng để khối lượng hàng hóa được vận chuyển trung bình trên mỗi giờ là lớn nhất? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....

Câu 34. Một thí sinh dành 40 phút để làm 21 câu hỏi mức độ vận dụng và vận dụng cao trong đề thi tốt nghiệp THPT Quốc Gia môn Toán, bao gồm 14 câu hỏi vận dụng và 7 câu hỏi vận dụng cao. Nếu dành x phút cho các câu hỏi vận dụng thì tổng điểm thí sinh đạt được cho nhóm câu hỏi vận dụng là

$$\frac{14x}{5(x+1)},$$

còn nếu dành y phút cho các câu hỏi vận dụng cao thì tổng điểm thí sinh đạt được cho nhóm câu hỏi vận dụng cao là

$$\frac{14y}{5(3y+1)}.$$

Hỏi thí sinh này nên dành bao nhiêu phút cho nhóm câu hỏi vận dụng cao để tổng điểm đạt được là lớn nhất?

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 35. Công ty chứng khoán VNStock cần xử lý 18000 lệnh giao dịch trong một ngày làm việc (8 giờ). Hệ thống gồm các máy chủ xử lý với thông số như sau:

- Năng suất 250 lệnh/giờ/máy.
- Chi phí triển khai 15 triệu đồng/máy.
- Chi phí vận hành điện và bảo trì 120000 đồng/giờ/máy.
- Chi phí nhân viên giám sát 8 triệu đồng/giờ.

Tìm chi phí thấp nhất mà công ty phải bỏ ra để thực hiện số lượng giao dịch trên (làm tròn đến hàng đơn vị của triệu đồng).

Lời giải

. . . . . .

Câu 36. Một công ty muốn đầu tư vào hệ thống điện mặt trời có công suất x (đơn vị tính: MW). Theo nghiên cứu cho thấy một số thông tin sau: Chi phí đầu tư ban đầu là

$$C_1(x) = 140 + 55x$$

(tỷ đồng). Doanh thu hằng năm là

$$R(x) = 28x - 0{,}15x^2$$

(tỷ đồng/năm). Chi phí vận hành hằng năm là

$$C_2(x) = 12 + 0{,}35x + 0{,}012x^2$$

(tỷ đồng/năm). Hãy tìm công suất x (làm tròn đến hàng đơn vị) để tối đa hóa lợi nhuận trên đầu tư, được tính là tỷ lệ lợi nhuận hằng năm trên chi phí đầu tư ban đầu.

Lời giải

. . . . . .

Câu 37. Một công ty kinh doanh dịch vụ nghỉ dưỡng nhận thấy rằng: Nếu áp dụng mức giá 3 triệu đồng/người/ngày thì mỗi tháng có 140 khách đến nghỉ và mỗi khách sẽ nghỉ

12 ngày. Nếu cứ tăng giá thêm 500 nghìn đồng/người/ngày thì hằng tháng số khách đến nghỉ sẽ giảm đi 6 người và thời gian lưu trú của mỗi khách cũng giảm 2 ngày. Ngược lại, nếu cứ giảm 500 nghìn đồng/người/ngày thì hằng tháng số khách đến nghỉ sẽ tăng thêm 6 người và thời gian lưu trú của mỗi khách cũng tăng thêm 2 ngày. Hỏi công ty cần áp dụng mức giá bao nhiêu triệu đồng/người/ngày để lợi nhuận hằng tháng thu được là lớn nhất, biết tổng chi phí công ty phải chi cho một ngày lưu trú của mỗi người khách là 2 triệu đồng và số du lịch không cho công ty vượt quá 10 triệu đồng/người/ngày (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 38. Một công ty công nghệ cung cấp gói lưu trữ dữ liệu doanh nghiệp với giá niêm yết 200000 đồng/tháng và đang có 400 khách hàng. Phòng kinh doanh xác định được quy luật: Cứ giảm giá 10000 đồng thì sẽ có thêm 50 khách hàng mới. Tuy nhiên, do biến tượng quá tải băng thông, chi phí vận hành $C(n)$ theo số khách hàng n được xác định bởi

$$C(n) = 28n + 0{,}01n^2 + 15000.$$

Công ty cần chốt giá bán bao nhiêu nghìn đồng để lợi nhuận đạt mức tối đa?

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 39. Để hạn chế vi phạm thời gian làm việc đối với công nhân, giám đốc công ty quyết định xử lý bằng cách phạt tiền. Nhờ sự giám sát chặt chẽ của quản đốc, giám đốc công ty biết được trong một tháng, giữa tỉ lệ công nhân vi phạm đúng k lần $(1 \leq k \leq 2)$ là $t_k = \dfrac{N_k}{N}$, trong đó N_k là số công nhân vi phạm đúng k lần, N là tổng số công nhân và mức phạt mỗi lần vi phạm có mối liên hệ như sau: Nếu mỗi công nhân nộp phạt x nghìn đồng $(60 \leq x \leq 300)$ khi vi phạm lần thứ nhất và nộp phạt $x - 20$ nghìn đồng khi vi phạm lần thứ hai thì

$$t_1 = \frac{36}{x + 10}, \qquad t_2 = \frac{4}{x - 30}.$$

Biết rằng N không đổi và bằng 2400. Tổng số tiền nộp phạt trong một tháng ít nhất là bao nhiêu triệu đồng?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 40. Việt Nam đang triển khai dự án đường sắt tốc độ cao chặng Thành phố Hồ Chí Minh – Nha Trang với tổng chiều dài quãng đường là 375 km. Tổng công ty đường sắt cần xác định vận tốc khai thác v (km/h) cho đoàn tàu $(200 \leq v \leq 350)$ để đạt lợi nhuận cao nhất cho mỗi chuyến tàu. Qua các số liệu tính toán kỹ thuật và khảo sát thị trường, ta có các thông tin sau: Chi phí điện năng tiêu thụ cho toàn bộ hành trình được tính toán chính xác theo công thức $C_1(v) = 15v^2$ (nghìn đồng). Chi phí vận hành cố định bao gồm nhân sự, khấu hao thiết bị và bảo trì đường ray tính cho mỗi giờ tàu chạy là 250 triệu đồng/giờ. Số lượng khách mua vé cho mỗi chuyến tàu phụ thuộc vào vận tốc v theo hàm số $N(v) = 4v$ khách. Giá vé bình quân cố định cho toàn chặng là 1500000 đồng/khách. Xác định vận tốc khai thác v để lợi nhuận ròng của một chuyến tàu là lớn nhất.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 41. Một xưởng sản xuất robot hút bụi thông minh đang trong giai đoạn tăng tốc. Số lượng robot sản xuất mỗi tháng là x chiếc, với $x \in \mathbb{N}^*$ và $10 \leq x \leq 500$. Mỗi robot được bán với giá cố định là 12 triệu đồng, tổng chi phí sản xuất mỗi tháng là

$$C(x) = 150e^{0,0005x} + 450$$

(triệu đồng). Để xưởng đạt lợi nhuận tối thiểu là 1,5 tỷ đồng mỗi tháng, xưởng cần sản xuất và tiêu thụ ít nhất bao nhiêu robot một tháng?

Lời giải

Câu 42. Một doanh nghiệp cần sản xuất một mặt hàng trong 10 ngày và phải sử dụng hai máy A và B. Máy A làm việc trong x ngày và cho số tiền lãi là $x^2 + 2x$ (triệu đồng), máy B làm việc trong y ngày và cho số tiền lãi là $326y - 27y^2$ (triệu đồng). Hỏi doanh nghiệp đó cần sử dụng máy A trong bao nhiêu ngày sao cho số tiền lãi là nhiều nhất? Biết rằng hai máy A và B không đồng thời làm việc, máy B làm việc không quá 6 ngày.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 43. Một nhà hàng có tổng cộng 30 nhân viên. Mỗi nhân viên khi làm tăng ca được trả mức lương cố định là 400 USD/tháng. Nếu có thêm một nhân viên tăng ca, mức lương của tất cả các nhân viên tăng ca sẽ được tăng thêm 2% so với mức lương cố định. Bên cạnh tiền lương cho nhân viên thì tiền điện nước và duy trì cơ sở vật chất là cố định 8000 USD/tháng. Biết nhà hàng có doanh thu trung bình từ khách hàng là 10000 USD/tháng. Ngoài ra, mỗi nhân viên tăng ca trung bình sẽ được khách hàng tip 800 USD/tháng. Tuy nhiên toàn bộ tiền tip phải được nộp lại cho chủ nhà hàng và khoản tiền này sẽ được tính vào doanh thu của nhà hàng. Để lợi nhuận của nhà hàng đạt lớn nhất thì số nhân viên tăng ca là bao nhiêu?

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 44. Để sản xuất một mặt hàng phục vụ ngày tết, một doanh nghiệp có kế hoạch vay ngắn hạn số tiền 150 triệu đồng trong vòng 1 tháng, với lãi suất là 4%/tháng. Tổng chi phí để sản xuất và kinh doanh x sản phẩm là

$$V(x) = 1,4x - 600 + \frac{50000}{x}$$

(đơn vị: triệu đồng), với x là số nguyên dương. Biết rằng giá bán một sản phẩm là $1,2$ triệu đồng, doanh nghiệp chịu thuế thu nhập là 17% tính trên tổng lợi nhuận thu được sau khi sản xuất và bán hết x sản phẩm. Hỏi sau 1 tháng sản xuất và kinh doanh như trên, doanh nghiệp trả hết phần nợ vay ngắn hạn thì còn số tiền lợi nhuận nhiều nhất là bao nhiêu (đơn vị: triệu đồng)?

Lời giải

. . . . . .

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 45. Một doanh nghiệp chuyên sản xuất ô tô hạng sang, biết nhu cầu của thị trường và chi phí của loại sản phẩm này lần lượt là

$$Q = 5000 - \frac{P}{3}, \qquad C(Q) = Q^2 + 2200Q + 500,$$

trong đó Q là số sản phẩm và P là giá bán của một sản phẩm. Giả sử Nhà nước đánh thuế đặc biệt t (triệu đồng) trên mỗi đơn vị sản phẩm. Với mỗi mức thuế t, doanh nghiệp lựa chọn sản lượng Q để lợi nhuận đạt lớn nhất. Hãy xác định mức sản lượng Q mà doanh nghiệp sẽ sản xuất nếu Nhà nước chọn mức thuế t sao cho số tiền thuế thu được là lớn nhất.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 46. Một doanh nghiệp sản xuất thiết bị điện tử thông minh có quy trình vận hành và chính sách thuế như sau: Trong mỗi tháng, doanh nghiệp phải chi trả một khoản chi phí cố định 200 triệu đồng, khoản chi phí này không phụ thuộc vào số lượng sản phẩm sản xuất. Ngoài ra, để hoàn thiện mỗi sản phẩm, doanh nghiệp phải chịu chi phí biến đổi 1 triệu đồng cho mỗi sản phẩm. Mỗi sản phẩm được bán ra thị trường với giá 3 triệu đồng một sản phẩm.

Nhằm khuyến khích gia tăng quy mô sản xuất, cơ quan quản lý áp dụng chính sách thuế tính theo tổng doanh thu trong tháng, với mức thuế suất giảm dần theo sản lượng.

Nếu doanh nghiệp bán dưới 100 sản phẩm trong tháng, thuế suất là 10% tổng doanh thu. Nếu bán từ 100 đến dưới 300 sản phẩm, thuế suất là 8% tổng doanh thu. Nếu bán từ 300 sản phẩm trở lên, thuế suất là 5% tổng doanh thu.

Gọi x là số lượng sản phẩm doanh nghiệp sản xuất và bán ra trong một tháng ($x \in \mathbb{N}^*$). Tìm số sản phẩm tối thiểu để doanh nghiệp bắt đầu có lãi.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 47. Một công ty công nghệ GigaCloud chuẩn bị ra mắt dịch vụ lưu trữ đám mây cao cấp dành riêng cho các doanh nghiệp lớn. Qua phân tích dữ liệu lớn (Big Data), các chuyên gia kinh tế của công ty xác lập được mô hình cầu như sau: Nếu định giá gói cước hằng tháng là x (triệu đồng) thì số lượng doanh nghiệp đăng ký sử dụng S (nghìn doanh nghiệp) sẽ là

$$S(x) = \sqrt{45 - x} \qquad (\text{với } x < 45).$$

Chi phí vận hành hệ thống của GigaCloud bao gồm hai khoản:

- Chi phí cố định là 10 tỷ đồng mỗi tháng (cho cơ sở hạ tầng, nhân sự cốt lõi).
- Chi phí vận hành. Đặc thù bảo mật dữ liệu khiến số lượng khách hàng tăng lên thì chi phí băng thông và bảo trì tăng theo cấp số nhân. Cụ thể, chi phí này tỉ lệ thuận với bình phương số lượng khách hàng

$$C_v = 3S^2$$

(tỷ đồng).

Hãy xác định mức giá cước x mà GigaCloud cần niêm yết để đạt lợi nhuận ròng hằng tháng cao nhất.

Lời giải

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 48. Một công ty khai thác tuyến tàu cao tốc chở khách du lịch từ đất liền ra đảo với khoảng cách 60 km. Giả sử tàu di chuyển với vận tốc v không đổi trên suốt tuyến đường. Chi phí vận hành cho mỗi giờ hoạt động của tàu bao gồm:

- Chi phí nhiên liệu: $100v^3$ đồng, với v (km/h) là vận tốc của tàu ($v > 0$).
- Chi phí cố định (lương thủy thủ đoàn, khấu hao, bến bãi, ...): 4000000 đồng.

Để đảm bảo chất lượng dịch vụ, thời gian di chuyển mỗi chuyến không được vượt quá 1 giờ 30 phút. Đồng thời, vì lý do an toàn hàng hải, tàu không được chạy quá 55 km/h. Tàu có sức chứa tối đa 150 hành khách và giả sử rằng số lượng khách trên mỗi chuyến đi luôn đạt mức tối đa. Ban giám đốc thiết lập mục tiêu lợi nhuận thu được từ mỗi chuyến đi bằng 25% tổng chi phí vận hành của chuyến đó. Để đạt được mức lợi nhuận này trong điều kiện tàu được vận hành với tổng chi phí thấp nhất, giá vé mỗi hành khách phải trả là bao nhiêu nghìn đồng?

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 49. Trong kế hoạch khai thác tuyến ca nô cao tốc phục vụ du lịch sinh thái trên vùng lòng hồ Thủy điện Sơn La từ bến Mường La đi Quỳnh Nhai có chiều dài 100 km. Ban quản lý cần xác định vận tốc khai thác v (km/h) cho ca nô ($30 \leq v \leq 70$) để đạt lợi

nhuận kinh tế cao nhất. Các thông số được xác định như sau: Công suất tiêu thụ điện của động cơ ca nô là

$$P(v) = 10v^3 \text{ (W)}.$$

Giá điện kinh doanh tại bến sạc là 2000 đồng/kWh. Chi phí vận hành cố định gồm lương nhân lực lái tàu, khấu hao và bến bãi được tính là 2500000 đồng cho mỗi giờ ca nô chạy. Số lượng khách mua vé cho mỗi chuyến phụ thuộc vào vận tốc khai thác theo hàm số

$$N(v) = \frac{v}{5} + 20.$$

Giá vé bình quân cho tuyến này là 500000 đồng/khách. Hãy xác định vận tốc khai thác v để lợi nhuận ròng của mỗi chuyến ca nô trên tuyến này là lớn nhất. Biết công thức tính điện lượng tiêu thụ là $A = P(v) \cdot t$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 50. Chi phí đầu tư ban đầu để xây dựng một nhà máy sản xuất xe máy điện là 840 tỷ đồng. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng lượng cầu đối với dòng xe này phụ thuộc vào giá bán theo hàm số

$$x = 100 - 2p,$$

trong đó p (triệu đồng) là giá niêm yết của mỗi chiếc và x (nghìn chiếc) là số lượng xe bán ra trong một năm. Chi phí để sản xuất x nghìn chiếc xe trong một năm, không bao gồm vốn đầu tư xây dựng nhà máy, được cho bởi

$$S(x) = 0{,}5x^2 + 10x + 50$$

(tỷ đồng). Biết rằng nhà máy phải đóng thuế thu nhập doanh nghiệp là 20% trên lợi nhuận hằng năm. Hỏi với chiến lược giá tối ưu, nhà máy sẽ thu hồi được toàn bộ vốn đầu tư ban đầu sau bao nhiêu năm hoạt động?

Lời giải

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 51. Hãng Xtul Air – Công ty chuyên về các chuyến bay thuê chuyến vừa có hoạt động thâm nhập thị trường Việt Nam. Hãng đã cho ra mắt dịch vụ sử dụng máy bay riêng của Xtul Air, trong đó có chiếc Gulfstream G650 là máy bay phản lực thương mại lớn, sức chứa tối đa 20 người, có thể bay từ Hà Nội về TP. Hồ Chí Minh trong 1 tiếng, có giá 8000 USD/giờ. Hãng cho biết với mỗi lần bay, hãng sẽ tốn 4000 USD bao gồm tiền nhiên liệu và bảo hiểm máy móc. Ngoài ra tốn thêm 1000 USD cho mỗi khách hàng do trọng lượng tăng thêm và các dịch vụ trên máy bay. Để khuyến khích khách hàng trải nghiệm, hãng Xtul Air áp dụng chính sách giảm giá vé cho các chuyến bay, cứ mỗi chuyến bay có n người sẽ được giảm giá vé theo tỷ lệ phần trăm dựa trên số lượng khách hàng. Cụ thể, nếu chuyến bay có 5 người thì mỗi hành khách được giảm 15% giá vé, chuyến bay có 6 người thì mỗi khách được giảm 18% giá vé, và cứ thế ứng với n người thì vé được giảm $3n\%$ giá vé, tối đa 20 hành khách. Hỏi lợi nhuận của hãng cao nhất khi số khách hàng trên máy bay là bao nhiêu?

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

CHƯƠNG 2 VEC TƠ VÀ HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

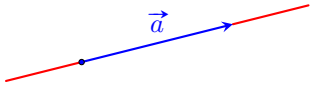
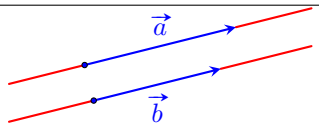
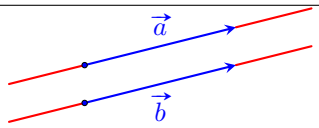
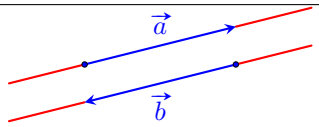
BÀI 6. VEC TƠ TRONG KHÔNG GIAN

A. LÝ THUYẾT

1. Khái niệm vectơ trong không gian; hai vectơ cùng phương, cùng hướng, bằng nhau; vectơ-không

Định nghĩa 1.

- ***Vectơ trong không gian*** là một đoạn thẳng có hướng.
- ***Độ dài của vectơ*** là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ. Kí hiệu $|\vec{a}|$.

• ***Giá*** của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.	
• Hai vectơ ***cùng phương*** nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.	
• Hai vectơ ***bằng nhau*** nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng. Nếu hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng nhau thì ta viết là $\vec{a} = \vec{b}$.	
• Hai vectơ ***đối nhau*** nếu chúng có cùng độ dài và ngược hướng. Vectơ đối của $\vec{a}$ được kí hiệu là $-\vec{a}$.	

- ***Vectơ-không*** có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là $\vec{0}$.

Qui ước vectơ-không có độ dài bằng 0 và cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

⚠ *Chú ý*

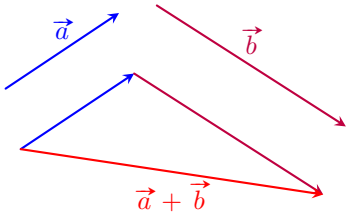
- *Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B.*
- *Nếu không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối thì vectơ còn được kí hiệu là $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, ...*

2. Tổng và hiệu của hai vectơ

Định nghĩa 2 (Tổng hai vectơ).

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý.

- Vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ là ***tổng của hai vectơ*** $\vec{a}$, $\vec{b}$.
- Ký hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.
- Phép lấy tổng của hai vectơ còn được gọi là phép cộng vectơ.



Nhận xét. *Phép cộng vectơ trong không gian cũng có các tính chất như phép cộng vectơ trong mặt phẳng.*

- *Tính chất giao hoán:* $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- *Tính chất kết hợp:* $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$.
- *Với mọi vectơ* $\vec{a}$, *ta luôn có* $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a}$.

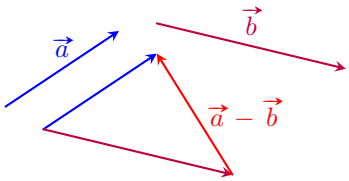
⚠ **(Chú ý)** *Từ tính chất kết hợp, ta xác định được tổng ba vectơ* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *là*

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}.$$

Định nghĩa 3 (Hiệu hai vectơ).

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.

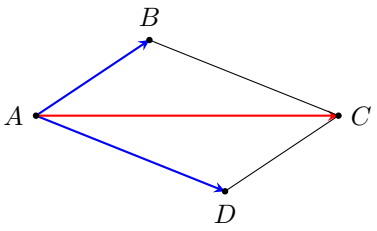
- Hiệu của hai vectơ $\vec{a}$; $\vec{b}$ là vectơ $\vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$.
- Kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$.
- Phép lấy hiệu của hai vectơ còn được gọi là phép trừ vectơ.



Các quy tắc

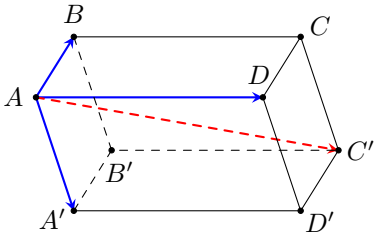
Quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành: Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (*Quy tắc ba điểm phép cộng*).

• Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (*Quy tắc hình bình hành*).



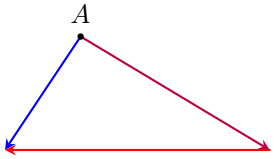
Quy tắc hình hộp:

• Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.



Quy tắc hiệu:

• Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.



3. Tích của một số với một vectơ

Định nghĩa 4. Trong không gian, cho số $k\neq 0$ và vectơ $\vec{a}\neq\vec{0}$.

• Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ.

• Ký hiệu là $k\vec{a}$.

• Phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là phép nhân một số với một vectơ.

≫ Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k>0$.

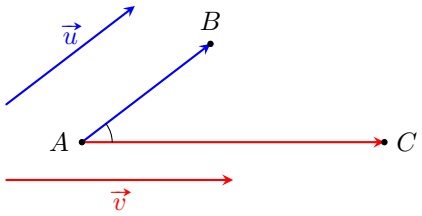
≫ Ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k<0$.

≫ Có độ dài bằng $|k|\cdot|\vec{a}|$.

4. Tích vô hướng của hai vectơ

Định nghĩa 5 (Góc giữa hai vectơ trong không gian).

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$.
• Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.
Ta gọi $\widehat{BAC}$ là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.
• Kí hiệu là $(\vec{u}, \vec{v})$.



Định nghĩa 6 (Tích vô hướng hai vectơ).

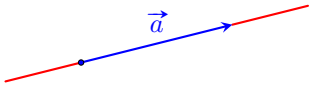
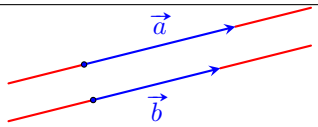
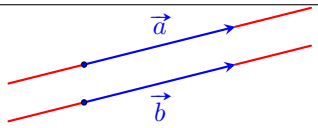
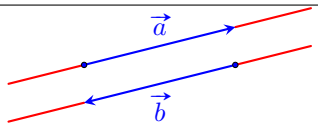
Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$.
• Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số.
• Kí hiệu là $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
Được xác định bởi công thức: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

⚠ **(Chú ý)** • *Trong trường hợp* $\vec{u} = \vec{0}$ *hoặc* $\vec{v} = \vec{0}$, *ta quy ước* $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
• $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$; $\vec{u}^2 \geq 0$; $\vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.
• *Với hai vectơ* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *khác* $\vec{0}$, *ta có* $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$.
• *Với hai vectơ* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *khác* $\vec{0}$, *ta có* $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

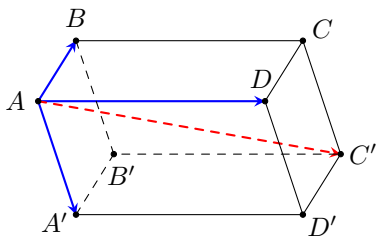
Dạng 6.1. Sử dụng các định nghĩa

Phương pháp
• ***Vectơ trong không gian*** là một đoạn thẳng có hướng.
• ***Độ dài của vectơ*** là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ. Kí hiệu $|\vec{a}|$.

• ***Giá*** của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.	
• Hai vectơ ***cùng phương*** nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.	
• Hai vectơ ***bằng nhau*** nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng. Nếu hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng nhau thì ta viết là $\vec{a} = \vec{b}$.	
• Hai vectơ ***đối nhau*** nếu chúng có cùng độ dài và ngược hướng. Vectơ đối của $\vec{a}$ được kí hiệu là $-\vec{a}$.	

Ví dụ 1.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp, hãy chỉ ra những vectơ:



(1) cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$;

(2) bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$;

(3) ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{AA'}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

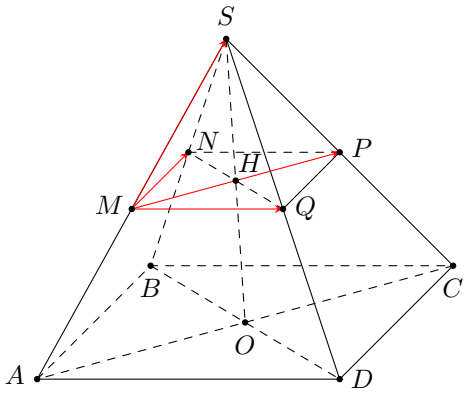
.....

.....

.....

Ví dụ 2.

Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy a và đường cao h. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA, SB, SC, SD và O, H lần lượt là tâm của các hình vuông $ABCD$, $MNPQ$. Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MS}$ theo a và h.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

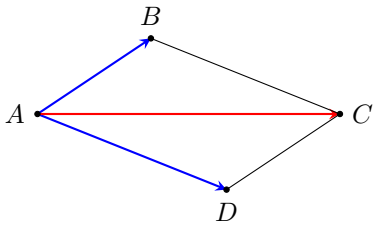
.....

Dạng 6.2. Tổng và hiệu của hai vectơ

Phương pháp

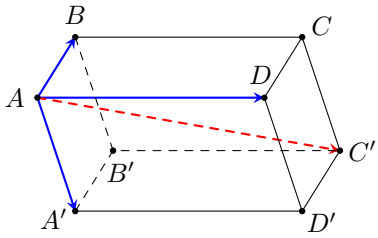
Quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành: Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (*Quy tắc ba điểm phép cộng*).

• Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (*Quy tắc hình bình hành*).



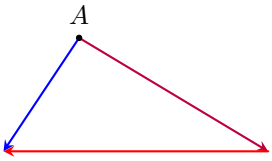
Quy tắc hình hộp:

• Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.



Quy tắc hiệu:

• Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.



Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Tìm độ dài của các vectơ sau:

(1) $\vec{a}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}$;

(2) $\vec{b}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'}A$.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

.....

.....

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}.$$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

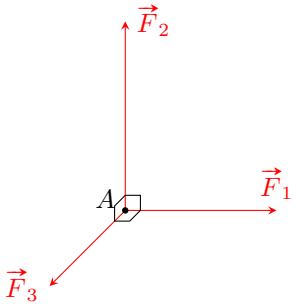
.....

.....

.....

Ví dụ 4.

Một chất điểm chịu tác động bởi 3 lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ có chung điểm đặt A và có giá vuông góc nhau từng đôi một. Biết cường độ của các lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ lần lượt là 10 N, 8 N và 5 N. Xác định hợp lực của 3 lực và tính cường độ của hợp lực (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị*).



Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Dạng 6.3. Tích của một số với một véc-tơ

Trong không gian, cho số $k \neq 0$ và véc-tơ $\vec{a} \neq \vec{0}$.
Tích của số k với véc-tơ $\vec{a}$ là một véc-tơ, ký hiệu là $k\vec{a}$, có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$ và

- Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$.
- Ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$.

Với hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì, với mọi số h và k, ta luôn có

- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.
- $(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$.
- $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$.
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.
- $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.
- Hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $\left(\vec{b} \neq \vec{0}\right)$ cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.
- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số $k \neq 0$ để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Hệ quả:

a) I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, với mọi điểm O.

b) G là trọng tâm $\triangle ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, với mọi điểm O.

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD và O là trung điểm đoạn thẳng AG. Chứng minh rằng

1) $3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

2) $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=6\overrightarrow{MO}$ (M là điểm bất kì trong không gian).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử điểm M thuộc AC, điểm N thuộc DC' và $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DN}=y\overrightarrow{DC'}$.

1) Biểu diễn các véc-tơ $\overrightarrow{BD'}$, $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BB'}=\vec{c}$.

2) Tìm x và y sao cho $MN \parallel BD'$, khi đó tính tỉ số $\dfrac{MN}{BD'}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

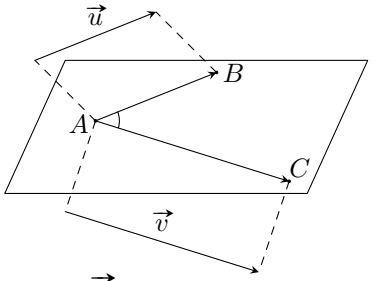
.....

.....

.....

.....

Dạng 6.4. Tích vô hướng của hai véc-tơ



Định nghĩa 7. Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai véc-tơ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm A bất kỳ, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó, ta gọi $\widehat{BAC}$ là góc giữa hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, ký hiệu $(\vec{u}, \vec{v})$.

Định nghĩa 8. Trong không gian, cho hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$.
Tích vô hướng của hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu $\vec{u} \cdot \vec{v}$, được xác định bởi công thức $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

- $0° \le (\vec{u}, \vec{v}) \le 180°$.
- *Nếu* $(\vec{u}, \vec{v}) = 90°$ *thì ta nói* $\vec{u}$ *và* $\vec{v}$ *vuông góc với nhau, ký hiệu* $\vec{u} \perp \vec{v}$.
- *Khi* $\vec{u}$ *và* $\vec{v}$ *cùng hướng thì* $(\vec{u}, \vec{v}) = 0°$.
- *Khi* $\vec{u}$ *và* $\vec{v}$ *ngược hướng thì* $(\vec{u}, \vec{v}) = 180°$.
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$; $\vec{u}^2 \ge 0$, $\vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định các góc

1) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'}\right)$.
2) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}\right)$.
3) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{D'C'}\right)$.
4) $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{C'B'}\right)$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2. Cho tứ diện đều $ABCD$ có H là trung điểm của AB. Hãy tính góc giữa các cặp véc-tơ

1) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$.

2) $\overrightarrow{CH}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có AC và BD cùng vuông góc với AB. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, CD. Chứng minh rằng $IJ \perp AB$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

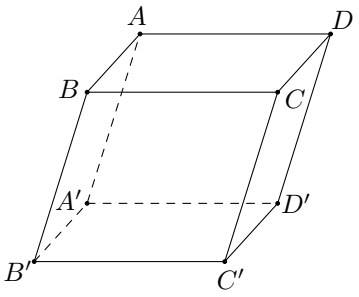
.....

C. LUYỆN TẬP

PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1.
Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Véc-tơ nào sau đây cùng phương với $\overrightarrow{BC}$?

A. $\overrightarrow{DC}$. **B.** $\overrightarrow{DA}$. **C.** $\overrightarrow{BB'}$. **D.** $\overrightarrow{C'C}$.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Trong các véc-tơ sau, véc-tơ nào sau đây có điểm đầu là A, điểm cuối là B?

A. $\overrightarrow{AA}$. **B.** $\overrightarrow{BA}$. **C.** $\overrightarrow{AB}$. **D.** $\overrightarrow{BB}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Trong không gian cho 3 điểm phân biệt A, B, C. Véc-tơ nào trong các vec tơ sau đây là véc-tơ-không?

A. $\overrightarrow{BB}$. **B.** $\overrightarrow{BA}$. **C.** $\overrightarrow{AB}$. **D.** $\overrightarrow{CA}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

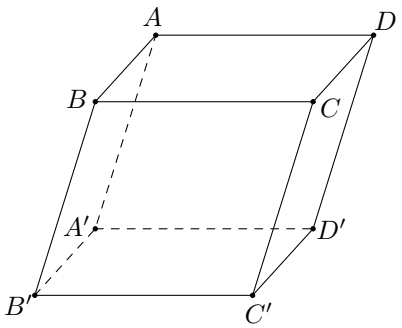
.....

.....

.....

Câu 4.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Véc-tơ $\overrightarrow{BA}$ bằng với véc-tơ nào sau đây?



A. $\overrightarrow{A'B'}$. **B.** $\overrightarrow{CD}$. **C.** $\overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$. Tìm véc-tơ tổng của hai véc-tơ $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{AB}$.

A. $\overrightarrow{BS}$. **B.** $\overrightarrow{BA}$. **C.** $\overrightarrow{SB}$. **D.** $\overrightarrow{SC}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

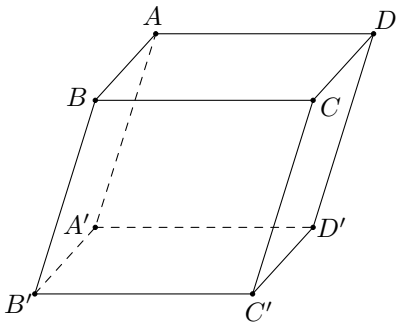
.....

.....

.....

Câu 6.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm véc-tơ tổng của hai véc-tơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AB}$.



A. $\overrightarrow{DB}$. **B.** $\overrightarrow{BD}$. **C.** $\overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{CA}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

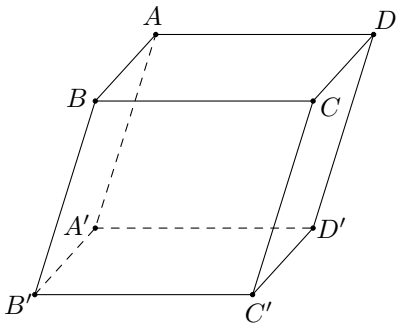
.....

.....

.....

Câu 7.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.
B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}$.
C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC'}$.
D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{SB}$.
B. $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{AB}$.
C. $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{BA}$.
D. $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SC}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

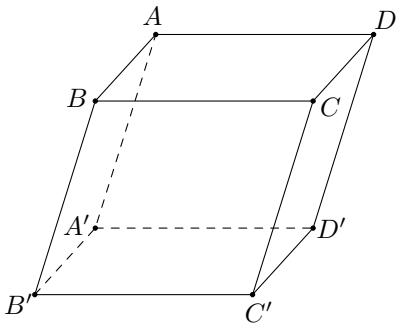
.....

.....

.....

Câu 9.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{BD}$.
C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{AC'}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{CA}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Tính tổng $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}$.

A. $2\overrightarrow{SO}$. **B.** $4\overrightarrow{SO}$. **C.** $3\overrightarrow{SO}$. **D.** $\vec{0}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$ bằng

A. $\vec{0}$. **B.** $2\overrightarrow{AD}$. **C.** $2\overrightarrow{NM}$. **D.** $2\overrightarrow{MN}$.

Lời giải

Câu 12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tính tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{A'C'}$.

A. $2\overrightarrow{AA'}$. **B.** $\overrightarrow{0}$. **C.** $2\overrightarrow{AC}$. **D.** $2\overrightarrow{C'A'}$.

Lời giải

Câu 13. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, góc giữa véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và véc-tơ $\overrightarrow{AD}$ là

A. 90°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 30°.

Lời giải

Câu 14. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Đáy là tam giác ABC vuông tại B. Khi đó góc giữa véc-tơ $\overrightarrow{BA}$ và véc-tơ $\overrightarrow{B'C'}$ bằng bao nhiêu?

A. 45°. **B.** 120°. **C.** 90°. **D.** 30°.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 15. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, véc-tơ bằng véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là véc-tơ nào dưới đây?

A. $\overrightarrow{D'C'}$. **B.** $\overrightarrow{BA}$. **C.** $\overrightarrow{CD}$. **D.** $\overrightarrow{B'A'}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 16. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{BC} = \vec{d}$. Trong các đẳng thức véctơ sau đây, đẳng thức nào đúng?

A. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$. **B.** $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

C. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. **D.** $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 17. Cho hình hộp $ABCDA.'B'C'D'$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức véc-tơ $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = k\overrightarrow{BB'}$.

A. $k = 4$. **B.** $k = 1$. **C.** $k = 0$. **D.** $k = 2$.

Lời giải

Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$, gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)$. **B.** $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$.

C. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}\right)$. **D.** $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD}\right)$.

Lời giải

Câu 19. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi O là trung điểm CH. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$.

B. $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$.

C. $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$.

D. $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}$.

Lời giải

Câu 20. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'D'}\right) = 90°$.

B. $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'C'}\right) = 45°$.

C. $\left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{B'D'}\right) = 90°$.

D. $\left(\overrightarrow{A'A}; \overrightarrow{CB'}\right) = 45°$.

Lời giải

Câu 21. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Tính góc $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$.

A. $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = 60°$.

B. $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = 90°$.

C. $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = 120°$.

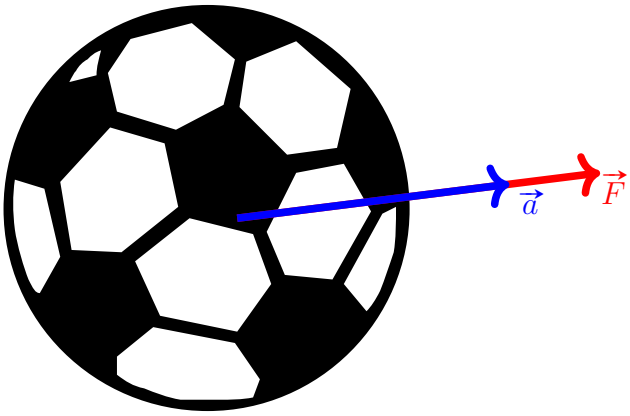
D. $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = 180°$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 22.

Theo định luật II Newton: Gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật: $\vec{F} = m\vec{a}$, trong đó $\vec{a}$ là véc-tơ gia tốc (m/s^2), $\vec{F}$ là véc-tơ lực (N) tác dụng lên vật, m (kg) là khối lượng của vật. Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng $0,5$ kg một gia tốc 20 m/s^2 thì cần một lực đá có độ lớn là bao nhiêu?



A. 100 (N). **B.** 20 (N). **C.** 25 (N). **D.** 10 (N).

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 23. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, trong đó mặt đáy là hình bình hành với $\widehat{DAB} = 120^\circ$. Biết độ dài các cạnh $AB = 25$ cm, $AD = 12$ cm và $AA' = 12$ cm. Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right|$.

A. 12 (cm). **B.** $\sqrt{469}$ (cm). **C.** $\sqrt{613}$ (cm). **D.** 25 (cm).

Lời giải

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

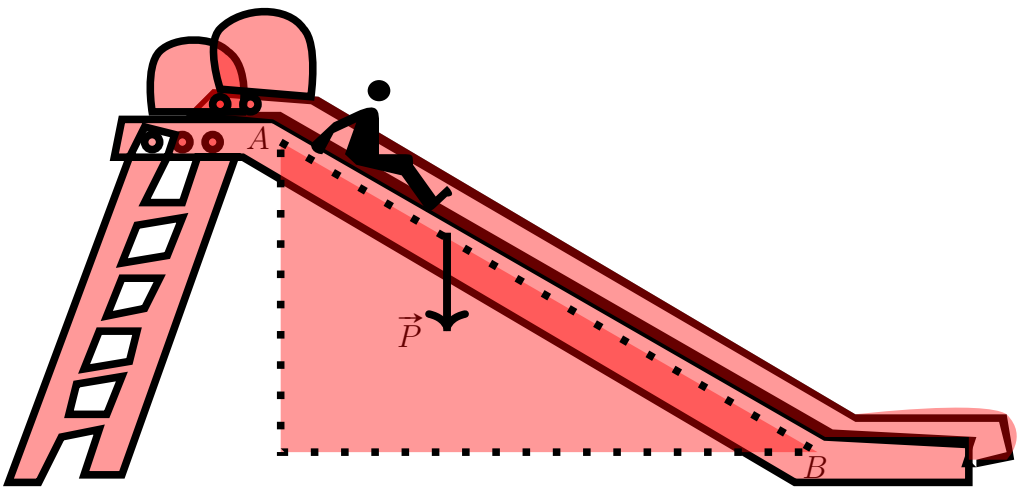
Câu 24. Một em nhỏ cân nặng $m = 25$ (kg) trượt trên cầu trượt dài 3,5 (m) (như trong hình dưới đây). Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là 30°. Trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định **đúng**?

a) Với gia tốc rơi tự do $\vec{g}$ có độ lớn là $g = 9{,}8$ (m/s^2) thì độ lớn của trọng lực $\vec{P} = m\vec{g}$ tác dụng lên em nhỏ có độ lớn là 245 (N).

b) Góc giữa độ dịch chuyển $\vec{d}$ so với trọng lực $\vec{P}$ là 30°.

c) Công A (J) sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ dịch chuyển $\vec{d}$ được tính bởi công thức $A = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{d}\right| \cdot \cos(\vec{F}; \vec{d})$ thì công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt là 428,75 (J).

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.



Lời giải

.....
.....
.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2$, $AD = 3$, $A'A = 4$. Khi đó

a) véc-tơ $\overrightarrow{BA'}$ bằng véc-tơ $\overrightarrow{CD'}$.

b) $\left|\overrightarrow{BA'}\right| = \left|\overrightarrow{A'D}\right| = \left|\overrightarrow{DB}\right|$.

c) Số các véc-tơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp là A_8^2.

d) Độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{BD'}$ bằng $3\sqrt{3}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

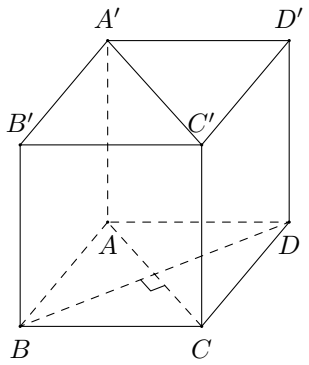
.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó



a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{A'C}$.

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{B'A}$.

c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{D'B'}$.

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC}$.

Lời giải

.....

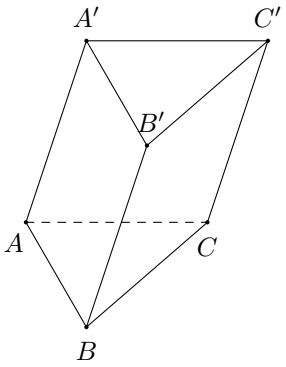
.....

.....

.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của BB' và G là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó



a) $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$.

b) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B'B}$.

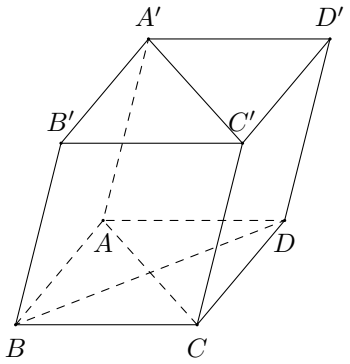
c) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB'}$.

d) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó



a) Hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{C'D'}$ bằng nhau.

b) Hai véc-tơ $\overrightarrow{A'D}$ và $\overrightarrow{CB'}$ đối nhau.

c) Hai véc-tơ $\overrightarrow{A'B'}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương với nhau.

d) Có 3 véc-tơ khác véc-tơ $\vec{0}$ bằng véc-tơ $\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

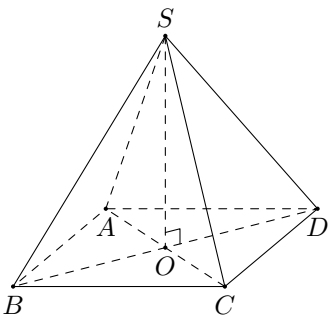
.....

.....

.....

Câu 5.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có O là tâm của đáy $ABCD$, cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$ (tham khảo hình bên). Khi đó



a) Góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{CB}$ là $0°$.

b) Góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{BO}$ là $180°$.

c) Cosin của góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{CS}$ bằng $\dfrac{1}{4}$.

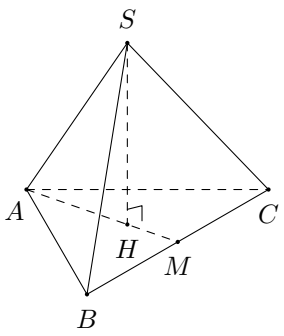
d) Góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AO}$ và $\overrightarrow{SD}$ bằng $60°$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 6.

Cho tứ diện đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh bằng a, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó



a) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC}$.

b) $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$.

c) Góc giữa $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng $90°$.

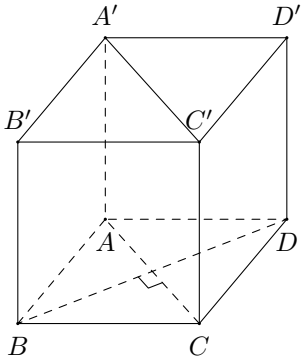
d) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{SC} = 0$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 7.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Khi đó



a) $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{C'A'}\right) = (AC, C'A')$.

b) Gọi $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\vec{v} = \overrightarrow{B'C'}$. Ta có $(\vec{u}; \vec{v}) = 60°$.

c) Gọi $\vec{x} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$, $\vec{y} = \overrightarrow{A'C'}$. Ta có $(\vec{x}; \vec{y}) = 90°$.

d) $\left(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OC'}\right) = 90°$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

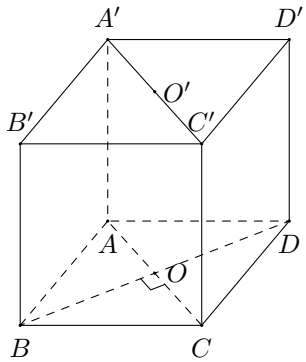
.....

.....

.....

Câu 8.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi O, O' lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Khi đó



a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC'} = \dfrac{a^2}{2}$.

b) $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{B'D'} = -\dfrac{a^2}{2}$.

c) $\left|\overrightarrow{D'A'} + \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{AB}\right| = a\sqrt{3}$.

d) $\left|\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}\right| = 4a$.

Lời giải

.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, từ các đỉnh của hình hộp đã cho, có bao nhiêu véc-tơ đối (khác véc-tơ không) của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Biết rằng $\overrightarrow{MN} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} + c\overrightarrow{AD}$. Giá trị của biểu thức $a + b + c$ bằng

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Giá trị tan của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AD'}$ và $\overrightarrow{A'C'}$ bằng (*làm tròn kết quả tới hàng phần trăm*).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....

Câu 4. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau một góc 120°, đồng thời $|\vec{a}| = 2$ và $\left|\vec{b}\right| = 5$. Đặt $\vec{u} = k\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{b}$. Để $\vec{u} \perp \vec{v}$ thì giá trị của k là

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 5. Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng. Xét $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{y} = -\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{z} = \vec{a} + 4\vec{b} + m\vec{c}$. Giá trị của m để các vectơ $\vec{x}; \vec{y}; \vec{z}$ đồng phẳng bằng

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ như hình vẽ. Đặt một vật tại đỉnh A, khi đó tác động vào vật bởi những lực $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ có giá lần lượt nằm trên các cạnh AB, AD, AA' và $|\vec{F_1}| = 2N, |\vec{F_2}| = 3N, |\vec{F_3}| = 4N$. Hãy xác định độ lớn của hợp lực $\vec{F}$ tác động lên vật (*làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*).

Lời giải

Câu 7. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$ gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Tìm giá trị thích hợp của k thỏa đẳng thức vectơ $\overrightarrow{AG}=k\cdot\left(\vec{c}+\vec{b}+\vec{a}\right)$ (*làm tròn kết quả tới hàng phần trăm*).

Lời giải

Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tìm giá trị thích hợp của k thỏa đẳng thức vectơ $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=k\cdot\overrightarrow{DG}$

Lời giải

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$ (*đơn vị: độ*).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Xác định số đo của góc (MN, SC) (*đơn vị: độ*).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB$ và $CA = CB$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và AB (*đơn vị: độ*).

Lời giải

.....

.....

.....

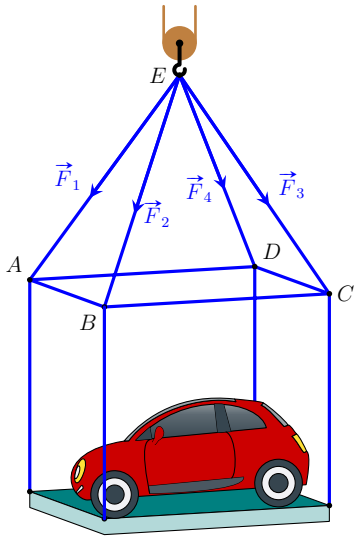
.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....

Câu 12. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng $60°$. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Tính trọng lực của chiếc xe ô tô (*làm tròn đến hàng đơn vị*), biết rằng các lực căng $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, \vec{F_4}$ đều có cường độ là $2700N$ và trọng lực của khung sắt là $1500N$.



Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60°, \widehat{CAD} = 90°$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{IJ}$ và $\overrightarrow{CD}$ (*đơn vị: độ*).

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

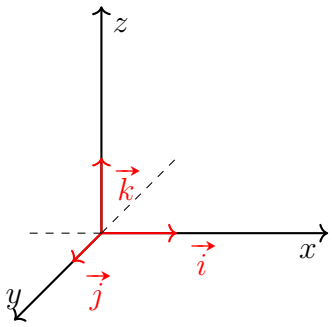
BÀI 7. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ RONG KHÔNG GIAN

A. LÝ THUYẾT

1. Hệ tọa độ trong không gian

Định nghĩa 1.

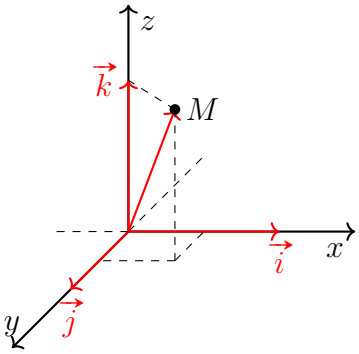
Trong không gian, cho ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc.
Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là ba vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz.
Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$ trong không gian hay gọi đơn giản hệ tọa độ $Oxyz$.



2. Tọa độ điểm của vectơ

2.1 Tọa độ điểm

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M.
Nếu $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(x; y; z)$ là tọa độ của điểm M đối với hệ trục toạ độ $Oxyz$.
Viết $M = (x; y; z)$ hoặc $M(x; y; z)$; Trong đó x là hoành độ, y là tung độ, z là cao độ của điểm M.



2.2 Tọa độ vectơ

Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$.
Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ là tọa độ của vectơ $\vec{a}$ đối với hệ toạ độ $Oxyz$.
Viết $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ hoặc $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$. Trong đó a_1 là hoành độ, a_2 là tung độ, a_3 là cao độ của vectơ $\vec{a}$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 7.1. Tọa độ điểm

Phương pháp Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$.
Nếu $\overrightarrow{OM} = m_1\vec{i} + m_2\vec{j} + m_3\vec{k}$ thì $\overrightarrow{OM} = (m_1; m_2; m_3) \Rightarrow M(m_1; m_2; m_3)$.
Nếu $\overrightarrow{MO} = m_1\vec{i} + m_2\vec{j} + m_3\vec{k}$ thì $\overrightarrow{MO} = (m_1; m_2; m_3) \Rightarrow M(-m_1; -m_2; -m_3)$.

M thuộc các trục tọa độ $\begin{cases} M \in Ox \to M(x; 0; 0) \\ M \in Oy \to M(0; y; 0) \\ M \in Oz \to M(0; 0; z). \end{cases}$

M thuộc các mặt phẳng tọa độ: $\begin{cases} M \in (Oxy) \to M(x; y; 0) \\ M \in (Oxz) \to M(x; 0; z) \\ M \in (Oyz) \to M(0; y; z). \end{cases}$

Ví dụ 1. Xác định tọa độ điểm M trong các trường hợp sau

- $\overrightarrow{MO} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$
- $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OA} + \vec{i}$ với $A(2; -3; 1)$

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(-4; 3; -1)$ và $N(2; -1; -3)$. Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....

Ví dụ 3. Cho điểm $M(-2;5;3)$. Tìm hình chiếu vuông góc của điểm M trên các trục tọa độ.

Lời giải

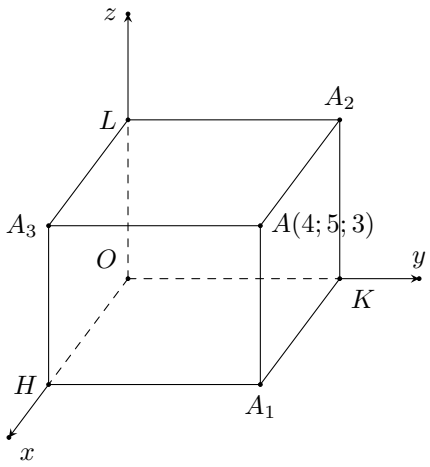
Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và vectơ $\vec{u} = (3;-4;2)$. Hãy biểu diễn theo các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$ và $\vec{k}$ mỗi vectơ sau:

- $\overrightarrow{OA}$.
- $\vec{u}$.

Lời giải

Ví dụ 5.

Trong không gian $Oxyz$, cho tọa độ $A(4;5;3)$ và vị trí các điểm $L;K;H;A_1;A_2;A_3$ như hình vẽ bên. Xác định tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{A_1A}, \overrightarrow{A_2A}$



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 7.2. Tọa độ vectơ

Phương pháp: Xét hai vectơ $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b} = (b_1;b_2;b_3)$ ta có:

- Hai véctơ bằng nhau: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$.
- $ABCD$ là hình bình hành $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

a) Xác định tọa độ vectơ $\vec{a}$.

b) Tìm $x;y;z$ để $\vec{b} = (x+2y-z-1; x-y+3z+1; 3x-y-z-6)$ bằng $\vec{a}$.

Lời giải

.....

Ví dụ 2. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(1;1;1)$, $N(2;3;4)$, $P(7;7;5)$. Tìm tọa độ điểm Q để tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

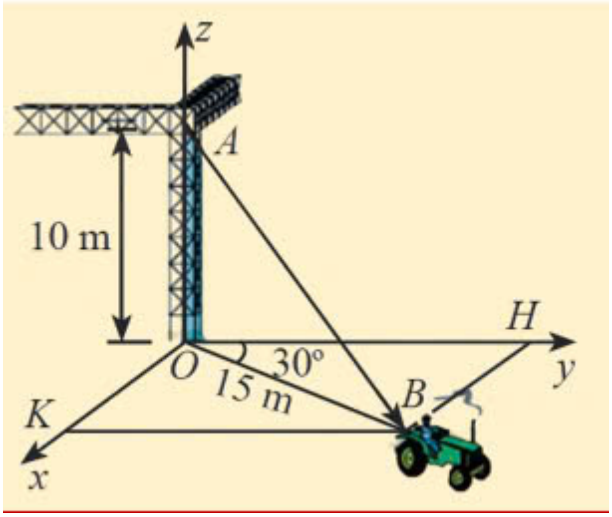
Lời giải

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;3;-2)$, $B(3;-2;4)$, $D(5;2;4)$, $D'(4;1;2)$. Tìm tọa độ đỉnh C'.

Lời giải

Dạng 7.3. Bài toán thực tế

Ví dụ 1. Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ toạ độ $Oxyz$ như hình bên dưới với độ dài đơn vị trên các trục toạ độ bằng 1 m. Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Một máy bay đang cất cánh từ phi trường. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên dưới, cho biết M là vị trí của máy bay, $OM = 14$, $\widehat{NOB} = 32°$, $\widehat{MOC} = 65°$. Tìm tọa độ điểm M.

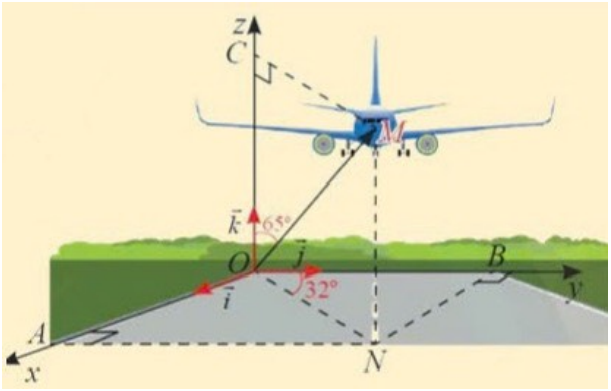
Lời giải

.....

.....

.....

.....


z
C
M
$\vec{k}$
65°
O
$\vec{j}$
B
y
$\vec{i}$
32°
A
x
N

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

C. LUYỆN TẬP

PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$ giả sử $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, khi đó tọa độ điểm M là

A. $(-2;3;1)$. **B.** $(2;-3;-1)$. **C.** $(2;3;-1)$. **D.** $(2;3;1)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{AO} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Tọa độ của điểm A là

A. $(-1;2;-3)$. **B.** $(2;-3;-1)$. **C.** $(-3;2;-1)$. **D.** $(2;-1;-3)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây thuộc trục Oy?

A. $M\,(0;5;0)$. **B.** $N\,(4;0;0)$. **C.** $P\,(0;0;6)$. **D.** $Q\,(4;5;0)$.

Lời giải

.....

.....

.....

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng tọa độ (Oyz)?

A. $N\,(0;4;-1)$. **B.** $P\,(-2;0;3)$. **C.** $M\,(3;4;0)$. **D.** $Q\,(2;0;0)$.

Lời giải

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$ với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vecto đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz. Tìm tọa độ của vecto $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

A. $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(-1;-1;1)$. **B.** $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(1;1;-1)$.

C. $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(-1;1;1)$. **D.** $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(1;-1;1)$.

Lời giải

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;-1;0)$ và $B(1;1;-3)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(-1;2;-3)$. **B.** $(1;-2;3)$. **C.** $(-1;-2;3)$. **D.** $(1;-2;3)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm A thỏa $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$ và $B(2;1;4)$. Tọa độ của véctơ $\overrightarrow{BA}$ là

A. $(0;-4;0)$. **B.** $(4;-2;8)$. **C.** $(-1;-1;2)$. **D.** $(-2;-2;4)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

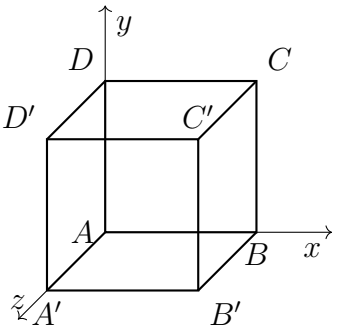
.....

.....

.....

.....

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1 như hình vẽ. Tọa độ của véctơ $\overrightarrow{AC}$ là



A. $(1;1;0)$. **B.** $(0;1;1)$. **C.** $(1;0;1)$. **D.** $(1;1;1)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ hình chiếu của $M\,(2;1;4)$ lên trục Ox là

A. $(2;0;0)$. **B.** $(0;1;0)$. **C.** $(0;0;4)$. **D.** $(0;1;4)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ hình chiếu của $M\,(-2;1;4)$ lên (Oyz) là

A. $(-2;0;0)$. **B.** $(0;1;0)$. **C.** $(0;0;4)$. **D.** $(0;1;4)$.

Lời giải

.....

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-3;5;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(-2;8;-3)$. **B.** $D(-2;2;5)$. **C.** $D(-4;8;-5)$. **D.** $D(-4;8;-3)$.

Lời giải

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tìm tọa độ đỉnh A' của hình hộp.

A. $A'(3;4;-6)$. **B.** $A'(4;6;-5)$. **C.** $A'(2;0;2)$. **D.** $A'(3;5;-6)$.

Lời giải

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MO} = 3\vec{k} - 2\vec{i} + 4\vec{j}$. Tọa độ điểm M là

A. $(3;-2;4)$. **B.** $(-2;4;3)$. **C.** $(2;-4;-3)$. **D.** $(3;2;4)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = (2x-4)\vec{i} - 4\vec{j} + (y-1)\vec{k}$. Khi điểm $M \in Oy$ thì giá trị $x+2y$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm A thỏa $\overrightarrow{AO} = 4\vec{k} - 2\vec{j}$ và $B(1;2;-1)$. Tọa độ của véctơ $\overrightarrow{AB}$ là

A. $(1;0;3)$. **B.** $(0;2;4)$. **C.** $(0;-2;-4)$. **D.** $(-1;0;-3)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -2; 1)$ và $\vec{b} = (x-1)\,\vec{i} + (x^2-3)\,\vec{j} + y\,\vec{j}$. Khi $\vec{a} = \vec{b}$ thì giá trị $x - y$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{b} = 4\vec{j} - \vec{i}$. Tọa độ $\vec{b}$ bằng

A. $(-1; 4; 0)$. **B.** $(1; 4; 0)$. **C.** $(0; -1; 4)$. **D.** $(4; -1; 0)$.

Lời giải

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho $A\,(1; 0; 0)$, $B\,(0; 2; 0)$, $M\,(x-1; 2y-2; 7)$. Gọi M' là hình chiếu của M trên mặt phẳng (Oxy). Khi tứ giác $OBM'A$ là hình bình hành thì giá trị $x + y$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;3)$ trên mặt phẳng (Oxz) là

A. $P(0;2;3)$. **B.** $M(1;0;3)$. **C.** $N(0;2;0)$. **D.** $Q(1;2;0)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;3)$. Điểm đối xứng với A qua trục Oz có tọa độ là

A. $(1;2;-3)$. **B.** $(-1;-2;3)$. **C.** $(0;0;3)$. **D.** $(-1;2;3)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A\,(1;0;3)$, $B\,(2;3;-4)$, $C\,(-3;1;2)$. Điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành có tọa độ là

A. $D\,(-4;-2;9)$. **B.** $D\,(4;2;9)$. **C.** $D\,(6;2;-3)$. **D.** $D\,(-2;4;5)$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Dùng dữ liệu sau để trả lời các câu hỏi 22, 23, 24.

Cần trục chân đế là kiểu cột quay được sử dụng để phục vụ công việc xếp dỡ hàng hóa chủ yếu ngoài các cảng bến, bãi (hình ảnh minh họa). Ta chọn hệ trục $Oxyz$ thỏa trục Ox trùng với trục chân đế, trục Oy vuông góc với trục Ox và trục Oz trùng với trục cần cẩu (theo đơn vị mét, như hình vẽ). Gọi M là vị trí tại đỉnh cần cẩu, H là hình chiếu của M lên (Oxy). Biết tay cần KM của cần trục dài 50 m, trục cần OK dài 50 m, $\left(\vec{k};\overrightarrow{KM}\right)=60^\circ$, $\left(\vec{i};\overrightarrow{OH}\right)=45^\circ$.



Câu 22. Điểm M có cao độ z_M là bao nhiêu

A. $\dfrac{100\sqrt{3}}{2}$. **B.** 93,3. **C.** 75. **D.** 60.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 23. Điểm H có tọa độ là bao nhiêu

A. $\left(25\sqrt{2};25\sqrt{2};0\right)$.

B. $(25;25;0)$.

C. $\left(\dfrac{25\sqrt{6}}{2};\dfrac{25\sqrt{6}}{2};0\right)$.

D. $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2};\dfrac{5\sqrt{2}}{2};0\right)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 24. Vectơ $\overrightarrow{KM}$ có tọa độ là bao nhiêu

A. $\left(25\sqrt{2};25\sqrt{2};25\right)$.

B. $(25;25;25)$.

C. $\left(\dfrac{25\sqrt{2}}{2};\dfrac{25\sqrt{2}}{2};25\right)$.

D. $\left(\dfrac{25\sqrt{6}}{2};\dfrac{25\sqrt{6}}{2};25\right)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M\,(2;\ 4;\ 6)$ và $\overrightarrow{ON} = 2\,\vec{i} + \vec{k}$.

a) Tọa độ điểm $N\,(2;1;0)$.

b) Hình chiếu vuông góc của M trên trục Oz là điểm $M'\,(0;0;6)$.

c) Hình chiếu vuông góc của M trên mặt (Oxy) là điểm $N\,(2;4;0)$.

d) Đối xứng với điểm M qua mặt (Oyz) là điểm $K\,(-2;0;0)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $OABC$ với $A\,(1;2;3)$, $B\,(5;0;-1)$ và $C\,(a;b;c)$.

a) Tọa độ điểm $O\,(0;0;1)$.

b) Tọa độ vectơ $\overrightarrow{OA} = (1;2;3)$.

c) $\overrightarrow{OB} = 5\cdot\vec{i} - \vec{k}$.

d) Nếu $OABC$ hình bình hành thì $a+b+c=2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A\,(0;0;0)$, $B\,(3;0;0)$, $D\,(0;3;0)$ và $D'\,(0;3;3)$.

a) $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + \vec{j}$.

b) $A'(0;0;3)$.

c) M là trung điểm DD'. Khi đó tọa độ điểm $M(0;3;-3)$.

d) Tọa độ điểm $C'(3;3;0)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

a) Tọa độ của điểm M là $(2;1;1)$.

b) Hình chiếu của điểm M lên trục Ox là $(2;1;0)$.

c) Hình chiếu của điểm M lên trục Oy là $(0;1;0)$.

d) Hình chiếu của điểm M lên mặt phẳng Oxy là $(2;0;1)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 4, đỉnh A trùng với gốc O, các điểm B, D, A' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz.

a) Tọa độ của điểm D là $(4;0;0)$.

b) Tọa độ của điểm C là $(0;4;0)$.

c) Tọa độ của điểm A' là $(0;0;4)$.

d) Tọa độ của điểm C' là $(4;4;4)$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O, các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ và có $AB = 3$, $AC = 5$, $AA' = 6$.

a) Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $(3; 0; 0)$.

b) Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AC}$ là $(3; 4; 6)$.

c) Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AC'}$ là $(3; -4; 6)$.

d) Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AM}$ là $\left(\frac{3}{2}; 4; 6\right)$, với M là trung điểm của $C'D'$..

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A\,(1; 0; 1)$, $B\,(2; 1; 2)$, $D\,(1; -1; 1)$, $D'\,(3; 4; -6)$.

a) Tọa độ $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$.

b) Tọa độ $C\,(2; 1; 2)$.

c) Tọa độ $A'\,(3; 5; -6)$.

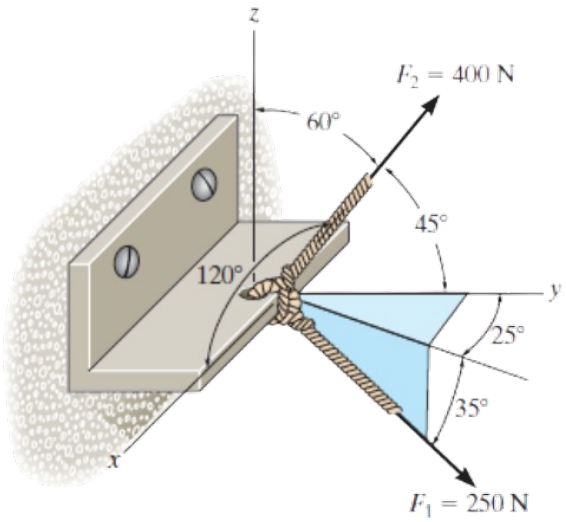
d) Toạ độ trọng tâm tam giác $A'B'C$ là $G\,(3; 4; -3)$.

Lời giải

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 8. Dưới đây là một giá đỡ chịu hai lực. Biểu diễn từng lực dưới dạng vectơ Descartes.



a) $\vec{F_2} = -200\,\vec{i} + 281\,\vec{j} + 200\,\vec{k}$.
b) $\vec{F_1} = 86,547\,\vec{i} + 185,601\,\vec{j} - 143,394\,\vec{k}$.
c) Độ lớn lực tổng hợp lên giá đỡ bằng $485{,}297N$.
d) Góc tạo bởi lực tổng hợp lên trục Oy là $16{,}145°$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

. . . . . .

. . . . . .

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$. Tọa độ điểm $A(x;y;z)$. Giá trị biểu thức $S = 100x + 1000y + 10z$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

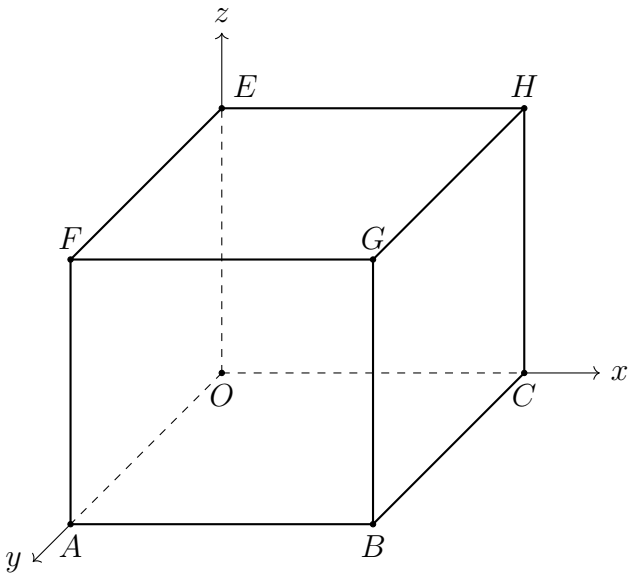
.....

.....

.....

.....

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $OABC.EFGH$ có các cạnh $OA = 5$, $OC = 8$, $OE = 7$ (xem hình vẽ dưới đây). Tọa độ $H(x;y;z)$. Tính giá trị biểu thức $P = 50x + 75y + 1000z$.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;2;1)$, $B(-2;-1;4)$. Gọi M là điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$. Tìm độ dài vectơ $\overrightarrow{OM}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(3;2;-1)$, $B(-1;0;5)$. Điểm $M(a;b;c)$ thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy). Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ khi $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1;0;2)$, $B(-1;2;2)$, $C(3;1;1)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxz) sao cho biểu thức $S=2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, tính giá trị $T=6a-5b+3c$.

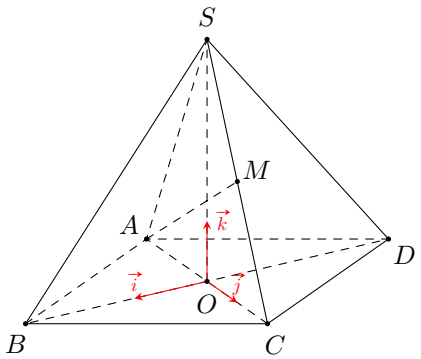
Lời giải

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $D(0;3;0)$, $D'(0;3;-3)$. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'B'C$ và tọa độ vecto $\overrightarrow{AG}=(a;b;c)$. Tính $S=a+b+c$.

Lời giải

Câu 7.

Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng 5, giao điểm hai đường chéo AC và BD trùng với gốc O. Các vectơ $\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ và $OA=OS=4$ như hình vẽ. Toạ độ vectơ $\overrightarrow{AM}=(a;b;c)$ với M là trung điểm của cạnh SC, khi đó, tính $a+b+c$.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

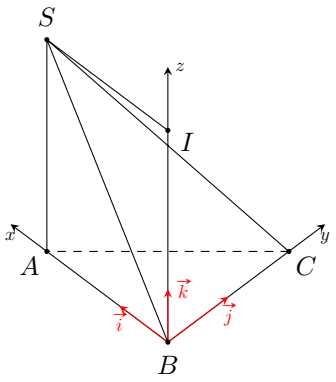
.....

.....

.....

Câu 8.

Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B, $BC = 3$, $BA = 2$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Điểm $D(a;b;c)$ sao cho $SBCD$ là hình bình hành. Khi đó, tính $a+b+c$.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

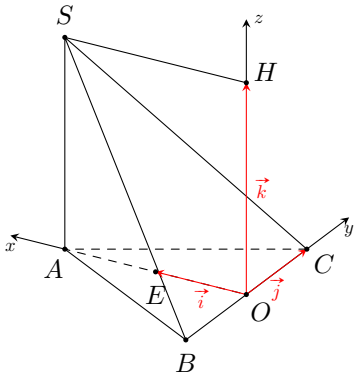
.....

.....

.....

Câu 9.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2, SA vuông góc với đáy và SA bằng 1. Thiết lập hệ tọa độ như hình vẽ, tọa độ điểm $S\left(a;\sqrt{b};c\right)$. Khi đó, tính $a+b+c$.



Lời giải

. . . . . .

Câu 10. Trong không gian với một hệ trục toạ độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;9)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì toạ độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $C(x;y;z)$. Tính $x+y+z$.

Lời giải

. . . . . .

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ và các điểm $A(2;3;1)$, $C(-1;2;3)$ và $O'(1;-2;2)$. Vectơ $\vec{d}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}$ có tọa độ là $(a;b;c)$. Tính $a+b+c$.

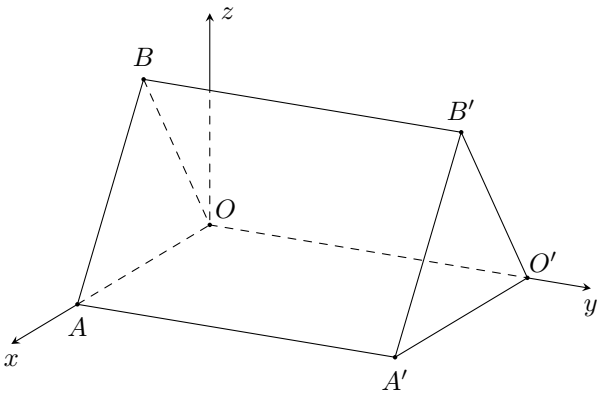
Lời giải

. . . . . .

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 12. Những căn nhà gỗ trong Hình 1 được phác thảo dưới dạng một hình lăng trụ đứng tam giác $OAB.O'A'B'$ như trong Hình 2. Với hệ trục toạ độ $Oxyz$ thể hiện như Hình 2 (đơn vị đo lấy theo centimét), hai điểm A' và B' có tọa độ lần lượt là $(240; 450; 0)$ và $(120; 450; 300)$. Mỗi căn nhà gỗ có chiều dài là a cm, chiều rộng là b cm, mỗi cạnh bên của mặt tiền có độ dài là c cm. Tính $a + b + c$ (làm tròn đến hàng đơn vị).





Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

BÀI 8. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

A. LÝ THUYẾT

1. Biểu thức tọa độ của tổng, hiệu hai vectơ và tích của một số với một vectơ

Định nghĩa 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và số k. Khi đó

- $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$.
- $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$.
- $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$.

Nhận xét. *Hai vectơ $\vec{a}$; $\vec{b}$ với $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương* $\vec{a} = k \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = k \cdot b_1 \\ a_2 = k \cdot b_2 \\ a_3 = k \cdot b_3. \end{cases}$

⚠ *Từ nay, các bài tập liên quan đến toạ độ đều được xét trong không gian $Oxyz$.*

2. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Định nghĩa 2. Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ được xác định bởi công thức $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

3. Vận dụng

- Tọa độ điểm đầu cuối:
  Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$.
  Ta có $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

- Tọa độ trung điểm đoạn thẳng:
  Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$. Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.

- Tọa độ trọng tâm tâm giác:
  Trong không gian $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ có $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ và $C(x_C; y_C; z_C)$.
  Tọa độ trọng tâm G của $\triangle ABC$ là $G\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}; \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}; \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 8.1. Tọa độ tổng hiệu vectơ

Phương pháp:

Trong không gian $Oxyz$, hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và số thực k.

(1) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$.

(2) $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$.

(3) $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$.

(4) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi $\begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3. \end{cases}$

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2; -1; 5)$ và $\vec{b} = (0; -2; -4)$. Tìm tọa độ của các vectơ sau: $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $5\vec{a}$, $2\vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{b}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; -3; -2)$, $B(2; 3; 4)$ và $C(3; 5; 7)$. Chứng minh rằng ba điểm A, B, C tạo thành tam giác.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....

Dạng 8.2. Tọa độ điểm – vectơ thỏa điều kiện

Phương pháp:

(1) Tích vô hướng của hai vectơ: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$.

(2) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

(3) I là trung điểm AB:

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right).$$

Ta có $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ suy ra $\forall M$: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

(4) G là trọng tâm $\triangle ABC$:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$

Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ suy ra $\forall M$: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

(5) G là trọng tâm hình chóp $ABCD$:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right).$$

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;2;1)$, $B(1;-1;2)$ và $C(1;2;-1)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{u}$ thỏa $\vec{u} = \overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AO}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$ và $C(-3;5;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$.

Lời giải

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$ và $D(2;2;2)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD. Xác định Tọa độ trung điểm I của MN.

Lời giải

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$ và $B(0;-2;3)$. Tìm tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh O của tam giác OAB.

Lời giải

Ví dụ 5. Trong không gian $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ biết $A(2;4;-3)$ có trọng tâm $G(2;1;0)$. Khi đó xác định tọa độ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Dạng 8.3. Độ dài vectơ

(1) $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$.
Suy ra $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

(2) Độ dài vectơ $\vec{a}$: $|\vec{a}|=\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2}\rightarrow |\vec{a}|^2=\vec{a}^2=(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2$.

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;-1)$ và $B(0;3;1)$ Tính độ dài đoạn thẳng AB.

Lời giải

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1;0;-2)$, $B(2;1;-1)$, $C(1;-2;2)$. Tìm chu vi của $\triangle ABC$.

Lời giải

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;-1)$, $B(0;3;1)$, $C(3;2;0)$. Tính diện tích $\triangle ABC$ (nếu có).

Lời giải

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;1)$, $C(-3;6;4)$. Tìm điểm M thuộc đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Tìm độ dài đoạn AM.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Dạng 8.4. Sự cùng phương của hai vectơ

Phương pháp

Xét hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có

(1) Hai vectơ bằng nhau: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3. \end{cases}$

(2) Vectơ $\vec{a}$ cùng phương vectơ $\vec{b}$: $\vec{a} = k \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = k \cdot b_1 \\ a_2 = k \cdot b_2 \\ a_3 = k \cdot b_3. \end{cases}$

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (4; 1; -2)$; $\vec{b} = (1; -2; -1)$; $\vec{c} = (8; 2; -4)$; $\vec{d} = (-4; -1; 2)$. Vectơ $\vec{a} = (4; 1; -2)$ cùng phương với vectơ nào đã cho?

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 1; 5)$ và $\vec{b} = (m+1; 2n; 10)$ Tìm m, n để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

Lời giải

.....
.....

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;5)$, $B(5;-5;7)$, $M(x;y;1)$. Với giá trị nào của x, y thì A, B, M thẳng hàng.

Lời giải

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;6;2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M. Tính tỉ số $\dfrac{AM}{BM}$.

Lời giải

Dạng 8.5. Tích vô hướng và ứng dụng

Phương pháp

Xét hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có

(1) Tích vô hướng hai vectơ: $\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b}) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3. \end{cases}$

Góc giữa 2 vectơ:

$$\cos\left(\vec{a}; \vec{b}\right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2} \cdot \sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2}}.$$



- *Khi* $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ *thì* $\cos(\vec{a}; \vec{b}) > 0 \Rightarrow (\vec{a}; \vec{b})$ *là góc nhọn.*
- *Khi* $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ *thì* $\cos(\vec{a}; \vec{b}) < 0 \Rightarrow (\vec{a}; \vec{b})$ *là góc tù.*

(2) Vectơ $\vec{a}$ vuông góc vectơ $\vec{b}$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$.

Bài toán liên quan giữa độ dài và tích vô hướng:

Cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có $|\vec{u}| = m; |\vec{v}| = n$ và tạo với nhau một góc α. Tính $|\vec{u} + \vec{v}|$ hoặc $|\vec{u} - \vec{v}|$ hoặc tùy vào yêu cầu bài toán.

Hướng giải quyết

- **Bước 1:** Biến đổi $(|\vec{u} + \vec{v}|)^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$.
- **Bước 2:** Áp dụng: $\begin{cases} \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b}). \end{cases}$

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3; 4; 0)$, $\vec{b} = (5; 0; 12)$. Tính côsin của góc giữa $\vec{a}; \vec{b}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1;-2;3)$, $B(0;3;1)$, $C(4;2;2)$. Côsin của $\widehat{BAC}$ bằng

Lời giải

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{a}=(2;1;-2)$, $\vec{b}=\left(0;-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$. Tìm tất cả giá trị của m để hai véc tơ $\vec{u}=2\vec{a}+3m\vec{b}$ và $\vec{v}=m\vec{a}-\vec{b}$ vuông góc với nhau.

Lời giải

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=(1;1;-2)$, $\vec{v}=(1;0;m)$. Tìm m để góc giữa hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ bằng 45°.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau một góc 120° và $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 5$. Tính $|\vec{u} + \vec{v}|$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Dạng 8.6. Tâm tỷ cự

Bài toán cực trị độ dài vectơ:
Cho n điểm $A_1; a_2; \ldots; A_n$ và các hệ số $k_1; k_2; \ldots; k_n$ sao cho $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n \neq 0$ và đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P). Tìm điểm M trên đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P), sao cho $\left|k_1 \cdot \overrightarrow{MA_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{MA_2} + \ldots + k_n \cdot \overrightarrow{MA_n}\right|$ nhỏ nhất.

Hướng giải quyết

- **Bước 1:** Gọi I là điểm thỏa mãn $k_1 \cdot \overrightarrow{IA_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{IA_2} + \ldots + k_n \cdot \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$.
- **Bước 2:** Áp dụng quy tắc ba điểm biến đổi:

$$\left|k_1 \cdot \overrightarrow{MA_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{Ma_2} + \ldots + k_n \cdot \overrightarrow{MA_n}\right| = \left|(k_1 + k_2 + \cdots k_n)\overrightarrow{MI}\right| = |k| \cdot \left|\overrightarrow{MI}\right|.$$

- **Bước 3:** Tìm độ dài nhỏ nhất của các vectơ đã cho xảy ra khi M xảy ra ở vị trí nào?

Bài toán cực trị độ dài bình phương vectơ:
Cho đa giác $a_1a_2\dots A_n$ và các hệ số $k_1;k_2;\dots;k_n$ sao cho $k=k_1+k_2+\dots+k_n>0$. Tìm điểm M trên đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P), sao cho tổng

$$S=k_1\cdot MA_1^2+k_2\cdot MA_2^2+\cdots+k_n\cdot MA_n^2$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng giải quyết

- **Bước 1:** Gọi I là điểm thỏa mãn $k_1\cdot\overrightarrow{IA_1}+k_2\cdot\overrightarrow{IA_2}+\dots+k_n\cdot\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$.
- **Bước 2:** Thấy rằng

$$MA_1^2=\left|\overrightarrow{MA_1}\right|^2=\left(\overrightarrow{MA_1}\right)^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_1}\right)^2=\left(\overrightarrow{MI}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA_1}\right)+\left(\overrightarrow{IA_1}\right)^2$$

Áp dụng quy tắc ba điểm biến đổi:

$$\begin{aligned}S&=k_1\cdot MA_1^2+k_2\cdot MA_2^2+\cdots+k_n\cdot MA_n^2\\&=k_1\left[\left(\overrightarrow{MI}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA_1}\right)+\left(\overrightarrow{IA_1}\right)^2\right]+\dots\\&\quad+k_n\left[\left(\overrightarrow{MI}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA_n}\right)+\left(\overrightarrow{IA_n}\right)^2\right]\\&=(k_1+k_2+\cdots+k_n)\,MI^2+\left(k_1\cdot IA_1^2+\dots+k_n\cdot IA_n^2\right)+\dots\\&\quad+2\overrightarrow{MI}\cdot\left(\underbrace{\overrightarrow{IA_1}+\dots+k_n\cdot\overrightarrow{IA_n}}_{=\vec{0}}\right)\\&=(k_1+k_2+\cdots+k_n)MI^2+(k_1\cdot IA_1^2+\cdots+k_n\cdot IA_n^2)\end{aligned}$$

- **Bước 3:** Do $k>0$, để $S=k_1\cdot MA_1^2+k_2\cdot MA_2^2+\cdots+k_n\cdot MA_n^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì ta xác định vị trí điểm M cần tìm.

⚠ *Cho đa giác $a_1a_2\dots a_n$ và các hệ số $k_1;k_2;\dots;k_n$ sao cho $k=k_1+k_2+\dots+k_n<0$. Tìm điểm M trên d hoặc (P), sao cho tổng $S=k_1\cdot MA_1^2+k_2\cdot MA_2^2+\cdots+k_n\cdot MA_n^2$ đạt giá trị lớn nhất. Ta cũng thực hiện tương tự.*

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;-3;7)$, $B(0;4;1)$, $C(3;0;5)$ và $D(3;3;3)$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (Oyz) sao cho biểu thức $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó xác định tọa độ điểm M.

Lời giải

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $B(2;2;1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

C. LUYỆN TẬP

PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (-1;5;0)$ và $\vec{v} = (1;-5;-3)$, tọa độ của vectơ $\vec{u} + \vec{v}$ là

A. $(2;-10;3)$. **B.** $(2;10;3)$. **C.** $(0;0;-3)$. **D.** $(2;0;3)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (-2;5;2)$ và $\vec{b} = (1;-3;-1)$, vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ có tọa độ là

A. $(1;-2;3)$. **B.** $(-3;8;3)$. **C.** $(-1;2;1)$. **D.** $(3;-8;-3)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (-2;6;2)$, vectơ $\dfrac{3}{2}\vec{a}$ có tọa độ là

A. $(-6;9;6)$. **B.** $(-3;9;3)$. **C.** $(6;9;6)$. **D.** $(-3;6;3)$.

Lời giải

.....

.....

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (2;-1;0)$, $\vec{b} = (-1;-3;2)$, $\vec{c} = (-2;-4;-3)$, tọa độ của $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ là

A. $(5;3;-9)$. **B.** $(-5;-3;9)$. **C.** $(-3;-7;-9)$. **D.** $(3;7;9)$.

Lời giải

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (3;0;1)$, $\vec{c} = (1;1;0)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{b}$ thỏa mãn đẳng thức $\vec{b} - \vec{a} + 2\vec{c} = \vec{0}$?

A. $\vec{b} = (-1;2;-1)$. **B.** $\vec{b} = (-2;1;-1)$. **C.** $\vec{b} = (1;-2;1)$. **D.** $\vec{b} = (1;2;1)$.

Lời giải

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;-2;1)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

A. $(2;0;1)$. **B.** $(2;-2;0)$. **C.** $(0;-2;1)$. **D.** $(0;0;1)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;-2;2)$ và $N(1;0;4)$. Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng MN là

A. $(1;-1;3)$. **B.** $(0;2;2)$. **C.** $(2;-2;6)$. **D.** $(1;0;3)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-2)$ và $B(2;2;1)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(-1;-1;-3)$. **B.** $(3;1;1)$. **C.** $(1;1;3)$. **D.** $(3;3;-1)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;5)$. Tìm tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua trục Oy.

A. $A'(2;3;5)$. **B.** $A'(2;-3;-5)$. **C.** $A'(-2;-3;5)$. **D.** $A'(-2;-3;-5)$.

Lời giải

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;2)$ và $B(3;-1;4)$. Tọa độ vectơ $\vec{u}=2\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{OB}$ là

A. $\vec{u}=(-7;7;-8)$. **B.** $\vec{u}=(-7;3;-8)$. **C.** $\vec{u}=(-7;5;-8)$. **D.** $\vec{u}=(-7;9;-8)$.

Lời giải

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;1)$ và $B(3;-2;1)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 25. **D.** 9.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $MNPQ$ có $M(-4;3;3)$, $N(4;-4;2)$ và $P(3;6;-1)$. Biết chu vi của hình bình hành $MNPQ$ bằng $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}^*$ và $a>b$. Tính $a-b$.

A. 4. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 32.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=(1;-2;3)$. Vectơ nào sau đây cùng phương với vectơ $\vec{u}$?

A. $\vec{a}=(2;4;6)$. **B.** $\vec{b}=(-3;6;-9)$.

C. $\vec{c}=\left(\frac{1}{2};-2;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\vec{d}=(-1;2;-3)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;3;-1)$ và $B(-1;-6;2)$. Tìm giao điểm C của đường thẳng AB và trục Ox

A. $C\left(-\frac{1}{3};0;0\right)$. **B.** $C\left(\frac{1}{3};0;0\right)$. **C.** $C(3;0;0)$. **D.** $C(-3;0;0)$.

Lời giải

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(-1;4;1)$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Tính $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{BA}$.

A. 4. **B.** 6. **C.** -4. **D.** -6.

Lời giải

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2;-1;3)$, $\vec{b} = (-1;5;2)$.

a) $\vec{a} + \vec{b} = (-3;6;-1)$.

b) $\vec{a} - \vec{b} = (3;-6;1)$.

c) $3\vec{b} = (-3;15;6)$.

d) $2\vec{a} - \vec{b} = (5;-7;4)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2;1;0)$, $\vec{b} = (-1;0;-2)$, $\vec{c} = (m;-2;4)$.

a) $-2\vec{a} + \vec{b} = (-5;-2;-2)$.

b) $\vec{b} \perp \vec{c} \Leftrightarrow m = 8$.

c) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{2}{5}$.

d) $|\vec{c}| = 2|\vec{a}| \Leftrightarrow m = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho $\triangle ABC$, biết $A(-1;0;3)$, $B(4;2;0)$, $C(3;1;-3)$.

a) $G(2;1;0)$ là trọng tâm tam giác ABC.

b) $D(-2;-1;0)$ là một đỉnh của hình bình hành $ABCD$.

c) $M(a;b;c)$ thoả mãn $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{CB}$. Khi đó $a+b+c = -13$.

d) $M(a;b;c) \in Ox$ sao cho BM vuông góc với đường thẳng AC. Khi đó $4a^2 + b^2 + c^2 = 162$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(2;5;4)$, $C(0;2;0)$.Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ? Khẳng định nào sai?

a) Khi vectơ $\vec{v}=(1;3;-2n)$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ thì n có giá trị là $-\dfrac{1}{2}$.

b) Khi $ABCD$ là hình bình hành thì điểm $D(-1;-1;-1)$.

c) Với điểm $E(x;y;-2)$ để B, C, E thẳng hàng thì $x+y=-\dfrac{1}{2}$.

d) Điểm $M\in(Oxy)$ sao cho A, B, M thẳng hàng có toạ độ là $M(-2;7;0)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;1)$, $B(-1;3;-1)$, $C(5;-3;4)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng? Khẳng định nào sai?

a) Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng -52.

b) Góc $\widehat{ABC}$ là góc tù.

c) Côsin giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ bằng $\dfrac{-23}{\sqrt{638}}$.

d) Điểm $D(1;2;x)$ với $\triangle ABD$ vuông tại B thì giá trị $x=-6$.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCDA'B'C'D'$ có tọa độ các điểm $A(1;2;-1), C(3;-4;1), B'(2;-1;3), D'(0;3;5)$. Giả sử tọa độ điểm $A'(x;y;z)$ thì $x+y+z$ là bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $B(1;2;-3)$ và $C(7;4;-2)$. Gọi $E(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EB}$ khi đó $x+y+z$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$ cho 3 điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;1)$, $C(-3;6;4)$. Gọi M là điểm nằm trên đoạn BC sao cho $MC=2MB$. Tính độ dài đoạn AM (Kết quả được làm tròn ở chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2;2;1)$, $N\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$, $E(2;2;3)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OMN. Tính độ dài IE.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;6;2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M. Tính tỉ số $\dfrac{AM}{BM}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}=(1;1;-2)$ và $\vec{v}=(1;0;m)$. Gọi S là tập hợp các giá trị m để hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau một góc $45°$. Số phần tử của S là bao nhiêu?

Lời giải

CHƯƠNG 3 CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

BÀI 9. KHOẢNG BIẾN THIÊN VÀ KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ

A. LÝ THUYẾT

1. Khoảng biến thiên

Định nghĩa 1. Khoảng biến thiên, kí hiệu R, của mẫu số liệu ghép nhóm là hiệu số giữa đầu mút phải của nhóm cuối cùng và đầu mút trái của nhóm đầu tiên có chứa dữ liệu của mẫu số liệu.

Ý nghĩa

Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau:

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	$\cdots$	$[u_k; u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

Bảng 1

Nếu n_1 và n_{k+1} cùng khác 0 thì $R = u_{k+1} - u_1$.

- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm luôn *lớn hơn* hoặc *bằng* khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.

- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu.

- Khoảng biến thiên $R = u_{k+1} - u_1$ chưa phản ánh được đầy đủ mức độ phân tán của phần lớn các số liệu.

- Hơn nữa, giá trị của R thường tăng vọt khi xuất hiện giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu. Do đó, để phản ánh mức độ phân tán của số liệu, người ta còn dùng các số đặc trưng khác.

2. Khoảng tứ phân vị

Định nghĩa 2. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm cho ở Bảng 1, kí hiệu Δ_Q, là hiệu giữa tứ phân vị thứ ba Q_3 và tứ phân vị thứ nhất Q_1 của mẫu số liệu ghép nhóm đó, tức là:

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1.$$

Ý nghĩa

- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của nửa giữa của mẫu số liệu (tập hợp gồm số liệu nằm chính giữa mẫu số liệu).
- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm càng nhỏ thì dữ liệu càng tập trung xung quanh trung vị.
- Khoảng tứ phân vị được dùng để xác định giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu.
  Giá trị x trong mẫu số liệu là giá trị ngoại lệ nếu $x > Q_3 + 1{,}5\Delta_Q$ hoặc $x < Q_1 - 1{,}5\Delta_Q$.
- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm không bị ảnh hưởng nhiều bởi các giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu.

Ý nghĩa

- Tứ phân vị thứ i, kí hiệu là Q_i, với $i = 1, 2, 3$ của mẫu số liệu ghép nhóm được xác định như sau $Q_i = u_m + \dfrac{\dfrac{in}{4} - C}{n_m}(u_{m+1} - u_m)$. Trong đó:
  * $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ là cỡ mẫu.
  * $[u_m; u_{m+1})$ là nhóm chứa tứ phân vị thứ i.
  * n_m là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ i.
  * $C = n_1 + n_2 + \cdots + n_{m-1}$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 9.1. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm

Phương pháp

- Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau:

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	$\cdots$	$[u_k; u_{k+1})$

Tần số	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

- Nếu n_1 và n_{k+1} cùng khác 0 thì $R = u_{k+1} - u_1$.
- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm luôn lớn hơn hoặc bằng khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.

Ví dụ 1. Dữ liệu về tốc độ của 100 xe ô tô lưu thông trên một đoạn đường cao tốc vào giờ cao điểm, được trích xuất từ camera của cơ quan cảnh sát giao thông. Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu (bảng số liệu hình bên dưới).

Tốc độ (km/h)	$[60;70)$	$[70;80)$	$[80;90)$	$[90;100)$	$[100;110)$
Số xe	10	20	20	35	15

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2. Thời gian hoàn thành bài kiểm tra của các bạn trong lớp $12A$ được cho bảng sau:

Thời gian (phút)	$[25;30)$	$[30;35)$	$[35;40)$	$[40;45)$
Số học sinh	8	16	4	2

a) Tính khoảng biến thiên R cho mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Nếu biết học sinh hoàn thành bài kiểm tra mất 27 phút và muộn nhất mất 43 phút. Hãy so sánh khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm và mẫu số liệu gốc.

Lời giải

.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Dạng 9.2. Ý nghĩa của khoảng biến thiên trong việc đo mức độ phân tán

Phương pháp:

- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm luôn lớn hơn hoặc bằng khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.
- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu.
- Khoảng biến thiên $R = u_{k+1} - u_1$ chưa phản ánh được đầy đủ mức độ phân tán của phần lớn các số liệu.
- Hơn nữa, giá trị của R thường tăng vọt khi xuất hiện giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu. Do đó, để phản ánh mức độ phân tán của số liệu, người ta còn dùng các số đặc trưng khác.

Ví dụ 1. Để chuẩn bị mở một trung tâm thể dục thể thao, anh Sơn đã tiến hành điều tra tuổi thọ của máy chạy bộ (đơn vị: năm) do hai hãng X, Y sản xuất. Bảng biểu thị hai mẫu số liệu mà anh thu thập được qua Internet.

Tuổi thọ	$[2;4)$	$[4;6)$	$[6;8)$	$[8;10)$	$[10;12)$
Số máy của hãng X	7	20	36	20	17
Số máy của hãng Y	0	20	35	35	10

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu nào lớn hơn? Từ đó có thể nói là máy chạy bộ do hãng nào sản xuất có tuổi thọ phân tán hơn?

Lời giải

.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2. Người ta tiến hành phỏng vấn hai nhóm khán giả về một bộ phim mới công chiếu. Nhóm A gồm những khán giả thuộc lứa tuổi $20-30$, nhóm B thuộc lứa tuổi trên 30. Người được hỏi ý kiến phải đánh giá bộ phim bằng cách cho điểm theo một tiêu chí nêu trong phiếu điều tra và sau đó lấy tổng số điểm (thang điểm 100). Bảng dưới đây trình bày kết quả điều tra hai nhóm khán giả:

Tuổi thọ	$[2;4)$	$[4;6)$	$[6;8)$	$[8;10)$	$[10;12)$
Số người của nhóm A	7	20	36	20	17
Số người của nhóm B	0	20	35	35	10

Ý kiến đánh giá của nhóm khán giả nào phân tán hơn?

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 3. Bảng dưới biểu thị kết quả điều tra thời gian sử dụng Internet hằng ngày của một số người.

Thời gian (phút)	$30;60)$	$[60;90)$	$[90;120)$	$[120;150)$	$[150;180)$
Số người	2	4	10	5	3

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu đã cho. Kết quả cho biết điều gì?

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Dạng 9.3. Ý nghĩa của khoảng biến thiên trong việc đo mức độ phân tán

Phương pháp:

- Tứ phân vị thứ k, kí hiệu là Q_k, với $k = 1, 2, 3$ của mẫu số liệu ghép nhóm được xác định như sau $Q_k = u_m + \dfrac{\dfrac{kn}{4} - C}{n_m}(u_{m+1} - u_m)$. Trong đó:
  - $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ là cỡ mẫu.
  - $[u_m; u_{m+1})$ là nhóm chứa tứ phân vị thứ i.
  - n_m là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ i.
  - $C = n_1 + n_2 + \cdots + n_{m-1}$.
- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm cũng được xác định dựa trên tứ phân vị thứ nhất và tứ phân vị thứ ba như đối với mẫu số liệu không ghép nhóm.
- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm có kí hiệu Δ_Q, là hiệu giữa tứ phân vị thứ ba Q_3 và tứ phân vị thứ nhất Q_1 của mẫu số liệu ghép nhóm đó, tức là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$.
- Bước 1: Xác định cỡ mẫu, tính tứ phân vị thứ nhất và tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu.
- Bước 2: Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu.

Ví dụ 1. Một người ghi lại thời gian đàm thoại của một số cuộc gọi cho kết quả như bảng sau:

Thời gian t (phút)	$0 \le t < 1$	$1 \le t < 2$	$2 \le t < 3$	$3 \le t < 4$	$4 \le t < 5$
Số cuộc gọi	8	17	25	20	10

Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Bạn An rất thích chạy bộ. Thời gian chạy bộ mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn An được thống kê lại ở bảng sau:

Thời gian t (phút)	$[20;25)$	$[25;30)$	$[30;35)$	$[35;40)$	$[40;45)$
Số ngày	6	6	4	1	1

Hãy tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trong bảng trên.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

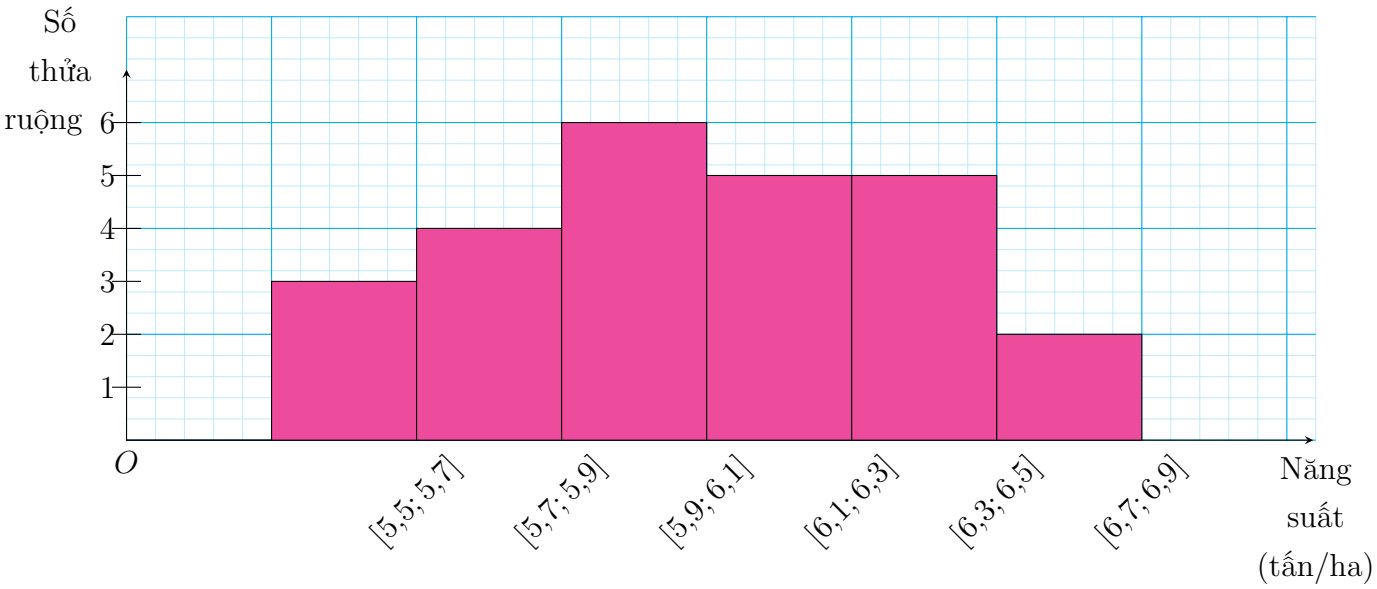
.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Khảo sát năng suất của một số thửa ruộng được minh họa ở biểu đồ sau:



a) Có bao nhiêu thửa ruộng được khảo sát?

b) Lập bảng tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm tương ứng của mẫu số liệu trên.

c) Hãy xác định khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Dạng 9.4. Ý nghĩa của khoảng tứ phân vị trong việc đo mức độ phân tán

Phương pháp

• Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của nửa giữa của mẫu số liệu (tập hợp gồm 50% số liệu nằm chính giữa mẫu số liệu).

• Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm càng nhỏ thì dữ liệu càng tập trung xung quanh trung vị.
• Khoảng tứ phân vị được dùng để xác định giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu.
Giá trị x trong mẫu số liệu là giá trị ngoại lệ nếu $x > Q_3 + 1{,}5\Delta_Q$ hoặc $x < Q_1 - 1{,}5\Delta_Q$
• Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm không bị ảnh hưởng nhiều bởi các giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu.

Ví dụ 1. Kết quả đo chiều cao của 100 cây dừa trồng sau 10 năm tại một vườn trái cây ở Bến Tre cho ở bảng sau

Chiều cao (m)	[8,4; 8,6)	[8,6; 8,8)	[8,8; 9,0)	[9,0; 9,2)	[9,2; 9,4)
Số cây	5	12	25	44	14

a) Hãy tìm khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Trong 100 cây dừa trên có 1 cây cao 8,4 m. Hỏi chiều cao của cây dừa này có phải là giá trị ngoại lệ không?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

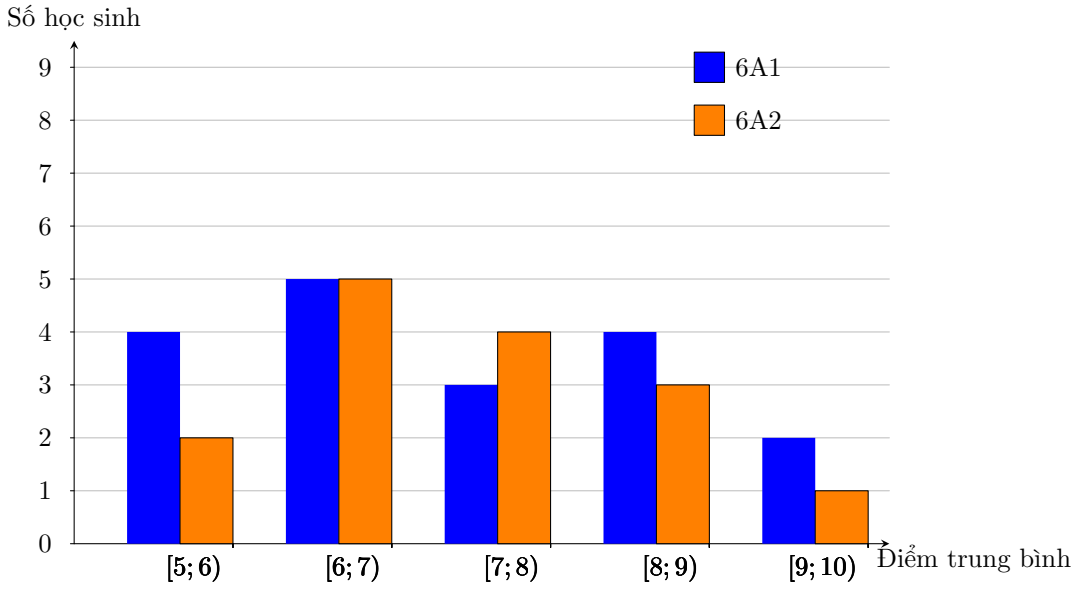
.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Biểu đồ sau mô tả kết quả điều tra về điểm trung bình năm học của học sinh hai trường A và B



a) Hãy xác định giá trị đại diện cho mỗi nhóm và lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên.

b) Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm thì học sinh trường nào có điểm trung bình đều hơn?

Lời giải

C. LUYỆN TẬP

PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Bảng sau thống kê khối lượng một số quả măng cụt được lựa chọn ngẫu nhiên trong một thùng hàng.

Khối lượng (gam)	$[80;82)$	$[82;84)$	$[84;86)$	$[86;88)$	$[88;90)$
Số quả	17	20	25	16	12

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. 10 gam. **B.** 12 gam. **C.** 2 gam. **D.** 20 gam.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Một công ty cung cấp nước sạch thống kê lượng nước các hộ gia đình trong một khu vực tiêu thụ trong một tháng ở bảng sau.

Lượng nước tiêu thụ m^3	$[3;6)$	$[6;9)$	$[9;12)$	$[12;15)$	$[15;18)$
Số hộ gia đình	20	60	40	32	7

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. $3m^3$. **B.** $15m^3$. **C.** $18m^3$. **D.** $20m^3$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....

Câu 3. Người ta thống kê tốc độ của một số xe ô tô di chuyển qua một trạm kiểm soát trên đường cao tốc trong một khoảng thời gian ở bảng sau.

Tốc độ (km/h)	[75; 80)	[80; 85)	[85; 90)	[90; 95)	[95; 100)
Số xe	15	22	28	34	19

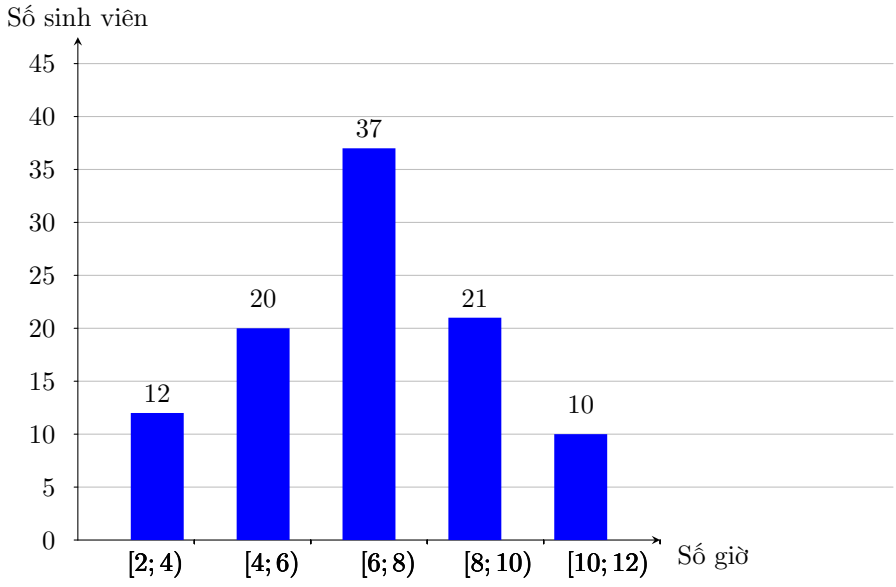
Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. 75 km/h. **B.** 25 km/h. **C.** 100 km/h. **D.** 5 km/h.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 4. Kết quả điều tra về số giờ làm thêm trong một tuần của 100 sinh viên được cho ở biểu đồ sau.



Khoảng biến thiên của mẫu số liệu được cho trong biểu đồ trên là

A. 2. **B.** 3. **C.** 10. **D.** 37.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Thâm niên công tác của các công nhân hai nhà máy A và B được cho trong bảng sau

Thăm niên công tác (năm)	$[0;5)$	$[5;10)$	$[10;15)$	$[15;20)$	$[20;25)$
Số công nhân nhà máy A	35	13	12	12	8
Số công nhân nhà máy B	19	26	24	11	0

Sử dụng khoảng biến thiên, hãy cho biết thâm niên công tác các công nhân của nhà máy nào có độ phân tán lớn hơn?

A. Không so sánh được.

B. Nhà máy A có thâm niên công tác của các công nhân phân tán lớn hơn nhà máy B.

C. Nhà máy A có thâm niên công tác của các công nhân phân tán nhỏ hơn nhà máy B.

D. Nhà máy A có thâm niên công tác của các công nhân phân tán bằng nhà máy B.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6. Kết quả khảo sát cân nặng của 40 quả cam Canh ở mỗi lô hàng 1 và lô hàng 2 được cho ở bảng sau

Cân nặng (gam)	$[100;110)$	$[110;120)$	$[120;130)$	$[130;140)$	$[140;150)$
Số quả cam ở lô hàng 1	0	10	11	19	0
Số quả cam ở lô hàng 2	3	15	12	7	3

Sử dụng khoảng biến thiên, hãy cho biết cân nặng của 40 quả cam Canh của lô hàng nào có độ phân tán lớn hơn.

A. Không so sánh được.

B. Lô hàng 2 có cân nặng của 40 quả cam Canh phân tán lớn hơn lô hàng 1.

C. Lô hàng 1 có cân nặng của 40 quả cam Canh phân tán lớn hơn lô hàng 2.

D. Lô hàng 1 có cân nặng của 40 quả cam Canh phân tán bằng lô hàng 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7. Bạn Lan thống kê lại chiều cao (đơn vị: cm) của các học sinh nữ lớp $10B$ và lớp $10C$ ở bảng sau. Chọn đáp án có khẳng định đúng.

Chiều cao(cm)	$[150;155)$	$[155;160)$	$[160;165)$	$[165;170)$	$[170;175)$
Số học sinh nữ lớp $10B$	0	5	13	7	0
Số học sinh nữ lớp $10C$	2	10	9	3	1

A. Chiều cao của các bạn nữ lớp $10B$ đồng đều hơn chiều cao của các bạn nữ lớp $10C$.

B. Chiều cao của các bạn nữ lớp $10C$ đồng đều hơn chiều cao của các bạn nữ lớp $10B$.

C. Chiều cao của các bạn nữ lớp $10B$ và lớp $10C$ đồng đều như nhau.

D. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của các bạn nữ lớp 10C nhỏ hơn khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của các bạn nữ lớp $10B$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 8. Một hãng xe ôtô thống kê lại số lần gặp sự cố về động cơ của 100 chiếc xe cùng loại sau 2 năm sử dụng đầu tiên ở bảng sau. Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm này? (Làm tròn các kết quả đến hàng phần trăm).

Số lần gặp sự cố	[0,5; 2,5)	[2,5; 4,5)	[4,5; 6,5)	[6,5; 8,5)	[8,5; 10,5)
Số xe	17	33	25	20	5

A. 5,32. **B.** 3,52. **C.** 2,53. **D.** 5,23.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 9. Kiểm tra điện lượng của một số viên pin tiểu do một hãng sản xuất thu được kết quả sau. Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm này? (Làm tròn các kết quả đến hàng phần trăm).

Điện lượng (nghìn mAh)	[0,9; 0,95)	[0,95; 1,0)	[1,0; 1,05)	[1,05; 1,1)	[1,1; 1,15)
Số viên pin	10	20	35	15	5

A. 0,06. **B.** 0,08. **C.** 0,07. **D.** 0,09.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 10. Một người thống kê lại thời gian thực hiện các cuộc gọi điện thoại của người đó trong một tuần ở bảng sau. Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm này.

Thời gian (đơn vị: giây)	$[0;60)$	$[60;120)$	$[120;180)$	$[180;240)$	$[240;300)$	$[300;360)$
Số cuộc gọi	8	10	7	5	2	1

A. 100. **B.** 110. **C.** 120. **D.** 130.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 11. Một phòng khám thống kê số bệnh nhân đến khám bệnh mỗi ngày trong tháng 4 năm 2022 ở bảng sau. Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm này. (Làm tròn các kết quả đến hàng phần chục).

Số bệnh nhân	$[0{,}5;10{,}5)$	$[10{,}5;20{,}5)$	$[20{,}5;30{,}5)$	$[30{,}5;40{,}5)$	$[40{,}5;50{,}5)$
Số ngày	7	8	7	6	2

A. 20,3. **B.** 20,2. **C.** 20,4. **D.** 20,5.

Lời giải

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 12. Cân nặng của một số lợn con mới sinh thuộc hai giống A và B được cho ở bảng sau. Chọn đáp án có khẳng định đúng.

Cân nặng (kg)	[1,0; 1,1)	[1,1; 1,2)	[1,2; 1,3)	[1,3; 1,4)
Giống A	8	28	32	17
Giống B	13	14	24	14

A. Cân nặng của lợn con mới sinh thuộc giống A đồng đều hơn cân nặng của lợn con mới sinh thuộc giống B.

B. Cân nặng trung bình của lợn con mới sinh giống A nhỏ hơn giống B.

C. Cân nặng của lợn con mới sinh thuộc giống B đồng đều hơn cân nặng của lợn con mới sinh thuộc giống A.

D. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về cân nặng của lợn con mới sinh thuộc giống A nhỏ hơn khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về cân nặng của lợn con mới sinh thuộc giống B.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 13. Một mẫu số liệu ghép nhóm có khoảng tứ phân vị là 4,43 và tứ phân vị thứ 3 là $\dfrac{68}{3}$ thì giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu ghép nhóm đó phải là bao nhiêu?

A. $x > 29{,}31$. **B.** $x > 1{,}51$. **C.** $x < 51{,}23$. **D.** $x \leq 25{,}11$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 14. Một mẫu số liệu ghép nhóm có tứ phân vị thứ 1 là 254,9 và tứ phân vị thứ 3 là 417,25 thì điều kiện giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu ghép nhóm đó là

A. $\left[\begin{array}{l} x \geq 12{,}1 \\ x \leq 1{,}35 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x > 11{,}2 \\ x < 0{,}375 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} x > 660{,}775 \\ x < 11{,}375 \end{array}\right.$. **D.** $x > 11{,}375$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 15. Giáo viên chủ nhiệm thống kê chiều cao (đơn vị cm) của các bạn học sinh nữ của lớp $12A$ ở bảng sau

Chiều cao	$[150;155)$	$[155;160)$	$[160;165)$	$[165;170)$	$[170;175)$
Số học sinh	2	4	10	0	1

Xác định khoảng biến thiên của chiều cao của các bạn học sinh nữ lớp $12A$

A. 20. **B.** 10. **C.** 5. **D.** 25.

Lời giải

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 16. Bảng dưới đây thống kê cân nặng (gam) của 100 quả xoài cát Hòa Lộc sau khi thu hoạch tại một khu vườn

Cân nặng	$[200;205)$	$[205;300)$	$[300;305)$	$[305;310)$
Số lượng xoài	10	15	45	30

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. 35. **B.** 60. **C.** 55. **D.** 110.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 17. Thời gian và số ngày tập thể dục của bác T và bác H trong một tháng (30 ngày) được thống kê theo bảng dưới đây

Thời gian tập (phút)	$[15;20)$	$[25;30)$	$[30;35)$
Số ngày tập của bác T	10	15	5
Số ngày tập của bác H	9	21	0

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Khoảng biến thiên thời gian tập của bác T bằng 10.

B. Khoảng biến thiên thời gian tập của bác H bằng 20.

C. Độ phân tán thời gian tập của bác T cao hơn độ phân tán thời gian tập của bác H.

D. Độ phân tán thời gian tập của bác T thấp hơn độ phân tán thời gian tập của bác H.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 18. Bảng sau thống kê khối lượng một số quả măng cụt được lựa chọn ngẫu nhiên trong một thùng hàng.

Khối lượng (gam)	$[80;82)$	$[82;84)$	$[84;86)$	$[86;88)$	$[88;90)$
Số quả	17	20	25	16	12

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. 10 gam. **B.** 12 gam. **C.** 2 gam. **D.** 20 gam.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 19. Một công ty cung cấp nước sạch thống kê lượng nước các hộ gia đình trong một khu vực tiêu thụ trong một tháng ở bảng sau.

Khối lượng (gam)	$[80;82)$	$[82;84)$	$[84;86)$	$[86;88)$	$[88;90)$
Số hộ gia đình	20	60	40	32	7

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. 3m^3. **B.** $15\ \text{m}^3$. **C.** $18\ \text{m}^3$. **D.** $20\ \text{m}^3$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 20. Người ta thống kê tốc độ của một số xe ôtô di chuyển qua một trạm kiểm soát trên đường cao tốc trong một khoảng thời gian ở bảng sau.

Tốc độ (km/h)	$[75;80)$	$[80;85)$	$[85;90)$	$[90;95)$	$[95;100)$
Số xe	15	22	28	34	19

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. 75 km/h. **B.** 25 km/h. **C.** 100 km/h. **D.** 5 km/h.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

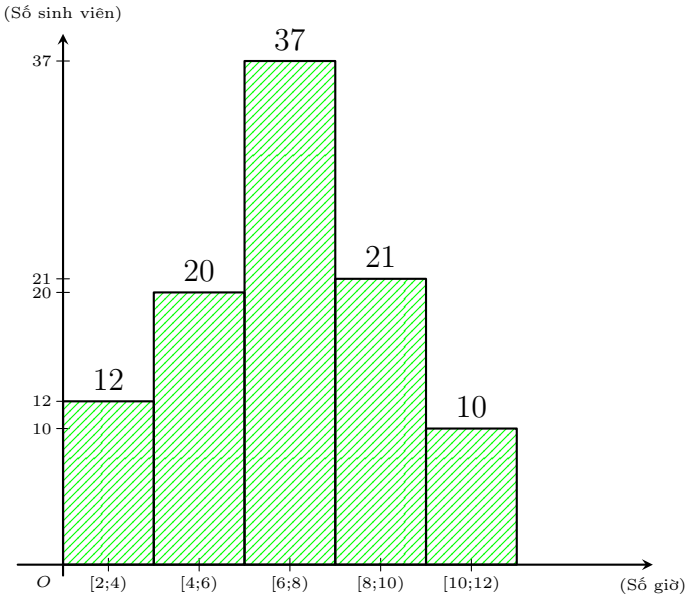
.....

.....

.....

.....

Câu 21. Kết quả điều tra về số giờ làm thêm trong một tuần của 100 sinh viên được cho ở biểu đồ sau.



Khoảng biến thiên của mẫu số liệu được cho trong biểu đồ trên là

A. 2. **B.** 3. **C.** 10. **D.** 37.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 22. Thâm niên công tác của các công nhân hai nhà máy Avà Bđược cho trong bảng sau

Thăm niên công tác (năm)	$[0;5)$	$[5;10)$	$[10;15)$	$[15;20)$	$[20;25)$
Số công nhân nhà máy A	35	13	12	12	8
Số công nhân nhà máy B	19	26	24	11	0

Sử dụng khoảng biến thiên, hãy cho biết thâm niên công tác các công nhân của nhà máy nào có độ phân tán lớn hơn?

A. Không so sánh được.

B. Nhà máy A có thâm niên công tác của các công nhân phân tán lớn hơn nhà máy B.

C. Nhà máy A có thâm niên công tác của các công nhân phân tán nhỏ hơn nhà máy B.

D. Nhà máy A có thâm niên công tác của các công nhân phân tán bằng nhà máy B.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 23. Kết quả khảo sát cân nặng của 40 quả cam Canh ở mỗi lô hàng 1 và lô hàng 2 được cho ở bảng sau

Cân nặng (gam)	$[100;110)$	$[110;120)$	$[120;130)$	$[130;140)$	$[140;150)$
Số quả cam ở lô hàng 1	0	10	11	19	0
Số quả cam ở lô hàng 2	3	15	12	7	3

Sử dụng khoảng biến thiên, hãy cho biết cân nặng của 40 quả cam Canh của lô hàng nào có độ phân tán lớn hơn.

A. Không so sánh được.

B. Lô hàng 2 có cân nặng của 40 quả cam Canh phân tán lớn hơn lô hàng 1.

C. Lô hàng 1 có cân nặng của 40 quả cam Canh phân tán lớn hơn lô hàng 2.

D. Lô hàng 1 có cân nặng của 40 quả cam Canh phân tán bằng lô hàng 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

. . . . . .
. . . . . .

Câu 24. Bạn Lan thống kê lại chiều cao (đơn vị: cm) của các học sinh nữ lớp 10B và lớp 10C ở bảng sau. Chọn đáp án có khẳng định đúng.

Chiều cao(cm)	$[150;155)$	$[155;160)$	$[160;165)$	$[165;170)$	$[170;175)$
Số học sinh nữ lớp 10B	0	5	13	7	0
Số học sinh nữ lớp 10C	2	10	9	3	1

A. Chiều cao của các bạn nữ lớp 10B đồng đều hơn chiều cao của các bạn nữ lớp 10C.
B. Chiều cao của các bạn nữ lớp 10C đồng đều hơn chiều cao của các bạn nữ lớp 10B.
C. Chiều cao của các bạn nữ lớp 10B và lớp 10C đồng đều như nhau.
D. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của các bạn nữ lớp 10C nhỏ hơn khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của các bạn nữ lớp 10B.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 25. Một hãng xe ôtô thống kê lại số lần gặp sự cố về động cơ của 100 chiếc xe cùng loại sau 2 năm sử dụng đầu tiên ở bảng sau. Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm này? (Làm tròn các kết quả đến hàng phần trăm).

Số lần gặp sự cố	$[0{,}5;2{,}5)$	$[2{,}5;4{,}5)$	$[4{,}5;6{,}5)$	$[6{,}5;8{,}5)$	$[8{,}5;10{,}5)$
Số xe	17	33	25	20	5

A. 5,32. **B.** 3,52. **C.** 2,53. **D.** 5,23.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 26. Kiểm tra điện lượng của một số viên pin tiểu do một hãng sản xuất thu được kết quả sau. Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm này? (Làm tròn các kết quả đến hàng phần trăm).

Điện lượng (nghìn mAh)	[0,9; 0,95)	[0,95; 1,0)	[1,0; 1,05)	[1,05; 1,1)	[1,1; 1,15)
Số viên pin	10	20	35	15	5

A. 0,06. **B.** 0,08. **C.** 0,07. **D.** 0,09.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 27. Một người thống kê lại thời gian thực hiện các cuộc gọi điện thoại của người đó trong một tuần ở bảng sau. Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm này?

Thời gian (đơn vị: giây)	[0; 60)	[60; 120)	[120; 180)	[180; 240)	[240; 300)	[300; 360)
Số cuộc gọi	8	10	7	5	2	1

A. 100. **B.** 110. **C.** 120. **D.** 130.

Lời giải

.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 28. Một phòng khám thống kê số bệnh nhân đến khám bệnh mỗi ngày trong tháng 4 năm 2022 ở bảng sau. Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm này? (Làm tròn các kết quả đến hàng phần chục).

Số bệnh nhân	[0,5; 10,5)	[10,5; 20,5)	[20,5; 30,5)	[30,5; 40,5)	[40,5; 50,5)
Số ngày	7	8	7	6	2

A. 20,3. **B.** 20,2. **C.** 20,4. **D.** 20,5.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 29. Cân nặng của một số lợn con mới sinh thuộc hai giống A và B được cho ở bảng sau. Chọn đáp án có khẳng định đúng.

Cân nặng (kg)	[1,0; 1,1)	[1,1; 1,2)	[1,2; 1,3)	[1,3; 1,4)
Giống A	8	28	32	17
Giống B	13	14	24	14

A. Cân nặng của lợn con mới sinh thuộc giống A đồng đều hơn cân nặng của lợn con mới sinh thuộc giống B.

B. Cân nặng trung bình của lợn con mới sinh giống A nhỏ hơn giống B.

C. Cân nặng của lợn con mới sinh thuộc giống B đồng đều hơn cân nặng của lợn con mới sinh thuộc giống A.

D. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về cân nặng của lợn con mới sinh thuộc giống A nhỏ hơn khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về cân nặng của lợn con mới sinh thuộc giống B.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 30. Một mẫu số liệu ghép nhóm có khoảng tứ phân vị là 4,43 và tứ phân vị thứ 3 là $\dfrac{68}{3}$ thì giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu ghép nhóm đó phải là bao nhiêu?

A. $x > 29{,}31$. **B.** $x > 1{,}51$. **C.** $x < 51{,}23$. **D.** $x \leq 25{,}11$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 31. Một mẫu số liệu ghép nhóm có tứ phân vị thứ 1 là 254,9 và tứ phân vị thứ 3 là 417,25 thì điều kiện giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu ghép nhóm đó là

A. $\left[\begin{array}{l} x \geq 12{,}1 \\ x \leq 1{,}35 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x > 11{,}2 \\ x < 0{,}375 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} x > 660{,}775 \\ x < 11{,}375 \end{array}\right.$. **D.** $x > 11{,}375$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 32. Giáo viên chủ nhiệm thống kê chiều cao (đơn vị cm) của các bạn học sinh nữ của lớp 12A ở bảng sau

Chiều cao	$[150;155)$	$[155;160)$	$[160;165)$	$[165;170)$	$[170;175)$
Số học sinh	2	4	10	0	1

Xác định khoảng biến thiên của chiều cao của các bạn học sinh nữ lớp 12A

A. 20. **B.** 10. **C.** 5. **D.** 25.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 33. Bảng dưới đây thống kê cân nặng (gam) của 100 quả xoài cát Hòa Lộc sau khi thu hoạch tại một khu vườn

Cân nặng	$[200;205)$	$[205;300)$	$[300;305)$	$[305;310)$
Số lượng xoài	10	15	45	30

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. 35. **B.** 60. **C.** 55. **D.** 110.

Lời giải

.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 34. Thời gian và số ngày tập thể dục của bác T và bác H trong một tháng (30 ngày) được thống kê theo bảng dưới đây

Thời gian tập (phút)	$[15;20)$	$[25;30)$	$[30;35)$
Số ngày tập của bác T	10	15	5
Số ngày tập của bác H	9	21	0

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Khoảng biến thiên thời gian tập của bác T bằng 10.

B. Khoảng biến thiên thời gian tập của bác H bằng 20.

C. Độ phân tán thời gian tập của bác Tcao hơn độ phân tán thời gian tập của bác H.

D. Độ phân tán thời gian tập của bác T thấp hơn độ phân tán thời gian tập của bác H.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 35. Bảng dưới đây biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về số tiền (đơn vị: nghìn đồng) mà 12 khách hàng mua sách ở một cửa hàng trong một ngày.

Giá tiền	$[40;50)$	$[50;60)$	$[60;70)$
Số lượng khách mua	2	6	4

Xác định khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên

A. $\frac{65}{6}$. **B.** $\frac{55}{3}$. **C.** $\frac{12}{5}$. **D.** $\frac{312}{5}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 36. Bảng sau thống kê cân nặng của 50 quả xoài Thanh Ca được lựa chọn ngẫu nhiên sau khi thu hoạch ở một nông trường

Cân nặng(g)	$[250;290)$	$[290;330)$	$[330;370)$	$[370;410)$	$[410;450)$
Số quả xoài	3	13	18	11	5

Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

A. $\frac{9080}{143}$. **B.** $\frac{980}{143}$. **C.** $\frac{908}{143}$. **D.** $\frac{9080}{145}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

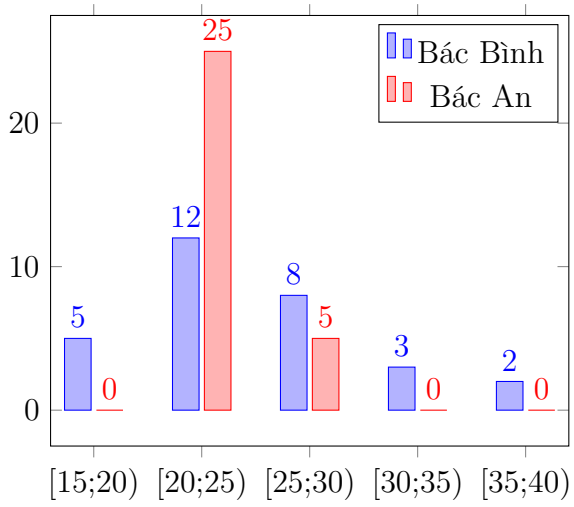
.....

.....

.....

.....

Câu 37. Biểu đồ dưới đây thống kê thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày trong tháng 9/2022 của bác Bình và bác An.



Hỏi giữa bác Bình và bác An thì người nào có thời gian luyện tập đều?

A. Bác Bình có thời gian tập đều hơn.

B. Bác An có thời gian tập đều hơn.

C. Không xác định được.

D. Bác Bình và Bác An có thời gian tập đều như nhau.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 38. Bạn Trang thống kê lại chiều cao (đơn vị: cm) của các bạn học sinh nữ lớp 12C và lớp 12D ở bảng sau

Lớp \ Chiều cao	[155; 160]	[160; 165]	[165; 170]	[170; 175]	[175; 180]	[180; 185]
12C	2	7	12	3	0	1
12D	5	9	8	2	1	0

Hãy so sánh độ phân tán của nửa giữa hai mẫu số liệu chiều cao của các học sinh nữ lớp 12C và 12D.

A. Mẫu số liệu của lớp 12C ít phân tán hơn mẫu số liệu của lớp 12D.

B. Mẫu số liệu của lớp 12D ít phân tán hơn mẫu số liệu của lớp 12C.

C. Mẫu số liệu của lớp 12C và mẫu số liệu của lớp 12D không phân tán.

D. Không xác định được.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 39. Giả sử kết quả khảo sát hai khu vực A và B về độ tuổi kết hôn của một số phụ nữ vừa lập gia đình được cho ở bảng sau

Tuổi kết hôn	$[19;22]$	$[22;25]$	$[25;28]$	$[28;31]$	$[31;34]$
Số phụ nữ khu vực A	10	27	31	25	7
Số phụ nữ khu vực B	47	40	11	2	0

Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị thì phụ nữ ở khu vực nào có độ tuổi kết hôn đồng đều hơn?

A. Phụ nữ ở khu vực B có độ tuổi kết hôn đồng đều hơn.

B. Phụ nữ ở khu vực A có độ tuổi kết hôn đồng đều hơn.

C. Phụ nữ ở khu vực A và khu vực B có độ tuổi kết hôn đồng đều như nhau.

D. Không xác định được.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 40. Kết quả đo chiều cao của 100 cây keo 3 năm tuổi tại một nông trường được cho ở bảng sau

Chiều cao (m)	$[8,4;8,6)$	$[8,6;8,8)$	$[8,8;9,0)$	$[9,0;9,2)$	$[9,2;9,4)$
Số cây	5	12	25	44	14

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Cây keo cao 8,4 m là cây keo có chiều cao là giá trị ngoại lệ.

B. Cây keo cao 8,4 m là cây keo có chiều cao không là giá trị ngoại lệ.

C. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là $\Delta_Q = 0{,}5$.

D. Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là 7.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 41. Bảng tần số ghép nhóm dưới đây thể hiện kết quả điều tra về tuổi thọ trung bình của nam giới và nữ giới ở 50 quốc gia.

Giới tính / Nhóm (Tuổi thọ)	Nam	Nữ
$[50;55)$	4	3
$[55;60)$	7	4
$[60;65)$	4	5
$[65;70)$	6	3
$[70;75)$	15	7
$[75;80)$	12	14
$[80;85)$	2	13
$[85;90)$	0	1

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Tuổi thọ của nam giới đều hơn tuổi thọ của nữ giới.

B. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu nam giới là $\Delta_Q = 14$.

C. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu nữ giới là $\Delta_Q = 16$.

D. Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu nam giới là 63.

Lời giải

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Thời gian chờ khám bệnh của hai phòng phám 1 và phòng khám 2 ở thành phố Xđược cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	$[0;5)$	$[5;10)$	$[10;15)$	$[15;20)$
Phòng khám số 1 (Số bệnh nhân)	3	12	15	18
Phòng khám số 2 (Số bệnh nhân)	5	10	12	0

Xét tính đúng/sai các mệnh đề sau:

a) Tổng số bệnh nhân chờ khám bệnh ở phòng khám số 1 dưới 5 phút là 3.

b) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian chờ khám bệnh của phòng khám số 1 là $R_1 = 15$.

c) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian chờ khám bệnh của phòng khám số 2 là $R_2 = 20$.

d) Thời gian chờ khám bệnh ở phòng khám số 2 phân tán hơn thời gian chờ khám bệnh ở phòng khám số 1.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 2. Thống kê thu nhập theo tháng (đơn vị: triệu đồng) của một nhóm người chạy Grab được cho trong bảng sau:

Thu nhập (triệu đồng)	$[3;5]$	$[5;7]$	$[7;9]$	$[9;11]$
Số người	5	10	5	2

Xét tính đúng/sai các mệnh đề sau:

a) Cỡ mẫu là $n = 22$.

b) Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_1 = 10$.

c) Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_3 = 5$.

d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là $\Delta Q = 5$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Người ta theo dõi sự thay đổi cân nặng, được tính bằng hiệu cân nặng trước và sau ba tháng áp dụng chế độ ăn kiêng của một số người cho kết quả sau:

Thay đổi cân nặng (kg)	$[-1;0]$	$[0;1]$	$[1;2]$	$[2;3]$	$[3;4]$
Số người nam	6	4	3	2	1
Số người nữ	5	6	3	1	0

Xét tính đúng/sai các mệnh đề sau:

a) Số người thay đổi cân nặng theo chiều hướng giảm cân là 11.

b) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về sự thay đổi cân nặng của nam là $R_1 = 5$.

c) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về sự thay đổi cân nặng của nữ là $R_2 = 3$.

d) Nếu biết nữ tăng cân nhiều nhất là 2 kg và giảm cân được nhiều nhất là 1 kg thì khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc là 1.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Điểm kiểm tra cuối khóa môn Tiếng Anh của hai lớp ở một trung tâm ngoại ngữ được thống kê trong các bảng sau

Bảng a. Điểm của lớp A

Điểm	Số học viên
[50; 60]	8
[60; 70]	20
[70; 80]	10
[80; 90]	7
[90; 100]	5

Bảng b. Điểm của lớp B

Điểm	Số học viên
[50; 60]	15
[60; 70]	25
[70; 80]	30
[80; 90]	20
[90; 100]	10

Xét tính đúng/sai các mệnh đề sau:

a) Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ở Bảng a là [60; 70].

b) Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ở Bảng b là [90; 100].

c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ở Bảng a là 10.

d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ở Bảng b là 20.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 5. Điểm kiểm tra cuối khóa môn Tiếng Anh của hai lớp ở một trung tâm ngoại ngữ được thống kê trong các bảng sau:

Bảng a. Điểm của lớp A

Điểm	Số học viên
[50; 60]	8
[60; 70]	20
[70; 80]	17
[80; 90]	10
[90; 100]	5

Bảng b. Điểm của lớp B

Điểm	Số học viên
[50; 60]	15
[60; 70]	20
[70; 80]	30
[80; 90]	20
[90; 100]	15

Xét tính đúng/sai các mệnh đề sau:

a) Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ở Bảng a là [60; 70].

b) Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ở Bảng b là [90; 100].

c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ở Bảng a là 10.

d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ở Bảng b là 20.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6. Cho mẫu số liệu thống kê chiều cao của các học sinh lớp 12A1, 12A2 và 12A3 của một trường THPTnhư bảng sau:

Chiều cao (đơn vị: cm)	[150; 155]	[155; 160]	[160; 165]	[165; 170]	[170; 175]	[175; 180]
Số học sinh lớp 12A1	1	3	6	5	3	2
Số học sinh lớp 12A2	0	2	5	7	1	0
Số học sinh lớp 12A3	0	1	3	7	2	0

Xét tính đúng/sai các mệnh đề sau:

a) Nếu dựa vào khoảng tứ phân vị thì mẫu số liệu thống kê chiều cao của học sinh lớp 12A1 phân tán hơn so với 12A2.

b) Nếu dựa vào khoảng tứ phân vị thì mẫu số liệu thống kê chiều cao của học sinh lớp 12A2 phân tán hơn so với 12A3.

c) Ở lớp 12A2 có một học sinh có chiều cao là 173 cm, chiều cao của học sinh đó là giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu của lớp 12A2.

d) Ở lớp 12A3 có một học sinh có chiều cao là 177 cm, chiều cao của học sinh đó là giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu của lớp 12A3.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 7. Để chuẩn bị mở một trung tâm thể dục thể thao, ông Adã tiến hành điều tra tuổi thọ (đơn vị tính bằng năm) của máy chạy bộ do ba hãng X, Y, Z sản xuất. Bảng số liệu sau biểu thị các mẫu số liệu mà anh thu được trong quá trình nghiên cứu:

Tuổi thọ	$[4;6]$	$[6;8]$	$[8;10]$	$[10;12]$
Số máy của hãng X	7	20	20	15
Số máy của hãng Y	10	35	30	5
Số máy của hãng Z	5	10	20	15

Xét tính đúng/sai các mệnh đề sau:

a) Khoảng biến thiên của máy chạy bộ do hãng X sản xuất bằng 10.

b) Khoảng biến thiên của máy chạy bộ do hãng Y sản xuất không vượt quá 6.

c) Khoảng biến thiên của máy chạy bộ do hãng Z sản xuất thì lớn hơn khoảng biến thiên của máy chạy bộ do hãng Y sản xuất.

d) Nếu dựa vào khoảng biến thiên thì máy chạy bộ do hãng Z sản xuất có tuổi thọ phân tán nhất trong ba hãng.

Lời giải

.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 8. Điểm kiểm tra cuối học kỳ 2 môn Toán (thang điểm 10) của hai lớp 12A và 12B ở một trường THPT được thống kê trong các bảng sau:

Bảng A. Điểm của lớp 12A

Điểm	Số học sinh
[6,5; 7)	5
[7; 7,5)	9
[7,5; 8)	8
[8; 8,5)	7
[8,5; 9)	5
[9; 9,5)	4
[9,5; 10]	2

Bảng B. Điểm của lớp 12B

Điểm	Số học sinh
[6,5; 7)	3
[7; 7,5)	6
[7,5; 8)	7
[8; 8,5)	9
[8,5; 9)	7
[9; 9,5)	4
[9,5; 10]	2

Xét tính đúng/sai các mệnh đề sau:

a) Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ở Bảng A là [7; 7.5).

b) Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ở Bảng B là [8.5; 9).

c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ở Bảng A thì lớn hơn 2.

d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ở Bảng B nhỏ hơn khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ở Bảng A.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Cho bảng thống kê thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày trong tháng 9/2022 của Bác An và Bác Bình. Gọi R_A, R_B lần lượt là khoảng biến thiên của mẫu số liệu về thời gian tập thể dục của Bác An và Bác Bình, khi đó $R_A + R_B$ bằng

Thời gian (phút)	$[15;20)$	$[20;25)$	$[25;30)$	$[30;35)$	$[25;40)$
Bác An	5	12	8	3	2
Bác Bình	0	20	5	5	0

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Một hãng xe ôtô thống kê lại số lần gặp sự cố về động cơ của 100 chiếc xe cùng loại sau hai năm sử dụng đầu tiên được cho ở bảng sau:

Số lần gặp sự cố	$[1;2)$	$[3;4)$	$[5;6)$	$[7;8)$	$[9;10]$
Số xe	17	33	25	20	5

Khoảng biến thiên của bảng số liệu trên là bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Bảng tần số ghép nhóm dưới đây thể hiện kết quả điều tra về tuổi thọ trung bình của nam giới ở 50 quốc gia.

Độ tuổi	$[50;55)$	$[55;60)$	$[60;65)$	$[65;70)$	$[70;75)$	$[75;80)$	$[80;85)$	$[85;90]$
Tần số	4	7	4	6	16	12	2	0

Hãy xác định khoảng biến thiên của tuổi thọ trung bình của nam giới trong mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Bạn Trang thống kê lại chiều cao (đơn vị: cm) của các bạn học sinh nữ lớp 12Cở bảng sau:

Chiều cao	$[155;160)$	$[160;165)$	$[165;170)$	$[170;175)$	$[175;180)$	$[180;185]$
Tần số	2	7	12	3	0	1

Bạn Trang nhận xét như sau: Chênh lệch chiều cao của các bạn trong lớp không vượt quá a(cm). Hãy xác định giá trị của a để nhận xét của Trang là đúng.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Cô Hà thống kê lại đường kính thân gỗ của một số cây xoan đào 6 năm tuổi được trồng ở một lâm trường ở bảng sau

Đường kính (cm)	$[40;45)$	$[45;50)$	$[50;55)$	$[55;60)$	$[60;65)$
Tần số	5	20	18	7	3

Hãy xác định khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6. Kết quả đo chiều cao của 100 cây keo 3 năm tuổi tại một nông trường được cho ở bảng sau:

Chiều cao (m)	$[8,4;8,6]$	$[8,6;8,8]$	$[8,9;9,0]$	$[9,0;9,2]$	$[9,2;9,4]$
Tần số	5	12	25	44	14

Hãy xác định khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7. Lương tháng của một số nhân viên một văn phòng được ghi lại như sau (đơn vị: triệu đồng):

Lương tháng (triệu đồng)	$[6;8]$	$[8;10]$	$[10;12]$	$[12;14]$
Số nhân viên	3	6	8	7

Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 8. Kết quả đo chiều cao của 100 cây keo 3 năm tuổi tại một nông trường được cho ở bảng sau:

Chiều cao (m)	$[8{,}4;8{,}6)$	$[8{,}6;8{,}8)$	$[8{,}8;9{,}0)$	$[9{,}0;9{,}2)$	$[9{,}2;9{,}4)$
Số cây	5	12	25	44	14

Trong 100 cây keo trên có 1 cây cao $8,4$ m. Hỏi giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu là bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 9. Thống kê số thẻ vàng của mỗi câu lạc bộ trong giải ngoại hạng Anh mùa giải 20212022 cho kết quả sau:

101	79	79	78	75	73	68	67	67	63
63	61	60	59	57	55	55	50	47	42

(Theo premierleauge.com)

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm có độ dài bằng nhau với nhóm đầu tiên là $[40; 50)$?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 10. Bạn Lộc thống kê lại chiều cao (đơn vị: cm) của các bạn nam lớp 12A và lớp 12B ở bảng sau.

Chiều cao (cm)	$[155; 160)$	$[160; 165)$	$[165; 170)$	$[175; 180)$	$[180; 185)$
Lớp 12A	3	5	12	1	0
Lớp 12B	6	10	7	0	2

Khoảng biến thiên chiều cao của học sinh nam lớp 12B có độ phân tán lớn hơn khoảng biến thiên chiều cao của học sinh nam lớp 12A bao nhiêu cm?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....

Câu 11. Thống kê số thẻ vàng của mỗi câu lạc bộ trong giải ngoại hạng Anh mùa giải 2021 – 2022 cho kết quả như sai:

101	79	79	78	75	73	68	67	67	63
63	61	60	59	57	55	55	50	47	42

Tính khoảng biến của mẫu số liệu ghép nhóm dãy số liệu trên thành các nhóm có độ dài bằng nhau với nhóm đầu tiên là $[40;50)$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 12. Bảng tần số ghép nhóm dưới đây thể hiện kết quả điều tra về tuổi thọ trung

Nhóm (Tuổi thọ)	$[50;55)$	$[55;60)$	$[60;65)$	$[65;70)$	$[70;75)$	$[75;80)$	$[80;85)$	$[85;90)$
Nam	4	7	4	6	15	12	2	0
Nữ	3	4	5	3	7	14	13	1

Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm có tuổi thọ trung bình đồng đều nhất.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

BÀI 10. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

A. LÝ THUYẾT

1. Phương sai

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu s^2, được tính bởi công thức:

$$s^2 = \frac{1}{n}[n_1(c_1 - \overline{x})^2 + n_2(c_2 - \overline{x})^2 + \cdots + n_k(c_k - \overline{x})^2].$$

Trong đó:

- $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ là cỡ mẫu.
- $\overline{x} = \frac{1}{n}(n_1c_1 + n_2c_2 + \cdots + n_kc_k)$ là số trung bình.

2. Độ lệch chuẩn

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm kí hiệu s.
Độ lệch chuẩn là căn bậc hai số học của phương sai:

$$\text{Độ lệch chuẩn } s = \sqrt{s^2}.$$

⚠ *Chú ý:*

- *Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm có thể được tính theo công thức sau*

$$s^2 = \frac{1}{n}(n_1c_1^2 + n_2c_2^2 + \cdots + n_kc_k^2) - \overline{x}^2.$$

- *Trong thống kê, người ta còn dùng đại lượng sau để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm:*

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left[n_1(c_1 - \overline{x})^2 + n_2(c_2 - \overline{x})^2 + \cdots + n_k(c_k - \overline{x})^2\right].$$

⚠ *Ý nghĩa:*

- *Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho phương sai của mẫu số liệu gốc.*
- *Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm cũng là giá trị xấp xỉ cho độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc. Được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm.*
- *Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì dữ liệu càng phân tán.*

- *Độ lệch chuẩn có cùng đơn vị với đơn vị của mẫu số liệu.*

Ví dụ 1. Thầy giáo thống kê lại điểm trung bình cuối năm của các học sinh lớp 11A và 11B thu được bảng số liệu sau

Điểm trung bình	$[5;6)$	$[6;7)$	$[7;8)$	$[8;9)$	$[9;10)$
11A	1	0	11	22	6
11B	0	6	8	14	12

a) Nếu so sánh theo khoảng biến thiên thì học sinh lớp nào có điểm trung bình ít phân tán hơn?

b) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì học sinh lớp nào có điểm trung bình ít phân tán hơn?

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

⚠ *Chú ý*

- *Trong ví dụ trên, kết quả so sánh độ phân tán theo giá trị trung bình và độ lệch chuẩn có sự khác biệt. Điều này là do mẫu số liệu của học sinh lớp 11A có một giá trị ngoại lệ.*

- *Với các mẫu số liệu ghép nhóm có cùng số trung bình (hoặc xấp xỉ nhau), ta thường sử dụng phương sai và độ lệch chuẩn để so sánh mức độ phân tán của các mẫu số liệu đó.*

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 10.1. Lập mẫu số liệu ghép nhóm và tính giá trị trung bình

Phương pháp:

Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau

Nhóm	$[a_1;a_2)$	$\ldots$	$[a_i;a_{i+1})$	$\ldots$	$[a_k;a_{k+1})$
Tần số	m_1	$\ldots$	m_i	$\ldots$	m_k

Số trung bình cộng được tính như sau

- Bước 1: Tính giá trị đại diện mỗi nhóm $x_i = \dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}$; $i = 1, 2, 3, \ldots, k$.
- Bước 2: Tính $n = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$.
- Bước 3: $\overline{x} = \dfrac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \cdots + m_k \cdot x_k}{n}$.

Ví dụ 1. Chiều cao của 20 cây giống được cho bởi bảng sau

Chiều cao (cm)	$[40;44)$	$[45;49)$	$[50;54)$	$[55;59)$	$[60;64)$	$[65;69)$
Số cây giống	2	5	3	4	3	3

Tính số trung bình $\overline{x}$ (làm tròn đến chữ số thứ hai sau dấu phẩy) của bảng nói trên.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Các bạn học sinh lớp 12A trả lời 40 câu hỏi trong một bài kiểm tra. Kết quả được thống kê ở bảng sau

Số câu trả lời đúng	$[16;21)$	$[21;26)$	$[26;31)$	$[31;36)$	$[36;41)$
Số học sinh	4	6	8	18	4

Tính giá trị trung bình số câu trả lời đúng.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Trong tuần lễ bảo vệ môi trường, các em học sinh đã tiến hành thu nhặt vỏ chai nhựa để tái chế. Nhà trường thống kê kết quả thu nhặt vỏ chai nhựa của học sinh thu được bảng sau

Số vỏ chai nhựa	$[1;5]$	$[6;10]$	$[11;15]$	$[16;20]$	$[21;25]$
Số học sinh	53	82	48	39	18

Tính giá trị trung bình số câu trả lời đúng.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 10.2. Tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm

Phương pháp:

Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau

Nhóm	$[a_1;a_2)$	$\ldots$	$[a_i;a_{i+1})$	$\ldots$	$[a_k;a_{k+1}$
Tần số	m_1	$\ldots$	m_i	$\ldots$	m_k

Phương sai s^2 được tính như sau

- Bước 1: Tính giá trị đại diện mỗi nhóm $x_i = \dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}$; $i = 1, 2, 3, \ldots, k$.
- Bước 2: Tính $n = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$.
- Bước 3: $\overline{x} = \dfrac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \cdots + m_k \cdot x_k}{n}$.
- Bước 4: $s^2 = \dfrac{m_1 \cdot (x_1 - \overline{x})^2 + m_2 \cdot (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + m_k \cdot (x_k - \overline{x})^2}{n}$.
  Hoặc $s^2 = \dfrac{1}{n}(m_1 \cdot x_1^2 + m_2 \cdot x_2^2 + \cdots + m_k \cdot x_k^2) - \overline{x}^2$.

Ví dụ 1. Cân nặng (kg) của một số quả mít trong một khu vườn được thống kê ở bảng sau

Cân nặng (kg)	$[4;6)$	$[6;8)$	$[8;10)$	$[10;12)$	$[12;14)$
Số cây giống	6	12	19	9	4

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Thống kê điểm trung bình của hai lớp 12A và 12B được cho ở bảng sau

Điểm trung bình	$[5;6)$	$[6;7)$	$[7;8)$	$[8;9)$	$[9;10)$
Số học sinh lớp 12A	1	0	11	22	6
Số học sinh lớp 12B	0	6	8	14	12

Nếu so sánh phương sai thì học sinh lớp nào có điểm trung bình ít phân tán hơn?

Lời giải

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 3. Tuổi thọ của một số linh kiện điện tử (đơn vị: năm) được sản xuất bởi hai phân xưởng được cho như sau

Tuổi thọ (năm)	[1,5; 2)	[2; 2,5)	[2,5; 3)	[3; 3,5)	[3,5; 4)
Số linh kiện của phân xưởng 1	4	9	13	8	6
Số linh kiện của phân xưởng 2	2	8	20	7	3

Tính phương sai của mỗi mẫu số liệu ghép nhóm và nhận xét về độ phân tán của tuổi thọ các linh kiện điện tử được sản xuất bởi mỗi phân xưởng.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Dạng 10.3. Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm và ý nghĩa

Phương pháp:

Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau:

Nhóm	$[a_1; a_2)$	...	$[a_i; a_{i+1})$	...	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số	m_1	...	m_i	...	m_k

Phương sai s^2 được tính như sau:

- Tính giá trị đại diện mỗi nhóm $x_i = \dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}; i = 1, 2, 3, \ldots, k.$

- Tính $n = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$.
- Tính $\overline{x} = \dfrac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \cdots + m_k \cdot x_k}{n}$.
- Tính phương sai

$$s^2 = \frac{m_1 \cdot (x_1 - \overline{x})^2 + m_2 \cdot (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + m_k \cdot (x_k - \overline{x})^2}{n}.$$

Hoặc

$$s^2 = \frac{1}{n}\left(m_1 \cdot x_1^2 + m_2 \cdot x_2^2 + \cdots + m_k \cdot x_k^2\right) - (\overline{x})^2.$$

- Tính độ lệch chuẩn $s = \sqrt{s^2}$.

Ý nghĩa:
Khi hai mẫu số liệu ghép nhóm có cùng đơn vị đo và có số trung bình cộng xấp xỉ nhau, mẫu số liệu nào có độ lệch chuẩn nhỏ hơn thì mức độ phân tán so với số trung bình cộng của các số liệu trong mẫu đó sẽ thấp hơn.

Ví dụ 1. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về độ tuổi của cư dân trong một khu phố.

Độ tuổi	$[20;30)$	$[30;40)$	$[40;50)$	$[50;60)$	$[60;70)$	$[70;80)$
Giá trị đại diện	25	35	45	55	65	75
Số cư dân	25	20	20	15	14	6

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2. Cho hai mẫu số liệu ghép nhóm thống kê mức lương của hai công ty A, B (đơn vị là triệu đồng)

Công ty A (đơn vị: triệu đồng)			Công ty B (đơn vị: triệu đồng)	
Mức lương	Số lượng nhân viên		Mức lương	Số lượng nhân viên
$[10;15)$	15		$[10;15)$	25
$[15;20)$	18		$[15;20)$	15
$[20;25)$	10		$[20;25)$	7
$[25;30)$	10		$[25;30)$	5
$[30;35)$	5		$[30;35)$	5
$[35;40)$	2		$[35;40)$	3

a) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm lần lượt biểu diễn mức lương của hai công ty A, B (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

b) Công ty nào có mức lương đồng đều hơn?

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Dạng 10.4. Sử dụng phương sai, độ lệch chuẩn đo độ rủi ro

Phương pháp:

Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau:

Nhóm	$[a_1;a_2)$	$\ldots$	$[a_i;a_{i+1})$	$\ldots$	$[a_k;a_{k+1})$
Tần số	m_1	$\ldots$	m_i	$\ldots$	m_k

Phương sai s^2 được tính như sau:

- Tính giá trị đại diện mỗi nhóm $x_i = \dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}; i = 1, 2, 3, \ldots, k.$
- Tính $n = m_1 + m_2 + \cdots + m_k.$
- Tính $\overline{x} = \dfrac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \cdots + m_k \cdot x_k}{n}.$

- Tính phương sai

$$s^2 = \frac{m_1 \cdot (x_1 - \overline{x})^2 + m_2 \cdot (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + m_k \cdot (x_k - \overline{x})^2}{n}.$$

Hoặc

$$s^2 = \frac{1}{n}\left(m_1 \cdot x_1^2 + m_2 \cdot x_2^2 + \cdots + m_k \cdot x_k^2\right) - (\overline{x})^2.$$

- Tính độ lệch chuẩn $s = \sqrt{s^2}$.

Ý nghĩa:

Khi hai mẫu số liệu ghép nhóm có cùng đơn vị đo và có số trung bình cộng xấp xỉ nhau, mẫu số liệu nào có phương sai và độ lệch chuẩn cao hơn thì mức độ rủi ro lớn hơn.

Ví dụ 1. Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng của (đơn vị là nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu A và B trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

Giá đóng cửa	$[120;122)$	$[122;124)$	$[124;126)$	$[126;128)$	$[128;130)$
Cổ phiếu A	9	8	11	13	9
Cổ phiếu B	14	6	5	20	5

a) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của hai mã cổ phiếu A, B (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

b) So sánh độ rủi ro của cố phiếu A và B.

Lời giải

Ví dụ 2. Chỉ số P/B (viết tắt của từ Price to book ratio) là một chỉ số tài chính quan trọng, được sử dụng để so sánh giữa giá của cổ phiếu với giá trị ghi sổ của cổ phiếu đó. Khi chỉ số P/B cao, nghĩa là thị trường đang có nhiều kỳ vọng đối với cổ phiếu này, doanh nghiệp có tiềm năng phát triển tốt trong tương lai. Bảng sau thống kê chỉ số P/B của hai mã cổ phiếu A và B trong 10 năm giao dịch liên tiếp.

Giá đóng cửa	$[0;2)$	$[2;4)$	$[4;6)$	$[6;8)$	$[8;10)$	$[10;12)$
Cổ phiếu A	1	0	4	2	2	1
Cổ phiếu B	1	2	1	2	3	1

a) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của hai mã cổ phiếu A, B (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

b) So sánh độ rủi ro của cố phiếu A và B? Biết rằng các chỉ số tài chính còn lại của hai cổ phiếu đó là xấp xỉ nhau.

Lời giải

C. LUYỆN TẬP

PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau

Cự li (m)	[19; 19,5)	[19,5; 20)	[20; 20,5)	[20,5; 21)	[21; 21,5)
Tần số	13	45	24	12	6

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

A. 100. **B.** 20,015. **C.** 2001,5. **D.** 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng cửa (đơn vị: nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu A trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

Giá đóng cửa	[120; 122)	[122; 124)	[124; 126)	[126; 128)	[128; 130)
Số ngày giao dịch của cổ phiếu A	8	9	12	10	11

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

A. 50. **B.** 12528. **C.** 125,28. **D.** 10.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....

Câu 3. Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị: km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau

Quãng đường (km)	[2,7; 3,0)	[3,0; 3,3)	[3,3; 3,6)	[3,6; 3,9)	[3,9; 4,2)
Số ngày	3	6	5	4	2

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là (làm tròn đến hàng phần trăm)

A. 3,39. **B.** 11,62. **C.** 0,13. **D.** 0,36.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 4. Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau

Thời gian (phút)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
Số ngày	6	6	4	1	1

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là (làm tròn đến hàng phần trăm)

A. 31,77. **B.** 31,25. **C.** 31,44. **D.** 32,25.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....

Câu 5. Dũng là học sinh rất giỏi chơi rubik, bạn có thể giải nhiều loại khối rubik khác nhau. Trong một lần tập luyện giải khối rubik 3×3, bạn Dũng đã tự thống kê lại thời gian giải rubik trong 25 lần giải liên tiếp ở bảng sau

Thời gian giải rubik (giây)	$[8;10)$	$[10;12)$	$[12;14)$	$[14;16)$	$[16;18)$
Số lần	4	6	8	4	3

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là (làm tròn đến hàng phần trăm)

A. 5,98. **B.** 6. **C.** 2,44. **D.** 2,5.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 6. Một bác tài xế thống kê lại độ dài quãng đường (đơn vị: km) bác đã lái xe mỗi ngày trong một tháng ở bảng sau

Độ dài quãng đường (km)	$[50;100)$	$[100;150)$	$[150;200)$	$[200;250)$	$[250;300)$
Số ngày	5	10	9	4	2

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là (làm tròn đến hàng phần trăm)

A. 55,68. **B.** 56,67. **C.** 3100. **D.** 3000.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....

Câu 7. Người ta ghi lại tiền lãi (đơn vị: triệu đồng) của một số nhà đầu tư (với số tiền đầu tư như nhau), khi đầu tư vào hai lĩnh vực A, B cho kết quả như sau

Tiền lãi	$[5;10)$	$[10;15)$	$[15;20)$	$[20;25)$	$[25;30)$
Số nhà đầu tư vào lĩnh vực A	2	5	8	6	4
Số nhà đầu tư vào lĩnh vực B	8	4	2	5	6

Người ta có thể dùng phương sai và độ lệch chuẩn để so sánh mức độ rủi ro đầu tư các lĩnh vực có giá trị trung bình tiền lãi gần bằng nhau. Lĩnh vực nào có phương sai, độ lệch chuẩn tiền lãi cao hơn thì được coi là có độ rủi ro lớn hơn. Theo quan điểm trên, độ rủi ro của cổ phiếu nào cao hơn?

A. Lĩnh vực A có độ rủi ro bằng lĩnh vực B.

B. Lĩnh vực A có độ rủi ro cao hơn lĩnh vực B.

C. Lĩnh vực A có độ rủi ro thấp hơn lĩnh vực B.

D. Không so sánh được.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 8. Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng cửa (đơn vị: nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu A và B trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

Giá đóng cửa	$[120;122)$	$[122;124)$	$[124;126)$	$[126;128)$	$[128;130)$
Cổ phiếu A	8	9	12	10	11
Cổ phiếu B	16	4	3	6	21

Người ta có thể dùng phương sai và độ lệch chuẩn để so sánh mức độ rủi ro của các loại cổ phiếu có giá trị trung bình gần bằng nhau. Cổ phiếu nào có phương sai, độ lệch chuẩn

cao hơn thì được coi là có độ rủi ro lớn hơn. Theo quan điểm trên, độ rủi ro của cổ phiếu nào cao hơn?

A. Cổ phiếu A có độ rủi ro bằng cổ phiếu B.

B. Cổ phiếu A có độ rủi ro cao hơn cổ phiếu B.

C. Cổ phiếu A có độ rủi ro thấp hơn cổ phiếu B.

D. Không so sánh được.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 9. Kết quả 40 lần nhảy xa của hai vận động viên nam Dũng được lần lượt thống kê trong các bảng sau (đơn vị: mét)

Nhóm	[6,22; 6,46)	[6,46; 6,70)	[6,70; 6,94)	[6,94; 7,18)	[7,18; 7,42)	
Tần số	3	7	5	20	5	$n = 40$

Giá trị trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Dũng bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm theo đơn vị mét)?

A. 6,92. **B.** 7,34. **C.** 9,86. **D.** 5,85.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 10. Một siêu thị thống kê số tiền (đơn vị: chục nghìn đồng) mà 44 khách hàng mua hàng ở siêu thị đó trong một ngày. Số liệu được ghi lại trong bảng sau.

Nhóm	$[40;45)$	$[45;50)$	$[50;55)$	$[55;60)$	$[60;65)$	$[65;70)$	
Tần số	4	14	8	10	6	2	$n=44$

Giá trị trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

A. 53,2. **B.** 57,34. **C.** 49,86. **D.** 65,85.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 11. Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau

Quãng đường (km)	$[2,7;3)$	$[3;3,3)$	$[3,3;3,6)$	$[3,6;3,9)$	$[3,9;4,2)$
Số ngày	3	6	5	4	2

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm bằng

A. 3,39. **B.** 11,62. **C.** 0,1314. **D.** 0,36.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 12. Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau

Thời gian (phút)	$[20;25)$	$[25;30)$	$[30;35)$	$[35;40)$	$[40;45)$
Số ngày	6	6	4	1	1

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. 31,77. **B.** 31,25. **C.** 31,44. **D.** 32,25.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 13. Một mẫu số liệu có bảng tần số ghép nhóm như sau

Nhóm	$[1;5)$	$[5;9)$	$[9;13)$	$[13;17)$	$[17;21)$
Tần số	4	8	13	6	4

Phương sai của mẫu số liệu bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. 21,01. **B.** 20,01. **C.** 22. **D.** 23.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 14. Khảo sát thời gian tự học bài ở nhà của học sinh khối 9 ở trường X, ta thu được bảng sau

Thời gian(phút)	$[0;30)$	$[30;60)$	$[60;90)$	$[90;120)$	$[120;150)$
Số học sinh	9	10	9	15	7

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm bằng

A. 1602. **B.** 1601,64. **C.** 1601,9. **D.** 1603.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 15. Thời gian truy cập Internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau:

Thời gian(phút)	$[9,5;12,5)$	$[12,5;15,5)$	$[15,5;18,5)$	$[18,5;21,5)$	$[21,5;24,5)$
Số học sinh	3	12	15	24	2

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

A. 2,93. **B.** 8,56. **C.** 8,59. **D.** 3,01.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 16. Một câu lạc bộ thể dục thể thao đã ghi lại số giờ các thành viên của mình sử dụng cơ sở vật chất của câu lạc bộ để tập luyện trong một tháng như sau

Thời gian (giờ)	$[1;5)$	$[5;9)$	$[9;13)$	$[13;17)$	$[17;21)$	$[21;25)$
Tần số (số người)	10	14	31	2	5	23

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

A. 6,9. **B.** 9,6. **C.** 6,96. **D.** 7,96.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 17. Thống kê tổng số giờ nắng trong tháng 9 tại một trạm quan trắc đặt ở Cà Mau trong các năm từ 2002 đến 2021 được thống kê như sau

Số giờ nắng	$[80;98)$	$[98;116)$	$[116;134)$	$[134;152)$	$[152;170)$
Số năm	3	6	3	5	3

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn)

A. 23,795. **B.** 24,795. **C.** 23,794. **D.** 23,796.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 18. Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng cửa (đơn vị: nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu A và B trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

Giá đóng cửa	$[120;122)$	$[122;124)$	$[124;126)$	$[126;128)$	$[128;130)$
Số ngày giao dịch của cổ phiếu A	8	9	12	10	11
Số ngày giao dịch của cổ phiếu B	16	4	3	6	21

Người ta có thể dùng phương sai và độ lệch chuẩn để so sánh mức độ rủi ro của các loại cổ phiếu có giá trị trung bình gần bằng nhau. Cổ phiếu nào có phương sai, độ lệch chuẩn cao hơn thì được coi là có độ rủi ro lớn hơn. Chọn khẳng định đúng.

A. Giá đóng cửa của cổ phiếu A ít phân tán hơn giá đóng cửa của cổ phiếu B.

B. Giá đóng cửa của cổ phiếu A ít phân tán hơn giá đóng cửa của cổ phiếu B.

C. Giá đóng cửa của hai cổ phiếu A và B có độ phân tán như nhau.

D. Phương sai của mẫu số liệu của cổ phiếu A lớn hơn phương sai của mẫu số liệu của cổ phiếu B.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 19. Trong 30 ngày, một nhà đầu tư đã theo dõi giá cổ phiếu của hai công ty G và H vào phiên mở cửa mỗi ngày. Thông tin được ghi lại ở hai bảng dưới đây

Giá cổ phiếu của công ty G

Giá (nghìn đồng)	$[50;52]$	$[52;54]$	$[54;56]$	$[56;58]$	$[58;60]$
Tần số	3	7	9	8	3

Giá cổ phiếu của công ty H

Giá (nghìn đồng)	$[40;42]$	$[42;44]$	$[44;46]$	$[46;48]$	$[48;50]$
Tần số	6	7	5	7	5

Chọn câu trả lời đúng nhất biết độ lệch chuẩn càng cao thì tỷ lệ rủi ro càng lớn:

A. Công ty G rủi ro hơn. **B.** Công ty H rủi ro hơn.

C. Cả hai đều rủi ro như nhau. **D.** Cả hai công ty đều không rủi ro.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 20. Anh An đầu tư số tiền bằng nhau vào hai lĩnh vực kinh doanh A, B. Anh An thống kê số tiền thu được mỗi tháng trong vòng 60 tháng theo mỗi lĩnh vực cho kết quả như sau:

Số tiền (triệu đồng)	$[5;10)$	$[10;15)$	$[15;20)$	$[20;25)$	$[25;30)$
Số tháng đầu tư vào lĩnh vực A	5	10	30	10	5
Số tháng đầu tư vào lĩnh vực B	20	5	10	5	20

Đáp án nào sau đây đúng?

A. Đầu tư ở lĩnh vực A rủi ro hơn.

B. Đầu tư ở lĩnh vực B rủi ro hơn.

C. Độ lệch chuẩn ở lĩnh vực A lớn hơn 10..

D. Đầu tư ở hai lĩnh vực A và B rủi ro như nhau.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 21. Một vận động viên luyện tập chạy cự li 100 m đã ghi lại kết quả luyện tập như sau.

Thời gian (giây)	[10,2; 10,4)	[10,4; 10,6)	[10,6; 10,8)	[10,8; 11)
Số vận động viên	3	7	8	2

Tìm phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2)

A. 1,03. **B.** 0,03. **C.** 2,90. **D.** 1,86.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

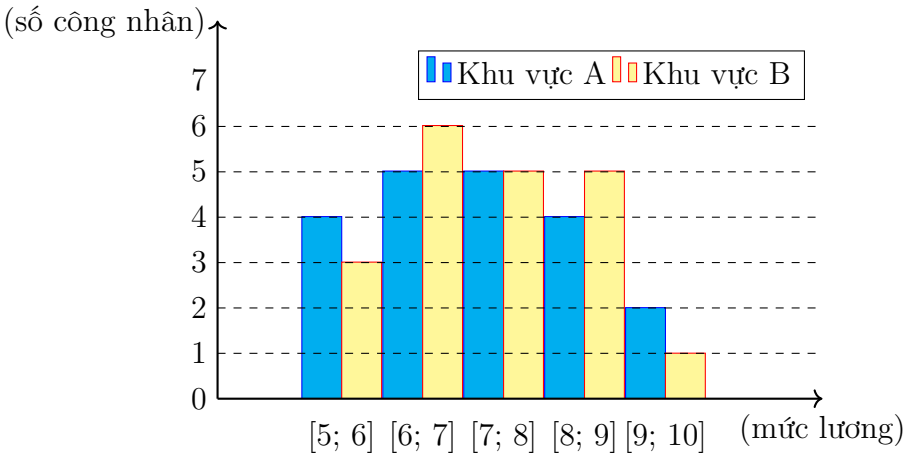
.....

.....

.....

.....

Câu 22. Biểu đồ dưới đây mô tả kết quả điều tra về mức lương khởi điểm (đơn vị: triệu đồng) của một số công nhân ở hai khu vực A và B.



Tổng độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm ở 2 khu vực gần bằng với số nào sau đây nhất.

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 23. Bộ phận kiểm tra chất lượng sản phẩm dùng máy để đo (chính xác đến 0,001 mm) độ dày của một chi tiết máy. Kết quả đo một số sản phẩm được thống kê trong bảng sau:

Độ dày (mm)	$[18;19)$	$[19;20)$	$[20;21)$	$[21;22)$	$[22;23)$
Tần số	3	7	23	25	2

Nhận xét nào sau đây sai?

A. Độ lệch chuẩn của mẫu lớn hơn 2.

B. Số trung bình của mẫu số liệu gần bằng với 20,77.

C. Độ dày của chi tiết máy không bị sai lệch nhiều.

D. Cỡ mẫu của mẫu số liệu là 60.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 24. Thống kê lợi nhuận hàng tháng (đơn vị: triệu đồng) trong 20 tháng của hai nhà đầu tư được cho như sau:

Lợi nhuận	$[10;20)$	$[20;30)$	$[30;40)$	$[40;50)$	$[50;60)$
Số tháng	2	4	8	4	2

Bảng 1. Lợi nhuận theo tháng của nhà đầu tư nhỏ

Lợi nhuận	$[510;520)$	$[520;530)$	$[530;540)$	$[540;550)$	$[550;560)$
Số tháng	4	3	3	3	4

Bảng 2. Lợi nhuận theo tháng của nhà đầu tư lớn

Đáp án nào dưới đây đúng nhất?

A. Không nên chỉ dựa và độ lệch chuẩn để đánh giá mức độ rủi ro.

B. Lợi nhuận trung bình mỗi tháng của nhà đầu tư nhỏ cao hơn nhà đầu tư lớn.

C. Độ lệch chuẩn của nhà đầu tư lớn cao hơn 14.

D. Nhà đầu tư lớn có mức độ rủi ro cao hơn.

Lời giải

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Số khách hàng mua bảo hiểm ở từng độ tuổi được thống kê trong bảng số liệu ghép nhóm sau:

Độ tuổi	$[20;30)$	$[30;40)$	$[40;50)$	$[50;60)$	$[60;70)$
Số khách hàng	4	6	10	7	3

Khi đó

a) Giá trị đại diện của nhóm $[20;30)$ là 25.

b) Giá trị đại diện của nhóm $[60;70)$ là 70.

c) Công thức tính độ tuổi bình quân của khách hàng mua bảo hiểm trong bảng thống kê là: $\overline{x}=\dfrac{20\cdot 4+30\cdot 6+40\cdot 10+50\cdot 7+60\cdot 3}{30}$.

d) Độ tuổi trung bình (làm tròn đến hàng phần trăm) của khách hàng mua bảo hiểm là 44,67.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Xét mẫu dữ liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau với $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$

Nhóm	$[u_1;u_2)$	$[u_2;u_3)$	$\cdots$	$[u_k;u_{k+1})$
Giá trị đại diện	c_1	c_2	$\cdots$	c_k
Tần số	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

Khi đó

a) Giá trị đại diện của $[u_2;u_3)$ là $c_2=\dfrac{u_2+u_3}{2}$.

b) Giá trị trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là $\overline{x}=\dfrac{1}{n}\left(c_1+c_2+\cdots+c_k\right)$.

c) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là $s^2=\dfrac{1}{n}\left[n_1\left(c_1-\bar{x}\right)^2+n_2\left(c_2-\bar{x}\right)^2+\cdots+n_k\left(c_k-\bar{x}\right)^2\right]$.

d) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là $s^2=\dfrac{1}{n}\left(n_1c_1^2+n_2c_2^2+\cdots+n_kc_k^2\right)-\bar{x}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Cho mẫu số liệu dưới dạng bảng sau

Số câu trả lời đúng	$[16;21)$	$[21;26)$	$[26;31)$	$[31;36)$	$[36;41)$	$N=40$
Tần số	4	6	8	18	4	

Khi đó

a) Giá trị đại diện của lớp $[36;41)$ là 38,5.

b) Công thức tính số trung bình là $\overline{x}=\dfrac{18{,}5\cdot 4+23{,}5\cdot 6+28{,}5\cdot 8+33{,}5\cdot 18+38{,}5\cdot 4}{40}$.

c) Số trung bình là 30.

d) Phương sai của mẫu số liệu là $S^2=32{,}75$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Số lượng khách hàng nữ mua hàng thời trang trong một ngày của một cửa hàng được thống kê trong bảng tần số ghép nhóm sau:

Khoảng tuổi	$[20;30)$	$[30;40)$	$[40;50)$	$[50;60)$	$[60;70)$
Số khách hàng nữ	3	9	6	4	2

Khi đó

a) Giá trị đại diện của nhóm $[30;40)$ là 35.

b) Cỡ mẫu là $n = 20$.

c) Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là 42,08 *(làm tròn đến hàng phần trăm)*.

d) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là 129,99 *(làm tròn đến hàng phần trăm)*.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Thời gian (phút) để học sinh hoàn thành một câu hỏi thi được cho như sau:

Thời gian (phút)	$[0,5;10,5)$	$[10,5;20,5)$	$[20,5;30,5)$	$[30,5;40,5)$	$[40,5;50,5)$
Số học sinh lớp $11A$	2	10	6	4	3
Số học sinh lớp $11B$	3	8	10	2	4

Khi đó

a) Phương sai của mẫu số liệu lớp $11A$ là 133,44 *(làm tròn đến hàng phần trăm)*.

b) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu lớp $11A$ là 11,77 *(làm tròn đến hàng phần trăm)*..

c) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu lớp $11B$ là 11,55 *(làm tròn đến hàng phần trăm)*.

d) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì thời gian để học sinh hoàn thành một câu hỏi thi của lớp $11A$ ít phân tán hơn lớp $11B$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

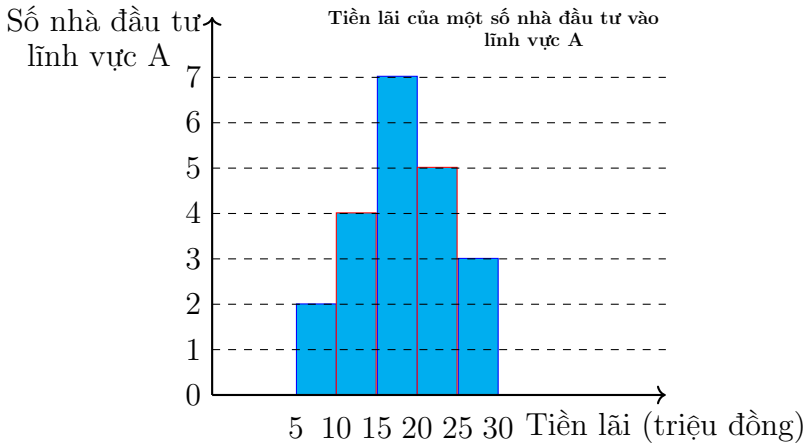
.....

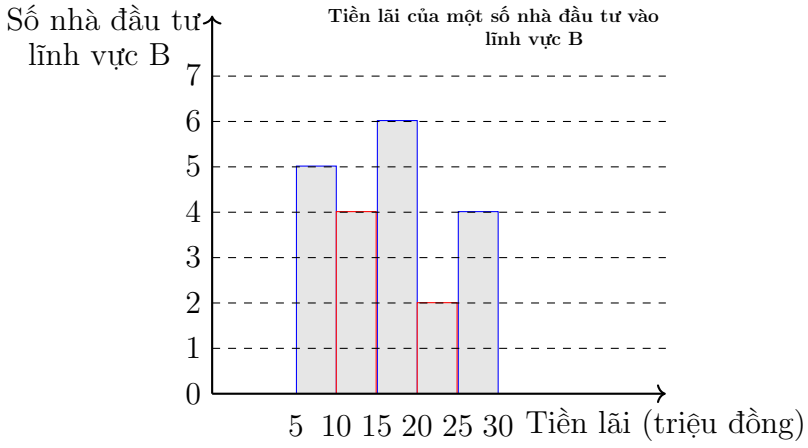
.....

.....

. . . . . .

Câu 6. Người ta ghi lại tiền lãi (đơn vị: triệu đồng) của một số nhà đầu tư (với số tiền đầu tư như nhau), khi đầu tư và hai lĩnh vực A, B cho kết quả bằng biểu đồ dưới đây





Khi đó

a) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu số nhà đầu tư vào lĩnh vực A là 5,83 *(làm tròn đến hàng phần trăm)*.

b) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu số nhà đầu tư vào lĩnh vực B là 7,01 *(làm tròn đến hàng phần trăm)*.

c) Về trung bình, đầu tư vào lĩnh vực B đem lại tiền lãi cao hơn lĩnh vực A.

d) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì tiền lãi của các nhà đầu tư trong lĩnh vực A có xu hướng phân tán rộng hơn so với tiền lãi của các nhà đầu tư trong lĩnh vực B.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 7. Bác sĩ A điều trị 18 bệnh nhân mỡ máu bằng cách xét nghiệm Cholesterol toàn phần trong buổi sáng điều trị như sau

3,8 4,0 3,8 4,2 4,3 4,5 4,1 4,6 4,8

5,0 5,2 5,1 4,7 5,3 5,6 5,8 5,6 4,4

Khi đó

a) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên bảng 1, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên bảng 0,61 do bác sĩ A điều trị.

b) Bảng tần số ghép nhóm với nhóm đầu tiên là $[3;7{,}4;14]$ và độ dài mỗi nhóm bằng 0,44 do bác sĩ A điều trị được thống kê dưới đây

Chỉ số Cholesterol toàn phần do bác sĩ A điều trị	$[3;7{,}4;14]$	$[4{,}14;4{,}58]$	$[4{,}58;5{,}02]$	$[5{,}02;5{,}46]$
Số bệnh nhân	3	5	6	4

.

c) Giá trị độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm đầu tiên là $[3;7{,}4;14]$ và độ dài mỗi nhóm bằng 0,44 do bác sĩ A điều trị là 0,58.

d) Biết rằng bác sĩ B cũng điều trị 18 bệnh nhân trên với nhóm đầu tiên là $[3;7{,}4;14]$ và độ dài mỗi nhóm bằng 0,44 được thống kê dưới đây:

Chỉ số Cholesterol toàn phần do bác sĩ B điều trị	$[3;7{,}4;14]$	$[4{,}14;4{,}58]$	$[4{,}58;5{,}02]$	$[5{,}02;5{,}46]$
Số bệnh nhân	4	5	6	3

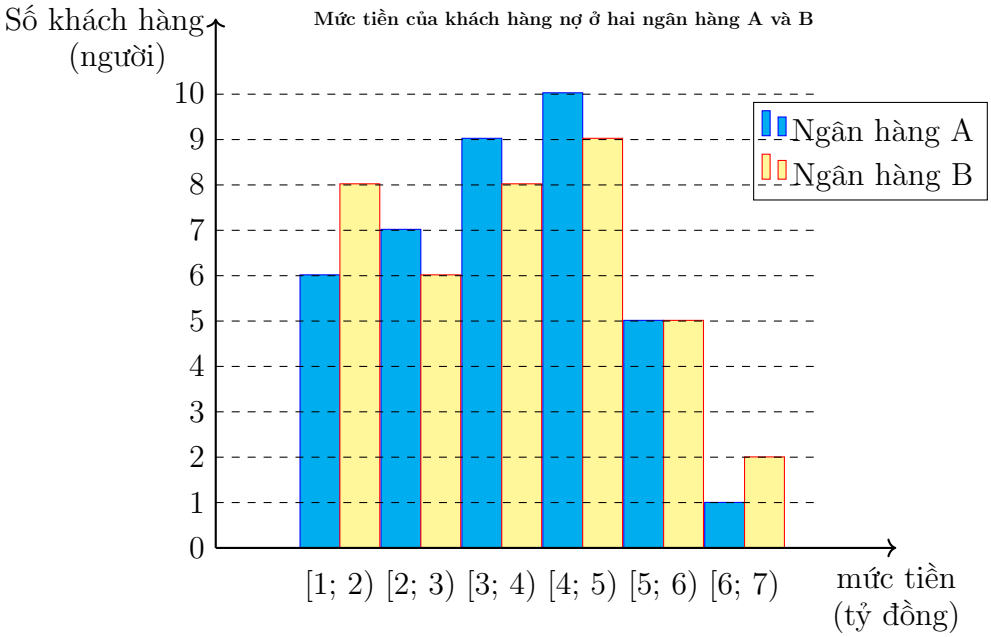
.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....

Câu 8. Biểu đồ dưới đây biểu thị kết quả thu thập được về mức tiền (đơn vị: tỷ đồng) của một số khách hàng nợ ở hai ngân hàng A và B.



Khi đó

a) Bảng giá trị đại diện cho mỗi nhóm và bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu tương ứng với biểu đồ trên

Mức tiền đại diện (tỷ đồng)	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;4)$	$[4;5)$	$[5;6)$	$[6;7)$
Số khách hàng ngân hàng A	6	7	9	5	4	3
Số khách hàng ngân hàng B	7	5	6	4	3	2

.

b) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm của ngân hàng A bằng $\dfrac{661}{361}$.

c) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm của ngân hàng B bằng $\dfrac{3221}{1444}$.

d) Người ta dùng độ lệch chuẩn để so sánh mức độ rủi ro của số tiền khách hàng nợ ngân hàng. Ngân hàng nào có độ lệch chuẩn cao hơn thì có độ rủi ro lớn hơn. Theo quan điểm trên, độ rủi ro của ngân hàng A cao hơn ngân hàng B.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Bảng thống kê sau cho biết điện năng tiêu thụ của 30 hộ ở một khu dân cư trong một tháng như sau *(đơn vị: kW)*:

50	47	30	65	63	70	38	34	48	53	33	39	32	40	50
55	50	61	37	37	43	35	65	60	31	33	41	45	55	59

Chuyển mẫu số liệu trên sang mẫu số liệu ghép nhóm gồm 8 nhóm có độ dài bằng nhau và bằng 5 như sau:

Giá trị	$[30;35)$	$[35;40)$	$[40;45)$	$[45;50)$	$[50;55)$	$[55;60)$	$[60;65)$	$[65;70)$
Số lượng	6	5	3	x	4	3	y	z

Tính giá trị của $S = 43x + 47y + 1000z$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau *(đơn vị: triệu đồng)*

Doanh thu	$[5;7)$	$[7;9)$	$[9;11)$	$[11;13)$	$[13;15)$
Số ngày	2	7	7	3	1

Số trung bình của mẫu số liệu trên bảng bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....

Câu 3. Điều tra 42 học sinh của một lớp 12 về số giờ tự học ở nhà, người ta có bảng thống kê sau

Số giờ tự học	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;4)$	$[4;5)$	$[5;6)$
Số học sinh	8	10	12	9	3

Tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 4. Điều tra 42 học sinh của một lớp 12 về số giờ tự học ở nhà, người ta có bảng thống kê sau

Số giờ tự học	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;4)$	$[4;5)$	$[5;6)$
Số học sinh	8	10	12	9	3

Tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....

.....

Câu 5. Thống kê điểm trắc nghiệm môn Tiếng Anh của 40 học sinh, người ta có bảng sau

Điểm	$[20;30)$	$[30;40)$	$[40;50)$	$[50;60)$	$[60;70)$	$[70;80)$	$[80;90)$	$[90;100]$
Số học sinh	3	5	5	8	7	5	3	4

Tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên (kết quả làm tròn đến hàn đơn vị).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6. Thống kê doanh thu (đơn vị: triệu đô la) của 20 công ty sản xuất ô tô trong năm 2023, người ta có bảng sau

Doanh thu	$[0;20)$	$[20;40)$	$[40;60)$	$[60;80)$	$[80;100]$
Số công ty	5	5	6	2	2

Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7. Điều tra về số tiền mua sách (đơn vị: nghìn đồng) trong một năm của 50 học sinh trong một trường THPT, người ta có bảng sau

Số tiền mua sách	$[0;200)$	$[200;400)$	$[400;600)$	$[600;800)$	$[800;1000)$
Số học sinh	29	11	3	4	3

Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 8. Tốc độ của 20 xe hơi khi đi qua một trạm kiểm tra tốc độ (đơn vị: km/h) được thống kê lại như sau

42	43,4	43,4	46,5	46,7	46,8	47,5	47,7	48,1	48,4
50,8	52,1	52,7	53,9	54,8	55,6	57,5	59,6	60,3	61,1

Tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm với nhóm đầu tiên là $[42;46)$ và độ dài mỗi nhóm bằng 4 (làm tròn đến hàng phần mười).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 9. Một giống cây xoan đào được trồng tại hai địa điểm A và B. Người ta thống kê đường kính thân của một số cây xoan đào 5 năm tuổi ở bảng sau.

Đường kính (cm)	$[30;32)$	$[32;34)$	$[34;36)$	$[36;38)$	$[38;40)$
Số cây trồng ở địa điểm A	25	38	20	10	7
Số cây trồng ở địa điểm B	22	27	19	18	14

Gọi phương sai đường kính thân của một số cây xoan đào 5 năm tuổi ở địa điểm A và B lần lượt là S_A^2 và S_B^2. Tính $|S_A^2 - S_B^2|$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 10. Thời gian hoàn thành một bài viết chính tả của một số học sinh lớp 4 hai trường X và Y được ghi lại ở bảng sau.

Thời gian (Phút)	$[6;7)$	$[7;8)$	$[8;9)$	$[9;10)$	$[10;11)$
Số học sinh trường X	8	10	13	10	9
Số học sinh trường Y	4	12	17	14	3

Gọi độ lệch chuẩn thời gian hoàn thành một bài viết chính tả của một số học sinh lớp 4 ở trường X và Y lần lượt là S_X và S_Y. Tính $S_X - S_Y$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 11. Kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên HUY được thống kê trong bảng sau (đơn vị: mét):

Nhóm	**Tần số**
[6,22; 6,46)	3
[6,46; 6,70)	7
[6,70; 6,94)	5
[6,94; 7,18)	20
[7,18; 7,42)	5
	$n = 40$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 12. Anh An đầu tư số tiền sử dụng vào hai lĩnh vực kinh doanh A, B. Anh An thống kê số tiền thu được mỗi tháng trong vòng 60 tháng theo từng lĩnh vực cho kết quả như sau

Số tiền (triệu đồng)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)
Số tháng đầu tư vào lĩnh vực A	20	5	10	5	20
Số tháng đầu tư vào lĩnh vực B	5	10	30	10	5

So sánh giá trị trung bình và độ lệch chuẩn của số tiền thu được mỗi tháng khi bắt đầu tư vào từng lĩnh vực A, B. Kí hiệu $\Delta = S_A - S_B$ nếu $\Delta > 0$ thì đầu tư vào lĩnh vực A "rủi ro" hơn, ngược lại nếu $\Delta < 0$ thì đầu tư vào lĩnh vực B "rủi ro" hơn. Tính $\Delta = S_A - S_B$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 13. Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng cửa (đơn vị: nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu A và B trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

Giá đóng cửa	$[120;122)$	$[122;124)$	$[124;126)$	$[126;128)$	$[128;130)$
Cổ phiếu A	8	9	12	10	11
Cổ phiếu B	16	4	3	6	21

So sánh giá trị trung bình và độ lệch chuẩn của số tiền thu được mỗi tháng khi bắt đầu tư vào từng lĩnh vực A, B. Kí hiệu $\Delta = S_A - S_B$ nếu $\Delta > 0$ thì đầu tư vào lĩnh vực A "rủi ro" hơn, ngược lại nếu $\Delta < 0$ thì đầu tư vào lĩnh vực B "rủi ro" hơn. Tính $\Delta = S_A - S_B$(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

CHƯƠNG 4 NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

BÀI 11. NGUYÊN HÀM

A. LÝ THUYẾT

1. Nguyên hàm

Định nghĩa 1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K. Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K.

! Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K. Khi đó:

- Với mỗi hằng số C, hàm số $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.
- Nếu $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì tồn tại hằng số C sao cho $G(x) = F(x) + C$ với mọi x thuộc K.

Nhận xét. *Mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$, với C là hằng số. Ta gọi $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K.*

- *Kí hiệu* $\int f(x)\,\mathrm{d}x$
- *Viết* $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$

2. Nguyên hàm một số hàm số sơ cấp cơ bản

Bảng nguyên hàm các hàm sơ cấp

Với $\alpha \neq -1$, ta có $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$;	$\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C$;
$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$;	$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C$
$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$;	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C$;
Với $a > 0$, $a \neq 1$, ta có $\int a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.	

3. Tính chất

Tính chất 1. Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên K.

- $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\cdot\int f(x)\,\mathrm{d}x$ với k là hằng số khác 0
- $\int [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x - \int g(x)\,\mathrm{d}x$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 11.1. Áp dụng định nghĩa

Phương pháp:

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K. Khi đó:

- Với mỗi hằng số C, hàm số $F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.
- Nếu $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì tồn tại hằng số C sao cho $G(x)=F(x)+C$, $\forall x\in K$.

Ví dụ 1. Chứng minh $F(x)=2x^3-5x+4$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=6x-5$ trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Tìm $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Trong mỗi trường hợp sau, hàm số $F(x)$ có là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng tương ứng không? Vì sao?

a) $F(x) = x\ln x$ và $f(x) = 1 + \ln x$ trên khoảng $(0; +\infty)$;

b) $F(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$ và $f(x) = \mathrm{e}^{\cos x}$ trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Dạng 11.2. Nguyên hàm hàm số lũy thừa

Phương pháp:

a) $\displaystyle\int 0\,\mathrm{d}x = C$ b) $\displaystyle\int \mathrm{d}x = x + C$

c) $\displaystyle\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$ d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + C$ f) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$

Ta có thể áp dụng lũy thừa với số mũ thực để biến đổi. Cho a, b là những số thực dương, α, β là những số thực bất kì. Khi đó:

a) $a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$ b) $\dfrac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta}$ c) $(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\cdot\beta}$

d) $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$ e) $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$

Ví dụ 1. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Nguyên hàm của các hàm số

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2024$ b) $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Nguyên hàm của các hàm số

a) $\int \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) \mathrm{d}x$ b) $\int \sqrt{x}\left(7x^2 - 3\right) \mathrm{d}x (x > 0)$

Lời giải

.....

.....

.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Dạng 11.3. Nguyên hàm hàm số lượng giác

(1) $\displaystyle\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C.$ (2) $\displaystyle\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C.$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = -\cot x + C.$ (4) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \tan x + C.$

Ta có thể áp dụng ***các công thức liên quan*** *để biến đổi.*

1. **Công thức cơ bản**
   - $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
   - $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha},\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
   - $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha},\ \alpha \neq k\pi$
   - $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1,\ \alpha \neq \dfrac{k\pi}{2}$
2. **Công thức cơ bản**
   - $\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \sin b\cos a$
   - $\tan(a \pm b) = \dfrac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a\tan b}$
   - $\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a\sin b$
3. **Công thức nhân đôi**
   - $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
   - $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$
   - $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha},\ \begin{cases}\alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\end{cases}$
4. **Công thức hạ bậc**
   - $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$
   - $\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$
   - $\tan^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha},\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

5. **Công thức tích thành tổng**

- $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\left[\cos\left(a-b\right)+\cos\left(a+b\right)\right]$
- $\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}\left[\cos\left(a-b\right)-\cos\left(a+b\right)\right]$
- $\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}\left[\sin\left(a+b\right)+\sin\left(a-b\right)\right]$
- $\cos a \sin b = \dfrac{1}{2}\left[\sin\left(a+b\right)-\sin\left(a-b\right)\right]$

Ví dụ 1. Tìm gguyên hàm của các hàm số sau

(1) $f(x)=1+\sin x$.

(2) $f(x)=2\sin x+3x$.

(3) $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}$.

(4) $f(x)=1-\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Tìm nguyên hàm $\displaystyle\int \sin 3x\cos 5x\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Nguyên hàm của các hàm số

(1) $\displaystyle\int \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x$. (2) $\displaystyle\int \left(x+\tan^2 x\right) \mathrm{d}x$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 11.4. Nguyên hàm hàm số mũ

(1) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$. (2) $\displaystyle\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $(a>0,\, a\neq 1)$.

Ta có thể áp dụng các công thức liên quan để biến đổi:

Cho a, b là những số thực dương, α, β là những số thực bất kì. Khi đó:

» $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$. » $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$. » $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\cdot\beta}$.

» $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$. » $\left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha = \dfrac{a^\alpha}{b^\alpha}$.

Ví dụ 1. Tìm nguyên hàm của các hàm số

(1) $f(x)=\mathrm{e}^{2x-1}$. (2) $f(x)=3^{-x}$. (3) $f(x)=7^x\cdot 2^{x+2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Ví dụ 2. Tìm nguyên hàm của các hàm số

(1) $\displaystyle\int \left(2^x + \frac{3}{x^2}\right) \mathrm{d}x.$ (2) $\displaystyle\int \left(\mathrm{e}^{x+1} - \frac{\mathrm{e}}{x^2}\right) \mathrm{d}x.$

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Dạng 11.5. Nguyên hàm có điều kiện

Bài toán: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa $F(a) = b$.

» **Bước 1:** Dựa vào bảng nguyên hàm, tính chất nguyên hàm, các phương pháp biến đổi.

» **Bước 2:** Dựa vào điều kiện của giả thiết $F(a) = b$ để tìm C.

» **Bước 3:** Kết luận.

Ví dụ 1. Cho hàm số $f'(x) = 3x^2$. Tìm nguyên hàm $f(x)$ của $f'(x)$ thỏa $f(0) = 1$.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Ví dụ 2. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thoả mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Lời giải

Ví dụ 3. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \mathrm{e}^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

Lời giải

Ví dụ 4. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{2x-1}$, $x \neq \frac{1}{2}$ và $F(1) = 0$. Tính $F(5)$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$. Biết rằng $f'(x) = 2x + \dfrac{1}{x^2}$ với mọi $x \in (0; +\infty)$ và $f(1) = 1$. Tính giá trị $f(4)$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 12x + 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thoả mãn $F(0) = 2$. Tính giá trị $F(1)$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Dạng 11.6. Bài toán thực tế (liên quan đến vận tốc, gia tốc, quãng đường,...)

Bài toán: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa $F(a) = b$.

» **Bước 1:** Xét mối liên hệ giữa các đại lượng.

- Xét mối quan hệ giữa các đại lượng vận tốc $v(t)$, quãng đường $s(t)$ và thời gian t.
  - Đạo hàm của quãng đường là vận tốc: $s'(t) = v(t)$.
  - Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường: $s(t) = \int v(t)\,dt$.
- Xét mối quan hệ giữa các đại lượng vận tốc $v(t)$, gia tốc $a(t)$ và thời gian t.
  - Đạo hàm của vận tốc là gia tốc: $v'(t) = a(t)$.
  - Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc: $v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t$.

» **Bước 2:** Dựa vào điều kiện của giả thiết để tìm đại lượng yêu cầu.

» **Bước 3:** Kết luận.

Ví dụ 1. Một ô tô đang chạy với vận tốc 19 m/s thì hãm phanh và chuyển động chậm dần với tốc độ $v(t) = 19 - 2t$ (m/s). Kể từ khi hãm phanh, quãng đường ô tô đi được sau 5 giây là bao nhiêu?

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2. Một viên đạn được bắn thẳng đứng lên trên từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi $t = 0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t) = 160 - 9{,}8t$ (m/s). Tìm độ cao của viên đạn (tính từ mặt đất):

(1) Sau $t = 5$ giây.

(2) Khi nó đạt độ cao lớn nhất (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

.....
.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

C. LUYỆN TẬP

PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

A. $F'(x) = -f(x), \forall x \in K$.
B. $f'(x) = F(x), \forall x \in K$.
C. $F'(x) = f(x), \forall x \in K$.
D. $f'(x) = -F(x), \forall x \in K$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 2. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng K. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $F(x) = f'(x)$.
B. $F'(x) = f(x)$.
C. $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = F'(x)$.
D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 3. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ là hàm số liên tục, có $F(x)$, $G(x)$ lần lượt là nguyên hàm của $f(x)$, $g(x)$. Xét các mệnh đề sau:

(I) $F(x) + G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) + g(x)$.

(II) $k \cdot F(x)$ là một nguyên hàm của $k \cdot f(x)$ với $k \in \mathbb{R}^*$.

(III) $F(x) \cdot G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) \cdot g(x)$.

Các mệnh đề đúng là

A. (I) và (II). **B.** Cả 3 mệnh đề. **C.** (I) và (III). **D.** (II) và (III).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Cho $\int f(x)\mathrm{d}x = F_1(x)$, $\int g(x)\mathrm{d}x = F_2(x)$. Tính $I = \int [2g(x) - f(x)]\mathrm{d}x$.

A. $2F_1(x) - F_2(x) + C$. **B.** $F_2(x) - F_1(x) + C$.

C. $2F_2(x) - F_1(x) + C$. **D.** $F_1(x) + F_2(x) + C$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Cho $\int 5^x\mathrm{d}x = F(x) + C$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $F'(x) = 5^x \ln 5$. **B.** $F'(x) = 5^x + C$.

C. $F'(x) = -5^x$. **D.** $F'(x) = 5^x$.

Lời giải

.....

.....

Câu 6. $\int x^4 \mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{5}x^5 + C$. **B.** $4x^3 + C$. **C.** $x^5 + C$. **D.** $5x^5 + C$.

Lời giải

Câu 7. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C$.

Lời giải

Câu 8. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$.

A. $\int \cos 3x \mathrm{d}x = 3\sin 3x + C$.

B. $\int \cos 3x \mathrm{d}x = \dfrac{\sin 3x}{3} + C$.

C. $\int \cos 3x \mathrm{d}x = \sin 3x + C$.

D. $\int \cos 3x \mathrm{d}x = -\dfrac{\sin 3x}{3} + C$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 9. Hàm số $F(x) = e^{x^2}$ là nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau

A. $f(x) = 2xe^{x^2}$.

B. $f(x) = x^2e^{x^2} - 1$.

C. $f(x) = e^{2x}$.

D. $f(x) = \dfrac{e^{x^2}}{2x}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 10. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x^4 + 2}{x^2}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1}{x} + C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{x} + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{x} + C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2}{x} + C$.

Lời giải

.....

.....

Câu 11. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$.

B. $\int [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x$.

C. $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x, \forall k \in \mathbb{R}$.

D. $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x, \forall k \in \mathbb{R}, k \neq 0$.

Lời giải

Câu 12. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\int \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x} + C$.

B. $\int \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - 2x + \frac{1}{x} + C$.

C. $\int \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{x}\right)^3 + C$.

D. $\int \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{x}\right)^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + C$.

Lời giải

Câu 13. Hàm số $F(x) = x\sin x + \cos x + 2024$ là một nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $f(x) = x\sin x$.
B. $f(x) = -x\cos x$.
C. $f(x) = -x\sin x$.
D. $f(x) = x\cos x$.

Lời giải

Câu 14. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ là

A. $x^3 + x^2 + 5$.
B. $x^3 + x + C$.
C. $x^3 + x^2 + 5x + C$.
D. $x^3 + x^2 + C$.

Lời giải

Câu 15. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x+1)(x+2)$.

A. $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3}{2}x^2 + 2x + C$.

B. $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{3}x^2 + 2x + C$.

C. $F(x) = 2x + 3 + C$.

D. $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2}{3}x^2 + 2x + C$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 16. Tìm nguyên hàm $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}\mathrm{d}x$.

A. $F(x) = -\cos x - \sin x + C$.

B. $F(x) = \cos x + \sin x + C$.

C. $F(x) = \cot x - \tan x + C$.

D. $F(x) = -\cot x - \tan x + C$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = 2x + \mathrm{e}^x$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thoả mãn $F(0) = 2024$.

A. $F(x) = x^2 + \mathrm{e}^x + 2023$.

B. $F(x) = x^2 + \mathrm{e}^x - 2023$.

C. $F(x) = x^2 + \mathrm{e}^x + 2022$.

D. $F(x) = x^2 + \mathrm{e}^x - 2024$.

Lời giải

.....

.....

Câu 18. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos x$ thỏa mãn $F(0) = 1$ là

A. $F(x) = \sin x + 1$.
B. $F(x) = -\sin x + 1$.
C. $F(x) = \cos x$.
D. $F(x) = -\cos x + 2$.

Lời giải

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = 2x + \mathrm{e}^x$. Hàm số $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$, sao cho $F(0) = 2024$. Tính $F(1)$.

A. $\mathrm{e} + 2025$.
B. $\mathrm{e} - 2024$.
C. $\mathrm{e} + 2024$.
D. $\mathrm{e} - 2025$.

Lời giải

Câu 20. Hàm số $F(x) = \sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} + x\sqrt{x}$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

B. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{3} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

C. $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$.

D. $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{1}{2}\sqrt{x} + \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 21. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$, với $f(x) = \dfrac{x(x-3)^2}{x^2}$, biết $F(1) = \dfrac{5}{2}$. Tính $F(2)$.

A. $F(2) = 2 + 9\ln 2.$.

B. $F(2) = -2 + 9\ln 2.$

C. $F(2) = 1 + 9\ln 2.$.

D. $F(2) = 7.$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 22. Cho hàm số $f(x) = 3\cos x - \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{\sin^2 x}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = 3\sin x - 2\ln|x| - 4\cot x + C.$

B. $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = 3\sin x - 2\ln x - 4\cot x + C.$

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = 3\sin x - 2\ln|x| + 4\cot x + C.$

D. $\int f(x)\mathrm{d}x = -3\sin x - 2\ln|x| - 4\cot x + C.$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 23. Một vật chuyển động có gia tốc là $a(t) = 3t^2 + t$ (m/s^2). Biết rằng vận tốc ban đầu của vật là 2 m/s. Vận tốc của vật đó sau 2 giây là

A. 8 m/s . **B.** 12 m/s. **C.** 10 m/s. **D.** 16 m/s.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 24. Một viên đạn được bắn thẳng đứng lên trên từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi $t = 0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t) = 25 - 9{,}8t$ (m/s). Độ cao của viên đạn (tính từ mặt đất) đạt giá trị lớn nhất là

A. $\dfrac{125}{49}$. **B.** $\dfrac{3125}{98}$. **C.** $\dfrac{2375}{392}$. **D.** $\dfrac{1125}{98}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C). Xét điểm $M\left(x; f(x)\right)$ thay đổi trên (C). Biết rằng, hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M là $k_M = (x+2)^2$ và điểm $A(0;1)$ thuộc đồ thị (C). Tìm biểu thức $f(x)$.

A. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x$.

B. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 1$.

C. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$.

D. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x + 1$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Trong mỗi trường hợp sau, hàm số $F(x)$ có là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng tương ứng không? Vì sao?

a) Hàm số $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2$ trên $\mathbb{R}$.

b) Hàm số $F(x)=2\sin x-3\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\cos x-3\sin x$ trên $\mathbb{R}$.

c) Hàm số $F(x)=\mathrm{e}^{x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x\mathrm{e}^{x^2}$ trên $\mathbb{R}$.

d) Hàm số $F(x)=(4x^2-2x+1)\sqrt{2x-3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$ trên khoảng $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx$, với $a,b\in\mathbb{R}$.

a) Biết $a=b=1$, nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^2}{2}+C$.

b) Biết $a=b=4$, nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $\dfrac{x^4}{4}+2x^2+C$.

c) Biết $f(1)=6$; $f(2)=36$, nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là x^4-x^2+C.

d) Biết $f(1)=2$; $f(-2)=-52$, nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $2x^4-3x^2+C$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

. . . . . .
. . . . . .

Câu 3. Xét khẳng định sau

a) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x = \ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C.$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x+1}{x}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}-2x+\ln|x|+C.$

c) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{5-2x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \ln|5-2x|+2\ln|x|-\frac{3}{x}+C.$

d) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$ thỏa $F(4)=3$ thì $F(x)=x+4\ln|x-3|-1$.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 4. Cho hàm số $F(x)=\displaystyle\int \sqrt{x}\left(x^2-5x+1\right)\mathrm{d}x = \frac{ax^3\sqrt{x}}{b}-ax^2\sqrt{x}+\frac{a}{c}x\sqrt{x}+C$ $(x>0)$.

a) $F(x)=\dfrac{2x^3\sqrt{x}}{7}-2x^2\sqrt{x}+\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C.$

b) Tổng $a+b+c=12$.

c) Tích $a\cdot b\cdot c=42$.

d) $F(1)=\dfrac{2002}{21}$ thì $F(x)=\dfrac{2x^3\sqrt{x}}{7}-2x^2\sqrt{x}+\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+2024.$

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

.....
.....
.....

Câu 5. Cho $I_1 = \int \left(\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x$ và $I_2 = \int \left(\mathrm{e}^{2x-1} - \dfrac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x$.

a) $I_1 = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x} + C$.

b) $I_2 = \dfrac{\mathrm{e}^{2x-1}}{2} + \ln|x| + C$.

c) $I_1 + I_2 = \mathrm{e}^x + \dfrac{\mathrm{e}^{2x-1}}{2} + C$.

d) Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$, với $f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x^2}$. Nếu $F(1) = \mathrm{e}$ thì $F(\ln 2) = 1 - \dfrac{1}{\ln 2}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = 4\cos^2 \dfrac{x}{2}$.

a) Cho hàm số $f(x) = 4\cos^2 \dfrac{x}{2} + C$.

b) Biết rằng $\int f(x)\mathrm{d}x = ax + b\sin x + C$, $a, b \in \mathbb{Z}$, khi đó $a + b = 4$.

c) Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 1$ là $F(x) = 2(x + \sin x) + 1$.

d) Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ là $F(x) = 2(x + \sin x) - \pi$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = 2x - 3\cos x$.

a) $f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x) = 2 + 3\sin x$.

b) Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x - 3\cos x$ là $h(x) = x^2 + 3\sin x + 2024$.

c) Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thoả mãn điều kiện $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3$ là $F(x) = x^2 - 3\sin x + 6 - \dfrac{\pi^2}{4}$.

d) $f(x) = 2x - 3\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $k(x) \cdot \mathrm{e}^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $k'(x) \cdot \mathrm{e}^x$ là $3\sin x + 3\cos x + 2x + C$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 8x^3 + \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$.

a) Hàm số $y = f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(x)$.

b) Biết $f(0) = 3$. Khi đó, $f(x) = 2x^4 - \cos x + 3$.

c) $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = \int (2x^4 - \cos x + 3)\mathrm{d}x = \frac{2}{5}x^5 - \sin x + 3x + C$, với C là hằng số.

d) Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thoả mãn $F(0) = 2$. Khi đó, $F\,(1) = \dfrac{32}{5} - \sin 1$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

. . . . . .

. . . . . .

Câu 9. Biết $F(x) = 3x^2 + 2x - \ln x + C$, $x \in (0; +\infty)$ là hàm của hàm số $f(x)$.

a) $f(x) = 6x + 2 - \dfrac{1}{x}, x \in (0; +\infty)$.

b) $F(1) = 3$. Khi đó $F(2) = 14 - \ln 2$.

c) $f(1) = 1$.

d) Bất phương trình $f(x) + \dfrac{1}{x} - 8 < 0$ có tập nghiệm là $(-\infty; 1)$.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Câu 10. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

a) $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + \ln x + 2025$.

b) Biết $F(1) = \dfrac{3}{2}$, khi đó $F(\mathrm{e}) = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} + 1$.

c) $F(x) = f'(x), \forall x \in (0; +\infty)$.

d) Biết rằng đồ thị của hàm số $F(x)$ đi qua $M\left(\mathrm{e}; \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}\right)$. Khi đó $F(1) = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

.....

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(-\infty; 0)$. Biết rằng $f'(x) = 2x + \dfrac{1}{x^2}$.

a) $f(1) = 2$. Khi đó $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x} + 2$.

b) $f(1) = 0$. Phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm.

c) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $M(-1; 2)$. Khi đó $f(2) = \dfrac{13}{2}$.

d) $f(-2) = \dfrac{1}{4}$. Hàm số $g(x) = xf(x)$ có 3 điểm cực trị.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$, biết $f'(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$, biết $f(-2) = \dfrac{3}{2}$ và $f(2) = 2\ln 2 - \dfrac{3}{2}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng? Khẳng định nào **sai**?

a) Hàm số $f(x) = \ln|x| - \dfrac{1}{x} + C$, với C là hằng số..

b) Hàm số $f(x) = \begin{cases} \ln x - \dfrac{1}{x} + C_1, \text{khi } x > 0 \\ \ln(-x) - \dfrac{1}{x} + C_2, \text{khi } x < 0 \end{cases}$, với $C_1,\ C_2$ là hằng số.

c) Giá trị $f(-1) = 2 - \ln 2$.

d) Giá trị $f(4) = 3\ln 2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 13. Một vật chuyển động đều với vận tốc có phương trình $v(t) = t^2 - 2t + 1$, trong đó t được tính bằng giây, quãng đường $s(t)$ được tính bằng mét. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng? Khẳng định nào sai?

a) Quãng đường đi được của vật sau 2 giây là $\frac{2}{3}$ (m).

b) Quãng đường vật đi được khi gia tốc bị triệt tiêu là $\frac{1}{3}$ (m).

c) Quãng đường vật đi được trong khoảng từ 2 giây đến thời gian mà vận tốc đạt 9 (m/s) là $\frac{26}{3}$ (m).

d) Quãng đường vật đi được từ 0 giây đến thời gian mà gia tốc bằng 10 (m/s^2) là 44 (m).

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C). Xét điểm $M(x; f(x))$ thay đổi trên (C). Biết rằng, hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M là $k_M = 3x^2 + 2x - 2$ và điểm M trùng với gốc tọa độ khi nó nằm trên trục tung.

a) Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x = -1$ là $k = -1$.

b) $f(1) = 0$.

c) Điểm $B(2; 7)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$.

d) Hàm số $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....

Câu 15. Một ô tô đang chạy với tốc độ 72 km/h thì người lái xe bất ngờ phát hiện chướng ngại vật trên đường. Người lái xe phản ứng một giây sau đó bằng cách đạp phanh khẩn cấp. Kể từ thời điểm này, ô tô chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t) = -10t+30$ (m/s), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong $t(s)$ kể từ lúc đạp phanh.

a) Công thức biểu diễn hàm số $s(t) = -5t^2 + 30t + 72$ (m).

b) Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi xe ô tô dừng hẳn là 3 giây.

c) Sau 3 giây kể từ lúc đạp phanh, quãng đường xe ô tô di chuyển được là 45 (m).

d) Quãng đường xe ô tô đã di chuyển kể từ lúc người lái xe phát hiện chướng ngại vật trên đường đến khi xe ô tô dừng hẳn là 120 (m).

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Cho $F(x)$ là họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x-\cos x+\dfrac{2}{\cos^2 x}$, $F\left(0\right)=1$. Tính $F(\pi)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho $F(x)$ là họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x-2x+1$, $F(0)=2$. Tính giá trị $F(1)$ (làm tròn kết quả đến số thập phân thứ hai).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Cho $F(x)=(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x^2-3x+2)\mathrm{e}^{-x}$. Tính tổng $S=a+2b-c$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....

Câu 4. Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi hàm số $v(t) = -0{,}1t^3 + t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng centimét/tuần. Gọi $h(t)$ là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t. Chiều cao cây cà chua sau 2 tuần là bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến số thập phân thứ hai.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 5. Khi được thả từ độ cao 20 m, một vật rơi với gia tốc không đổi $a = 10$ m/s^2. Sau khi rơi được t giây thì vật có tốc độ bao nhiêu?

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

BÀI 12. TÍCH PHÂN

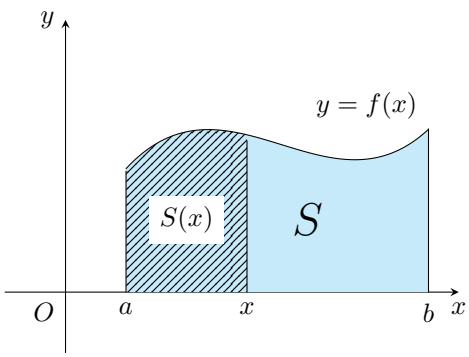
A. LÝ THUYẾT

1. Hình thang cong

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$. Hình phẳng giới hạn bởi:

- đồ thị hàm số $y = f(x)$,
- trục hoành,
- hai đường thẳng $x = a, x = b$

được gọi là hình thang cong.



2. Diện tích hình thang cong

Định nghĩa 1. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi:

- đồ thị hàm số $y = f(x)$,
- trục hoành,
- hai đường thẳng $x = a, x = b$

được tính bởi công thức $\boxed{S = F(b) - F(a)}$
Trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

3. Định nghĩa tích phân

Định nghĩa 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.
Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ thì hiệu số $F(b) - F(a$ gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

- Viết $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

- Gọi $\int\limits_a^b$ là dấu tích phân; a là cận dưới; b là cận trên,
  $f(x)\,\mathrm{d}x$ là biểu thức dưới dấu tích phân,
  $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

⚠ *Chú ý:*

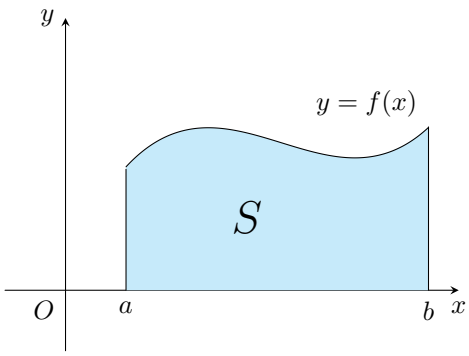
- *Trường hợp* $a = b$: $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
- *Trường hợp* $a > b$: $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
- *Tích phân không phụ thuộc vào biến số* x *hay* t, *nghĩa là* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

4. Ý nghĩa hình học của tích phân

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi:

- đồ thị hàm số $y = f(x)$,
- trục hoành,
- hai đường thẳng $x = a, x = b$

được tính bởi công thức $\boxed{S = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.}$



⚠ *Chú ý:*

- *Nếu hàm số* $f(x)$ *có đạo hàm* $f'(x)$ *và* $f'(x)$ *liên tục trên đoạn* $[a;b]$ *thì*

$$\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

- *Tốc độ* $v(t) \geq 0$ *tại mọi thời điểm* $t \in [a;b]$ *thì quãng đường di chuyển trong khoảng thời gian từ* a *đến* b *được tính theo công thức:*

$$s = s(b) - s(a) = \int\limits_a^b v(t)\,\mathrm{d}t.$$

5. Tính chất tích phân

Tính chất 1.

(1) Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó:

- $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$
- $\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

(2) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, k là số thực. Khi đó:

- $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

(3) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, $c \in (a;b)$. Khi đó

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 12.1. Áp dụng định nghĩa – tính chất

Phương pháp

- **Áp dụng định nghĩa, tính chất và bảng công thức nguyên hàm cơ bản.**

1	$\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ (Tích phân có hai cận giống nhau thì bằng 0).
2	$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (Tích phân đảo cận$\rightarrow$ thêm dấu trừ).
3	$\displaystyle\int_a^b k\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ với $k \in \mathbb{R}$.
4	$\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

5	Trong đoạn $[a;b]$, tồn tại $c \in [a;b]$ thì $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

- **Ý nghĩa hình học của tích phân:** Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi: đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a, x = b$ là $\boxed{S = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.}$

Ví dụ 1. Cho $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ và $\displaystyle\int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Tính

a) $\displaystyle\int_0^3 [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x$.

b) $\displaystyle\int_0^3 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$.

c) $\displaystyle\int_0^3 3f(x)\,\mathrm{d}x$.

d) $\displaystyle\int_0^3 [2f(x) - 3g(x)]\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

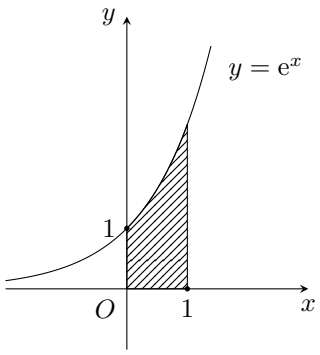
. . . . . .

Ví dụ 2. Cho $\displaystyle\int_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\displaystyle\int_{-2}^4 f(t)\,\mathrm{d}t = -4$. Tính $\displaystyle\int_2^4 f(y)\,\mathrm{d}y$.

Lời giải

. . . . . .

Ví dụ 3.
Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \mathrm{e}^x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 1$.



Lời giải

Ví dụ 4. Cho f, g là hai hàm liên tục trên đoạn $[1;3]$ thoả $\displaystyle\int_1^3 [f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x = 10$, $\displaystyle\int_1^3 [2f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = 6$. Tính $\displaystyle\int_1^3 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ví dụ 5. Cho số thực $a > 1$, tính tích phân $\displaystyle\int_0^a |x-1|\,\mathrm{d}x$ theo a.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 12.2. Tích phân hàm số chứa dấu trị tuyệt đối

Phương pháp Tính $I = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

■ **Cách 1:**

– Cho $f(x) = 0$ tìm nghiệm thuộc đoạn $[a;b]$. Giả sử các nghiệm đó là $x_1; x_2; \ldots; x_n \in [a;b]$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int_a^{x_1} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{x_2}^{x_3} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_n}^{b} |f(x)|\,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow I &= \left|\int_a^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \cdots + \left|\int_{x_n}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right|. \end{aligned}$$

■ **Cách 2:**

– Cho $f(x) = 0$ tìm nghiệm $x_i \in [a;b]$ $(i = 1, 2, \ldots k)$.

– Xét dấu $f(x)$ trên $[a;b]$.

– Áp dụng $|f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) \text{ khi } f(x) < 0 \end{cases}$ để bỏ dấu giá trị tuyệt đối hàm số dưới dấu tích phân trong $\displaystyle\int_a^b \ldots$

Tính mỗi tích phân thành phần.

Ví dụ 1. a) $A=\displaystyle\int\limits_{-2}^{2}\left|x^2-1\right|\mathrm{d}x$.

b) $B=\displaystyle\int\limits_{-2}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|\mathrm{d}x$.

c) $C=\displaystyle\int\limits_{-1}^{2}\left|x^3-3x+2\right|\mathrm{d}x$.

d) $D=\displaystyle\int\limits_{-2}^{2}\left|x^4-3x^2-4\right|\mathrm{d}x$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau:

a) $A=\displaystyle\int\limits_{-3}^{5}\left(|x+2|-|x-2|\right)\mathrm{d}x$.

b) $B=\displaystyle\int\limits_{-1}^{2}\left(x+|1-x|-|x+2|\right)\mathrm{d}x$.

c) $C=\displaystyle\int\limits_{1}^{5}\dfrac{2|x-2|+1}{x}\,\mathrm{d}x$.

d) $D=\displaystyle\int\limits_{0}^{3}\sqrt{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 12.3. Tích phân hàm số cho bởi nhiều công thức

Bài toán 1.

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} g(x), x\le b \\ h(x), x>b \end{cases}$ liên tục trên $\mathscr{D}$. Tính $J=\displaystyle\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Xét $b\in[a;c]$.

- **Bước 1.** Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x=b$?
  Tức là kiểm tra $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to b^-} g(x)=\lim\limits_{x\to b^+} h(x)=f(b)$.
- **Bước 2.** Tách cận $J=\displaystyle\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\underbrace{\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}_{I_1}+\underbrace{\int\limits_b^c h(x)\,\mathrm{d}x}_{I_2}$.
- **Bước 3.** Tính các tính phân I_1, I_2 bằng cách phương pháp đã học.

Bài toán 2.

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} g(x;m), x\le b \\ h(x;m), x>b \end{cases}$ liên tục trên $\mathscr{D}$. Tính $J=\displaystyle\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Xét $b\in[a;c]$.

- **Bước 1.** Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x=b$?
  Tức là kiểm tra $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to b^-} g(x;m)=\lim\limits_{x\to b^+} h(x;m)=f(b)$.
- **Bước 2.** Tách cận $J=\displaystyle\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\underbrace{\int\limits_a^b g(x;m)\,\mathrm{d}x}_{I_1}+\underbrace{\int\limits_b^c h(x;m)\,\mathrm{d}x}_{I_2}$.
- **Bước 3.** Tính các tính phân I_1, I_2 bằng cách phương pháp đã học.

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2-1, x\ge 2 \\ x^2-2x+3, x<2 \end{cases}$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x^2, 0\le x\ge 1\\ 4-x, 1\le x\le 2\end{cases}$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ví dụ 3. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}0{,}5x, & 0\le x<2\\ 1, & 2\le x<15\\ 4-0{,}2x, & 15\le x\le 20\end{cases}$. Tính $\displaystyle\int_0^{20} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ví dụ 4. Cho số thực a và hàm số $f(x)=\begin{cases}2x, & x\le 0\\ a(x-x^2), & x>0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Dạng 12.4. Bài toán thực tế

Bài toán chuyển động của một vật.

- Một vật chuyển động theo phương trình vận tốc $v(t)$ trong khoảng thời gian $t = a$ đến $t = b$, $(a < b)$ sẽ di chuyển được quãng đường là $s = \displaystyle\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$.
- Một vật chuyển động có phương trình gia tốc $a(t)$ thì vận tốc của vật đó sau khoảng thời gian $\Delta t = t_2 - t_1$ là $v = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,\mathrm{d}x$.

Bài toán ứng dụng tích phân vào tìm các đại lượng vật lý như công, điện lượng, ...

- Theo định luật Hooke, lực cần dùng để giữ lò xo giãn thêm x mét từ độ dài tự nhiện là $f(x) = kx$, với k (N/m) là độ cứng của lò xo. Công cần để kéo dãn lò xo từ độ dài ℓ_1 đến độ dài ℓ_2 là $Q = \displaystyle\int_{\ell_1}^{\ell_2} f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Điện lượng chuyển qua tiết diện của dây dẫn của đoạn mạch trong thời gian từ t_1 đến t_2 là $Q = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} I(t)\,\mathrm{d}t$.

Ví dụ 1. Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

Lời giải

.....

Ví dụ 2. Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t) = t^2 - 3t + 2$ (m/s). Trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 3$.

a) Tìm độ dịch chuyển của vật.

b) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này.

Lời giải

Ví dụ 3. Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t) = t^2 - t - 6$ (m/s). Trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 4$

a) Tìm độ dịch chuyển của vật.

b) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này.

Lời giải

Ví dụ 4. Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x) = -0{,}0002x + 7{,}5$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.

a) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 60 đơn vị sản phẩm.

b) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 150 đơn vị sản phẩm.

Lời giải

Ví dụ 5. Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x) = -0{,}0005x + 12{,}2$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.

a) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 101 đơn vị sản phẩm.

b) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 110 đơn vị sản phẩm.

Lời giải

.....
.....
.....

Ví dụ 6. Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động mạch bán kính R không đổi, có thể được mô hình hóa bởi công thức bên dưới. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0 \leq 0 \leq R$. So sánh vận tốc trung bình với vận tốc lớn nhất.

a) $v = \dfrac{k}{2}\left(\dfrac{4}{3}R^2 - r^2\right)$, trong đó k là một hằng số.

b) $v = k\left(R^2 - r^2\right)$, trong đó k là một hằng số.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

C. LUYỆN TẬP

PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$. Chọn mệnh đề đúng.

A. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

B. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$.

C. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) + F(a)$.

D. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F^2(b) - F^2(a)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$. Chọn mệnh đề **sai**.

A. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

B. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

C. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

D. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

. . . . . .

. . . . . .

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$. Chọn mệnh đề đúng.

A. $f(b)-f(a)=\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $F(b)-F(a)=\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $f(b)-f(a)=\displaystyle\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $f'(b)-f'(a)=\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Câu 4. Tính tích phân $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t$.

A. 2.

B. 0.

C. -2.

D. 1.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Câu 5. Tính tích phân $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{a} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ với $a > \mathrm{e}$.

A. $\ln a + 1$. **B.** $1 - \ln a$. **C.** $\ln a - 1$. **D.** $\ln a$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6. Nếu $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ thì $\int\limits_1^3 [f(x) + 2x]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 20. **B.** 18. **C.** 12. **D.** 10.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

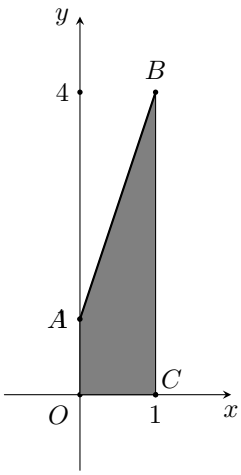
.....

.....

.....

.....

Câu 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang $OABC$ giới hạn bởi $y = 3x + 1$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0, x = 1$ (như hình vẽ).



Khi đó $\int\limits_0^1 (3x+1)\,\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Câu 8. Cho $\int\limits_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$ và $\int\limits_{-2}^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\int\limits_{-2}^2 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = 8$. **B.** $\int\limits_{-2}^2 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = 4$.

C. $\int\limits_{-2}^2 5f(x)\,\mathrm{d}x = 5$. **D.** $\int\limits_{-2}^2 [3f(x)-4g(x)]\,\mathrm{d}x = -15$.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Câu 9. Tính $I = \int\limits_{-1}^{0} (2x+3)^2 \,\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{13}{3}$. **B.** $I = \dfrac{14}{3}$. **C.** $I = -\dfrac{13}{3}$. **D.** $I = \dfrac{26}{3}$.

Lời giải

Câu 10. Tích phân $\int\limits_{0}^{1} (\mathrm{e}^{3x} + 5x^4) \,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\mathrm{e}^3 + \dfrac{3}{2}$. **B.** e. **C.** $\dfrac{\mathrm{e}^3 + 2}{3}$. **D.** e^3.

Lời giải

Câu 11. Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\displaystyle\int_1^2 [2 + f(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** $\dfrac{13}{3}$. **D.** $\dfrac{7}{3}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 12. Cho $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$; $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$. Tính $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$

A. 3. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 13. Cho $\displaystyle\int_0^m (3x^2 - 2x + 1)\,\mathrm{d}x = 6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1; 2)$. **B.** $(-\infty; 0)$. **C.** $(0; 4)$. **D.** $(-3; 1)$.

Lời giải

.....

.....

Câu 14. Cho $I = \int\limits_0^1 (4x - 2m^2)\,\mathrm{d}x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $I + 6 > 0$?

A. 1. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Câu 15. Cho a là số thực dương, tính tích phân $I = \int\limits_{-1}^{a} |x|\,\mathrm{d}x$ theo a.

A. $I = \dfrac{a^2+1}{2}$. **B.** $I = \dfrac{a^2+2}{2}$. **C.** $I = \dfrac{-2a^2+1}{2}$. **D.** $I = \dfrac{|3a^2-1|}{2}$.

Lời giải

Câu 16. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$; $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$. Tính $I = \int\limits_{-1}^3 f(|u|)\,\mathrm{d}u$

A. 2. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 17. Cho $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2x-1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tính $J = \int\limits_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

A. -1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 18. Vận tốc của một vật chuyển động là $v(t) = 3t^2 + 5$ (m/s). Quãng đường vật đó đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là

A. 669 m. **B.** 696 m. **C.** 699 m. **D.** 966 m.

Lời giải

.....

Câu 19. Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x) = -0{,}0004x + 9{,}3$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm. Khi đó sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 125 đơn vị sản phẩm là

A. 232,325 triệu đồng. **B.** 230,315 triệu đồng.

C. 321,385 triệu đồng. **D.** 231,375 triệu đồng.

Lời giải

Câu 20. Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động mạch bán kính $R = 9$, có thể được mô hình hóa bởi công thức $v = k(R^2 - r^2)$, trong đó k là một hằng số. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0 \le r \le R$.

A. $54k$. **B.** $45k$. **C.** $9k$. **D.** $27k$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....

Câu 21. Cho số thực a và hàm số $f(x)=\begin{cases}2x & \text{khi } \leq 0\\ a(x-x^2) & \text{khi } >0\end{cases}$. Tính tích phân $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{a}{6}-1$. **B.** $\dfrac{2a}{3}+1$. **C.** $\dfrac{a}{6}+1$. **D.** $\dfrac{2a}{3}-1$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 22. Một chiếc xe ô tô đang chạy trên đường cao tốc với vận tốc 72 km/h thì tài xế bất ngờ đạp phanh làm cho chiếc ô tô chuyển động chậm với gia tốc $a(t)=-\dfrac{8}{5}t$ (m/s^2), trong đó t là thời gian tính bằng giây. Hỏi kể từ khi đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn thì ô tô di chuyển bao nhiêu mét (m)? (Giả sử trên đường ô tô di chuyển không có gì bất thường).

A. 50 (m). **B.** $\dfrac{250}{3}$ (m). **C.** $\dfrac{200}{3}$ (m). **D.** $\dfrac{100}{3}$ (m).

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho $\displaystyle\int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -4$ và $\displaystyle\int_{-3}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x = -3$.

a) $\displaystyle\int_{-3}^{0} [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = -7$.

b) $\displaystyle\int_{-3}^{0} [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = 1$.

c) $\displaystyle\int_{-3}^{0} -3f(x)\,\mathrm{d}x = 12$.

d) $\displaystyle\int_{-3}^{0} [2f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x = -51$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Tính $I = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (3-\sin x)\,\mathrm{d}x = a\pi - \frac{b}{c}$ (trong đó a, b, $c \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

a) $a^3+b^3-c=0$. **b)** $a^2+b^2>c^2$. **c)** $3a=2b+c$. **d)** $c=a+b$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[0;3]$. $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[0;3]$ thỏa $F(3)=2$ và $F(0)=1$.

a) Hiệu số $F(3)-F(0)$ gọi là tích phân từ 3 đến 0 của hàm số $f(x)$.

b) $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_3^0 f(x)\,\mathrm{d}x = F(3)-F(0)$.

c) $\displaystyle\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

d) Hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=3$ có diện tích bằng 1.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Cho hàm số $f(x)=6x^5$. Gọi $I=\displaystyle\int_a^b 6x^5\,\mathrm{d}x$.

a) Gọi $J=\displaystyle\int_a^b x^5\,\mathrm{d}x$ thì ta có $J=6I$.

b) Biết $\displaystyle\int_a^b (6x^5+x)\,\mathrm{d}x=8$ và $\displaystyle\int_a^b x\,\mathrm{d}x=3$ thì $I=\displaystyle\int_a^b 6x^5\,\mathrm{d}x=5$.

c) Với $c\in[a;b]$, thì $\displaystyle\int_a^b 6x^5\,\mathrm{d}x=\int_a^c 6x^5\,\mathrm{d}x+\int_c^b 6x^5\,\mathrm{d}x$.

d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left|6x^5\right|\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 6x^5\,\mathrm{d}x+\int_0^1 6x^5\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

.....

.....

Câu 5. Cho $I = \int\limits_0^3 \left|x^2 - 2x\right| \,\mathrm{d}x$.

a) Ta có $|x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x, & 0 \le x \le 2 \\ x^2 - 2x, & 2 < x \le 3 \end{cases}$.

b) $I = \int\limits_0^3 \left|x^2 - 2x\right| \,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left|x^2 - 2x\right| \,\mathrm{d}x + \int\limits_2^3 \left|x^2 - 2x\right| \,\mathrm{d}x$.

c) $I = \int\limits_0^3 \left|x^2 - 2x\right| \,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 (x^2 - 2x) \,\mathrm{d}x + \int\limits_2^3 (x^2 - 2x) \,\mathrm{d}x$.

d) $I = \left(-\dfrac{x^3}{3} + x^2\right)\Big|_0^2 + \left(\dfrac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_2^3$.

Lời giải

Câu 6. Cho tích phân $I = \int\limits_{-2}^1 |4x - 1| \,\mathrm{d}x$. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

a) Tích phân $I = \int\limits_{-2}^{\frac{1}{4}} (4x - 1) \,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{1}{4}}^1 (4x - 1) \,\mathrm{d}x$.

b) Giá trị của tích phân $I = \dfrac{45}{4}$.

c) Tích phân $I = \left| \displaystyle\int_{-2}^{1} (4x-1)\,\mathrm{d}x \right|$.

d) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị: $y = 4x-1; y = 0; x = -2; x = 1$. Khi đó $S = |I|$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

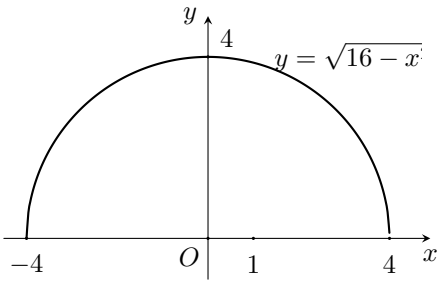
.....

.....

.....

Câu 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đồ thị hàm số $y = \sqrt{16-x^2}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $4\displaystyle\int_{0}^{4} \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$ bằng diện tích hình tròn có bán kính bằng 4.



b) $\displaystyle\int_{-4}^{0} \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{4} \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$.

c) $\displaystyle\int_{-4}^{4} \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x = 4\int_{0}^{4} \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$.

d) $\displaystyle\int_{-4}^{4} \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x = 8\pi$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....

Câu 8. Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang (chiều dương hướng sang phải) với gia tốc phụ thuộc vào thời gian t (s) là $a(t) = 2t - 7$ m/s^2. Biết vận tốc đầu bằng 6 m/s, xét tính đúng sai của các khẳng định sau.

a) Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t (s) xác định bởi $v(t) = t^2 - 7t + 10$.

b) Tại thời điểm $t = 7$ (s), vận tốc của chất điểm là 6 (m/s).

c) Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1 \le t \le 7$ là 18 m.

d) Trong 8 giây đầu tiên, thời điểm chất điểm xa nhất về phía bên phải là $t = 7$ (s).

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 9. Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x) = -0{,}0008x + 10{,}4$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.

a) Lợi nhuận khi bán được x đơn vị sản phẩm được tính bằng công thức $P(x) = -0{,}0008x^2 + 10{,}4x$.

b) Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm đầu tiên là 519 triệu đồng.

c) Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 đơn vị sản phẩm là 49,79 triệu đồng.

d) Biết sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a đơn vị sản phẩm lớn hơn 517 triệu đồng, khi đó giá trị nhỏ nhất của a là 100.

Lời giải

.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 10. Ở nhiệt độ 37°C, một phản ứng hóa học từ chất đầu A, chuyển hóa thành chất sản phẩm B theo phương trình $A \to B$. Giả sử $y(x)$ là nồng độ chất A (đơn vị mol L^{-1}) tại thời điểm x (giây), $y(x) > 0$ với $x \geq 0$, thỏa mãn hệ thức: $y'(x) = -7 \cdot 10^{-4} y(x)$ với $x \geq 0$. Biết rằng tại $x = 0$, nồng độ (đầu) của A là 0,05 mol L^{-1}. Xét hàm số $f(x) = \ln y(x)$ với $x \geq 0$. Khi đó, ta có

a) $f'(x) = -7 \cdot 10^{-4}$.

b) $f(x) = -7 \cdot 10^{-4} x + \ln(0{,}05)$.

c) $y(30) - y(15) = -6 \cdot 10^{-4}$.

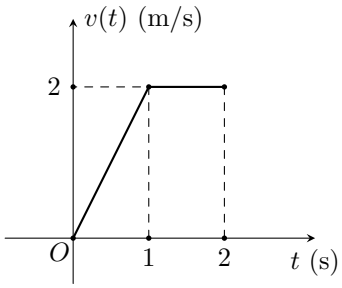
d) Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây gần bằng 0,05.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 11.

Một vật chuyển động với vận tốc được cho bởi đồ thị trong hình sau:



a) Vận tốc của vật tại thời điểm t được xác định bởi $v(t) = \begin{cases} 2t & \text{khi } 0 \le t \le 1 \\ 2 & \text{khi } t > 1 \end{cases}$.

b) Quãng đường vật đi được trong 1 giây đầu tiên được xác định bởi công thức $s(t) = \displaystyle\int_0^1 v(t)\,\mathrm{d}t$.

c) Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ 1 giây đến 2 giây được xác định bởi công thức $s(t) = \displaystyle\int_0^2 v(t)\,\mathrm{d}t$.

d) Quãng đường mà vật đi được trong 2 giây đầu tiên là 3 m.

Lời giải

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Nếu $F'(x)=\dfrac{1}{2x}$ và $F(1)=1$ thì giá trị của $F(4)$ bằng bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;2]$. Giả sử $y=F(x)$ là một nguyên hàm của $y=f(x)$ và $\displaystyle\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=3$ và $F(0)=2$. Giá trị $F(2)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Giả sử $\displaystyle\int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x=6$ và $\displaystyle\int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x=8$. Giá trị $\displaystyle\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

.....

Câu 4. Cho các hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Giả sử $\displaystyle\int_2^7 [2f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x = 1$ và $\displaystyle\int_2^7 [f(x) - 2g(x)]\,\mathrm{d}x = 4$. Khi đó, $\displaystyle\int_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x - 3\int_7^2 g(x)\,\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Câu 5. Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\displaystyle\int_1^2 [2 + f(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 3, & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tích phân $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \\ x + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tích phân $I = \displaystyle\int_2^0 -3t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ bằng bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & \text{khi } x < 0 \\ x - 1, & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ 5 - 2x, & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_{-5}^{9} \frac{1}{7} f(t)\,\mathrm{d}t$ bằng bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 9. Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t) = t^2 - t - 6$ (mét/giây). Quãng đường (mét) vật đi được trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 4$ bằng (làm tròn tới hàng phần trăm).

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

BÀI 13. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

A. LÝ THUYẾT

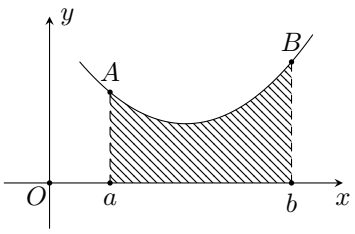
1. Diện tích hình thang cong

1.1 Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành, $x = a$, $x = b$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

- Trường hợp $f(x) > 0$ trên $[a;b]$.

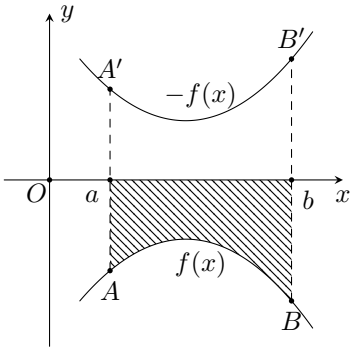
  Khi đó diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $f(x)$, Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



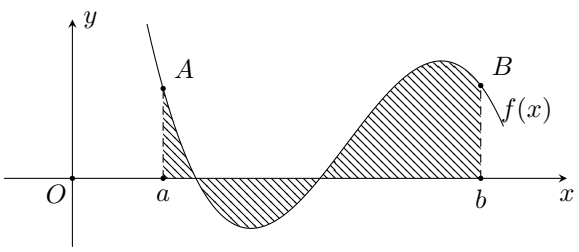
- Trường hợp $f(x) \le 0$ trên $[a;b]$.

  Ta có $-f(x) \ge 0$ và diện tích hình thang cong $aABb$ bằng diện tích hình thang cong $aA'B'b$ (trong đó $aA'B'b$ là hình đối xứng của hình thang đã cho qua trục hoành).

  Do đó $S = S_{aABb} = S_{aA'B'b} = \displaystyle\int_a^b (-f(x))\,\mathrm{d}x$.



Tổng quát. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$, Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức $S = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.



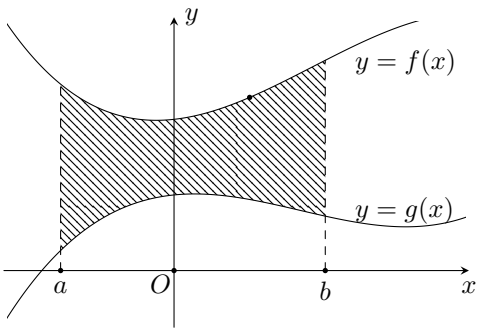
! Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên $[a;b]$ thì

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$

1.2 Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$

Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đó và đường thẳng $x = a$, $x = b$.

Xét trường hợp $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a;b]$.
Gọi S là diện tích hình thang cong giới hạn bởi $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$.
Khi đó diện tích $S = \displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$.

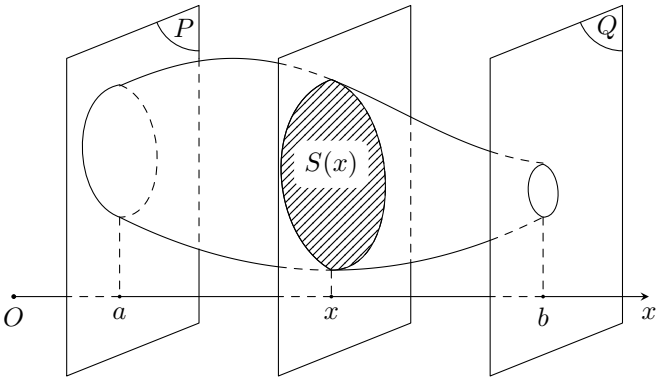


Tổng quát. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x.$$

2. Thể tích

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b, $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a \leq x \leq b)$.
Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định bởi công thức

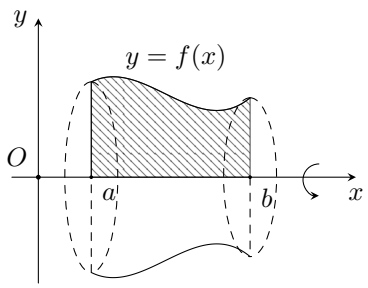


$$V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Thể tích khối tròn xoay

Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$



B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 13.1. Xây dựng công thức tính diện tích theo hình vẽ

Phương pháp

Bước 1: Xác định đồ thị của các hàm số được cho trên hình vẽ.

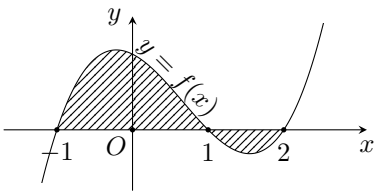
Bước 2: Xác định các vị trí tương giao giữa các đồ thị.

Bước 3: Áp dụng công thức tính diện tích $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Bước 4: Phá trị tuyệt đối: Lấy công thức hàm số của đồ thị nằm trên trừ công thức hàm số của đồ thị nằm dưới.

Ví dụ 1.

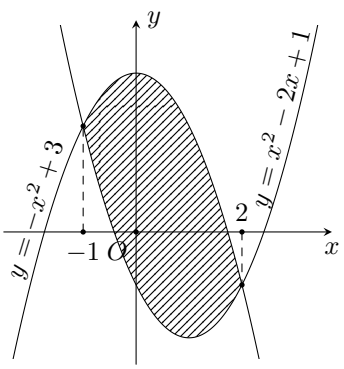
Gọi S là diện tích miền hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên. Xây dựng công thức tính S?



Lời giải

Ví dụ 2.

Xác định công thức tính diện tích miền được gạch sọc ở hình bên.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

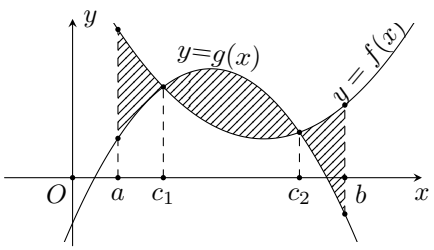
.....

.....

.....

Ví dụ 3.

Cho hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Xác định công thức tính diện tích của hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ (xem hình bên).



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 13.2. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x)$, Ox và $x = a$, $x = b$

Phương pháp

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} y = f(x) \\ Ox \\ x = a; x = b \end{cases}$ là $S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$

Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

Bước 1: Giải phương trình $f(x) = 0$ tìm tất cả các nghiệm $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a; b)$.
Giả sử $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$.

Bước 2: Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_a^{x_1} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int\limits_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \cdots + \int\limits_{x_n}^{b} |f(x)|\,\mathrm{d}x \\ &= \left|\int\limits_a^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \cdots + \left|\int\limits_{x_n}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right|. \end{aligned}$$

Chú ý: Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Ví dụ 1. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, trục hoành và các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x-2)^2 - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ví dụ 3. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = -4$, $x = 1$.

Lời giải

Ví dụ 4. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 1$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2$.

Lời giải

Dạng 13.3. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x)$, $y = g(x)$ và $x = a$, $x = b$

Phương pháp

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a; x = b \end{cases}$ là $S = \displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

Bước 1: Giải phương trình $f(x) = g(x)$ tìm tất cả các nghiệm $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a; b)$. Giả sử $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$.

Bước 2: Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned} S &= \int_a^{x_1} |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_n}^{b} |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x \\ &= \left|\int_a^{x_1} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x\right| + \cdots + \left|\int_{x_n}^{b} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x\right|. \end{aligned}$$

Chú ý: Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Ví dụ 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 4$, $y = x^2$ và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y = x^3 - x$ và $y = x(1 - x)$.

Lời giải

Ví dụ 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^x$, $y = x^2 - 1$, $x = -1$, $x = 1$.

Lời giải

Ví dụ 4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sin x$, $y = x$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \pi$.

Lời giải

Ví dụ 5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^x$, $y = x^2$, $x = 0$, $x = 1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \cos x$, $y = x + 1$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \pi$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 7. Tìm a để diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $(P)\colon y = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 1}$, đường thẳng $d\colon y = x - 1$ và $x = a$, $x = 2a$ $(a > 1)$ bằng $\ln 3$?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

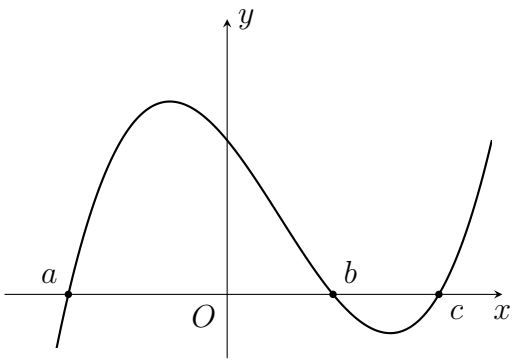
.....

. . . . . .

. . . . . .

Dạng 13.4. Từ diện tích hình phẳng tính giá trị hàm

Áp dụng định nghĩa tích phân $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$. Thì lúc này đề bài yêu cầu so sánh $F(b)$; $F(a)$.



Bài toán: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đồ thị như hình. $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a;c]$. So sánh $F(a)$; $F(c)$; $F(x_i)x_i \in [a;c]$.

- **Bước 1.** So sánh $F(a)$; $F(b)$.

  Trên $[a;b]$: $f(x) > 0 \Rightarrow \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

  Mà $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0 \Rightarrow F(b) - F(a) > 0 \Leftrightarrow F(b) > F(a)$.

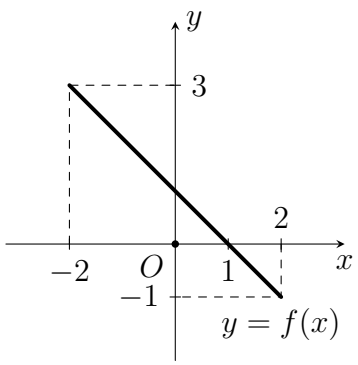
- **Bước 2.** Tương tự so sánh $F(b)$; $F(c)$.

- **Bước 3.** Ta thấy diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} y = f(x) \\ Ox \\ x = a; x = b \end{cases}$ lớn hơn $\begin{cases} y = f(x) \\ Ox \\ x = b; x = c. \end{cases}$.

$$\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x > \int\limits_b^c |f(x)|\,\mathrm{d}x \Rightarrow F(b) - F(a) > -F(c) + F(b)$$
$$\Leftrightarrow -F(a) > -F(c) \to F(a) < F(c).$$

Ví dụ 1.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục và có một nguyên hàm là $F(x)$ trên $[-2;1]$ đồng thời $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi trong các số sau: $F(2) - F(-2)$; $F(-2) - F(1)$; $F(2) - F(1)$; $F(2) - F(0)$ có bao nhiêu số dương?



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

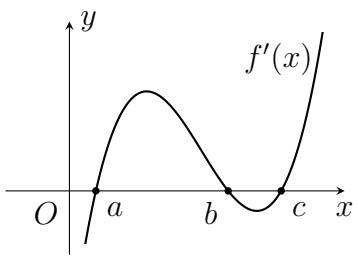
.....

.....

.....

Ví dụ 2.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như trong hình vẽ bên. Hãy so sánh các số $f(a)$; $f(b)$; $f(c)$.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

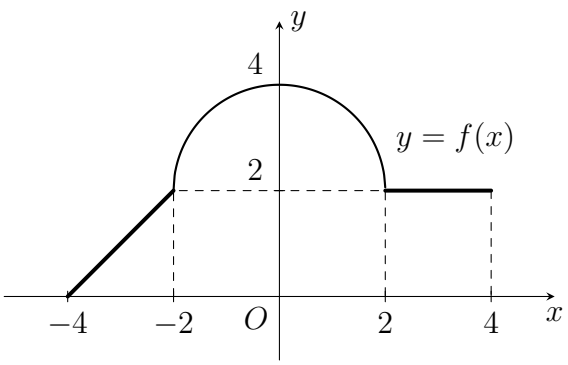
.....

.....

.....

Ví dụ 3.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-4;4]$ như hình vẽ. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$, tính giá trị của $S = F(4) - F(-4)$.



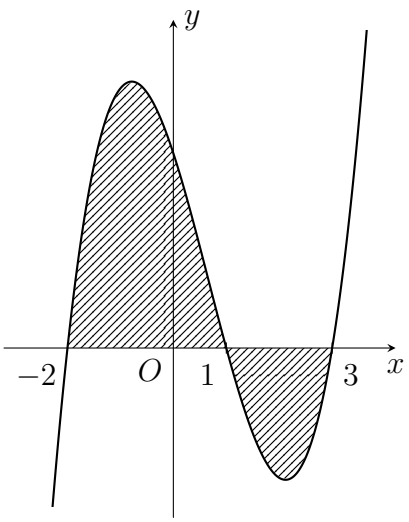
Lời giải

C. LUYỆN TẬP

PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=-2$ và $x=3$ (như hình vẽ). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S=-\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S=\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=-\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S=\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

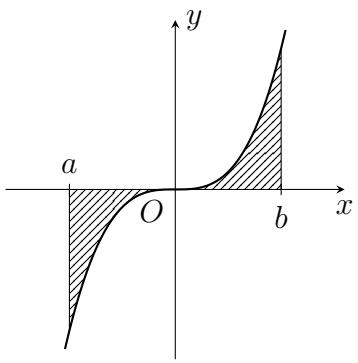
.....

.....

.....

Câu 2.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C)\colon y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (như hình bên). Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D. Chọn công thức đúng trong các phương án **A.**, **B.**, **C.**, **D.** cho dưới đây?



A. $S_D = \displaystyle\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

B. $S_D = -\displaystyle\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

C. $S_D = \displaystyle\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

D. $S_D = -\displaystyle\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

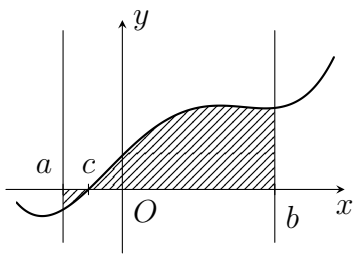
.....

.....

.....

Câu 3.

Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$, $(a < b)$ tính theo công thức nào dưới đây?



A. $S = \displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S = -\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S = \left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

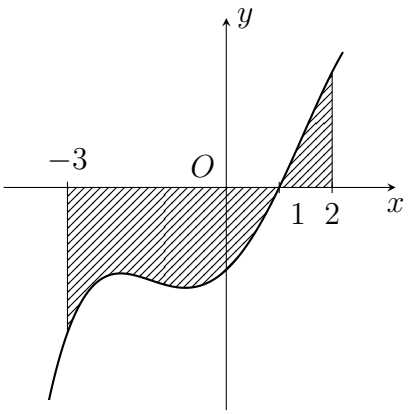
.....

.....

.....

Câu 4.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -3$, $x = 2$. Đặt $a = \displaystyle\int_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$, $b = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $S = a + b$.

B. $S = a - b$.

C. $S = -a - b$.

D. $S = b - a$.

Lời giải

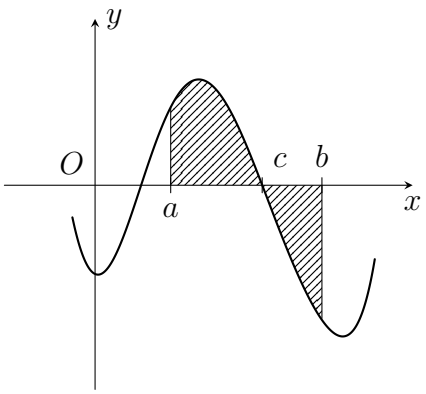
.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 5.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ có đồ thị như hình bên và $c \in [a;b]$. Gọi S là diện tích của hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = a$, $x = b$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?



A. $S = \displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S = \displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

D. $S = \displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 6. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt[3]{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 8$ là

A. $\frac{45}{2}$. **B.** $\frac{45}{4}$. **C.** $\frac{45}{7}$. **D.** $\frac{45}{8}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x-2)^2 - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 8. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 1$, $x = -1$, $x = 2$ và trục hoành là

A. $S = 16$. **B.** $S = 6$. **C.** $S = \frac{13}{6}$. **D.** $S = 13$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....

Câu 9. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 1$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $S = \int_0^2 |2^x - 1| \, \mathrm{d}x$. **B.** $S = \int_0^2 |1 - 2^x| \, \mathrm{d}x$.

C. $S = \int_0^2 (1 - 2^x) \, \mathrm{d}x$. **D.** $S = \int_0^2 (2^x - 1) \, \mathrm{d}x$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 10. Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 4 + 2x - x^2$, $y = x^2$, $x = -1$, $x = 2$ có diện tích bằng

A. 9. **B.** 12. **C.** 15. **D.** 6.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 11. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = x^2 + 1$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 3$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích

V bằng

A. 12π. **B.** $\dfrac{348\pi}{5}$. **C.** 32π. **D.** 9π.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 12. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \cos x$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $x = \pi$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 13. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, trục hoành Ox, các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ là

A. $S = 8$. **B.** $S = \dfrac{7}{3}$. **C.** $S = \dfrac{8}{3}$. **D.** $S = 7$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mã $f(0) < 0 < f(-1)$. Gọi (S) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 1$. Xét các mệnh đề sau

(1) $S = \displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x.$

(2) $S = \displaystyle\int_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x.$

(3) $S = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x.$

(4) $S = \left|\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x\right|.$

Số mệnh đề đúng là

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

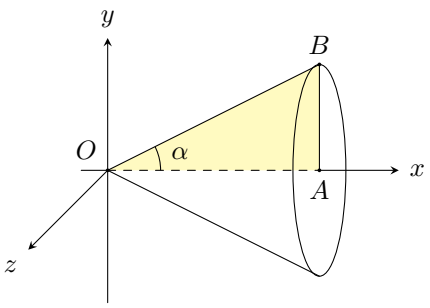
Câu 15. Khối chỏm cầu có bán kính $R = 3$ và chiều cao $h = 1$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y = \sqrt{9 - x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 2$, $x = 3$ xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối chỏm cầu này.

A. $\dfrac{8\pi}{3}$. **B.** 2π. **C.** $\dfrac{10\pi}{3}$. **D.** π.

Lời giải

.....

Câu 16. Cho tam giác OAB vuông tại A, có cạnh $OA = a$ nằm trên tục Ox và $\widehat{AOB} = \dfrac{\pi}{3}$. Gọi β là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox. Thể tích của khối β bằng



A. $3\pi a^3$. **B.** πa^3. **C.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3}{9}$.

Lời giải

Câu 17. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình vuông cạnh bằng 1 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S_1 = S_2$. **B.** $S_1 > S_2$. **C.** $2S_1 = S_2$. **D.** $6S_1 = S_2$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....

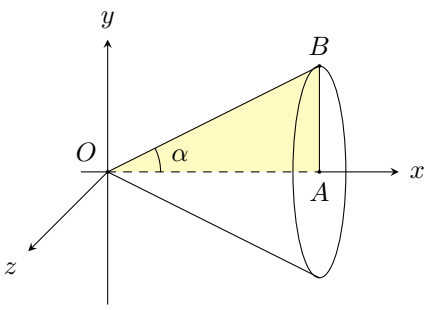
Câu 18. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + x - 2$, $y = 2x + 4$, $x = 1$ và $x = 4$. Cho diện tích hình phẳng (H) bằng $\dfrac{a}{b}$ (đvdt), với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $T = a + b$ bằng

A. 67. **B.** 25. **C.** 76. **D.** 23.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 19. Cho tam giác vuông OAB, có cạnh $OA = a$ nằm trên tục Ox và $\widehat{AOB} = \alpha \left(0 < \alpha \leq \dfrac{\pi}{4}\right)$. Gọi β là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox. Thể tích V của β tính theo a và α là



A. $V = \dfrac{\pi \tan^2 \alpha \cdot a^3}{3}$. **B.** $V = \dfrac{3\pi \tan^2 \alpha \cdot a^3}{2}$.

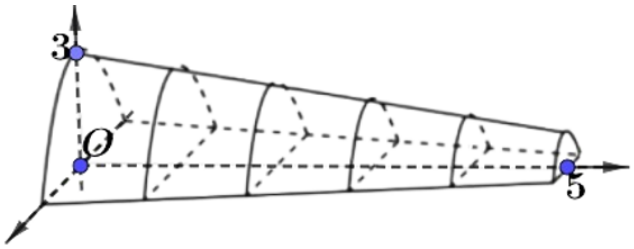
C. $V = \dfrac{\pi \sin^2 \alpha \cdot a^3}{3}$. **D.** $V = \dfrac{2\pi \cos^2 \alpha \cdot a^3}{3}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....

Câu 20. Cho một mô hình $3D$ mô phỏng một đường hầm như hình vẽ bên.



Chiều dài của đường hầm mô hình là 5cm, mặt phẳng vuông góc với mặt đáy của đường hầm tạo được thiết diện là một hình parabol, thiết diện có độ dài cạnh đáy gấp đôi chiều cao. Tính thể tích không gian bên trong đường hầm mô hình, biết chiều cao của mỗi thiết diện parabol cho bởi công thức $y = 3 - \dfrac{2}{5}x$ (đơn vị là cm), với x là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hầm mô hình. (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị theo đơn vị cm^3).

A. 29. **B.** 30. **C.** 28. **D.** 31.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 21. Các nhà kinh tế sử dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y = x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y = f(x)$, biểu thị sự phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0 \le x \le 100$, biểu thị "sự bất bình đẳng về thu nhập" của một quốc gia. Năm 2009, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hóa bởi hàm số

$$y = \left(0{,}00061x^2 + 0{,}0224x + 1{,}666\right)^2, \quad 0 \le x \le 100.$$

Trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất. Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì vào năm 2009 có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

A. 7922,9. **B.** 2922,9. **C.** 2085,5. **D.** 2077,1.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

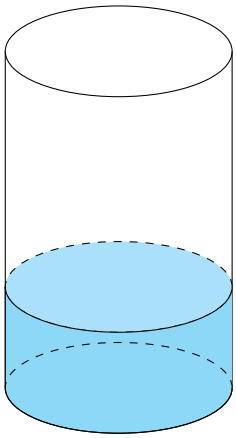
.....

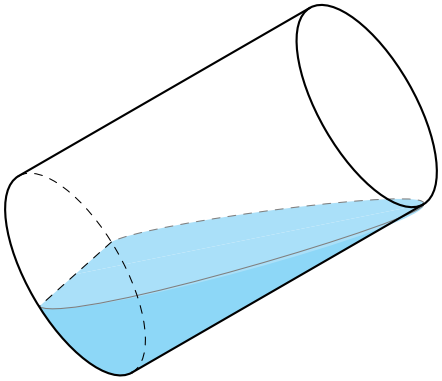
.....

.....

.....

Câu 22. Cho một cái cốc thủy tinh hình trụ bán kính đáy là 6 cm, chiều cao là 10 cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy mực nước trùng với đường kính đáy?





A. 240 cm^3. **B.** 250 cm^3. **C.** 245 cm^3. **D.** 249 cm^3.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

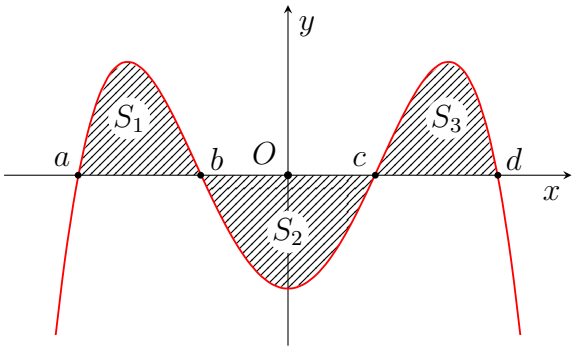
.....

.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;d]$ và có đồ thị như hình vẽ. Biết đồ thị $f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm a, b, c, d, đồng thời tạo với trục hoành và 2 đường thẳng $x=a$, $x=d$ thành một hình phẳng (H) gồm 3 phần có diện tích lần lượt là S_1, S_2, S_3 như hình vẽ.



a) $S_1=\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) $S_2=-\displaystyle\int_c^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

c) $S_3=-\displaystyle\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$.

d) $S_{(H)}=\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho hai hàm số $f(x)=-x^2+4$ và $g(x)=x-1$.

a) Diện tích hình phẳng (H_1) tạo bởi $f(x), Ox$ và hai đường thẳng $x=-3, x=3$ là $S_{(H_1)}=\displaystyle\int_{-3}^{3}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\frac{46}{3}$.

b) Diện tích hình phẳng (H_2) tạo bởi $f(x), Ox$ và hai đường thẳng $x=-2, x=2$ là $S_{(H_2)}=\displaystyle\int_{-2}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{32}{3}$.

c) Diện tích hình phẳng (H_3) tạo bởi $g(x), Ox$ và hai đường thẳng $x=-3, x=3$ là $S_{(H_3)}=\left|\displaystyle\int_{-3}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x\right|=6$.

d) Diện tích hình phẳng (H_4) tạo bởi $g(x), Ox$ và hai đường thẳng $x=-3, x=3$ là $S_{(H_4)}=-\displaystyle\int_{-3}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x=10$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

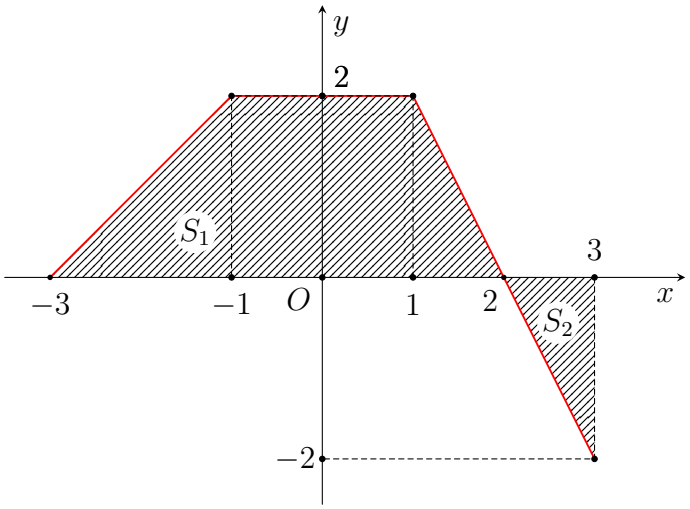
.....

.....

.....

.....

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-3;3]$ có đồ thị như hình vẽ, Biết rằng $f(x)$ tạo với trục hoành và 2 đường thẳng $x=-3, x=3$ một hình phẳng (H) gồm 2 phần có diện tích lần lượt là S_1, S_2.



a) $S_{(H)}=\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) $S_2=\left|\displaystyle\int_{2}^{3}(-2x+4)\,\mathrm{d}x\right|=1$.

c) $S_1=\displaystyle\int_{-3}^{-1}(x+3)\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}2\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}(-2x+4)\,\mathrm{d}x$.

d) $S_{(H)}=S_1-\displaystyle\int_{2}^{3}(-2x+4)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

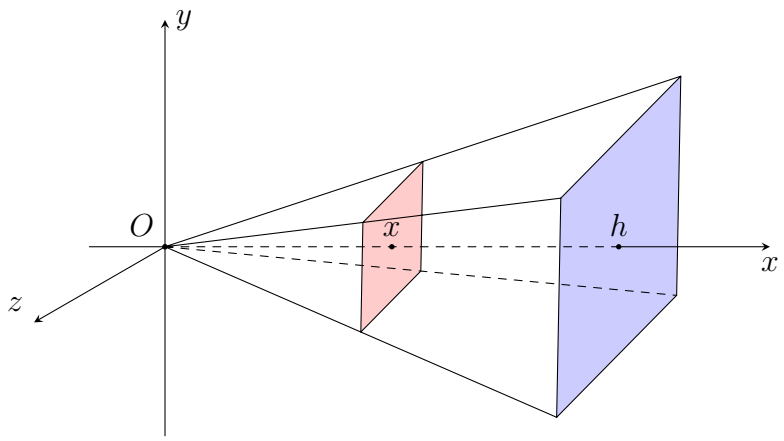
. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Câu 4. Cho khối chóp đều có đáy là hình vuông cạnh L và chiều cao là h. Chọn trục Ox sao cho gốc O trùng với đỉnh của khối chóp và trục đi qua tâm của đáy (như hình dưới).



a) Đáy của khối chóp nằm trên mặt phẳng song song với Ox.

b) Mỗi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng $x\,(0 \le x \le h)$, cắt khối chóp theo mặt cắt là hình vuông cạnh a.

c) Diện tích mặt cắt là $S(x) = \dfrac{L}{h}x^2$.

d) Thể tích của khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}L^2h$.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

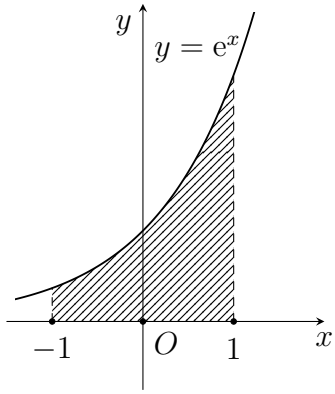
. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 5. Cho đồ thị hàm số $y = \mathrm{e}^x$ và hình được tô màu như dưới.



a) Hình phẳng được tô màu giới hạn bởi 3 đường.

b) Diện tích hình phẳng được tính bởi công thức $S = \displaystyle\int_{-1}^{1} (\mathrm{e}^x)^2 \,\mathrm{d}x$.

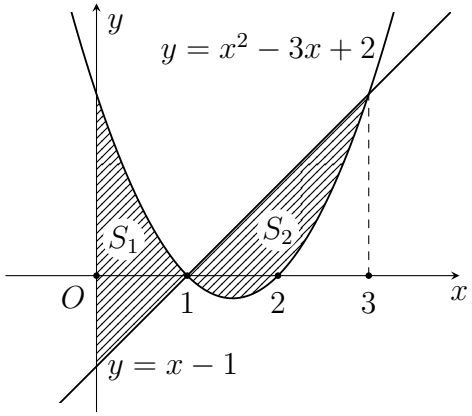
c) Diện tích hình phẳng $S = \mathrm{e} - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

d) Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng đó quanh trục Ox là $V = \dfrac{1}{2}\pi\left(\mathrm{e}^2 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)$.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 6. Cho đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 2$ và $y = x - 1$ và S_1; S_2 là phần diện tích phần được tô như trong hình dưới.



a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 2$ và $y = x - 1$ là $\displaystyle\int_0^3 \left(-x^2 + 4x - 3\right) \mathrm{d}x$.

b) $S_1 = \dfrac{4}{3}$.

c) $S_1 = S_2$.

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 2$; $y = x - 1$; $x = 0$; $x = 3$ là $\displaystyle\int_0^3 \left(-x^2 + 4x - 3\right) \mathrm{d}x = 1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = -\sin x$, $y = 1$, $x = a$ $(0 \leq a \leq \pi)$, $x = \pi$.

a) Nếu $a = \pi$ thì diện tích của (H) bằng 0.

b) Nếu $a = 0$ thì diện tích của (H) bằng $\pi + 2$.

c) Nếu diện tích của hình (H) là $S = \pi - a + \dfrac{3}{2}$ thì $\dfrac{\pi}{a}$ là số nguyên chia hết cho 9.

d) Nếu diện tích của hình (H) là S' thì $\displaystyle\int_a^\pi \sin x \,\mathrm{d}x = S' - \pi - a$.

Lời giải

.....

Câu 8. Trong mặt phẳng Oxy, cho hàm số $y = x + \sqrt{x}$ và $y = x + x^2$.

a) Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số trên là $x = 0$ hoặc $x = -1$.

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x = 0$, $x = 1$ được tính theo công thức $S = \displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) \mathrm{d}x$.

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x = 0$, $x = 1$ được tính theo công thức $S = \displaystyle\int_0^1 \left(x + x^2\right) \mathrm{d}x - \int_0^1 \left(x + \sqrt{x}\right) \mathrm{d}x$.

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x = 0$, $x = 1$ bằng $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Câu 9. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$.

a) Công thức tính diện tích hình phẳng (H) là $S_{(H)} = \displaystyle\int_0^2 \left(x^2 + 3\right) \mathrm{d}x$.

b) Diện tích hình phẳng (H) bằng $\dfrac{26}{3}$.

c) Công thức tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) xung quanh trục Ox là $V = \displaystyle\int_0^2 \left(x^2 + 3\right)^2 \mathrm{d}x$.

d) Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) xung quanh trục Ox bằng $\dfrac{202}{5}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 10. Khối chỏm cầu có bán kính $R = 5$ và chiều cao $h = 1$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y = \sqrt{25 - x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 4$, $x = 5$ xung quanh trục Ox.

a) Khoảng cách từ tâm của khối cầu đến khối chỏm cầu bằng 3.

b) Thể tích của khối chỏm cầu V_1 được tính theo công thức $V_1 = \pi \displaystyle\int_4^5 \left(25 - x^2\right) \mathrm{d}x$.

c) Thể tích của khối chỏm cầu $V_1 = \dfrac{14\pi}{3}$.

d) Gọi V_2 là thể tích của nửa khối cầu có bán kính bằng 5. Tỉ số thể tích $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{7}{125}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

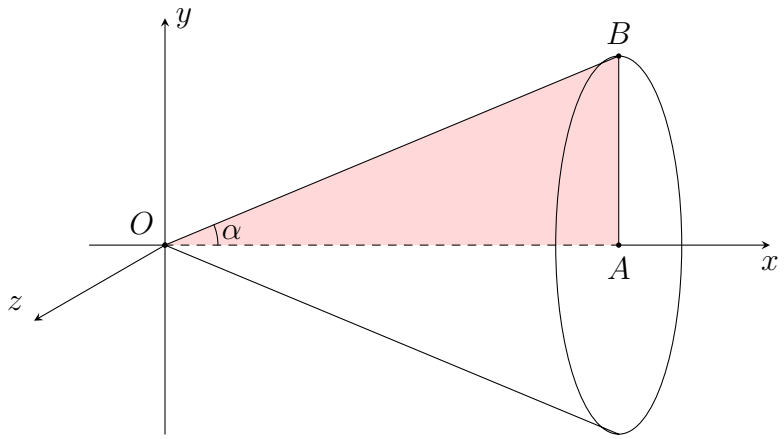
.....

.....

.....

.....

Câu 11. Cho tam giác vuông OAB có cạnh $OA = a$ nằm trên tục Ox và $\widehat{AOB} = \alpha \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$. Gọi β là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox.



a) Khi $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ thì thể tích V của khối β là $\dfrac{\pi a^3}{3}$ (đvtt).

b) Khi $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ thì thể tích V của khối β là $\dfrac{\pi a^3}{9}$ (đvtt).

c) Khi thể tích V của khối β là $\dfrac{4\pi a^3}{3}$ thì giá trị $\cos\alpha < \dfrac{1}{2}$.

d) Khi $\tan\alpha = \cot\alpha$ thì thể tích V của khối β là $\dfrac{\pi a^3}{3}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 12. Các nhà kinh tế sử dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y = x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y = f(x)$, biểu thị sự phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0 \le x \le 100$, biểu thị "sự bất bình đẳng về thu nhập" của một quốc gia. Năm 2005, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hóa bởi hàm số

$$y = (0{,}00061x^2 + 0{,}0218x + 1{,}723)^2,\ 0 \le x \le 100.$$

Trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất *(Theo R.Larson, Brief*

Calculus: An Applied Approach, 8th edition, Cengage Learning, 2009)
Xét tính đúng/sai của các khẳng định sau

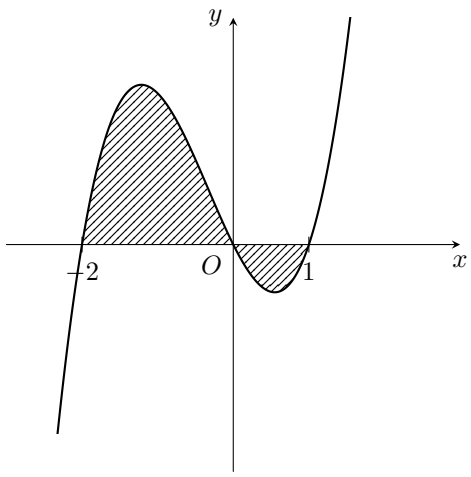
Phát biểu	Đ	S
a) Tính theo thứ tự từ các gia đình nghèo nhất đến giàu nhất, tổng thu nhập thực tế của 60% các gia đình đầu tiên chiếm chưa đến 30% so với tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.		
b) Nếu sắp xếp các gia đình theo thứ tự từ nghèo nhất đến giàu nhất, rồi chia thành 10 nhóm bằng nhau từ 1 đến 10, tổng thu nhập của các gia đình trong nhóm 3 chiếm khoảng 8,56% tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.		
c) Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì năm 2005 được xác định bởi công thức $$\int_0^{100} [x - (0{,}00061x^2 + 0{,}0218x + 1{,}723)^2]\,\mathrm{d}x$$.		
d) Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kỳ năm 2005 đã vượt quá 2000.		

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Đồ thị trong hình dưới đây là của hàm số $y = f(x)$.



Biết $\int\limits_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$; $\int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = -1$. Tính diện tích phần hình phẳng tô đậm trong hình.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 + 2x + 1$, trục hoành, $x = 1$ và $x = 2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....

Câu 3. Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3x + x^2$, $y = 0$; $x = 0$; $x = 3$ quanh trục Ox bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 4. Khối chỏm cầu có bán kính $R = 3$ và chiều cao $h = \frac{3}{2}$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y = \sqrt{9 - x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = \frac{3}{2}$, $x = 3$ xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối chỏm cầu này (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 5. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 8 - x^2$, $y = 3x^2$, $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2).

Lời giải

.....

Câu 6. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{2x}$, $y = \frac{x^2}{2}$, $x = 0$, $x = 2$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2).

Lời giải

Câu 7. Gọi (H) là phần hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = 3x^2$, $y = 4 - x$ và trục hoành. Diện tích của (H) là bằng bao nhiêu?

Lời giải

Câu 8. Cho (H) là hình phẳng được giới hạn bởi các đường có phương trình $y=\frac{10}{3}x-x^2$, $y=\begin{cases}-x & \text{khi } x\leq 1\\ x-2 & \text{khi } x>1\end{cases}$. Diện tích của (H) bằng bao nhiêu.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

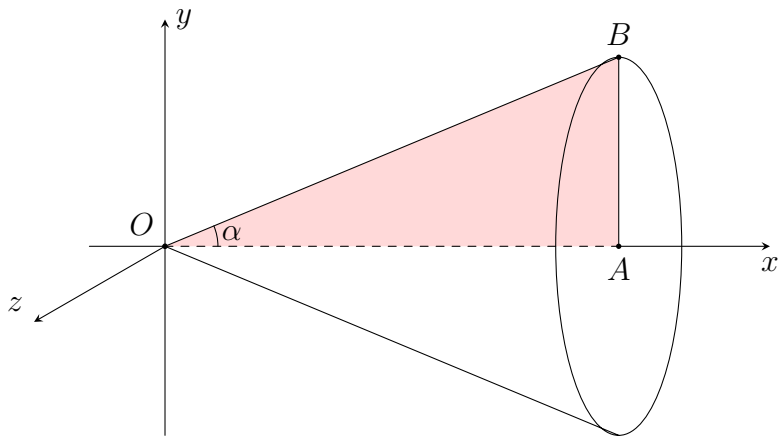
.....

.....

.....

.....

Câu 9. Cho tam giác vuông OAB có cạnh OA nằm trên trục Ox và $\widehat{AOB}=\alpha\,(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ và $B(a;b)$ với a, b là các số thực thỏa $a^2+b^2=1$. Gọi β là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox.



Tính giá trị $\tan\alpha$ khi thể tích của khối β đạt giá trị lớn nhất (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

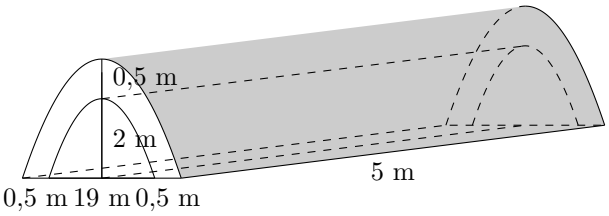
.....

.....

.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 10. Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã Y có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol)



Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 11. Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 2x + 2$; $y = 6 - x$; $y = 2$ và (D) nằm ngoài Parabol $y = x^2 + 2x + 2$. Khi cho (D) quay quanh trục Ox, ta nhận được vật thể tròn xoay có thể tích $V = \frac{a\pi}{b}$, trong đó a, b là các số nguyên dương. Giá trị biểu thức $P = a - 2b^2$ bằng bao nhiêu.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

. . . . . .

CHƯƠNG 5 PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 14. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

A. LÝ THUYẾT

1. Vectơ pháp tuyến và cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

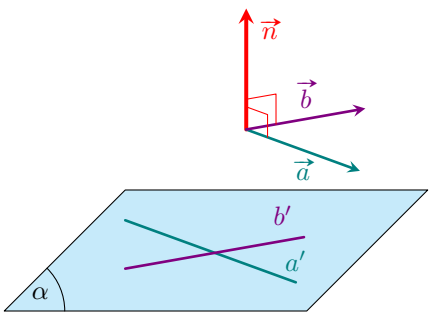
1.1 Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng Cho mặt phẳng (α). Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (α) gọi là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

Nhận xét.
- *Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của (α) thì $k \cdot \vec{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của (α).*
- *Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến của nó.*

1.2 Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng Cho mặt phẳng (α). Nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương và giá của chúng song song hoặc nằm trên mặt phẳng (α) thì $\vec{a}$, $\vec{b}$ là cặp véctơ chỉ phương của mặt phẳng (α).

Nhận xét. *Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và cặp vectơ chỉ phương của nó.*

1.3 Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng khi biết một cặp vectơ chỉ phương Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt phẳng (α) nhận hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ làm cặp vectơ chỉ phương thì (α) nhận $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ làm vectơ pháp tuyến.



⚠ • *Vectơ* $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$ *được gọi là tích có hướng của hai vectơ* $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ *và* $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$.

• $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$.

2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

2.1 Phương trình tổng quát của mặt phẳng Trong không gian $Oxyz$, mỗi mặt phẳng đều có dạng phương trình: $Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

Nhận xét. • *Nếu mặt phẳng* (α) *có phương trình* $Ax + By + Cz + D = 0$ *(với* $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$*) thì vectơ* $\vec{n} = (A; B; C)$ *là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng* (α).

• *Cho mặt phẳng* (α) *có phương trình* $Ax + By + Cz + D = 0$.
Khi đó: $N_0(x_0; y_0; z_0) \in (\alpha) \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

2.2 Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng khi biết một số điều kiện

• Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm và biết vectơ pháp tuyến.
Trong không gian $Oxyz$, phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$
$$\text{hay} \quad Ax + By + Cz + D = 0 \text{ với } D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0.$$

• Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm và biết cặp vectơ chỉ phương.
Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}$; $\vec{b}$, ta thực hiện như sau

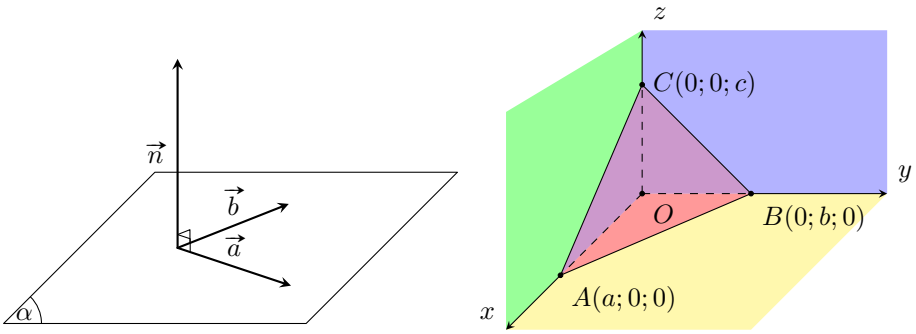
– **Bước 1:** Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\vec{a}; \vec{b}\right]$.

– **Bước 2:** Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

2.3 Phương trình mặt phẳng qua 3 điểm không thẳng hàng

- Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng. Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng, ta thực hiện như sau:
  - **Bước 1:** Tìm cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
  - **Bước 2:** Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$.
  - **Bước 3:** Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A (hoặc điểm B hoặc điểm C) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

  Nhận xét. – *Mặt phẳng (α) không đi qua gốc tọa độ O và lần lượt cắt trục Ox tại $A(a;0;0)$, cắt trục Oy tại $B(0;b;0)$, cắt trục Oz tại $C(0;0;c)$ có phương trình là $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$. với $a\cdot b\cdot c\neq 0$.*
  – *Phương trình trên được gọi là phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.*



3. Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc

3.1 Điều kiện để hai mặt phẳng song song: Trong không gian $Oxyz$, cho 2 mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(\alpha_2): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$, $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$.

Khi đó: $(\alpha_1)\parallel(\alpha_2)\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{n}_1=k\vec{n}_2\\ D_1\neq k\cdot D_2\end{cases},(k\in\mathbb{R})$.

⚠
- $(\alpha_1)\equiv(\alpha_2)\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{n}_1=k\vec{n}_2\\ D_1=kD_2\end{cases}(k\in\mathbb{R})$.

- $(\alpha_1)\cap(\alpha_2))\Leftrightarrow \vec{n}_1$ *và* $\vec{n}_2$ *không cùng phương.*

3.2 Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc Trong không gian $Oxyz$, cho 2 mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\alpha_1): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$.
Khi đó: $(\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

4. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Định nghĩa 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng (α): $Ax + By + Cz + D = 0$.
Khi đó khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính

$$d(M_0, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

5. Các mặt phẳng đặc biệt

Các mặt phẳng đặc biệt

TÍNH CHẤT MẶT PHẲNG	PHƯƠNG TRÌNH	HỆ SỐ ĐẶC BIỆT
α đi qua/chứa gốc O.	α: $Ax + By + Cz = 0$	$D = 0$
α song song/chứa Ox.	α: $By + Cz + D = 0$	$A = 0$
α song song/chứa Oy.	α: $Ax + Cz + D = 0$	$B = 0$
α song song/chứa Oz.	α: $Ax + By + D = 0$	$C = 0$
α song song/trùng Oxy.	α: $Cz + D = 0$	$A = B = 0$
α song song/trùng Oxz.	α: $By + D = 0$	$A = C = 0$
α song song/trùng Oyz.	α: $Ax + D = 0$	$B = C = 0$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 14.1. Xác định vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

Một mặt phẳng có vô số véctơ pháp tuyến và chúng cùng phương với nhau.

- Chẳng hạn $\vec{n}$ là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) thì $k \cdot \vec{n}$, $(k \neq 0)$ cũng là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).
- Nếu mặt phẳng (P) có cặp véctơ chỉ phương là $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ thì (P) có véctơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{u}_1; \vec{u}_2]$.

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) song song với giá của hai vectơ $\vec{a} = (1;-2;3)$, $\vec{b} = (3;0;5)$. Tìm vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2y + x + 3z - 1 = 0$. Xác định một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;1;-3)$, $B(0;-2;5)$ và $C(1;1;3)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{n}$ có phương vuông góc với hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....

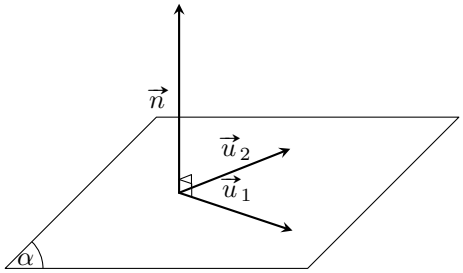
Dạng 14.2. Phương trình mặt phẳng khi biết điểm đi qua và cặp véc-tơ chỉ phương

- Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$ có dạng

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0\Rightarrow Ax+By+Cz+D=0.$$

  Với $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$.

- Nếu mặt phẳng (P) có cặp véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_1;\vec{u}_2$ thì (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=[\vec{u}_1;\vec{u}_2]$.



Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;1;-3)$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;-2;6)$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;-1;0)$ và có cặp véctơ chỉ phương là $\vec{a}=(2;1;3)$, $\vec{b}=(1;1;2)$.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

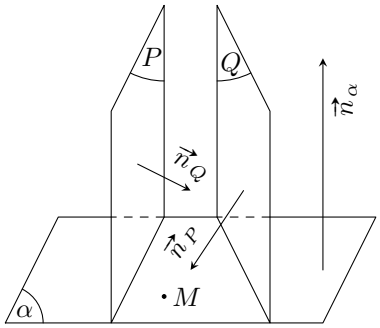
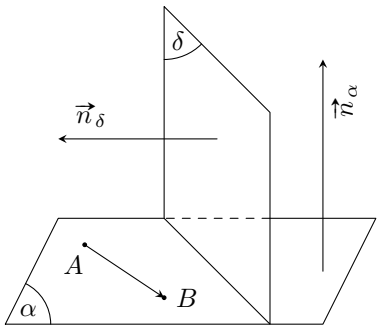
. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Dạng 14.3. PTMP 1 điểm kèm điều kiện vuông góc với mặt phẳng khác

Phương pháp. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
Qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và $\perp$ 2 mặt $(P)\colon Ax+By+Cz+D=0$, $(Q)\colon A'x+B'y+C'z+D'=0$. 	Tìm cặp véc-tơ $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$. Véc-tơ pháp tuyến (α) là: $$\vec{n}=[\vec{n}_{(Q)};\vec{n}_{(P)}].$$ Mặt phẳng (α) qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$. **Hoặc bài toán sẽ gặp:** "Qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc với giao tuyến của $(P)\colon Ax+By+Cz+D=0$; $(Q)\colon A'x+B'y+C'z+D'=0$".
Loại	**Phương pháp**
Qua điểm $A;B$ và vuông góc với $$(\delta)\colon Ax+By+Cz+D=0.$$ 	Tìm cặp véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{n}=[\overrightarrow{AB};\vec{n}_{(\delta)}]$. Véctơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n}=[\overrightarrow{AB};\vec{n}_{(\delta)}]$. Mặt phẳng (α) qua điểm A.

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng

$$(\alpha)\colon 3x-2y+2z+7=0,$$
$$(\beta)\colon 5x-4y+3z+1=0.$$

Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O đồng thời vuông góc với cả(α) và (β) là?

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1)$, $B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-3y+2z-5=0$. Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A,B và vuông góc với mặt phẳng (P).

Lời giải

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(2;3;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q)\colon x+2y-z=0$ có phương trình là?

Lời giải

Dạng 14.4. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Phương pháp

Tính khoảng cách từ điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ đến mặt phẳng $(P)\colon Ax+By+Cz+D=0$ như sau

Bước 1: Tìm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và viết phương trình mặt phẳng

$$(P)\colon Ax+By+Cz+D=0.$$

Bước 2: Tính khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng $(P)\colon Ax+By+Cz+D=0$ theo công thức

$$\mathrm{d}(M_0,(P))=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Lưu ý: $\mathrm{d}\left(M_0,(Oxy)\right)=\sqrt{(z_0)^2}$ và $\mathrm{d}\left(M_0,Ox\right)=\sqrt{(y_0)^2+(z_0)^2}$.

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ cạnh 1. Điểm M được cho thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{CD}$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (EBD).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

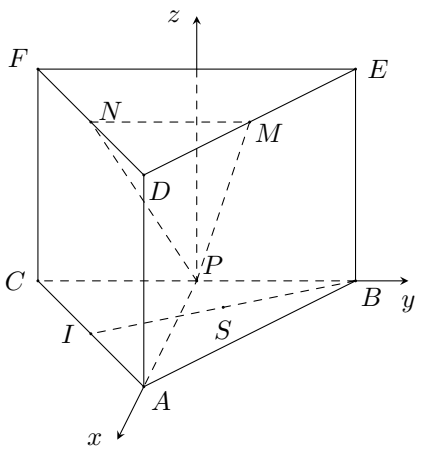
.....

.....

.....

Ví dụ 2.

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.DEF$, $AB=6$, $AD=2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm DE, DF, BC. Lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình bên. Gọi điểm S thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\vec{0}$. Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (MNP).



Lời giải

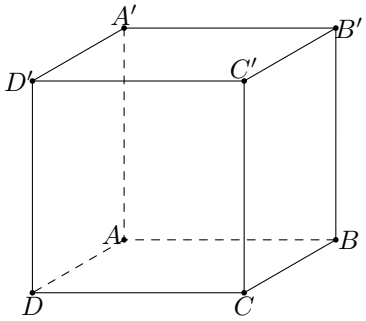
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

C. LUYỆN TẬP

PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ nào là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABCD)$?



A. $\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{AC'}$. **C.** $\overrightarrow{AA'}$. **D.** $\overrightarrow{AD'}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

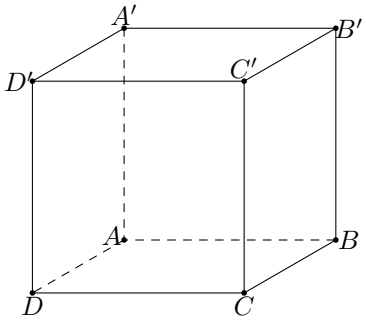
.....

.....

.....

Câu 2.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ nào là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ADD'A')$?



A. $\overrightarrow{CC'}$. **B.** $\overrightarrow{AD}$. **C.** $\overrightarrow{BC'}$. **D.** $\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

.....

.....

.....

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;5)$. Tọa độ nào sau đây là tọa độ vectơ chỉ phương của mặt phẳng (ABC)?

A. $(3;4;5)$. **B.** $(0;4;5)$. **C.** $(-3;4;0)$. **D.** $(-3;0;-5)$.

Lời giải

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;2;1)$, $B(-1;4;1)$, $C(3;-2;5)$. Tọa độ nào sau đây là tọa độ vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC)?

A. $(1;1;1)$. **B.** $(8;-16;16)$. **C.** $(-1;2;-2)$. **D.** $(1;4;4)$.

Lời giải

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $-2x+2y-z-3=0$. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là

A. $(4;-4;2)$. **B.** $(-2;2;-3)$. **C.** $(-4;4;2)$. **D.** $(0;0;-3)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{z}{2}-1=0$. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là

A. $(4;6;2)$. **B.** $(2;3;1)$. **C.** $(3;2;6)$. **D.** $(3;2;1)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-3z+1=0$. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là

A. $\vec{n}_2=(2;0;-3)$. **B.** $\vec{n}_1=(2;-3;1)$.

C. $\vec{n}_3=(-2;0;-3)$. **D.** $\vec{n}_4=(-2;3;-1)$.

Lời giải

.....

.....

.....

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M(-1;-1;-1)$. **B.** $N(1;1;1)$. **C.** $P(-3;0;0)$. **D.** $Q(0;0;-3)$.

Lời giải

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon \dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$ không đi qua điểm nào dưới đây?

A. $P(0;2;0)$. **B.** $Q(0;0;3)$. **C.** $M(1;2;3)$. **D.** $N(1;0;0)$.

Lời giải

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào sau đây đi qua gốc tọa độ?

A. $(P)\colon x+20=0$.
B. $(Q)\colon x-2\,024=0$.
C. $(R)\colon y+2\,025=0$.
D. $(S)\colon 2x+5y-8z=0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxy) đi qua điểm nào sau đây?

A. $M(1;2;0)$.
B. $N(3;2;-1)$.
C. $P(1;0;-3)$.
D. $Q(0;2;-5)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(2;-1;3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;3;-1)$ là

A. $(\alpha)\colon 2x+3y-z-2=0$.
B. $(\alpha)\colon 2x+3y-z+2=0$.
C. $(\alpha)\colon 2x-y+3z-2=0$.
D. $(\alpha)\colon 2x-y+3z+2=0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-2z+4=0$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với (P)?

A. $2x+y-2z+5=0$. **B.** $x+2y+2z-5=0$.

C. $x+3y-z+1=0$. **D.** $x+y+z-6=0$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ $M(1;2;-3)$ đến $(P)\colon x+2y+2z-10=0$ là

A. 3. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{11}{3}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào sau đây **không** phải là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)\colon x+3y-5z+2=0$?

A. $\vec{n}=(-1;-3;5)$. **B.** $\vec{n}=(2;6;-10)$.

C. $\vec{n} = (-2; -6; -10)$. **D.** $\vec{n} = (-3; -9; 15)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của (P), biết $\vec{a} = (-1; -2; -2)$, $\vec{b} = (-1; 0; -1)$ là cặp vectơ chỉ phương của (P)?

A. $\vec{n} = (2; 1; 2)$. **B.** $\vec{n} = (2; -1; -2)$. **C.** $\vec{n} = (2; 1; -2)$. **D.** $\vec{n} = (-2; 1; -2)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua $A(1; -1; 2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (4; 2; -6)$ là

A. $4x + 2y - 6z + 5 = 0$. **B.** $2x + y - 3z + 5 = 0$.

C. $2x + y - 3z + 2 = 0$. **D.** $2x + y - 3z - 5 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;1;1)$; $B(1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB.

A. $(P)\colon x+y+2z-3=0$. **B.** $(P)\colon x+y+2z-6=0$.

C. $(P)\colon x+3y+4z-7=0$. **D.** $(P)\colon x+3y+4z-26=0$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1)$, $B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-3y+2z-5=0$. Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

A. $2y+3z-11=0$. **B.** $2x-3y-11=0$.

C. $x-3y+2z-5=0$. **D.** $3y+2z-11=0$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 20. Cho hai mặt phẳng $(\alpha)\colon 3x-2y+2z+7=0$, $(\beta)\colon 5x-4y+3z+1=0$. Phương

trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) là

A. $2x-y-2z=0$. **B.** $2x+y-2z=0$.

C. $2x-y+2z=0$. **D.** $2x+y-2z+1=0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-2;-2)$, $B(3;2;0)$, $C(0;2;1)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $2x-3y+6z+12=0$. **B.** $2x+3y-6z-12=0$.

C. $2x-3y+6z=0$. **D.** $2x+3y+6z+12=0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;1;0)$. Khi đó, phương trình mặt phẳng (ABC) là $ax+y-z+d=0$. Hãy xác định a và d.

A. $a=6$, $d=-6$. **B.** $a=1$, $d=1$. **C.** $a=-1$, $d=-6$. **D.** $a=-6$, $d=6$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(1;3;-2)$ và song song với mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+3z+4=0$ là

A. $2x+y+3z+7=0$.
B. $2x+y-3z+7=0$.
C. $2x-y+3z+7=0$.
D. $2x-y+3z-7=0$.

Lời giải

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 3x-2y+4z-5=0$ và điểm $A(2;-1;-3)$. Mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với mặt phẳng (P) có phương trình

A. $(Q)\colon 3x-2y+4z-4=0$.
B. $(Q)\colon 3x-2y+4z+4=0$.
C. $(Q)\colon 3x-2y+4z+5=0$.
D. $(Q)\colon 3x+2y+4z+8=0$.

Lời giải

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;3)$, $B(3;4;4)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $2x+y+mz-1=0$ bằng độ dài đoạn thẳng AB.

A. $m=2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=\pm 2$.

Lời giải

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+3y+z-2024=0$. Khi đó

a) Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;3;1)$.

b) Khoảng cách từ $N(0;2;-1)$ tới mặt phẳng (P) bằng $\dfrac{2019\sqrt{5}}{5}$.

c) Mặt phẳng (Oyz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_2=(-4;-6;-2)$.

d) Điểm $M(0;0;2\,024)$ không thuộc phẳng (P).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$, $B(4;1;2)$. Khi đó

a) $\overrightarrow{AB}=(3;1;2)$.

b) Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB có phương trình là $3x+y+2z-3=0$.

c) Nếu I là trung điểm đoạn thẳng AB thì $I\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2};1\right)$.

d) Mặt phẳng trung trực đoạn thẳng AB có phương trình là $3x+y+2z-12=0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;1;4)$, $B(2;7;9)$, $C(0;9;13)$, $D(1;8;10)$. Khi đó

a) $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 6\vec{j} + 5\vec{k}$.

b) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

c) Phương trình mặt phẳng đi qua điểm B và vuông góc với AC là $x-8y-9z+14=0$.

d) Phương trình mặt phẳng chứa AB song song với CD là $8x-7y-13z+50=0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;4)$, $B(2;7;9)$, $C(0;9;13)$. Khi đó

a) $\overrightarrow{AB} = (1;6;5)$.

b) Mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;-1;1)$.

c) $(ABC)\colon x-y+z-4=0$.

d) $O \in (ABC)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P)\colon x+2y-z-1=0$, $(Q)\colon 3x-y+z-5=0$ và $(R)\colon 2x+4y-mz-2=0$. Khi đó

a) $(P) \parallel (Q)$.

b) (α) qua O và song song (P) có phương trình là $(\alpha)\colon x+2y-z=0$.

c) $(P) \parallel (R)$ khi $m=2$.

d) $(P) \perp (R)$ khi $m=-10$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho $M(-2;-4;3)$ và hai mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z-3=0$, $(Q)\colon 2x-y+2z-6=0$. Khi đó

a) $\mathrm{d}\,(M,(P))=2$.

b) M cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q).

c) $\mathrm{d}\,((P),(Q))=1$.

d) Mặt phẳng (α) song song với (Q) và cách (Q) một khoảng bằng 2 có phương trình là $(\alpha)\colon 2x-y+2z-9=0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-2y+z-7=0$, Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (α) có dạng $\dfrac{a}{b}$ tối giản; $a;b\in\mathbb{Z}$. Tính $T=2a-b$?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2y+2z+2=0$. Mặt phẳng (β) song song với mặt phẳng (α) và cách A một khoảng 1 có dạng $(\alpha)\colon x-by+cz+d=0$. Khi đó $S=3b-c+d$?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, điểm $M(a;b;1)$ thuộc mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+z-3=0$. Tính giá trị biểu thức $S=2\mathrm{a}-b$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho phương trình mặt phẳng (P) qua $A(2;1;-3)$ và song song với mặt phẳng $(Q)\colon x-y+2z-1=0$ có dạng $x-y+az+b=0$. Tính giá trị biểu thức $S=a-b$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 5. Trong gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;1)$, $B(1;0;4)$, $C(0;-2;-1)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình dạng $x+ay+bz+c=0$. Tính giá trị biểu thức $S=a+b+c$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz-27=0$ qua hai điểm $A(3;2;1)$ và $B(-3;5;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q)\colon 3x+y+z+4=0$. Tính tổng

$S = a + b + c$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua $A(1;0;0)$; $B(0;0;2)$ và cắt tia Oy tại điểm C sao cho thể tích khối chóp $OABC$ bằng 2. Biết điểm $S(-1;6;m)$ thuộc (P), thì m bằng bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho $(\alpha)\colon x+2y-z-1=0$ và $(\beta)\colon 2x+4y-mz+2=0$. Tìm m để (α) và (β) song song với nhau.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;0)$, $B(3;4;-2)$ và $(P)\colon x-y+z-4=0$. Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P), có dạng $(Q)\colon ax+by+cz+2=0$. Tính $T=a+b+c$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;1;0)$, $M(3;0;1)$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (ABC), (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, biết mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng-7 và cách điểm $A(2,-3{,}4)$ một khoảng bằng 3. Tính tích hai hệ số tự do của phương trình tổng quát mặt phẳng (P) (biết hoành độ của vectơ pháp tuyến của (P) bằng 1).

Lời giải

.....
.....

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(m;0;0), N(0;n;0), P(0;0;p)$ không trùng với gốc tọa độ và thỏa mãn $m^2+n^2+p^2=3, m, n, p$ là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách từ O đến mặt phẳng (MNP). (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P)\colon (m-1)x+y+mz-1=0$, với m là tham số. Tìm m để khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) lớn nhất.

Lời giải

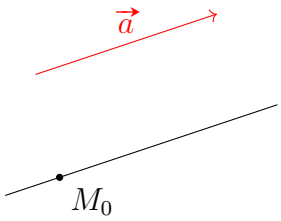
BÀI 15. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A. LÝ THUYẾT

Định nghĩa 1. Phương trình đường thẳng

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng:

   Cho đường thẳng Δ và vectơ $\vec{u}$ khác $\vec{0}$. Vectơ $\vec{u}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ.



Hình 1

   Nhận xét:

   - Một đường thẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm mà nó đi qua và một vectơ chỉ phương của nó.
   - Nếu $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng thì $k \cdot \vec{u}$ $(k \neq 0)$ cũng là một vectơ chỉ phương của đường thẳng đó.

2. Phương trình tham số của đường thẳng:
   Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng Δ qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{u} = (a; b; c)$ làm vectơ chỉ phương có dạng:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct. \end{cases}$$

   Với $t \in \mathbb{R}$ (t được gọi là tham số và $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$).

3. Phương trình chính tắc của đường thẳng:
   Trong không gian $Oxyz$, phương trình chính tắc của đường thẳng Δ qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{u} = (a; b; c)$ làm vectơ chỉ phương có dạng:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

   Với $(a \cdot b \cdot c \neq 0)$.

4. Phương trình đường thẳng qua hai điểm cho trước
   Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$ làm vectơ chỉ phương có:

   - Phương trình tham số:
   $$\begin{cases} x=x_A+(x_B-x_A)t \\ y=y_A+(y_B-y_A)t \\ z=z_A+(z_B-z_A)t. \end{cases}$$
   Với $t\in\mathbb{R}$.
   - Phương trình chính tắc:
   $$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z-z_A}{z_B-z_A}$$
   Với $(x_B\neq x_A, y_B\neq y_A, z_B\neq z_A)$.

Định nghĩa 2. Vị trí tương đối hai đường thẳng. Điều kiện để hai đường thẳng vuông góc

1. Sự cùng phương-Sự đồng phẳng
   Trong không gian $Oxyz$.

   - Hai vectơ được gọi là cùng phương khi giá của chúng cùng song song với một đường thẳng.
   - Ba vectơ được gọi là đồng phẳng khi giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

   Trong không gian Oxyz, cho ba vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ và $\vec{c}=(c_1;c_2;c_3)$.

   - Hai $\vec{a},\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{a},\vec{b}]=\vec{0}$.
   - Hai $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{a},\vec{b}]\neq\vec{0}$.
   - Ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{c}=0$.
   - Ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{c}\neq 0$.

2. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng:
   Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1,Δ_2 lần lượt đi qua các điểm M_1,M_2 và tương ứng có $\vec{u}_1=(a_1;b_1;c_1)$; $\vec{u}_2=(a_2;b_2;c_2)$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó, ta có:

   - $\Delta_1\equiv\Delta_2\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u}_1,\vec{u}_2\text{ cùng phương}\\ \vec{u}_1,\overrightarrow{M_1M_2}\text{ cùng phương}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=\vec{0}\\ \left[\vec{u}_1,\overrightarrow{M_1M_2}\right]=\vec{0}.\end{cases}$

- $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ cùng phương} \\ \vec{u}_1, \overrightarrow{M_1M_2} \text{ không cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ cùng phương}] = \vec{0} \\ \left[\vec{u}_1, \overrightarrow{M_1M_2}\right] \neq \vec{0}. \end{cases}$
- Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ không cùng phương} \\ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{M_1M_2} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u}_1, \overrightarrow{M_1M_2}\right] \neq \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \neq 0. \end{cases}$
- Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \neq 0.$

3. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt đi qua các điểm M_1, M_2 và tương ứng có $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$; $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó, ta có:

- $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{cùng phương} \\ \vec{u}_1, \overrightarrow{M_1M_2} \text{cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0} \\ \left[\vec{u}_1, \overrightarrow{M_1M_2}\right] = \vec{0}. \end{cases}$
- $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{cùng phương} \\ \vec{u_1}, \overrightarrow{M_1M_2} \text{ không cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0} \\ \left[\vec{u_1}, \overrightarrow{M_1M_2}\right] \neq \vec{0}. \end{cases}$
- Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ không cùng phương} \\ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{M_1M_2} \text{đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \neq 0. \end{cases}$
- Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \neq 0.$

⚠ *Để xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng. Trong không gian $Oxyz$, hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ và $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vectơ chỉ phương và có phương trình tham số:*

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = x_1 + a_1 \cdot t_1 \\ y = y_1 + b_1 \cdot t_1 \\ z = z_1 + c_1 \cdot t_1 \end{cases} (t_1 \in \mathbb{R}), \quad \Delta_2 : \begin{cases} x = x_2 + a_2 \cdot t_2 \\ y = y_2 + b_2 \cdot t_2 \\ z = z_2 + c_2 \cdot t_2 \end{cases} (t_2 \in \mathbb{R}).$$

Xét hệ phương trình hai ẩn t_1, t_2: $\begin{cases} x_1 + a_1 \cdot t_1 = x_2 + a_2 \cdot t_2 \\ y_1 + b_1 \cdot t_1 = y_2 + b_2 \cdot t_2 \\ z_1 + c_1 \cdot t_1 = z_2 + c_2 \cdot t_2 \end{cases}$. *(*)*

Khi đó:

- $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1$ *cùng phương với* $\vec{u}_2$ *và hệ (*) vô nghiệm.*
- $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow$ *Hệ (*)có vô số nghiệm.*
- Δ_1 *cắt* $\Delta_2 \Leftrightarrow$ *Hệ (*) có nghiệm duy nhất.*
- Δ_1 *và* Δ_2 *chéo nhau* $\Leftrightarrow \vec{u}_1$ *không cùng phương với* $\vec{u}_2$ *và hệ (*) vô nghiệm.*

4. Điều kiện để hai đường thẳng vuông góc
Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ và $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó, ta có:

$$\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 15.1. Xác định vectơ chỉ phương của đường thẳng

- Trong không gian $Oxyz$, vectơ $\vec{u} = (a; b; c) \neq \vec{0}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ thì vectơ $\vec{m} = k \cdot \vec{u}$ cũng là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.
- Phương trình tham số Δ: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ (hệ số trước t).
- Phương trình chính tắc Δ: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ (hệ số ở mẫu).

Nhận xét.
- *Với phương trình tham số lấy đúng thứ tự hệ số trước tham số t.*
- *Với phương trình chính tắc lấy hệ số dưới mẫu.*
- *Nếu giả thiết chưa đúng cấu trúc, ta phải sắp xếp lại rồi mới lấy hệ số.*

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, xác định một vectơ chỉ phương của đường thẳng dưới đây

a) d: $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + t. \end{cases}$

b) d: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{2}$.

c) d: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{2-z}{1}$.

Lời giải

. . . . . .

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Dạng 15.2. Đường thẳng qua điểm và có sẵn vectơ chỉ phương

Loại	Phương pháp
Qua M, có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a; b; c)$.	Phương trình $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct. \end{cases}$ hoặc $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ nếu $a, b, c \neq 0$. Nhận xét: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra.

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm

a) $M(2; 0; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; -3; 1)$.

b) $N(1; 0; -2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 3; 1)$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số của đường thẳng d qua điểm bất kỳ thuộc d và có vectơ chỉ phương tương ứng. Biết đường thẳng d

a) Đi qua điểm $A(1;1;2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{b} = (1;2;-3)$.

b) Đi qua điểm $C(3;2;1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;2;3)$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Dạng 15.3. Đường thẳng qua hai điểm

Loại	Phương pháp
Qua hai điểm A và B.	Chọn A hoặc B là điểm mà Δ đi qua. Nhận $\overrightarrow{AB}$ làm vectơ chỉ phương $\Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra.

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình chính tắc của đường thẳng

a) Đi qua gốc tọa độ và $H(1;4;-2)$.

b) Đi qua hai điểm $M(2;0;-1)$ và $N(2;-3;1)$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ có $A(-1;3;2)$, $B(2;0;5)$, $C(0;-2;1)$. Viết phương trình đường trung tuyến AM của $\triangle ABC$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Dạng 15.4. Đường thẳng là giao tuyến của hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha)\colon Ax+By+Cz+D=0$ và $(\beta)\colon A'x+B'y+C'z+D'=0$, ta thực hiện các bước sau

- **Bước 1.** Cho 1 trong 3 ẩn x, y, z bằng 0 để tìm 2 ẩn còn lại

$$x=0\Rightarrow\begin{cases}By+Cz+D=0\\B'y+C'z+D'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=?\\z=??\end{cases}\Rightarrow M(0;?;??).$$

- **Bước 2.** Vecto chỉ phương $\vec{n}\cdot\vec{u}=[\vec{n}_\alpha;\vec{n}_\beta]$.

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-z-1=0$, $(Q)\colon x-2y+z-5=0$. Giao tuyến hai mặt phẳng (P) và (Q) có một vectơ chỉ phương là

Lời giải

Gọi $d = (P) \cap (Q)$.
Khi đó một vectơ chỉ phương của d là $\vec{n} \cdot \vec{u} = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (-1; -3; -5)$.
Vậy $\vec{n} \cdot \vec{u} = (1; 3; 5)$ cũng là một vectơ chỉ phương của d.

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x + y - z + 3 = 0$ và $(\beta)\colon x + y + z - 1 = 0$. Phương trình chính tắc đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) là

Lời giải

Ta có $\begin{cases} \vec{n}_\alpha = (2; 1; -1) \\ \vec{n}_\beta = (1; 1; 1) \end{cases}$
$\Rightarrow [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = (2; -3; 1) \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{u}_\Delta = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = (2; -3; 1)$.
Gọi $M = (\alpha) \cap (\beta)$, thì $M \in \Delta$ và M thỏa

$$\begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{x=0} \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow M(0; -1; 2).$$

Đường thẳng Δ đi qua $M(0; -1; 2)$ và nhận $\vec{u}_\Delta = (2; -3; 1)$ làm một vectơ chỉ phương có phương trình chính tắc là $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-2}{1}$.

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x + y - 5z + 4 = 0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+5}{6}$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P). Xác định phương trình giao tuyến d' của (Q) và (P).

Lời giải

Gọi đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên (P).
Đường thẳng d đi qua điểm $A(-1; -1; -5)$ và có $\vec{u}_d = (2; 1; 6)$.
(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (1; 1; -5)$.
(Q) chứa d và vuông góc với $(P) \Rightarrow (P) \cap (Q) = d'$.
Vectơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_Q = [\vec{n}_P, \vec{u}_d] = (11; -16; -1)$.
Phương trình của mặt phẳng (Q) là $11x - 16y - z - 10 = 0$.
Do $(P) \cap (Q) = d'$ nên VTCP của đường thẳng d' là $\vec{u}_{d'} = [\vec{n}_Q, \vec{n}_P] = -27(3; 2; 1)$.
$\Rightarrow d'$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (3; 2; 1)$.
Gọi $I = d \cap (P)$, khi đó tọa độ I là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y - 5z + 4 = 0 \\ \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+5}{6} \end{cases}$.
Giải hệ ta được $(x; y; z) = (1; 0; 1)$.
Do đó $d'\colon \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$, suy ra đường thẳng d' đi qua điểm $P(4; 2; 2)$.

Dạng 15.5. Đường thẳng là đường thẳng vuông góc chung của hai đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ là đường vuông góc chung của d_1 và d_2 ta thực hiện các bước sau

- **Bước 1.** Gọi $\begin{cases} M \in d_1 \\ N \in d_2 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MN}(?)$ (tọa độ theo $t; k$).
- **Bước 2.** MN là đường vuông góc chung

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1 \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \\ \vec{u}_2 \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = ? \\ k = ?? \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(?) \\ N(?). \end{cases}$$

- **Bước 3.** Khi đó đường thẳng Δ: $\begin{cases} \text{qua} \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} \\ \vec{u}_\Delta = \overrightarrow{MN}. \end{cases}$

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d_1: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -2 + 5t \end{cases}$ và d_2: $\begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 + s \\ z = 1 + 3s. \end{cases}$
Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2.

Lời giải

Gọi Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1; d_2.
Đường thẳng d_1 có VTCP là $\vec{u}_1 = (2; 1; 5)$; d_2 có VTCP là $\vec{u}_2 = (1; 1; 3)$.
Gọi $A = \Delta \cap d_1 \Rightarrow A(1 + 2t; 2 + t; -2 + 5t)$; $B = \Delta \cap d_2 \Rightarrow B(1 + s; 2 + s; 1 + 3s)$.
$\overrightarrow{AB} = (s - 2t; s - t; 3 + 3s - 5t)$.
Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(s - 2t) + s - t + 5(3 + 3s - 5t) = 0 \\ s - 2t + s - t + 3(3 + 3s - 5t) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 18s - 30t = -15 \\ 11s - 18t = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 0 \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Suy ra $B(1; 2; 1)$ và $\overrightarrow{AB} = (-1; -\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2})$.

Phương trình đường thẳng đi qua B và có VTCP $\vec{u} = (-2; -1; 1)$ là $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t. \end{cases}$

C. LUYỆN TẬP

PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Cho đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -4; -6)$. Vectơ nào sau đây không phải là vectơ chỉ phương của Δ?

A. $\vec{u}_1 = (1; -2; -3)$. **B.** $\vec{u}_2 = (-1; 2; 3)$.

C. $\vec{u}_3 = (-2; -4; 6)$. **D.** $\vec{u}_4 = (-3; 6; 9)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho đường thẳng Δ có phương trình $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{4}$. Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của Δ?

A. $\vec{u}_1 = (-1; 2; -1)$. **B.** $\vec{u}_2 = (1; -2; 1)$.

C. $\vec{u}_3 = (-3; 2; -4)$. **D.** $\vec{u}_4 = (3; 2; 4)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Cho đường thẳng Δ có phương trình $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 \\ z = 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Vectơ nào sau đây là

vectơ chỉ phương của Δ?

A. $\vec{u}_1 = (3;-1;3)$. **B.** $\vec{u}_2 = (3;-1;0)$.

C. $\vec{u}_3 = (-1;-1;3)$. **D.** $\vec{u}_4 = (-1;0;3)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (Oxy). Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của Δ?

A. $\vec{i} = (1;0;0)$. **B.** $\vec{j} = (0;1;0)$. **C.** $\vec{k} = (0;0;1)$. **D.** $\vec{u} = (1;1;0)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, phương trình chính tắc của đường thẳng AB với $A(1;1;2)$ và $B(-4;3;-2)$ là

A. $\dfrac{x+4}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+2}{-2}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-2}{-2}$.

C. $\dfrac{x+1}{-5} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+2}{-4}$. **D.** $\dfrac{x+4}{-5} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+2}{-4}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $A(2;0;-1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+z+3=0$ là

A. $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-t \\ z=-1+t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

B. $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1 \\ z=1-t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

C. $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1 \\ z=-1+t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

D. $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-t \\ z=1-t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;-3;5)$, $B(2;-1;7)$ có phương trình chính tắc là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-7}{2}$.

B. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-5}{-2}$.

C. . $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-5}{-2}$.

D. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+5}{-2}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-7}{5}$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng Δ?

A. $M(1;-3;5)$. **B.** $N(2;-1;7)$. **C.** $P(1;-3;7)$. **D.** $Q(3;-5;7)$.

Lời giải

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình $\begin{cases} x=3-t \\ y=1+3t \\ z=2t \end{cases}$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng Δ?

A. $M(3;1;2)$. **B.** $N(3;1;0)$. **C.** $P(-1;3;2)$. **D.** $Q(-1;-3;0)$.

Lời giải

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng nào dưới đây đi qua điểm $A(3;-3;2)$

A. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+2}{2}$.

B. $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$.

C. $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z-2}{2}$.

D. $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z+5}{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây **không** thuộc đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=5-3t \\ y=1-t \\ z=2+2t \end{cases}$?

A. $M(3;1;-2)$. **B.** $N(5;1;2)$. **C.** $P(-1;-1;6)$. **D.** $Q(2;0;4)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các đường thẳng $\Delta_1\colon \begin{cases} x=1 \\ y=2-3t \\ z=3+4t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$, $\Delta_2\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+3}{2}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+3y-2z+1=0$.

a) Vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ_1 là $\vec{a}=(1;-3;4)$.

b) Đường thẳng d_1 vuông góc với (P) có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;3;-2)$.

c) Đường thẳng d_2 vuông góc với Δ_2 và song song với mặt phẳng (Oxy) có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2=(3;-3;2)$.

d) Đường thẳng d_3 qua $A(1;-1;2)$, cắt và vuông góc với trục Oz có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_3=(-1;-1;0)$.

Lời giải

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;2;-4)$ và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$. Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng d_1. Đường thẳng AH có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a;b;c)$ với a, b, $c\in\mathbb{Z}$. Khi đó $2a-b+c$ bằng

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;5)$ có hình chiếu vuông góc trên các trục Ox, Oy, Oz là B, C, D. Gọi H là trực tâm tam giác BCD. Phương trình chính tắc của đường thẳng OH có dạng $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{-b}=\dfrac{z}{-c}$. Khi đó $a+b+c$ bằng

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2y-2z+5=0$. Điểm $A(a;b;c)$ có hoành độ dương thuộc đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (α) bằng 3. Tính tổng $a+b-c$.

Lời giải

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{2}$, $d_2\colon \begin{cases} x=2t \\ y=1 \\ z=1-t \end{cases}$.

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2. Giá trị $\cos\varphi$ có dạng $\dfrac{a\sqrt{c}}{b}$. Tính giá trị biểu thức $P=b-3a+c$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác góc $\widehat{ABC}$ của tam giác ABC là $I(a;b;c)$. Tính tổng $a+b+c$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

. . . . . .

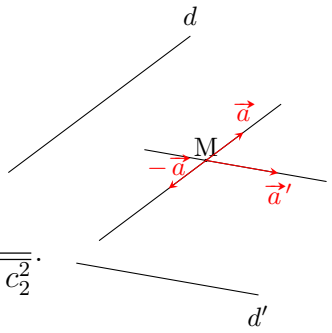
. . . . . .

BÀI 16. CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN

A. LÝ THUYẾT

a) Góc giữa hai đường thẳng

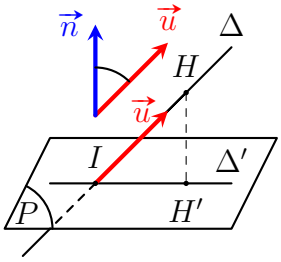
Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ và $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó, ta có



$$\begin{aligned}\cos(\Delta_1, \Delta_2) &= |\cos(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2)| \\ &= \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.\end{aligned}$$

b) Góc giữa đường thẳng với mặt phẳng

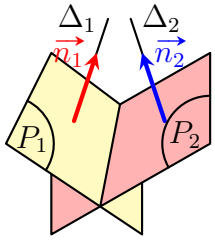
Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$. Khi đó, ta có:



$$\begin{aligned}\sin(\Delta, (P)) &= |\cos(\vec{u} \cdot \vec{n})| \\ &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.\end{aligned}$$

c) Góc giữa hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P_1), (P_2) có hai vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ và $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Khi đó, ta có:



$$\begin{aligned}\cos((\mathrm{P}_1), (\mathrm{P}_2)) &= |\cos(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2)| \\ &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.\end{aligned}$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 16.1. Góc

Trong không gian $Oxyz$,

- Hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ và $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó, ta có

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

- Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$. Khi đó, ta có

$$\sin(\Delta, (P)) = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

- Hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ có hai vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ và $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} \cos((P_1), (P_2)) &= |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| \\ &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \end{aligned}$$

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 5 - 2t \\ z = 14 - 3t \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 1 - 4t' \\ y = 2 + t' \\ z = -1 + 5t'. \end{cases}$

Tính góc giữa hai đường thẳng đã cho.

Lời giải

Đường thẳng d_1 có một VTCP $\vec{u}_1 = (1; -2; -3)$.

Đường thẳng d_2 có một VTCP $\vec{u}_2 = (-4; 1; 5)$.

Ta có

$$\begin{aligned} \cos(d_1, d_2) &= \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \,.\, |\vec{u}_2|} \\ &= \frac{|1 \cdot (-4) + (-2) \cdot 1 + (-3) \cdot 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 5^2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $(d_1, d_2) = 30°$.

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z+3}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x + y + z - 1 = 0$. Tính góc giữa Δ và (P).

Lời giải

Đường thẳng Δ có một VTCP $\vec{u} = (1; 2; -1)$.
Mặt phẳng (P) có một VTPT $\vec{n} = (2; 1; 1)$.
Ta có $\sin(\Delta, (P)) = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \dfrac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{2}$.
Vậy $(\Delta, (P)) = 30°$.

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai mặt phẳng $(P)\colon x + 2y + z + 10 = 0$ và $(Q)\colon -x + y + 2z + 13 = 0$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) có một VTPT là $\vec{n}_1 = (1; 2; 1)$.
Mặt phẳng (Q) có một VTPT là $\vec{n}_2 = (-1; 1; 2)$.
Ta có $\cos((P), (Q)) = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \dfrac{|1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2}} = \dfrac{1}{2}$.
Vậy $((P), (Q)) = 60°$.

Dạng 16.2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng: $d\colon \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$, $(t \in \mathbb{R})$ có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $M_0(x_0; y_0; z_0) \in d$; $d'\colon \begin{cases} x = x_0' + a_1' t' \\ y = y_0' + a_2' t' \\ z = z_0' + a_3' t' \end{cases}$ có vectơ chỉ phương $\vec{a}' = (a_1'; a_2'; a_3')$. Khi đó

- $d \parallel d' \Leftrightarrow \vec{a}$, $\vec{a}'$ cùng phương và $M_0 \notin d'$.
- d trùng $d' \Leftrightarrow \vec{a}$, $\vec{a}'$ cùng phương $M_0 \in d'$.
- $d \cap d' \Leftrightarrow$ hệ phương trình ẩn t, t' $\begin{cases} x_0 + a_1 t = x_0' + a_1' t' \\ y_0 + a_2 t = y_0' + a_2' t' \\ z_0 + a_3 t = z_0' + a_3' t' \end{cases}$ có đúng một nghiệm.

- d và d' chéo nhau $\Leftrightarrow$ $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương và $\begin{cases} x_0 + a_1 t = x_0' + a_1' t' \\ y_0 + a_2 t = y_0' + a_2' t' \\ z_0 + a_3 t = z_0' + a_3' t' \end{cases}$ vô nghiệm.

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau

a) $d\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 3 - t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$ và $d'\colon \begin{cases} x = 2 + 2t' \\ y = 3 + 4t' \\ z = 5 - 2t' \end{cases}, (t' \in \mathbb{R})$.

b) $d\colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 5 + t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$ và $d'\colon \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+1}{2}$.

c) $d\colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$ và $d'\colon \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+2}{-2}$.

Lời giải

a) $d\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 3 - t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$ và $d'\colon \begin{cases} x = 2 + 2t' \\ y = 3 + 4t' \\ z = 5 - 2t' \end{cases}, (t' \in \mathbb{R})$.

Ta có các vectơ chỉ phương của d và d' lần lượt là $\vec{a} = (1; 2; -1)$ và $\vec{a}' = (2; 4; -2)$.

Vì $\vec{a}' = 2\vec{a}$ nên $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ cùng phương.

$\Rightarrow$ d và d' song song với nhau hoặc trùng nhau.

Xét điểm $M(1; 0; 3) \in d$, ta có $M \notin d'$ nên $d \parallel d'$.

b) $d\colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 5 + t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$ và $d'\colon \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+1}{2}$.

Ta có d và d' lần lượt nhận $\vec{a} = (2; 3; 1)$ và $\vec{a}' = (3; 2; 2)$ là các vectơ chỉ phương.

Vì $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương nên d và d' cắt nhau hoặc chéo nhau.

d' qua $M(1; -2; -1)$, có VTCP $\vec{a}' = (3; 2; 2)$ nên có phương trình là

$$d'\colon \begin{cases} x = 1 + 3t' \\ y = -2 + 2t' \\ z = -1 + 2t' \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$$

.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 1+2t=1+3t' \\ -1+3t=-2+2t' \quad 5+t=-1+2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-\dfrac{3}{5} \\ t'=-\dfrac{2}{5} \\ 5+t=-1+2t' \end{cases}$

$\Rightarrow$hệ vô nghiệm.

Vậy hai đường thẳng d và d' chéo nhau.

c) $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$ và $d'\colon \dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$.

Ta có d đi qua $M(0;1;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(1;-1;2)$;

d' đi qua $M'(1;2;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}'=(5;1;-2)$.

Nên phương trình tham số của d và d' lần lượt là

$d\colon \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$ và $d'\colon \begin{cases} x=1+5t' \\ y=2+t' \\ z=-2-2t'. \end{cases}$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} t=1+5t' \\ 1-t=2+t' \\ 2t=-2-2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-5t'=1 \\ -t-t'=1 \\ 2t+2t'=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-\dfrac{2}{3} \\ t'=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow$ hệ có nghiệm duy nhất.

Vậy hai đường thẳng d và d' cắt nhau.

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $d_1\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{-3}$ và $d_2\colon \begin{cases} x=2t \\ y=-3-t \\ z=0 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. d_1 và d_2 đồng phẳng.

B. d_1 cắt và vuông góc với d_2.

C. d_1 vuông góc d_2 và không cắt nhau.

D. d_1 song song với d_2.

Lời giải

Ví dụ 3.

Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh. Với hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị: mét), toạ độ của A và B lần lượt là $(3; 2{,}5; 15)$ và $(21; 27{,}5; 10)$.



a) Viết phương trình đường thẳng chứa đường trượt zipline này.

b) Xác định toạ độ của du khách khi ở độ cao 12 mét.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

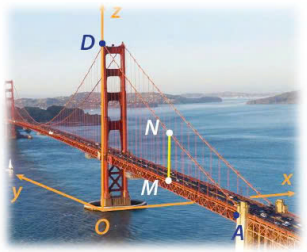
.....

.....

.....

Ví dụ 4.

Cầu Cổng Vàng (The Golden Gate Bridge) ở Mỹ. Xét hệ trục toạ độ $Oxyz$ với O là bệ của chân cột trụ tại mặt nước, trục Oz trùng với cột trụ, mặt phẳng (Oxy) là mặt nước và xem như trục Oy cùng phương với cầu như hình vẽ.



Dây cáp AD (xem như là một đoạn thẳng) đi qua đỉnh D thuộc trục Oz và điểm A thuộc mặt phẳng (Oyz), trong đó điểm D là đỉnh cột trụ cách mặt nước 227 m, điểm A cách mặt nước 75 m và cách trục Oz 343 m. Giả sử ta dùng một đoạn dây nối điểm N trên dây cáp AD và điểm M trên thành cầu, biết M cách mặt nước 75 m và MN song song với cột trụ.

a) Tính độ dài MN, biết điểm M cách trục Oz một khoảng bằng 230 m.

b) Người ta có thể dùng đoạn dây dài 100 m để nối dây cáp AD với thành cầu tại vị trí điểm M cách trục Oz một khoảng bằng 148 m không? Vì sao?

(*nguồn ảnh: https://www.goldengate.org/assets/1/6/ggb-exhibit-chapter-statistics.pdf*).

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

C. LUYỆN TẬP

PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \begin{cases} x=5-2t \\ y=5+3t \\ z=2t \end{cases}$ và $\Delta_2\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-6}{4}$. Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 bằng

A. 30°. **B.** 90°. **C.** 60°. **D.** 45°.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$, $d_2\colon \dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng đã cho.

A. Chéo nhau. **B.** Trùng nhau. **C.** Song song. **D.** Cắt nhau.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Trên một phần mềm đã thiết kế sân khấu 3D trong không gian $Oxyz$. Tính côsin của góc tạo bởi hai tia sáng có phương trình lần lượt là $d_1\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$ và $d_2\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{9}$.

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox, Oy. Vectơ nào dưới đây là một véctơ chỉ phương của đường thẳng M_1M_2?

A. $\vec{u}_4=(-1;2;0)$. **B.** $\vec{u}_1=(0;2;0)$. **C.** $\vec{u}_2=(1;2;0)$. **D.** $\vec{u}_3=(1;0;0)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ nào sau đây là tọa độ của một véctơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=2+4t \\ y=1-6t \\ z=9t \end{cases}, (t\in\mathbb{R})$?

A. $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{-1}{2};\dfrac{3}{4}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right)$. **C.** $(2;1;0)$. **D.** $(4;-6;0)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$ và $d_2\colon \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{1}$.

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7. Tính cosin góc giữa đường thẳng d với trục Ox biết $d\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=6+5t \\ y=2+t \\ z=1 \end{cases}$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x-2y+1=0$. Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{2}$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y-z-2=0$. Cosin của góc tạo bởi đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) bằng

A. $-\dfrac{\sqrt{78}}{9}$. **B.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{78}}{9}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-z-3=0$ và $(Q)\colon x-z-2=0$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;0;0)$, $N(0;1;0)$ và $P(0;0;1)$. Cosin của góc giữa mặt phẳng (MNP) và mặt phẳng (Oxy) bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

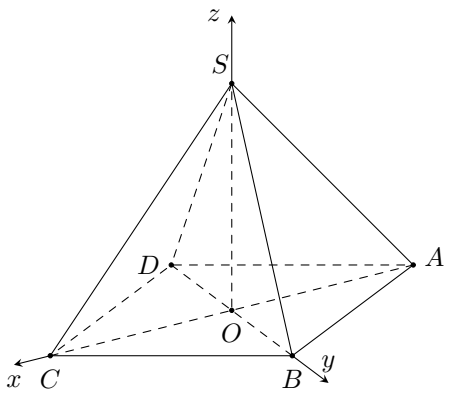
.....

.....

.....

Câu 12.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, chiều cao bằng $2a$ và O là tâm của đáy. Bằng cách thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ bên, khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) bằng



A. $\dfrac{2a}{3}$. **B.** $\dfrac{2a}{\sqrt{17}}$. **C.** $\dfrac{4a}{\sqrt{17}}$. **D.** $\dfrac{4a}{3}$.

Lời giải

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$ Cho biết $AB = 2a$, $AD = 3a$ và $SA = 2a$. Cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng SC và BD bằng

A. $-\dfrac{5}{\sqrt{221}}$. **B.** $\dfrac{5}{\sqrt{221}}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{221}}$. **D.** $-\dfrac{3}{\sqrt{221}}$.

Lời giải

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, với mặt phẳng (Oxy) là mặt đất, một máy bay cất cánh từ vị trí $A(0;10;0)$ với vận tốc $\vec{v} = (150;150;40)$. Tính góc nâng của máy bay (*góc giữa hướng chuyển động bay lên của máy bay với đường băng, đơn vị độ và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị*).

A. $10°$. **B.** $12°$. **C.** $11°$. **D.** $9°$.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+3}{2}$;

$d_2\colon \begin{cases} x=-1+t \\ y=3+t \\ z=2-mt \end{cases}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y+z-3=0$.

a) Khi $m=0$, số đo góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 bằng 135°.

b) $\cos(d_1,Ox)=-\dfrac{1}{3}$.

c) Đường thẳng Δ đi qua gốc toạ độ O và vuông góc với (P) tạo với đường thẳng d_1 một góc α có $\cos\alpha=\dfrac{4}{9}$.

d) Khi $m=\dfrac{a}{b}$, $a,\,b\in\mathbb{Z}$, $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản, số đo góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 bằng 90°. Giá trị biểu thức $a^2+b^2=13$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y-z+2025=0$.

a) Số đo góc giữa hai đường thẳng Δ và (P) bằng 90°.

b) Biết hình chiếu của O lên (P) là $H(3;-1;2)$, α là số đo góc giữa (P) và đường thẳng Δ, $\cos\alpha=\dfrac{1}{14}$.

c) Đường thẳng d_1 là giao tuyến của (P) và (Oxy). Gọi β là góc giữa d_1 và mặt phẳng (Oxz). Khi đó $\beta>30^\circ$.

d) Đường thẳng d_2 vuông góc với (P) tạo với $(Q)\colon x+my-3=0$ một góc 30°. Khi đó tổng tất cả các giá trị của tham số m bằng $-\dfrac{16}{5}$.

Lời giải

.....

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABC$ có ba điểm $S(0;0;3)$, $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;2;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$.

a) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (ABC) bằng 0.

b) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng $\dfrac{2}{7}$.

c) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (P) bằng $\dfrac{10\sqrt{3}}{21}$.

d) Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (ABC) bằng 90°.

Lời giải

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=-3+2t \\ y=1-t \\ z=-1+4t \end{cases}$ và $d'\colon \dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-4}{-1}$; $(\Delta)\colon \dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$.

a) Hai đường thẳng d và d' vuông góc với nhau.

b) Hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại điểm có tọa độ $(-1;0;3)$.

c) Hai đường thẳng d' và (Δ) song song hoặc trùng nhau.

d) Hai đường thẳng d' và (Δ) trùng nhau.

Lời giải

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, hai máy bay cùng xuất phát từ hai phi trường, trên màn hình rađa của trạm điều khiển (với đơn vị trên ba trục chính theo đơn vị km), sau khi xuất phát t giờ ($t \geq 0$), vị trí của máy bay số một được xác định bởi công thức $\begin{cases} x = 20 + 2t \\ y = 20 + t \\ z = -10 - t \end{cases}$, vị trí máy bay số hai có tọa độ là $(30 + t'; 20 + t'; -10 - t')$.

a) Côsin góc giữa hai máy bay số một và máy bay số hai là $\dfrac{5\sqrt{2}}{6}$.

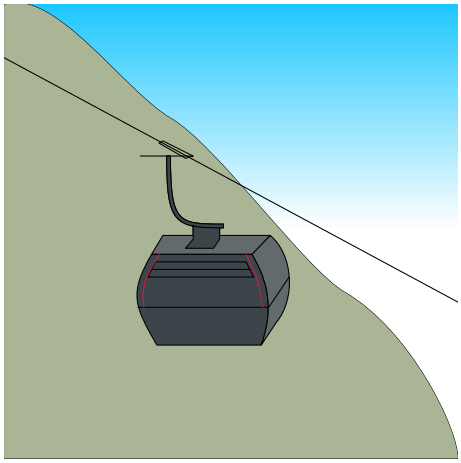
b) Sau 10 giờ kể từ thời điểm bay hai máy bay gần nhau nhất.

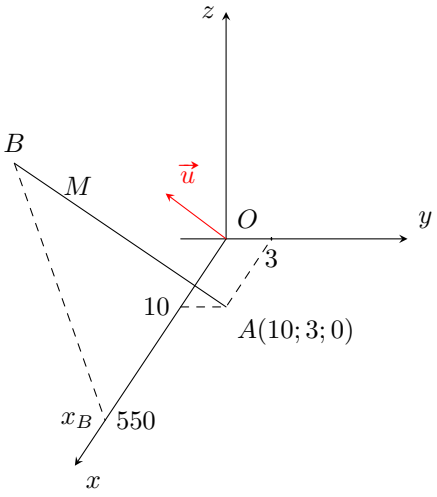
c) Nếu máy bay số một vẫn ở phi trường (đứng ở vị trí ban đầu) thì vị trí tọa độ của máy bay là $(20; 20; -10)$.

d) Sau 5 giờ thì vị trí tọa độ máy bay số 2 trong không gian là $(35; 25; -10)$.

Lời giải

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10; 3; 0)$ và chuyển động đều theo đường cáp có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -2; 1)$ với tốc độ là 4,5 m/s (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét) (Hình bên dưới).





a) Phương trình tham số của đường cáp là $\begin{cases} x = 10 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

b) Giả sử sau thời gian t giây kể từ lúc xuất phát ($t \geq 0$), cabin đến điểm M. Khi đó tọa độ điểm M là $M\left(3t + 10; -3t + 3; \dfrac{3t}{2}\right)$.

c) Cabin dừng ở điểm B có hoành độ $x_B = 550$. Khi đó $AB = 800$ m.

d) Đường cáp AB tạo với mặt phẳng (Oxy) góc $30°$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=-2-t \end{cases}$ và $(P)\colon -x+2y+2z+5=0$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(-1;0;-1)$ cắt đường thẳng Δ và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất. Giả sử, vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_d=(a;b;c)$. Tính tổng $a+2b-3c$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz-1=0$ với $c<0$ đi qua 2 điểm $A(0;1;0)$, $B(1;0;0)$ và tạo với (Oyz) một góc 60°. Tính tổng $a+b+c$. (*Làm tròn đến hàng phần trăm*).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x=4+t \\ y=-4-t \\ z=6+2t \end{cases}$ và

$d_2\colon \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-11}{4} = \dfrac{z-5}{2}$. Đường thẳng d đi qua $A(5;-3;5)$ cắt d_1, d_2 lần lượt ở B và C. Tính tỉ số $\dfrac{AB}{AC}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, thỏa mãn điều kiện, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD. Tính cosin của góc giữa MN và (SAC). (*Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*)

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

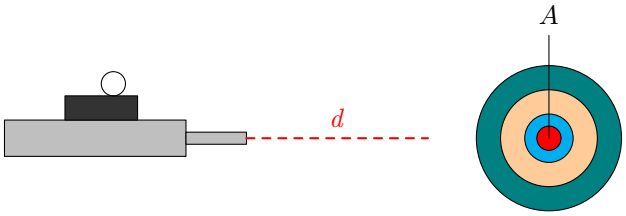
.....

.....

.....

.....

Câu 5. Một phần mềm mô phỏng vận động viên đang tập bắn súng trong không gian $Oxyz$. Cho biết trục d của nòng súng có phương trình: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-3}{-5}$ và hồng tâm $A(8;-19;6m+4)$. Hỏi m bằng bao nhiêu để vận động viên có thể bắn trúng hồng tâm?



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

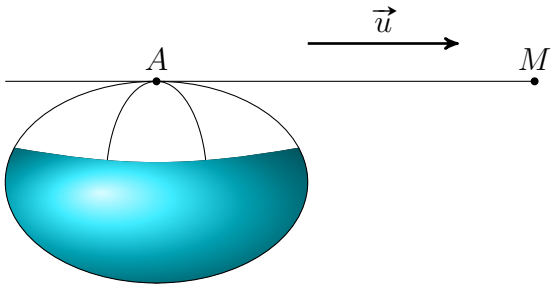
.....

.....

.....

.....

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, một cabin cáp treo ở Bà Nà Hill xuất phát từ điểm $A\,(-2;1;5)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(0;-2;6)$ với tốc độ là 4 m/s (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là mét). Giả sử sau 5 s kể từ lúc xuất phát, cabin đến điểm M. Gọi tọa độ $M\,(a;b;c)$. Tính $a+3b+c$.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

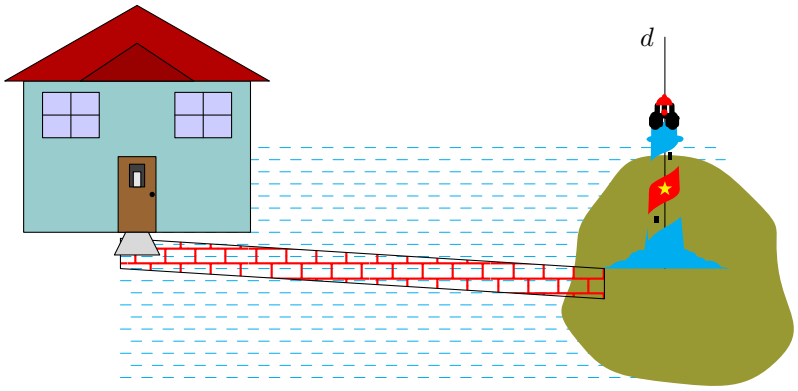
.....

.....

. . . . . .

. . . . . .

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, nhà công vụ của một trạm hải đăng nằm trên mặt phẳng $(P): x+2y+z-4=0$ và phương trình trạm hải đăng là đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{3}$.



Người ta muốn làm một con đường Δ nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với trạm hải đăng. Giả sử phương trình đường thẳng Δ có dạng $\dfrac{x-1}{a}=\dfrac{y-b}{-1}=\dfrac{z-d}{c}$. Hỏi có bao nhiêu số trong các số a, b, c, d chia hết cho 3?

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

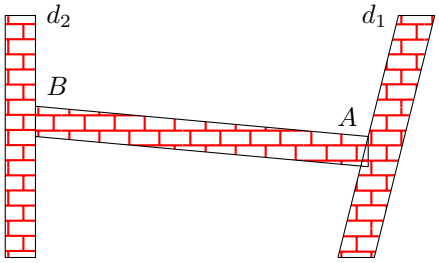
. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Câu 8. Tại một nút giao thông có 2 con đường khác mức. Trên thiết kế, trong không gian $Oxyz$ hai con đường đó thuộc hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}$ và $d_2\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-3}$.



Người ta muốn tạo một con đường Δ cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B sao cho AB nhỏ nhất. Tính độ dài AB, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.

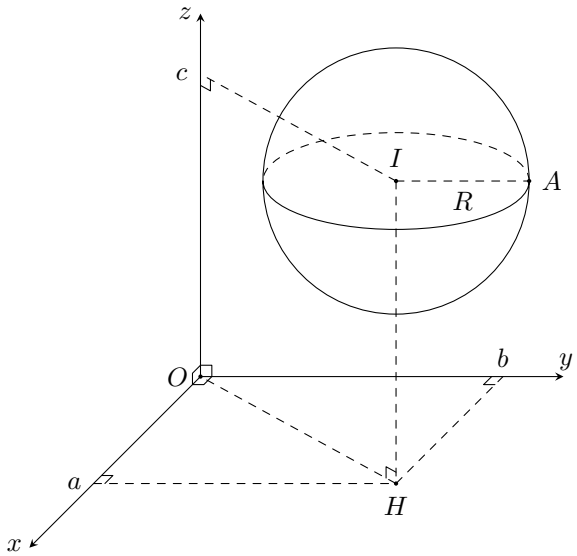
Lời giải

BÀI 17. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

A. LÝ THUYẾT

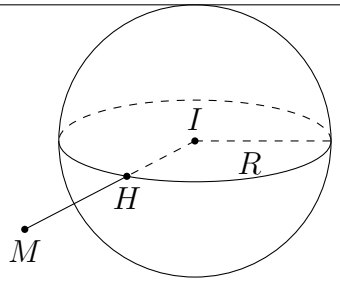
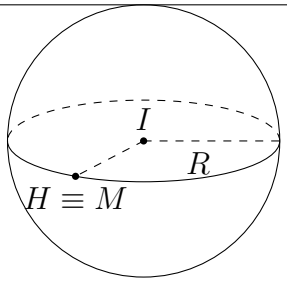
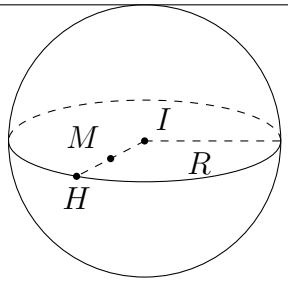
1. Phương trình mặt cầu

Phương trình mặt cầu

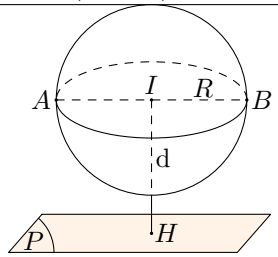
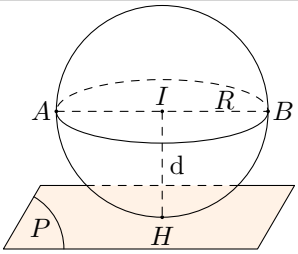
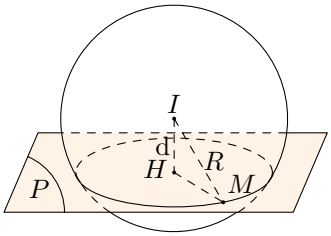


2. Vị trí tương đối

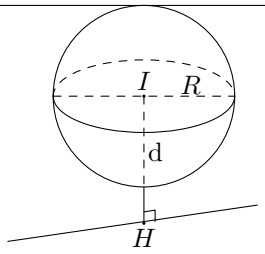
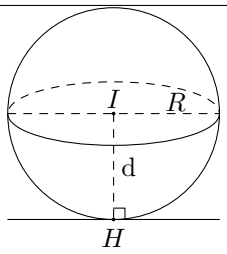
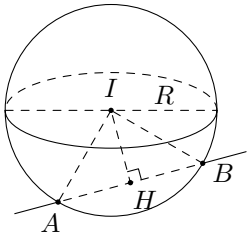
2.1 Giữa mặt cầu và điểm: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M và $S(I;R)$. Khi đó:

	Điểm		
Mặt cầu	Nằm ngoài $\Leftrightarrow IM \cap (S) = H$	Nằm trên $\Leftrightarrow IM \cap (S) = M \equiv H$	Nằm trong $\Leftrightarrow IM \cap (S) = \varnothing$
	$IM > R$	$IM = R$	$IM < R$
			

2.2 Giữa mặt cầu và mặt phẳng: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $S(I;R)$ và $(P)\colon Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó:

	Mặt phẳng		
Mặt cầu	Không cắt $\Leftrightarrow (P)\cap(S)=\varnothing$	Tiếp xúc $\Leftrightarrow (P)\cap(S)=\{H\}$	Cắt theo giao tuyến là đường tròn $\Leftrightarrow (P)\cap(S)=C(H;r)$
	$\mathrm{d}\big(I,(P)\big)>R$	$\mathrm{d}\big(I,(P)\big)=R\Leftrightarrow$ Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu tại điểm H.	$\mathrm{d}\big(I,(P)\big)<R\Leftrightarrow(P)$ cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn có tâm H và bán kính r. $R=\sqrt{r^2+d^2}$.
			

2.3 Giữa mặt cầu và đường thẳng: Trong không gian $Oxyz$, cho $S(I;R)$ và $\Delta\colon \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$. Khi đó:

	Đường thẳng		
Mặt cầu	Không cắt $\Leftrightarrow \Delta\cap(S)=\varnothing$	Tiếp xúc $\Leftrightarrow \Delta\cap(S)=\{H\}$	Cắt tại hai điểm A; B $\Leftrightarrow \Delta\cap(S)=\{A;B\}$
	$\mathrm{d}\big(I,\Delta\big)>R$	$\mathrm{d}\big(I,\Delta\big)=R\Leftrightarrow$ Đường thẳng tiếp xúc mặt cầu tại điểm H	$\mathrm{d}\big(I,\Delta\big)<R$ $\Leftrightarrow R=\sqrt{\dfrac{AB^2}{4}+\mathrm{d}^2}$
			

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 17.1. Xác định tâm, bán kính, nhận biết phương trình mặt cầu

Phương pháp:

Định nghĩa: $S(I;R)=\{M|IM=R>0\}$.

Cho hai điểm A,B cố định. Nếu $MA\perp MB$ thì tập hợp điểm M là mặt cầu (S) có tâm I là trung điểm AB và bán kính $R=\dfrac{AB}{2}$.

a) **Loại 1:** $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

- Hệ số trước x,y,z bằng nhau và bằng 1.
- Hệ số trước các ngoặc bằng nhau và bằng 1.
- Vế phải là hằng số dương.

Xác định *tâm*: Lấy hệ số tự do trong ngoặc $\div -1$.
Xác định *bán kính:* Lấy căn bậc hai vế phải.

b) **Loại 2:** $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

- Hệ số trước x^2,y^2,z^2 bằng nhau và bằng 1.
- Phương trình đầy đủ x^2,y^2,z^2.
- Thỏa mãn điều kiện tồn tại $a^2+b^2+c^2-d>0$

Xác định *tâm*: Lấy hệ số trước $x;y;z\div -2$. Xác định *bán kính:* $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$. Điều kiện tồn tại: $a^2+b^2+c^2-d>0$.

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, xác định tọa độ tâm và bán kính các mặt cầu sau:

a) $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$.

b) $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các phương trình sau:

a) $2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1-2xy$.

b) $x^2+y^2+z^2-2x+2y=0$.

c) $x^2+y^2+z^2+2x-2y+1=0$.

d) $(x+y)^2=2xy-z^2+1-4x$.

Có bao nhiêu phương trình mặt cầu và mặt cầu đấy nhận $I(-1;1;0)$ làm tâm?

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho các phương trình sau:

a) $x^2+y^2+z^2-2x=0$.

b) $x^2+y^2-z^2+2x-y+1=0$.

c) $2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1$.

d) $(x+y)^2=2xy-z^2-1$.

Có bao nhiêu phương trình mặt cầu?

Lời giải

.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;-1)$ và $B(0;6;0)$. Chứng minh rằng nếu điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ thì M thuộc một mặt cầu (S). Tìm tâm và bán kính của mặt cầu (S).

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Dạng 17.2. Mặt cầu có tâm và đi qua một điểm

Phương pháp: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

a) Tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R.

- Từ giả thiết ta đã có sẵn tâm I và bán kính R.
- Phương trình $(S)\colon (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

b) Tâm $I(a;b;c)$ và qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$.

- Bán kính mặt cầu$R=IM=\left|\overrightarrow{IM}\right|=\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2}$.
- Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=IM$.

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình các mặt cầu sau:

a) Tâm $I(-1;2;-3)$, bán kính $R=3$.

b) Tâm $I(0;-4;1)$ đường kính bằng 4.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình các mặt cầu sau:

a) Tâm $I(-1;2;1)$ đi qua gốc tọa độ.

b) Tâm $I(1;2;3)$ đi qua điểm $A(1;1;2)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 17.3. Mặt cầu có đường kính

Phương pháp: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) nhận $M(x_M;y_M;z_M)$ và $N(x_N;y_N;z_N)$ làm đường kính.

- Gọi I là tâm mặt cầu (S).
  $\Rightarrow I$ là trung điểm của $MN \Rightarrow I(\dfrac{x_M+x_N}{2};\dfrac{y_M+y_N}{2};\dfrac{z_M+z_N}{2})$.
- Bán kính mặt cầu $R=\dfrac{MN}{2}=IM$.

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-3)$ và $B(3;2;1)$. Viết phương trình mặt cầu đường kính AB.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vecto $\overrightarrow{AO}=(-1;-2;3)$ và $\overrightarrow{BO}=(-7;-4;-5)$. Viết phương trình mặt cầu đường kính AB.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 17.4. Mặt cầu qua 4 điểm không đồng phẳng

Phương pháp: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) đi qua 4 điểm $A;B;C;D$ không đồng phẳng.

- Gọi $I(a;b;c)$ là tọa độ tâm mặt cầu cần tìm.
- Mặt cầu (S) đi qua 4 điểm $\Leftrightarrow IA=IB=IC=ID \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2=IB^2 \\ IA^2=IC^2 \\ IA^2=ID^2 \end{cases}$

  $\Rightarrow$ Tọa độ tâm I.

- Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = IA$.

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt cầu (S) đi qua bốn điểm $M(2;2;2)$, $N(4;0;2)$, $P(4;2;0)$ và $Q(4;2;2)$ thì tâm I của (S) có tọa độ là

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$ và $D(2;2;2)$. Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 17.5. Mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng, mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S).

Loại 1. Tâm $I \in (P)$ và đi qua A, B, C với $(P)\colon \alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z + \delta = 0$ hoặc (P) là các mặt phẳng (Oxy), (Oxz), (Oyz).

- Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu.
- Ta có $I \in (P) \Rightarrow \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c + \delta = 0$ (1).

- Mặt cầu (S) đi qua ba điểm A, B, C nên

$$IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \ (2) \\ IA^2 = IC^2 \ (3). \end{cases}$$

- Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow I$ là thỏa hệ $\begin{cases} \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c + \delta = 0 \\ IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2. \end{cases}$

  Từ đây ta tìm được tọa độ I.
- Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = IA$.

Nhận xét. *Trong trường hợp I thuộc một trong các mặt phẳng (Oxy), (Oxz), (Oyz) bài toán sẽ đơn giản hơn.*

Loại 2. Tâm $I \in d$ và đi qua A, B với d: $\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$ hoặc d là các trục Ox, Oy, Oz.

- Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu.
- Ta có $I \in d \Rightarrow I(x_0+at; y_0+bt; z_0+ct)$.
- Tính $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IB}$ theo t và tính độ dài $\left|\overrightarrow{IA}\right|$, $\left|\overrightarrow{IB}\right|$.
- Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B nên $IA = IB \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{IA}\right| = \left|\overrightarrow{IB}\right|$.
  Từ đây ta tìm tọa độ I.
- Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = IA$.

Nhận xét. *Trong trường hợp I thuộc một trong các trục Ox, Oy, Oz bài toán sẽ đơn giản hơn.*

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) đi qua 2 điểm $A(1;2;3)$, $B(2;0;-2)$ và có tâm nằm trên trục Ox. Viết phương trình mặt cầu (S).

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

.....
.....
.....

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, tìm bán kính mặt cầu qua 2 điểm $A(3;-1;2)$, $B(1;1;-2)$ và có tâm I thuộc $\Delta\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-1}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm $A(-2;3;3)$, $B(-1;1;2)$, $C(4;2;2)$ và có tâm nằm thuộc mặt phẳng (Oyz).

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Dạng 17.6. Mặt cầu tiếp xúc đường thẳng, mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S).

Loại 1. Tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với (P) với $(P)\colon Ax+By+Cz+D=0$ hoặc (P) là các mặt phẳng (Oxy), (Oxz), (Oyz).

- Bán kính mặt cầu $R = \mathrm{d}\left(I;(\alpha)\right) = \dfrac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.
- Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = \mathrm{d}(I;(\alpha))$.

Nhận xét. *Trong trường hợp I tiếp xúc một trong các mặt phẳng $(Oxy),(Oxz),(Oyz)$ bài toán sẽ đơn giản hơn.*

Loại 2. Tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với Δ với $\Delta\colon \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$ hoặc Δ là các trục $Ox;Oy;Oz$.

- Bán kính mặt cầu $R = d\left(I;\Delta\right) = \dfrac{\left|\left[\vec{u};\overrightarrow{MI}\right]\right|}{|\vec{u}|}$.
- Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = \mathrm{d}(I;\Delta)$.

Nhận xét. *Trong trường hợp I tiếp xúc một trong các trục $Ox;Oy;Oz$ bài toán sẽ đơn giản hơn.*

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu tâm $I(1;-2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy).

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, tìm tâm mặt cầu đi qua điểm $B(1;3;0)$ và tiếp xúc với (Oyz) tại $M(0;3;-2)$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;-4)$, $B(2;3;4)$, $C(3;5;7)$. Tìm phương trình mặt cầu có tâm là A và tiếp xúc với BC.

Lời giải

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho $B(1;1;9)$, $C(1;4;0)$. Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua B và tiếp xúc với (Oxy) tại C.

Lời giải

Dạng 17.7. Mặt cầu cắt đường thẳng, mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S).

Loại 1. Tâm $I(a;b;c)$ và cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn tâm I' bán kính r với $(P)\colon Ax+By+Cz+D=0$ hoặc (P) là các mặt phẳng (Oxy), (Oxz), (Oyz).

- Tính $\mathrm{d}(I;(\alpha))=\dfrac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.
- Bán kính $R^2=\mathrm{d}^2(I;(\alpha))+r^2=OH^2+HM^2$.
- Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R.

Nhận xét. *Trong trường hợp I tiếp xúc một trong các mặt phẳng (Oxy), (Oxz), (Oyz) bài toán sẽ đơn giản hơn.*

Loại 2. Tâm $I(a;b;c)$ và cắt Δ tại $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$ và H là trung điểm AB với $\Delta\colon \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ hoặc Δ là các trục Ox, Oy, Oz.

- Tính $\mathrm{d}(I;\Delta)=\dfrac{\left|\left[\vec{u};\overrightarrow{MI}\right]\right|}{|\vec{u}|}$.
- Bán kính $R^2=\mathrm{d}^2(I;(\alpha))+AH^2=OH^2+\dfrac{AB}{4}^2$.
- Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=\mathrm{d}(I;\Delta)$.

Nhận xét. *Trong trường hợp I tiếp xúc một trong các trục Ox, Oy, Oz bài toán sẽ đơn giản hơn.*

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=25$. Mặt phẳng (Oxy) cắt mặt cầu (S) có giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(2;4;1)$ và $(P)\colon x+y+z-4=0$. Tìm phương trình mặt cầu (S) tâm I sao cho (S) cắt (P) theo đường tròn có đường kính bằng 2.

Lời giải

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;-4;5)$. Viết phương trình của mặt cầu tâm là A và cắt trục Oz tại hai điểm B, C sao cho $\triangle ABC$ vuông.

Lời giải

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A và B với $AB=10$. Viết phương trình của mặt cầu (S).

Lời giải

.....

Dạng 17.8. Vị trí tương đối liên quan mặt cầu

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-3=0$ và một điểm $M(4;2;-2)$. Xét vị trí của điểm M so với mặt cầu (S).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z-1=0$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-2z+1=0$. Xét vị trí của mặt phẳng (P) so với mặt cầu (S).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(\Delta)\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z}{-2}$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+2=0$. Tìm số điểm chung của (Δ) và (S).

Lời giải

.....

.....

.....

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) lần lượt có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-6=0$, $2x+2y+z+2m=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để (P) tiếp xúc với (S)?

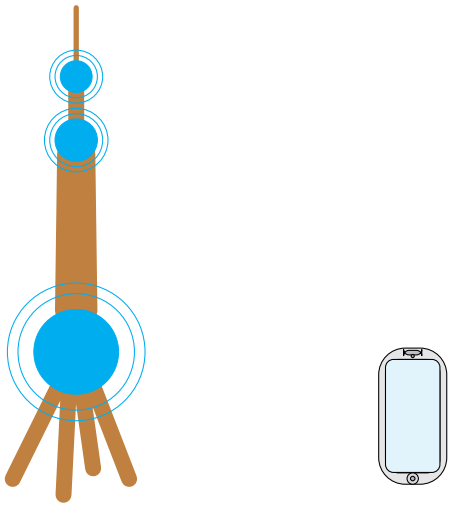
Lời giải

Ví dụ 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=1$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{m}=\dfrac{z}{-1}$. Tìm giá trị của m để Δ không cắt mặt cầu (S).

Lời giải

Dạng 17.9. Bài toán thực tế

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(6;-2;4)$.



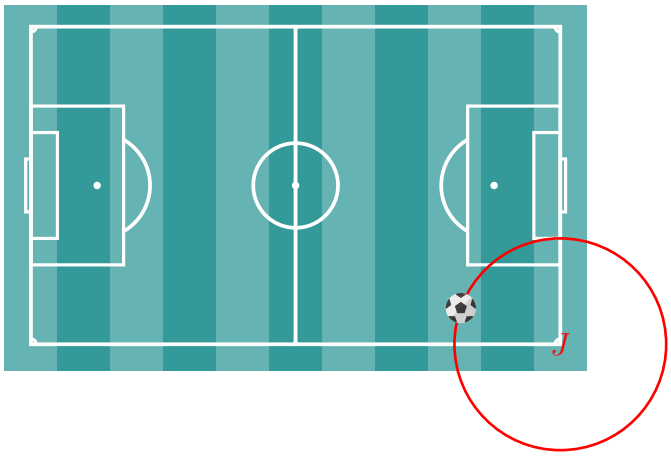
a) Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 3 km. Viết phương trình mặt cầu (S) biểu diễn ranh giới của vùng phủ sóng.

b) Một người sử dụng điện thoại tại điểm $M(5;2;-2)$. Hãy cho biết điểm M nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu (S) và người đó có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên hay không.

c) Câu hỏi tương tự đối với người sử dụng điện thoại ở điểm $N(6;0;3)$.

Lời giải

Ví dụ 2. Công nghệ hỗ trợ trọng tài VAR (Video Assistant Referee) thiết lập một hệ tọa độ $Oxyz$ để theo dõi vị trí của quả bóng M. Cho biết M đang nằm trên mặt sân có phương trình $z = 0$, đồng thời thuộc mặt cầu $(S)\colon (x-32)^2+(y-50)^2+(z-8)^2 = 100$ (đơn vị độ dài tính theo mét).



a) Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

b) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc J của tâm I trên mặt sân.

c) Tính khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

C. LUYỆN TẬP

PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+(y-4)^2+(z-1)^2=25$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

A. $I(0;-4;-1), R=25$. **B.** $I(0;-4;-1), R=5$.

C. $I(0;4;1), R=25$. **D.** $I(0;4;1), R=5$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-6x+4y-8z+4=0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

A. $I(-3;2;-4), R=25$. **B.** $I(3;-2;4), R=5$.

C. $I(3;-2;4), R=25$. **D.** $I(-3;2;-4), R=5$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+8y-2z-4=0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

A. $I(2;-4;1), R=5$. **B.** $I(-2;4;-1), R=25$.

C. $I(2;-4;1), R=\sqrt{21}$. **D.** $I(-2;4;-1), R=21$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. Điểm có tọa độ nào sau đây nằm trên mặt cầu?

A. $(-1;2;-3)$. **B.** $(1;-2;-1)$. **C.** $(1;-2;1)$. **D.** $(1;-2;3)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+(y-1)^2+z^2=2$. Trong các điểm cho dưới đây, điểm nào nằm ngoài mặt cầu (S)?

A. $M(1;1;1)$. **B.** $N(0;1;0)$. **C.** $P(1;0;1)$. **D.** $Q(1;1;0)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-3=0$ và một điểm $M(4;2;-2)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Điểm M là tâm của mặt cầu (S).
B. Điểm M nằm trên mặt cầu (S).
C. Điểm M nằm trong mặt cầu (S).
D. Điểm M nằm ngoài mặt cầu (S).

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 7. Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt cầu?

A. $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=3$.
B. $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=-3$.
C. $(x-1)+(y-3)+(z+2)=9$.
D. $(x-1)+(y-3)+(z+2)=-9$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 8. Điều kiện để phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ là phương trình mặt cầu?

A. $a+b+c-d>0$.
B. $a^2+b^2+c^2+d>0$.

C. $a^2+b^2+c^2-d>0$. **D.** $a^2+b^2+c^2-d\geq 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 9. Trong các phương trình sau, phương trình nào không phải là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2=1$.

B. $x^2+y^2+z^2+2x+2y-4z+11=0$.

C. $x^2+y^2+z^2+2x+4y-4z-21=0$.

D. $2x^2+2y^2+2z^2+4x+4y-8z-10=0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 10. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của mặt cầu tâm $I\ (1;-2;3)$ bán kính $R=3$?

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=3$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=3$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 11. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của mặt cầu tâm $I(-1;2;-3)$ và đi qua điểm $M(0;3;2)$?

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=13$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=\sqrt{13}$.

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=27$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=\sqrt{27}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 12. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của mặt cầu tâm $I(0;3;1)$ bán kính $R=2$.

A. $x^2+y^2+z^2+6y+2z+6=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2+6y+2z-6=0$.

C. $x^2+y^2+z^2-6y-2z-6=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-6y-2z+6=0$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 13. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu $x^2+y^2+z^2+8x-6y+2z-10=0$.

A. Tâm $I(-4;3;-1)$ và bán kính $R=6$. **B.** Tâm $I(-4;3;-1)$ và bán kính $R=36$.

C. Tâm $I(4;-3;1)$ và bán kính $R=6$. **D.** Tâm $I(4;-3;1)$ và bán kính $R=36$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilmet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I\ (-6;-1;4)$. Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 2 km. Người sử dụng điện thoại đứng ở điểm nào sau đây thì sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

A. $A(-4;0;2)$. **B.** $B(-5;-2;5)$. **C.** $C(-6;2;2)$. **D.** $D(0;-1;4)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I\ (-6;-1;4)$. Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là $2km$. Người sử dụng điện thoại đứng ở điểm nào sau đây thì không sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

A. $A(-5;0;3)$. **B.** $B(-5;-2;5)$. **C.** $C(-6;2;2)$. **D.** $D(-7;-2;3)$.

Lời giải

.....

Câu 16. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2+2x+2y-2z+4=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2+4x-2y+2z+6=0$.

C. $x^2+y^2+z^2+2x-6y+4z+14=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2+8x-6y+2z-10=0$.

Lời giải

Câu 17. Trong các phương trình sau, có bao nhiêu phương trình là phương trình của mặt cầu?

- $x^2+y^2+z^2+4z-32=0$.
- $x^2+y^2+z^2+2x+2y-2z+4=0$.
- $x^2+y^2+z^2+2x-6y+4z-10=0$.
- $x^2+y^2+z^2+8x-6y+2z-4=0$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

.....
.....
.....
.....

Câu 18. Viết phương trình mặt cầu có tâm $M(3;1;-4)$ và đi qua điểm $N(1;0;1)$.

A. $(x+3)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=30$. **B.** $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=30$.

C. $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=\sqrt{30}$. **D.** $(x-3)^2-(y-1)^2-(z+4)^2=30$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(3;4;2)$. Phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với trục Oz là

A. $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=16$. **B.** $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=4$.

C. $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=5$. **D.** $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=25$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x-2y+10z-14=0$. Mặt phẳng $(P)\colon -x+4z+5=0$ cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C). Toạ độ tâm H của (C) là

A. $H(-3;1;-2)$. **B.** $H(-7;1;-3)$. **C.** $H(9;1;1)$. **D.** $H(1;1;-1)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính $R=5$, có tâm I thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với trục Oy. Biết rằng I có tung độ dương. Điểm nào sau đây thuộc mặt cầu (S)?

A. $M(-1;-2;1)$. **B.** $N(3;2;-1)$. **C.** $P(-5;2;-7)$. **D.** $Q(5;-2;7)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, một thiết bị phát sóng đặt tại vị trí $A(3;0;0)$. Vùng phủ sóng của thiết bị có bán kính bằng 5. Hỏi vị trí của điểm nào sau đây không thuộc vùng phủ sóng của thiết bị nói trên?

A. $M(5;0;0)$. **B.** $N(3;2;-1)$. **C.** $P(-1;3;1)$. **D.** $Q(0;-2;0)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $OABC$ có tọa độ đỉnh $A(m;m;0)$, $B(0;m;m)$, $C(m;0;m)$. Biết tứ diện $OABC$ có bán kính mặt cầu (S) nội tiếp bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Khi đó phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\dfrac{1}{3}$. **B.** $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=\dfrac{1}{3}$.

C. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\dfrac{1}{3}$. **D.** $(x+2)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+12y+6z+24=0$. Hai điểm M,N thuộc (S) sao cho $MN=8$ và $OM^2-ON^2=-112$. Khoảng cách từ O đến đường thẳng MN bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

. . . . . .

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(C)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+z^2=16$.

a) Điểm $A(1;2;-1)$ nằm bên ngoài mặt cầu (C).

b) Điểm $B(0;0;1)$ nằm bên trong mặt cầu (C).

c) Điểm $C(0;2;1)$ nằm trên mặt cầu (C).

d) Với điểm $D(2;1;-1)$, ta có $ID<4$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$ có tâm I và bán kính R.

a) Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$, bán kính $R=3$.

b) Điểm $A(0;2;-3)$ nằm trong mặt cầu.

c) Điểm $J(1;2;3)$ nằm ngoài mặt cầu và khoảng cách từ tâm I đến điểm J bằng $\sqrt{10}$.

d) Khoảng cách từ tâm I đến tâm mặt cầu $(S')\colon x^2+y^2+(z-1)^2=3$ bằng $\sqrt{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y+1=0$ có tâm I và bán kính R.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;0)$ và bán kính $R=2$.

b) Bán kính của mặt cầu (S) là đoạn IM với điểm $M(1;1;2)$.

c) Mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(0;1;-2)$ và $B(2;-1;-4)$.

d) Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P)\colon x+y-z-2=0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$ và $C(0;0;3)$. Khi đó

a) Mặt cầu tâm B, bán kính $R=3$ có phương trình là $x^2+(y-2)^2+z^2=3$.

b) Mặt cầu tâm A, đi qua B có phương trình là $(x-1)^2+y^2+z^2=5$.

c) Mặt cầu nhận BC làm đường kính có phương trình là $x^2+(y-1)^2+(z-3)^2=\dfrac{13}{4}$.

d) Mặt cầu tâm O và có bán kính $R=OG$ với G là trọng tâm $\triangle ABC$, có phương trình là $x^2+y^2+z^2=\dfrac{14}{9}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng (xem hình vẽ) được đặt ở vị trí $I(25;30;50)$. Mặt cầu (S) mô tả ranh giới của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng, biết rằng ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sáng $R=5$ km.



(Nguồn:https://shutterstock.com)

a) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-25)^2+(y-30)^2+(z-50)^2=25$.

b) Điểm $A(1\,025;30;50)$ nằm bên trong mặt cầu (S).

c) Một người đi biển ở vị trí $M(45;60;50)$ thì có thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.

d) Một người đi biển ở vị trí $N(5\,125;30;0)$ thì không thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$ với O là gốc tọa độ, $A(2;0;0)$, $C(0;3;0)$, $O'(0;0;4)$. Ta có

a) Mặt cầu tâm O, bán kính OA có phương trình là $x^2+y^2+z^2=2$.

b) Mặt cầu tâm A, đi qua C có phương trình là $(x-2)^2+y^2+z^2=13$.

c) Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (ACO'), mặt cầu tâm O đi qua H có phương trình là $x^2+y^2+z^2=\dfrac{12}{61}$.

d) Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình hộp có phương trình là $(x-1)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2+(z-2)^2=\dfrac{29}{4}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon x=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x+y-z-5=0$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng d và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn lớn nhất có bán kính $r=5$.

a) Mặt phẳng $(P)\colon 3x+y-z-5=0$ có VTPT $\vec{n}=(3;1;-1)$.

b) Tọa độ tổng quát của tâm I là $(t;-1+2t;-2-t)$.

c) $\mathrm{d}\,(I,(P))=3$.

d) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=25$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Trong không gian Oxy, tổng tất cả bao nhiêu số tự nhiên của tham số m để phương trình $x^2+y^2+z^2+2(m-2)y-2(m+3)z+3m^2+7=0$ là phương trình của một mặt cầu.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;m;1)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2y+4z-9=0$. Tập các giá trị của m để điểm A nằm trong khối cầu có dạng $(a;b)$ với a, b là các số nguyên. Giá trị của a^b bằng bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, có bao nhiêu giá trị nguyên dương m để phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+m=0$ là phương trình của một mặt cầu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-3;2)$ và đi qua $A(5;-1;4)$ có dạng $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c+R^2$.

Lời giải

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Tính đường kính l của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Lời giải

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-2;2;-2)$, $B(3;-3;3)$ và điểm M không cố định trong không gian thỏa mãn $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{2}{3}$. Cho điểm $C(4;0;1)$. Khi đó độ dài CM lớn nhất bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, khi phương trình $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my-2mz+7m^2-1=0$ là phương trình mặt cầu. Xác định m để mặt cầu có bán kính lớn nhất.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB=2\sqrt{3}$. Khi đó, phương trình mặt cầu (S) có dạng là $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$, tính giá trị của $P=\dfrac{abc}{R}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-2;4;1), B(2;0;3)$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=-2+t. \end{cases}$ Gọi (S) là mặt cầu đi qua A, B và có tâm thuộc đường thẳng d. Bán kính của mặt cầu (S) là $R=a\sqrt{b}$, tính giá trị của $P=a+b$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+z-3=0$. Gọi mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ thuộc Δ và tiếp xúc với (P) tại $H(1;-1;0)$. Khi đó giá trị $a^2+b^2+c^2$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 11. Trong hệ trục $Oxyz$ cho trước (đơn vị trên trục là mét), cho một trạm thu phát sóng 5G có bán kính vùng phủ sóng của trạm ở ngưỡng 600 m được đặt ở vị trí

$I(200;450;60)$. Tìm giá trị lớn nhất của m (làm tròn đến hàng đơn vị) để một người dùng điện thoại ở vị trí $A(m+100;m+370;0)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm nói trên.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{2}$ và hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z-2=0$, $(Q)\colon x+2y-2z+4=0$. Gọi mặt cầu $S(I,R)$ có tâm I thuộc Δ và tiếp xúc với (P), (Q). Khi đó đường kính của mặt cầu có giá trị bằng bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 13. Một quả bóng rổ được đặt ở một góc của căn phòng hình hộp chữ nhật sao cho quả bóng chạm và tiếp xúc với hai bức tường và nền nhà của căn phòng đó thì có một điểm trên quả bóng có khoảng cách lần lượt đến hai bức tường và nền nhà 17 cm, 18 cm, 21 cm (tham khảo hình minh họa). Hỏi độ dài đường kính của quả bóng bằng bao nhiêu cm biết rằng quả bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm? Kết quả làm tròn đến một chữ số thập phân.

Lời giải

CHƯƠNG 6 XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

BÀI 18. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa xác suất có điều kiện

Định nghĩa 1. Cho hai biến cố A và B.

» Xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra được gọi là xác suất của A với điều kiện B.

» Kí hiệu $\mathrm{P}(A \mid B)$.

2. Công thức tính xác suất có điều kiện

Định nghĩa 2. Cho hai biến cố A và B trong đó $\mathrm{P}(B) > 0$ khi đó $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$.

Chú ý

» Nếu $\mathrm{P}(B) > 0$ thì $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A \mid B)$.

» Nếu A và B là hai biến cố bất kì thì: $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot P(A \mid B) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A \mid B)$.

» Cho A và B là hai biến cố với $\mathrm{P}(B) > 0$. Khi đó, ta có: $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(B)}$.
Trong đó:
$n(A \cap B)$ là số các trường hợp thuận lợi của $(A \cap B)$;
$n(B)$ là số các trường hợp thuận lợi của B.

» Nếu A và B là hai biến cố bất kì, với $\mathrm{P}(B) > 0$ thì: $\mathrm{P}\left(\overline{A} \mid B\right) = 1 - \mathrm{P}(A \mid B)$.

» Cho A và B là hai biến cố với $0 < \mathrm{P}(A) < 1; 0 < \mathrm{P}(B) < 1$.
Khi đó, A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi: $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}\left(A \mid \overline{B}\right)$ và $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}\left(B \mid \overline{A}\right)$.

» Nếu A và B là hai biến cố bất kì, với $\mathrm{P}(B) > 0$ thì: $\mathrm{P}\left(\overline{A} \mid B\right) = 1 - \mathrm{P}(A \mid B)$.

3. Công thức nhân xác suất

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A \mid B).$$

Chú ý 1: Cho hai biến cố độc lập A và B , với $0 < \mathrm{P}(A) < 1; 0 < \mathrm{P}(B) < 1$.

- $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A|\overline{B})$.
- $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}(B|\overline{A})$.

Chú ý 2:

- $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 1$.
- $\mathrm{P}(A \mid B) + \mathrm{P}\left(\overline{A} \mid B\right) = 1$.
- $\mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}\left(A \cap \overline{B}\right) = \mathrm{P}(A)$.
- $\mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}\left(\overline{A} \cap B\right) = \mathrm{P}(B)$.
- Cách ghi $\mathrm{P}(A \cap B)$ với $\mathrm{P}(AB)$ hoàn toàn như nhau.

Chú ý 3: Những bài toán xảy ra xác suất điều kiện thường đi kèm với việc sử dụng quy tắc nhân xác suất, khi gặp bài toán này ta cần lưu ý đến sự độc lập của biến cố để vận dụng công thức đúng.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 18.1. Tính xác suất có điều kiện không sử dụng công thức

Phương pháp

Mô tả không gian mẫu

- Cách 1: Liệt kê các phần tử của không gian mẫu và biến cố rồi đếm.
- Cách 2: Sử dụng quy tắc đếm, hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp để đếm só phần tử của không gian mẫu và biến cố.

Chú ý:

- $\overline{abc}$ chia hết cho 2 (hay là số chẵn) thì chữ số $c \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$.
- $\overline{abc}$ chia hết cho 5 thì chữ số $c \in \{0; 5\}$.
- $\overline{abc}$ chia hết cho 3 thì chữ số $a + b + c$ chia hết cho 3.
- $\overline{abc}$ chia hết cho 9 thì chữ số $a + b + c$ chia hết cho 9.

Ví dụ 1. Cho các chữ số 1; 2; 3 ;4 ;5 ;6. Lấy ngẫu nhiên ba chữ số và sắp xếp theo một thứ tự. Xét biến Số A: "Ba số lập thành một số chia hết cho 2". Kết quả thuận lợi cho biến cố A bằng?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Một nhóm các nhà khoa học gồm 4 nhà toán học nam; 3 nhà toán học nữ và 4 nhà vật lí học nam. Lấy ngẫu nhiên ba người. Xác suất trong ba người có cả nam và nữ, cả toán và lí bằng?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 18.2. Tính xác suất có điều kiện sử dụng công thức

***Phương pháp*:**

Cho hai biến cố A và B.

Xác suất của biến cố A, tính trong điều kiện biết rằng biến cố B đã xảy ra, được gọi là xác suất của biến A với điều kiện B và kí hiệu là $\mathrm{P}(A|B)$.

Cho hai biến cố A và B bất kỳ, với $\mathrm{P}(B) > 0$. Khi đó $\mathrm{P}(A|B) = \dfrac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)}$.

Ví dụ 1. Một hộp chứa 8 bi trắng, 2 bi đỏ. Lần lượt bốc từng bi. Giả sử lần đầu tiên bốc được bi trắng. Xác định xác suất lần thứ 2 bốc được bi đỏ.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Một bình đựng 5 viên bi kích thước và chất liệu giống nhau, chỉ khác nhau về màu sắc. Trong đó có 3 viên bi xanh và 2 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ bình ra một viên bi ta được viên bi màu xanh, rồi lại lấy ngẫu nhiên ra một viên bi nữa. Tính xác suất để lấy được viên bi đỏ ở lần thứ hai.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Một hộp có 30 viên bi trắng và 10 viên bi đen, các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lần thứ nhất lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp, không trả lại. Sau đó, lần thứ 2 lấy ngẫu nhiên thêm một viên bi trong hộp đó. Gọi A là biến cố: "Lần thứ hai lấy được viên bi trắng"; và B là biến cố: "Lần thứ nhất lấy được viên bi đen".
Tính $\mathrm{P}(A \mid B)$.

Lời giải

.....

.....

.....

Ví dụ 4. Trong cơ quan có 100 người. Trong đó có 60 người gần cơ quan (trong đó có 40 người là nam), có tổng cộng 30 nữ nhân viên. Theo quy định của cơ quan thì người nào hoặc là nam hoặc gần cơ quan sẽ phải tham gia trực. Tính xác suất để chọn ngẫu nhiên một người trong danh sách mà người đó lại là nữ trực cơ quan?

Lời giải

Ví dụ 5. Một gia đình có 2 đứa trẻ. Biết rằng có ít nhất 1 đứa trẻ là con gái. Hỏi xác suất 2 đứa trẻ đều là con gái là bao nhiêu? Cho biết xác suất để một đứa trẻ là trai hoặc gái là bằng nhau.

Lời giải

Ví dụ 6. Ba khẩu súng độc lập bắn vào một mục tiêu. Xác suất để khẩu thứ nhất bắn trúng bằng 0,7 , để khẩu thứ hai bắn trúng bằng 0,8 , để khẩu thứ ba bắn trúng bằng 0,5 . Mỗi khẩu bắn 1 viên. Tính xác suất để khẩu thứ nhất bắn trúng biết rằng chỉ có 2 viên trúng mục tiêu.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

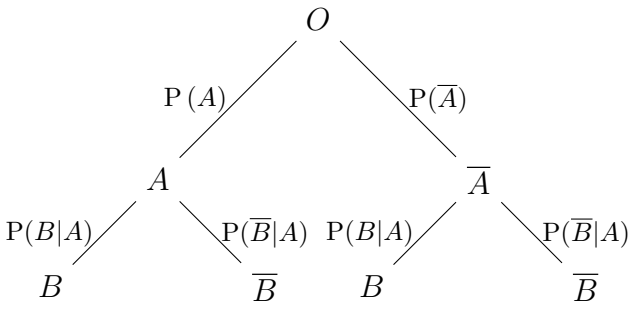
.....

.....

.....

Dạng 18.3. Tính xác suất có điều kiện sử dụng sơ đồ hình cây.

Xây dựng sơ đồ cây theo mẫu (hình bên dưới) và xác định xác suất trên mỗi nhánh.
Tính $\mathrm{P}(A \cap B)$ bằng xác suất của lộ trình $(O-A-B)$.
Tính $\mathrm{P}(B)$ bằng tổng xác suất của 2 lộ trình dẫn đến B là $(O-A-B)$ và $\left(O-\overline{A}-B\right)$.



Ví dụ 1. Ông An hằng ngày đi làm bằng xe máy hoặc xe buýt. Nếu hôm nay ông đi làm bằng xe buýt thì xác suất để hôm sau ông đi làm bằng xe máy là 0,4. Nếu hôm nay ông đi làm bằng xe máy thì xác suất để hôm sau ông đi làm bằng xe buýt là 0,7. Xét một tuần mà thứ Hai ông An đi làm bằng xe buýt. Tính xác suất để thứ Tư trong tuần đó, ông An đi làm bằng xe máy.

Lời giải

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2. Tại một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử tỉ lệ sản phẩm đạt tiêu chuẩn là 80%. Trước khi xuất xưởng ra thị trường, các linh kiện điện tử đều phải qua khâu kiểm tra chất lượng để đóng dấu OTK. Vì sự kiểm tra không tuyệt đối hoàn hảo nên

- Nếu một linh kiện điện tử đạt tiêu chuẩn thì nó có xác suất 0,99 được đóng dấu OTK;
- Nếu một linh kiện điện tử không đạt tiêu chuẩn thì nó có xác suất 0,95 không được đóng dấu OTK.

Chọn ngẫu nhiên một linh kiện điện tử của nhà máy này trên thị trường. Dùng sơ đồ hình cây, hãy mô tả cách tính xác suất để linh kiện điện tử được chọn không được đóng dấu OTK.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

C. LUYỆN TẬP

PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Một hộp chứa 4 quả bóng được đánh số từ 1 đến 4. An lấy ngẫu nhiên một quả bóng, bỏ ra ngoài, rồi lấy tiếp một quả bóng nữa. Xét các biến cố:
A: "Quả bóng lấy ra lần đầu có số chẵn".
B: "Quả bóng lấy ra lần hai có số lẻ".
Xác định biến cố $C = B \mid A$: "Biến cố B với điều kiện biết A đã xảy ra".

A. $B \mid A = \{(2,1),(2,3),(4,1),(4,3)\}$.

B. $B \mid A = \{(2,1),(2,3),(2,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$.

C. $B \mid A = \{(1,1),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,3),(4,1),(4,3)\}$.

D. $B \mid A = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Một con xúc xắc cân đối, đánh số từ 1 đến 6, được gieo 2 lần liên tiếp. Xét các biến cố:
A: "Tổng số chấm trong hai lần gieo là số chẵn".
B: "Số chấm ở lần gieo thứ nhất là số lẻ".
Xác định biến cố A khi biết B đã xảy ra.

A. $A \mid B = \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$.

B. $A \mid B = \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5),(1,2),(1,4),(1,6),(3,2),(3,4),($

C. $A \mid B = \{(1,2),(1,4),(1,6),(3,2),(3,4),(3,6),(5,2),(5,4),(5,6)\}$.

D. $A \mid B = \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 3. Một hộp chứa 5 quả bóng: 2 quả màu đỏ (đánh số 1 và 2), 2 quả màu xanh (đánh số 3 và 4) và 1 quả màu vàng (đánh số 5). Lấy ngẫu nhiên 2 quả bóng liên tiếp không hoàn lại. Xét các biến cố:

A: "Quả bóng lấy ra đầu tiên có màu đỏ".

B: "Tổng số của hai quả bóng lấy ra là số lẻ".

Xác định $B \mid A$ là biến cố B khi biết A đã xảy ra.

A. $B \mid A = \{(1,2),(1,4),(2,1),(2,3),(2,5)\}$.

B. $B \mid A = \{(1,2),(1,4),(2,1),(2,3)\}$.

C. $B \mid A = \{(1,3),(1,5),(2,3),(2,5)\}$.

D. $B \mid A = \{(1,3),(1,5),(2,1),(2,3),(2,5)\}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 4. Trong một kỳ thi, có 60% học sinh đã làm đúng bài toán đầu tiên và 40% học sinh đã làm đúng bài toán thứ hai. Biết rằng có 20% học sinh làm đúng cả hai bài toán. Xác suất để một học sinh làm đúng bài toán thứ hai biết rằng học sinh đó đã làm đúng bài toán đầu tiên là bao nhiêu?

A. 0,5. **B.** 0,333. **C.** 0,2. **D.** 0,667.

Lời giải

.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 5. Một hộp chứa 4 quả bóng được đánh số từ 1 đến 4. An lấy ngẫu nhiên một quả bóng, bỏ ra ngoài, rồi lấy tiếp một quả bóng nữa. Xét các biến cố:
A: "Quả bóng lấy ra lần đầu có số chẵn".
B: "Quả bóng lấy ra lần hai có số lẻ".
Tính xác suất có điều kiện $\mathrm{P}(B \mid A)$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 6. Một lô sản phẩm có 30 sản phẩm, trong đó có 4 chất lượng thấp. Lấy liên tiếp hai sản phẩm trong lô sản phẩm trên, trong đó sản phẩm lấy ra ở lần thứ nhất không được bỏ lại vào lô sản phẩm. Tính xác suất để cả hai sản phẩm được lấy ra đều có chất lượng thấp.

A. $\frac{3}{29}$. **B.** $\frac{1}{10}$. **C.** $\frac{4}{30}$. **D.** $\frac{2}{15}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....

Câu 7. Cho hai biến cố A và B có $\mathrm{P}(A) = 0{,}2$; $\mathrm{P}(B) = 0{,}6$; $\mathrm{P}(A \mid B) = 0{,}3$. Tính $\mathrm{P}\left(\overline{A}B\right)$.

A. $0{,}18$. **B.** $0{,}42$. **C.** $0{,}24$. **D.** $0{,}02$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 8. Cho hai biến cố A và B là hai biến cố độc lập, với $\mathrm{P}(A) = 0{,}2\,024$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}2\,025$. Tính $\mathrm{P}(A \mid B)$.

A. $0{,}7\,976$. **B.** $0{,}7\,975$. **C.** $0{,}2\,025$. **D.** $0{,}2\,024$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 9. Cho hai biến cố A và B là hai biến cố độc lập, với $\mathrm{P}(A) = 0{,}2\,024$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}2\,025$. Tính $\mathrm{P}\left(B|\overline{A}\right)$.

A. $0{,}7\,976$. **B.** $0{,}7\,975$. **C.** $0{,}2\,025$. **D.** $0{,}2\,024$.

Lời giải

Câu 10. Cho hai biến cố A và B, với $\mathrm{P}(A) = 0{,}6$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}7$, $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}3$. Tính $\mathrm{P}(A \mid B)$.

A. $\frac{3}{7}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{6}{7}$. **D.** $\frac{1}{7}$.

Lời giải

Câu 11. Cho hai biến cố A và B, với $\mathrm{P}(A) = 0{,}6$; $\mathrm{P}(B) = 0{,}7$; $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}3$. Tính $\mathrm{P}(\overline{B}|A)$.

A. $\frac{3}{7}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{6}{7}$. **D.** $\frac{1}{7}$.

Lời giải

.....
.....

Câu 12. Cho hai biến cố A và B, với $\mathrm{P}(A) = 0{,}6$; $\mathrm{P}(B) = 0{,}7$; $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}3$. Tính $\mathrm{P}(\overline{A} \cap B)$.

A. $\frac{4}{7}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{1}{7}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 13. Cho hai biến cố A và B, với $\mathrm{P}(A) = 0{,}8$; $\mathrm{P}(B) = 0{,}65$; $\mathrm{P}\left(A \cap \bar{B}\right) = 0{,}55$. Tính $\mathrm{P}\left(\bar{A} \cap B\right)$.

A. 0,25. **B.** 0,4. **C.** 0,3. **D.** 0,35.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 14. Gieo lần lượt hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 6. Biết rằng con xúc xắc thứ nhất xuất hiện mặt 4 chấm.

A. $\frac{2}{6}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

Lời giải

.....

Câu 15. Trong hộp có 3 viên bi màu trắng và 7 viên bi màu đỏ. Lấy lần lượt mỗi lần một viên theo cách lấy không trả lại. Xác suất để viên bi lấy lần thứ hai là màu đỏ nếu biết rằng viên bị lấy lần thứ nhất cũng là màu đỏ là

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{2}{7}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{1}{7}$.

Lời giải

Câu 16. Trong hộp có 3 viên bi màu trắng và 7 viên bi màu đỏ. Lấy lần lượt mỗi lần một viên theo cách lấy không trả lại. Xác suất để viên bi lấy lần thứ hai là màu đỏ nếu biết rằng viên bi lấy lần thứ nhất là màu trắng là

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{7}{9}$. **D.** $\frac{5}{9}$.

Lời giải

.....
.....
.....

Câu 17. Cho hai biến cố A và B, với $\mathrm{P}(A) = 0{,}8$; $\mathrm{P}(B) = 0{,}65$; $\mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = 0{,}55$. Tính $\mathrm{P}(A \cap B)$.

A. 0,25. **B.** 0,1. **C.** 0,15. **D.** 0,35.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 18. Một công ty xây dựng đấu thầu 2 dự án độc lập. Khả năng thắng thầu của các dự án 1 là 0,6 và dự án 2 là 0,7. Tìm xác suất để công ty thắng thầu đúng 1 dự án.

A. 0,28. **B.** 0,7. **C.** 0,46. **D.** 0,18.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 19. Một công ty xây dựng đấu thầu 2 dự án độc lập. Khả năng thắng thầu của các dự án 1 là 0,6 và dự án 2 là 0,7. Biết công ty thắng thầu dự án 1, tìm xác suất công ty thắng thầu dự án 2. Tìm xác suất công ty thắng thầu đúng 1 dự án.

A. 0,6. **B.** 0,7. **C.** 0,46. **D.** 0,3.

Lời giải

Câu 20. Một công ty xây dựng đấu thầu 2 dự án độc lập. Khả năng thắng thầu của các dự án 1 là 0,6 và dự án 2 là 0,7. Biết công ty không thắng thầu dự án 1, tìm xác suất công ty thắng thầu dự án 2.

A. 0,4. **B.** 0,7. **C.** 0,28. **D.** 0,6.

Lời giải

Câu 21. Cho một hộp kín có 6 thẻ ATM của BIDV và 4 thẻ ATM của Vietcombank. Lấy ngẫu nhiên lần lượt 2 thẻ (lấy không hoàn lại). Tìm xác suất để lần thứ hai lấy được thẻ ATM của Vietcombank nếu biết lần thứ nhất đã lấy được thẻ ATM của BIDV.

A. $\frac{5}{9}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{7}{9}$. **D.** $\frac{4}{9}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....

Câu 22. Một bình đựng 9 viên bi xanh và 7 viên bi đỏ. Lần lượt lấy ngẫu nhiên ra 2 bi, mỗi lần lấy 1 bi không hoàn lại. Tính xác suất để bi thứ 2 màu xanh nếu biết bi thứ nhất màu đỏ?

A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{9}{16}$. **C.** $\frac{9}{17}$. **D.** $\frac{21}{80}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 23. Trong hộp có 20 nắp khoen bia Tiger, trong đó có 2 nắp ghi "Chúc mừng bạn đã trúng thưởng xe Camry". Bạn Minh Hiền được chọn lên rút thăm lần lượt hai nắp khoen, xác suất để cả hai nắp đều trúng thưởng là

A. $\frac{1}{20}$. **B.** $\frac{1}{19}$. **C.** $\frac{1}{190}$. **D.** $\frac{1}{10}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 24. Áo sơ mi An Phước trước khi xuất khẩu sang Mỹ phải qua 2 lần kiểm tra, nếu cả hai lần đều đạt thì chiếc áo đó mới đủ tiêu chuẩn xuất khẩu. Biết rằng bình quân 98%

sản phẩm làm ra qua được lần kiểm tra thứ nhất, và 95% sản phẩm qua được lần kiểm tra đầu sẽ tiếp tục qua được lần kiểm tra thứ hai. Tìm xác suất để 1 chiếc áo sơ mi đủ tiêu chuẩn xuất khẩu?

A. $\frac{95}{98}$. **B.** $\frac{931}{1000}$. **C.** $\frac{95}{100}$. **D.** $\frac{98}{100}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 25. Lớp Toán Sư Phạm có 95 Sinh viên, trong đó có 40 nam và 55 nữ. Trong kỳ thi môn Xác suất thống kê có 23 sinh viên đạt điểm giỏi (trong đó có 12 nam và 11 nữ). Gọi tên ngẫu nhiên một sinh viên trong danh sách lớp. Tìm xác suất gọi được sinh viên đạt điểm giỏi môn Xác suất thống kê, biết rằng sinh viên đó là nữ?

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{11}{23}$. **C.** $\frac{12}{23}$. **D.** $\frac{11}{19}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 26. Một nhóm học sinh có 30 học sinh, trong đó có 16 em học khá môn Toán, 25 em học khá môn Hóa học, 12 em học khá cả hai môn Toán và Hóa học. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong số đó. Tính xác suất để học sinh đó học khá môn Toán biết rằng học sinh đó học khá môn Hóa học.

A. 0,53. **B.** 0,75. **C.** 0,48. **D.** 0,84.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 27. Giả sử trong một nhóm người có 91% người là không nhiễm bệnh. Để phát hiện ra người nhiễm bệnh, người ta tiến hành xét nghiệm tất cả mọi người của nhóm đó. Biết rằng đối với người nhiễm bệnh thì xác suất xét nghiệm có kết quả dương tính là 85%, nhưng đối với người không nhiễm bệnh thì xác suất xét nghiệm có phản ứng dương tính là 7%. Tính xác suất để người được chọn ra không nhiễm bệnh và không có phản ứng dương tính.

A. 0,93. **B.** 0,0637. **C.** 0,8463. **D.** 0,7735.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 28. Một học sinh làm 2 bài tập kế tiếp. Xác suất làm đúng bài thứ nhất là 0,7. Nếu làm đúng bài thứ nhất thì khả năng làm đúng bài thứ hai là 0,8. Nhưng nếu làm sai bài thứ nhất thì khả năng làm đúng bài thứ hai là 0,2. Tính xác suất học sinh đó làm đúng cả hai bài?

A. 0,56. **B.** 0,14. **C.** 0,16. **D.** 0,65.

Lời giải

.....

.....

Câu 29. Cho một hộp kín có 6 thẻ ATM của BIDV và 4 thẻ ATM của Vietcombank. Lấy ngẫu nhiên lần lượt 2 thẻ (lấy không hoàn lại). Không gian mẫu rút lần lượt 2 thẻ biết lần thứ nhất đã lấy được thẻ ATM của BIDV là

A. 54. **B.** 90. **C.** 100. **D.** 50.

Lời giải

Câu 30. Trong hộp có 20 nắp khoen bia Tiger, trong đó có 2 nắp ghi "Chúc mừng bạn đã trúng thưởng xe Camry". Bạn Minh Hiền được chọn lên rút thăm lần lượt hai nắp khoen, xác suất để cả hai nắp đều trúng thưởng là

A. $\frac{1}{20}$. **B.** $\frac{1}{19}$. **C.** $\frac{1}{190}$. **D.** $\frac{1}{10}$.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

Câu 31. Một bình đựng 5 viên bi kích thước và chất liệu giống nhau, chỉ khác nhau về màu sắc. Trong đó có 3 viên bi xanh và 2 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ bình ra một viên bi ta được viên bi màu xanh, rồi lại lấy ngẫu nhiên ra một viên bi nữa. Tính xác suất để lấy được viên bi đỏ ở lần thứ hai.

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Câu 32. Danh sách một lớp đại học Quốc Gia có 95 sinh viên gồm 40 nam và 55 nữ. Có 23 sinh viên quốc tịch nước ngoài (trong đó có 12 nam và 11 nữ), số sinh viên còn lại có quốc tịch Việt Nam. Gọi tên ngẫu nhiên một sinh viên trong danh sách lớp đó lên bảng. Tính xác suất sinh viên gọi tên có quốc tịch nước ngoài, biết rằng sinh viên đó là nữ?

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{11}{23}$. **C.** $\frac{12}{23}$. **D.** $\frac{11}{19}$.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Câu 33. Gieo hai con xúc xắc cân đối, đồng chất. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc lớn hơn 10, biết rằng có ít nhất một con đã ra mặt 5 chấm.

A. $\frac{6}{11}$. **B.** $\frac{4}{11}$. **C.** $\frac{5}{11}$. **D.** $\frac{3}{11}$.

Lời giải

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho hai biến cố A và B là hai biến cố độc lập, với $\mathrm{P}(A) = 0{,}7$, $\mathrm{P}(\overline{B}) = 0{,}6$.

a) $\mathrm{P}(A \mid B) = 0{,}6$. **b)** $\mathrm{P}(B \mid \overline{A}) = 0{,}4$. **c)** $\mathrm{P}(\overline{A} \mid B) = 0{,}3$. **d)** $\mathrm{P}(\overline{B} \mid \overline{A}) = 0{,}6$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho hai biến cố A và B, với $\mathrm{P}(\overline{A}) = 0{,}4$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}8$, $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}4$.

a) $\mathrm{P}(A) = 0{,}6$ và $\mathrm{P}(\overline{B}) = 0{,}2$.

b) $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{1}{2}$.

c) $\mathrm{P}(\overline{B} \mid A) = \dfrac{2}{3}$.

d) $\mathrm{P}(\overline{A} \cap B) = \dfrac{3}{5}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Một hộp chứa bốn tấm thẻ cùng loại được ghi số lần lượt từ 1 đến 4. Bạn Lan lấy ra một cách ngẫu nhiên một thẻ từ hộp, xem số trên thẻ rồi bỏ thẻ đó ra ngoài và lại lấy ra một cách ngẫu nhiên thêm một thẻ nữa.

a) Không gian mẫu của phép thử có 10 phần tử.

b) Số kết quả thuận lợi của biến cố "thẻ lấy ra lần thứ hai ghi số lẻ, biết rằng thẻ lấy ra lần thứ nhất ghi số lẻ" bằng 2.

c) Số kết quả thuận lợi của biến cố "thẻ lấy ra lần thứ hai ghi số lẻ, biết rằng thẻ lấy ra lần thứ nhất ghi số chẵn" bằng 4.

d) Số kết quả thuận lợi của biến cố "thẻ lấy ra lần thứ hai lớn hơn số 1, biết rằng thẻ lấy ra lần thứ nhất ghi số chẵn" bằng 5.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Lớp 10A có 35 học sinh, mỗi học sinh đều giỏi ít nhất một trong hai môn Toán hoặc Văn. Biết rằng có 23 học sinh giỏi môn Toán và 20 học sinh giỏi môn Văn. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của lớp 10A.

a) Xác suất để học sinh được chọn giỏi môn Toán biết rằng học sinh đó cũng giỏi môn Văn bằng $\dfrac{2}{5}$.

b) Xác suất để học sinh được chọn "giỏi môn Văn biết rằng học sinh đó cũng giỏi môn Toán" bằng $\dfrac{8}{23}$.

c) Xác suất để học sinh được chọn "không giỏi môn Toán biết rằng học sinh đó giỏi môn Văn" bằng $\frac{15}{23}$.

d) Xác suất để học sinh được chọn "không giỏi môn Văn biết rằng học sinh đó giỏi môn Toán" bằng $\dfrac{3}{5}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Một công ty truyền thông đấu thầu 2 dự án. Khả năng thắng thầu của dự án 1 là 0,5 và dự án 2 là 0,6. Khả năng thắng thầu của 2 dự án là 0,4. Gọi A, B lần lượt là biến cố thắng thầu dự án 1 và dự án 2.

a) A và B là hai biến độc lập.

b) Xác suất công ty thắng thầu đúng 1 dự án là 0,3.

c) Biết công ty thắng thầu dự án 1, xác suất công ty thắng thầu dự án 2 là 0,4.

d) Biết công ty không thắng thầu dự án 1, xác suất công ty thắng thầu dự án 0,8.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6. Lớp 12A có 30 học sinh, trong đó có 17 bạn nữ còn lại là nam. Có 3 bạn tên Hiền, trong đó có 1 bạn nữ và 2 bạn nam. Thầy giáo gọi ngẫu nhiên 1 bạn lên bảng.

a) Xác suất để gọi một bạn tên Hiền là $\dfrac{1}{10}$.

b) Xác suất để có tên Hiền, nhưng với điều kiện bạn đó giới tính nữ là $\dfrac{3}{17}$.

c) Xác suất để có tên Hiền, nhưng với điều kiện bạn đó giới tính nam là $\dfrac{2}{13}$.

d) Nếu thầy giáo gọi một bạn tên Hiền lên bảng thì xác suất để bạn đó mang giới tính nữ là $\dfrac{3}{17}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

. . . . . .
. . . . . .

Câu 7. Trong một cửa hàng có 18 bóng đèn loại I và 2 bóng đèn loại II, các bóng đèn có hình dạng và kích thước như nhau. Một một người mua hàng lấy ngẫu nhiên lần lượt 2 bóng đèn (lấy không hoàn lại) trong cửa hàng.

a) Xác suất để lần thứ nhất lấy được bóng đèn loại II là $\dfrac{9}{10}$.

b) Xác suất để lần thứ hai lấy được bóng đèn loại II, biết lần thứ nhất lấy được bóng đèn loại II, là $\dfrac{1}{19}$.

c) Xác suất để cả hai lần đều lấy được bóng đèn loại II là $\dfrac{9}{190}$.

d) Xác suất để ít nhất 1 lần lấy được bóng đèn loại I là $\dfrac{189}{190}$.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 8. Ông An hằng ngày đi làm bằng xe máy hoặc xe buýt. Nếu hôm nay ông đi làm bằng xe buýt thì xác suất để hôm sau ông đi làm bằng xe máy là 0,4. Nếu hôm nay ông đi làm bằng xe máy thì xác suất để hôm sau ông đi làm bằng xe buýt là 0,7. Xét một tuần mà thứ Hai ông An đi làm bằng xe buýt. Gọi A là biến cố: "Thứ Ba, ông An đi làm bằng xe máy" và B là biến cố: "Thứ Tư, ông An đi làm bằng xe máy".

a) Xác suất để thứ Ba, ông An đi làm bằng xe buýt là 0,7.

b) Xác suất để thứ Tư, ông An đi làm bằng xe máy nếu thứ Ba, ông An đi làm bằng xe máy là 0,3.

c) Xác suất để thứ Tư, ông An đi làm bằng xe máy nếu thứ Ba ông An đi làm bằng xe buýt 0,4.

d) Xác suất để thứ Tư trong tuần đó, ông An đi làm bằng xe máy nếu thứ Hai ông An đi làm bằng xe buýt là 0,36.

Lời giải

. . . . . .

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Gieo lần lượt hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Cho hai biến cố A: "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc lớn hơn 6" và B: "Con xúc xắc thứ nhất xuất hiện mặt 4 chấm". Tính số kết quả thuận lợi cho biến cố A khi biến cố B xảy ra.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Hộp thứ nhất chứa 3 viên bi đen và 2 viên bi trắng. Hộp thứ hai chứa 4 viên bi đen và 5 viên bi trắng. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn An lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ hai, sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ hai. Gọi A: "Viên bi lấy ra lần thứ nhất là bi đen" và B: "Viên bi lấy ra lần thứ hai là bi trắng".

Biết rằng biến cố A xảy ra, tính xác suất của biến cố

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Một bình đựng 50 viên bi kích thước, chất liệu như nhau, trong đó có 30 viên bi xanh và 20 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên ra một viên bi, rồi lại lấy ngẫu nhiên ra một viên bi nữa. Tính xác suất để lấy được một viên bi xanh ở lần thứ nhất và một viên bi trắng ở lần thứ hai. Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Có 40 phiếu thi Toán 12, mỗi phiếu chỉ có một câu hỏi, trong đó có 13 câu hỏi lý thuyết (gồm 5 câu hỏi khó và 8 câu hỏi dễ) và 27 câu hỏi bài tập (gồm 12 câu hỏi khó và 15 câu hỏi dễ). Lấy ngẫu nhiên ra một phiếu. Tìm xác suất rút được câu hỏi lý thuyết khó. Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Gieo hai con xúc xắc cân đối, đồng chất. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc lớn hơn hoặc bằng 10, nếu biết rằng có ít nhất một con đã ra mặt 5 chấm. Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 6. Một gia đình có 2 đứa trẻ. Biết rằng có ít nhất 1 đứa trẻ là con gái. Hỏi xác suất 2 đứa trẻ đều là con gái là bao nhiêu? Cho biết xác suất để một đứa trẻ là trai hoặc gái là bằng nhau (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 7. Hộp thứ nhất có 4 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ. Hộp thứ hai có 5 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai. Sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ hai. Tính xác suất của biến cố C: "Hai viên bi lấy ra khác màu".

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Câu 8. Trong một túi có một số viên kẹo cùng loại, chỉ khác màu, trong đó có 6 viên kẹo màu cam, còn lại là kẹo màu vàng. Hà lấy ngẫu nhiên 1 viên kẹo từ trong túi, không trả lại. Sau đó Hà lại lấy ngẫu nhiên thêm 1 viên kẹo khác từ trong túi. Biết rằng xác

suất Hà lấy được cả hai viên kẹo màu cam là $\dfrac{1}{3}$. Hỏi ban đầu trong túi có bao nhiêu viên kẹo?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 9. Một người săn thỏ trong rừng, khả năng anh ta bắn trúng thỏ trong mỗi lần bắn tỷ lệ nghịch với khoảng cách bắn. Anh ta bắn lần đầu ở khoảng cách 20 m với xác suất trúng thỏ là $0,5$; nếu bị trượt anh ta bắn viên thứ hai ở khoảng cách 30 m; nếu lại trượt anh ta bắn viên thứ ba ở khoảng cách 40 m. Tính xác suất để người thợ săn bắn được thỏ

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI 19. CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN VÀ CÔNG THỨC BAYES

A. LÝ THUYẾT

1. Công thức xác suất toàn phần

Định nghĩa 1. Cho hai biến cố A và B với $0 < \mathrm{P}(B) < 1$, ta có:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}\left(A \cap B\right) + \mathrm{P}\left(A \cap \overline{B}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(B\right) \cdot \mathrm{P}\left(A|B\right) + \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) \cdot \mathrm{P}\left(A|\overline{B}\right).\end{aligned}$$

2. Công thức Bayes

Định nghĩa 2. Cho hai biến cố A và B với $\mathrm{P}\left(A\right) > 0, \mathrm{P}\left(B\right) > 0$, ta có:

$$\mathrm{P}\left(B|A\right) = \frac{\mathrm{P}\left(B\right) \cdot \mathrm{P}\left(A|B\right)}{\mathrm{P}\left(A\right)}.$$

Nhận xét. *Cho hai biến cố A và B với $\mathrm{P}\left(A\right) > 0, \mathrm{P}\left(B\right) > 0$, do*

$$\mathrm{P}\left(A\right) = \mathrm{P}\left(B\right) \cdot \mathrm{P}\left(A|B\right) + \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) \cdot \mathrm{P}\left(A|\overline{B}\right).$$

Nên công thức Bayes còn có dạng:

$$\mathrm{P}\left(B|A\right) = \frac{\mathrm{P}\left(B\right) \cdot \mathrm{P}\left(A|B\right)}{\mathrm{P}\left(B\right) \cdot \mathrm{P}\left(A|B\right) + \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) \cdot \mathrm{P}\left(A|\overline{B}\right)}.$$

Kiến thức cần nhớ

1) Công thức xác suất toàn phần: $\mathrm{P}\left(A\right) = \mathrm{P}\left(B\right) \cdot \mathrm{P}\left(A|B\right) + \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) \cdot \mathrm{P}\left(A|\overline{B}\right)$.

2) Công thức Bayes: $\mathrm{P}\left(B|A\right) = \dfrac{\mathrm{P}\left(B\right) \cdot \mathrm{P}\left(A|B\right)}{\mathrm{P}\left(A\right)}$

hoặc $\mathrm{P}\left(B|A\right) = \dfrac{\mathrm{P}\left(B\right) \cdot \mathrm{P}\left(A|B\right)}{\mathrm{P}\left(B\right) \cdot \mathrm{P}\left(A|B\right) + \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) \cdot \mathrm{P}\left(A|\overline{B}\right)}$.

⚠ *Chú ý 1: Các công thức cần nhớ*

- $\mathrm{P}\left(A\right) + \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 1$.
- $\mathrm{P}\left(A|B\cdot\right) + \mathrm{P}\left(\overline{A}|B\cdot\right) = 1$
- $\mathrm{P}\left(A \cap B\right) + \mathrm{P}\left(A \cap \overline{B}\right) = \mathrm{P}\left(A\right)$
- $\mathrm{P}\left(A \cap B\right) + \mathrm{P}\left(\overline{A} \cap B\right) = \mathrm{P}\left(B\right)$

⚠ *Chú ý 2: Công thức xác suất toàn phần và Công thức Bayes được áp dụng trong các trường hợp sự việc bài toán đề cập đến gồm* ***nhiều giai đoạn*** *có sự* ***liên đới nhau*** *trong quá trình xảy ra.*

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 19.1. Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes.

Phương pháp

- **Công thức xác suất toàn phần**
  Cho hai biến cố A và B với $0 < \mathrm{P}(B) < 1$. Khi đó:
  $$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}\left(\overline{B}\right)\mathrm{P}\left(A|\overline{B}\right)$$

  ⚠ *Chú ý: Công thức xác suất toàn phần cũng đúng với biến cố B bất kì.*

- **Công thức Bayes**
  Giả sử A và B là hai biến cố ngẫu nhiên thoả mãn $\mathrm{P}(A) > 0$ và $0 < \mathrm{P}(B) < 1$. Khi đó
  $$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(A|B)}{\mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}\left(\overline{B}\right)\mathrm{P}\left(A|\overline{B}\right)}.$$

  ⚠ *Chú ý: Với $P(A) > 0$, $P(B|A) = \dfrac{P(B)\,P(A|B)}{P(A)}$ cũng được gọi là công thức Bayes.*

Ví dụ 1. Cho hai biến cố A và B với $0 < \mathrm{P}(A) < 1$.

a) Viết công thức xác suất toàn phần tính $\mathrm{P}(B)$.

b) Với $\mathrm{P}(A) = 0{,}1$; $\mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 0{,}9$; $\mathrm{P}(B|A) = 0{,}3$; $\mathrm{P}\left(B|\overline{A}\right) = 0{,}6$. Tính $\mathrm{P}(B)$?

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2. Cho hai biến cố A và B với $\mathrm{P}(B) = 0{,}2$; $\mathrm{P}(A|B) = 0{,}5$; $\mathrm{P}\left(A|\overline{B}\right) = 0{,}4$. Tính $\mathrm{P}(B|A)$?

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 3. Cho hai biến cố A và B, với $\mathrm{P}(B) = 0{,}8$, $\mathrm{P}(A|B) = 0{,}7$, $\mathrm{P}\left(A|\overline{B}\right) = 0{,}45$.

a) Tính $\mathrm{P}(A)$.

b) Tính $\mathrm{P}(B|A)$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Dạng 19.2. Các bài toán liên quan đến công thức xác suất toàn phần

Phương pháp

- Công thức xác suất toàn phần

Cho hai biến cố A và B với $0 < \mathrm{P}(B) < 1$. Khi đó

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}\left(\overline{B}\right)\mathrm{P}\left(A|\overline{B}\right)$$

⚠ *Chú ý: Công thức xác suất toàn phần cũng đúng với biến cố B bất kì.*

Ví dụ 1. Người ta khảo sát khả năng chơi nhạc cụ của một nhóm học sinh nam nữ tại một trường phổ thông H. Xét phép thử chọn ngẫu nhiên 1 học sinh trong nhóm đó. gọi A là biến cố "học sinh được chọn biết chơi ít nhất một nhạc cụ", và B là biến cố "học sinh được chọn là nam". Biết xác xuất học sinh được chọn là nam bằng 0,6; xác suất học sinh được chọn là nam và biết chơi ít nhất một nhạc cụ là 0,3; xác suất học sinh được chọn là nữ và biết chơi ít nhất một nhạc cụ là 0,15. Tính $\mathrm{P}(A)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Trong một trường học, tỉ lệ học sinh nữ là 53%. Tỉ lệ học sinh nữ và tỉ lệ học sinh nam tham gia câu lạc bộ nghệ thuật X lần lượt là 21% và 17%. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh của trường. Tính xác suất học sinh đó có tham gia câu lạc bộ nghệ thuật X.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 19.3. Các bài toán liên quan đến công thức Bayes

Phương pháp

- Công thức Bayes
  Giả sử A và B là hai biến cố ngẫu nhiên thoả mãn $\mathrm{P}(A) > 0$ và $0 < \mathrm{P}(B) < 1$.
  Khi đó
$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(A|B)}{\mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}\left(\overline{B}\right)\mathrm{P}\left(A|\overline{B}\right)}.$$

⚠ *Chú ý: Với* $\mathrm{P}(A) > 0$, $\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(A|B)}{\mathrm{P}(A)}$ *cũng được gọi là công thức Bayes.*

Ví dụ 1. Một hộp có 4 viên bi, mỗi viên có thể là màu đen hoặc trắng. Lấy ngẫu nhiên ra 2 viên bi. Tính xác suất để lấy được 2 bi trắng.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2. Một căn bệnh có 1% dân số mắc phải. Một phương pháp chuẩn đoán được phát triển có tỷ lệ chính xác là 99%. Với những người bị bệnh, phương pháp này sẽ đưa ra kết quả dương tính 99% số trường hợp. Với người không mắc bệnh, phương pháp này cũng chuẩn đoán đúng 99 trong 100 trường hợp. Nếu một người kiểm tra và kết quả là dương tính (bị bệnh), xác suất để người đó thực sự bị bệnh là bao nhiêu?

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....

Ví dụ 3. Giả sử tỉ lệ người dân của tỉnh X nghiện thuốc lá là 20%; tỉ lệ người bị bệnh phổi trong số người nghiện thuốc lá là 70%, trong số người không nghiện thuốc lá là 15%.

a) Hỏi khi ta gặp ngẫu nhiên một người dân của tỉnh X thì khả năng mà đó bị bệnh phổi là bao nhiêu %?

b) Tính xác suất mà người đó là nghiện huốc lá khi biết bị bệnh phổi.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 4. Một trạm chỉ phát hai tín hiệu A và B với xác suất tương ứng 0,85 và 0,15. Do có nhiễu trên đường truyền nên $\frac{1}{7}$ tín hiệu A bị méo và thu được như tín hiệu B còn $\frac{1}{8}$ tín hiệu B bị méo và thu được như A.

a) Xác suất thu được tín hiệu A là bao nhiêu?

b) Giả sử đã thu được tín hiệu A. Tìm xác suất thu được đúng tín hiệu lúc phát.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

C. LUYỆN TẬP

PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Cho A, B là các biến cố của một phép thử T. Biết rằng $0 < P(B) < 1$, xác suất của biến cố A được tính theo công thức nào sau đây?

A. $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}(\overline{B}) \cdot \mathrm{P}(A|\overline{B})$.

B. $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(B|A) + \mathrm{P}(\overline{B}) \cdot \mathrm{P}(B|\overline{A})$.

C. $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}(\overline{A}) \cdot \mathrm{P}(A|\overline{B})$.

D. $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B|A) + \mathrm{P}(\overline{A}) \cdot \mathrm{P}(B|\overline{A})$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho A, B là các biến cố của một phép thử T. Biết rằng $0 < \mathrm{P}(A) < 1$, xác suất của biến cố B được tính theo công thức nào sau đây?

A. $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}(\overline{B}) \cdot \mathrm{P}(A|\overline{B})$.

B. $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(B|A) + \mathrm{P}(\overline{B}) \cdot \mathrm{P}(B|\overline{A})$.

C. $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}(\overline{A}) \cdot \mathrm{P}(A|\overline{B})$.

D. $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B|A) + \mathrm{P}(\overline{A}) \cdot \mathrm{P}(B|\overline{A})$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Cho A, B là các biến cố của một phép thử T. Biết rằng $\mathrm{P}(B) > 0$, xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra được tính theo công thức nào sau đây?

A. $\mathrm{P}(A|B) = \dfrac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}$.

B. $\mathrm{P}(A|B) = \dfrac{\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(B)}$.

C. $\mathrm{P}(A|B) = \dfrac{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(A)}$.

D. $\mathrm{P}(A|B) = \dfrac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 4. Cho A, B là các biến cố của một phép thử T. Biết rằng $\mathrm{P}(A) > 0$ và $0 < \mathrm{P}(B) < 1$. Xác suất của biến cố B với điều kiện biến cố A đã xảy ra được tính theo công thức nào sau đây?

A. $\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(A|B)}{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}(\overline{B}) \cdot \mathrm{P}(A|\overline{B})}$.

B. $\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A|B)}{\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B|A) + \mathrm{P}(\overline{A}) \cdot \mathrm{P}(B|\overline{A})}$.

C. $\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(\cdot A|B)}{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}(\overline{B}) \cdot \mathrm{P}(A|\overline{B})}$.

D. $\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(A|B)}{\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B|A) + \mathrm{P}(B|\overline{A})}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....

Câu 5. Nếu hai biến cố A, B thỏa mãn $\mathrm{P}(A) = 0{,}3$; $\mathrm{P}(B) = 0{,}6$ và $\mathrm{P}(A|B) = 0{,}4$ thì $\mathrm{P}(B|A)$ bằng

A. 0,5. **B.** 0,6. **C.** 0,8. **D.** 0,2.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 6. Cho hai biến cố A, B thoả mãn $\mathrm{P}(A) = 0{,}4$; $\mathrm{P}(B) = 0{,}3$; $\mathrm{P}(A|B) = 0{,}25$. Khi đó, $\mathrm{P}(B|A)$ bằng

A. 0,1875. **B.** 0,48. **C.** 0,333. **D.** 0,95.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 7. Cho hai biến cố A, B với $\mathrm{P}(B) = 0{,}6$; $\mathrm{P}(A|B) = 0{,}7$ và $\mathrm{P}(A|\overline{B}) = 0{,}4$. Khi đó, $\mathrm{P}(A)$ bằng

A. 0,7. **B.** 0,4. **C.** 0,58. **D.** 0,52.

Lời giải

.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 8. Một cuộc thi khoa học có 36 bộ câu hỏi, trong đó có 20 bộ câu hỏi về chủ đề tự nhiên và 16 bộ câu hỏi về chủ đề xã hội. Bạn An lấy ngẫu nhiên 1 bộ câu hỏi (lấy không hoàn lại), sau đó bạn Bình lấy ngẫu nhiên 1 bộ câu hỏi. Xác suất bạn Bình lấy được bộ câu hỏi về chủ đề xã hội bằng

A. $\frac{15}{35}$. **B.** $\frac{16}{35}$. **C.** $\frac{4}{9}$. **D.** $\frac{5}{9}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 9. Trong một đợt kiểm tra sức khoẻ, có một loại bệnh X mà tỉ lệ người mắc bệnh là 0,2% và một loại xét nghiệm Y mà ai mắc bệnh X khi xét nghiệm Y cũng có phản ứng dương tính. Tuy nhiên, có 6% những người không bị bệnh X lại có phản ứng dương tính với xét nghiệm Y. Chọn ngẫu nhiên 1 người trong đợt kiểm tra sức khoẻ đó. Giả sử người đó có phản ứng dương tính với xét nghiệm Y. Xác suất người đó bị mắc bệnh X là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

A. 0,3. **B.** 0,03. **C.** 0,04. **D.** 0,4.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....

Câu 10. Một cửa hàng có hai loại bóng đèn Led, trong đó có 65% bóng đèn Led là màu trắng và 35% bóng đèn Led là màu xanh, các bóng đèn có kích thước như nhau. Các bóng đèn Led màu trắng có tỉ lệ hỏng là 2% và các bóng đèn Led màu xanh có tỉ lệ hỏng là 3%. Một khách hàng chọn mua ngẫu nhiên 1 bóng đèn Led từ cửa hàng. Xác suất để khách hàng chọn được bóng đèn Led không hỏng bằng

A. 0,7956. **B.** 0,7965. **C.** 0,9756. **D.** 0,9765.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 11. Một hộp bút bi Thiên Long có 15 chiếc bút trong đó có 9 chiếc bút mới. Người ta lấy ngẫu nhiên 1 chiếc bút để sử dụng sau đó trả lại vào hộp. Lần thứ hai lấy ngẫu nhiên 2 chiếc bút, tính xác suất cả hai chiếc bút lấy ra đều là chiếc mới.

A. $\frac{52}{175}$. **B.** $\frac{52}{177}$. **C.** $\frac{53}{175}$. **D.** $\frac{25}{175}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....

Câu 12. Một công ty du lịch bố trí chỗ cho đoàn khách tại ba khách sạn A, B, C theo tỉ lệ 20%; 50%; 30%. Tỉ lệ hỏng điều hòa ở ba khách sạn lần lượt là 5%; 4%; 8%. Tính xác suất để một khách nghỉ ở phòng điều hòa bị hỏng.

A. $\frac{2}{500}$. **B.** $\frac{27}{500}$. **C.** $\frac{7}{500}$. **D.** $\frac{23}{500}$.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 13. Có 10 sinh viên thi Xác suất – Thống kê, trong đó có 2 sinh viên giỏi (trả lời 100% các câu hỏi), 3 sinh viên khá (trả lời 80% các câu hỏi), 5 sinh viên trung bình (trả lời 50% các câu hỏi). Gọi ngẫu nhiên một sinh viên vào thi và phát đề có 4 câu hỏi (được lấy ngẫu nhiên từ 20 câu). Thấy sinh viên này trả lời được cả 4 câu, tính xác suất để sinh viên đó là sinh viên khá? Xác suất gần bằng số nào sau đây

A. 0,336. **B.** 0,3344. **C.** 0,337. **D.** 0,335.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 14. Hộp thứ nhất có 3 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ. Hộp thứ hai có 3 viên vì xanh và 7 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kịch thức và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên ra một viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai. Sau đó lại lấy ngẫu nhiên đồng thời hai viên

từ hộp thứ hai, biết rằng hai bi lấy ra từ hộp thứ hai là bi màu đỏ, tính xác suất viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất cũng là bi màu đỏ.

A. $\frac{8}{11}$. **B.** $\frac{7}{15}$. **C.** $\frac{8}{15}$. **D.** $\frac{7}{13}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 15. Một căn bệnh có 1% dân số mắc phải. Một phương pháp chẩn đoán được phát triển có tỷ lệ chính xác là 99%. Với những người bị bệnh, phương pháp này sẽ đưa ra kết quả dương tính 99% số trường hợp. Với người không mắc bệnh, phương pháp này cũng chẩn đoán đúng 99 trong 100 trường hợp. Nếu một người kiểm tra và kết quả là dương tính (bị bệnh), xác suất để người đó thực sự bị bệnh là bao nhiêu?

A. 0,4. **B.** 0,35. **C.** 0,5. **D.** 0,65.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 16. Trong một trường học, tỉ lệ học sinh nữ là 52%. Tỉ lệ học sinh nữ và tỉ lệ học sinh nam tham gia câu lạc bộ nghệ thuật lần lượt là 18% và 15%. Gặp ngẫu nhiên một học sinh của trường. Biết rằng học sinh có tham gia câu lạc bộ nghệ thuật. Tính xác suất học sinh đó là nam.

A. $\frac{207}{1230}$. **B.** $\frac{207}{1250}$. **C.** $\frac{10}{27}$. **D.** $\frac{10}{23}$.

Lời giải

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Có hai hộp đựng các viên bi cùng kích thước và khối lượng. Hộp thứ nhất chứa 5 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh, hộp thứ hai chứa 6 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai, sau đó lấy ra ngẫu nhiên một viên bi từ hộp thứ hai. Gọi A là biến cố "Viên bi được lấy ra từ hộp thứ hai là bi đỏ", B là biến cố "Viên bi được lấy ra từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai là bi đỏ" Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Xác suất của biến cố B là $\mathrm{P}(B) = 0{,}5$.

b) Giả sử viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai là bị đỏ thì khi đó $\mathrm{P}(A|B) = \dfrac{7}{11}$.

c) Gọi $\overline{B}$: "Viên bi được lấy ra từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai là bi xanh" thì $\mathrm{P}\left(A|\overline{B}\right) = \dfrac{7}{11}$.

d) Xác suất để viên bi được lấy ra từ hộp thứ hai là viên bi đỏ là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{13}{22}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Một chiếc hộp có 80 viên bi, trong đó có 50 viên bi màu đỏ và 30 viên bi màu vàng; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Sau khi kiểm tra, người ta thấy có 60% số viên bi màu đỏ đánh số và 50% số viên bi màu vàng có đánh số, những viên bi còn lại không đánh số.

a) Số viên bi màu đỏ có đánh số là 30.

b) Số viên bi màu vàng không đánh số là 15.

c) Lấy ra ngẫu nhiên một viên bi trong hộp. Xác suất để viên bi được lấy ra có đánh số là $\dfrac{3}{5}$.

d) Lấy ra ngẫu nhiên một viên bi trong hộp. Xác suất để viên bi được lấy ra không có đánh số $\frac{7}{16}$.

Lời giải

Câu 3. Cho 2 lô sản phẩm. Lô I có 20 sản phẩm, trong đó có 15 sản phẩm tốt và 5 sản phẩm lỗi. Lô II có 20 sản phẩm, trong đó có 10 sản phẩm tốt và 10 sản phẩm lỗi. Lấy ngẫu nhiên 1 lô và từ lô này lấy ngẫu nhiên ra 1 sản phẩm.

a) Xác suất để sản phẩm lấy ra là sản phẩm tốt bằng $\frac{5}{8}$.

b) Xác suất để sản phẩm lấy ra là sản phẩm lỗi bằng $\frac{3}{8}$.

c) Giả sử sản phẩm lấy ra là sản phẩm tốt. Xác suất đế sản phẩm đó của lô thứ II bằng $\frac{2}{5}$.

d) Giả sử sản phẩm lấy ra là phế phẩm. Xác suất đế sản phẩm đó của lô thứ I bằng $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Câu 4. Một thùng có các hộp loại I và loại II, trong đó có 2 hộp loại I, mỗi hộp có 13 sản phẩm tốt và 2 phế phẩm và có 3 hộp loại II, mỗi hộp có 6 sản phẩm tốt và 4 phế phẩm.

a) Số cách chọn được 2 sản phẩm tốt trong hộp loại I là 78 cách.

b) Xác suất chọn được 2 phế phẩm trong hộp loại II là $\frac{12}{15}$.

c) Chọn ngẫu nhiên trong thùng một hộp và từ hộp đó lấy ra hai sản phẩm để kiểm tra, xác suất để hai sản phẩm này đều tốt là $\frac{87}{175}$.

d) Chọn ngẫu nhiên trong thùng một hộp và từ hộp đó lấy ra hai sản phẩm để kiểm tra, giả sử hai sản phẩm đó đều tốt thì xác suất để hai sản phẩm đó thuộc hộp loại I là $\frac{52}{87}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Giả sử 5% email của bạn nhận được là email rác. Bạn sử dụng một hệ thống lọc email rác mà khả năng lọc đúng email rác của hệ thống này là 95% và có 10% những email không phải là email rác nhưng vẫn bị lọc.

a) Xác suất email nhận được một email rác là 0,05.

b) Xác suất bị lọc của email rác là 0,93.

c) Xác suất chọn một email trong số những email bị lọc bất kể có là rác hay không là 0,1425.

d) Xác suất chọn một email trong số những email bị lọc thực sự là email rác là $\frac{7}{19}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

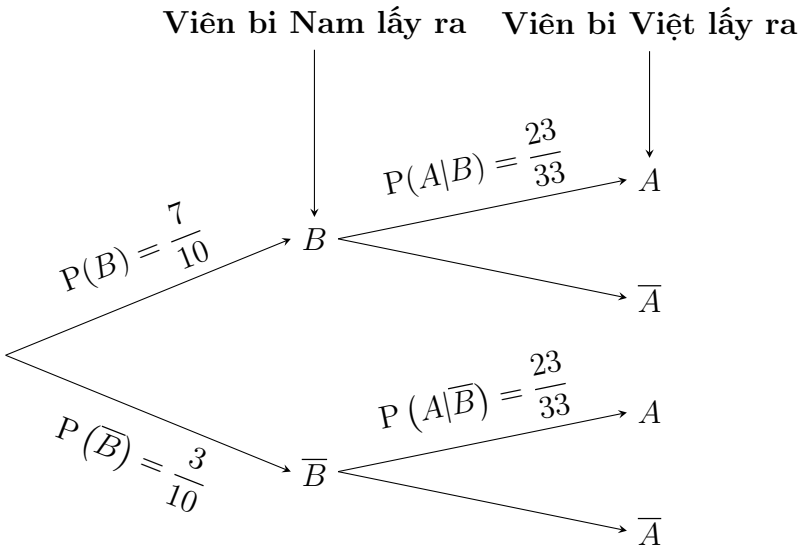
.....

.....

Câu 6. Một chiếc hộp có 100 viên bi, trong đó có 70 viên bi có tô màu và 30 viên bi không tô màu; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Bạn Nam lấy ra viên bi đầu tiên, sau đó bạn Việt lấy ra viên bi thứ hai.

a) Xác suất để bạn Nam lấy ra viên bi có tô màu là $\frac{3}{7}$.

b) Sơ đồ cây biểu thị tình huống trên là



c) Xác suất để bạn Việt lấy ra viên bi có tô màu là $\frac{191}{330}$.

d) Xác suất để bạn Việt lấy ra viên bi không có tô màu là $\frac{139}{330}$.

Lời giải

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Cho hai biến cố A và B với $\mathrm{P}(A) > 0$, $\mathrm{P}(B) > 0$. Cho các khẳng định sau:

(1) $\mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}\left(A \cap \overline{B}\right) = \mathrm{P}(A)$.

(2) $\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A|B)}{\mathrm{P}(A)}$.

(3) $\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A|B)}{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) \cdot \mathrm{P}\left(A|\overline{B}\right)}$.

(4) $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}\left(A \cap \overline{B}\right) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) \cdot \mathrm{P}\left(A|\overline{B}\right)$.

(5) Cho hai biến cố A và B, với $\mathrm{P}(B) = 0{,}8$, $\mathrm{P}(A|B) = 0{,}7$, $\mathrm{P}\left(A|\overline{B}\right) = 0{,}45$. Khi đó $\mathrm{P}(A) = 0{,}5$.

Trong các khẳng định trên có bao nhiêu khẳng định đúng?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Giả sử tỉ lệ người dân của một tỉnh nghiện thuốc lá là 20%; tỉ lệ người bị bệnh phổi trong số người nghiện thuốc lá là 70%, trong số người không nghiện thuốc lá là 15%. Hỏi khi ta gặp ngẫu nhiên một người dân của tỉnh đó thì khả năng mà người đó bị bệnh phổi là bao nhiêu (kết quả là tròn đến hàng phần trăm)?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....

Câu 3. Một chiếc hộp có 80 viên bi, trong đó có 50 viên bi màu đỏ và 30 viên bi màu vàng; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Sau khi kiểm tra, người ta thấy có 60% số viên bi màu đỏ đánh số và 50% số viên bi màu vàng có đánh số, những viên bi còn lại không đánh số. Lấy ra ngẫu nhiên một viên bi trong hộp. Xác suất để viên bi được lấy ra có đánh số là bao nhiêu (kết quả là tròn đến hàng phần trăm)?

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 4. Trong một kì thi tốt nghiệp trung học phổ thông, một tỉnh X có 80% học sinh lựa chọn tổ hợp A00 (gồm các môn Toán, Vật lí, Hoá học). Biết rằng, nếu một học sinh chọn tổ hợp A00 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,6; còn nếu một học sinh không chọn tổ hợp A00 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,7. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của tỉnh X đã tốt nghiệp trung học phổ thông trong kì thi trên. Biết rằng học sinh này đã đỗ đại học. Tính xác suất để học sinh đó chọn tổ hợp A00 (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2).

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 5. Có hai chuồng thỏ. Chuồng I có 5 con thỏ đen và 10 con thỏ trắng. Chuồng II có 7 con thỏ đen và 3 con thỏ trắng. Trước tiên, từ chuồng II lấy ra ngẫu nhiên 1 con thỏ rồi cho vào chuồng I. Sau đó, từ chuồng I lấy ra ngẫu nhiên 1 con thỏ. Tính xác suất để con thỏ được lấy ra là con thỏ trắng (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2).

Lời giải