

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ TĨNH**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 1 trang, gồm 3 bài)

**KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN
DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM HỌC 2025 - 2026**

Môn thi: **TOÁN**

Thời gian làm bài: **180 phút**

Ngày thi thứ nhất: **10/9/2025**

Bài 1. (6 điểm)

Cho hai đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ và $Q(x) = b_n x^n - b_{n-1} x^{n-1} - \dots - b_1 x - b_0$ có hệ số thực thỏa mãn $0 < b_n < |a_n|$ và $b_i > |a_i|$ với mọi $i \in \{0; 1; \dots; n-1\}$.

- a) Chứng minh rằng $Q(x)$ có đúng một nghiệm dương duy nhất.
- b) Gọi x_0 là nghiệm dương duy nhất của $Q(x)$. Chứng minh rằng các nghiệm của $P(x)$ nếu có thì đều thuộc khoảng $(-x_0; x_0)$.

Bài 2. (7 điểm)

- a) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương x, y thỏa mãn $x^2 - 3xy + y^2 = 3$.
- b) Tìm tất cả các số nguyên dương m sao cho tồn tại vô hạn số nguyên dương k thỏa mãn phương trình $x^2 - kxy + y^2 = m$ có ít nhất một nghiệm nguyên (x, y) với $x > 0, y > 0$.

Bài 3. (7 điểm)

Cho tam giác ABC , đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F .

- a) Gọi X, Y, Z lần lượt là trung điểm của AI, BI, CI . Chứng minh rằng DX, EY, FZ đồng quy.
- b) Gọi L là giao điểm của AD với EF , lấy điểm P thuộc BC sao cho $\frac{PB}{PC} = \frac{LF}{LE}$, M là trung điểm BC . Trên đường trung trực của MP lấy K sao cho MK song song với AI . Chứng minh rằng đường tròn tâm K đi qua M và P tiếp xúc với đường tròn (BIC) .

-----Hết-----

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**HÀ TĨNH****ĐỀ THI CHÍNH THỨC**Đề thi có **1 trang** - gồm **3 bài****KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN****DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT****NĂM HỌC 2025 - 2026**Môn thi: **TOÁN**Thời gian làm bài: **180 phút**Ngày thi thứ hai: **11/09/2025****Bài 4. (6 điểm)**

Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC , D là điểm bất kỳ nằm trên đoạn thẳng CM . Lấy E, F lần lượt là hình chiếu của B, C trên đường thẳng AD . Gọi G là giao điểm của đường thẳng qua E song song với AB và đường thẳng qua F song song với AC , K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác GEF .

- a) Chứng minh rằng $\widehat{OKD} = 90^\circ$.
- b) Gọi N là trung điểm của OA . Chứng minh rằng $NM = NK$.

Bài 5. (7 điểm)

An và Bình chơi trò chơi trên bảng 8×8 . Hai bạn thay phiên nhau đi. Mỗi bước, An đánh dấu một ô trống nào đó (chưa được đánh dấu cũng như không bị phủ bởi các quân domino). Còn mỗi bước, Bình được phép chọn 2 ô kề nhau và phủ chúng bởi một quân domino sao cho hai ô này đều chưa bị phủ bởi domino, và tổng số ô bị đánh dấu mà quân domino đó phủ lên là 0 hoặc 2 (tức là, hoặc cả hai ô đều đã bị đánh dấu, hoặc cả hai ô đều chưa bị đánh dấu). Người nào không thể đi được nữa thì thua. Hỏi ai có chiến lược thắng cuộc nếu:

- a) An là người đi trước?
- b) Bình là người đi trước?

* Một domino là một hình chữ nhật gồm hai ô kề nhau.

Bài 6. (7 điểm)

Với số nguyên dương n , kí hiệu $\tau(n)$ là số các ước số nguyên dương của n (kể cả 1 và n).

- a) Chứng minh rằng phương trình $\tau(n) = 2025$ có vô số nghiệm.
- b) Hãy tìm tất cả số nguyên dương k sao cho $\tau(n^2) = k\tau(n)$, với n nguyên dương nào đó.

----- **HẾT** -----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

Bài toán 0.1. (LMF - Hà Tĩnh TST 2025 - P1)

Cho hai đa thức

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ và $Q(x) = b_n x^n - b_{n-1} x^{n-1} - \dots - b_1 x - b_0$
có hệ số thực thoả mãn $0 < b_n < |a_n|$, $b_i > |a_i|$ với mọi $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

- ① Chứng minh rằng $Q(x)$ có đúng một nghiệm dương duy nhất.
- ② Gọi x_0 là nghiệm dương duy nhất của $Q(x)$. Chứng minh rằng các nghiệm của $P(x)$ nếu có thì đều thuộc khoảng $(-x_0; x_0)$.

Lời giải.

- ① Đặt $R(x) = x^n Q\left(\frac{1}{x}\right) = -b_0 x^n - b_1 x^{n-1} - \dots + b_n$.

Ta có $R(0) = b_n > 0$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = -\infty$ nên theo định lý giá trị trung gian tồn tại nghiệm dương của đa thức $R(x)$.

Để ý $R'(x) = -nb_0 x^{n-1} - (n-1)b_1 x^{n-2} - \dots - b_{n-1} < 0$ với mọi $x > 0$.

Vì vậy $R(x)$ nghịch biến trên $(0, +\infty)$.

Do đó tồn tại duy nhất nghiệm dương của $R(x)$, vì thế tồn tại duy nhất nghiệm dương của $Q(x)$.

- ② Gọi z là một nghiệm thực của $P(x)$. Giả sử $|z| > x_0$.

Khi đó $a_n z^n = -(a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z + a_0)$.

Hay $a_n = -\left(\frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right)$.

Hay $|a_n| = \left|\frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right|$.

Vì $|a_n| > b_n > 0$ và $b_i > |a_i|$ nên $b_n < \left|\frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right|$
 $< |a_{n-1}| \frac{1}{|z|} + |a_{n-2}| \frac{1}{|z|^2} + \dots + |a_0| \frac{1}{|z|^n} < b_{n-1} \frac{1}{x_0} + b_{n-2} \frac{1}{x_0^2} + \dots + b_0 \frac{1}{x_0^n}$.

Vì vậy $b_n x_0^n < b_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + b_0$ hay $Q(x_0) < 0$, vô lý.

Từ đó $|z| \leq x_0$ nên ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 0.2. (LMF - Hà Tĩnh TST 2025 - P2)

- ① Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương x, y thoả mãn
$$x^2 - 3xy + y^2 = 3.$$
- ② Tìm tất cả các số nguyên dương m sao cho tồn tại vô hạn số nguyên dương k thoả mãn phương trình $x^2 - kxy + y^2 = m$ có ít nhất một nghiệm nguyên (x, y) với $x > 0, y > 0$.

Lời giải.

1 Giả sử tồn tại x, y nguyên dương thỏa mãn yêu cầu.

Ta có $x^2 + y^2 = 3 + 3xy$ nên $x^2 + y^2$ chia hết cho 3 nên x, y chia hết cho 3.

Do đó $x^2 + y^2$ chia hết cho 9 nên $3 + 3xy$ chia hết cho 9.

Mà $3xy$ chia hết cho 9 nên mâu thuẫn xảy ra, do đó ta có điều phải chứng minh.

2 Cố định số nguyên dương m .

Lấy $k_0 > 10$ là số nguyên dương sao cho tồn tại nghiệm nguyên dương (x, y) .

Xét tập $L = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}^*, x^2 - k_0xy + y^2 = m\}$.

Khi đó $L \neq \emptyset$, do đó tồn tại bộ nghiệm (x_0, y_0) sao cho $x_0 + y_0$ nhỏ nhất và $x_0 \geq y_0$.

Xét phương trình $x^2 - k_0xy_0 + y_0^2 - m = 0$.

Phương trình này là phương trình bậc hai nên ta có thể giả sử phương trình có hai nghiệm là x_0, x_1 (có thể bằng nhau). Theo Viète ta có $x_0 + x_1 = k_0y_0$ và $x_0x_1 = y_0^2 - m$.

Nếu $y_0^2 > m$ thì x_1 cũng là số nguyên dương.

Vì (x_1, y_0) cũng là một bộ nghiệm của phương trình nên $x_1 + y_0 \geq x_0 + y_0$ hay $x_1 \geq x_0$.

Do đó $k_0y_0 = x_0 + x_1 \geq 2x_0$ nên $k_0 \geq \frac{2x_0}{y_0}$.

Lại có $k_0 = \frac{x_0}{y_0} + \frac{y_0}{x_0} - \frac{m}{x_0y_0} \leq \frac{k_0}{2} + 1 - m$ nên $0 < k_0 \leq 2 - 2m \leq 0$, vô lý.

Vì vậy $y_0^2 \leq m$.

Từ đây ta rút ra kết luận: Với $k > 10$ sao cho phương trình $x^2 - kxy + y^2 - m = 0$ có nghiệm nguyên dương (x_k, y_k) nhỏ nhất thỏa mãn $x_k \geq y_k$ thì $y_k \leq \sqrt{m}$.

Khi đó $1 \leq y_k \leq \sqrt{m}$ với mọi $k > 10$ thỏa mãn yêu cầu nên tồn tại dãy (k_n) tăng ngặt gồm vô số các số nguyên dương đôi một phân biệt thỏa mãn yêu cầu sao cho $y_{k_i} = y_{k_j} = Y$ với mọi $i \neq j$.

Ta có $x_{k_i}^2 - k_ix_{k_i}y_{k_i} + y_{k_i}^2 = m = x_{k_j}^2 - k_jx_{k_j}y_{k_j} + y_{k_j}^2$ với mọi $i \neq j$.

Vì $y_{k_i}^2 \leq m$ với mọi $i \geq 1$ nên $x_{k_i}^2 - k_ix_{k_i}y_{k_i} \geq 0$ hay $x_{k_i} \geq k_iy_{k_i}$ với mọi $i \geq 1$.

Nếu $y_{k_i}^2 < m$ thì $x_{k_i} > k_iy_{k_i}$ nên $x_{k_i} \geq k_iy_{k_i} + 1$.

Vì vậy $m = x_{k_i}^2 - k_ix_{k_i}y_{k_i} + y_{k_i}^2 = x_{k_i}(x_{k_i} - k_iy_{k_i}) + y_{k_i}^2 \geq (k_iy_{k_i} + 1) + y_{k_i}^2$ với mọi $i \geq 1$.

Do đó $k_i \leq \frac{m - y_{k_i}^2 - 1}{y_{k_i}} = \frac{m - Y^2 - 1}{Y}$ là hằng số với mọi $i \geq 1$.

Vì vậy dãy (k_n) là dãy số nguyên dương tăng ngặt bị chặn trên, vô lý.

Do đó $y_{k_i}^2 = m$ nên m là số chính phương.

Khi m là số chính phương, với mỗi số nguyên dương k , tồn tại bộ $(x, y) = (k\sqrt{m}, \sqrt{m})$ là nghiệm của phương trình. Vì vậy tất cả số nguyên dương m cần tìm là các số chính phương khác 0.

Bài toán 0.3. (LMF - Hà Tĩnh TST 2025 - P3)

Cho tam giác ABC , đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F .

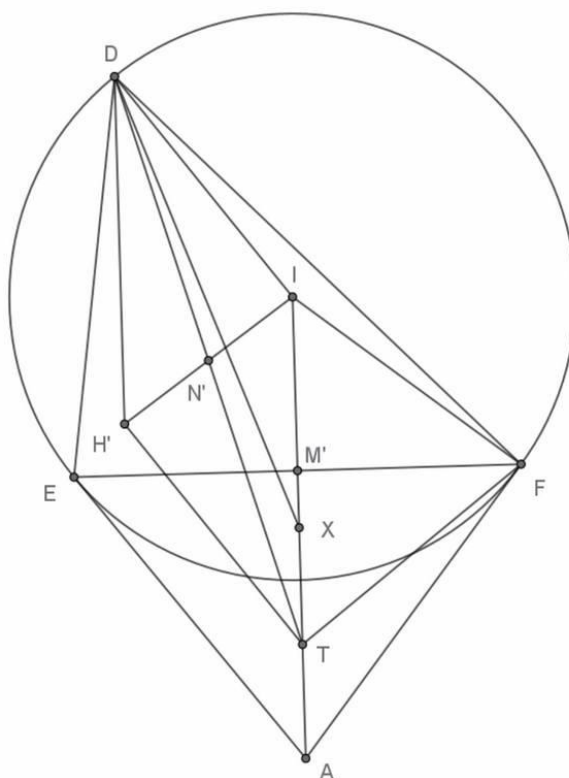
- ① Gọi X, Y, Z lần lượt là trung điểm của AI, BI, CI . Chứng minh rằng DX, EY, FZ đồng quy.
- ② Gọi L là giao điểm của AD với EF , lấy điểm P thuộc BC sao cho

$$\frac{PB}{PC} = \frac{LF}{LE}.$$

Gọi M là trung điểm BC . Trên đường trung trực của MP lấy K sao cho MK song song với AI . Chứng minh rằng đường tròn tâm K đi qua M và P tiếp xúc với đường tròn (BIC) .

Lời giải.

- ① Gọi H' là trực tâm của tam giác DEF và N' là trung điểm IH và DN' cắt AI tại X .



Ta có $DH'TI$ là hình bình hành nên $\angle H'DT = \angle DTI$.

Để ý hai tam giác cân ITF và IFX đồng dạng với nhau nên $ID^2 = IF^2 = IX \cdot IT$.

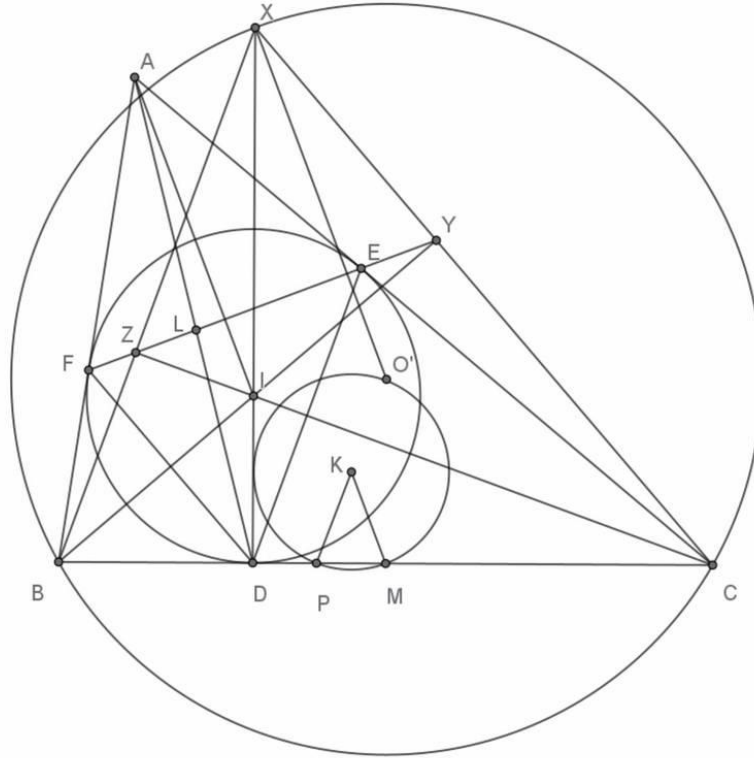
Vì vậy tam giác IDX đồng dạng tam giác ITD nên $\angle IDX = \angle ITD = \angle H'DT$.

Để ý $\angle EDH' = \angle IDF$ nên DN' và DX đẳng giác góc $\angle EDF$.

Tương tự ta được DX, EY, FZ đồng quy tại điểm liên hợp đẳng giác với N' trong tam giác DEF .

Điểm đồng quy trên còn là điểm Kosnita của tam giác DEF .

- ② Gọi Y, Z lần lượt là giao điểm của BI, CI với EF . Gọi X là giao điểm của BZ và CY .



Tam giác XBC đồng dạng với tam giác XYZ đồng dạng với tam giác DFE .

Do đó $\frac{XB}{XC} = \frac{DF}{DE} = \frac{LF^2}{LE^2} = \frac{PB^2}{PC^2}$ nên XP là đối trung của tam giác XBC .

Lại có MK vuông EF và XO' vuông EF nên $MK \parallel EF$.

Lúc này ta quy về bài toán sau:

Bài toán mới. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có đường cao BE, CF và trực tâm H . Gọi AD là đối trung của tam giác ABC ($D \in BC$). Trung trực của DM cắt đường thẳng qua M vuông góc EF tại K . Chứng minh rằng (K, KM) tiếp xúc (BHC) .

Chứng minh bài toán mới.

Gọi AM cắt EF tại V , T là trung điểm của đoạn thẳng AH , N là trung điểm của đoạn thẳng EF thì M, N, T và A, N, D thẳng hàng.

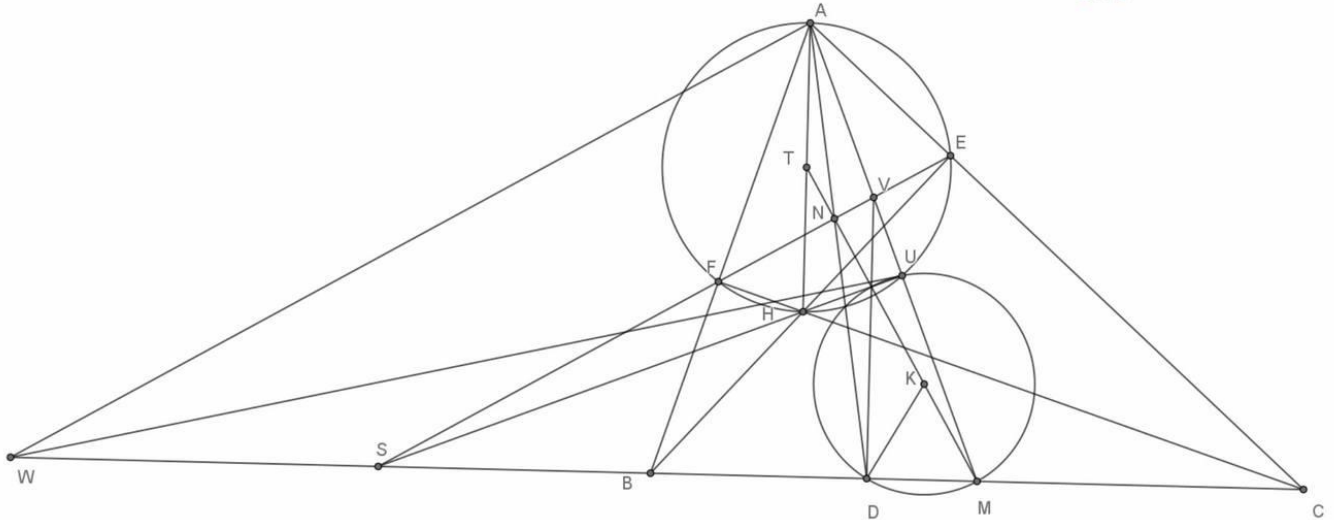
Ta có EF, HU, BC đồng quy tại S theo hàng điểm điều hòa.

Để ý $\triangle AEF \cup \{N, V\} \sim \triangle ABC \cup \{M, D\}$ nên tứ giác $NVMD$ nội tiếp.

Tứ giác $AEUF$ là tứ giác điều hòa nên $(AUV) = -1$, mà DV vuông góc DM nên DV, DM lần lượt là phân giác trong, phân giác ngoài góc $\angle ADM$.

Để ý $\angle VUS = \angle VDS = 90^\circ$ nên $VUDS$ là tứ giác nội tiếp.

Từ đó $\angle DUM = \angle VSM = 90^\circ - \angle NMD = \frac{1}{2} \angle DKM$ nên K là tâm của (DUM) .



Gọi W là giao tiếp tuyến tại A của (O) với BC .

Để ý T là trực tâm của tam giác AMW nên $WT \perp AU$ nên $WA = WU$.

Khi đó $WU^2 = WA^2 = WB.WC$ nên WU tiếp xúc $(BHUC)$.

Lại có AD, AM đẳng giác góc $\angle BAC$ nên (ADM) tiếp xúc (ABC) .

Do đó $WU^2 = WA^2 = WD.WM$ nên WU tiếp xúc (DUM) .

Vì vậy (K, KM) tiếp xúc với (BHC) và ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 0.4. (LMF - Hà Tĩnh TST 2025 - P4)

Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC , D là điểm bất kỳ nằm trên đoạn thẳng CM . Lấy E, F lần lượt là hình chiếu của B, C trên đường thẳng AD . Gọi G là giao điểm của đường thẳng qua E song song với AB và đường thẳng qua F song song với AC , K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác GEF .

- 1 Chứng minh rằng $\angle OKD = 90^\circ$.
- 2 Gọi N là trung điểm của OA . Chứng minh rằng $NM = NK$.

Lời giải.

- 1 Ta sẽ chứng minh tứ giác $OKDM$ nội tiếp.

Vẽ hình bình hành $BECH$, khi đó H nằm trên CF và M là trung điểm của đoạn thẳng EH .

Lại có tam giác EFH vuông tại F nên $ME = MF = MH$.

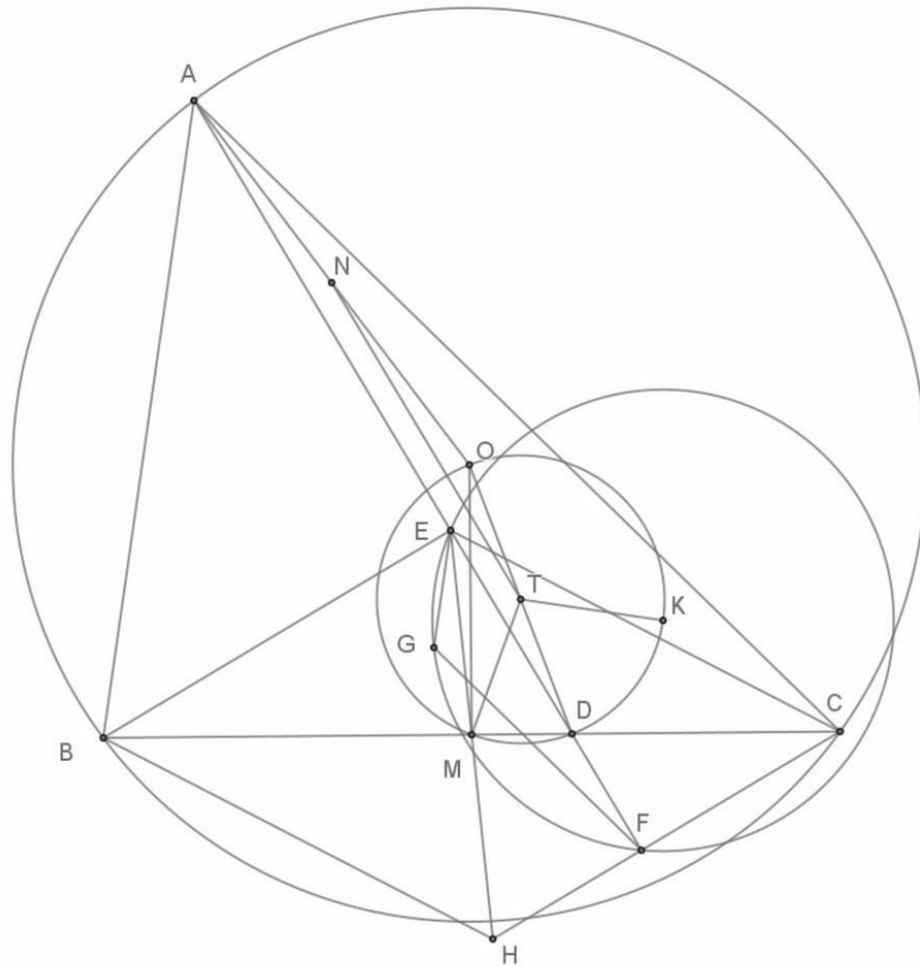
Kết hợp với $KE = KF$ ta có $MK \perp EF$.

Ta có $\angle EKF = 180^\circ - 2\angle EGF = 2\angle BAC = \angle BOC$ và $\frac{DB}{DC} = \frac{DE}{DF}$ do $BE \parallel CF$.

Vì thế $\triangle OBC \cup \{D\} \sim \triangle KEF \cup \{D\}$.

Do đó $\angle KDE = \angle ODB$ nên $\angle ODK = \angle ADB = \angle KMO$.

Vì vậy tứ giác $OMDK$ nội tiếp nên $\angle OKD = 90^\circ$.



- ② Gọi T là tâm của $(OMDK)$ thì T là trung điểm của OD .

Khi đó $NT \parallel AD$, mà $AD \perp MK$ nên $NT \perp MK$.

Mà $TM = TK$ nên NT là trung trực của MK hay $NM = NK$.

Bài toán 0.5. (LMF - Hà Tĩnh TST 2025 - P5)

An và Bình chơi trò chơi trên bảng 8×8 . Hai bạn thay phiên nhau đi. Mỗi bước, An đánh dấu một ô trống nào đó (chưa được đánh dấu bởi ai trước đó) bằng một domino (gồm hai ô kề nhau theo một cạnh). Bình được phép chọn và bỏ đi 2 ô bất kỳ nhưng phải bỏ cùng một bước domino sao cho hai ô đó vẫn kề nhau. Người bỏ đi không được bỏ domino đã bị bỏ đi ở bước trước. Người nào không thể đi được nữa thì thua. Hỏi ai có chiến lược thắng cuộc nếu:

- ① An là người đi trước?
- ② Bình là người đi trước?

Lời giải.

- ① Chia bảng 8×8 thành 16 bảng 2×2 . Ta sẽ chứng minh Bình là người chiến thắng.

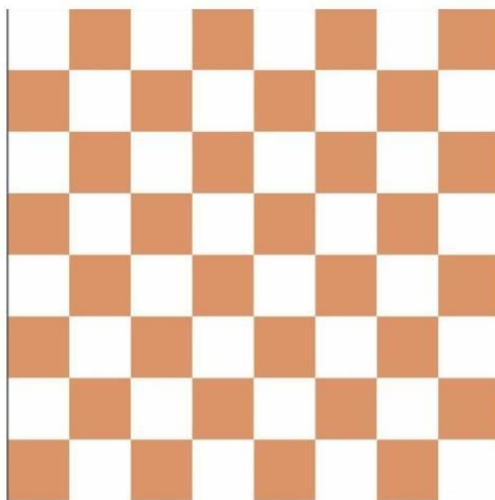
Nếu An đánh dấu một ô trong bảng 2×2 mà trước đó chưa có ô nào được đánh dấu, khi đó Bình sẽ đặt một quân domino chiếm hai ô (trong ba ô) còn lại trong bảng 2×2 đó.

Nếu An đánh dấu vào một bảng 2×2 đã có sẵn một ô được đánh dấu, lúc này An chỉ có thể đánh

dấu vào ô bên cạnh với ô đã đánh dấu trước đó do cách đặt domino của bạn Bình. Khi đó Bình đặt quân domino lên hai ô được đánh dấu đó.

Do đó, sau mỗi bước đi của An, Bình luôn có thể thực hiện một bước đi hợp lệ. Vì số ô trên bảng là hữu hạn nên trò chơi chắc chắn sẽ kết thúc, và khi đó Bình sẽ là người giành chiến thắng.

- ② Tô màu bảng vuông trắng đen xen kẽ nhau như hình vẽ.



Để ý mỗi quân domino của Bình sẽ chiếm đúng 1 ô đen.

Trong 16 lượt chơi đầu của mỗi bạn, Bình và An lần lượt đặt domino và đánh dấu ô đen trong bảng.

Khi đó tất cả các ô đen trên bảng đều đã bị tô hết, và lượt chơi thứ 17 của bạn Bình sẽ không thể đặt thêm quân domino nào nữa do An không đánh dấu hai ô kề nhau (vì hai ô đen không thể kề nhau). Do đó An sẽ là người giành chiến thắng.

Bài toán 0.6. (LMF - Hà Tĩnh TST 2025 - P6)

Với số nguyên dương n , kí hiệu $\tau(n)$ là số các ước số nguyên dương của n (kể cả 1 và n).

- ① Chứng minh rằng phương trình $\tau(n) = 2025$ có vô số nghiệm.
- ② Hãy tìm tất cả số nguyên dương k sao cho

$$\tau(n^2) = k\tau(n), \quad \text{với } n \text{ nguyên dương nào đó.}$$

Lời giải.

- ① Chọn $n = 2^2 3^2 5^2 7^2 11^4 p^4$ với số nguyên tố $p > 11$.

Khi đó $\tau(n) = (2+1)(2+1)(2+1)(2+1)(4+1)(4+1) = 2025$.

- ② Với $k = 1$ thì tồn tại $n = 1$ thỏa mãn, xét $k \geq 2$, khi đó nếu tồn tại n thì $n \geq 2$.

Viết phân tích thừa số nguyên tố của $n = p_1^{k_1} \dots p_t^{k_t}$ với $p_1 < p_2 < \dots < p_t$ là số nguyên tố.

Khi đó $k = \frac{\tau(n^2)}{\tau(n)} = \frac{(2k_1+1)\dots(2k_t+1)}{(k_1+1)\dots(k_t+1)}$ nên k là số lẻ.

Do đó nếu số nguyên dương k thỏa mãn yêu cầu đề bài thì k là số lẻ.

Ta sẽ chứng minh với mọi số nguyên dương k lẻ thì tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn yêu cầu đề bài bằng nguyên lý quy nạp (*).

Với $k = 3$ thì $n = 2^2 3^4$ thỏa mãn, giả sử (*) đúng với mọi số nguyên dương lẻ bé hơn $k \geq 3$.

Ta sẽ chứng minh (*) đúng với số nguyên dương k lẻ.

Viết $k + 1 = 2^t \cdot l$ với l lẻ và t tự nhiên, ta có:

$$\frac{(2^t - 1)k}{(2^t - 1)k + 1} \cdot \frac{(2^t - 1)k + 1}{(2^t - 1)k + 3} \cdot \frac{(2^t - 1)k + 3}{(2^t - 1)k + 7} \cdots \frac{(2^t - 1)k + 2^{t-1} - 1}{(2^t - 1)k + 2^t - 1} = \frac{k}{l}$$

Đặt $(2^t - 1)k = v_0$, $\frac{(2^t - 1)k + 1}{2} = v_1, \dots, \frac{(2^t - 1)k + (2^{t-1} - 1)}{2^{t-1}} = v_{t-1}$ và $\frac{(2^t - 1)k + 2^t - 1}{2^t} = v_t$.

Khi đó $\frac{v_i + 1}{2} = v_{i+1}$ với mọi $i = 0, 1, \dots, t - 1$.

Lấy $p_0 < p_1 < \dots < p_t$ là các số nguyên tố.

Để ý $l \leq k$ nên tồn tại số nguyên dương $m > p_0 + p_1 + \dots + p_{t-1}$ sao cho $l = \frac{\tau(m^2)}{\tau(m)}$.

$$\begin{aligned} \text{Vì vậy } k &= \frac{(v_0 - 1) + 1}{\frac{v_0 - 1}{2} + 1} \cdot \frac{(v_1 - 1) + 1}{\frac{v_1 - 1}{2} + 1} \cdots \frac{(v_{t-1} - 1) + 1}{\frac{v_{t-1} - 1}{2} + 1} \\ &= \frac{\tau\left(\left(\frac{v_0 - 1}{2}\right)^2\right)}{\tau\left(\frac{v_0 - 1}{2}\right)} \cdot \frac{\tau\left(\left(\frac{v_1 - 1}{2}\right)^2\right)}{\tau\left(\frac{v_1 - 1}{2}\right)} \cdots \frac{\tau\left(\left(\frac{v_{t-1} - 1}{2}\right)^2\right)}{\tau\left(\frac{v_{t-1} - 1}{2}\right)} \cdot \frac{\tau(m^2)}{\tau(m)} = \frac{\tau\left(\left(\frac{p_0 - 1}{2} \frac{p_1 - 1}{2} \cdots \frac{p_{t-1} - 1}{2} m\right)^2\right)}{\tau\left(\frac{p_0 - 1}{2} \frac{p_1 - 1}{2} \cdots \frac{p_{t-1} - 1}{2} m\right)}. \end{aligned}$$

Do đó (*) đúng với k nên theo nguyên lý quy nạp ta có (*) đúng.

Vì vậy mọi số nguyên dương k cần tìm là các số nguyên dương k lẻ.